République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Par

NOUHA BOUDJERIDA

Thème

Existence de solutions pour une classe de problèmes d'évolution et application à des problèmes de contrôle optimal

Soutenue publiquement le 13/06/2024, devant le jury composé de:

Président :	Nouressadat Touafek	Professeur	Université de Jijel
Directeur de thèse :	Doria Affane	Professeur	Université de Jijel
Co-directeur de thèse :	Mustapha Fateh Yarou	Professeur	Université de Jijel
Examinateurs :	Rabah Khaldi	Professeur	Université d'Annaba
	Assia Guezane-Lakoud	Professeur	Université d'Annaba
	Farida Belhannache	MCA	Université de Jijel

Promotion **2023/2024**

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie ***ALLAH***, le bon Dieu miséricordieux de m'avoir aidée à réaliser ce travail.

Je remercie profondément ma directrice de thèse Madame ***Doria Affane***, Professeur à l'université de Jijel, pour son encadrement exceptionnel assurant le bon déroulement du parcours du doctorat, ainsi que pour ses judicieux conseils et son aide tout au long de ces années. Sa disponibilité, ses qualités scientifiques et pédagogiques, sa rigueur, mais surtout son sérieux dans l'encadrement qui ont grandement contribué à l'achèvement de ce travail de recherche.

Je tiens à remercier tout particulièrement, mon co-directeur de thèse Monsieur ***Mustapha Fateh Yarou***, Professeur à l'université de Jijel, dont l'expertise et ses conseils ont considérablement enrichi la réalisation de cette recherche.

Un grand merci au président Monsieur ***Nouressadat Touafek***, Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté la responsabilité de présider le jury. Mes remerciements s'adressent également aux honorables membres de jury: Monsieur ***Rabah Khaldi***, Professeur à l'université d'Annaba, Madame ***Assia Guezane-Lakoud***, Professeur à l'université d'Annaba et Madame ***Farida Belhannache***, MCA à l'université de Jijel, pour leur précieuse contribution et leur examen attentif de cette thèse.

Un merci spécial à mes chers parents pour leur soutien, leurs prières tout au long de mes études, mes chers frères et sœur, ainsi qu'à mon fiancé, pour leur soutien constant et leurs encouragements au cours de cette expérience académique. J'exprime aussi ma sincère gratitude et mes remerciements à mes collègues du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées et tous mes enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

En optimisation mathématique et en analyse variationnelle, l'étude des inclusions gouvernées par des opérateurs maximaux monotones est fondamentale. Ses applications sont très diverses, couvrant de nombreuses spécialités et fournissant un ensemble d'outils puissants pour résoudre des problèmes complexes. La recherche dans ce domaine est toujours en cours, valorisant le développement algorithmique à la fois théorique et pratique. Ces opérateurs possèdent certaines propriétés qui permettent d'assurer l'existence et l'unicité de solutions liées à ces problèmes. Dans ce contexte, les inclusions différentielles gouvernées par un opérateur maximal monotone fixe A, ont pris apparition sous la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in Au(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases}$$

où $D(A)$ est le domaine de A. Rigoureusement étudié par différentes méthodes dont on peut citer quelques travaux tels que [12, 13, 15, 24]. Puis nous avons le cas souvent abordé ou A dépend du temps, où le travail de A. A. Vladimirov [64] a été l'un des premiers à être consacré à l'étude des inclusions d'évolution avec un opérateur maximal monotone dépendant du temps supposé régulier. Dans [47] les auteurs montrent l'existence et l'unicité d'une solution absolument continue, en admettant que $A(\tau)$ est de variation absolument continue, dans le sens où il existe $a \in W^{1,1}(\mathcal{I})$, telle que pour tous $\tau, s \in \mathcal{I}$

$$dis(A(\tau), A(s)) \leq |a(\tau) - a(s)|,$$

où $dis(\cdot, \cdot)$ est la pseudo distance entre les opérateurs maximaux monotones introduite par A. A. Vladimirov [64]. Depuis, divers autres études ont été menées a fin de développer le travail de [47] en introduisant différentes perturbations aux inclusions fondamentales impliquant des opérateurs maximaux monotones et en affaiblissant les hypothèses dans l'objectif d'atteindre des résultats d'existence plus larges. Par exemple, dans [54] les auteurs examinent l'existence et l'unicité d'une solution absolument continue dans un espace de Hilbert H du problème

$$(I)\begin{cases}-\dot{u}(\tau)\in A(\tau)u(\tau)+f(\tau,u(\tau)),\ \text{p.p. } \tau\in\mathcal{I};\\ u(\tau)\in D(A(\tau)),\ \forall\tau\in\mathcal{I};\\ u(0)=u_0\in D(A(0)),\end{cases}$$

où $f:\mathcal{I}\times H\to H$ représente la perturbation du problème qui correspond à une force externe appliquée sur le système. Cette application est Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable sur chaque sous ensemble borné de H et satisfaisant la condition de croissance linéaire. Dans [63], les auteurs démontrent l'existence de solutions du problème (I) lorsque $D(A(\tau))=H$, sans hypothèses concernant la régularité temporelle des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps, et par l'utilisation de la méthode de régularisation Yosida. Dans le cadre d'une perturbation multivoque, A. A. Tolstonogov [62] établit un résultat d'existence sous les hypothèses traditionnelles sur la perturbation (mesurabilité, Lipschitzité au sens de Hausdorff, condition de croissance linéaire) dans un espace de Hilbert séparable. Récemment, B. K. Le dans [49] a étudié pour la première fois une inclusion différentielle plus générale, régie par un opérateur maximal monotone dépendant à la fois du temps et de l'état.

Le processus de la rafle, en anglais "sweeping process" est un cas très important et particulier où l'opérateur maximal monotone est le sous différentiel convexe de la fonction indicatrice d'un ensemble fermé convexe $C(\tau)$. Ce processus a été introduit dans les années soixante-dix par J. J. Moreau dans [50, 51, 52], sous la forme

$$(II)\begin{cases}-\dot{u}(\tau)\in\mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau)),\ \text{p.p. } \tau\in\mathcal{I};\\ u(\tau)\in C(\tau),\ \forall\tau\in\mathcal{I};\\ u(0)=u_0\in C(0),\end{cases}$$

où $\mathcal{N}_{C(\tau)}$ est le cône normal à $C(\tau)$. La motivation originale est de modéliser l'évolution quasi-statique dans l'élastoplasticité, la dynamique du frottement, les matériaux granulaires, la dynamique du contact. Cependant, de nombreuses applications du processus de la rafle sont devenues décisives dans plusieurs branches de la science, en particulier en mécanique non lisse, en optimisation convexe, en modélisation du mouvement des foules, en économie mathématique, en réseaux dynamiques et en circuits électriques commutés, etc, on peut se référer aux travaux [34, 42, 48]. La généralisation du problème (II) a fait l'objet de nombreuses études, à titre d'exemple, en présence d'une perturbation multivoque, le problème de la forme

$$(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})\begin{cases}-\dot{u}(\tau)\in\mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau))+F(\tau,u(\tau)),\ \text{p.p. } \tau\in\mathcal{I};\\ u(\tau)\in C(\tau),\ \forall\tau\in\mathcal{I};\\ u(0)=u_0\in C(0),\end{cases}$$

est établi dans [37] où $F:\mathcal{I}\times H\rightrightarrows H$ est consacré à être séparément semicontinue supérieur avec des valeurs convexes compactes et satisfait la condition d'inclusion de la croissance linéaire compacte. Pour un cas moins général, des travaux intéressants concernant l'inclusion différentielle $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ ont été effectués en dimension finie par Castaing et al [27] et C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [31], sous l'hypothèse de convexité de $C(\tau)$ ou de son complément. Il y a une multitude d'autres publications qui abordent cette thématique, couvrant le processus de la rafle dépendant de l'état, le cas du second ordre, le processus de la rafle dégénéré, le processus de la rafle implicite, ainsi que le processus de la rafle non convexe (les ensembles prox-réguliers, les ensembles sous-lisses, les ensembles positivement α-far), on peut consulter les références [3, 8, 18, 29, 38, 45, 46, 66].

Dernièrement dans les articles [2, 4, 5, 9, 10] les auteurs montrent le résultat d'existence pour un problème gouverné par le processus de la rafle, dans le cas d'une perturbation non bornée apparaît lorsque l'élément du norme minimale est borné ou satisfait à une condition de croissance linéaire. Il convient de noter que la méthode utilisée pour la démonstration des résultats d'existence dans les références précédentes est la méthode de rattrapage de Moreau.

La théorie de la relaxation a reçu un grand intérêt chez les chercheurs pour différents problèmes, où ils ont réussi a prouver des théorèmes de densité entre le problème original et le problème convexifié. Nous pouvons mentionner, à titre d'exemple, les articles [32, 39, 44] qui ont commencé à étudier la relaxation pour les inclusions différentielles bornées dans un espace de dimension finie avec l'hypothèse classique de Lipschitzité au sens de Hausdorff. Dans [59], la relaxation est obtenue pour le problème de Cauchy non borné dans un espace de dimension finie, en utilisant une notion plus faible que la Lipschitzité c'est la ρ-Hausdorff Lipschitzité. L'auteur dans [61] a complété les études [44, 59] avec des questions similaires dans l'espace de Banach pour le problème de Cauchy non borné. Nous nous référons également à [41, 56, 60] pour d'autres théorèmes de relaxation concernant des problèmes plus généraux que ceux mentionnés précédemment.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre expose des résultats préliminaires et des outils fondamentaux nécessaires tout au long de notre étude. Nous examinerons des concepts tels que la multi-application, l'analyse convexe, les théorèmes de convergence, la distance de Hausdorff et les opérateurs maximaux monotones.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une nouvelle généralisation des travaux récents d'Affane et al [2, 4, 5], pour montrer l'existence de solution du problème $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ où $C : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ est une multi-application à valeurs fermées non vides convexes dépendant du temps et $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ avec $b > 0$, est une multi-application à valeurs fermées non vides. Les travaux mentionnés précédemment traitent principalement la semicontinuité supérieure et la convexité des perturbations. Notre travail élargit ces études en excluant les conditions de convexité, de bornitude et de compacité aux valeurs de la perturbation ; nous supposons simplement une croissance linéaire sur l'élément de la norme minimale, c-à-d, il existe deux constantes $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$, telles que pour tout $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$,

$$\mathbf{d}(0, F(\tau, y)) \leq \alpha + \beta \|y\|.$$

De plus, notre résultat ne nécessite pas l'hypothèse de la semicontinuité supérieure, nous utilisons à la place une condition plus faible, de Lipschitzité au sens de ρ-Hausdorff, c-à-d, il existe $\zeta > 0$, telle que pour tous $(\tau, y_1), (s, y_2)$ dans $\mathcal{I} \times b\overline{B}$,

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(s, y_2)) < \zeta|\tau - s| + \beta\|y_1 - y_2\|.$$

Ensuite, un autre résultat d'existence pour le problème $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ est présenté, étant le résultat d'existence principal de ce chapitre. Nous nous sommes basés sur des techniques développées dans les travaux de A. A. Tolstonogov [61] pour prouver ce résultat.

D'autre part, nous donnons un résultat d'existence pour le problème convexifié

$$(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau)) + \overline{co}F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in C(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

En outre, nous abordons la relaxation en se fondant sur les résultats obtenus précédemment, autrement dit, nous examinons la relation entre les solutions du problème original $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ et du problème convexifié $(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$.

Dans le troisième chapitre on se penche sur l'étude d'un processus de la rafle perturbé, de la forme

$$(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau)) + F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in C(u(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

où $C : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ est une multi-application à valeurs fermées non vides convexes dépendant de l'état et $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ avec $b > 0$, est une multi-application à valeur fermées non vides non convexes. Les résultats de l'existence et de la relaxation sont présentés, en reprenant les hypothèses précédentes concernant la perturbation dans une perspective plus large, c-à-d, il existe $\xi, \lambda \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telles que, pour tout $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$

$$\mathbf{d}(0, F(\tau, y)) \leq \xi(\tau) + \lambda(\tau)\|y\|,$$

et tous $(\tau, y_1), (\tau, y_2) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$,

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) < \lambda(\tau)\|y_1 - y_2\|.$$

Nous avons obtenu les résultats d'existence de solutions dans ce chapitre en nous inspirant de la méthode de construction de solutions approximatives présentée dans [10] et par l'application d'une méthode de construction donnée dans [61].

