République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.
Par

IMENE MECEMMA

Thème

Étude d'une classe de régularité d'ensembles et applications aux inclusions différentielles

Soutenue publiquement le 12/06/2024

Devant le jury composé de

Président :	A. Bouchair	Prof.	Université de Jijel
Directeur de thèse :	M.F. Yarou	Prof.	Université de Jijel
Co-directeur de thèse :	S. Lounis	M.C.A.	Université de Jijel
Examinateur :	M. Deneche	Prof.	Université de Constantine.1
	T. Hamaizia	Prof.	Université de Oum El Bouaghi

Année Universitaire : 2023/2024

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie à Allah tout-Puissant seul pour le plein succès.

Je tiens à exprimer ma grande appréciation et ma gratitude à mon directeur de thèse, le professeur **"Mustapha Fateh Yarou"**, professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir suggéré ce sujet de thèse captivant, ainsi pour son soutien, sa direction, ses conseils, ses commentaires constructifs et pour m'avoir fourni les informations nécessaires durant la réalisation de ce travail.

Je remercie très sincèrement le co-directeur de thèse, **"Lounis Sabrina"**, Maître de conférences A à l'université de Jijel, pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa modestie, son aide et pour avoir partagé avec moi beaucoup de connaissances dans le cadre de mes recherches.

Je remercie vivement le professeur **"Abderrahmane Bouchair "** professeur à l'université de Jijel, pour avoir accepté la responsabilité de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier les autres membres du jury **"Mohamed Deneche"** professeur à l'université de Constantine.1, **"Taieb Hamaizia"** professeur à l'université de Oum El Bouaghi, pour avoir accepté d'arbitrer ce travail et l'avoir enrichi de leurs précieux commentaires.

Dédicace

Je suis très heureux de dédier ce modeste travail :

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère.

À mon cher père, source de vie, qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études.

mes chers frères et sœurs, source de joie et de bonheur

À toi mon seul oncle ceci est ma profonde gratitude pour ton éternel amour .

À tous ceux qui m'ont aidée directement ou indirectement.

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragée et à qui je souhaite encore plus de succès.

Imene Mecemma

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو المساهمة في دراسة بعض فئات مشاكل التطور للإحتواءات التفاضلية التي تحكمها مؤثرات رتيبة أو شبه رتيبة وتحتوي على إضطرابات محدبة غير محدودة، ولا سيما مشكلة عملية الكنس من الرتبة الأولى والثانية مع مجموعات متحركة غير محدبة وغير محدودة في فضاء هلبرت ذات البعد غير منته والقابلة للفصل. يعتمد هذا النهج على خوارزمية اللحاق لمورو. من أجل التعامل مع فئة واسعة من المجموعات غير المحدودة، فإننا نفترض شرط الإقتطاع.

كلمات مفتاحية: الاحتواءات التفاضلية، التحليل غير تفاضي، عمليات الكنس، الإضطرابات، المجموعات غير المحدبة، الإقتطاع.

Abstract

The aim of this thesis is to contribute to the study of some classes of evolution problems for differential inclusions governed by monotone or hypomonotone operators and involving unbounded convex perturbations, in particular the first and second order sweeping process problem with unbounded non-convex moving sets in an infinite-dimensional separable Hilbert space. The approach is based on Moreau's catching-up algorithm. In order to deal with a large class of unbounded non-convex sets, we assume a truncated condition.

Key words: *Differential inclusions, subsmooth analysis, sweeping processes, perturbations, non-convex sets, truncation.*

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'apporter une contribution à l'étude de quelques classes de problèmes d'évolutions pour des inclusions différentielles régies par des opérateurs monotones ou hypo-monotones et contenant des perturbations convexes non-bornées, en particulier le problème du processus de la rafle du premier et second ordre avec des ensembles mobiles non-convexes non-bornés dans un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. L'approche est basée sur une adaptation de l'algorithme de rattrapage de Moreau. Afin de traiter une large classe d'ensembles non-convexes non-bornés, nous remplaçons la condition de façon absolument continue par une condition de troncature.

Mots clés : *Inclusions différentielles, analyse sous-lisse, processus de la rafle, perturbations, ensembles non-convexes, troncature.*

TABLE DES MATIÈRES

1 Préliminaires **9**

1.1 Analyse convexe 10

1.2 Distance de Hausdorff 11

1.3 Analyse multivoque 12

1.3.1 Multi-applications 12

1.3.2 Concepts de continuité des multi-applications 12

1.3.3 Mesurabilité des multi-applications 13

1.4 Quelques concepts de compacité 14

1.5 Analyse non lisse 15

1.6 Ensembles r-prox-règuliers 17

1.7 Ensembles sous-lisses 18

1.8 Quelques résultats utiles 19

2 Processus de rafle non-convexe du premier ordre avec des ensembles sous-lisses non-bornés **21**

2.1 Le problème général 22

2.2 Résultat principal 23

2.3 Application aux problèmes de complémentarité différentielle 31

2.3.1 Résultats auxiliaires 31

2.3.2 Exemple 33

3 Processus de rafle tronqué non-convexe du deuxième ordre 35

3.1 Introduction du chapitre 36

3.2 Résultats auxiliaires 36

3.3 Résultat d'existence pour un processus de rafle dépendant du temps et de l'état 40

3.3.1 Théorème d'existence 40

3.3.2 Application à une classe d'inégalités quasi-variationnelles . . 49

3.4 Résultat d'existence pour un processus de rafle dépendent conjointement du temps, de l'état et de la vitesse. 52

3.4.1 Théorème d'existence 52

3.4.2 Application à une classe d'inégalités quasi-variationnelles . . 67

Conclusion 69

Bibliographie 70

NOTATIONS GÉNÉRALES

- $co(A)$ L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble A.
- $\overline{co}(A)$ L'enveloppe convexe fermée de A.
- $\mathbb{B}$ La boule unité ouverte de H.
- $\overline{\mathbb{B}}$ La boule unité fermée de H.
- $B(x,r) = x + r\mathbb{B}$ La boule ouverte de centre x et de rayon r.
- $\overline{B}(x,r) = x + r\overline{\mathbb{B}}$ La boule fermée de centre x et de rayon r.
- $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers naturels.
- Y^* Dual topologique d'un espace Y.
- $(\cdot,\cdot)$ produit scalaire dans la dualité Y^*, Y.
- H L'espace de Hilbert.
- $\mathbb{R}^n$ L'espace euclidien de dimension finie n.
- $\mathscr{C}_H([0,T])$ L'espace de toutes les applications continues définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.
- $L^1_H([0,T])$ L'espace des applications Lebesgue intégrables à valeur dans H sur $[0,T]$.
- $L^2_H([0,T])$ L'espace des applications carré intégrables définies sur $[0,T]$ à valeur dans H.
- $L^\infty_H([0,T])$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeur dans H.

- $\mathscr{W}_H^{1,2}([0,T])$ L'espace des applications u définies sur $[0,T]$ à valeurs dans l'espace de Hilbert H, absolument continue ayant une dérivée première $\dot{u} \in L_H^2([0,T])$.
- $\mathscr{W}_H^{2,1}([0,T])$ L'espace des applications absolument continues sur $[0,T]$ à valeurs dans H, ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $L_H^1([0,T])$.
- p.p. Presque par tout.
- $s.c.s.$ Semi-continue supérieurement.
- $s.c.i.$ Semi-continue inférieurement.
- resp. Respectivement.
- $\delta(\cdot,A)$ Fonction indicatrice d'un ensemble A.
- $\mathbf{1}_A(\cdot)$ Fonction caractéristique d'un ensemble A.
- $\sigma(\cdot,A)$ Fonction support d'un ensemble A.
- $\mathrm{Proj}_A(\cdot)$ Projection sur l'ensemble A.
- $d_A(\cdot)$ Fonction distance à A.
- $\sigma(L_H^1([0,T]), L_H^\infty([0,T])$ La topologie faible définie sur $L_H^1([0,T])$.
- $\sigma(L_H^\infty([0,T]), L_H^1([0,T])$ La topologie faible* définie sur $L_H^\infty([0,T])$.

INTRODUCTION

Le processus de rafle est une classe très importante d'inclusions différentielles particulières, régies par un cône normal à un ensemble. Il a été introduit pour la première fois par J.J. Moreau dans les années 70, notamment dans une série d'articles, voir [55, 56]. Ce type de problème trouve des applications dans plusieurs domaines, tels que la mécanique, les planning en économétrie et les systèmes dynamiques non lisses. Le processus de la rafle est modélisé sous forme d'une inclusion différentielle de la manière suivante

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \text{ p.p. dans } [0,T],\ u(0) = u_0 \in C(0), \tag{1}$$

où $N_{C(t)}(\cdot)$ désigne ici le cône normal à l'ensemble $C(t)$. Ce processus peut être expliqué comme suit : le point $u(t)$ doit rester à l'intérieur de l'ensemble mobile $C(t)$, lorsque l'ensemble $C(t)$ se déplace, le point $u(t)$ est rattrapé par la frontière de $C(t)$ qui pousse vers l'intérieur, d'où le nom de rafle ou de balayage. Moreau a résolu le problème (1) en supposant que les ensembles $C(t)$ sont convexes, fermés et varient de manière absolument continue et en utilisant une nouvelle technique appelée "**l'algorithme de rattrapage**". Dans un nombre de contextes variés, plusieurs auteurs ont réalisé de nombreux travaux. Une première approche consiste à ajouter des perturbations, c'est-à-dire des forces externes appliquées au système. La perturbation peut être univoque ou multivoque, comme suit

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t,u(t)) \text{ p.p. dans } [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2}$$

Nous referons principalement le travail de C. Castaing, T.X. Duc Ha et M. Valadier [30] qui ont étudié l'existence de solutions en utilisant des ensembles convexes ou

leurs complémentaires. De plus, dans le travail de C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [29], les auteurs résolvent cette inclusion différentielle en supposant une hypothèse de croissance linéaire sur F et une condition de boule intérieure sur $C(t)$. Une amélioration importante a été apportée au processus de rafle en contournant l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$ grâce à la notion d'ensemble prox-régulier. Avec ce nouveau concept, plusieurs travaux ont été établis. Initialement, le cas sans perturbation a été étudié par G. Colombo, V.V. Goncharov [36] et H. Benabellah [15]. Par la suite, L. Thibault [63] et G. Colombo en collaboration avec M.D.P. Monteiro Marques [37] ont également étudié ce problème dans le contexte d'un espace de Hilbert.
Dans [22] M. Bounkhel et L. Thibault ont introduit de nouvelles caractérisations pour les ensembles uniformément prox-réguliers, en se basant sur les sous-différentiels des fonctions distance associées à ces ensembles. En utilisant ces caractéristiques, ils ont établi l'existence de solutions pour les processus de rafle non-convexes dans les espaces de Hilbert et avec des perturbations multivoques. Pour d'autres approches, voir par exemple [2, 3, 18, 23]

Lorsque les ensembles mobiles C dépendent du temps et de l'état, cela généralise le processus de rafle classique et donne naissance au processus de rafle dépendant de l'état. Il est décrit par le problème suivant

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)) + g(t, u(t)) \text{ p.p. dans } [0, T], \\ u(t) \in C(t, u(t)),\ u(0) = u_0 \in C(0, u_0). \end{cases} \tag{3}$$

Ce dernier a été introduit pour la première fois dans la thèse de K. Chraibi [33] avec $F, g \equiv 0$ pour un ensemble mobile convexe $C(t, u(t))$ et dans le cas où $H = \mathbb{R}^3$. Ce résultat a été généralisé par M. Kunze et M.D.P. Monteiro Marques [48], en utilisant le schéma implicite suivante

$$u^n_{i+1} = \mathrm{Proj}_{C(t^n_{i+1}, u^n_{i+1})}(u^n_i) \ \ et \ \ t^n_i = i\frac{T}{2^n},\ u^n_0 = u_0.$$

Récemment, N. Chemetov et M.D.P. Monteiro Marques [32] ont établi les premiers résultats concernant un ensemble mobile $C(t, u(t))$ uniformément prox-régulier à variation absolument continue dans l'espace et Lipschitzienne dans le temps avec $F \equiv 0$. En utilisant une version généralisée du théorème de Schauder, C. Castaing, A.G. Ibrahim et M.F. Yarou [28] ont présenté une approche pour prouver l'existence d'une solution de (3) à condition que $C(t, u(t))$ est prox-régulier et boule compacte et $F, g \equiv 0$, et pour le problème perturbé (même en présence d'un retard). Ces résultats ont été généralisés par [4, 5] aux ensembles equi-uniformément sous-lisse, qui ont été introduits pour la première fois par D. Aussel, A. Daniilidis et L. Thibault [14]. Depuis, dans le contexte des ensembles convexes et non-convexes, les processus de rafle dépendant de l'état ont été étudiés par plusieurs auteurs (voir [4, 5, 8, 27, 32, 57]). Dans [26], Castaing a introduit dans les célèbres "Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe de Montpellier" le concept de processus de rafle du second ordre par des ensembles convexes ou non-convexes, qui dépendent de la variable d'état comme suite

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(\dot{u}(t)) \text{ p.p. dans } [0,T] \\ \dot{u}(t) \in C(u(t)),\ \dot{u}_0 = v_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

De nombreux autres travaux ont maintenant généralisé les résultats de Castaing en affaiblissant les hypothèses et en ajoutant différentes perturbations au processus de la rafle (voir [6, 7, 9, 27, 52]).

Plusieurs travaux ont également prouvé des résultats d'existence pour un autre problème particulier de la forme

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(\dot{u}(t)) + F(t,u(t),\dot{u}(t)) \text{ p.p. dans } [0,T] \\ \dot{u}_0 = v_0 \in C(0,u_0). \end{cases} \tag{4}$$

C. Castaing, A.G. Ibrahim et M.F. Yarou ont établi dans [28] l'existence d'une solution de (4) à condition que la multi-application $C(\cdot,\cdot)$ soit Lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle $L > 0$

$$|d_{C(t,x)}(u) - d_{C(s,y)}(v)| \leq \|u-v\| + L(|t-s| + \|x-y\|) \tag{5}$$

pour tous u, v, x, y dans un espace de Hilbert H et $t, s \in [0,T]$. Cependant, il est difficile pour un ensemble non-borné de satisfaire cette hypothèse, puisque la distance de Hausdorff-Pompeiu entre deux ensembles non-bornés peut être égale à l'infini, par exemple, dans le cas d'un hyperplan de rotation. Cela conduit plusieurs chercheurs à affaiblir l'inégalité sur l'ensemble mobile sous diverses formes, notamment en remplaçant la distance de Hausdorff-Pompeiu par la distance de Hausdorff-Pompeiu tronquée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho(C(t,x), C(s,y)) &= \max\left\{ \sup_{u \in C(t,x)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}} d_{C(s,y)}(u), \sup_{v \in C(s,y)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}} d_{C(t,x)}(v) \right\} \\ &\leq L(|t-s| + \|x-y\|), \end{aligned}$$

pour un choix approprié de $\rho > 0$. Dans [1] les auteurs supposent un contrôle sur la distance de Hausdorff-Pompeiu, non pas sur l'ensemble des déplacements $C(\cdot,\cdot)$ seulement, mais entre les troncatures bornées de la forme $C(\cdot,\cdot) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}$ pour un certain réel $\rho > 0$ dépendant des données initiales. Pour d'autres approches, nous référons à [19, 20, 49, 57, 58, 65, 66].

L'ensemble des travaux de cette thèse constitue une contribution, dans la continuité des recherches précédentes, à l'étude de trois problèmes principaux liés au processus de rafle.

Dans le premier chapitre, nous dispensons des concepts fondamentaux et des résultats essentiels qui nous seront utiles ultérieurement. Ces concepts incluent des notions d'analyse multivoque, des notions d'analyse non lisse et la distance de Hausdorff-Pompeiu tronquée. Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle de premier ordre (3) impliquant un ensemble mobile non-borné et deux perturbations : l'un est multivoque et l'autre est univoque. En utilisant une approche de discrétisation et en introduisant la notion d'ensembles equi-uniformément sous-lisses, ce chapitre généralise les résultats déjà établis pour les ensembles convexes et ceux qui sont uniformément prox-réguliers. Ensuite, nous appliquons ce résultat à un problème de complémentarité. Le dernier chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section, nous étudions l'existence de solutions pour une classe de processus de rafle non-convexe du second ordre dans un espace de Hilbert de dimension infinie et une perturbation non-bornée. Ce processus est régi par le cône normal à un ensemble mobile non-borné dépendant à la fois du temps et de l'état et contrôlé par la distance de Hausdorff-Pompeiu tronquée. Dans la deuxième section, en conservant les mêmes conditions, nous démontrons l'existence d'une solution lorsque l'ensemble mobile dépend conjointement du temps, de l'état et de la vitesse. En guise d'application, nous illustrons ces résultats avec un exemple d'une classe d'inégalités quasi-variationnelles.

Quelques résultats de cette thèse ont été publiés en collaboration avec le professeur Mustapha Fateh Yarou et Lounis Sabrina Maître de conférences A, voir [50, 51].

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Sommaire

1.1 Analyse convexe 10

1.2 Distance de Hausdorff 11

1.3 Analyse multivoque 12

1.3.1 Multi-applications 12

1.3.2 Concepts de continuité des multi-applications 12

1.3.3 Mesurabilité des multi-applications 13

1.4 Quelques concepts de compacité 14

1.5 Analyse non lisse 15

1.6 Ensembles r-prox-règuliers 17

1.7 Ensembles sous-lisses 18

1.8 Quelques résultats utiles 19

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines définitions, propositions, ainsi que des théorèmes essentiels qui seront nécessaires tout au long de cette thèse.

– Comme d'habitude, H est un espace de Hilbert réel en général séparable, dont le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.
– La projection de x sur l'ensemble fermé A qu'on note $\mathrm{Proj}_A(\cdot)$, l'ensemble défini par
$$\mathrm{Proj}_A(x) := \Big\{ y \in A : \, d_A(x) = \|y - x\| \Big\},$$
où $d_A(x)$ la fonction distance du point x à l'ensemble A défini par
$$d_A(x) := \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$
– En outre, on appelle la fonction support de A et on la note $\sigma(\cdot, A)$, la quantité définie par
$$\sigma(x, A) := \sup_{y \in S} \langle x, y \rangle, \qquad \forall x \in H.$$
– $\delta(\cdot, A)$ (resp. $\mathbf{1}_A(\cdot)$) la fonction indicatrice (resp. la fonction caractéristique) de A, définie sur H par
$$\delta(x, A) := \begin{cases} 0 & si \ x \in A, \\ +\infty & si \ x \notin A. \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & si \ x \in A, \\ 0 & si \ x \notin A. \end{cases} \right)$$

1.1 Analyse convexe

Définition 1.1. *[67](**Ensemble convexe**)*
On dit qu'un sous-ensemble $S \subset H$ est convexe si
$$\forall x, \, y \in S, \; \forall \lambda \in [0, 1] : \quad \lambda x + (1 - \lambda) y \in S.$$

Définition 1.2. *[67](**Enveloppe convexe**)*
L'enveloppe convexe de $S \subset H$, notée $co(S)$ est l'intersection de tout les ensembles convexes contenant S, et c'est le plus petit convexe contenant S.
En d'autres termes, nous avons cette caractérisation
$$co(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \, n \geq 1, \, x_i \in S, \, \lambda_i \geq 0, \, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.3. *[67] (**Enveloppe convexe fermé**)*
L'enveloppe convexe fermée de $S \subset H$, notée $\overline{co}(S)$ est l'intersection de tout les ensembles convexes fermés contenant S, et c'est le plus petit convexe fermés contenant S.

1.2 Distance de Hausdorff

Dans cette section, nous présenterons quelques résultats concernant la distance de Hausdorff.

Définitions 1.1. *[10, 11, 31] Soient A et B deux sous-ensembles fermés de H et soit $\rho \in]0, +\infty]$*

- *On appelle* **écart** *entre A et B, que l'on note* $\mathbf{exc}(A, B)$, *la quantité définie par*
$$\mathrm{exc}(A, B) := \sup_{x \in A} d_B(x).$$
- *On appelle* **distance de Hausdorff** *entre A et B et on la note $\mathcal{H}(A, B)$, la quantité définie par*
$$\mathcal{H}(A, B) := \max\{\mathrm{exc}(A, B), \mathrm{exc}(B, A)\}.$$
- *On appelle* ρ-**écart** *entre A et B, que l'on note* $\mathbf{exc}_\rho(A, B)$, *la quantité définie par*
$$\mathrm{exc}_\rho(A, B) := \sup_{x \in A \cap \rho\overline{\mathbb{B}}} d_B(x).$$
- *On appelle* **distance de** ρ**-Hausdorff** *entre A et B et on la note $\mathcal{H}_\rho(A, B)$, la quantité définie par*
$$\mathcal{H}_\rho(A, B) := \max\Big\{\mathrm{exc}_\rho(A, B), \mathrm{exc}_\rho(B, A)\Big\}.$$

Remarques 1.1. *[11]*

(1) Si $\rho = +\infty$ on a $\rho\overline{\mathbb{B}} = H$. Alors
$$\mathrm{exc}_\infty(A, B) := \mathrm{exc}(A, B) \ \textit{ et } \ \mathcal{H}_\infty(A, B) := \mathcal{H}(A, B).$$

(2) Pour tout réel $\alpha > 0$, tel que $\mathrm{exc}_\rho(A, B) < \alpha$, on a
$$A \cap \rho\overline{\mathbb{B}} \subset B + \alpha\overline{\mathbb{B}}.$$

(3) Pour tout $x \in A \cap \rho\overline{\mathbb{B}}$ et $x' \in H$, il est facile de voir que
$$d_B(x') \leq \|x - x'\| + \mathrm{exc}_\rho(A, B),$$
où de façon équivalente
$$d_B(x') \leq d_{A \cap \rho\overline{\mathbb{B}}}(x') + \mathrm{exc}_\rho(A, B).$$

(4) Il faut noter que
$$\mathcal{H}_\rho(A, B) \leq \sup_{x \in \rho\overline{\mathbb{B}}} |d_A(x) - d_B(x)| := \hat{\mathcal{H}}_\rho(A, B).$$

1.3 Analyse multivoque

Dans cette section, nous abordons quelques concepts de base sur les multi-applications et les notions importantes de semi-continuité.

1.3.1 Multi-applications

Définition 1.4. *[31] Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou application multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui associe à chaque élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x) \subset Y$, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \longrightarrow P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*
On appelle domaine (resp. image et graphe) de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ et on note $\mathrm{D}(F)$ *(resp.* $\mathrm{Im}(F)$ *et* $\mathrm{gph}(F)$*) l'ensemble défini par*

$$\mathrm{D}(F) := \{x \in X \ / \ F(x) \neq \emptyset\},$$

$$(\textit{resp.} \ \ \mathrm{Im}(F) := \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(F)} F(x),$$

et

$$\mathrm{gph}(F) := \{(x, y) \in X \times Y \ : \ x \in \mathrm{D}(F), \ y \in F(x)\}).$$

1.3.2 Concepts de continuité des multi-applications

Définition 1.5. *[12] Soient X et Y des espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ et k un réel positif. On dit que F est k-Lipschitzienne si*

$$\mathcal{H}(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in X,$$

où d est la distance sur X.