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude d'une inclusion d'évolution gouvernée par un opérateur maximal monotone dépendant du temps de la forme

$$(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in D(A(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

ainsi que l'étude du problème convexifié

$$(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + \overline{co}F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in D(A(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

où $A(\tau) : D(A(\tau)) \subset \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ est un opérateur maximal monotone et $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ avec $b > 0$, est une multi-application à valeurs fermées non vides. L'objectif principal de ce chapitre est de traiter les résultats d'existence du problème original $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ et du problème convexifié $(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ et la propriété de relaxation entre ces deux problèmes, en utilisant des techniques développées dans le troisième chapitre. Nous adoptons les mêmes hypothèses sur la perturbation, néanmoins, les hypothèses supposées sur l'opérateur $A(\tau)$ sont différentes de celles sur les ensembles mobiles convexes fermés ; ici, l'opérateur $A(\tau)$ est de variation absolument continue et sa norme minimale satisfait une condition de croissance linéaire.

Notons que les résultats du troisième chapitre ont fait l'objet d'une publication avec le Professeur Doria Affane et le Professeur Mustapha Fateh Yarou dans le journal "Annals of West University of Timisoara-Mathematics and Computer Science" [19], tandis que les résultats présentés dans le quatrième chapitre ont été publiés dans la revue "Lobachevskii Journal of Mathematics" [20].

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous entamons ce chapitre en énonçant nos notations, puis en rappelant quelques résultats de base qui seront essentiels tout au long de cette thèse. Le chapitre aborde des définitions et concepts fondamentaux sur la mesurabilité, les multi-applications, leur sélection et leur mesurabilité, l'analyse convexe, ainsi que quelques résultats de convergence, la distance de Hausdorff, les opérateurs maximaux monotones, et on conclut avec un lemme de Gronwall.

1.1 Notations générales

Dans ce qui suit, $\mathcal{I} = [0, T]$ ($T > 0$), est un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^d$ est l'espace euclidien de dimension finie d muni de la norme $\|\cdot\|$. On note par:

- p.p l'abréviation de presque partout ;
- c-à-d l'abréviation de c'est-à-dire ;
- resp. l'abréviation de respectivement ;
- limsup l'abréviation de limite supérieur ;
- $\overline{\mathbf{R}}$ la droite achevée, c-à-d, $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire ;

- $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^d$ centrée à l'origine, ηB (resp. $\eta\overline{B}$) la boule ouverte (resp. la boule fermée) de rayon $\eta > 0$;
- $\overline{B}(z, \delta)$ la boule fermée de centre z et de rayon $\delta > 0$;
- $L^p_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})\,(1 \leq p < \infty)$ l'espace des applications mesurables $g : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$, tel que $\int_0^T \|g(\tau)\|^p d\tau < \infty$, munie de la norme
$$\|g\|_p = (\int_0^T \|g(\tau)\|^p d\tau)^{\frac{1}{p}};$$
- $L^\infty_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ l'espace des applications $g : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ essentiellement bornées, muni de la norme
$$\|g\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \|g(x)\| \leq c \text{ p.p. sur } \mathcal{I}\};$$
- $\sigma(L^1_{\mathbf{R}^d}, L^\infty_{\mathbf{R}^d})$ la topologie faible définie sur $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$;
- $W^{1,2}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ l'espace des applications u absolument continues sur $\mathcal{I}$ tel que $\dot{u} \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$;
- $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ (resp. $\mathcal{AC}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$) l'espace de Banach des applications $u : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ continues (resp. absolument continues) muni de la norme de la convergence uniforme
$$\|u\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\tau\in\mathcal{I}} \|u(\tau)\|.$$

Pour $\mathcal{D}$ un sous ensemble de $\mathbf{R}^d$, on note par:

- $co(\mathcal{D})$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{D}$;
- $\overline{co}(\mathcal{D})$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{D}$;
- $I_{\mathcal{D}}$ la fonction indicatrice de $\mathcal{D}$, définie par
$$I_{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{D}, \\ +\infty & \text{si } x \notin \mathcal{D}; \end{cases}$$
- $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{D}$, définie par
$$\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{D}; \end{cases}$$
- $\mathbf{d}(\cdot, \mathcal{D})$ la fonction distance entre le point $x \in \mathbf{R}^d$ et l'ensemble $\mathcal{D}$ définie par
$$\mathbf{d}(x, \mathcal{D}) = \inf_{v\in\mathcal{D}} \|x - v\|,$$
pour $x \in \mathbf{R}^d$, si $\mathcal{D} = \varnothing$, alors $\mathbf{d}(x, \mathcal{D}) = +\infty$.

Soit $G : \mathcal{J} \times \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ pour $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}$ une multi-application, on note par

- $S(G)$ l'ensemble de toutes les sélections mesurables de la multi-application G;
- $S^p(G)$ l'ensemble de toutes les sélections mesurables dans $L^p_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{J})$ $(1 \leq p < \infty)$ de la multi-application G, donné par

$$S^p(G) = \{f \in L^p_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{J}) : f(\tau, v) \in G(\tau, v)\};$$

- $\mathcal{R}(\mathcal{P}_{G,w_0,\mathcal{J}})$ l'ensemble de solutions du problème $(\mathcal{P}_{G,w_0,\mathcal{J}})$, où w_0 est la condition initiale.

1.2 Quelques notions de mesurabilité

Les résultats qui suivent ont été pris de la référence [11].

Définition 1.1.
Soit X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si

1. $\emptyset \in \Sigma$;
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \backslash A \in \Sigma$;
3. $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

• *Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.*

• *Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.*

• *Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée par $\mathcal{B}(X)$, est la plus petite tribu contenant la topologie de X.*

Définition 1.2.
Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite application Borélienne.

Définition 1.3.
Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbf{R}}$ est une mesure si

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\underset{n}{\cup} A_n) = \underset{n}{\sum} \mu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable* (A_n) *d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints.*

- *Le triple* (X, Σ, μ) *est appelé espace mesuré.*
- *Si* $\mu(A) < \infty$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* μ *est une mesure finie ou que l'espace* (X, Σ, μ) *est fini.*
- *Une mesure* μ *est dite* σ*-finie sur* (X, Σ), *s'il existe une suite* $(E_n)_{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* Σ *telle que* $X = \underset{n}{\cup} E_n$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < \infty$.

Définition 1.4.
Soient (X, Σ, μ) *un espace mesuré et* A *un sous ensemble de* X. *On dit que* A *est* μ*-négligeable ou négligeable, s'il existe* $B \in \Sigma$ *tel que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$.

- On dit qu'une propriété sur X est vraie μ-presque partout (μ.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.
- La tribu μ-complète de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c-à-d,
$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z : \ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu - \text{négligeable}\}.$$
- La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c-à-d, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

1.3 Concepts d'analyse multivoque

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et résultats concernant les multi-applications nécessaires pour notre présente recherche, appelées aussi dans la littérature applications multivoques, multi-fonctions, ou correspondances. Ces résultats ont été pris des références [16], [30], [43], [55] et [57].

1.3.1 Multi-applications et sélections

Définition 1.5.
Soient X, Y *deux ensembles non vides. On appelle multi-application* F *définie sur* X *à*

valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$.

Définition 1.6.
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

- *On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $D(F)$, le sous ensemble de Y défini par:*

$$D(F) = \{x \in X : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle graphe de F, qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par:*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\}.$$

- *On appelle image de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par:*

$$Im(F) = \{y \in Y : \ \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

- *On définit la multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ par:*

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : \ (x, y) \in gph(F)\}.$$

Définition 1.7.
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : D(F) \to Y$ vérifiant:

$$f(x) \in F(x), \forall \, x \in D(F).$$

Définition 1.8.
Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, on définit la sélection minimale de F par:

$$Proj_{F(x)}(0) = \{m_F(x) \in F(x) : \mathbf{d}(0, F(x)) = \|m_F(x)\|\}.$$

Si Y est un espace de Hilbert, la sélection minimale existe (resp. unique) lorsque F est fermée (resp. convexe).

1.3.2 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.9.
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application . On dit que F est Σ-mesurable où mesurable, si pour tout ouvert V de Y

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.1.
Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-finie complet. Soient Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) F *est* Σ*-mesurable ;*

(b) $gphF \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$;

(c) pour chaque $y \in Y$*, l'application* $\mathbf{d}_y : X \to \mathbf{R}$ *définie par* $\mathbf{d}_y(x) = \mathbf{d}(y, F(x))$ *est* Σ*-mesurable.*

Théorème 1.1.
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-finie complet, Y un espace métrique complet séparable, $f : X \to Y$ une application mesurable et $\varrho : X \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable. Alors, $x \mapsto \overline{B}(f(x), \varrho(x))$ est une multi-application mesurable.

Théorème 1.2.
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace de Banach séparable, $F : X \times Y \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable et $u : X \to Y$ une application mesurable. Alors, la multi-application $x \mapsto F(x, u(x))$ est mesurable.

Définition 1.10.
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, l'application mesurable $f : X \to Y$ satisfaisant

$$f(x) \in F(x), \ \forall x \in X,$$

est appelée une sélection mesurable de F.

Théorème 1.3. (*Théorème d'existence de sélections mesurables*)
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

Proposition 1.2.
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-finie complet, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées convexes. Alors la sélection minimale est mesurable.

Théorème 1.4.
Soient X un espace de Banach séparable, $F : \mathcal{I} \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à

valeurs fermées non vides et $(\overline{co}F)(\tau) = \overline{co}F(\tau)$ *l'enveloppe convexe fermée dans* X*, pour* $\tau \in \mathcal{I}$*. Alors,* $\overline{co}F : \mathcal{I} \rightrightarrows X$ *est une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. De plus, si l'ensemble* $S^p(F)$ *est non vide où* $1 \leq p < \infty$*, alors*

$$S^p(\overline{co}F) = \overline{co}S^p(F).$$

Théorème 1.5.
Soient X *un espace de Banach séparable et* $F : \mathcal{I} \rightrightarrows X$ *une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs fermées non vides. Alors, pour toute* $u \in S(\overline{co}F)$ *et* $\varepsilon \geq 0$*, il existe* $v \in S(F)$ *telle que*

$$\max_{0 \leq s \leq \tau \leq T} \| \int_s^\tau \Big(u(\varsigma) - v(\varsigma)\Big) d\varsigma \| < \varepsilon.$$

1.4 Concepts d'analyse convexe

Les résultats suivants sont pris des références [16], [22], [23], [33], [55] et [65].

Définition 1.11. (*Ensemble convexe*)
Une partie A *d'un espace de Hilbert* H*, est dite convexe si pour tous deux points* a, b *appartient à* A *le segment* $[a, b]$ *est contenue dans* A*, c-à-d,* $\lambda A + (1 - \lambda)A \subset A, \forall \lambda \in [0, 1]$*, ou encore* $\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$*.*

Définition 1.12. (*Simplexe*)
On appelle simplexe de $\mathbf{R}^n$*, l'ensemble* Δ_n *défini par*

$$\Delta_n = \Big\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ i = 1, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Définition 1.13. (*Combinaison convexe*)
Soient X *un espace de Hilbert et* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$*. On appelle combinaison convexe des éléments* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tout élément* x *qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \textit{tel que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n\,.$$

Définition 1.14. (*Enveloppe convexe*)
Soit A *un sous ensemble d'un espace de Hilbert* H*. On appelle enveloppe convexe de* A*, qu'on note* $co(A)$*, l'intersection de tous les convexes de* H *contenant* A*, c'est donc le plus petit convexe de* H *contenant* A*.*

Définition 1.15. (*Enveloppe convexe fermée*)
Soit A un sous ensemble d'un espace de Hilbert H. On appelle enveloppe convexe fermée de A qu'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de H contenant A, c'est donc le plus petit convexe fermé de H contenant A.

Théorème 1.6.
Soient H un espace de Hilbert, et K un sous ensemble non vide de H. L'enveloppe convexe fermée de K est caractérisée par

$$\overline{co}(K) = \{y \in H \ : \ \forall y' \in H, \ \langle y', y \rangle \leq \delta^*(y', K)\},$$

où $\delta^*(\cdot, K)$ est la fonction support associée à K définie par

$$\delta^*(y', K) = \sup_{v \in K} \langle y', v \rangle, \ \forall y' \in H.$$

Définition 1.16.
Soient H un espace de Hilbert et $g : H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction réelle.

- *On appelle domaine de définition de g qu'on note par $dom(g)$, l'ensemble défini par*

$$dom(g) = \{x \in H : g(x) < +\infty\}.$$

- *On dit que g est convexe si pour tous $x, y \in dom(g)$, $\lambda \in [0, 1]$, nous avons*

$$g\Big(\lambda x + (1 - \lambda)y\Big) < \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Définition 1.17. (*Dérivée directionnelle*)
Soient H un espace de Hilbert et $g : H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction réelle. La dérivée directionnelle de g en $\bar{x} \in dom(g)$ dans la direction $v \in H$ est donnée par

$$g'(\bar{x}; v) = \lim_{\delta \to 0} \frac{g(\bar{x} + \delta v) - g(\bar{x})}{\delta},$$

lorsque la limite existe.

Définition 1.18. (*Sous différentiabilité*)
Soient g une fonction continue convexe sur l'espace de Hilbert H et $\bar{x} \in dom(g)$. On définit le sous différentiel de g en $\bar{x}$ comme suite

$$\partial g(\bar{x}) = \{\xi \in H : \langle \xi, v \rangle \leq g'(\bar{x}, v), \ pour\ tout\ v \in H\}.$$

Proposition 1.3.
Soit H un espace de Hilbert. Pour toute fonction continue convexe g, tout $\bar{x} \in dom(g)$, et toute direction $v \in H$, on a

1. *la dérivée directionnelle* $g'(\bar{x}; v)$ *existe, positivement homogène et sous additive sur* H *par rapport à* v *;*
2. *le sous différentiel* $\partial g(\bar{x})$ *est fermé convexe ;*
3. *si* $g(\bar{x}) = +\infty$*, alors* $\partial g(\bar{x}) = \emptyset$ *;*
4. $\partial g(\bar{x}) = \{y \in H : \langle y, x - \bar{x}\rangle \leq g(x) - g(\bar{x}), \text{ pour tout } x \in H\}$;
5. $\partial(g + f)(\bar{x}) = \partial g(\bar{x}) + \partial f(\bar{x})$ *et* $\partial(\alpha g)(\bar{x}) = \alpha \partial g(\bar{x})$ *pour tout* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et toute fonction continue convexe* f *définie sur* H*.*

Définition 1.19. (*Cône normal*)
Soient H *un espace de Hilbert réel,* C *un sous ensemble convexe non vide de* H*. On appelle cône normal à* C *au point* u*, et qu'on note* $\mathcal{N}_C(u)$*, l'ensemble défini par*

$$\mathcal{N}_C(u) = \{u' \in H : \langle u', v - u\rangle \leq 0, \text{ pour tout } u \in C\}.$$

Remarque 1.1.
Le cône normal à C *au point* u *est connu aussi comme le sous différentiel de la fonction indicatrice*

$$\mathcal{N}_C(u) = \partial I_C(u).$$

Les résultats suivants donnent quelques propriétés du cône normal.

Proposition 1.4.
Soit C *un sous ensemble fermé convexe d'un espace de Hilbert* H*, alors pour tout* $u \in C$ *on a*

1. $z \in \mathcal{N}_C(u) \Leftrightarrow u \in C$ *et* $\langle z, u\rangle = \delta^*(z, C)$*,*
2. $z = Proj_C(u) \Leftrightarrow u - z \in \mathcal{N}_C(z)$*,*
3. $\partial \mathbf{d}(u, C) = \mathcal{N}_C(u) \cap \overline{B}$*.*

Théorème 1.7.
Soit C *un sous ensemble fermé convexe non vide dans l'espace de Hilbert* H*. Donc, l'application*

$$(x, y) \rightarrow \partial \mathbf{d}(y, C(x))$$

satisfait la propriété de semicontinuité supérieure, c-à-d, pour tout n*, soit* (x_n) *une suite de* H *converge vers* $x \in H$ *et* (y_n) *une suite de* H *avec* $y_n \in C(x_n)$ *converge vers* $y \in C(x)$*, alors pour tout* $z \in H$

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*(z, \partial \mathbf{d}(y_n, C(x_n))) \leq \delta^*(z, \partial \mathbf{d}(y, C(x))).$$

1.5 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris des références [15], [25], [26], [36] et [58].
On commence par rappeler le Théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.8. (*Théorème d'Ascoli-Arzelà*)
Soient X un espace métrique compact, $(Y, \mathbf{d})$ un espace métrique complet, et K un sous ensemble de $\mathcal{C}_Y(X)$. Alors, K est relativement compact si et seulement si K est équicontinue, et l'ensemble

$$K(x) = \{g(x) : g \in K\}, \text{ pour tout } x \in X$$

est relativement compact.

Le théorème suivant est une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.9.
Soient X un sous ensemble compact de $\mathbf{R}$, Y un espace vectoriel normé de dimension finie et (g_n) une suite d'applications absolument continues définies sur X à valeurs dans Y satisfaisant les conditions suivantes:

i) $\forall \tau \in X$, $(g_n(\tau))$ *est un sous ensemble relativement compact de Y ;*

ii) il existe une application à valeurs réelles positives $f \in L^1_Y(X)$ telle que

$$\|\dot{g}_n(\tau)\| \leq f(\tau), \text{ p.p. sur } X.$$

Alors, il existe une sous suite de (g_n) (qu'on note aussi (g_n)) qui converge vers une application absolument continue $g : X \to Y$ au sens suivant:

i) (g_n) *converge uniformément vers g ;*

ii) $(\dot{g}_n)$ *converge faiblement vers $\dot{g}$ dans $L^1_Y(X)$, c-à-d, $(\dot{g}_n)$ converge vers $\dot{g} \in \sigma(L^1_Y(X), L^\infty_Y(X))$.*

Théorème 1.10. (*Théorème de Mazur*)
Soient Y un espace de Banach et K un sous ensemble compact de Y. Alors $\overline{co}(K)$ est compacte.

Lemme 1.1. (*Lemme de Mazur*)
Soient Y un espace de Banach et (x_n) une suite des éléments de Y convergeant faiblement vers x. Alors, il existe une suite (y_n) (où y_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \cdots$) convergeant fortement vers x.

Lemme 1.2.

Soient X un espace de Banach séparable réflexif, $(u_n)_{n\geq 1} \subset L^p_X(\mathcal{I})$ et $u \in L^p_X(\mathcal{I})$ $(1 \leq p < \infty)$. Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée et

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq s\leq \tau\leq T} \| \int_s^\tau \Big(u_n(\varsigma) - u(\varsigma)\Big) d\varsigma \| = 0.$$

Alors, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers u dans $L^p_X(\mathcal{I})$.

Proposition 1.5.

Soit X un espace de Banach uniformément convexe, c-à-d, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \textit{ et } \|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta.$$

Soit (x_n) une suite dans X telle que (x_n) converge faiblement vers $x \in X$ et

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Alors (x_n) converge fortement vers x.

1.6 Distance de Hausdorff

Dans cette section, nous exposons quelques résultats concernant la distance de Hausdorff et la distance de $\rho-$Hausdorff qui sont pris des références [14], [30] et [53]. Considérons un espace métrique $(X, \mathbf{d})$.

Définition 1.20.

Soient Q_1, Q_2 deux sous ensembles de X, l'écart entre Q_1 et Q_2 est défini par

$$e(Q_1, Q_2) = \mathop{sup}_{x_1\in Q_1} \mathbf{d}(x_1, Q_2) = \sup_{x_1\in Q_1} \left(\inf_{x_2\in Q_2} \mathbf{d}(x_1, x_2) \right),$$

et la distance de Hausdorff entre Q_1 et Q_2 est donnée par

$$haus(Q_1, Q_2) = \max\{e(Q_1, Q_2), e(Q_2, Q_1)\}.$$

Observons que $haus(Q_1, Q_2) = haus(Q_2, Q_1)$.
De plus, la distance de Hausdorff entre Q_1 et Q_2 est la distance uniforme entre $\mathbf{d}(\cdot, Q_1)$ et $\mathbf{d}(\cdot, Q_2)$, c-à-d,

$$haus(Q_1, Q_2) = \mathop{sup}_{x\in X} |\mathbf{d}(x, Q_1) - \mathbf{d}(x, Q_2)|.$$

Proposition 1.6. (*Propriétés élémentaires*)
Soient Q_i $(i = 1, 2, 3)$ *des sous ensembles de* X*. On a*

1. $e(Q_1, \emptyset) = \infty$ *si* $Q_1 \neq \emptyset$;
2. $e(\emptyset, Q_2) = 0$;
3. $e(Q_1, Q_2) = 0 \Longleftrightarrow Q_1 \subset \overline{Q_2}$;
4. $e(Q_1, Q_3) \leq e(Q_1, Q_2) + e(Q_2, Q_3)$;
5. $haus(Q_1, Q_2) = 0 \Longleftrightarrow \overline{Q_1} = \overline{Q_2}$;
6. $haus(Q_1, Q_3) \leq haus(Q_1, Q_2) + haus(Q_3, Q_2)$;
7. $\mid \mathbf{d}(x, Q_1) - \mathbf{d}(x, Q_2) \mid \leq haus(Q_1, Q_2)$, $\forall x \in X$.

Soit X un espace vectoriel normé. Pour chaque sous ensemble $S \subset X$ et $\rho \geq 0$, on note

$$S_\rho = S \cap \rho\overline{B}.$$

Définition 1.21.
Soient S, S' *deux sous ensembles de* X*. Pour chaque* $\rho \geq 0$*, l'application* $haus_\rho : X \times X \to \mathbf{R}^+$ *est définie par*

$$haus_\rho(S, S') = \max\{e(S_\rho, S'), e(S'_\rho, S)\}.$$

Proposition 1.7.
Soient S_i $(i = 1, 2, 3)$ *des sous ensembles de* X*. Pour chaque* $\rho \geq 0$*, nous avons*:

(a) *la nonnégativité*: $haus_\rho(S_1, S_2) \geq 0$ *;*

(b) *la symétrie*: $haus_\rho(S_1, S_2) = haus_\rho(S_2, S_1)$;

(c) *l'inégalité triangulaire*: *pour chaque* $\rho > \mathbf{d}(0, S_i)$ $(i = 1, 2, 3)$

$$haus_\rho(S_1, S_3) \leq haus_{3\rho}(S_1, S_2) + haus_{3\rho}(S_2, S_3);$$

(d) *si* S_1, S_2 *sont fermés, alors* $haus_\rho(S_1, S_2) = 0$ *pour tout* $\rho > 0$ *si et seulement si* $S_1 = S_2$.

Remarque 1.2.
Soient S_1, S_2 *des sous ensembles de* X*, notons que si* $\rho = \infty$*,* $haus_\infty(S_1, S_2) = haus(S_1, S_2)$*.*

Lemme 1.3.
Soient X *un espace vectoriel normé et* S *un ensemble convexe fermé tel que* $S_{\rho_0} \neq \emptyset$ *pour*

certain $\rho_0 \geq 0$. *Alors pour tous* $\rho > \rho_0$ *et* $\eta \geq 0$, *on a*

$$haus(S_{\rho+\eta}, S_\rho) \leqslant [(\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0)]\eta,$$

ce qui implique que l'application $\eta \to haus(S_{\rho+\eta}, S_\rho)$ *est lipschitzienne sur* $\mathbf{R}^+$.