Définition 1.6. *[40] Soient X et Y deux espaces topologiques.*

1. *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en $x_0 \in X$, si et seulement si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V, \ \forall x \in U$.*
2. *On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $x_0 \in X$, si et seulement si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \cap V \neq \emptyset, \ \forall \ x \in U$.*
3. *On dit que F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i. au point x_0.*
4. *On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.*

5. *On dit que F est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point $x \in X$.*
6. *On dit que F est continue sur X si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i. sur X.*

Proposition 1.1. *[40] Soient X et Y deux espaces topologiques. Une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est s.c.s. si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) := \{x \in X \,:\, F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermée pour tout sous-ensemble fermé C de Y, et elle est s.c.i. si et seulement si pour tout sous-ensemble ouvert G de Y, $F^{-1}(G)$ est aussi ouvert dans X.*

Proposition 1.2. *[12] Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application*

1. *Si F s.c.s. à valeurs fermées, alors $\mathrm{gph}(F)$ est fermé.*
2. *Soit Y un espace compact. Si $\mathrm{gph}(F)$ est fermé alors F est s.c.s.*
3. *Si F est s.c.s. à valeurs compact, avec X un espace compact. Alors, $F(X)$ compact.*

Définition 1.7. *[12] Soient X et Y deux espaces vectoriel normé. On dit que $F : X \rightrightarrows Y$ est scalairement s.c.s. si et seulement si pour tout $p \in Y^*$, la fonction $x \mapsto \sigma(F(x), p)$ est s.c.s.*

1.3.3 Mesurabilité des multi-applications

Soit (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique complet et séparable.

Définition 1.8. *[31] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert $U \subset X$, on a*

$$F^{-}(U) := \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Définition 1.9. *[31]* (***Sélection de multi-application***)
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F, toute fonction $f : X \to Y$, qui satisfait

$$f(x) \in F(x) \;\; \forall x \in X.$$

Théorème 1.1. *[13] Si F est Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

Définition 1.10. *[13]* (***Sélection minimale***)
Soit F une multi-application définie d'un espace métrique X à valeurs dans un espace de Banach Y. On définit la multi-application minimale de F par

$$m(F(x)) := \{u \in F(x) : \quad \|u\| = \min_{y \in F(x)} \|y\|\}.$$

Si F est une multi-application à valeurs fermées convexes et Y est un espace de Hilbert, alors la multi-application minimale $m(F(\cdot))$ se transforme en une fonction univoque connue sous le nom de sélection minimale, explicitement définie par

$$m(F(x)) = \mathrm{Proj}_{F(x)}(0).$$

Proposition 1.3. *[13] Soit X un espace métrique complet mesure σ-fini, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées convexes. Alors, la sélection minimale $m(F(\cdot))$ est mesurable.*

Définition 1.11. *[13]* ***(Fonction de Carathéodory)***
Soient X, Y deux espaces topologiques et (Ω, Σ) un espace mesurable. On dit que $f : \Omega \times X \longrightarrow Y$ c'est une fonction de Carathéodory, si

(i) Pour tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est Σ-mesurable.

(ii) Pour tout $t \in \Omega$, $f(t, \cdot)$ est continue.

1.4 Quelques concepts de compacité

Définition 1.12. *[16] Un espace métrique (Y, d) est dit compact si toute suite de d'élément de Y, on peut extraite une sous-suite qui converge.*

Définition 1.13. *[68] Un sous-ensemble S d'un espace topologique E est dit relativement compact si son adhérence dans E est compacte dans E.*

Définition 1.14. *[61] Soit X un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $S \in X$ est boule compacte si son intersection avec toute boule fermée de X est compacte.*

Théorème 1.2. *[12]* ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soit J un espace métrique compact, (Y, d) un espace métrique complet, et K un sous-ensemble de $\mathscr{C}_J(Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors, K est relativement compact si et seulement si K est équicontinue et $K(x)$ est relativement compact, avec

$$K(x) = \{f(x) : f \in K\}.$$

Théorème 1.3. *[61]* ***(Théorème de Dunford-Pettis)***
Soit H un espace de Hilbert. Tout ensemble bornée $k \subset L^1_H([0, T])$ uniformément intégrable est relativement faiblement compact.

Lemme 1.1. *[42]* ***(Lemme de Mazur)***
Soit E un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant

faiblement vers x. Alors, il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, ...$) convergeant fortement vers x.

Théorème 1.4. *[13]* ***(Théorème de séparation)***
Soit A un sous-ensemble non vide dans espace vectoriel normé Y, Alors

$$\overline{co}(A) = \{x \in Y : \forall x' \in Y^*, \, (x', x) \leq \sigma(x', A)\},$$

où $(\cdot, \cdot)$ produit scalaire dans la dualité Y^*.

1.5 Analyse non lisse

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base sur sous-différentiels, les cônes tangents et les cônes normaux, qui sont des outils essentiels dans l'étude des processus de rafle.

Théorème 1.5. *[21]* ***(Sous-différentiabilité)***
Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, tel que

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in H \;\; f(x) < +\infty\}.$$

- *On appelle sous-différentiel de f au point x_0 qu'on note $\partial f(x_0)$, l'ensemble défni par*

$$\partial f(x_0) := \{\zeta \in H : \quad \langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \, \forall x \in H\}.$$

- *On dit que f est sous-différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*

Définition 1.15. *[21] Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in dom(f)$. Alors*

(a) La dérivée directionnelle au sens de Clarke de f en x_0 dans la direction $v \in H$, noté $f^\circ(x_0; v)$, est définie par

$$f^\circ(x_0; v) := \limsup_{x \to x_0, t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

où x est un vecteur de H et t un scalaire positif.

(b) Le sous-différentiel de Clarke de f en x_0, noté $\partial^C f(x_0)$ est défini par

$$\partial^C f(x_0) := \{\zeta \in H : \; f^\circ(x_0, v) \geq \langle \zeta, h \rangle, \, \forall v \in H\}.$$

(c) Le sous-différentiel Proximal de f en x_0, noté $\partial^P f(x_0)$ et défini comme l'ensemble de tous les éléments $\zeta \in H$ tels qu'il existe deux constantes réelles positives δ, $\lambda \geq 0$ vérifient

$$\langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \lambda \|x - x_0\|^2, \; x \in x_0 + \delta \overline{\mathbb{B}}.$$

(d) *Le sous-différentiel Fréchet de f en x_0, noté $\partial^F f(x_0)$ et définie comme l'ensemble de tous les éléments $\zeta \in H$ tels qu'il existe deux constantes réelles positives δ, $\lambda \geq 0$ vérifient*

$$\langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \lambda \|x - x_0\|, \; x \in x_0 + \delta\overline{\mathbb{B}}.$$

Remarquons que nous avons toujours,

$$\partial^P f(x_0) \subset \partial^F f(x_0) \subset \partial^C f(x_0).$$

Définition 1.16. *[21] Soit S un ensemble non vide d'un espace de Hilbert H et $x \in S$. On appelle*

(a) *Cône tangent de Clarke à S au point x, noté $T_S^C(x)$, l'ensemble défini par*

$$T_S^C(x) := \{v \in H : \quad d_S^\circ(x; v) = 0\}.$$

(b) *Cône normal au sens de Clarke à S au point x noté $N_S^C(x)$, l'ensemble défini par*

$$N_S^C(x) := \Big\{\zeta \in H : \langle \zeta, \, v \rangle \leq 0, \forall v \in T_S^C(x)\Big\}.$$

Il est connu aussi comme le sous-différentiel de Clarke de la fonction indicatrice

$$\partial^C \delta_S(x) = N_S^C(x).$$

(c) *Cône normal Proximal à S au point x qu'on noté $N_S^P(x)$, l'ensemble défini par*

$$N_S^P(x) := \Big\{\zeta \in H : \exists \kappa > 0 \;\; tel\, que \;\; x \in \mathrm{Proj}_S(x + \kappa\zeta)\Big\}.$$

Il est connu aussi comme le sous-différentiel Proximal de la fonction indicatrice

$$\partial^P \delta_S(x) = N_S^P(x).$$

(d) *Cône normal de Fréchet de S au point x noté $N_S^F(x)$, l'ensemble défini par*

$$N_S^F(x) := \Big\{\zeta \in H : \langle \zeta, \, x' - x \rangle \leq \epsilon \|x' - x\| \;\; tel\, que \;\; x' \in x + \epsilon\mathbb{B}\Big\}.$$

Il est connu aussi comme le sous-différentiel Fréchet de la fonction indicatrice

$$\partial^F \delta_S(x) = N_S^F(x).$$

Remarque 1.1. *[34] Si S est convexe on définit*

$$N_S^C(x) = \Big\{\zeta \in H : \langle \zeta, \, x' - x \rangle \leq 0, \forall x' \in S\Big\}.$$

Remarque 1.2. *[35] $\zeta \in N_S^P(x)$ si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\langle \zeta, \, x' - x \rangle \leq M \|x' - x\|^2 \;\; \forall x' \in S.$$

Proposition 1.4. *[21] Soit S un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Hilbert H et x un point dans S. On a toujours*

1. $\partial^F d_S(x) = N_S^F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}, \quad \partial^P d_S(x) = N_S^P(x) \cap \overline{\mathbb{B}}$ *et* $\partial^C d_S(x) \subset N_S^C(x) \cap \overline{\mathbb{B}}$.
2. *Si* $y \in \mathrm{Proj}_S(x)$, *alors*

$$x - y \in N_S^P(y), \;\; x - y \in N_S^F(y) \;\; \textit{et ainsi} \;\; x - y \in N_S^C(y).$$

Remarque 1.3. *[21] Si S convexe, alors tous les cônes mentionnés ci-dessus coïncident*

$$N_S^C(x) = N_S^P(x) = N_S^F(x).$$

1.6 Ensembles r-prox-règuliers

La notion de prox-régularité a été définie pour la première fois par H. Federer [43] en 1959 sous le terme " Positive Reached set" dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Par la suite, cette notion a été généralisée aux espaces de Hilbert par F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern et P.R. Wolenski [34] en 1990, puis développée par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar et L. Thibault [60] en 2000 et finalement adaptée aux espaces de Banach par F. Bernard, L. Thibault et N. Zlateva [17].
Présentons quelques résultats fondamentaux concernant la prox-régularité. Dans cette partie, $r > 0$ et $U_r(S)$ est r-tube ouvert de S, c'est-à-dire

$$U_r(S) = \{x \in H, d_S(x) < r\}.$$

Définition 1.17. *[60] Soit S est un sous-ensemble fermé de H et $r > 0$, on dit que S est $r-$prox-régulier (ou uniformément prox-régulier), si pour tout $x \in S$ et tout $0 \neq v \in N_S^P(x)$ on a*

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, y - x \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \parallel y - x \parallel^2, \quad \forall y \in S.$$

Pour $r = +\infty$ dans ce cas, l'uniforme r-prox-régularité de l'ensemble fermé S est équivalente à la convexité de l'ensemble S.

Nous présentons maintenant quelques propriétés concernant la prox-régularité.

Proposition 1.5. *[60] Soit $r \in]0, +\infty]$ et soit S un sous-ensemble fermé non vide r-prox-régulier de H. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) *Pour tout $x \in H$ tel que $d_S(x) < r$, l'ensemble $\mathrm{Proj}_S(x)$ est un singleton.*

(b) *L'ensemble $\mathrm{Proj}_S : U_r(S) \longrightarrow S$ est bien défini et localement Lipschitzien sur $U_r(S)$.*

(c) *Pour tout* $u \in U_r(S) \setminus S$, *et* $x = \mathrm{Proj}_S(u)$, *on a*

$$x = \mathrm{Proj}_S\left(x + t\frac{u-x}{\|u-x\|}\right) \qquad \forall t \in [0, r[.$$

(c) *Pour tout* $x \in S$, *on a*

$$N_S^P(x) = N_S^C(x) \quad et \quad \partial^P d_S(x) = \partial^C d_S(x).$$

(e) *Pour tout* $x \in S$, *on a*

$$\partial^C d_S(x) = N_S^C(x) \cap \overline{\mathbb{B}}.$$

1.7 Ensembles sous-lisses

Maintenant, nous introduisons une nouvelle classe d'ensemble, via le concept des ensembles sous lisses.

Définition 1.18. *[14, 64]*

- *On dit qu'un sous-ensemble fermé non vide* S *de* H *est sous-lisse en* $x_0 \in H$ *si, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq -\varepsilon\|x - y\|, \tag{1.1}$$

pour tous $x, y \in S \cap \overline{B}(x_0, \delta)$ *et pour tous* $x^* \in N_S^C(x) \cap \overline{\mathbb{B}}$ *et* $y^* \in N_S^C(y) \cap \overline{\mathbb{B}}$.

- *On dit que* S *est sous-lisse lorsqu'il est sous-lisse en tout point de* S.
- *On dit que* S *est uniformément sous-lisse, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que* (1.1) *est vérifiée pour tous* $x, y \in H$ *satisfaisant* $\|x - y\| < \delta$, *pour tout* $x^* \in N_S^C(x) \cap \overline{\mathbb{B}}$ *et tout* $y^* \in N_S^C(y) \cap \overline{\mathbb{B}}$.

La proposition suivante donne la régularité au sens de Fréchet des ensembles sous-lisses.

Proposition 1.6. *[64] Soit* S *un sous-ensemble fermé d'un espace de Hilbert* H, *si* S *est sous-lisse au point* $x_0 \in S$ *alors*

$$\partial^C d_S(x_0) = \partial^F d_S(x_0) \ \ et \ \ N_S^C(x_0) = N_S^F(x_0).$$

Ensuite, nous donnons la définition d'equi-uniformément sous-lisse, pour une famille d'ensembles.

Définition 1.19. *[64] Soit Q un sous-ensemble et soit $(S(q))_{q\in Q}$ une famille d'ensembles fermés de H. Cette famille est dite equi-uniformément sous-lisse, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour chaque $q \in Q$, l'inégalité (1.1) est vérifiée pour tous $x, y \in S(q)$ satisfaisant $\|x - y\| < \delta$ et pour tous $x^* \in N_S^C(x) \cap \overline{\mathbb{B}}$, $y^* \in N_S^C(y) \cap \overline{\mathbb{B}}$.*

La proposition suivante correspond à la propriété de la s.c.s. scalaire du sous-différentiel de la fonction distance.

Proposition 1.7. *[44] Soit $\{S(t,u) : (t,u) \in [0,T] \times H\}$ une famille d'ensembles non vides fermés de H qui est equi-uniformément sous-lisse et soit ρ un nombre réel positif. Supposons qu'il existe des constantes réelles $L_1, L_2 \geq 0$ telles que, pour tous $u, v \in H$ et tous $t, s \in [0,T]$ avec $s \leq t$.*

$$\mathrm{exc}(S(t,u), S(s,v)) \leq L_1|t-s| + L_2 \parallel u - v \parallel .$$

Alors

(a) Pour tout $(s,u,y) \in gph(C)$, on a $\rho\partial^C d_{S(s,u)}(y) \subset \rho\overline{\mathbb{B}}$.

(b) La multi-application à valeurs convexe faiblement compactes $(s,u) \mapsto \partial^C d_{S(s,u)}(y)$ vérifie la propriété de s.c.s. : pour toute suite $(s_n)_n$ dans $[0,T]$ convergeant vers s, toute suite $(u_n)_n$ convergeant vers u, toute suite $(y_n)_n$ convergeant vers $y \in S(s,u)$ avec $y_n \in S(s_n,u_n)$ et n'importe quelle $\zeta \in H$, on a

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sigma(\zeta, \rho\partial^C d_{S(s_n,u_n)}(y_n)) \leq \sigma(\zeta, \rho\partial^C d_{S(s,u)}(y)).$$

1.8 Quelques résultats utiles

Définition 1.20. *[52] On définit la variation de la fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$ dans un sous-intervalle J de $[0,T]$ par l'expression suivante*

$$\mathrm{var}(u,J) := \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|,\ n \in \mathbb{N},\ t_i \in J,\ t_0 < t_1 < ... < t_n\}.$$

La fonction u est dite à variation bornée sur $[0,T]$ si et seulement si $\mathrm{var}(u,[0,T]) < +\infty$.

Théorème 1.6. *[52] Soit (u_n) une suite de fonctions définies de l'intervalle $I = [0,T]$, à valeurs dans H. Supposons que les assertions suivantes sont satisfaites*

- *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|u_n(t)\| \leq M,\ \ \forall t \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

- *Il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$\mathrm{var}(u_n, I) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, il existe une fonction $u : I \to H$ à variation bornée sur I et une sous-suite (u_{n_k}) de $(u_n)_n$ telle que (u_{n_k}) converge faiblement vers u.

Lemme 1.2. *[46]* (***Lemme de Gronwall discret***) *Soit $\alpha > 0$ et soient $(b_n), (\beta_n)$ deux suites positives vérifiant*

$$b_n \leq \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k b_k \quad \textit{pour } n = 0, 1, 2, \cdots$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n \leq \alpha \, e^{\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k}.$$

Remarque 1.4. *Dans la suite, pour les ensembles uniformément prox-réguliers ou sous-lisses, nous adoptons la notation ∂d_S (resp. N_S) pour le sous-différentiel (resp. le cône) de Clarke (de Fréchet et Proximal.)*

CHAPITRE

2

PROCESSUS DE RAFLE NON-CONVEXE DU PREMIER ORDRE AVEC DES ENSEMBLES SOUS-LISSES NON-BORNÉS

Sommaire

2.1 Le problème général **22**

2.2 Résultat principal **23**

2.3 Application aux problèmes de complémentarité différentielle **31**

2.3.1 Résultats auxiliaires 31

2.3.2 Exemple 33

2.1 Le problème général

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour le processus de rafle évolution de la forme

$$(\mathcal{S})\begin{cases}-\dot{u}(t)\in N_{C(t,u(t))}(u(t))+F(t,u(t))+g(t,u(t)) \quad \text{p.p.} \quad t\in[0,T],\\ u(t)\in C(t,u(t)) \;\; \text{pour tout } t\in[0,T],\\ u(0)=u_0,\end{cases}$$

où $C : [0,T]\times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs fermées non vides, $F : [0,T]\times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs convexes fermées non vides et $g : [0,T]\times H \longrightarrow H$ est une fonction de Carathéodory. Le problème $(\mathcal{S})$ a été étudie dans [57] en supposant que la multi-application F satisfait la condition de croissance linéaire, c'est-à-dire, qu'il existe une constante $\beta>0$ telle que

$$F(t,x)\subset\beta(1+\|x\|)\overline{\mathbb{B}},$$

pour tout $t\in[0,T]$ et tout $x\in\underset{(t,a)\in I\times H}{\cup}C(t,a)$. De plus, la multi-application C été supposée uniformément r-prox-régulière et à valeurs bornées, c'est-à-dire, il existe $\rho>0$ tel que

$$C(t,x)\subset\rho\overline{\mathbb{B}},$$

pour chaque $(t,x)\in[0,T]\times H$.
L'auteur résout ce problème en utilisant l'algorithme de rattrapage de Moreau suivant

$$\begin{cases}u_{i+1}^n := \operatorname{Proj}_{C(t_{i+1}^n,u_i^n)}\left(u_i^n-(t_{i+1}^n-t_i^n)f_i^n-\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}g(\tau,u_i^n)d\tau\right),\\ f_i^n\in F(t_i^n,u_i^n), \;\; u_0^n=u_0.\end{cases}$$

Notre objectif principal de ce chapitre est de fournir un résultat d'existence pour le problème $(\mathcal{S})$ impliquant des ensembles sous-lisses non nécessairement bornés. La classe des ensembles sous-lisses contient strictement la classe des ensembles prox-réguliers et décrit un comportement variationnel d'ordre un. De plus, nous affaiblissons les hypothèses sur la perturbation en prenant une fonction de Carathéodory satisfaisant une condition de croissance linéaire et la perturbation F est scalairement s.c.s. à valeurs fermées non-bornées, pour laquelle seul l'élément de norme minimale satisfait à une condition de croissance linéaire, nous mentionnons que la mesurabilité de $\operatorname{Proj}_{F(\cdot,u)}(0) : [0,T]\to H$ permet de construire une solution du problème $(\mathcal{S})$ par le biais de l'algorithme de rattrapage de Moreau approprié suivant

$$u_{i+1}^n\in\operatorname{Proj}_{C(t_{i+1}^n,u_i^n)}\left(u_i^n-\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f+g)(\tau,u_i^n)d\tau\right).$$

Nous montrons que cette approche peut être adaptée pour obtenir l'existence de solutions à $(\mathcal{S})$.

2.2 Résultat principal

Considérons la multi-application $C : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ à valeurs fermées non vides satisfaisant les conditions suivantes

($\mathcal{A}_{C_1}$) La famille $\{C(t,x); (t,x) \in [0,T] \times H\}$ est equi-uniformément sous-lisse.

($\mathcal{A}_{C_2}$) Il existe $L_1 \geq 0$ et $0 \leq L_2 < 1$ tel que, pour chaque $(t,y),(\tau,x) \in [0,T] \times H$

$$\mathrm{exc}(C(\tau,x),C(t,y)) \leq L_1|t-\tau| + L_2\|x-y\|.$$

($\mathcal{A}_{C_3}$) Pour tout sous-ensemble borné A de H, l'ensemble $C([0,T] \times A)$ est boule compacte.

Soit $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées et scalairement s.c.s. par rapport à la deuxième variable x pour presque tout $t \in [0,T]$ et vérifiant

($\mathcal{A}_F$) Pour chaque $x \in H$, l'application $\mathrm{Proj}_{F(\cdot,x)}(0) : [0,T] \to H$ est mesurable et il existe un réel $\beta > 0$, tel que

$$d_{F(t,x)}(0) \leq \beta(1+\|x\|) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Considérons aussi une fonction $g : [0,T] \times H \to H$ satisfait

($\mathcal{A}_g$) g est une fonction de Carathéodory et pour une certaine constant réel $\alpha > 0$,

$$\|g(t,x)\| \leq \alpha(1+\|x\|),$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in H$.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{A}_{C_1}) - (\mathcal{A}_g)$ sont satisfaites, alors pour chaque $u_0 \in H$ avec $u_0 \in C(0,u_0)$, il existe une application Lipschitzienne $u : [0,T] \longrightarrow H$ satisfaisant $(\mathcal{S})$. De plus, pour chaque $t \in [0,T]$*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)(1+\Delta)}{1-L_2},$$

avec $\Delta := \left\{\|u_0\| + T\frac{L_1+2(\alpha+\beta)}{1-L_2}\right\} e^{2T\dfrac{\alpha+\beta}{1-L_2}}$.