Proposition 1.8.
Soient $S, S' \subset X$ *deux sous ensembles fermés convexes tels que* S_{ρ_0}, S'_{ρ_0} *sont non vides pour un certain* $\rho_0 \geqslant 0$. *Alors pour tout* $\rho > \rho_0$,

$$haus(S_\rho, S'_\rho) \leq \frac{2\rho}{\rho - \rho_0} haus_\rho(S, S').$$

Preuve. Pour chaque $\eta > 0$, on a

$$e(S'_\rho, S_\rho) \leqslant e(S'_\rho, S_{\rho+\eta}) + e(S_{\rho+\eta}, S_\rho),$$

et

$$e(S_\rho, S'_\rho) \leqslant e(S_\rho, S'_{\rho+\eta}) + e(S'_{\rho+\eta}, S'_\rho),$$

cela implique que

$$\begin{aligned} haus(S_\rho, S'_\rho) &= \max\{e(S'_\rho, S_\rho), e(S_\rho, S'_\rho)\} \\ &\leq \max\{e(S'_\rho, S_{\rho+\eta}), e(S_\rho, S'_{\rho+\eta})\} + \max\{e(S_{\rho+\eta}, S_\rho), e(S'_{\rho+\eta}, S'_\rho)\}, \end{aligned}$$

par suite

$$haus(S_\rho, S'_\rho) \leqslant \beta_1 + \beta_2,$$

avec

$$\beta_1 = \max\{e(S'_\rho, S_{\rho+\eta}), e(S_\rho, S'_{\rho+\eta})\},$$

et

$$\beta_2 = \max\{e(S_{\rho+\eta}, S_\rho), e(S'_{\rho+\eta}, S'_\rho)\}.$$

Puisque S et S' sont convexes, d'après le Lemme 1.3, on trouve

$$\beta_2 \leq (\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0)\eta. \tag{1.1}$$

En posant

$$\eta = haus_\rho(S, S'), \tag{1.2}$$

on obtient

$$e(S'_\rho, S_{\rho+\eta}) = e(S'_\rho, S) \quad et \quad e(S_\rho, S'_{\rho+\eta}) = e(S_\rho, S').$$

En effet, pour tout $y \in S'_\rho$, on a $\mathbf{d}(y,S) \leq e(S'_\rho, S) \leq \eta$. Alors, $\mathbf{d}(0,S) \leq \|y\| + \mathbf{d}(y,S) \leq \rho + \eta$, c-à-d, $S \subset (\rho+\eta)\overline{B}$, d'où, $S = S_{\rho+\eta}$ et $e(S'_\rho, S) = e(S'_\rho, S_{\rho+\eta})$ et de même, $e(S_\rho, S'_{\rho+\eta}) = e(S_\rho, S')$.
D'où,

$$\beta_1 = \max\{e(S'_\rho, S_{\rho+\eta}), e(S_\rho, S'_{\rho+\eta})\} = \max\{e(S'_\rho, S), e(S_\rho, S')\} = haus_\rho(S,S'). \quad (1.3)$$

D'après (1.1), (1.2) et (1.3), on a

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 &\leqslant ((\rho+\rho)/(\rho-\rho))haus_\rho(S,S') + haus_\rho(S,S')\\ &\leqslant (2\rho/(\rho-\rho_0))haus_\rho(S,S'),\end{aligned}$$

par conséquent

$$haus(S_\rho, S'_\rho) \leqslant \frac{2\rho}{\rho-\rho_0} haus_\rho(S,S').$$

□

1.7 Opérateurs maximaux monotones

Cette section est consacrée à la définition et les propriétés des opérateurs maximaux monotones. Les références largement utilisées ici sont [24], [47] et [64].

1.7.1 Notion d'opérateur

Soient H un espace de Hilbert et $A : H \rightrightarrows H$ une multi-application (opérateur).

Définition 1.22.

Un opérateur A de H est dit monotone si pour tous $x_i \in D(A)$ et $z_i \in A(x_i)$ $(i = 1,2)$, on a

$$\langle z_1 - z_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Exemple 1.1.

Soit A un opérateur monotone de H. Alors, les opérateurs suivants construits à partir de A sont monotones : A^{-1}, λA, pour $\lambda \geq 0$.

Définition 1.23.
Un opérateur monotone A est maximal s'il n'est pas inclus dans d'autres opérateurs monotones, c-à-d, s'il est maximal parmi les opérateurs monotones.

La proposition suivante est considérée comme une explication de la définition précédente.

Proposition 1.9.
A est maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout $(x, y) \in H \times H$ tel que

$$\langle x - u, y - w \rangle \geq 0, \ \textit{pour tout}\ (u, w) \in gph(A).$$

Proposition 1.10.
Soit A un opérateur de H. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I + A) = H$.*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H.*

Définition 1.24.
Si A est un opérateur maximal monotone, A^0x est l'élément de Ax ayant une norme minimale, c-à-d,

$$A^0x = Proj_{Ax}(0).$$

Proposition 1.11.
Si A est un opérateur maximal monotone, alors Ax est convexe fermé pour chaque $x \in H$.

Définition 1.25.
Un opérateur A est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite: $v \in D(A)$ et $y \in A(v)$, chaque fois que $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ fortement dans H et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ faiblement dans H où $v_n \in D(A)$ et $y_n \in A(v_n)$.

Proposition 1.12.
Tout opérateur maximal monotone est demi-fermé.

1.7.2 Pseudo-distance de Vladimirov

Définition 1.26.

Soient $A_1, A_2 : H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. La pseudo-distance de Vladimirov entre A_1 et A_2 et définie par

$$dis(A_1, A_2) = \sup\left\{\frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{\|y_1\| + \|y_2\| + 1},\ x_i \in D(A_i),\ y_i \in A_i x_i,\ i = 1, 2\right\}.$$

La distance $dis(\cdot,\cdot)$ ne constitue pas une métrique, car, en général, l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée.

Lemme 1.4.

Soient A_1, A_2 deux opérateurs maximaux monotones. Alors

(a) $dis(A_1, A_2) \in [0, +\infty]$, $dis(A_1, A_2) = dis(A_2, A_1)$ *et* $dis(A_1, A_2) = 0$ *si et seulement si* $A_1 = A_2$.

(b) $\|x - Proj_{\overline{D(A_2)}}(x)\| \leq dis(A_1, A_2)$ *pour tout* $x \in \overline{D(A_1)}$.

(c) $haus(D(A_1), D(A_2)) \leq dis(A_1, A_2)$.

Lemme 1.5.

Soient A_1, A_2 deux opérateurs maximaux monotones. Si $A_i = \mathcal{N}_{C_i}$ (le cône normal) avec C_i $(i = 1, 2)$ des sous ensembles convexes fermés de H, alors

$$dis(A_1, A_2) = haus(C_1, C_2).$$

Preuve. Soient A_1, A_2 deux opérateurs maximaux monotones et $A_i = \mathcal{N}_{C_i}$ avec C_i $(i = 1, 2)$ des sous ensembles convexes fermés de H. Alors, d'après le Lemme 1.4, on trouve l'inégalité suivante

$$haus(D(A_1), D(A_2)) = haus(C_1, C_2) \leq dis(A_1, A_2),$$

donc, il suffit de montrer que $dis(A_1, A_2) \leq haus(C_1, C_2)$. Soient $x_i \in C_i$ et $y_i \in A_i x_i = \mathcal{N}_{C_i}(x_i)$ $(i = 1, 2)$. Alors, d'après les estimations suivantes

$$\mathbf{d}(x_1, C_2) \leq haus(C_1, C_2) \ \text{ et } \ \mathbf{d}(x_2, C_1) \leq haus(C_1, C_2),$$

on obtient,

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle \leq \|y_1\|\|x_2 - x_1\| \leq \|y_1\|\mathbf{d}(x_2, C_1) \leq \|y_1\| haus(C_1, C_2).$$

De même,

$$\langle y_2, x_1 - x_2\rangle \leq \|y_2\| haus(C_1, C_2).$$

D'où,

$$\begin{aligned}\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle &\leq haus(C_1, C_2)(\|y_1\| + \|y_2\|)\\ &\leq haus(C_1, C_2)(1 + \|y_1\| + \|y_2\|),\end{aligned}$$

par conséquent, $dis(A_1, A_2) \leq haus(C_1, C_2)$. □

1.8 Lemme de Gronwall

Le lemme suivant est pris de la référence [24].

Lemme 1.6.

Soient $h \in L^1_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et α une constante positive. Considérons $\Phi : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\frac{1}{2}\Phi^2(\tau) \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \int_0^\tau h(s)\Phi(s)ds, \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Alors,

$$|\Phi(\tau)| \leq \alpha + \int_0^\tau h(s)ds, \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

CHAPITRE 2

PROBLÈMES D'EXISTENCE ET DE RELAXATION POUR UN PROCESSUS DE LA RAFLE DÉPENDANT DU TEMPS

2.1 Introduction

Ce chapitre comporte dans un premier temps, un théorème qui démontre l'existence de solutions pour une inclusion d'évolution gouvernée par un processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps dans un espace de dimension finie $\mathbf{R}^d$, de la forme

$$(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})\begin{cases}-\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau)) + F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I};\\ u(\tau) \in C(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I};\\ u(0) = u_0 \in C(0),\end{cases}$$

où $C : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ est une multi-application à valeurs fermées non vides convexes et $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ avec $b > 0$, est une multi-application à valeurs fermées non vides vérifiant les hypothèses suivantes:

$(\mathcal{H}_1)$ il existe deux constantes positives β, ζ telles que, pour tous $(\tau, y_1), (s, y_2)$ dans $\mathcal{I} \times b\overline{B}$,

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(s, y_2)) < \zeta|\tau - s| + \beta\|y_1 - y_2\|;$$

$(\mathcal{H}_2)$ il existe $\alpha \geq 0$, telle que, pour tout $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$,

$$\mathbf{d}(0, F(\tau, y)) \leq \alpha + \beta\|y\|.$$

La démonstration de notre premier théorème est basée sur la méthode de rattrapage de Moreau. Cette méthode est construite avec une discrétisation du temps et l'utilisation de la propriété de projection. Nous obtenons un nouveau résultat en prenant en considération une condition concernant les suites et en éliminant les conditions de convexité et de bornitude des valeurs de la perturbation, ainsi que l'hypothèse habituelle de semi-continuité supérieure. Par conséquent, nous la remplaçons par une notion plus faible de Lipschitzité au sens de ρ-Hausdorff. En second lieu, nous présentons le théorème principal de ce chapitre qui aborde la bornitude de la solution en ajoutant une condition sur ρ. Puis, nous traitons l'existence de solutions pour le problème convexifié suivant

$$(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau)) + \overline{co}F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in C(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Par la suite, on présente le théorème de relaxation qui traite la relation entre les solutions du problème original $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ et du problème convexifié $(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$.
Notons que les résultats de ce chapitre sont soumis dans une revue internationale.

2.2 Résultat d'existence

Au premier lieu, commençons par énoncer un théorème concernant l'étude de l'existence de solutions du problème $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ lorsque la perturbation est à valeurs non convexes et non bornées, satisfaisant une condition de Lipschitzité au sens de ρ-Hausdorff.
Entamons par présenter l'hypothèse suivante sur l'ensemble mobile:
$(\mathcal{H}_C)$ Soit $C : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application satisfaisant:

$(\mathcal{A}_1)$ pour chaque $\tau \in \mathcal{I}$, les ensembles $C(\tau)$ sont fermées non vides et convexes ;

$(\mathcal{A}_2)$ il existe une constante $L > 0$ et pour tous $\tau, s \in \mathcal{I}$

$$haus(C(\tau), C(s)) \leq L|\tau - s|.$$

Théorème 2.1. *Supposons que $(\mathcal{H}_C)$ soit vérifié et $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ avec $b > 0$, une multi-application à valeurs fermées non vides vérifie les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et*

$(\mathcal{H}_3)$ *$F(\cdot, Y(\cdot))$ est mesurable pour chaque $Y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ avec $\|Y(\tau)\| \leq b$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$.*

Supposons que l'hypothèse suivante soit également vérifiée:

($\mathcal{H}_4$) *soient les suites* $(z_n) \subset L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, $(u_n) \subset \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *et* $\Delta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, *telles que pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$, $(u_n(\Delta_n(\tau)))_n$ *converge,* $z_n(\tau) \in F(\Delta_n(\tau), u_n(\Delta_n(\tau))) \cap (\alpha + \beta\Lambda)\overline{B}$ *et* (z_n) *converge faiblement vers* $z \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, *on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n\|_{L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})} \leq \|z\|_{L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})},$$

avec $\Lambda = \lambda \exp(2T\beta)$ *et* $\lambda = \|u_0\| + T(L + 2(\alpha + \beta\|u_0\|))$.