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition de l'intervalle $I = [0,T]$,

$$t_i^n = ih_n,\ h_n = \frac{T}{n} \ \text{ if } \ i \in \{0,...,n\}, \tag{2.1}$$

et l'ensemble

$$I_i^n = [t_i^n, t_{i+1}^n[, \quad \text{for } \ i \in \{0,...,n-1\}.$$

Pour chaque $(t,u) \in I \times H$, notons par $f(\cdot,\cdot)$ l'élément de norme minimal de l'ensemble convexe fermé $F(t,u)$ de H définie par $f(t,u) := \mathrm{Proj}_{F(t,u)}(0)$ et par

$h(\cdot,\cdot)$ la somme des deux applications f et g, c'est-à-dire, $h(t,u) = f(t,u)+g(t,u)$. Alors, ceci implique que

$$\| h(t,u) \| \leq (\alpha+\beta)(1+ \| u \|). \tag{2.2}$$

Étape 1 : Construisons u_0^n, u_1^n, .., u_{n-1}^n dans H tel que, pour chaque $i = \{0, ..., n\}$ les inclusions suivantes sont satisfaites

$$u_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_i^n), \tag{2.3}$$

$$u_{i+1}^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h(\tau, u_i^n) d\tau \right), \tag{2.4}$$

ainsi que les inégalités suivantes

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \Delta, \tag{2.5}$$

et

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq h_n \left(\frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)(1+\Delta)}{1-L_2} \right).$$

En utilisant la boule compacité de $C(t_1^n, u_0^n)$, on peut choisir

$$u_1^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_1^n, u_0^n)} \left(u_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} h(\tau, u_0^n) d\tau \right),$$

et donc $u_1^n \in C(t_1^n, u_0^n)$. De plus, en utilisant l'hypothèse $(\mathcal{A}_{C_2})$, les relations (2.1) et (2.2), on trouve que

$$\begin{aligned}
\|u_1^n - u_0^n\| &\leq \left\| u_1^n - \left(u_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} h(\tau, u_0^n) d\tau \right) \right\| + \int_{t_0^n}^{t_1^n} \|h(\tau, u_0^n)\| d\tau \\
&\leq d_{C(t_1^n, u_0^n)} \left(u_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} h(\tau, u_0^n) d\tau \right) + (t_1^n - t_0^n)(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|) \\
&\leq d_{C(t_1^n, u_0^n)}(u_0^n) + \int_{t_0^n}^{t_1^n} \|h(\tau, u_0^n)\| d\tau + (t_1^n - t_0^n)(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|) \\
&\leq \mathrm{exc}(C(t_0^n, u_0^n), C(t_1^n, u_0^n)) + 2(t_1^n - t_0^n)(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|) \\
&\leq L_1(t_1^n - t_0^n) + 2(t_1^n - t_0^n)(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|),
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|u_1^n - u_0^n\| \leq (t_1^n - t_0^n)(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|)), \tag{2.6}$$

alors

$$\|u_1^n - u_0^n\| \leq (t_1^n - t_0^n) \frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|)}{1-L_2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|u_1^n\| \leq \|u_1^n - u_0^n\| + \|u_0^n\| &\leq h_n \frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)(1+\|u_0^n\|)}{1-L_2} + \|u_0^n\| \\
&\leq h_n \frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)}{1-L_2} + h_n \frac{2(\alpha+\beta)}{1-L_2} \|u_0^n\| + \|u_0^n\| \\
&\leq \left\{ \|u_0^n\| + h_n \frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)}{1-L_2} \right\} \left(1 + 2h_n \frac{\alpha+\beta}{1-L_2} \right),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|u_1^n\| \leq \left\{\|u_0^n\| + T\frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)}{1-L_2}\right\} e^{2T\dfrac{\alpha+\beta}{1-L_2}} = \Delta.$$

Supposons maintenant que les points $u_0^n, ..., u_i^n$ ont été construits, pour $0, ..., i$, avec $i \leq n-1$. D'après la boule compacité de $C(t_{i+1}^n, u_i^n)$, on peut choisir

$$u_{i+1}^n \in \operatorname{Proj}_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h(\tau, u_i^n) d\tau\right),$$

et par suite $u_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_i^n)$. De plus, en utilisant $(\mathcal{A}_{C_2})$, (2.1) et (2.2), on trouve que

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq \left\|u_{i+1}^n - \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h(\tau, u_i^n) d\tau\right)\right\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|h(\tau, u_i^n)\| d\tau \\
&\leq d_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h(\tau, u_i^n) d\tau\right) + (t_{i+1}^n - t_i^n)(\alpha+\beta)(1 + \|u_i^n\|) \\
&\leq d_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(u_i^n) + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|h(\tau, u_i^n)\| d\tau + (t_{i+1}^n - t_i^n)(\alpha+\beta)(1 + \|u_i^n\|) \\
&\leq \operatorname{exc}(C(t_{i+1}^n, u_i^n), C(t_i^n, u_{i-1}^n)) + 2(t_{i+1}^n - t_i^n)(\alpha+\beta)(1 + \|u_i^n\|) \\
&\leq L_1(t_{i+1}^n - t_i^n) + L_2\|u_i^n - u_{i-1}^n\| + 2(t_{i+1}^n - t_i^n)(\alpha+\beta)(1 + \|u_i^n\|) \\
&\leq h_n(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_i^n\|)) + L_2\|u_i^n - u_{i-1}^n\|,
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq h_n(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_i^n\|)) + h_n L_2(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_{i-1}^n\|)) \\
+ L_2^2\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, en déduit que

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq h_n \sum_{m=1}^{i} L_2^{i-m}(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_m^n\|)) + L_2^i\|u_1^n - u_0^n\|.$$

L' inégalité (2.6) nous donne

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq h_n \sum_{m=1}^{i} L_2^{i-m}(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_m^n\|)) + L_2^i h_n(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_0^n\|)) \\
&\leq h_n \sum_{m=0}^{i} L_2^{i-m}(L_1 + 2(\alpha+\beta)(1 + \|u_m^n\|)) \\
&\leq h_n\left(\frac{L_1 + 2(\alpha+\beta)}{1-L_2} + 2(\alpha+\beta)\sum_{m=0}^{i} L_2^{i-m}\|u_m^n\|\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $i = 0, \cdots, n-1$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + ... + \|u_1^n - u_0^n\| + \|u_0^n\| \\
&\leq \|u_0^n\| + \sum_{k=0}^{i} \|u_{k+1}^n - u_k^n\|,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_0^n\| + \sum_{k=0}^{i}\left(h_n \frac{L_1+2(\alpha+\beta)}{1-L_2} + 2h_n(\alpha+\beta)\sum_{m=0}^{k} L_2^{k-m}\|u_m^n\|\right)\\
&\leq \|u_0^n\| + h_n(i+1)\frac{L_1+2(\alpha+\beta)}{1-L_2} + 2h_n(\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{i}\left(\sum_{m=0}^{k} L_2^{k-m}\right)\|u_m^n\|\\
&\leq \|u_0^n\| + h_n(i+1)\frac{L_1+2(\alpha+\beta)}{1-L_2} + 2h_n(\alpha+\beta)\sum_{m=0}^{i}\left(\sum_{k=m}^{i} L_2^{k-m}\right)\|u_m^n\|\\
&\leq \left\{\|u_0^n\| + T\frac{L_1+2(\alpha+\beta)}{1-L_2}\right\} + 2h_n\frac{\alpha+\beta}{1-L_2}\sum_{m=0}^{i}\|u_m^n\|.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.2, on obtient pour $i = 0, ..., n-1$

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \left\{\|u_0^n\| + T\frac{L_1+2(\alpha+\beta)}{1-L_2}\right\} e^{2T\dfrac{\alpha+\beta}{1-L_2}} = \Delta,$$

par conséquent

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq h_n \frac{L_1+2(\alpha+\beta)(1+\Delta)}{1-L_2} := h_n\Lambda. \tag{2.7}$$

Étape 2 : On construit les suites des fonctions $(u_n(\cdot))_n, (\theta_n(\cdot))_n, (\gamma_n(\cdot))_n$ de I à valeurs dans H. Pour chaque $i = 0, ..., n-1$, on définit $\theta_n(\cdot), \gamma_n(\cdot) : I \longrightarrow H$ par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & if \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \\ t_1^n & if \quad t = 0, \end{cases} \qquad \gamma_n(t) = \begin{cases} t_i^n & if \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ t_n^n = T & if \quad t = T, \end{cases} \tag{2.8}$$

et $u_n : I \to H$, par

$$u_n(t) = \begin{cases} u_i^n & if \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ u_n^n & if \quad t = T. \end{cases} \tag{2.9}$$

Observons tout d'abord que, pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} |\theta_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} (t_{i+1}^n - t_i^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{T}{n} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |\gamma_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} (t - \gamma_n(t)) = \lim_{n\to+\infty} (t_{i+1}^n - t_i^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{T}{n} = 0.$$

Étape 3 : On va démontrer que la suite $u_n(\cdot)$ converge vers une fonction $u(\cdot)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par les relations (2.5) et (2.9), on remarque que

$$\|u_n(t)\| \leq \Delta \qquad \forall\, t \in I,$$

à partir de (2.7), on a

$$\text{var}(u_n; I) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq n h_n \Lambda = n\frac{T}{n}\Lambda = T\Lambda.$$

D'après le Théorème 1.6, il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (notée aussi $(u_n)_n$) et une fonction u à variation bornée telle que

$$u_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \text{ faiblement dans } H \quad \forall t \in I. \tag{2.10}$$

Montrons maintenant que $u(\cdot)$ est Lipschitzienne.
Pour tout $p, q \in \{0, ..., n\}$ et $t, s \in I$, avec $t \leq s$. Alors, $t \in [t_p^n, t_{p+1}^n[$ et $s \in [t_q^n, t_{q+1}^n[$. En utilisant (2.7) et (2.9) on trouve que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_p^n - u_q^n\| \\ &\leq \|u_p - u_{p+1}\| + \|u_{p+1} - u_{p+2}\| + ... + \|u_{q-2} - u_{q-1}\| + \|u_{q-1} - u_q\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{q-p-1} \|u_{p+k+1}^n - u_{p+k}^n\| \leq \Lambda \sum_{k=0}^{q-p+1} (t_{p+k+1}^n - t_{p+k}^n) \leq \Lambda(t_q^n - t_p^n) \\ &\leq \Lambda(|t-s| + |s - t_q^n| + |t_p^n - t|) \leq \Lambda(|t-s| + 2\frac{T}{n}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant la convergence faiblement de u_n vers u, on obtient

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq \Lambda(|t-s|),$$

et par conséquent, $u(\cdot)$ est Lipschitzienne sur I et on a

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \lim_{\substack{s\to t\\ s\neq t}} \left\| \frac{u(s) - u(t)}{s-t} \right\| \leq \Lambda \qquad \text{p.p. } \forall t \in I.$$

Il clair que $u_n(\cdot)$ est équicontinue. De plus, supposons que l'ensemble $\psi(t) = \{u_n(t) : \ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H. En effet, grâce à (2.3) et (2.8), on a

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), u_n(\gamma_n(t))).$$

D'autre part, on déduit par (2.5), que

$$(u_n(\theta_n(t)))_n \subset C(I \times \Delta\overline{\mathbb{B}}) \cap \Delta\overline{\mathbb{B}}.$$

En utilisant le fait que $C(I \times \Delta\overline{\mathbb{B}}) \cap \Delta\overline{\mathbb{B}}$ est relativement compact, car l'ensemble $C(I \times \Delta\overline{\mathbb{B}}) \cap \Delta\overline{\mathbb{B}}$ est une boule compacte, alors $(u_n(\theta_n(t)))_n$ est relativement compact. Par (2.11) on trouve que

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \leq \Lambda \left(\theta_n(t) - t + 2\frac{T}{n}\right) \to 0, \quad as \quad n \to \infty.$$

Ainsi, l'ensemble $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans H et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, on conclut donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}_H(I)$, et par suite on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément vers u.

Étape 04 : Montrons, maintenant que $u(\cdot)$ est solution du problème $(\mathcal{S})$. Remarquons que, d'après la condition initiale ($u_n(0) = u_0^n = u_0$), (2.9) et (2.10) on a $u(0) = u_0$. De plus, $u(t) \in C(t, u(t))$. En effet,

$$\begin{aligned} d_{C(t,u(t))}(u_n(\theta_n(t))) &\leq \operatorname{exc}(C(\theta_n(t), u_n(\gamma_n(t))), C(t, u(t))) \\ &\leq L_1 \frac{T}{n} + L_2 \|u_n(\gamma_n(t)) - u(t)\|, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\|u_n(\gamma_n(t)) - u(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et puisque $C(t, u(t))$ est fermé, on obtient $u(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in I$.

On définit maintenant l'application $v_n : I \longrightarrow H$, pour chaque $i \in \{0, ..., n-1\}$, par

$$v_n(t) := u_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h(\tau, u_i^n) d\tau \right) - \int_{t_i^n}^{t} h(\tau, u_i^n) d\tau.$$

Remarquons, par les définitions de u_n et v_n et les relations (2.2), (2.5) et (2.7), que pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$\begin{aligned} &\|v_n(t) - u(t)\| \leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|h(\tau, u_i^n)\| d\tau \right) + \int_{t_i^n}^{t} \|h(\tau, u_i^n)\| d\tau + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + (\alpha + \beta)(1 + \Delta) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} d\tau \right) + (\alpha + \beta)(1 + \Delta) \int_{t_i^n}^{t} d\tau \\ &\qquad + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq (t - t_i^n) (\Lambda + 2(\beta + \alpha)(1 + \Delta)) + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \frac{T}{n} (\Lambda + 2(\beta + \alpha)(1 + \Delta)) + \|u_n(t) - u(t)\|. \end{aligned}$$

Puisque u_n converge uniformément vers u, on conclut alors que

$$v_n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{pour tout} \;\; t \in I.$$

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, ..., n-1\}$, $v_n(\cdot)$ est différentiable sur $]t_i^n, t_{i+1}^n[$ et

$$\dot{v}_n(t) + h(t, u_i^n) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h(s, u_i^n) ds}{t_{i+1}^n - t_i^n},$$

par conséquent

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \Lambda + 2(\alpha + \beta)(1 + \Delta) := m \quad \text{p.p.} \quad t \in I. \tag{2.12}$$

Considérons maintenant les applications ξ_n, $\vartheta_n : I \longrightarrow H$ définies par

$$\xi_n(t) := f(t, u_n(\delta_n(t))) \quad \text{et} \quad \vartheta_n(t) := g(t, u_n(\delta_n(t))) \quad \text{pour tout} \;\; t \in I.$$

En se basant sur les définitions de f et g, on obtient pour tout $t \in I$

$$\|\xi_n(t)\| \leq \alpha(1 + \Delta) \quad \text{et} \quad \|\vartheta_n(t)\| \leq \beta(1 + \Delta). \tag{2.13}$$

On conclut donc que

$$\|\dot{v}_n(t) + \vartheta_n(t) + \xi_n(t)\| \leq m + (\alpha + \beta)(1 + \Delta) = l \ \text{ p.p. } \ t \in I.$$

En utilisant (2.4), la Proposition 1.4 et la régularité normale de Fréchet pour les ensembles sous-lisse, on trouve que

$$\dot{v}_n(t) + \vartheta_n(t) + \xi_n(t) \in -N_{C(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) \text{ p.p. } \ t \in I,$$

par conséquence

$$\dot{v}_n(t) + \vartheta_n(t) + \xi_n(t) \in -N_{C(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) \cap l\overline{\mathbb{B}} \text{ p.p. } \ t \in I. \tag{2.14}$$

En utilisant (2.14), la Proposition 1.4, on obtient

$$\dot{v}_n(t) + \vartheta_n(t) + \xi_n(t) \in -l\partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\gamma_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) \ \text{ p.p. } t \in I,$$

et

$$\xi_n(t) \in F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))).$$

À partir de (2.13), on conclut que $\xi_n(\cdot)$ converge faiblement dans $L^1_H(I)$ vers une application $\xi(\cdot) \in L^1_H(I)$ telle que $\|\xi(t)\| \leq \alpha(1 + \Delta)$, et par l'hypothèse de continuité sur $g(\cdot, u(\cdot))$, on déduit que $\vartheta_n(\cdot)$ converge vers l'application $\vartheta(\cdot) = g(\cdot, u(\cdot))$ dans $L^1_H(I)$.
De plus, par l'inégalité (2.12) signifie que la suit $(\dot{v}_n(\cdot))$ converge faiblement dans $L^1_H(I)$ vers une application $\varphi(\cdot) \in L^1_H(I)$. En utilisant le fait que $v_n(\cdot)$ une fonction absolument continue, on obtient

$$v_n(t) = v_n(0) + \int_0^t \dot{v}_n(s)ds \quad \text{pour tout } \ t \in I,$$

en passant à la limite lorsque n tend vers ∞, on trouve que $u(t) = u(0) + \int_0^t \varphi(s)ds$, et par conséquent $\dot{u}(\cdot) = \varphi(\cdot)$ p.p. sur I. Ce qui implique que $\dot{v}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{u}(\cdot)$ dans $L^1_H(I)$.
D'autre part, comme $(\dot{v}_n + \vartheta_n + \xi_n, \xi_n)_n$ converge faiblement dans $L^1_H(I)$ vers $(\dot{u} + \vartheta + \xi, \xi)$ alors d'après le lemme de Mazur, il existe une suite $(\omega_n, \varpi_n)_n$ qui converge fortement dans $L^1_H(I)$ vers $(\dot{u} + \vartheta + \xi, \xi)$ avec

$$\omega_n \in co\{\dot{v}_m + \vartheta_m + \xi_m : m \geq n\} \ \ et \ \ \varpi_n \in co\{\xi_m : m \geq n\},$$

ce qui montre que, on peut extraire de $(\omega_n, \varpi_n)_n$ une sous-suite qui converge p.p. vers $(\dot{u} + \vartheta + \xi, \xi)$. Donc, il existe un ensemble négligeable $S \subset I$ tel que, pour tout $t \in I \setminus S$, on a

$$\dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t) \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{co}\{\dot{v}_m(t) + \vartheta_m(t) + \xi_m(t) \ : m \geq n\},$$

et

$$\xi(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{\xi_m(t) : m \geq n\}.$$

Il résulte que, pour tout $t \in I \setminus S$, et tout $y \in H$, on a

$$\langle y, \dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t)\rangle \leq \sigma(y, l\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\gamma_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))),$$

et

$$\langle y, \xi_n(t)\rangle \leq \sigma(y, F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))),$$

ce qui implique que, pour chaque $t \in I$ et $y \in H$, on a

$$\langle y, \dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t)\rangle \leq \sup_{m\geq n}\langle y, \dot{v}_m(t) + \vartheta_m(t) + \xi_m(t)\rangle \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et

$$\langle y, \xi(t)\rangle \leq \sup_{m\geq n}\langle y, \xi_m(t)\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\langle y, \dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t)\rangle \leq \inf_n \sup_{m\geq n}\langle y, \dot{v}_m(t) + \vartheta_m(t) + \xi_m(t)\rangle \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et

$$\langle y, \xi(t)\rangle \leq \inf_n \sup_{m\geq n}\langle y, \xi_m(t)\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui montre, pour chaque $t \in I$,

$$\langle y, \dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t)\rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sigma\left(y, -l\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\gamma_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et

$$\langle y, \xi(t)\rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sigma\left(y, F(\delta_n(t), u_n(t))\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, d'après la Proposition 1.7, pour tout $t \in I$,

$$\langle y, \dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t)\rangle \leq \sigma\left(y, l\partial d_{C(t,u(t))}(u(t))\right),$$

et en utilisant le fait que $F(\cdot,\cdot)$ est scalairement s.c.s., on a

$$\langle y, \xi(t)\rangle \leq \sigma\left(y, F(t, u(t))\right) \quad \forall\, y \in H,$$

ce qui assure que

$$\{\dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t)\} \subset \overline{co}(-l\partial d_{C(t,u(t))}(u(t))) \quad \text{p.p.} \quad t \in I,$$

et

$$\xi(t) \in \overline{co}(F(t, u(t))) \;\; \text{p.p.} \;\; t \in I,$$

en utilisant le fait que les multi-applications $\partial d_C(\cdot)$ et $F(\cdot, u)$ sont à valeurs convexes fermé, on trouve que

$$\dot{u}(t) + \vartheta(t) + \xi(t) \in -l\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)) \subset -N_{C(t,u(t))}(u(t)) \;\; \text{p.p.} \;\; t \in I,$$

et

$$\xi(t) \in F(t, u(t)).$$

Ceci complète la démonstration. ■

Le corollaire ci-dessous est une conséquence directe du Théorème 2.1.

Corollaire 2.1. *Soit $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs non vides fermées convexes dans $\mathbb{R}^n$ telle que $F(t, \cdot)$ est scalairement s.c.s. sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant $(\mathcal{A}_F)$. Supposons que les hypothèses $(\mathcal{A}_{C_1})$, $(\mathcal{A}_{C_2})$ et $(\mathcal{A}_g)$ sont satisfaites. Alors, pour tout $u_0 \in H$ et $u_0 \in C(0, u_0)$, il existe une application Lipschitzienne $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $(\mathcal{S})$ avec $\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{L_1+2(\alpha+\beta)(1+\Delta)}{1-L_2}$ p.p.*

2.3 Application aux problèmes de complémentarité différentielle

Dans cette section, nous illustrons comment le corollaire 2.1 peut être appliqué à un cas particulier du processus de rafle. Les applications réelles peuvent être trouvées dans le problème de complémentarité différentielle, qui peut être écrit comme des processus de rafle perturbés. [53, 54] Moreau a introduit les conditions de complémentarité dans le contexte dynamiques lagrangiennes en dimension finie. Ces conditions sont utilisées pour modéliser des systèmes mécaniques soumis à des contraintes unilatérales, en utilisant les outils d'analyse convexe. Cette extension du principe de Gauss offre une meilleure compréhension de ces systèmes, qui sont constitués d'équation différentielle ordinaire couplée à des conditions de complémentarité. Il forment une classe de systèmes dynamiques non lisses utiles en génie mécanique et électrique ainsi qu'en optimisation et dans d'autres domaines. Pour plus de détails, on réfère à [25, 24].

2.3.1 Résultats auxiliaires

Nous commençons par construire plusieurs opérateurs qui seront utilises plus tard.

Soit S un ensemble fermé, on dit que S est Fréchet-normalement régulier si $N_S^F(x) = N_S^C(x)$.

Pour tout $x \in S$. En particules, si S est fermé convexe, alors il est Fréchet normalement régulier.

Définition 2.1. *[38] Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application différentiable et $x \in h^{-1}(S)$. On dit que l'ensemble d'images inverse S à la propriété d'image inverse du cône normal uniforme à $x \in h^{-1}(S)$, s'il existe un certain $\beta > 0$ tel que*

$$N_{h^{-1}(S)}(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq Jh(x)^* \Big[N_S(h(x)) \cap \beta \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \Big].$$

Présentons maintenant quelques propositions importantes qui nous seront utiles dans ce qui suit.