Alors, pour chaque $u_0 \in C(0)$, *le problème* $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *admet une solution Lipschitzienne* $u : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$, *vérifie*

$$\|\dot{u}(\tau)\| \leq L + 2(\alpha + \beta\Lambda), \quad p.p. \;\; \tau \in \mathcal{I},$$

et

$$\|u(\tau)\| \leq \|u_0\| + T(L + 2(\alpha + \beta\Lambda)), \quad pour\ tout\ \tau \in \mathcal{I}.$$

Preuve. Pour chaque $n \geq 1$, on considère une partition de $\mathcal{I}$ par les points

$$\tau_k^n = ke_n\ ,\ e_n = \frac{T}{n},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

Soit $m_F(\tau, y) \in Proj_{F(\tau,y)}(0)$, par ($\mathcal{H}_2$) et pour tout $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$, on obtient

$$\|m_F(\tau, y)\| \leq \alpha + \beta\|y\|. \tag{2.1}$$

Étape 1. La construction de la suite $(x_k^n)_{0\leq k\leq n}$.
Posons $x_0^n = u_0 \in C(0)$, pour chaque $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, les inclusions suivantes sont vérifiées

$$x_{k+1}^n \in C(\tau_{k+1}^n); \tag{2.2}$$

$$x_k^n + e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n) - x_{k+1}^n \in \mathcal{N}_{C(\tau_{k+1}^n)}(x_{k+1}^n). \tag{2.3}$$

En effet, pour $k = 0$ et puisque $C(\tau_1^n)$ est un convexe fermé, on a

$$x_1^n = Proj_{C(\tau_1^n)}(x_0^n + e_n m_F(\tau_0^n, u_0)),$$

donc,

$$x_1^n \in C(\tau_1^n), \tag{2.4}$$

d'après la Proposition 1.4, on obtient

$$x_0^n + e_n m_F(\tau_0^n, x_0^n) - x_1^n \in \mathcal{N}_{C(\tau_1^n)}(x_1^n).$$

D'après (2.1), (2.4) et $(\mathcal{H}_C)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - x_0^n\| &\leq \|x_1^n - (x_0^n + e_n m_F(\tau_0^n, u_0))\| + \|e_n m_F(\tau_0^n, u_0)\| \\
&= \mathbf{d}(x_0^n + e_n m_F(\tau_0^n, u_0), C(\tau_1^n)) + \|e_n m_F(\tau_0^n, u_0)\| \\
&\leq \mathbf{d}(x_0^n + e_n m_F(\tau_0^n, u_0), x_0^n) + d(x_0^n, C(\tau_1^n)) + \|e_n m_F(\tau_0^n, u_0)\| \\
&\leq |\mathbf{d}(x_0^n, C(\tau_1^n)) - \mathbf{d}(x_0^n, C(\tau_0^n))| + 2e_n\|m_F(\tau_0^n, u_0)\| \\
&\leq haus(C(\tau_1^n), C(\tau_0^n)) + 2e_n\|m_F(\tau_0^n, u_0)\| \\
&\leq L|\tau_0^n - \tau_1^n| + 2e_n\|m_F(\tau_0^n, u_0)\| \\
&\leq e_n(L + 2(\alpha + \beta\|u_0\|)).
\end{aligned}$$

Supposons que, pour $0, 1, \cdots, k$ avec $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ les points $x_0^n, x_1^n, \cdots, x_k^n$ sont construits et vérifient (2.2) et (2.3). Puisque $C(\tau_{k+1}^n)$ est convexe fermé, on peut prendre

$$x_{k+1}^n = Proj_{C(\tau_{k+1}^n)}(x_k^n + e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n)),$$

on a,

$$x_{k+1}^n \in C(\tau_{k+1}^n).$$

Grâce à la caractérisation du cône normal en fonction de la projection, on peut écrire

$$x_k^n + e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n) - x_{k+1}^n \in \mathcal{N}_{C(\tau_{k+1}^n)}(x_{k+1}^n).$$

D'après (2.1), (2.2) et $(\mathcal{H}_C)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq \|x_{k+1}^n - (x_k^n + e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n))\| + \|e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n)\| \\
&\leq \mathbf{d}(x_k^n + e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n), x_k^n) + \mathbf{d}(x_k^n, C(\tau_{k+1}^n)) + \|e_n m_F(\tau_k^n, x_k^n)\| \\
&\leq haus(C(\tau_{k+1}^n), C(\tau_k^n)) + 2e_n\|m_F(\tau_k^n, x_k^n)\| \\
&\leq L|\tau_k^n - \tau_{k+1}^n| + 2e_n(\alpha + \beta\|x_k^n\|),
\end{aligned}$$

donc,

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq e_n(L + 2\alpha) + 2e_n\beta\|x_k^n\|, \tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned}
\|x_k^n - x_0^n\| &\leq \|x_k^n - x_{k-1}^n\| + \|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\| + \cdots + \|x_1^n - x_0^n\| \\
&\leq 2e_n\beta(\|x_{k-1}^n\| + \|x_{k-2}^n\| + \cdots + \|x_0^n\|) + ke_n(L + 2\alpha),
\end{aligned}$$

alors, pour tout $n \geq 1$ et tout $k = 1, 2, \cdots, n$

$$\|x_k^n\| \leq \|u_0\| + T(L + 2\alpha) + 2T\beta\|u_0\| + 2e_n\beta(\|x_1^n\| + \cdots + \|x_{k-1}^n\|).$$

Posons $\lambda = \|u_0\| + T(L + 2(\alpha + \beta\|u_0\|))$ et $\sigma_n = 2e_n\beta$, alors

$$\|x_k^n\| \leq \lambda + \sigma_n(\|x_1^n\| + \cdots + \|x_{k-1}^n\|). \tag{2.6}$$

Montrons que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k = 1, 2, \cdots, n$

$$\|x_k^n\| \leq \lambda(1 + \sigma_n)^{k-1}.$$

Pour $k = 1$, on a

$$\|x_1^n - u_0\| \leq \frac{T}{n}(L + 2(\alpha + \beta\|u_0\|)) \leq \lambda.$$

Supposons que (2.6) soit vraie pour $i, 1 \leq i \leq k$, alors

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n\| &\leq \lambda + \sigma_n(\|x_1^n\| + \|x_2^n\| + \cdots + \|x_{i-1}^n\| + \|x_i^n\|) \\
&\leq \lambda + \sigma_n\Big(\lambda + \lambda(1 + \sigma_n) + \lambda(1 + \sigma_n)^2 + \cdots + \lambda(1 + \sigma_n)^{i-1}\Big) \\
&= \lambda + \lambda\sigma_n\Big(1 + (1 + \sigma_n) + (1 + \sigma_n)^2 + \cdots + (1 + \sigma_n)^{i-1}\Big) \\
&= \lambda + \lambda\sigma_n\Big(\frac{(1 + \sigma_n)^i - 1}{(1 + \sigma_n) - 1}\Big) = \lambda(1 + \sigma_n)^i.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$ et tout $k = 1, 2, ..., n$, on obtient

$$\|x_k^n\| \leq \lambda(1 + \sigma_n)^{k-1} \leq \lambda\Big(1 + \frac{2T\beta}{n}\Big)^{k-1} \leq \lambda\Big(1 + \frac{2T\beta}{n}\Big)^n.$$

Par conséquent,

$$\|x_k^n\| \leq \lambda \exp(2T\beta) = \Lambda. \tag{2.7}$$

D'après les relations (2.5) et (2.7), on trouve

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq e_n\Big(L + 2(\alpha + \beta\Lambda)\Big). \tag{2.8}$$

Par conséquent, la construction de $x_0^n, x_1^n, ..., x_n^n$ est obtenue par induction telle que (2.2) et (2.3) sont satisfaits.

Étape 2. Construction des suites approximatives.

Pour chaque $\tau \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n]$, avec $k = 0, 1, ..., n - 1$, et pour chaque $n \geq 1$, on définit

$$u_n(\tau) = \frac{\tau_{k+1}^n - \tau}{e_n} x_k^n + \frac{\tau - \tau_k^n}{e_n} x_{k+1}^n. \tag{2.9}$$

Observons que, $u_n(\tau_k^n) = x_k^n$, et

$$\dot{u}_n(\tau) = \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}. \tag{2.10}$$

Par (2.2) et (2.3), on peut écrire

$$u_n(\tau_{k+1}^n) \in C(\tau_{k+1}^n); \tag{2.11}$$

$$-\dot{u}_n(\tau) + m_F(\tau_k^n, u_n(\tau_k^n)) \in \mathcal{N}_{C(\tau_{k+1}^n)}(u_n(\tau_{k+1}^n)), \text{ p.p. } \tau \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n[. \tag{2.12}$$

Les relations (2.8) et (2.10) impliquent que pour chaque $\tau \in \mathcal{I}$ et $n \geq 1$

$$\|\dot{u}_n(\tau)\| \leq L + 2(\alpha + \beta\Lambda). \tag{2.13}$$

Posons

$$\delta_n(\tau) = \begin{cases} \tau_k^n & \text{si } \tau \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n[; \\ \tau_{n-1}^n & \text{si } \tau = T, \end{cases} \tag{2.14}$$

et

$$\theta_n(\tau) = \begin{cases} \tau_{k+1}^n & \text{si } \tau \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n[; \\ T & \text{si } \tau = T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(\tau) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(\tau) = \tau. \tag{2.16}$$

En effet, pour tout $\tau \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n[$ et $k = 0, 1, ..., n-1$, on a

$$|\delta_n(\tau) - \tau| = \tau - \tau_k^n \leq \tau_{k+1}^n - \tau_k^n = e_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

de même,

$$|\theta_n(\tau) - \tau| = \tau_{k+1}^n - \tau \leq \tau_{k+1}^n - \tau_k^n = e_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

De plus, par (2.11), (2.12), (2.14) et (2.15), on aura

$$u_n(\delta_n(\tau)) \in C(\delta_n(\tau)); \tag{2.17}$$

$$u_n(\theta_n(\tau)) \in C(\theta_n(\tau)); \tag{2.18}$$

$$-\dot{u}_n(\tau) + m_F(\delta_n(\tau), u_n(\delta_n(\tau))) \in \mathcal{N}_{C(\theta_n(\tau))}(u_n(\theta_n(\tau))), \text{ p.p. } \tau \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n[; \tag{2.19}$$

$$m_F(\delta_n(\tau), u_n(\delta_n(\tau))) \in F(\delta_n(\tau), u_n(\delta_n(\tau))).$$

Étape 3. La convergence des suites.

D'après (2.9), on trouve pour tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}
\|u_n(\theta_n(\tau)) - u_n(\tau)\| &= \|u_n(\tau_{k+1}^n) - u_n(\tau)\| \\
&= \|x_{k+1}^n - \frac{\tau_{k+1}^n - \tau}{e_n} x_k^n - \frac{\tau - \tau_k^n}{e_n} x_{k+1}^n\| \\
&= \|\frac{e_n x_{k+1}^n - \tau_{k+1}^n x_k^n + \tau x_k^n - \tau x_{k+1}^n + \tau_k^n x_{k+1}^n}{e_n}\| \\
&= \|\frac{\tau_{k+1}^n x_{k+1}^n - \tau_k^n x_{k+1}^n - \tau_{k+1}^n x_k^n + \tau x_k^n - \tau x_{k+1}^n + \tau_k^n x_{k+1}^n}{e_n}\| \\
&= \|\frac{\tau_{k+1}^n (x_{k+1}^n - x_k^n) + \tau(x_k^n - x_{k+1}^n)}{e_n}\| \\
&= \|\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\| |\tau_{k+1}^n - \tau|,
\end{aligned}$$

par (2.13), on a

$$\|u_n(\theta_n(\tau)) - u_n(\tau)\| = \|\dot{u}_n(\tau)\|(\theta_n(\tau) - \tau) \leq (L + 2(\alpha + \beta\Lambda))(\theta_n(\tau) - \tau),$$

donc, en utilisant (2.16), on aura

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(\tau)) - u_n(\tau)\| = 0, \tag{2.20}$$

et de même

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(\tau)) - u_n(\tau)\| = 0. \tag{2.21}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \|u_n(\tau)\| - \|u_n(\theta_n(\tau))\| &\leq \|u_n(\theta_n(\tau)) - u_n(\tau)\| \\ &\leq (L + 2(\alpha + \beta\Lambda))(\theta_n(\tau) - \tau) \\ &\leq (L + 2(\alpha + \beta\Lambda))T. \end{aligned}$$

De la relation (2.7), découle l'inégalité suivante

$$\|u_n(\tau)\| \leq (L + 2(\alpha + \beta\Lambda))T + \Lambda,$$

donc, on conclut que la suite $(u_n(\tau))_{n\geq 1}$ est relativement compacte. D'autre part, pour tous $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{I}$ tels que $\tau_1 \leq \tau_2$, en utilisant (2.13), on obtient

$$\begin{aligned} \|u_n(\tau_1) - u_n(\tau_2)\| = \| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{u}_n(s)ds\| &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\dot{u}_n(s)\|ds \\ &\leq (L + 2(\alpha + \beta\Lambda))(\tau_2 - \tau_1), \end{aligned}$$

alors, la suite $(u_n(\cdot))_{n\geq 1}$ est équi-continue. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, on conclut que $(u_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, donc on peut extraire une sous suite (notée aussi $(u_n)_{n\geq 1}$) qui converge uniformément vers une certaine application u. Par (2.13), $(\dot{u}_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers w avec $\|w(\tau)\| \leq L + 2(\alpha + \beta\Lambda)$, p.p. $\tau \in \mathcal{I}$. En fixant $\tau \in \mathcal{I}$ et en prenant n'importe quel $\epsilon \in \mathbf{R}^d$, la convergence faible dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, \dot{u}_n(s)\rangle ds = \int_0^T \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, w(s)\rangle ds,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \langle \epsilon, u_0 + \int_0^\tau \dot{u}_n(s)ds\rangle = \langle \epsilon, u_0 + \int_0^\tau w(s)ds\rangle.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\tau \dot{u}_n(s)ds = \int_0^\tau w(s)ds$, puisque $u_n(\cdot)$ est une application absolument continue, on obtient $u(\tau) = u_0 + \int_0^\tau w(s)ds$ et $w = \dot{u}$.

Pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, nous avons

$$\|u_n(\delta_n(\tau)) - u(\tau)\| \leq \|u_n(\delta_n(\tau)) - u_n(\tau)\| + \|u_n(\tau) - u(\tau)\|,$$

d'après (2.21), on aura

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(\tau)) - u(\tau)\| = 0. \tag{2.22}$$

Maintenant, on pose $(m_F(\delta_n(\cdot), u_n(\delta_n(\cdot))))_n = (h_n(\cdot))_n$ pour tout $n \geq 1$. Par (2.1) et (2.7), on a pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ $\|h_n(\tau)\| \leq \alpha + \beta\Lambda$, donc $(h_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers h avec $\|h(\tau)\| \leq \alpha + \beta\Lambda$, p.p. $\tau \in \mathcal{I}$. Comme $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ est uniformément convexe, l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ et la Proposition 1.5 donnent la convergence forte de $(h_n)_{n\geq 1}$.
De plus, puisque $h_n(\tau) \in F(\delta_n(\tau), u_n(\delta_n(\tau))) \cap \rho\overline{B}$ avec $\rho = \alpha + \beta\Lambda$ pour tous $\tau \in \mathcal{I}$ et $n \geq 1$, en utilisant $(\mathcal{H}_1)$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(h(\tau), F(\tau, u(\tau))) &\leq \|h(\tau) - h_n(\tau)\| + \mathbf{d}(h_n(\tau), F(\tau, u(\tau)))\\
&\leq \|h(\tau) - h_n(\tau)\| + haus_\rho(F(\delta_n(\tau), u_n(\delta_n(\tau))), F(\tau, u(\tau)))\\
&< \|h(\tau) - h_n(\tau)\| + \zeta|\delta_n(\tau) - \tau| + \beta\|u_n(\delta_n(\tau)) - u(\tau)\|.
\end{aligned}$$

Grâce à (2.16), (2.22), la convergence de la suite $(h_n(\cdot))_{n\geq 1}$ vers $h(\cdot)$ et par passage à la limite dans la dernière inégalité, on obtient

$$\mathbf{d}(h(\tau), F(\tau, u(\tau))) = 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.$$

La fermeture de $F(\tau, u(\tau))$ donne $h(\tau) \in F(\tau, u(\tau))$, p.p. $\tau \in \mathcal{I}$.
Step 4. Montrons que $u \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$.
Pour chaque $\tau \in \mathcal{I}$ et pour $n \geq 1$, par $(\mathcal{H}_C)$ et (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(u_n(\tau), C(\tau)) &\leq \mathbf{d}(u_n(\tau), u_n(\theta_n(\tau))) + \mathbf{d}(u_n(\theta_n(\tau)), C(\tau)) - \mathbf{d}(u_n(\theta_n(\tau)), C(\theta_n(\tau)))\\
&\leq \|u_n(\tau) - u_n(\theta_n(\tau))\| + haus(C(\tau), C(\theta_n(\tau)))\\
&\leq \|u_n(\tau) - u_n(\theta_n(\tau))\| + L|\theta_n(\tau) - \tau|.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.16), (2.20), en passant à la limite dans l'inégalité précédente et grâce à la fermeture de $C(\tau)$, on obtient $u(\tau) \in C(\tau)$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$.
D'autre part, nous avons

$$\| - \dot{u}_n(\tau) + h_n(\tau)\| \leq \|\dot{u}_n(\tau)\| + \|h_n(\tau)\| \leq L + 3(\alpha + \beta\Lambda), \tag{2.23}$$

d'après la Proposition 1.4, (2.19) et (2.23), on obtient pour p.p. $\tau \in \mathcal{I}$

$$-\dot{u}_n(\tau) + h_n(\tau) \in \mathcal{N}_{C(\theta_n(\tau))}(u_n(\theta_n(\tau))) \cap \xi\overline{B} = \xi\partial\mathbf{d}(u_n(\theta_n(\tau)), C(\theta_n(\tau))),$$

où $\xi = L + 3(\alpha + \beta\Lambda)$. Comme $(-\dot{u}_n + h_n)$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers $-\dot{u} + h$, une application du Lemme de Mazur à $(-\dot{u}_n + h_n)$ fournit une suite $(w_n)_{n\geq 1}$ avec

$$w_n \in co\{-\dot{u}_m + h_m : m \geq n\},$$

telle que $(w_n)_{n\geq 1}$ converge fortement dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers $-\dot{u}+h$. Nous pouvons extraire de $(w_n(\cdot))_{n\geq 1}$ une sous suite qui converge p.p. vers $-\dot{u}(\cdot)+h(\cdot)$. Alors, il existe un ensemble négligeable de Lebesgue $N\subset\mathcal{I}$ tel que pour chaque $\tau\in\mathcal{I}\backslash N$

$$-\dot{u}(\tau)+h(\tau)\in\bigcap_{n\geq 0}\overline{\{w_k(\tau):k\geq n\}}\subset\bigcap_{n\geq 0}\overline{co}\{-\dot{u}_k(\tau)+h_k(\tau):k\geq n\}.$$

Fixons $\tau\in\mathcal{I}\backslash N$ et $\nu\in\mathbf{R}^d$, par la dernière inclusion et le Théorème 1.6, on trouve

$$\langle-\dot{u}(\tau)+h(\tau),\nu\rangle\leq\sup_{k\geq n}\langle-\dot{u}_k(\tau)+h_k(\tau),\nu\rangle,\ \forall n\geq 0,$$

alors,

$$\begin{aligned}\langle-\dot{u}(\tau)+h(\tau),\nu\rangle&\leq\inf_{n\geq 0}\sup_{k\geq n}\langle-\dot{u}_k(\tau)+h_k(\tau),\nu\rangle\\&=\limsup_{n\to\infty}\langle-\dot{u}_n(\tau)+h_n(\tau),\nu\rangle.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\langle-\dot{u}(\tau)+h(\tau),\nu\rangle&\leq\xi\limsup_{n\to\infty}\delta^*(\partial\mathbf{d}(u_n(\theta_n(\tau)),C(\theta_n(\tau))),\nu)\\&\leq\xi\delta^*(\partial\mathbf{d}(u(\tau),C(\tau)),\nu),\end{aligned}$$

où la semicontinuité supérieure de la mult-iapplication $\partial\mathbf{d}(\cdot,C(\cdot))$ entraîne la deuxième inégalité. Comme $\partial\mathbf{d}(u(\tau),C(\tau))$ est convexe fermé, on obtient

$$-\dot{u}(\tau)+h(\tau)\in\xi\partial\mathbf{d}(u(\tau),C(\tau))\subset\mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau)).$$

□

La proposition suivante sera utile dans les résultats suivants, nous supposerons que la perturbation est une application bornée, c-à-d, $f:\mathcal{I}\to\mathbf{R}^d$ telle que:

$$\exists\alpha>0:\ \|f(\tau)\|\leq\alpha,\quad\text{pour tout }\tau\in\mathcal{I}.\tag{2.24}$$

Proposition 2.1. *Supposons que* $(\mathcal{H}_C)$ *soit vérifié et* $f:\mathcal{I}\to\mathbf{R}^d$ *vérifie* (2.24)*. Alors,*

(1) le problème

$$(\mathcal{T}_{f,u_0,\mathcal{I}})\begin{cases}-\dot{u}(\tau)\in\mathcal{N}_{C(\tau)}(u(\tau))+f(\tau),\ p.p.\ \tau\in\mathcal{I};\\u(\tau)\in C(\tau),\ \forall\tau\in\mathcal{I};\\u(0)=u_0\in C(0),\end{cases}$$

admet une solution unique Lipschitzienne $w:\mathcal{I}\to\mathbf{R}^d$ *telle que*:

$$\|\dot{w}(\tau)\|\leq L+2\alpha,\ p.p.\ \tau\in\mathcal{I},$$

et

$$\|w(\tau)\|\leq\|u_0\|+T(L+2\alpha),\ \forall\tau\in\mathcal{I};$$

(2) si w_n (resp. w_m) est la solution de $(\mathcal{T}_{f_n,u_0^n,\mathcal{I}})$ (resp. $(\mathcal{T}_{f_m,u_0^m,\mathcal{I}})$), on trouve pour tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\|w_n(\tau) - w_m(\tau)\| \leq \|u_0^n - u_0^m\| + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\| ds; \tag{2.25}$$

(3) soit $(f_n)_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ une suite de fonction vérifie (2.24), converge faiblement vers $f \in L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ et $w_n(0) = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{f_n,u_0,\mathcal{I}})$ converge uniformément vers $w \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{f,u_0,\mathcal{I}})$.

Preuve. 1) Posons $\Psi(\tau) = \int_0^\tau f(s)ds$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ et considérons la multi-application $V_\Psi : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ définie par

$$V_\Psi(\tau) = C(\tau) + \Psi(\tau).$$

L'ensemble $V_\Psi(\cdot)$ satisfait $(\mathcal{A}_1)$, et par $(\mathcal{A}_2)$, on obtient pour chaque $\mu \in \mathbf{R}^d$ et tous $\tau, s \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{d}(\mu, V_\Psi(\tau)) - \mathbf{d}(\mu, V_\Psi(s))| &= |\mathbf{d}(\mu, C(\tau) + \Psi(\tau)) - \mathbf{d}(\mu, C(s) + \Psi(s))| \\
&\leq \|\Psi(\tau) - \Psi(s)\| + |\mathbf{d}(\mu, C(\tau)) - \mathbf{d}(\mu, C(s))| \\
&\leq \int_s^\tau \|f(\nu)\| d\nu + L|\tau - s| \\
&\leq (L + \alpha)|\tau - s|.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$haus(V_\Psi(\tau), V_\Psi(s)) \leq L_1 |\tau - s|,$$

où $L_1 = L + \alpha$. Par le Théorème 2.1, il existe une solution Lipschitzienne $v : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ de problème suivant:

$$\begin{cases}
-\dot{v}(\tau) \in \mathcal{N}_{V_\Psi(\tau)}(v(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\
v(\tau) \in V_\Psi(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\
v(0) = u_0 \in V_\Psi(0),
\end{cases}$$

qui vérifie

$$\|\dot{v}(\tau)\| \leq L_1, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.$$

De plus, l'application $w(\tau) = v(\tau) - \Psi(\tau)$ est une solution Lipschitzienne de

$$-\dot{w}(\tau) - f(\tau) = -\dot{v}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(\tau)}(v(\tau) - \Psi(\tau)) := \mathcal{N}_{C(\tau)}(w(\tau)),$$

et satisfait

$$\|\dot{w}(\tau)\| \leq L + 2\alpha, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.$$

À présent, nous allons démontrer l'unicité. Soient w_1 et w_2 deux solutions de $(\mathcal{T}_{f,u_0,\mathcal{I}})$ avec $w_1(0) = w_2(0) = u_0$, la monotonicité du cône normal permet d'obtenir, pour presque tout $\tau \in \mathcal{I}$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w_1(\tau) - w_2(\tau)\|^2 = \langle \dot{w}_1(\tau) - \dot{w}_2(\tau), w_1(\tau) - w_2(\tau)\rangle \leq 0,$$

par intégration, il vient que $\|w_1(\tau) - w_2(\tau)\|^2 \leq \|w_1(0) - w_2(0)\|^2 = 0$.

2) En utilisant à nouveau la propriété de monotonie du cône normal, on obtient

$$\langle -(\dot{w}_n(\tau) + f_n(\tau)) + (\dot{w}_m(\tau) + f_m(\tau)), w_n(\tau) - w_m(\tau)\rangle \geq 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

donc,

$$\langle \dot{w}_n(\tau) - \dot{w}_m(\tau), w_n(\tau) - w_m(\tau)\rangle \leq \langle f_n(\tau) - f_m(\tau), w_n(\tau) - w_m(\tau)\rangle, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

ou, de manière équivalente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w_n(\tau) - w_m(\tau)\|^2 \leq \langle f_n(\tau) - f_m(\tau), w_n(\tau) - w_m(\tau)\rangle.$$

Par intégration de 0 à τ, on obtient

$$\frac{1}{2}\|w_n(\tau) - w_m(\tau)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0^n - u_0^m\|^2 + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\|\|w_n(s) - w_m(s)\|ds,$$

en utilisant le Lemme 1.6, on trouve

$$\|w_n(\tau) - w_m(\tau)\| \leq \|u_0^n - u_0^m\| + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\|ds.$$

3) Puisque pour tout $n \geq 1$, (w_n) est une solution Lipschitzienne du problème $(\mathcal{T}_{f_n,u_0,\mathcal{I}})$ et

$$\|\dot{w}_n(\tau)\| \leq L + 2\alpha, \text{ p.p } \tau \in \mathcal{I},$$

nous obtenons la compacité relative de $(w_n(\tau))_{n\geq 1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ et l'équi-continuité de $(w_n(\cdot))_{n\geq 1}$. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, $(w_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, donc nous pouvons extraire une sous suite de $(w_n)_{n\geq 1}$ (notée aussi $(w_n)_{n\geq 1}$) qui converge uniformément vers une certaine application y.