Proposition 2.1. *[59] Soient $x, y \in H$ et soit S un cône convexe fermé non vide de H. Alors*

$$S^* \ni x \perp y \in S \iff -x \in N_S(y),$$

telle que $S^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle v, y \rangle \geq 0, \ v \in S\}$ représente le cône dual, et la notation "$\perp$" signifie orthogonalité.

Proposition 2.2. *[45] Soient $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un cône convexe fermé et $y \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq Jh(x)\beta\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} - S \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.15}$$

où Jh est la matrice Jacobienne. Alors l'ensemble $h^{-1}(S - y)$ est Fréchet normalement régulier et

$$N_{h^{-1}(S-y)}(x) = [Jh(x)]^* N_S(h(x) + y).$$

Proposition 2.3. *[47] Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable avec Jh uniformément continue. Supposons que l'ensemble $S(t) \subset \mathbb{R}^n$ est convexe pour tout $t \in [0, T]$ et satisfait la propriété d'image inverse du cône normal uniforme, alors la famille $h^{-1}(S)$ est equi-uniformément sous-lisse.*

Proposition 2.4. *[47] Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un cône convexe fermé et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. Considérons les assertion suivantes*

i) Il existe $\beta > 0$ tel que

$$\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq Jh(x)\beta\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} - S.$$

ii) Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

$$d_{h^{-1}(S-v)}(x) \leq \beta d_S(h(x) + v).$$

iii) Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

$$N_{h^{-1}(S-v)}(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq Jh(x)^* \Big[N_S(h(x) + v) \cap \beta\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \Big].$$

Alors, $i) \Longrightarrow ii) \Longrightarrow iii)$.

2.3.2 Exemple

Appliquons les résultats précédents pour montrer l'existence d'une solution pour le problème dynamique non-lisse suivant

$$(\mathcal{AS})\begin{cases}\dot{u}(t) = g(t,u(t)) + f(t,u(t)) + [Jh(u(t))]^* x(t)\\ y(t) = h(u(t)) + \phi(t,u(t))\\ K \ni y(t) \perp x(t) \in K^*\\ u(0) = u_0,\end{cases}$$

tel que $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait $(\mathcal{A}_g)$, $f(t,u(t)) \in F(t,u(t))$ tel que $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées scalairement s.c.s. satisfait $(\mathcal{A}_F)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe fermé de cône dual K^*, $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction Lipschitzienne de constante $k_d < \frac{1}{k'}$ dont k' qui sera ultérieurement choisit et $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable telle que la matrice jacobienne associée Jh est uniformément continue et satisfait l'hypothèse (2.15).
D'après la Proposition 2.1, on peut récrire la troisième condition dans $(\mathcal{AS})$ sous la forme

$$-x(t) \in N_K(y(t)),$$

d'où

$$-[Jh(u(t))]^* x(t) \in [Jh(u(t))]^* N_K(h(u(t)) + \phi(t,u(t))),$$

et donc

$$\begin{aligned}-f(t,u(t)) - g(t,u(t)) - [Jh(u(t))]^* x(t) \in [Jh(u(t))]^* N_K(h(u(t)) + \phi(t,u(t)))\\ -f(t,u(t)) - g(t,u(t)).\end{aligned}$$

D'après la première relation de $(\mathcal{AS})$ on obtient

$$\dot{u}(t) \in -[Jh(u(t))]^* N_K(h(u(t)) + \phi(t,u(t))) + f(t,u(t)) + g(t,u(t)),$$

et par suite par la Proposition 2.2, on trouve que

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + f(t,u(t)) + g(t,u(t)),$$

avec $C(t,u(t)) := h^{-1}(K - \phi(t,u(t)))$. Pour démontrer que l'ensemble $C(t,u(t)) = h^{-1}(K - \phi(t,u(t)))$ est equi-uniformément sous-lisse, on utilise la Proposition 2.3. Il suffit donc de montrer que $K - \phi(t,u(t))$ satisfait la propriété de l'image inverse du cône normal uniforme, c'est-à-dire, il suffit de montrer que

$$N_{h^{-1}(K-\phi(t,u(t)))}(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq Jh(x)^* \Big[N_K(h(x) + \phi(t,u(t))) \cap \beta \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \Big],$$

pour $\beta > 0$. On sait qu'il existe $k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \subseteq kJh(x)\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} - K,$$

donc par la Proposition 2.4 on obtient la propriété de l'image inverse du cône normal uniforme avec $\beta = k$ et par conséquent $h^{-1}(K - \phi(t, u(t)))$ est uniformément sous-lisse.
Montrons maintenant que $C(t, u(t))$ satisfait l'hypothèse $(\mathcal{A}_{C_2})$. Pour ce but, on doit démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soit $h : \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}$ une fonction continûment différentiable telle que Jh est uniformément continue et soit K est un cône convexe fermé tel que* (2.15) *est satisfaite. Alors, la multi-application $v \rightrightarrows h^{-1}(K - v)$ est $k'-$Lipschitz continue pour tout $k' > k$.*

Preuve. Puisque K est un cône, alors d'après (2.15) et la Proposition 2.4, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d_{h^{-1}(K-v)}(x) \leq kd_K(h(x) + v).$$

Soit v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^n$ et $x \in h^{-1}(K - v_1)$. Alors,

$$d_{h^{-1}(K-v_2)}(x) \leq kd_K(h(x) + v_2) \leq k\|v_2 - v_1\|.$$

Par conséquent, pour $\epsilon < k' - k$, il existe $x_\epsilon \in h^{-1}(K - v_2)$ telle que

$$\|x - x_\epsilon\| \leq d_{h^{-1}(K-v_2)}(x) + \epsilon\|v_2 - v_1\|,$$

et par conséquent

$$\|x - x_\epsilon\| \leq (k + \epsilon)\|v_2 - v_1\| \leq k'\|v_2 - v_1\|,$$

il résulte que

$$h^{-1}(K - v_1) \subset h^{-1}(K - v_2) + k'\|v_2 - v_1\|,$$

ce qui complète la preuve de la proposition. ■

Montrons maintenant que $(\mathcal{A}_{C_2})$ est satisfaite. Soient (τ, u), $(t, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ avec $\tau < t$

$$\begin{aligned}
\operatorname{exc}\Big(C(\tau, u), C(t, w)\Big) &\leq \mathcal{H}\Big(C(\tau, u), C(t, w)\Big) \\
&= \sup_{v \in \mathbb{R}^n} |d_{C(\tau,u)}(v) - d_{C(t,w)}(v)| \\
&\leq k'\Big[\|\phi(\tau, u) - \phi(t, w)\|\Big] \\
&\leq k'k_d\Big[(t - \tau) + \|u - w\|\Big],
\end{aligned}$$

d'où $(\mathcal{A}_{C_2})$ est satisfaite. Alors, d'après le Corollaire 2.1, le problème $(\mathcal{AS})$ a une solution.

CHAPITRE

3

PROCESSUS DE RAFLE TRONQUÉ NON-CONVEXE DU DEUXIÈME ORDRE

Sommaire

3.1 Introduction du chapitre 36

3.2 Résultats auxiliaires 36

3.3 Résultat d'existence pour un processus de rafle dépendant du temps et de l'état 40

3.3.1 Théorème d'existence 40

3.3.2 Application à une classe d'inégalités quasi-variationnelles 49

3.4 Résultat d'existence pour un processus de rafle dépendent conjointement du temps, de l'état et de la vitesse. 52

3.4.1 Théorème d'existence 52

3.4.2 Application à une classe d'inégalités quasi-variationnelles 67

3.1 Introduction du chapitre

Le but de ce chapitre est d'établir quelques résultats d'existence de solutions pour un processus de rafle non-convexe tronqué dans un espace de dimension infinie. Notre approche est basée sur l'algorithme de rattrapage de Moreau.
Tout d'abord, on va étudier le résultat concernant l'existence de solutions du problème suivant

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(\dot{u}(t)) - F(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0,T], \\ u(T_0) = u_0, \dot{u}(T_0) = v_0 \in C(T_0,u_0), \end{cases}$$

où la perturbation multivoque F définie sur $[T_0,T] \times H \times H$ est s.c.s. à valeurs non vides convexes fermées dans H, et l'ensemble non-borné $C(t,u(t))$ dépendant du temps et de l'état et contrôlé par la distance tronquée de Hausdorff-Pompeiu au lieu de la distance Hausdorff-Pompeiu. Par conséquent, notre hypothèse de base repose sur le comportement Lipschitzien de l'ensemble mobile $C(\cdot,\cdot)$. Autrement dit, nous supposons qu'il existe un réel $L \geq 0$, tel que

$$\mathcal{H}_\rho(C(t,x), C(s,y)) \leq L\Big(|t-s| + \|x-y\|\Big) \quad \text{pour tous} \quad x,y \in H.$$

Il est évident que ce type d'hypothèse de continuité Lipschitzienne est plus réalisable que l'hypothèse classique pour l'ensemble mobile non-borné.
Dans la Section 3.4, on considère la variante suivante du processus de rafle

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t),\dot{u}(t))}(\dot{u}(t)) - F(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0,T], \\ u(T_0) = u_0, \dot{u}(T_0) = v_0 \in C(T_0,u_0,v_0), \end{cases}$$

où l'ensemble mobile C non-convexe non-borné est uniformément prox-régulier, dépend conjointement du temps, de l'état et de la vitesse et également contrôlé par une distance de Hausdorff-Pompeiu tronquée. L'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_2)$ a été établie, en utilisant la méthode donnée par Castaing, Ibrahim et Yarou [28] pour montrer l'existence de solutions pour des ensembles uniformément prox-réguliers et boule compacte $C(t,u(t))$ avec variation absolument continue dans le temps pour le problème perturbé. Ensuite, on généralise ce résultat en supposant que C est uniformément sous-lisse.
Comme une application, nous allons appliquer les résultats précédents pour une classe d'inégalités variationnelles.

3.2 Résultats auxiliaires

À présent, nous présentons quelques résultats qui se révéleront utiles pour la suite de cette étude.

Définition 3.1. *Soit S un sous-ensemble convexe non vide de H. On dit que la fonction $f : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est $\sigma-$semiconvexe sur S pour un certains $\sigma \in \mathbb{R}^+$ si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \frac{\sigma}{2}t(1-t)\|x-y\|^2,$$

pour tous x, $y \in S$ et pour tout $t \in]0,1[$.

Proposition 3.1. *[57] Soient C_1 et C_2 deux sous-ensembles r-prox-réguliers dans H avec $r > 0$, et soient aussi $\alpha \in]0,1[$, $\delta \in [0,+\infty[$, et $\mathcal{H}_{r\alpha+\delta}(C_1, C_2) \leq r$. Alors, pour tout $x \in U_{r\alpha}(C_1) \cap U_{r\alpha}(C_2) \cap \delta\overline{\mathbb{B}}$, on a*

$$\|\mathrm{Proj}_{C_1}(x) - \mathrm{Proj}_{C_2}(x)\| \leq \left(\frac{2\alpha r}{1-\alpha}\mathcal{H}_{r\alpha+\delta}(C_1, C_2)\right)^{1/2}.$$

Proposition 3.2. *[52] Soient C_1 et C_2 deux sous-ensembles convexes fermés non vides de H et $x \in H$. Alors, on a*

$$\|\mathrm{Proj}_{C_1}(x) - \mathrm{Proj}_{C_2}(x)\| \leq 2(d_{C_1}(x) + d_{C_2}(x))\mathcal{H}(C_1, C_2).$$

Lemme 3.1. *[39]* (***Théorème du point fixe de Schauder***)
Soit S un sous-ensemble convexe fermée bornée et non vide de H et $F : S \rightrightarrows S$ une application continue. Si F relativement compacte, alors F admet un point fixe.

Avant de donner une variante du Proposition 4.1. dans [22], concernant la s.c.s. scalaire du sous-différentiel proximal de la fonction distance, nous donnerons les lemmes suivants.

Lemme 3.2. *[58] Soit U un sous-ensemble ouvert de H, $x \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. S'il existe un réel $\delta > 0$ avec $B(x,\delta) \subset U$ tel que f est σ-semiconvexe sur $B(x,\delta)$ pour un réel $\sigma \geq 0$. Alors, pour tout $h \in \overline{\mathbb{B}}$, on a*

$$f^\circ(x;h) = \inf_{t \in]0,\sigma[} t^{-1}\left[f(x+th) - f(x) + \frac{\sigma}{2}(\|x+th\|^2 - \|x\|^2)\right] - \sigma\langle x, h\rangle = f'(x;h).$$

Lemme 3.3. *[57] Soit S un sous-ensemble r-prox-régulier de H pour un certain $r \in]0,+\infty]$. Alors, pour chaque $s \in]0,r[$, on a pour tout $(x,h) \in S \times \overline{\mathbb{B}}$*

$$\begin{aligned} d_S^\circ(x;h) &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} d_S(x+th) \\ &= \inf_{t \in]0,s[} t^{-1}\left[d_S(x+th) + \frac{1}{2(r-s)}(\|x+th\|^2 - \|x\|^2)\right] - \frac{1}{r-s}\langle x, h\rangle. \end{aligned}$$

Proposition 3.3. *Soit $r > 0$, pour tout $(t,x) \in [T_0,T] \times H$, $C(t,x)$ un sous-ensemble fermé non vide de H qui est r-prox-régulier. Supposons qu'il existe $\rho \in]0,+\infty]$ et $L \in [0,+\infty[$ tel que*

$$\mathcal{H}_\rho(C(\tau,x), C(t,y)) \leq L\Big(|\tau - t| + \|x-y\|\Big) \quad \textit{pour tous} \quad \tau,\, t \in [T_0,T].$$

Soient $\bar{t} \in [T_0, T]$, $\overline{x} \in H$ *et* $\overline{y} \in C(\bar{t}, \overline{x}) \cap \rho\mathbb{B}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $[\bar{t}, T]$ *avec* $t_n \to \bar{t}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* H *avec* $x_n \to \overline{x}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* H *avec* $y_n \to \overline{y}$ *et* $y_n \in C(t_n, x_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$\limsup_{n\to\infty} d^\circ_{C(t_n,x_n)}(y_n; h) \leq d^\circ_{C(\bar{t},\overline{x})}(y; h) \quad \textit{pour tout} \quad h \in H.$$

Preuve. Soit $\delta \in]0, r[$ et $h \in \overline{\mathbb{B}}$. Puisque $C(\bar{t}, \overline{x})$ est un sous-ensemble r-prox-régulier, donc par la Proposition 1.5, l'application $\mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}$ est bien définie sur $U_r(C(\bar{t}, \overline{x}))$ et continue, donc

$$\lim_{y\to\overline{y}} \mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}(y) = \mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}(\overline{y}) = \overline{y} \in \rho\mathbb{B},$$

alors

$$\mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}(y) \in \rho\mathbb{B},$$

donc, on peut trouver un nombre réel $\alpha \in]0, \delta[$ tel que pour tout $y \in B(\overline{y}, \alpha)$, on a

$$\mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}(y) \in \rho\overline{\mathbb{B}}.$$

En utilisant la dernière inclusion, on obtient

$$\begin{aligned} d_{C(\bar{t},\overline{x})}(y) &= \|y - \mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}(y)\| \\ &\leq d_{C(\bar{t},\overline{x})\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(y) \\ &\leq \|y - \mathrm{Proj}_{C(\bar{t},\overline{x})}(y)\| = d_{C(\bar{t},\overline{x})}(y), \end{aligned}$$

et par suite

$$d_{C(\bar{t},\overline{x})}(y) = d_{C(\bar{t},\overline{x})\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(y) \quad \textit{pour tout } y \in B(\overline{y}, \alpha),$$

D'après le Lemme 3.3, on obtient

$$d^\circ_{C(t_n,x_n)}(y_n; h) \leq \tau^{-1} d_{C(t_n,x_n)}(y_n + \tau h) + \frac{\tau^{-1}}{2(r-\delta)}(\|y_n + \tau h\|^2 - \|y_n\|^2) - \frac{1}{r-\delta}\langle y_n, h\rangle, \tag{3.1}$$

et puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tau \in]0, \alpha[$, on a

$$d_{C(t_n,x_n)}(y_n + \tau h) \leq d_{C(t_n,x_n)}(\overline{y} + \tau h) + \|y_n - \overline{y}\|,$$

alors, par les Remarques 1.1, on trouve que

$$d_{C(t_n,x_n)}(y_n + \tau h) \leq d_{C(\bar{t},\overline{x})\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(\overline{y} + \tau h) + exc_\rho(C(\bar{t}, \overline{x}), C(t_n, x_n)) + \|y_n - \overline{y}\|,$$

d'où

$$d_{C(t_n,x_n)}(y_n + \tau h) \leq d_{C(\bar{t},\overline{x})\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(\overline{y} + \tau h) + L\Big(|\bar{t} - t_n| + \|\overline{x} - x_n\|\Big) + \|y_n - \overline{y}\|,$$

par conséquent

$$\limsup_{n\to\infty} \tau^{-1} d_{C(t_n,x_n)}(y_n + \tau h) \leq \tau^{-1} d_{C(\bar{t},\overline{x})}(\overline{y} + \tau h). \tag{3.2}$$

D'autre part, pour tout $\tau \in]0, \alpha[$, on a

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{r-\delta}\langle y_n, h\rangle + \frac{1}{2(r-\delta)\tau}(\|y_n+\tau h\|^2 - \|y_n\|^2) \right] \\
&= -\frac{1}{r-\delta}\langle \overline{y}, h\rangle + \frac{1}{2(r-\delta)\tau}(\|\overline{y}+\tau h\|^2 - \|\overline{y}\|^2) \\
&= -\frac{1}{r-\delta}\langle \overline{y}, h\rangle + \frac{1}{2(r-\delta)\tau}(\langle \overline{y}+\tau h, \overline{y}+\tau h\rangle - \langle \overline{y}, \overline{y}\rangle) \\
&= -\frac{1}{r-\delta}\langle \overline{y}, h\rangle + \frac{1}{2(r-\delta)\tau}(\langle \overline{y}, \tau h\rangle + \langle \tau h, \overline{y}\rangle + \tau\|h\|^2) \\
&= \tau\frac{1}{2(r-\tau)}\|h\|^2. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Donc par (3.1),(3.2) et (3.3) on obtient, pour tout $\tau \in]0, \alpha[$

$$\limsup_{n\to+\infty} d^{\circ}_{C(t_n,x_n)}(y_n; h) \leq \tau^{-1} d_{C(\bar{t},\overline{x})}(\overline{y}+\tau h) + \tau\frac{1}{2(r-\delta)}\|h\|^2.$$

Puisque $\overline{y} \in C(\bar{t}, \overline{x})$, alors

$$\limsup_{\tau\downarrow 0} d_{C(\bar{t},\overline{x})}(\overline{y}+\tau h) \leq d^{\circ}_{C(\bar{t},\overline{x})}(\overline{y}; h).$$

a qui montre que

$$\limsup_{n\to+\infty} d^{\circ}_{C(t_n,x_n)}(y_n; h) \leq d^{\circ}_{C(\bar{t},\overline{x})}(y; h),$$

pour tout $h \in \overline{\mathbb{B}}$. En utilisant l'homogénéité positive de la dérivée directionnelle de Clark, on en déduit que la dernière inégalité reste vraie pour tout $h \in H$. ■

De la proposition précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.4. *Soit $r \in]0, +\infty]$, pour tout $(t, x, y) \in [T_0, T] \times H \times H$, $C(t, x, y)$ est un sous-ensemble non vide de H qui est r-prox-régulier. Supposons qu'il existe des constantes réelles L, α_1, α_2 tels que, pour tous $x_1, y_1, x_2, y_2 \in H$ et tous $t_1, t_2 \in [T_0, T]$,*

$$\mathcal{H}_\rho(C(t_1, x_1, y_1), C(t_2, x_2, y_2)) \leq L|t_1 - t_2| + \alpha_1 \parallel x_1 - x_2 \parallel + \alpha_2\|y_1 - y_2\|.$$

Soient $(t, x, y) \in [T_0, T] \times H \times H$, et $y \in C(t, x, y) \cap \rho\mathbb{B}$, $(t_n, x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[t, T] \times H \times H$ avec $(t_n, x_n, y_n) \to (t, x, y)$ et $\rho \in [0, +\infty[$ tel que $y_n \in C(t_n, x_n, y_n)$. Alors, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \sigma(v, \partial d_{C(t_n,x_n,y_n)}(y_n)) \leq \sigma(v, \partial d_{C(t,x,y)}(y)) \quad \textit{pour tout } v \in H.$$

3.3 Résultat d'existence pour un processus de rafle dépendant du temps et de l'état

Dans cette section, nous étudions un résultat d'existence de solutions pour le processus de rafle du second ordre avec un ensemble de contraintes dépendant du temps et de l'état et une perturbation multivoque.

3.3.1 Théorème d'existence

Considérons les hypothèses suivantes

($\mathscr{A}_F$) $F : [T_0, T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes fermées non vides telles que

(i) F est scalairement s.c.s.

(ii) Pour tout $t \in [T_0, T]$ et tous u, $v \in H$ avec $v \in C(t, u)$, il existe $\beta > 0$ telle que

$$d_{F(t,u,v)}(0) \leq \beta(1 + \|u\| + \|v\|).$$

($\mathscr{A}_C$) $C : [T_0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs fermées non vides telles que

(i) Il existe une constante $r > 0$ telle que, pour chaque $t \in [T_0, T]$ et chaque $u \in H$, l'ensemble $C(t, u)$ est r-prox-régulier.

(ii) Il existe deux constantes réelle $L > 0$ et $\rho \geq \{\|v_0\| + \|u_0\| + 2T(L + 2\beta)\}e^{T(1+L+2\beta)}$ telle que pour tous t, $s \in [T_0, T]$ et tous x, $y \in H$

$$\mathcal{H}_\rho(C(t, x), C(s, y)) \leq L\Big(|t - s| + \|x - y\|\Big).$$

(iii) Pour tout sous-ensemble borné A de H, l'ensemble $C([T_0, T] \times A)$ est boule compacte.

Théorème 3.1. *On suppose que ($\mathscr{A}_F$), ($\mathscr{A}_C$) sont satisfaites, alors pour chaque $u_0 \in H$ et $v_0 \in C(T_0, u_0)$, il existe deux applications absolument continues u, v : $[T_0, T] \to H$ tels que*

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} u(t) = u_0 + \int\limits_{T_0}^{t} v(s)ds & \forall t \in [T_0, T], \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,\, u(t))}(v(t)) + F(t, u(t), v(t)) & p.p. \text{ dans } [T_0,\, T], \\ u(T_0) = u_0,\, v(T_0) = v_0 \in C(T_0, u_0). \end{cases}$$

Autrement dit, le problème ($\mathcal{P}_1$) admet une solution absolument continue u : $[T_0,\, T] \to H$.