Comme w est la solution de $(\mathcal{T}_{f,u_0,\mathcal{I}})$, par la propriété de monotonie, on peut écrire pour tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w(\tau) - w_n(\tau)\|^2 &\leq \langle f_n(\tau) - f(\tau), w(\tau) - w_n(\tau)\rangle \\ &= \langle f_n(\tau) - f(\tau), w(\tau) - y(\tau)\rangle + \langle f_n(\tau) - f(\tau), y(\tau) - w_n(\tau)\rangle,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(\tau) - w_n(\tau)\|^2 &\leq \int_0^\tau \langle f_n(s) - f(s), w(s) - y(s)\rangle ds + \int_0^\tau \langle f_n(s) - f(s), y(s) - w_n(s)\rangle ds \\ &\leq \int_0^\tau \langle f_n(s) - f(s), w(s) - y(s)\rangle ds + 2T\alpha\|y - w_n\|_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite et puisque $(f_n - f)$ converge faiblement vers 0 dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ et que (w_n) converge uniformément vers y, on obtient $w = y$. $\square$

Présentons maintenant le théorème essentiel de ce chapitre qui établit la bornitude de la solution en supposant une condition sur ρ. Ce résultat est nécessaire dans la preuve de la section suivante.
On note par $r : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$, la solution de

$$\begin{cases} \dot{r}(\tau) = \alpha + \beta r(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ r(0) = r_0 \geq 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

où

$$r(\tau) = r_0 e^{\beta\tau} + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta\tau} - 1), \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}.$$

Théorème 2.2. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_C)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ du Théorème 2.1 soient vérifiées, r satisfaisant (2.26) avec $\|u_0\| \leq r_0 < b$ et $0 \leq \rho \leq \dot{r}(\tau)$. Alors, $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution absolument continue $\tilde{u} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$,*

$$\|\tilde{u}(\tau)\| \leq r(\tau) \leq b.$$

Preuve. Par (2.26), on trouve que $\dot{r}(\tau) > 0$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, alors l'application $r : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$ est strictement croissante. Comme $\|u_0\| \leq r_0 < b$, soit $r(\tau) \leq b$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ ou bien il existe un unique $d \in]0, T]$ tel que $r(\tau) > b$, pour $\tau \in]d, T]$ et $r(d) = b$.
Posons $\mathcal{K} = [0, d]$. Par $(\mathcal{H}_2)$ et (2.26), on obtient pour $y \in r(\tau)\overline{B}$,

$$F(\tau, y) \cap \dot{r}(\tau)\overline{B} \neq \emptyset, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

Soient $(\tau, y_1), (\tau, y_2) \in \mathcal{K} \times r(\tau)\overline{B}$ et $\rho(\tau) = \dot{r}(\tau)$, p.p. $\tau \in \mathcal{K}$, il existe $p(\tau) \in F_{\rho(\tau)}(\tau, y_1)$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(p(\tau), F(\tau, y_2)) &\leq e(F_{\rho(\tau)}(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) \\ &\leq haus_{\rho(\tau)}(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)), \end{aligned}$$

en utilisant $(\mathcal{H}_1)$, on aura

$$\mathbf{d}(p(\tau), F(\tau, y_2)) < \beta\|y_1 - y_2\|,$$

donc, il existe $q(\tau) \in F(\tau, y_2)$, telle que

$$p(\tau) - q(\tau) \in \beta\|y_1 - y_2\|\overline{B},$$

et

$$p(\tau) \in q(\tau) + \beta\|y_1 - y_2\|\overline{B} \subset F(\tau, y_2) + \beta\|y_1 - y_2\|\overline{B}.$$

Alors,

$$F(\tau, y_1) \cap \dot{r}(\tau)\overline{B} \subset F(\tau, y_2) + \beta\|y_1 - y_2\|\overline{B}, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{2.27}$$

Supposons que l'on peut définir par induction une suite $(f_n, \tilde{u}_n) \in L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K}) \times \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$, telle que pour tout $n \geq 1$ les conditions suivantes sont satisfaites:

$$f_0(\tau) = \tilde{u}_0(\tau) = 0, \; \|\tilde{u}_n(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|f_n(s)\|ds; \tag{2.28}$$

$$f_n(\tau) \in F(\tau, \tilde{u}_{n-1}(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}; \tag{2.29}$$

$$\tilde{u}_n \text{ la solution correspondante de } (\mathcal{T}_{f_n, u_0, \mathcal{K}}); \tag{2.30}$$

$$\|f_{n+1}(\tau) - f_n(\tau)\| \leq \beta\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_{n-1}(\tau)\|, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}; \tag{2.31}$$

$$\|\tilde{u}_n(\tau)\| \leq r(\tau), \forall \tau \in \mathcal{K}, \; \|f_n(\tau)\| \leq \dot{r}(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}; \tag{2.32}$$

$$\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_{n-1}(\tau)\| \leq r_0 \frac{(\beta\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha \int_0^\tau \frac{(\beta(\tau - s))^{n-1}}{(n-1)!} ds; \tag{2.33}$$

et pour presque partout $\tau \in \mathcal{K}$ et $n \geq 2$,

$$\|f_n(\tau) - f_{n-1}(\tau)\| \leq \beta\Big\{r_0 \frac{(\beta\tau)^{n-2}}{(n-2)!} + \alpha \int_0^\tau \frac{(\beta(\tau - s))^{n-2}}{(n-2)!} ds\Big\}. \tag{2.34}$$

En effet, $(\mathcal{H}_2)$ entraîne, pour $\tau \in \mathcal{K}$

$$\tilde{\alpha}_0(\tau) = \mathbf{d}(0, F(\tau, \tilde{u}_0(\tau))) \leq \alpha, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{2.35}$$

En utilisant $(\mathcal{H}_3)$, $\tilde{\alpha}_0(\cdot)$ est mesurable, donc, on peut écrire

$$\tilde{\alpha}_0(\tau) < \frac{\tilde{\alpha}_0(\tau) + \alpha}{2} < \alpha, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

Par (2.35), $F(\cdot, \tilde{u}_0(\cdot)) \cap \frac{\tilde{\alpha}_0(\cdot)+\alpha}{2}\overline{B}$, est mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, d'après le Théorème d'existence de sélections mesurables, il existe une sélection mesurable f_1 telle que

$$\|f_1(\tau)\| \leq \alpha, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}, \tag{2.36}$$

$$f_1(\tau) \in F(\tau, \tilde{u}_0(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

Par la Proposition 2.1, on pose $\tilde{u}_1$ la solution correspondante de $(\mathcal{T}_{f_1, u_0, \mathcal{K}})$. De (2.25), (2.26) et (2.36), il s'ensuit que

$$\|\tilde{u}_1(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|f_1(\tau)\|ds \leq r_0 + \int_0^\tau \dot{r}(s)ds = r(\tau).$$

Puisque pour $\tau \in \mathcal{K},\ f_1(\tau) \in F(\tau, \tilde{u}_0(t)) \cap \dot{r}(\tau)\overline{B},$ p.p. $\tau \in \mathcal{K}$ et $\|\tilde{u}_0(\tau)\| = 0 \leq r(\tau)$, en utilisant (2.27), on obtient

$$f_1(\tau) \in F(\tau, \tilde{u}_1(\tau)) + \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\|\overline{B},\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

et

$$\mathbf{d}(f_1(\tau), F(\tau, \tilde{u}_1(\tau))) \leq \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\|,\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

quand $\|\tilde{u}_1(\tau)\| \neq 0$.

En posant $\mathcal{K}_1 = \{\tau \in \mathcal{K} : \|\tilde{u}_1(\tau)\| = 0\}$, par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ et puisque on a l'application f_1 est mesurable, $\tilde{\alpha}_1(\tau) = \mathbf{d}(f_1(\tau), F(\tau, \tilde{u}_1(\tau)))$ est mesurable et

$$\tilde{\alpha}_1(\tau) < \frac{\tilde{\alpha}_1(\tau) + \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\|}{2} < \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\|,\ \tau \notin \mathcal{K}_1,$$

en tant que $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ est fermé. Alors, on trouve que la multi-application

$$F(\cdot, \tilde{u}_1(\cdot)) \cap \Big(f_1(\cdot) + \frac{\tilde{\alpha}_1(\cdot) + \beta\|\tilde{u}_1(\cdot)\|}{2}\overline{B}\Big) \text{ sur } \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1$$

est mesurable à valeurs fermées non vides. Donc, d'après le Théorème d'existence de sélections mesurables, il existe une sélection mesurable v_1 de cette application sur $\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1$. Posons

$$f_2(\tau) = \begin{cases} v_1(\tau) & \text{si } \ \tau \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1; \\ f_1(\tau) & \text{si } \ \tau \in \mathcal{K}_1. \end{cases}$$

Alors,

$$f_2(\tau) \in F(\tau, \tilde{u}_1(\tau)),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

$$\|f_1(\tau) - f_2(\tau)\| \leq \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\|,\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{2.37}$$

Par conséquent, pour p.p. $\tau \in \mathcal{K}$

$$\|f_2(\tau)\| \leq \|f_1(\tau)\| + \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\| \leq \alpha + \beta r(\tau) = \dot{r}(\tau).$$

Par la Proposition 2.1, on pose $\tilde{u}_2$ la solution correspondante de $(\mathcal{T}_{f_2,u_0,\mathcal{K}})$. Par suite, à partir de (2.25), on obtient $\|\tilde{u}_2(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|f_2(s)\|ds$, ainsi, $\|\tilde{u}_2(\tau)\| \leq r(\tau)$, et par (2.37),

$$\|f_1(\tau) - f_2(\tau)\| \leq \beta\|\tilde{u}_1(\tau)\| \leq \beta(\|u_0\| + \int_0^\tau \|f_1(s)\|ds),$$

donc,

$$\|f_1(\tau) - f_2(\tau)\| \leq \beta\Big(r_0 + \int_0^\tau \alpha ds\Big),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{2.38}$$

D'après (2.25) et (2.38), on aura

$$\|\tilde{u}_2(\tau)-\tilde{u}_1(\tau)\| \leq r_0\int_0^\tau \beta ds+\alpha\int_0^\tau \beta\int_u^\tau dsdu = r_0(\beta\tau)+\alpha\int_0^\tau \Big(\beta(\tau-u)\Big)du.$$

Par induction, supposons que $(f_1,\tilde{u}_1),\cdots,(f_n,\tilde{u}_n)$ sont définies et vérifient (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34).