Preuve. Soit $f(t,u,v)$ l'élément de norme minimale de l'ensemble convexe fermé $F(t,u,v)$ de H définie comme suit $f(t,\, u,\, v) = \mathrm{Proj}_{F(t,u,v)}(0)$. Par $(\mathscr{A}_F)$ on a

$$\|f(t,\, u,\, v)\| \leq \beta(1 + \|u\| + \|v\|). \tag{3.4}$$

Fixer $n_0 \geq 1$ satisfaisant

$$\frac{(\rho+1)(\beta+L)T}{n_0} < \frac{r}{2}. \tag{3.5}$$

Étape 1. Considérons pour chaque $n \geq n_0$, une partition de $I = [T_0, T]$ définie par $t_i^n := ih_n$ pour $0 \leq i \leq n$, où $h_n := \frac{T}{n}$. On pose $u_0^n = u_0,\ v_0^n = v_0 \in C(T_0, u_0)$ et on prend $u_1^n = u_0^n + h_n v_0^n$. On construit $u_0^n,\, u_1^n, ..., u_n^n$ et $v_0^n,\, v_1^n, ..., v_n^n$ dans H tels que pour chaque $i = 0, 1, ..., n-1$, les affirmations suivantes sont vérifient

$$v_{i+1}^n = \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n)}\left(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\right). \tag{3.6}$$

$$v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n) \ \textit{avec} \ \ u_{i+1}^n = u_i^n + h_n v_i^n.$$

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq \rho. \tag{3.7}$$

En effet, d'après la définition de la distance, on obtient

$$d_{C(t_1^n,u_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)) \leq d_{C(t_1^n,u_1^n)}(v_0^n) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|.$$

En appliquant l'inégalité (3) des Remarques 1.1, on déduit que

$$\begin{aligned}
&d_{C(t_1^n,u_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n))\\
&\leq d_{C(t_0^n,u_0^n)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v_0^n) + \mathrm{exc}_\rho(C(t_0^n, u_0^n), C(t_1^n, u_1^n)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|\\
&\leq \mathrm{exc}_\rho(C(t_0^n, u_0^n), C(t_1^n, u_1^n)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|\\
&\leq \mathcal{H}_\rho(C(t_0^n, u_0^n), C(t_1^n, u_1^n)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|.
\end{aligned}$$

En utilisant la condition (ii) de l'hypothèse $(\mathscr{A}_C)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
d_{C(t_1^n,u_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)) &\leq L(|t_1^n - t_0^n| + \|u_1^n - u_0^n\|) + h_n\beta(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|)\\
&\leq Lh_n + Lh_n\|v_0^n\| + h_n\beta + h_n\beta(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|)\\
&\leq Lh_n + Lh_n\rho + h_n\beta + h_n\beta\rho\\
&\leq h_n(\beta + L) + h_n\rho(\beta + L)\\
&\leq h_n(\beta + L)(1+\rho) < \frac{r}{2} < r.
\end{aligned}$$

Par la prox-régularité de l'ensemble $C(t_1^n, u_1^n)$, on conclut que l'application

$$\mathrm{Proj}_{C(t_1^n,u_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n,\, u_0^n,\, v_0^n)),$$

est bien définie, donc on peut trouver un point $v_1^n \in C(t_1^n, u_1^n)$ telle que

$$v_1^n = \mathrm{Proj}_{C(t_1^n,u_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n,\, u_0^n,\, v_0^n)),$$

et, à partir de (3.4) et la condition (ii) de l'hypothèses $(\mathscr{A}_C)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
&\|v_1^n - v_0^n + h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \leq d_{C(t_1^n, u_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)) \\
&\leq d_{C(t_1^n, u_1^n)}(v_0^n) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq d_{C(t_0^n, u_0^n)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v_0^n) + \mathrm{exc}_\rho(C(t_0^n, u_0^n), C(t_1^n, u_1^n)) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq L(t_1^n - t_0^n) + L\|u_1^n - u_0^n\| + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq Lh_n + Lh_n\|v_0^n\| + + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq Lh_n(1 + \|v_0^n\|) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|.
\end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\|v_1^n - v_0^n\| \leq Lh_n(1 + \|v_0^n\|) + 2h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|,$$

donc

$$\|v_1^n\| \leq \|v_0^n\| + Lh_n(1 + \|v_0^n\|) + 2h_n\beta(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|). \tag{3.8}$$

Par ailleurs, on a

$$\|u_1^n\| \leq \|u_0^n\| + h_n\|v_0^n\|. \tag{3.9}$$

de (3.8) et (3.9), on trouve que

$$\begin{aligned}
\|u_1^n\| + \|v_1^n\| &\leq \|v_0^n\| + \|u_0^n\| + h_n(L + 2\beta) + h_n(1 + 2\beta + L)\|v_0^n\| + 2h_n\beta\|u_0^n\| \\
&\leq \|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T(L + 2\beta) + T(1 + 2\beta + L)\|v_0^n\| + T(1 + 2\beta + L)\|u_0^n\| \\
&\leq \|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T(L + 2\beta) + T(1 + 2\beta + L)\Big(\|v_0^n\| + \|u_0^n\|\Big) \\
&\leq \Big(\|v_0^n\| + \|u_0^n\|\Big)(1 + T(L + 2\beta + L)) + 2T(L + 2\beta) \\
&\leq \Big(\|v_0^n\| + \|u_0^n\|\Big)e^{T+2\beta+L} + 2T(L + 2\beta)e^{T+2\beta+L} \\
&\leq \Big(\|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T(L + 2\beta)\Big)e^{T+2\beta+L} \leq \rho.
\end{aligned}$$

Similairement, on suppose que les points u_0^n, u_1^n, ..., u_{i+1}^n, v_0^n, v_1^n, ..., v_{i+1}^n, ont été construits pour $i \leq n-2$, et prenons $u_{i+2}^n = u_{i+1}^n + h_n v_{i+1}^n$, on obtient

$$\begin{aligned}
&d_{C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)}(v_{i+1}^n - h_n f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)) \leq d_{C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)}(v_{i+1}^n) + h_n\|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\| \\
&\leq \mathrm{exc}_\rho(C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n), C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)) + d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v_{i+1}^n) + h_n\|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\| \\
&\leq \mathrm{exc}_\rho(C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n), C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)) + h_n\|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\| \\
&\leq L(|t_{i+2}^n - t_{i+1}^n| + \|u_{i+2}^n - u_{i+1}^n\|) + h_n\beta(1 + \|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\|) \\
&\leq h_n\beta + Lh_n(1 + \|v_{i+1}^n\|) + h_n\beta(\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\|) \\
&\leq Lh_n + Lh_n\rho + h_n\beta\rho + h_n\beta \\
&\leq h_n(\beta + L)(1 + \rho) < \frac{r}{2} < r.
\end{aligned}$$

D'après la prox-régularité de l'ensemble $C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)$, on déduit que l'application

$$\mathrm{Proj}_{C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)}\left(v_{i+1}^n - h_n f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\right),$$

est bien définie à valeurs non vides. On trouve alors un point v_{i+2}^n tel que

$$v_{i+2}^n = \mathrm{Proj}_{C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)}\left(v_{i+1}^n - h_n f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\right).$$

Par construction, nous avons $v_{i+2}^n \in C(t_{i+2}^n,\, u_{i+2}^n)$ et

$$\begin{aligned}
&\|v_{i+2}^n - v_{i+1}^n + h_n f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_1^n)\| \leq d_{C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)}(v_{i+1}^n - h_n f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n))\\
&\quad \leq d_{C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)}(v_{i+1}^n) + h_n \|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\|\\
&\quad \leq d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v_{i+1}^n) + \mathrm{exc}_\rho(C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n), C(t_{i+2}^n, u_{i+2}^n)) + h_n \|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\|\\
&\quad \leq L(t_{i+2}^n - t_{i+1}^n) + L(\|u_{i+2}^n - u_{i+1}^n\|) + h_n \|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\|\\
&\quad \leq L h_n (1 + \|v_{i+1}^n\|) + h_n \|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|v_{i+2}^n - v_{i+1}^n\| \leq L h_n (1 + \|v_{i+1}^n\|) + 2h_n \|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\|, \tag{3.10}$$

ce qui signifie que

$$\|v_{i+2}^n\| \leq \|v_{i+1}^n\| + L h_n (1 + \|v_{i+1}^n\|) + 2h_n \beta (1 + \|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\|),$$

ainsi

$$\|v_{i+2}^n\| \leq \|v_{i+1}^n\| + h_n (L + 2\beta)\|v_{i+1}^n\| + 2h_n\beta\|u_{i+1}^n\| + h_n(L + 2\beta).$$

Par induction, on trouve que

$$\|v_{i+2}^n\| \leq \|v_0^n\| + h_n(i+2)(L+2\beta) + h_n(L+2\beta)\sum_{j=0}^{i+1}\|v_j^n\| + 2h_n\sum_{j=0}^{i+1}\|u_j^n\|. \tag{3.11}$$

D'autre part, on a

$$\|u_{i+2}^n\| \leq \|u_{i+1}^n\| + h_n\|v_{i+2}^n\|,$$

donc, par induction, on obtient

$$\|u_{i+2}^n\| \leq \|u_0^n\| + h_n\sum_{j=0}^{i+1}\|v_j^n\|. \tag{3.12}$$

De (3.11) et (3.12), on constate que

$$\|v_{i+2}^n\| + \|u_{i+2}^n\| \leq \|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T(L+2\beta) + h_n(1+L+2\beta)\sum_{j=0}^{i+1}\Big(\|v_j^n\| + \|u_j^n\|\Big).$$

En utilisant le Lemme 1.2, on conclut que

$$\|v_{i+2}^n\| + \|u_{i+2}^n\| \leq \Big\{\|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T(L+2\beta)\Big\} e^{T(1+L+2\beta)} \leq \rho,$$

et par conséquent l'algorithme est bien défini et on a déjà prouvé que les suites $(u_i^n)_i, (v_i^n)_i$ sont uniformément bornées par ρ.
D'après (3.4) et (3.7), on trouve que

$$\|f(t_i^n,\, u_i^n,\, v_i^n)\| \leq \beta(1+\rho) = \eta.$$

De plus, par (3.10) on peut déduire que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n} \right\| &\leq L(1 + \|v_i^n\|) + 2\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\ &\leq L(1+\rho) + 2\beta(1+\rho) \\ &\leq (L+2\beta)(1+\rho) = \varsigma, \end{aligned} \tag{3.13}$$

il en résulte que les suites $\left(\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\right)_i$ et $(f(t_i^n,\, u_i^n,\, v_i^n))_i$ sont uniformément bornées par ς et η respectivement.

Étape 2. Fixons un entier quelconque $n \in \mathbb{N}^*$. On définit maintenant sur $[t_i^n, t_{i+1}^n]$ pour $0 \leq i \leq n-1$, les applications $u_n(\cdot)$ et $v_n(\cdot)$ par

$$u_n(t) := u_i^n + \frac{t - t_i^n}{h_n}(u_{i+1}^n - u_i^n),$$

et

$$v_n(t) := v_i^n + \frac{t - t_i^n}{h_n}(v_{i+1}^n - v_i^n).$$

Alors, pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_n} = v_i^n \in C(t_i^n, u_i^n), \tag{3.14}$$

et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}. \tag{3.15}$$

Considérons maintenant, deux applications $\theta_n(t)$ et $\gamma_n(t)$ définie par

$$\theta_n(t) := \begin{cases} t_{i+1}^n & if \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \\ t_n^n = T & if \quad t = T, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\gamma_n(t) := \begin{cases} t_i^n & if \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \\ t_{n-1}^n & if \quad t = T. \end{cases} \tag{3.17}$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} |\theta_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} |\gamma_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} (t_{i+1}^n - t_i^n) = 0. \tag{3.18}$$

En combinant (3.6), (3.16), (3.17) et la Proposition 1.4, il en résulte pour presque tout $t \in [T_0, T]$ que

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) + f\left(\gamma_n(t), u_n(\gamma_n(t)), v_n(\gamma_n(t))\right). \tag{3.19}$$

À partir de (3.13) et de (3.15), on obtient

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \varsigma, \tag{3.20}$$

on conclut donc que $(v_n(\cdot))_n$ est équicontinue de rapport ς.
D'autre part, pour chaque $t \in [t_i^n,\, t_{i+1}^n]$, on a

$$u_n(t) = u_i^n + \frac{t - t_i^n}{h_n}(u_{i+1}^n - u_i^n) = u_i^n + (t - t_i^n)v_i^n,$$

par itération, on obtient

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t v_n(\gamma_n(s))ds. \tag{3.21}$$

Aussi, d'après (3.14) et (3.17) on a

$$v_n(\gamma_n(t)) \in C(\gamma_n(t), u_n(\gamma_n(t))),$$

comme $(u_i^n)_{i=0}^n$ et $(v_i^n)_{i=0}^n$ sont uniformément bornées, on obtient alors

$$v_n(\gamma_n(t)) \in C([0,\, T], \rho\overline{\mathbb{B}}) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}.$$

De la condition (iii) de l'hypothèse $(\mathscr{A}_C)$, on remarque que l'ensemble $C([0,\, T] \times \rho\overline{\mathbb{B}}) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}$ est compact. Par conséquence $\Big(v_n(\gamma_n(t))\Big)_n$ est relativement compact dans H. Puisque

$$\|v_n(\gamma_n(t)) - v_n(t)\| \leq \int_t^{\gamma_n(t)} \|\dot{v}_n(s)\|ds \leq \varsigma(\gamma_n(t) - t) \to 0, \quad as \quad n \to \infty,$$

alors l'ensemble $\{v_n(t),\, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H. D'après (3.20), $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. En appliquant donc le théorème d'Ascoli-Arzelà, on conclut que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}_H([T_0, T])$ et par suit, on peut extraire une sous-suite, également notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge uniformément vers $v \in \mathscr{C}_H([T_0, T])$.

En utilisant l'inégalité (3.20) pour la deuxième fois, on peut extraire une sous-suite également notée $(\dot{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement* dans $L_H^\infty([T_0, T],$ $(\sigma(L_H^\infty([T_0, T]), L_H^1([T_0, T]))$ vers une certaine application $w \in L_H^\infty([T_0, T])$ avec $\|w(t)\| \leq \varsigma$ p.p. $t \in [T_0, T]$.
Fixons maintenant $t \in [T_0, T]$ et en prenant $\xi \in L_H^\infty([T_0, T])$, à partir de la convergence faible* de $\dot{v}_n$ vers w, on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{v}_n(\cdot), \xi(\cdot)\rangle = \langle w(\cdot), \xi(\cdot)\rangle\,,$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \dot{v}_n(s), \xi(s)\rangle\, ds = \int_0^t \langle w(s), \xi(s)\rangle\, ds.$$

En prenant $(e_j)_{j\in J}$ comme base de H tel que $\xi(\cdot) = \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)e_j$, pour chaque $j \in J$. La convergence faible* nous donne

$$\left\langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{v}_n(s), e_j \right\rangle = \left\langle \int_0^t w(s)ds, e_j \right\rangle,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{v}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds,$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \Big[v_n(t) - v_n(0) \Big] = \int_0^t w(s)ds.$$

Donc

$$v(t) = v_0 + \int_0^t w(s)ds,$$

et $\dot{v} = w$, alors $\dot{v}_n$ converge $\sigma(L^\infty_H([T_0,T]), L^1_H([T_0,T])$ vers $\dot{v} \in L^\infty_H([T_0,T])$, ainsi pour tout $\xi_1(\cdot) \in L^\infty_H([T_0,T]) \subset L^1_H([T_0,T])$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \dot{v}_n, \xi_1(\cdot)\rangle = \langle \dot{v}(\cdot), \xi_1(\cdot)\rangle.$$

Alors $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma(L^1_H([T_0,T]), L^\infty_H([T_0,T]))$ dans $L^1_H([T_0,T])$ vers $v(\cdot)$. D'après (3.18), (3.21) et la convergence uniforme de $(v_n)_n$ vers v, On conclut que $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction absolument continue u avec $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$.

Posons $z_n(t) = f(\gamma_n(t), u_n(\gamma_n(t)), v_n(\gamma_n(t))$, pour tout $t \in [T_0,T]$, alors

$$\|z_n(t)\| \leq \eta. \tag{3.22}$$

Ceci implique que $(z_n(\cdot))_n$ est bornée dans $L^\infty_H([T_0,T])$. Donc, on peut extraire une sous-suite de la suite $(z_n(\cdot))_n$ qui converge $\sigma(L^1_H([T_0,T]), L^\infty_H([T_0,T]))$ dans $L^1_H([T_0,T])$ vers une application $z \in L^1_H([T_0,T])$ avec $\|z(t)\| \leq \eta$ p.p. $t \in [T_0,T]$. En effet, pour tout $y(\cdot) \in L^1_H([T_0,T])$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle z_n(\cdot), y(\cdot)\rangle = \langle z(\cdot), y(\cdot)\rangle.$$

Soit $x(\cdot) \in L^\infty_H([T_0,T]) \subset L^1_H([T_0,T])$, donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle z_n(\cdot), x(\cdot)\rangle = \langle z(\cdot), x(\cdot)\rangle,$$

ceci signifie que la suit $z_n(\cdot)$ est converge $\sigma(L^1_H([T_0,T]), L^\infty_H([T_0,T]))$ ver la fonction $z(\cdot)$.

Étape 3 : Montrons maintenant que, pour tout p.p. $t \in [T_0,T]$, on a

$$\dot{v}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(v(t)) - z(t).$$

On commence d'abord par démontrer que, pour tout $t \in [T_0, T]$, on a
$\dot{u}(t) \in C(t, u(t))$.
En effet, pour tout $t \in [T_0, T]$, on trouve que

$$\begin{aligned} d_{C(t,u(t))}(v_n(\theta_n(t))) &\leq d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v_n(\theta_n(t))) + \mathrm{exc}_\rho\Big(C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))), C(t, u(t))\Big) \\ &\leq \mathcal{H}_\rho\Big(C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))), C(t, u(t))\Big) \\ &\leq L\{|\theta_n(t) - t| + \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|\}. \end{aligned}$$

On sait que, si $n \to \infty$ alors $\{|\theta_n(t) - t| + \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|\} \to 0$ et pour tout $t \in [T_0, T], v_n(\theta_n(t)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v(t) = \dot{u}(t)$. Puisque $C(t, u(t))$ est fermé, on obtient

$$\dot{u}(t) \in C(t, u(t)).$$

De plus, par l'inclusion (3.20) et l'inégalité (3.22), on a

$$\|\dot{v}_n + z_n(t)\| \leq \|\dot{v}_n\| + \|z_n(t)\| \leq \varsigma + \eta = l,$$

d'où

$$\dot{v}_n + z_n(t) \in l\overline{\mathbb{B}},$$

il en résulte de (3.19) que

$$\begin{aligned} \dot{v}_n + z_n(t) &\in -N_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) \cap l\overline{\mathbb{B}} \quad \text{p.p. } t \in [T_0,\, T] \\ &= -l\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) \quad \text{p.p. } t \in [T_0,\, T], \end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$z_n(t) \in F(\gamma_n(t), u_n(\gamma_n(t)), v_n(\gamma_n(t))). \tag{3.24}$$

En utilisant le lemme de Mazur et la convergence faible de $(\dot{v}_n + z_n, z_n)_n$ dans $L^1_{H\times H}([T_0, T])$ to $(\dot{v}+z, z)$, il existe donc une suite $(\omega_n, \varpi_n)_n$ qui converge fortement dans $L^1_{H\times H}([T_0, T])$ vers $(\dot{v} + z, z)$ avec

$$\omega_n \in co\{\dot{v}_m + z_m : m \geq n\} \quad \text{et} \quad \varpi_n \in co\{z_m : m \geq n\}.$$

On peut donc extraire de $(\omega_n, \varpi_n)_n$ une sous-suite qui converge p.p. vers $(\dot{v}+z, z)$. Par conséquent, il existe un ensemble Lebesgue négligeable $\mathcal{S} \subset [T_0, T]$ tel que pour chaque $t \in [T_0,\, T] \setminus \mathcal{S}$, on a

$$\dot{v}(t) + z(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\omega_m(t) : m \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{\dot{v}_m(t) + z_m(t) : m \geq n\},$$

et

$$z(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\varpi_m(t) : m \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{z_m(t) : m \geq n\}.$$

Il résulte de (3.23) et (3.24) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tout $t \in I$ et pour tout $y \in H$,

$$\langle y, \dot{v}(t) + z(t)\rangle \leq \sigma\left(y, -l\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t)))\right),$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sigma\left(y, F\left(\gamma_n(t), u_n(\gamma_n(t)), v_n(\gamma_n(t))\right)\right).$$

De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [T_0, T] \setminus \mathcal{S}$ de (3.23) on obtient

$$\langle y, \dot{v}(t) + z(t)\rangle \leq \sup_{m \geq n} \langle y, \dot{v}_m(t) + z_m(t)\rangle,$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sup_{m \geq n} \langle y, z_m(t)\rangle.$$

Ensuite, pour tout $y \in H$

$$\langle y, \dot{v}(t) + z(t)\rangle \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} \langle y, \dot{v}_m(t) + z_m(t)\rangle,$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} \langle y, z_m(t)\rangle,$$

qui assure que

$$\langle y, \dot{v}(t) + z(t)\rangle \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sigma\left(y, -l\partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t)))\right),$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sigma\left(y, F\left(\gamma_n(t), u_n(\gamma_n(t)), v_n(\gamma_n(t))\right)\right).$$

Par la Proposition 3.3 et la s.c.s. scalaire de F, on obtient

$$\langle y, \dot{v}(t) + z(t)\rangle \leq \sigma\left(y, -l\partial d_{C(t, u(t))}(v(t))\right),$$

et

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sigma\left(y, F\left(t, u(t), v(t)\right)\right),$$

cela donnent

$$\dot{v}(t) + z(t) \in -l\partial d_{C(t,u(t))}(v(t)) \subset -N_{C(t,u(t))}(v(t)),$$

et

$$z(t) \in F(t, u(t), v(t)).$$

Par conséquent

$$-\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + z(t) \qquad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T],$$

et

$$z(t) \in F(t, u(t), v(t)) \qquad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T],$$

avec

$$\|\dot{v}(t) + z(t)\| \leq l \qquad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T].$$

Ceci complète la démonstration. ■

3.3.2 Application à une classe d'inégalités quasi-variationnelles

Dans cette section, nous nous intéressons par l'application du résultat principal prouvé dans le Théorème 3.1 à l'inégalité quasi-variationnelle différentielle suivante : trouver $u : [T_0, T] \to H$ telle que, pour tout $w \in D(u(t))$, $\lambda > 0$, on a

$$(\mathcal{AP}_1)\begin{cases}\langle -\ddot{u}(t) - g(t), w - \dot{u}(t)\rangle \leq \langle f(t, u(t), \dot{u}(t)), w - \dot{u}(t)\rangle + \lambda\|w - \dot{u}(t)\|^2,\\ u(T_0) = u_0,\ \dot{u}(T_0) = \dot{u}_0 \in D(u(T_0)),\end{cases}$$

où $D : H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs fermées dans H, $g \in L^1_H([T_0, T])$ et $f(t, u(t), \dot{u}(t)) \in F(t, u(t), \dot{u}(t))$ avec $F : [T_0, T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées.
Cette classe de problèmes trouve sa motivation dans le fait qu'elle constitue la formulation variationnelle des problèmes d'élasticité linéaire avec frottement ou contraintes unilatérales, et des problèmes de contact frictionnel quasistatique impliquant des matériaux viscoélastiques à mémoire courte sous des forces de perturbation dépendant de l'état. Pour plus de détails, on se réfère à [41, 62].
Par la définition du cône normal proximal, ce problème est équivalent à

$$\begin{cases}\ddot{u}(t) + g(t) \in -N^P_{D(u(t))}(\dot{u}(t)) - f(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad \text{p.p. dans } [T_0, T],\\ u(T_0) = u_0 \in D(u(T_0)),\end{cases} \tag{3.25}$$

On suppose que D et F vérifient les hypothèses suivantes

($\mathcal{S}_1$) Il existe une constante $r > 0$ telle que, pour chaque $t \in [T_0, T]$ et chaque $u \in H$, l'ensemble $D(u(t))$ est $r-$prox-régulier.

($\mathcal{S}_2$) Il existe une constante réelle $L_1 > 0$ et une constante réel étendue ρ positive tels que pour chaque x, $y \in H$,

$$\hat{\mathcal{H}}_\rho(D(x), D(y)) \leq L_1\|x - y\|.$$

($\mathcal{S}_3$) Pour tout sous-ensemble borné A de H, l'ensemble $D(A)$ est boule compacte.

($\mathcal{S}_4$) F est scalairement s.c.s. et pour un certain réel $\beta_1 > 0$

$$d_{F(t,u,v)}(0) \leq \beta_1(1 + \|u\| + \|v\|),$$

pour tout $(t, u, v) \in [T_0, T] \times H \times H$.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses $(\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_4)$, pour chaque u_0 dans H, le problème $(\mathcal{AP}_1)$ admet une solution absolument continue.*

Pour montrer ce théorème, nous avons besoin des propositions suivantes.

Proposition 3.5. *Soit D un sous-ensemble non vides de H. Alors, pour tous $y, z \in H$ tel que $y + z \in D$, on a*

$$N_D^P(y+z) = N_{D-z}^P(y)$$

Preuve. Soit $\xi \in H$, alors

$$\begin{aligned}\xi \in N_D^P(y+z) &\Longleftrightarrow \exists t > 0 \text{ tel que } d_D(y+z+t\xi) = t\|\xi\| \\ &\Longleftrightarrow \exists t > 0 \text{ tel que } d_{D-z}(y+t\xi) = t\|\xi\| \\ &\Longleftrightarrow \xi \in N_{D-z}^P(y).\end{aligned}$$

■

Proposition 3.6. *Soit D un sous-ensemble non vides fermées de H. Pour tout $z \in H$ on a*

1. *Si D est r-prox-régulier. Alors $D + z$ is r-prox-régulier.*
2. *Si D est boule compacte tel qu'il existe $M \geq 0$: $\|z\| \leq M$. Alors $D + z$ est boule compacte.*

Preuve.

1. Posons $C = D + z$ et prenons $x_1, x_2 \in C$. Il faut montrer que pour tout $v \in N_C^P(x_1)$ on a
$$\langle v, x_2 - x_1 \rangle \leq \frac{1}{2r}\|v\|\|x_1 - x_2\|.$$
Comme $x_1, x_2 \in C$ donc, il existe $y_1, y_2 \in D$ tel que $x_1 = y_1 + z$ et $x_2 = y_2 + z$. En utilisant l'uniforme prox-régularité de D, on obtient
$$\langle v, y_2 - y_1 \rangle \leq \frac{1}{2r}\|v\|\|y_1 - y_2\|, \quad \text{pour tout } v \in N_D^P(y_1).$$
D'autre part, d'après la Proposition 3.5, on a
$$N_D^P(y_1) = N_D^P(y_1 + z - z) = N_{D+z}^P(y_1 + z) = N_C^P(x_1).$$
Ce qui montre que
$$\langle v, x_2 - x_1 \rangle \leq \frac{1}{2r}\|v\|\|x_1 - x_2\|, \quad \text{pour tout } v \in N_C^P(x_1),$$
d'où l'uniforme prox-régularité de C.
2. Soit $(v_n)_n$ une suite d'élément dans $C \cap \alpha\overline{\mathbb{B}}$ tel que α une constante positive, alors $v_n \in C$ et $\|v_n\| \leq \alpha$ et par suite il existe $u_n \in D$ tel que $v_n = u_n + z$ ce qui montre que $u_n = v_n - z$ et
$$\begin{aligned}\|u_n\| &\leq \|v_n\| + \|z\| \\ &\leq \alpha + M = \alpha'.\end{aligned}$$

Donc $u_n \in D \cap \alpha'\overline{\mathbb{B}}$ et comme D et boule compacte on peut extraire alors de (u_n) une sous-suite notée (u_{n_k}) qui converge vers un élément u de $D \cap \alpha'\overline{\mathbb{B}}$. Comme $\|v_{n_k}\| \leq \alpha$, alors passons à la limite lorsque $n_k \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\lim_{n_k \to \infty} \|v_{n_k}\| \leq \alpha.$$

En utilisant le fait que $\|\cdot\|$ est continue, on trouve que

$$\|\lim_{n_k \to \infty} v_{n_k}\| \leq \alpha,$$

d'où

$$\|v\| \leq \alpha,$$

et par conséquent $v \in C \cap \alpha\overline{\mathbb{B}}$ et donc C est boule compacte.

$\blacksquare$

Preuve. (du Théorème 3.2) Considérons pour tous t, s dans $[T_0, T]$,

$$x(t) = u(t) + \int_0^t \int_0^s g(\tau)d\tau ds \;\text{ et } C(t,x) = D\Big(x - \int_0^t \int_0^s g(\tau)d\tau ds\Big) + \int_0^t g(s)ds.$$

En utilisant la Proposition 1.5 et (3.25), on trouve

$$\begin{aligned}
-\ddot{x}(t) \in & N_{C(t,x(t)) - \int_0^t g(s)ds}\Big(\dot{x}(t) - \int_0^t g(s)ds\Big) + F(t, \dot{x}(t), \ddot{x}(t)),\\
\in & N_{C(t,x(t))}\Big(\dot{x}(t)\Big) + F(t, \dot{x}(t), \ddot{x}(t)),
\end{aligned}$$

avec $x(T_0) = x_0 \in C(T_0, x_0)$. Pour Montrer que le problème $(\mathcal{AP}_1)$ admet une solution absolument continue, il faut démontrer que $C(t, x(t))$ satisfait les hypothèses de $(\mathscr{A}_C)$. D'après la Proposition 3.6, et comme $\| \int_0^t g(s)ds\| \leq T\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])} = M$, donc C satisfait les conditions (i) et (iii) de l'hypothèse $(\mathscr{A}_C)$. De plus, pour tous $t, t' \in [T_0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_\rho(C(t,x), C(t',y)) \leq \hat{\mathcal{H}}_\rho(C(t,x), C(t',y))\\
&= \sup_{z \in \rho\overline{\mathbb{B}}} \Big| d_{D(x - \int_0^t \int_0^s g(\tau)d\tau ds)}(z - \int_0^t g(s)ds) - d_{D(y - \int_0^{t'} \int_0^s g(\tau)d\tau ds)}(z - \int_0^{t'} g(s)ds) \Big|\\
&\leq \sup_{z \in \rho\overline{\mathbb{B}}} \Big| d_{D(x - \int_0^t \int_0^s g(\tau)d\tau ds)}(z) - d_{D(y - \int_0^{t'} \int_0^s g(\tau)d\tau ds)}(z) \Big| + \|\int_0^t g(s)ds - \int_0^{t'} g(s)ds\|\\
&\leq L_1 \Big\| x - \int_0^t \int_0^s g(\tau)d\tau ds - y + \int_0^{t'} \int_0^s g(\tau)d\tau ds \Big\| + \int_t^{t'} \|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])} ds\\
&\leq L_1\|x - y\| + L_1 \|\int_t^{t'} \int_0^s g(\tau)d\tau ds\| + \int_t^{t'} \|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])} ds\\
&\leq L_1\|x - y\| + L_1|t - t'|\Big(L_1 \frac{t + t'}{2} + 1\Big)\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])}\\
&\leq L(|t - t'| + \|x - y\|),
\end{aligned}$$

avec $L = (L_1 T + 1)\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])}$. Alors, (ii) est vérifié.
D'autre part, F est scalairement s.c.s. De plus, on a

$$\begin{aligned}\|f(t,x,\dot{x})\| &\leq \beta_1(1 + \|x - \int_0^t \int_0^s g(\tau)d\tau ds\| + \|\dot{x} - \int_0^t g(s)ds\|)\\ &\leq \beta_1 + \beta_1\|x\| + \beta_1\frac{T^2}{2}\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])} + \beta_1\|\dot{x}\| + \beta_1 T\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])}\\ &\leq \beta_1(1 + T\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])} + \frac{T^2}{2}\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])})(1 + \|x\| + \|\dot{x}\|).\end{aligned}$$

Alors

$$d_{F(t,x,\dot{x})}(0) \leq \beta\Big(1 + \|x\| + \|\dot{x}\|\Big),$$

où $\beta = \beta_1(1 + T\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])} + \frac{T^2}{2}\|g\|_{L^\infty_H([T_0,T])})$. Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites et nous avons donc l'existence d'une solution pour le problème $(\mathcal{AP}_1)$. ■

3.4 Résultat d'existence pour un processus de rafle dépendent conjointement du temps, de l'état et de la vitesse.

Dans cette section, on étudie le résultat d'existence du problème $(\mathcal{P}_2)$.

3.4.1 Théorème d'existence

Théorème 3.3. *Soit $C : [T_0, T] \times H \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs fermées non vides satisfaisant les hypothèses suivantes*

(H_1^C) *Pour chaque $t \in [T_0, T]$ et chaque u, $v \in H$, $C(t, u, v)$ est r-prox-régulier pour une constante positive r.*

(H_2^C) *Il existe des constantes réelles $L, \alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \in]0, 1[$ telles que pour chaque x, y, u, $v \in H$ et tous $s, t \in [T_0, T]$ avec $s \leq t$.*

$$\mathcal{H}_\rho(C(t,x,y), C(s,u,v)) \leq L(t-s) + \alpha_1 \parallel x - u \parallel + \alpha_2 \parallel y - v \parallel,$$

où ρ une constante positive.

(H_3^C) *Pour tout sous-ensembles bornés A et B de H, l'ensemble $C([T_0, T] \times A \times B)$ est boule compacte.*

Soit $F : [T_0] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées convexes tel que $(\mathscr{A}_F)$ est satisfaite. Alors, pour chaque $(u_0, v_0) \in H^2$ avec $v_0 \in C(T_0, u_0, v_0)$, il existe au moins une $\mathscr{W}_H^{2,1}([T_0, T])$-solution $u(\cdot)$ du problème $(\mathcal{P}_2)$.

Preuve. Soit $\rho = k(1+T\beta)+T\beta+\frac{r}{2}$ avec $k = \left(\|v_0\| + \|u_0\| + 2T\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}\right) e^{T\left(1+\frac{\alpha_1+2\beta}{1-\alpha_2}\right)}$.
On choisir $T_1 \in [T_0, T]$ suffisamment petit tel que

$$\eta := T_1 \frac{L + \alpha_1\rho + \beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2} < \frac{r}{2}. \tag{3.26}$$

Fixons $k' = k(1 + T_1\beta) + T_1\beta$.

a) On commence d'abord par montrer qu'il existe au moins une $\mathscr{W}_H^{2,1}([T_0, T_1])$-solution $u(\cdot)$ du problème $(\mathcal{P}_2)$. Considérons, pour tout entier $n \geq 1$, une partition de $I := [T_0, T_1]$ avec les points

$$t_i^n := ih_n,\ i = 0, 1, ...n, \quad avec \quad h_n = \frac{T_1}{n} \quad et \quad T_0 = t_0^n.$$

Notons par $f(t, u, v)$ l'élément de norme minimale de $F(t, u, v)$, c'est-à-dire, $f(t, u, v) := \mathrm{Proj}_{F(t,u,v)}(0)$. Alors

$$\| f(t, u, v) \| \leq \beta(1+ \| u \| + \| v \|). \tag{3.27}$$

Posons

$$u_0^n = u_0,\ v_0^n = v_0 \in C(T_0, u_0, v_0), \quad et \quad u_1^n = u_0 + h_n v_0. \tag{3.28}$$

Étape 1 : On construit les suites $(u_i^n)_{1\leq i\leq n}\, et\, (v_i^n)_{1\leq i\leq n}$ dans H tels que, pour chaque $i = 1, ..., n$, on a les inclusions suivantes

$$v_i^n = \mathrm{Proj}_{C(t_i^n, u_i^n, v_i^n)}\left(v_{i-1}^n - h_n f(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n, v_{i-1}^n)\right), \tag{3.29}$$

$$v_i^n \in C(t_i^n, u_i^n, v_i^n) \quad avec \quad u_i^n = u_{i-1}^n + h_n v_{i-1}^n, \tag{3.30}$$

et

$$\|u_i^n\| + \|v_i^n\| \leq \rho. \tag{3.31}$$

En effet, à partir de (H_2^C), (3.27), et (3.28) les Remarques 1.1, pour tout $v \in \overline{B}\left(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n), \eta\right)$, on a

$$\begin{aligned}
& d_{C(t_1^n,u_1^n,v)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)) \leq d_{C(t_1^n,u_1^n,v)}(v_0^n) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
& \leq d_{C(t_0^n,u_0^n,v_0^n)\cap\rho\mathbb{B}}(v_0^n) + \mathrm{exc}_\rho(C(t_0^n, u_0^n, v_0^n), C(t_1^n, u_1^n, v)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
& \leq \mathcal{H}_\rho(C(t_0^n, u_0^n, v_0^n), C(t_1^n, u_1^n, v)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
& \leq L(t_1^n - t_0^n) + \alpha_1\|u_1^n - u_0^n\| + \alpha_2\|v - v_0^n\| + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
& \leq L(t_1^n - t_0^n) + \alpha_1\|v_0^n\| + \alpha_2\|v - v_0^n + h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| + h_n(1+\alpha_2)\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
& \leq Lh_n + \alpha_1 h_n\rho + \alpha_2\eta + h_n\beta(1+\rho)(1+\alpha_2) \\
& \leq Lh_n + \alpha_1 h_n\rho + T_1\alpha_2\frac{L + \alpha_1\rho + \beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2} + h_n\beta(1+\rho)(1+\alpha_2) \\
& \leq T_1\left(\frac{L + \alpha_1\rho + \beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right) = \eta < \frac{r}{2} < r.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ainsi, comme C est à valeurs r-prox-régulières, par la Proposition 1.5, et pour tout $v \in \overline{B}\,(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n), \eta)$ la fonction $\phi_1(v) = \mathrm{Proj}_{C(t_1^n, u_1^n, v)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n))$ est bien définie.
Nous allons maintenant montrer que $\phi_1(v)$ est continue sur $\overline{B}\,(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n), \eta)$.
Fixons $\overline{v}$ un élément dans $\overline{B}\,(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n), \eta)$ et soit $(v_m)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{B}\,(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n), \eta)$ tel que $v_m \longrightarrow \overline{v}$. On distingue deux cas.
cas 1 : Si $\rho = +\infty$. Alors, $\mathcal{H}_\rho(\cdot,\cdot) = \mathcal{H}(\cdot,\cdot)$. En prenant en compte (H_2^C), (3.32) et la Proposition 3.2, on constate que

$$\begin{aligned}
&|\phi_1(v_m) - \phi_1(\overline{v})|\\
&= |\mathrm{Proj}_{C(t_1^n, u_1^n, v_m)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)) - \mathrm{Proj}_{C(t_1^n, u_1^n, \overline{v})}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n))|\\
&\leq 2\left(d_{C(t_1^n, u_1^n, v_m)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)) + d_{C(t_1^n, u_1^n, \overline{v})}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n))\right) \times\\
&\qquad \mathcal{H}(C(t_1^n, u_1^n, v_m), C(t_1^n, u_1^n, \overline{v}))\\
&\leq 2rL_2\|v_m - \overline{v}\|.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la convergence de v_m vers $\overline{v}$ permet d'obtenir la continuité de ϕ_1.
cas 2 : Si $\rho < +\infty$. D'après (3.32), on a

$$v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n) \in U_{\frac{r}{2}}(C(t_1^n, u_1^n, v_m)) \cap U_{\frac{r}{2}}(C(t_1^n, u_1^n, \overline{v})).$$

Par l'hypothèse de la fonction f on obtient

$$\begin{aligned}
\|v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| &\leq \|v_0^n\| + T_1\beta(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|)\\
&\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + T_1\beta + T_1\beta(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|)\\
&\leq (\|u_0^n\| + \|v_0^n\|)(1 + T_1\beta) + T_1\beta\\
&\leq k(1 + T\beta) + T\beta = k'.
\end{aligned}$$

Donc

$$v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n) \in U_{\frac{r}{2}}(C(t_1^n, u_1^n, v_n)) \cap U_{\frac{r}{2}}(C(t_1^n, u_1^n, \overline{v})) \cap k'\mathbb{B}.$$

D'autre part, $\rho = \dfrac{r}{2} + k'$, alors on a

$$\mathcal{H}_{\frac{r}{2}+k'}(C(t_1^n, u_1^n, v_m), C(t_1^n, u_1^n, \overline{v})) \leq \alpha_2\|v_m - \overline{v}\|,$$

et d'après la convergence de v_m vers $\overline{v}$ on en déduit que

$$\mathcal{H}_{\frac{r}{2}+k'}(C(t_1^n, u_1^n, v_m), C(t_1^n, u_1^n, \overline{v})) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\frac{r}{2}+k'}(C(t_1^n,u_1^n,v_m),C(t_1^n,u_1^n,\overline{v})) &\leq \alpha_2\|v_m-\overline{v}\|\\ &\leq \alpha_2\|v_m-v_0^n+h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n)\|+\alpha_2\|\overline{v}-v_0^n+h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n)\|\\ &\leq 2\alpha_2T_1\left(\frac{L+\alpha_1\rho+\beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right)\\ &\leq 2T_1\left(\frac{L+\alpha_1\rho+\beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right)<2\frac{r}{2}=r.\end{aligned}$$

En utilisant (H_2^C) et en appliquant la Proposition 3.1, on obtient

$$\begin{aligned}\|\phi_1(v_m)-\phi_1(\overline{v})\| &\leq \left(2r\mathcal{H}_{\frac{r}{2}+k'}(C(t_1^n,u_1^n,v_m),C(t_1^n,u_1^n,\overline{v}))\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(2r\mathcal{H}_{\rho}(C(t_1^n,u_1^n,v_m),C(t_1^n,u_1^n,\overline{v}))\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(2r\alpha_2\|v_m-\overline{v}\|\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc, la convergence de v_m vers $\overline{v}$ nous donne la continuité de ϕ_1. De plus, pour tout $v \in \overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right)$, on a

$$\phi_1(v)\in\overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right).$$

En effet, d'après (3.32), on a

$$\|\phi_1(v)-v_0^n+h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n)\|\leq d_{C(t_1^n,u_1^n,v)}(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n))\leq\eta. \tag{3.33}$$

Alors, pour tout $v \in \overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right)$, on a

$$\phi_1(v)\in\overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right),$$

cela signifie que

$$\phi_1(v)\in C\left(t_1^n,u_1^n,\overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right)\right)\bigcap\overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right).$$

En utilisant l'hypothèse (H_3^C), l'ensemble $\phi_1\left(\overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right)\right)$ est relativement compact. On conclut que l'application ϕ_1 satisfait toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder, d'où l'existence d'un point fixe $v_1^n\in\overline{B}\left(v_0^n-h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n),\eta\right)$ tel que $v_1^n=\phi_1(v_1^n)$. C'est-à-dire

$$v_1^n=\mathrm{Proj}_{C(t_1^n,u_1^n,v_1^n)}(v_0^n+h_nf(t_0^n,u_0^n,v_0^n)).$$

Par ailleurs, d'après (3.33), on a

$$\begin{aligned}\|v_1^n-v_0^n\| &\leq \eta+h_n\beta(1+\|u_0^n\|+\|v_0^n\|),\\ &\leq T_1\left(\frac{L+\alpha_1\rho+\beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right)+T_1\beta(1+\rho)\\ &\leq T_1\frac{L+\alpha_1+2\beta(1+\rho)}{1-\alpha_2}.\end{aligned}$$

Démontrons à présent que les suites (u_1^n) et (v_1^n) sont uniformément bornées. En particulier, établissons que

$$\|u_1^n\|+\|v_1^n\|\leq \rho.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\|v_1^n - v_0^n + h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| &\leq d_{C(t_1^n,u_1^n,v_1^n)}(v_0^n) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\ &\leq d_{C(t_0^n,u_0^n,v_0^n)}(v_0^n) + \operatorname{exc}(C(t_0^n, u_0^n, v_0^n), C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\ &\leq \mathcal{H}_\rho(C(t_0^n, u_0^n, v_0^n), C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)) + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\ &\leq Lh_n + \alpha_1 h_n\|v_0^n\| + \alpha_2\|v_1^n - v_0^n\| + h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\|v_1^n - v_0^n\| \leq Lh_n + \alpha_1 h_n \rho + \alpha_2\|v_1^n - v_0^n\| + 2h_n\|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|,$$

d'où

$$(1-\alpha_2)\|v_1^n - v_0^n\| \leq Lh_n + h_n\alpha_1\|v_0^n\| + 2h_n\beta(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|),$$

alors

$$\|v_1^n\| \leq \|v_0^n\| + \frac{Lh_n}{1-\alpha_2} + h_n\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\|v_0^n\| + 2h_n\frac{\beta}{1-\alpha_2}(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|).$$

D'autre part, de (3.28) on a

$$\|u_1^n\| \leq \|u_0^n\| + h_n\|v_0^n\|.$$

Par addition, on obtient

$$\begin{aligned}\|v_1^n\| + \|u_1^n\| &\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + T_1\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2} + T_1\frac{\alpha_1+2\beta+1}{1-\alpha_2}\|v_0^n\| + T_1\frac{2\beta}{1-L}\|u_0^n\|, \\ &\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + 2T_1\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2} + T_1\frac{\alpha_1+2\beta+1}{1-\alpha_2}(\|v_0^n\| + \|u_0^n\|), \\ &\leq (\|v_0^n\| + \|u_0^n\|)\left(1 + 2T\frac{\alpha_1+2\beta+1}{1-\alpha_2}\right) + T\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}.\end{aligned}$$

On peut donc en déduire que

$$\|v_1^n\| + \|u_1^n\| \leq \left(\|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}\right)e^{T\frac{\alpha_1+2\beta+1}{1-\alpha_2}} = k \leq \rho.$$

Supposons maintenant que pour $i = 1, ..., m$, avec $m \leq n$, les points $u_0^n, u_1^n ..., u_m^n$, $v_0^n, v_1^n ..., v_m^n$ ont été construit de manière que les propriétés (3.29), (3.30) et (3.31) sont satisfaites. prenons

$$u_{i+1}^n = u_i^n + h_n v_i^n.$$

Donc, pour tout $v \in \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)$ on a

$$\begin{aligned}
&d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)}(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)) \leq d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)}(v_i^n) + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq d_{C(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\cap\rho\mathbb{B}}(v_i^n) + \mathrm{exc}_\rho(C(t_i^n, u_i^n, v_i^n), C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)) + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq \mathcal{H}_\rho(C(t_i^n, u_i^n, v_i^n), C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)) + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq Lh_n + \alpha_1 h_n\|v_i^n\| + \alpha_2\|v - v_i^n\| + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq Lh_n + \alpha_1 h_n\|v_i^n\| + \alpha_2\|v - v_i^n + h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| + h_n(1+\alpha_2)\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq Lh_n + \alpha_1 h_n\|v_i^n\| + \alpha_2\eta + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\|(1+\alpha_2) \\
&\leq Lh_n + \alpha_1 h_n\rho + T_1\alpha_2\frac{L + \alpha_1\rho + \beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2} + h_n\beta(1+\rho)(1+\alpha_2) \\
&\leq T_1\left(\frac{L + \alpha_1\rho + \beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right) = \eta \leq \frac{r}{2} < r.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)$ est r-prox-régulier, on en déduit que l'application $\phi_{i+1}(v) = \mathrm{Proj}_{C(t_1^n i+1, u_{i+1}^n, v)}(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n))$ est bien définie. D'une maniéré analogue, on peut facilement vérifier que
$\phi_{i+1}(v) : \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta) \longrightarrow H$ est continue, et pour tout $v \in \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)$, on a

$$\phi_{i+1}(v) \in \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)\,.$$

En effet,

$$\|\phi_{i+1}(v) - v_i^n + h_n f(t_i^n + u_i^n + v_i^n)\| \leq d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)}(v_i^n - h_n f(t_i^n + u_i^n + v_i^n)) \leq \eta. \tag{3.34}$$

Par conséquent, pour tout $v \in \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)$,

$$\phi_{i+1}(v) \in C\left(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)\right) \bigcap \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)\,.$$

Par (H_3^C), l'ensemble $\phi_{i+1}\left(\overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)\right)$ est relativement compact. Donc par le théorème du point fixe de Shauder, on conclut que l'application ϕ_{i+1} admet au moins un point fixe, c'est-à-dire, il existe $v_{i+1}^n \in \overline{B}\,(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n), \eta)$ tel que $v_{i+1}^n = \phi_{i+1}(v)$, d'où

$$v_{i+1}^n = \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v)}\left(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\right), \qquad v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n).$$

Et par (3.34) on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &\leq \eta + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq T_1\left(\frac{L + \alpha_1\rho + \beta(1+\rho)(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right) + T_1\beta(1+\rho) \\
&\leq T_1\frac{L + \alpha_1 + 2\beta(1+\rho)}{1-\alpha_2} = \Delta.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Montrons maintenant que les suites (u^n_{i+1}) et (v^n_{i+1}) sont uniformément bornées. En particulier, établissons que

$$\|u^n_{i+1}\|+\|v^n_{i+1}\|\leq \rho.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
&\|v^n_{i+1}-v^n_i+h_nf(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\| \leq d_{C(t^n_{i+1},u^n_{i+1},v^n_{i+1})}(v^n_i)+h_n\|f(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\|\\
&\leq d_{C(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v^n_i)+\mathrm{exc}_\rho(C(t^n_i,u^n_i,v^n_i),C(t^n_{i+1},u^n_{i+1},v^n_{i+1}))+h_n\|f(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\|\\
&\leq \mathcal{H}_\rho(C(t^n_i,u^n_i,v^n_i),C(t^n_{i+1},u^n_{i+1},v^n_{i+1}))+h_n\|f(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\|\\
&\leq Lh_n+\alpha_1h_n\|v^n_i\|+\alpha_2\|v^n_{i+1}-v^n_i\|+h_n\|f(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|v^n_{i+1}-v^n_i\|\leq Lh_n+\alpha_1h_n\rho+\alpha_2\|v^ni+1-v^n_i\|+2h_n\|f(t^n_i,u^n_i,v^n_i)\|,$$

donc

$$(1-\alpha_2)\|v^n_{i+1}-v^n_i\|\leq Lh_n+h_n\alpha_1\|v^n_i\|+2h_n\beta(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|)$$

$$(1-\alpha_2)\|v^n_{i+1}-v^n_i\|\leq Lh_n+h_n\alpha_1\|v^n_i\|+2h_n\beta(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|),$$

et par suite

$$\|v^n_{i+1}\|\leq\|v^n_i\|+\frac{Lh_n}{1-\alpha_2}+\frac{\alpha_1h_n}{1-\alpha_2}\|v^n_i\|+\frac{2h_n\beta}{1-\alpha_2}(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|).$$

Par conséquence

$$\|v^n_{i+1}\|\leq\|v^n_0\|+h_n\frac{(i+1)(L+2\beta)}{1-\alpha_2}+h_n\frac{\alpha_1+2\beta}{1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}\|u^n_j\|+h_n\frac{2\beta}{1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}\|v^n_j\|.$$

Par ailleurs, on a

$$\|u^n_{i+1}\|\leq\|u^n_i\|+h_n\|v^n_i\|,$$

alors

$$\|u^n_{i+1}\|\leq\|u^n_0\|+h_n\sum_{j=0}^{i}\|v^n_j\|.$$

Par addition

$$\begin{aligned}
&\|v^n_{i+1}\|+\|u^n_{i+1}\|\\
&\leq\|u^n_0\|+\|v^n_0\|+2T_1\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}+h_n\frac{\alpha_1+2\beta+1}{1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}\|v^n_j\|+h_n\frac{2\beta}{1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}\|u^n_j\|\\
&\leq\|u^n_0\|+\|v^n_0\|+2T_1\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}+T_1\frac{1+\alpha_1+2\beta}{1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}(\|v^n_j\|+\|u^n_j\|)\\
&\leq\|u^n_0\|+\|v^n_0\|+2T\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}+T\frac{1+\alpha_1+2\beta}{1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}(\|v^n_j\|+\|u^n_j\|).
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.2, on trouve que

$$\|v_{i+1}^n\| + \|u_{i+1}^n\| \leq \left(\|u_0^n\| + \|v_0^n\| + 2T\frac{L+2\beta}{1-\alpha_2}\right) e^{T\frac{\alpha_1+2\beta+1}{1-\alpha_2}} \leq \rho.$$

Donc, les suites $(u_i^n)_i, (v_i^n)_i$ sont uniformément bornées par ρ.
D'après (3.27), on a

$$\| f(t_i^n, u_i^n, v_i^n) \| \leq \beta(1+ \| u_i^n \| + \| v_i^n \|) \leq \beta(1+\rho) = \Gamma,\ i = 1, 2, ..., n.$$

En conclusion, les suites $\left(\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\right)_i, (f(t_i^n, u_i^n, v_i^n))_i$ sont uniformément bornées par Δ et Γ respectivement.

Étape 2 : Construction des suites $(u_n(\cdot))_n, (v_n(\cdot))_n, (\theta_n(\cdot))_n, (\chi_n(\cdot))_n$. Pour tout $t \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$, $i = 1..., n$, on définit

$$u_n(t) := u_{i-1}^n + \frac{t - t_{i-1}^n}{h_n}(u_i^n - u_{i-1}^n), \tag{3.36}$$

et

$$v_n(t) := v_{i-1}^n + \frac{t - t_{i-1}^n}{h_n}(v_i^n - v_{i-1}^n).$$

Ainsi, pour presque tout $t \in]t_{i-1}^n, t_i^n[$

$$\dot{u}_n(t) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_n} = v_{i-1}^n \in C(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n, v_{i-1}^n), \tag{3.37}$$

et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h_n},$$

par (3.35), on obtient

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \Delta. \tag{3.38}$$

On pose, pour chaque $t \in [T_0, T_1]$ et chaque $n \geq 1$

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_i^n & if \quad t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[, \\ t_n^n = T_1 & if \quad t = T_1, \end{cases} \tag{3.39}$$

$$\chi_n(t) = \begin{cases} t_{i-1}^n & if \quad t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[, \\ t_{n-1}^n & if \quad t = T_1. \end{cases} \tag{3.40}$$

Alors, pour tout $t \in [T_0, T_1]$, on peut dire que

$$\lim_{n\to+\infty} |\theta_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} |\chi_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} (t_i^n - t_{i-1}^n) = 0. \tag{3.41}$$

En vertu de la Proposition 1.4, (3.29), (3.39) et (3.40), il en résulte que pour presque tout $t \in [T_0, T_1]$

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)), v_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) + f\left(\chi_n(t), u_n(\chi_n(t)), v_n(\chi_n(t))\right), \tag{3.42}$$

et

$$v_n(\theta(t)) \in C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)), v_n(\theta_n(t))). \tag{3.43}$$

De plus, par (3.36) et (3.37), on trouve que

$$u_n(t) = u_{i-1}^n + (t - t_{i-1}^n)v_{i-1}^n,$$

et par itération, on obtient

$$u_n(t) = u_0^n + \int_{T_0}^t v_n(\chi_n(\tau))d\tau. \tag{3.44}$$

Étape 3 : La convergence des suites $(\dot{v}_n)$, (u_n) et $(f(\chi_n(\cdot), u_n(\chi_n(\cdot)), v_n(\chi_n(\cdot)))$.
D'après (3.31) et (3.43), on a pour tout $t \in I$

$$v_n(\theta_n(t)) \in C([T_0, T_1], \rho\overline{\mathbb{B}}, \rho\overline{\mathbb{B}}) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}.$$

Grâce aux hypothèses (H_3^C), la suite $v_n(\theta_n(t))_n$ est relativement compact dans H. D'autre part, on a

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \le \int_t^{\theta_n(t)} \|\dot{v}_n(\tau)\|d\tau \le \Delta(\theta_n(t) - t) \to 0, \quad as \quad n \to \infty.$$

Alors, l'ensemble $\{v_n(t) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H. Il est clair que, $(v_n(\cdot))_n$ est équicontinue d'après (3.38). Par conséquent, le théorème d'Ascoli, nous assure que la suite $(v_n(\cdot))_n$ est relativement compact dans $\mathscr{C}_H([T_0, T_1])$. On peut donc extraire une sous-suite de $(v_n(\cdot))_n$ qui converge uniformément vers $v \in \mathscr{C}_H([T_0, T_1])$.
En raison de l'inégalité (3.38), il existe une sous-suite de $(\dot{v}_n(\cdot))_n)$ qui converge $\sigma(L_H^\infty([T_0, T_1]), L_H^1([T_0, T_1]))$ dans $L_H^\infty([T_0, T_1])$ vers une application Ω avec $\|\Omega(t)\| \le \Delta$ p.p. Cela signifie que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^t \langle \dot{v}_n(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau = \int_{T_0}^t \langle \Omega(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau, \ \ \forall \xi \in L_H^\infty([T_0, T_1]).$$

Maintenant, fixons $t \in [T_0, T_1]$ et prenons $\xi = x\cdot \mathbf{1}_{[T_0,T_1]}$ pour tout $x \in H$ on a

$$\left\langle \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^t \dot{v}_n(\tau)d\tau, x\cdot \mathbf{1}_{[T_0,T_1]} \right\rangle = \left\langle \int_{T_0}^t \Omega(\tau)d\tau, x\cdot \mathbf{1}_{[T_0,T_1]} \right\rangle,$$

donc

$$\left\langle x, \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^t \dot{v}_n(\tau)d\tau \right\rangle = \left\langle x, \int_{T_0}^t \Omega(\tau)d\tau \right\rangle,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^t \dot{v}_n(\tau)d\tau = \int_{T_0}^t \Omega(\tau)d\tau.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(T_0) + \int_{T_0}^t \dot{v}_n(\tau)d\tau = v(T_0) + \int_{T_0}^t \Omega(\tau)d\tau.$$

Puisque v_n est absolument continues, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n(t)-v_n(0)) = \int_{T_0}^{t}\dot{v}_n(\tau)d\tau = \int_{T_0}^{t}\Omega(\tau)d\tau,$$

et comme la suite $v_n(\cdot)$ converge uniformément vers v, alors

$$v(t) = v_0 + \int_{T_0}^{t}\Omega(\tau)d\tau \text{ et } \dot{v} = \Omega \quad \text{p.p. } t\in[T_0,T_1].$$

Donc $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma(L^\infty_H([T_0,T_1]), L^1_H([T_0,T_1]))$ vers $\dot{v}(\cdot)\in L^\infty_H([T_0,T_1])$. Pour tout $\xi_1(\cdot)\in L^\infty_H([T_0,T_1])\subset L^1_H([T_0,T_1])$, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow 0}\langle \dot{v}_n, \xi_1(\cdot)\rangle = \langle \dot{v}(\cdot), \xi_1(\cdot)\rangle.$$

Alors $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ convergent $\sigma(L^1_H([T_0,T_1]), L^\infty_H([T_0,T_1]))$ dans $L^1_H([T_0,T_1])$ vers $\dot{v}(\cdot)$. À partir de (3.41), (3.44) et la convergence uniforme de $(v_n)_n$ vers v, on déduit que $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction absolument continue u avec $u(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} v(\tau)d\tau$.
Soit $q_n(t) = f(\chi_n(t), u_n(\chi_n(t)), v_n(\chi_n(t)))$, pour tout $t\in[T_0,T_1]$ alors

$$\|q_n(t)\|\leq\Gamma.$$

Donc $(q_n(\cdot))_n$ est bornée dans $L^\infty_H([T_0,T_1])$, alors on peut extraire une sous-suite notée $(q_n(\cdot))$ qui converge $\sigma(L^\infty_H([T_0,T_1]), L^1_H([T_0,T_1]))$ vers une application $q(\cdot)$ dans $L^\infty_H([T_0,T_1])\subset L^1_H([T_0,T_1])$. Cela signifie que

$$\lim_{n\to\infty}\langle q_n(\cdot), \xi(\cdot)\rangle = \langle q(\cdot), \xi(\cdot)\rangle, \quad \forall\xi\in L^1_H([T_0,T_1]),$$

comme $L^\infty_H([T_0,T_1])\subset L^1_H([T_0,T_1])$, on déduire que pour tout $\xi\in L^\infty_H([T_0,T_1])$

$$\lim_{n\to\infty}\langle q_n(\cdot), \xi(\cdot)\rangle = \langle q(\cdot), \xi(\cdot)\rangle.$$

Alors $(q_n(\cdot))$ converge $\sigma(L^1_H([T_0,T_1]), L^\infty_H([T_0,T_1]))$ vers $q\in L^1_H([T_0,T_1])$ avec $\|q(t)\|\leq\Gamma$ p.p.
Étape 4 : Dans cette étape, nous allons montrer que $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_2)$.
Premièrement, prouvons que $v(t)\in C(t,u(t),v(t))$, pour tout $t\in[T_0,T_1]$.

$$\begin{aligned}
d_{C(t,u(t),v(t))}(v_n(\theta_n(t))) &\leq d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)),v_n(\theta_n(t)))\cap\rho\overline{\mathbb{B}}}(v_n(\theta_n(t))) \\
&\quad + \mathrm{exc}_\rho(C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)),v_n(\theta_n(t))), C(t,u(t),v(t))) \\
&\leq \mathcal{H}_\rho(C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)),v_n(\theta_n(t))), C(t,u(t),v(t))) \\
&\leq L|\theta_n(t)-t| + \alpha_1\|u_n(\theta_n(t))-u(t)\| + \alpha_2\|v_n(\theta_n(t))-v(t)\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $d_{C(t,u(t),v(t))}(v_n(\theta_n(t))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. depuis $v_n(\theta_n(t)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v(t) = \dot{u}(t)$ et en utilisant le fait que $D(t,u(t),v(t))$ est fermé, on obtient $\dot{u}(t) \in C(t,u(t),v(t))$.

D'autre part

$$\|\dot{v}_n(t) + q_n(t)\| \le \|\dot{v}_n(t)\| + \|q_n(t)\| \le \Delta + \Gamma = \Upsilon,$$

donc

$$\dot{v}_n(t) + q_n(t) \in \Upsilon\overline{\mathbb{B}}.$$

Cela garantit que par (3.42), on a

$$\begin{aligned} \dot{v}_n(t) + q_n(t) &\in -N_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)),v_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) \cap \Upsilon\overline{\mathbb{B}} \\ &= -\Upsilon\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)),u_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))), \end{aligned} \tag{3.45}$$

et

$$q_n(t) \in f(\chi_n(t), u_n(\chi_n(t)), v_n(\chi_n(t))). \tag{3.46}$$

Puisque $(\dot{v}_n + q_n, q_n)_n$ converge faiblement dans $L^1_{H\times H}([T_0,T_1])$ vers $(\dot{v}+q,q)$, par le lemme de Mazur, il existe une suite $(\omega_n,\varpi_n)_n$ qui converge fortement dans $L^1_{H\times H}([T_0,T_1])$ vers $(\dot{v}+q,q)$ avec $\omega_n \in co\{\dot{v}_m + q_m : m \ge n\}$ et $\varpi_n \in co\{q_m : m \ge n\}$.

Donc on peut extraire de la suite $(\omega_n,\varpi_n)_n$ une sous-suite qui converge p.p. vers $(\dot{v}+q,q)$ et par conséquent il existe un ensemble Lebesgue négligeable $\mathcal{S} \in [T_0,T_1]$ tel que pour chaque $t \in [T_0,T_1]\backslash\mathcal{S}$, on a

$$\dot{v}(t)+q(t) \in \bigcap_{n\ge 0} \overline{\{\dot{v}_m(t) + q_m(t) : \quad m \ge n\}} \subset \bigcap_{n\ge 0} \overline{co}\{\dot{v}_m(t)+q_m(t) : \quad m \ge n\},$$

et

$$q(t) \in \bigcap_{n\ge 0} \overline{\{q_m(t) : \quad m \ge n\}} \subset \bigcap_{n\ge 0} \overline{co}\{q_m(t) : m \ge n\}.$$

Grâce à (3.45) et (3.46), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in H$, on a également

$$\langle y, \dot{v}(t) + q(t)\rangle \le \sigma\left(y, -\Upsilon\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)),v_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t)))\right),$$

et

$$\langle y, q(t)\rangle \le \sigma\left(y, F\left(\chi_n(t), u_n(\chi_n(t)), v_n(\chi_n(t))\right)\right).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\langle y, \dot{v}(t) + q(t)\rangle \le \sup_{m\ge n}\langle y, \dot{v}_m(t) + q_m(t)\rangle,$$

et

$$\langle y, q(t)\rangle \le \sup_{m\ge n}\langle y, q_m(t)\rangle.$$

Ce qui implique que

$$\langle y, \dot{v}(t) + q(t) \rangle \leq \limsup_{n \to +\infty} \sigma \left(y, -\Upsilon \partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)), v_n(\theta_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) \right),$$

et

$$\langle y, q(t) \rangle \leq \limsup_{n \to +\infty} \sigma \left(y, F\left(\chi_n(t), u_n(\chi_n(t)), v_n(\chi_n(t)) \right) \right).$$

D'après la proposition 3.4 et en utilisant la s.c.s. scalaire de F, pour tout $t \in [T_0, T_1]$, on obtient

$$\langle y, \dot{v}(t) + q(t) \rangle \leq \sigma \left(y, -\Upsilon \partial d_{C(t, u(t), v(t))}(v(t)) \right),$$

et

$$\langle y, q(t) \rangle \leq \sigma \left(y, F\left(t, u(t), v(t) \right) \right).$$

On conclut donc que

$$\dot{v}(t) + q(t) \in -\Upsilon \partial d_{C(t, u(t), v(t))}(v(t)) \subset -N_{C(t, u(t), v(t))}(v(t)),$$

et

$$q(t) \in F(t, u(t), v(t)).$$

par conséquence

$$\dot{v}(t) \in -N_{C(t, u(t), v(t))}(v(t)) - q(t) \qquad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T_1],$$

et

$$q(t) \in F(t, u(t), v(t)) \qquad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T_1],$$

avec

$$\| \dot{v}(t) + q(t) \| \leq \Upsilon \qquad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T_1].$$

Alors il existe au moins une $\mathscr{W}_H^{2,1}([T_0, T_1])$-solution $u^0(\cdot)$ du problème

$$\begin{cases} \ddot{u}^0(t) \in -N_{C(t, u^0(t), \dot{u}^0(t))}(\dot{u}^0(t)) - F(t, u^0(t), \dot{u}^0(t)), \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T_1] \\ \dot{u}^0(t) \in C(t, u^0(t), v^0(t)), \\ u^0(T_0) = u_0, \dot{u}^0(T_0) = v_0. \end{cases}$$

(b) Pour prolonger la solution dans l'intervalle $[T_0, T]$, on choisit $T_1 < T_2 \leq T$ tel que (3.26) est vérifie et on considère le problème suivant : trouver $u^1 : [T_1, T_2] \to H$ tel que

$$\begin{cases} \ddot{u}^1(t) \in -N_{C(t, u^1(t), \dot{u}^1(t))}(\dot{u}^1(t)) - F(t, u^1(t), \dot{u}^1(t)), \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_1, T_2] \\ \dot{u}^1(t) \in C(t, u^1(t), v^1(t)) \\ u_1(T_1) = u^0(T_1), \dot{u}^1(T_1) = v^0(T_1), \end{cases}$$

si $T_2 = T$ on obtient la solution sur l'intervalle $[T_0, T]$. Sinon, on peut appliquer ce qui précède aux intervalles $[T_2, T_3]$, ..., $[T_{n-1}, T]$, et on obtient la solution $u^2(\cdot)$ sur $[T_2, T_3]$ avec $u^2(T_2) = u^1(T_2)$ et $\dot{u}^2(T_2) = v^1(T_2)$, ..., $u^{n-1}(\cdot)$ sur $[T_{n-1}, T]$ avec $u^{n-1}(T_{n-1}) = u^{n-2}$ et $\dot{u}^{n-1}(T_{n-1}) = v^{n-2}(T_{n-1})$. Considérons les applications $u : [T_0, T] \to H$ et $v : [T_0, T] \to H$ définies par $u(t) = u^n(t)$ et $v(t) = v^n(t)$ pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$ et $i \in \mathbb{N}$, alors il est facile de conclure que u et v satisfont $(\mathcal{P}_2)$.

Ceci complète la preuve.

■

Corollaire 3.1. *Soit $C : [T_0, T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées qui vérifie les hypothèse $(\mathcal{A}_{C_2})$ et $(\mathcal{A}_{C_3})$. Soit $F : [T_0, T] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées satisfaisant l'hypothèse $(\mathcal{A}_F)$. Supposons de plus que les ensembles $C(t, u, v)$ sont equi-uniformément sous-lisse pour tout $(t, u, v) \in [T_0, T] \times H \times H$. Alors, pour tout $(u_0, v_0) \in H^2$, avec $v_0 \in C(T_0, u_0, v_0)$, il existe au moins une $\mathscr{W}_H^{1,2}([T_0,\, T])$ solution $u(\cdot)$ du problème $(\mathcal{P}_2)$.*

P*reuve*. **Étape 01 :** Comme dans le théorème précédent on considéré pour chaque $n \geq 1$, une partition de $[T_0, T]$ définie par $t_i^n := ih_n$ pour $0 \leq i \leq n$, tel que $h_n := \frac{T}{n}$ et $t_0^n = T_0$. Fixons $u_0^n = u_0$, $v_0^n = v_0 \in C(T_0,\, u_0,\, v_0)$ et on prend $u_1^n = u_0 + h_n v_0$. On construit $u_0^n, u_1^n, ..., u_n^n$ et $v_0^n, v_1^n, ..., v_n^n$ dans H tels que pour chaque $i = 0, 1, ..., n$, les inclusions (3.29), (3.30), (3.31) sont vérifiées.
La boule compacité de l'ensemble $C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)$ permet de choisir

$$v_1^n \in \operatorname{Proj}_{C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)}(v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)).$$

D'où $v_1^n \in C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)$, et $v_0^n - h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n) - v_1^n \in N_{C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)}(v_1^n)$. En utilisant $(\mathcal{A}_{C_2})$ et (3.27), on obtient

$$\begin{aligned}
\|v_1^n - v_0^n + h_n f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| &\leq d_{C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)}(v_0^n) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq d_{C(t_0^n, u_0^n, v_0^n) \cap \rho \overline{\mathbb{B}}}(v_0^n) + \operatorname{exc}_\rho(C(t_0^n, u_0^n, v_0^n), C(t_1^n, u_1^n, v_1^n)) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq \operatorname{exc}_\rho(C(t_0^n, u_0^n, , v_0^n), C(t_1^n, u_1^n, , v_1^n)) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\| \\
&\leq L(t_1^n + \|u_1^n - u_0^n\| + \|v_1^n - v_0^n\|) + h_n \|f(t_0^n, u_0^n, v_0^n)\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\|v_1^n - v_0^n\| \leq L h_n (1 + \|v_0^n\|) + L(\|v_1^n - v_0^n\|) + 2\beta h_n (1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|),$$

et par conséquent

$$(1 - L)\|v_1^n - v_0^n\| \leq L h_n (1 + \|v_0^n\|) + 2 h_n \beta \Big(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|\Big),$$

ce qui implique que

$$\|v_1^n\| \leq \|v_0^n\| + \frac{Lh_n}{1-L}\Big(1+\|v_0^n\|\Big) + \frac{2\beta h_n}{1-L}\Big(1+\|u_0^n\|+\|v_0^n\|\Big).$$

D'autre part on a l'estimation

$$\|u_1^n\| \leq \|u_0^n\| + h_n\|v_0^n\|.$$

Par addition, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\|v_1^n\| + \|u_1^n\| &\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + T\frac{L+2\beta}{1-L} + T\Big(\frac{L+2\beta}{1-L}+1\Big)\|v_0^n\| + T\frac{2\beta}{1-L}\|u_0^n\| \\
&\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + 2T\frac{L+2\beta}{1-L} + T\frac{1+2\beta}{1-L}(\|v_0^n\|+\|u_0^n\|) \\
&\leq (\|v_0^n\|+\|u_0^n\|)\left(1+T\frac{1+2\beta}{1-L}\right) + 2T\frac{L+2\beta}{1-L}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|v_1^n\| + \|u_1^n\| &\leq (\|v_0^n\|+\|u_0^n\|)e^{T\frac{2\beta+1}{1-L}} + 2T\frac{L+2\beta}{1-L}e^{T\frac{2\beta+1}{1-L}} \\
&\leq \Big(\|v_0^n\|+\|u_0^n\| + 2T\frac{L+2\beta}{1-L}\Big)e^{T\frac{2\beta+1}{1-L}} = \rho.
\end{aligned}$$

Supposons que $u_0^n, u_1^n, ..., u_m^n, v_0^n, v_1^n, ..., v_m^n$, ont été construites pour $i = 0, 1, ..., m$, avec $m \leq n$, tel que

$$u_{i+1}^n = u_i^n + h_n v_i^n.$$

La boule compacité de l'ensemble $C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)$ permet de choisir $v_{i+1}^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n))$, donc $v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)$, et

$$v_i^n - h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n) - v_{i+1}^n \in N_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(v_{i+1}^n).$$

En utilisant $(\mathcal{A}_{C_2})$ et (3.27), on a

$$\begin{aligned}
&\|v_{i+1}^n - v_i^n + h_n f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \leq d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(v_i^n) + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\quad\leq d_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(v_{i+1}) + h_n\|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\| + \mathrm{exc}_\rho(C(t_i^n, u_i^n, v_i^n), C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)) \\
&\quad\leq \mathrm{exc}_\rho(C(t_i^n, u_i^n, v_i^n), C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)) + h_n\|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\| \\
&\quad\leq \mathcal{H}_\rho(C(t_i^n, u_i^n, v_i^n), C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)) + h_n\|f(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\| \\
&\quad\leq L(|t_{i+1}^n - t_i^n| + \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|v_{i+1}^n - v_i^n\|) + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\quad\leq Lh_n(1+\|v_i^n\|) + L\|v_{i+1}^n - v_i^n\| + h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq Lh_n(1+\|v_i^n\|) + L\|v_{i+1}^n - v_i^n\| + 2h_n\|f(t_i^n, u_i^n, v_i^n)\|,$$

donc

$$(1-L)\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq Lh_n(1+\|v_i^n\|) + 2h_n\beta(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|), \tag{3.47}$$

par conséquent

$$\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \frac{L}{1-L} h_n (1 + \|v_i^n\|) + \frac{2h_n \beta}{1-L} (1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| &\leq \|v_i^n\| + \frac{L}{1-L} h_n + \frac{L}{1-L} \|v_i^n\| + 2h_n \frac{\beta}{1-L} + 2h_n \frac{\beta}{1-L} \|u_i^n\| \\
&\leq \|v_i^n\| + h_n \frac{L+2\beta}{1-L} + h_n \frac{L+2\beta}{1-L} \|v_i^n\| + h_n \frac{2\beta}{1-L} \|u_i^n\|,
\end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_0^n\| + h_n \frac{(i+1)(L+2\beta)}{1-L} + h_n \frac{L+2\beta}{1-L} \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\| + h_n \frac{2\beta}{1-L} \sum_{j=0}^{i} \|u_j^n\|.$$

D'autre part, on a

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_i^n\| + h_n \|v_i^n\|,$$

donc par induction, on a

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_0^n\| + h_n \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\|.$$

En combinant les dernières inégalités, on trouve que

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| + \|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + 2T \frac{L+2\beta}{1-L} + T \Big(\frac{L+2\beta}{1-L} + 1 \Big) \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\| + 2T \frac{\beta}{1-L} \sum_{j=0}^{i} \|u_j^n\| \\
&\leq \|u_0^n\| + \|v_0^n\| + 2T \frac{L+2\beta}{1-L} + T \frac{1+2\beta}{1-L} \sum_{j=0}^{i} \Big(\|v_j^n\| + \|u_j^n\| \Big).
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.2, on obtient

$$\|v_{i+1}^n\| + \|u_{i+1}^n\| \leq \Big(\|v_0^n\| + \|u_0^n\| + 2T \frac{L+2\beta}{1-L} \Big) e^{T \frac{2\beta+1}{1-L}} = \rho.$$

De plus, à partir de (3.47), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n} \right\| &\leq \frac{L}{1-L} (1 + \|v_i^n\|) + \frac{2\beta}{1-L} (1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|) \\
&\leq \frac{L}{1-L} (1+\rho) + \frac{2}{1-L} \beta (1+\rho) \\
&\leq \frac{(L+2\beta)(1+\rho)}{1-L} = \Delta.
\end{aligned}$$

et par conséquent l'algorithme est bien défini et on a déjà montré que les suites $(u_i^n)_i$, $(v_i^n)_i$ sont uniformément bornées par ρ et la suite $\left(\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\right)_i$, est uniformément bornée par Δ. En procédant les mêmes étapes de la démonstration du théorème 3.3 dans intervalle $[T_0, T]$ on trouve qu'il existe au moins une $\mathscr{W}_H^{1,2}([T_0, T])$ solution $u(\cdot)$ du problème $(\mathcal{P}_2)$. ■

3.4.2 Application à une classe d'inégalités quasi-variationnelles

On peut déduire du Théorème 3.3 un résultat d'existence pour les problèmes d'inégalité quasi-variationnelle suivants. Trouve $u : [T_0, T] \to H$ tel que, pour tout $\kappa > 0$, on a

$$(\mathcal{AP}_2) \begin{cases} \langle l(t), w - \dot{u}(t)\rangle \leq \langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t)\rangle + a(\dot{u}(t), w - \dot{u}(t)) + b(u(t), w - \dot{u}(t)) \\ \qquad\qquad +\kappa\|w - \dot{u}(t)\|^2 \quad \forall w \in S + \psi(t, u(t), \dot{u}(t)). \\ u_0 = u(T_0), \dot{u}(T_0) = \dot{u}_0 \in S + \psi(T_0, u_0, \dot{u}_0). \end{cases}$$

$a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux formes bilinéaires réelles, symétriques, bornées et elliptiques sur $H \times H$, $l \in \mathscr{W}_H^{1,2}([T_0, T])$, S est une multi-application à valeurs fermées non nécessairement convexes et $\psi : [T_0, T] \times H \times H \to H$ est une fonction Lipschitzienne.

Théorème 3.4. *Soit S une multi-application à valeurs non vides fermées relativement compact de H, pour chaque $t \in [T_0, T]$,*

$(\mathcal{AS}_1)$ *S est r-prox-régulier.*

$(\mathcal{AS}_2)$ *A (resp. B) est un opérateur linéaire borné sur H induite par $a(\cdot,\cdot)$ (resp. $b(\cdot,\cdot)$), tels que*

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle \; (resp.\; b(u, v) = \langle Bu, v\rangle) \quad pour\,tous\; u,\, v \in H,$$

$(\mathcal{AS}_3)$ *l est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\|l(t)\| \leq \mu$.*

$(\mathcal{AS}_4)$ *Il existe des constantes réelles $L \geq 0$, $\alpha_1 \in]0, 1[$ et $\alpha_2 \geq 0$, tels que*

$$\|\psi(t, x, y) - \psi(s, u, v)\| \leq L|t - s| + \alpha_1\|x - u\| + \alpha_2\|y - v\|,$$

pour tous $x, y, u, v \in H$ et pour tout $s \leq t$ dans $[T_0, T]$.

Alors, pour chaque $u_0 \in H$, il existe au moins une $\mathscr{W}_H^{2,1}([T_0, T])$-solution du problème $(\mathcal{AP}_2)$.

Preuve. Par la Remarque 1.2, l'inégalité quasi-variationnelle de type $(\mathcal{AP}_2)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\ddot{u}(t) + A\dot{u}(t) + Bu(t) - l(t) \in -N^P_{S+\psi(t,u(t),\dot{u}(t))}(\dot{u}(t)).$$

En utilisant la Proposition 1.5, on obtient

$$-\ddot{u}(t) \in N_{C(t,u(t),\dot{u}(t))}(\dot{u}(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)),$$

où $C(t,u(t),\dot{u}(t)) = S+\psi(t,u(t),\dot{u}(t))$ et $F(t,u(t),\dot{u}(t)) = \{A\dot{u}(t)+Bu(t)-l(t)\}$. Évidemment, C satisfait les hypothèses (H_1^C) et (H_3^C). D'après la Proposition 3.6 et pour tous $u,\dot{u},v,\dot{v} \in H$ et $s \leq t \in [T_0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\rho(C(t,u,\dot{u}),C(s,v,\dot{v})) &\leq \sup_{x\in\rho\overline{\mathbb{B}}} \left| d_S(x-\psi(t,u,\dot{u})) - d_S(x-\psi(s,v,\dot{v}))\right| \\
&\leq \|\psi(t,u,\dot{u}) - \psi(s,v,\dot{v})\| \\
&\leq L'|t-s| + \alpha_1'\|u-v\| + \alpha_2'\|\dot{u}-\dot{v}\|.
\end{aligned}$$

Puisque l est continu, il est clair que F est une multi-application s.c.s. à valeurs convexes. De plus, seul l'élément de norme minimale satisfait une condition de croissance linéaire avec $\beta = \mu + \|A\| + \|B\|$. Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 3.3 sont satisfaites. Nous avons donc l'existence de solutions de problèmes $(\mathcal{AP}_2)$. ∎

CONCLUSION

Dans la première partie de cette thèse, un processus de rafle non-convexe du premier ordre dépendant de l'état avec des perturbations non-bornées à valeur d'ensemble a été considéré. Le processus de rafle du second ordre a été considéré dans la deuxième partie de cette thèse. L'existence d'une solution absolument continue a été prouvée pour une classe d'ensembles non-convexes, à savoir des ensembles uniformément sous-lisses dans la première partie et uniformément prox-réguliers dans la deuxième partie, en adaptant un schéma de discrétisation implicite au cas non-convexe. L'approche présentée dans ce document peut être appliquée à d'autres ensembles généraux, tels que les ensembles positivement α-far on peut aussi envisager le cas des ensembles uniformément semi-continus inférieurement. L'hypothèse standard de Lipschitz dans la deuxième partie a été remplacée par une hypothèse tronquée, afin de traiter une large classe d'ensembles non-bornés. En outre, nous avons affaibli la perturbation multivoque en ne prenant que l'élément de norme minimale satisfaisant à une condition de croissance linéaire.
Comme perspective, on peut aussi mettre une condition de troncature sur la perturbation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Adly and B.K. Le, *Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces.* J. Optim. Theory Appl. 169 (2016), 407-423.

[2] D. Affane, M. Aissous et M.F. Yarou, *Existence results for sweeping process with almost convex perturbation.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie. 61(109) (2018), 119–134.

[3] D. Affane, M. Aissous M. F. Yarou, *Almost mixed semi-continuous perturbation of Moreau's sweeping process.* Evol. Equ. Control Theory. 9(1) (2020), 27–38.

[4] D. Affane and L. Boulkemh, *Topological properties for a perturbed first order sweeping process.* Acta Univ. Sapientiae, Math. 13(1) (2021), 1–22.

[5] D. Affane and L. Boulkemh, *First order sweeping process with sub-smooth sets.* Miskolc Math. Notes. 23(1) (2022), 13–27.

[6] D. Affane and M.F. Yarou, *Unbounded perturbation for a class of variational inequalities.* Discuss. Math. Diff. Inclus. Control Optim. 37 (2017), 83–99.

[7] D. Affane and M. F. Yarou, *General second order functional differential inclusion driven by the sweeping process with subsmooth sets.* J. Nonlinear Funct. Anal. 26 (2020), 1-18.

[8] D. Affane and M. F. Yarou, *Perturbed first-order state dependent Moreau's sweeping process.* Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 12 (2021), 605–616.

[9] D. Affane and M. F. Yarou, *Perturbed second-order state-dependent Moreau's sweeping process.* Mathematical Analysis and its Contemporary Applications. 4 (1) (2022), 9–23.

[10] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators.* Applicable Mathematics Series, (1984).

[11] H. Attouch and R.J.B. Wets, *Quantitative stability of variational systems. I. The epigraphical distance.* Trans. Amer. Math. Soc. 328(2) (1991) 695-729.

[12] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions.* Springer-Verlag, Berlin, (1982).

[13] J.P. Aubin et H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhauser, Boston. Basel. Berlin, (1990).

[14] D. Aussel, A. Daniilidis and L. Thibault, *Subsmooth sets : Functional characterizations and related concepts.* Trans. Am. Math. Soc. 357 (2005), 1275–1301.

[15] H. Benabdellah, *Existence of solution to the nonconvex sweeping process.* J. Differ. Equations. 164 (2000), 286-295.

[16] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, theory et applications*, Masson, Paris, (1983).

[17] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, *Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach space.* J. Convex Anal. 13(3-4) (2006), 525–559.

[18] S. Boudada and M. F. Yarou, *Sweeping process with right uniformly lower semicontinuous mappings.* Positivity. 24 (2020), 207–228.

[19] N. Boudjerida, D. Affane and M.F. Yarou, *Non-convex perturbation to evolution problems involving Moreau's sweeping process.* Ann. West Univ. Timisoara - Math. Comput. Sci. 59 (2023), 151-175.

[20] N. Boudjerida, D. Affane and M.F. Yarou, *Truncated Perturbation to Evolution Problems Involving Time-Dependent Maximal Monotone Operators.* Lobachevskii J. Math. 45(2) (2024), 621-635.

[21] M. Bounkhel, *Regularity concepts in nonsmooth analysis.* Springer, (2012).

[22] M. Bounkhel and L. Thibault, *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space.* J. Nonlinear Convex Anal. 6 (2005), 359-374.

[23] M. Bounkhel and M.F. Yarou, *Existence results for nonconvex sweeping process with perturbation and with delay : Lipschitz case.* Arab J. Math. Sci. 8 (2002), 15–26.

[24] B. Brogliato, A. Daniilidis, C. Lemarechal and V. Acary, *On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusion.* Systems & Control Letters. Elsevier. 55 (1) (2006), 45–51.

[25] B. Brogliato and L. Thibault, *Existence and uniqueness of solutions for nonautonomous complementary dynamical systems.* J. Convex Anal. 17(3-4) (2010), 961– 990.

[26] C. Castaing, *Quelques problèmes d'évolution du second ordre*. Sém. d'Anal. Conv. Montp. 5 (1988).

[27] C. Castaing, A.G. Ibrahim and M.F. Yarou, *Existence problems in second order evolution inclusions : discretization and variational approach.* Taiwan. J. Math. 12(6) (2008), 1435–1477.

[28] C. Castaing, A.G. Ibrahim and M.F. Yarou, *Some contributions to nonconvex sweeping process.* J. Nonlinear. Convex Anal. 10 (2009), 1–20.

[29] C. Castaing and M.D.P. Monteiro-Marques, *BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuons moving convex sets.* Set. Valued Anal. 3(4) (1995), 381-399.

[30] C. Castaing, T.X. Duc Ha and M. Valadier, *Evolution equations governed by the sweeping process.* Set-Valued Anal. 1(2) (1993) 109-–139.

[31] C. Casting and M. Valadier, *Convexe Analysis and Measurable Multifonction.* Springer-verlage, Berlin, (1977).

[32] N. Chemetov and M.D.P. Monteiro Marques, *Nonconvex quasi-variational differential inclusions.* Set. Valued Anal. 5 (2007), 209-221.

[33] K. Chraibi, *Etude théorique et numérique de problèmes d'évolution en présence de liaisons unilatérales et de frottement.* 1987. Thèse de doctorat. Montpellier 2.

[34] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern and P.R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory.* Springer-Verlag, New York, (1998).

[35] F.H. Clarke, R. Stern and P.R. Wolenski, *Proximal smoothness and the lower-C^2 property.* J. Convex Anal. 2(1-2) (1995), 117-144.

[36] G. Colombo and V.V. Goncharov, *The sweeping processes without convexity.* Set-Valued. Anal. 7(1999), 357-374.

[37] G. Colombo and M.D.P. Monteiro-Marques, *Sweeping by continuons prox-regular set.* J. Differential Equations. 187(1) (2003), 46-62.

[38] G. Colombo and L. Thibault, *Prox-regular sets and applications.* Handbook of Nonconvex Analysis and Applications. International Press of Boston, 2010. 99-182.

[39] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Courier Corporation, (2010).

[40] K. Deimling, *Multivalued Diffrential Equations*, De Gruyter, Berlin, (1992).

[41] G. Duvaut and J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics.* Springer Science & Business Media, (2012).

[42] S. Djebali, L. Górniewicz and A. Ouahab, *Solution sets for differential equations and inclusions.* de Gruyter, (2012).

[43] H. Federer, *Curvature measures.*Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 418–491.

[44] T. Haddad, J. Noel and L. Thibault, *Perturbed sweeping process with a subsmooth set depending on the state.* Linear and Nonlinear Anal. 2(1) (2016), 155–174.

[45] A. Hantoute and E. Vilches, *Lyapunov pairs for perturbed sweeping processes.* Optim. Lett. 12(8) (2018), 1773–1787.

[46] J.M. Holte, *Discrete Gronwall lemma and applications.* MAA-NCS meeting at the University of North Dakota. 24 (2009), 1–7.

[47] A. Jourani and E. Vilches, *positively α-far sets and existence results for generalized perturbed sweeping process.* J. Convex Anal. 23 (3) (2016), 775–821.

[48] M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 12 (1998), 179–191 .

[49] B.K. Le, *Existence of solutions for sweeping processes with local conditions.* J. Convex Anal. 27(3) (2020), 833-844.

[50] I. Mecemma, S. Lounis and M.F. Yarou, *First Order nonconvex sweeping processwith subsmooth sets.* Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. 49 (2)(2023), 281-294.

[51] I. Mecemma, S. Lounis and M.F. Yarou, *Second order differential inclusion with unbounded nonconvex moving sets.* UPB Sci. Bull. Series A. 85(4) (2023), 67-78.

[52] M.D.P. Monteiro Marques, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems : Shocks and Dry Friction.* Birkhäuser, Basel (1993).

[53] J.J. Moreau, *Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss*, C.R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 871–874.

[54] J.J. Moreau, *Quadratic programming in mechanics : Dynamics of one-sided constraints.* J. SIAM Control series A, (1966), 153–158.

[55] J.J. Moreau, *Rafle par un convexe variable I*, S´em. Anal. Convexe Montpellier, France, (1971), Exposé 15.

[56] J.J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space.* Journal of Differential Equations, 26 (1977), 347-374.

[57] F. Nacry, *Truncated nonconvex state-dependent sweeping process : implicit and semi-implicit adapted Moreau's catching-up algorithms.* J. Fixed Point Theory Appl. 20(3) (2018), 1-21.

[58] F. Nacry and L. Thibault, *BV prox-regular sweeping process with bounded truncated variation.* Optimization. 69(7-8) (2020), 1391-1437.

[59] M.A. Noor, *General variational inequalities.* Appl. Math. Lett. 1 (1988), 119-122.

[60] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L.Thibault, *Local differentiability of distance functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 352(11) (2000), 5231–5249.

[61] W. Rudin, *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc, New York, (1991).

[62] M. Sofonea and A. Matei, *Variational inequalities with applications : a study of antiplane frictional contact problems.* Vol. 18. Springer Science & Business Media, (2009).

[63] L. Thibault, *Sweeping process with regular and nonregular sets.* J. Differential Equations
193 (2003), 1–26 .

[64] L. Thibault, *Subsmooth functions and sets.* Linear Nonlinear Anal. 4 (2018), 257–269.

[65] A.A. Tolstonogov, *Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation.* Nonlinear Anal. 108 (2014), 291-30.

[66] A.A. Tolstonogov, *Differential inclusions with unbounded right-hand side : existence and relaxation theorems.* Proc. Steklov Inst. Math. 291 (2015), 190-207.

[67] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* Academic press, New York and London, (1972).

[68] K. Yoside, *Function analysis.* Spring-verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1980).