Même raisonnement que précédemment, pour $n\geq 1$, soit $\mathcal{K}_n=\{\tau\in\mathcal{K} : \|\tilde{u}_{n-1}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|=0\}$. Puisque $\tilde{\alpha}_n(\tau)=\mathbf{d}(f_n(\tau)),F(\tau,\tilde{u}_n(\tau))$ est mesurable et

$$\tilde{\alpha}_n(\tau)<\frac{\tilde{\alpha}_n(\tau)+\beta\|\tilde{u}_{n-1}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|}{2}<\beta\|\tilde{u}_{n-1}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|,\ \tau\notin\mathcal{K}_n,$$

en tant que $\mathcal{K}_n\subset\mathcal{K}$ est fermé,

$$F(\cdot,\tilde{u}_n(\cdot))\cap\Big(f_n(\cdot)+\frac{\tilde{\alpha}_n(\cdot)+\beta\|\tilde{u}_{n-1}(\cdot)-\tilde{u}_n(\cdot)\|}{2}\overline{B}\Big)\ \text{sur}\ \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_n$$

est mesurable à valeurs fermées non vides. Donc, il existe une sélection mesurable v_n de cette application sur $\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_n$. On pose

$$f_{n+1}(\tau)=\begin{cases} v_n(\tau) & \text{si}\ \ \tau\in\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_n;\\ f_n(\tau) & \text{si}\ \ \tau\in\mathcal{K}_n.\end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$f_{n+1}(\tau)\in F(\tau,\tilde{u}_n(\tau)),\ \text{p.p.}\ \tau\in\mathcal{K},$$

$$\|f_{n+1}(\tau)-f_n(\tau)\|\leq\beta\|\tilde{u}_{n-1}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|,\ \text{p.p.}\ \tau\in\mathcal{K},$$

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}(\tau)-f_n(\tau)\| &\leq \beta\|\tilde{u}_{n-1}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|\\ &\leq \beta\Big\{r_0\frac{(\beta\tau)^{n-1}}{(n-1)!}+\alpha\int_0^\tau\frac{(\beta(\tau-s))^{n-1}}{(n-1)!}ds\Big\},\ \text{p.p.}\ \tau\in\mathcal{K}.\end{aligned}$$

Pour chaque $n\geq 1$ et par la Proposition 2.1, en posant $\tilde{u}_{n+1}$ la solution correspondante de $(\mathcal{T}_{f_{n+1},u_0,\mathcal{K}})$. D'autre part,

$$\|f_{n+1}(\tau)\|-\|f_1(\tau)\|\leq\sum_{j=1}^{i}\|f_{j+i}(\tau)-f_j(\tau)\|\leq\beta\sum_{j=1}^{i}\|\tilde{u}_j(\tau)-\tilde{u}_{j-1}(\tau)\|,$$

donc, par (2.33) et (2.36)

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}(\tau)\| &\leq \beta\sum_{j=1}^{i}\|\tilde{u}_j(\tau)-\tilde{u}_{j-1}(\tau)\|+\|f_1(\tau)\|\\ &\leq \beta\Big(r_0\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(\beta\tau)^j}{j!}+\alpha\sum_{j=0}^{i-1}\int_0^\tau\frac{(\beta(\tau-s))^j}{j!}ds\Big)+\alpha\\ &\leq \beta\Big(r_0e^{\beta\tau}+\alpha\int_0^\tau e^{\beta(\tau-s)}ds\Big)+\alpha\\ &= \beta\Big(r_0e^{\beta\tau}+\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta\tau}-1)\Big)+\alpha=\beta r(\tau)+\alpha=\dot{r}(\tau).\end{aligned}$$

Grâce à (2.25), $\|\tilde{u}_{n+1}(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|f_{n+1}(s)\| ds$ et $\|\tilde{u}_{n+1}(\tau)\| \leq r(\tau)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_{n+1}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\| &\leq \int_0^\tau \|f_{n+1}(s) - f_n(s)\| ds \\ &\leq \int_0^\tau \beta \Big\{ r_0 \frac{(\beta s)^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha \int_0^s \frac{(\beta(s-u))^{n-1}}{(n-1)!} du \Big\} ds,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}&\|\tilde{u}_{n+1}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\| \\ &\leq r_0 \int_0^\tau \beta \frac{(\beta s)^{n-1}}{(n-1)!} ds + \alpha \int_0^\tau \beta \Big(\int_0^s \frac{(\beta(s-u))^{n-1}}{(n-1)!} du \Big) ds \\ &\leq r_0 \int_0^\tau \beta \frac{(\beta s)^{n-1}}{(n-1)!} ds + \alpha \int_0^s \Big(\int_0^\tau \beta \frac{(\beta(s-u))^{n-1}}{(n-1)!} ds \Big) du \\ &\leq r_0 \int_0^\tau \beta \frac{(\beta s)^{n-1}}{(n-1)!} ds + \alpha \int_0^\tau \Big(\int_u^\tau \beta \frac{(\beta(s-u))^{n-1}}{(n-1)!} ds \Big) du \\ &= \frac{r_0}{n(n-1)!} \int_0^\tau \beta n (\beta s)^{n-1} ds + \frac{\alpha}{n(n-1)!} \int_0^\tau \Big(\int_u^\tau \beta n (\beta(s-u))^{n-1} ds \Big) du \\ &= \frac{r_0}{n(n-1)!} \int_0^\tau n (\beta s)^{n-1} \frac{d}{ds}(\beta s) ds \\ &+ \frac{\alpha}{n(n-1)!} \int_0^\tau \Big(\int_u^\tau n(\beta(s-u))^{n-1} \frac{d}{ds}(\beta(s-u)) ds \Big) du \\ &= \frac{r_0}{n(n-1)!} \int_0^\tau \frac{d}{ds}(\beta s)^n ds + \frac{\alpha}{n(n-1)!} \int_0^\tau \Big(\int_u^\tau \frac{d}{ds}(\beta(s-u))^n ds \Big) du \\ &= r_0 \frac{(\beta \tau)^n}{n!} + \alpha \int_0^\tau \frac{(\beta(\tau-u))^n}{n!} du.\end{aligned}$$

L'inégalité (2.33) implique que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{u}_{n+1}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\| &\leq r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta \tau)^n}{n!} + \alpha \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta(\tau-s))^n}{n!} ds \\ &\leq r_0 e^{\beta d} + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta d} - 1) = r(d) = b.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|\tilde{u}_{n+1}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|$ converge pour tout $\tau \in \mathcal{K}$, alors, $(\tilde{u}_n(\tau))_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy. En effet, soit $\epsilon > 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{u}_{n+1}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\| < \epsilon.$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n \geq n_0$. Alors

$$\|\tilde{u}_m(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|\tilde{u}_{j+1}(\tau) - \tilde{u}_j(\tau)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{u}_{j+1}(\tau) - \tilde{u}_j(\tau)\| < \epsilon.$$

Ainsi, la suite $(\tilde{u}_n(\tau))_{n \geq 1}$ converge vers une application $\tilde{u}(\tau)$. De même, l'inégalité (2.34) implique que pour presque tout $\tau \in \mathcal{K}$, la suite $(f_n(\tau))_{n \geq 1}$ converge vers une certaine application $f(\tau)$.

Pour tout $\tau \in \mathcal{K}$, puisque $\|\dot{\tilde{u}}_n(\tau)\| \leq \dot{r}(\tau)$ et $\dot{r} \in L^1_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{K})$, $(\dot{\tilde{u}}_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$ vers y avec $\|y(\tau)\| \leq \dot{r}(\tau)$. En fixant $\tau \in \mathcal{K}$ et en prenant n'importe quel $\epsilon \in \mathbf{R}^d$, la convergence faible dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$ donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^d \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, \dot{\tilde{u}}_n(s)\rangle ds = \int_0^d \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, y(s)\rangle ds,$$

ou de manière équivalente

$$\lim_{n\to\infty} \langle \epsilon, u_0 + \int_0^\tau \dot{\tilde{u}}_n(s)ds\rangle = \langle \epsilon, u_0 + \int_0^\tau y(s)ds\rangle.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\tau \dot{\tilde{u}}_n(s)ds = \int_0^\tau y(s)ds$. Puisque $\tilde{u}_n(\cdot)$ est une application absolument continue, on obtient $\tilde{u}(\tau) = u_0 + \int_0^\tau y(s)ds$ et $y = \dot{\tilde{u}}$. D'après le Lemme de Mazur et par l'utilisation des arguments précédents de la preuve du Théorème 2.1, on trouve que

$$\dot{\tilde{u}}(\tau) \in -\mathcal{N}_{C(\tau)}(\tilde{u}(\tau)) + f(\tau).$$

D'après $(\mathcal{H}_1)$, (2.27), (2.29) et (2.32), il vient que

$$\mathbf{d}(f_n(\tau), F(\tau, \tilde{u}(\tau))) \leq \beta\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on aura

$$\mathbf{d}(f(\tau), F(\tau, \tilde{u}(\tau))) = 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

la fermeture de $F(\tau, \tilde{u}(\tau))$ donne $f(\tau) \in F(\tau, \tilde{u}(\tau))$, p.p. $\tau \in \mathcal{K}$. □

La proposition suivante énonce les conditions sous lesquelles $(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution.

Il existe deux constantes $\eta, \mu > 0$ telles que pour tout $\rho > 0$, on note par $\check{r} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$, la solution de

$$\begin{cases} \dot{\check{r}}(\tau) = \rho + 4(\mu + \eta\rho)\check{r}(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \check{r}(0) = r_0 \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 2.2. *Supposons que $(\mathcal{H}_C)$ soit vérifié et que $\|u_0\| \leq r_0 < b$. Soit $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application à valeurs fermées non vides, satisfaisant aux hypothèses suivantes:*

$(\mathcal{H}_1^{\overline{co}})$ *$\overline{co}F(\cdot, Y(\cdot))$ est mesurable pour chaque $Y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ avec $\|Y(\tau)\| \leq b$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$;*

$(\mathcal{H}_2^{\overline{co}})$ *pour tout $\rho > 0$ et tous y_1, y_2 dans $b\overline{B}$, $y_1 \neq y_2$,*

$$haus_\rho(\overline{co}F(\tau, y_1), \overline{co}F(\tau, y_2)) < (\mu + \eta\rho)\|y_1 - y_2\|;$$

($\mathcal{H}_3^{\overline{co}}$) *pour tout* $\rho_0 > 0$ *et tout* $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$, $\mathbf{d}(0, \overline{co}F(\tau, y)) \leq \rho_0$.

Alors, il existe une application $u \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ *telle que*

$$\|u(\tau)\| \leq \check{r}(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I},$$

et pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\check{r}(\tau) \leq b$.

Preuve. Posons $\rho = 2\rho_0$, il découle de ($\mathcal{H}_3^{\overline{co}}$) que $\overline{co}F(\tau, y) \cap \rho_0\overline{B} \neq \emptyset$ et $\overline{co}F(\tau, y) \cap \rho\overline{B} \neq \emptyset$, donc on peut définir une multi-application mesurable $U : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ à valeurs fermées non vides par

$$U(\tau, y) = \overline{co}F(\tau, y) \cap \rho\overline{B}, \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}.$$

La Proposition 1.8 implique que pour tous $u, v \in b\overline{B}$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} haus(U(\tau, u), U(\tau, v)) &= haus\Big(\overline{co}F_\rho(\tau, u), \overline{co}F_\rho(\tau, v)\Big) \\ &\leq \frac{2\rho}{\rho - \rho_0} haus_\rho(\overline{co}F(\tau, u), \overline{co}F(\tau, v)), \end{aligned}$$

par ($\mathcal{H}_2^{\overline{co}}$), on peut écrire

$$\begin{aligned} haus(U(\tau, u), U(\tau, v)) &< \frac{2\rho}{\rho - \rho_0}(\mu + \eta\rho)\|u - v\| \\ &= 4(\mu + \eta\rho)\|u - v\|. \end{aligned}$$

Pour $w(\tau) \in U(\tau, 0)$ et $y \in b\overline{B}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(0, U(\tau, y)) &\leq \mathbf{d}(0, w(\tau)) + \mathbf{d}(w(\tau), U(\tau, y)) \\ &\leq \|w(\tau)\| + \sup_{w(\tau) \in U(\tau, 0)} \mathbf{d}(w(\tau), U(\tau, y)) \\ &\leq \rho + haus(U(\tau, y), U(\tau, 0)) \\ &< \rho + 4(\mu + \eta\rho)\|y\|. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.2, il existe une application $u \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{U,u_0,\mathcal{I}})$, puisque $U(\tau, u(\tau)) \subset \overline{co}F(\tau, u(\tau))$, on conclut que $u \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{\overline{co}U,u_0,\mathcal{I}})$. $\square$

Maintenant, on va annoncer une autre version du Théorème 2.2, qui jouera un rôle important dans l'étude de la relaxation.

Soient $\psi : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ une application Lipschitz avec $\psi(0) = u_0$ et $Q : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d$ une multi-application définie par

$$Q(\psi) = \Big\{(\tau, y) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d : y \in \overline{B}(\psi(\tau), b)\Big\}, \ b > 0.$$

Théorème 2.3. *Supposons que* $(\mathcal{H}_C)$ *soit vérifié et que* $0 \le r_0 < b$. *Soit* $F : Q(\psi) \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ *une multi-application à valeurs fermées non vides, satisfaisant les hypothèses suivantes*:

$(\mathcal{H}_5)$ $F(\cdot, Y(\cdot))$ *est mesurable pour chaque* $Y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *avec* $\|Y(\tau) - \psi(\tau)\| \le b$, *pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$;

$(\mathcal{H}_6)$ *pour* $0 \le \rho \le \dot{r}(\tau)$ *et* $y_1 \ne y_2$ *tels que* $(\tau, y_1), (\tau, y_2)$ *sont dans* $Q(\psi)$, *on a*

$$haus_\rho\Big(-\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, y_1), -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, y_2)\Big) < \beta\|y_1 - y_2\|;$$

$(\mathcal{H}_7)$ *pour tout* $(\tau, y) \in Q(\psi)$, $\mathbf{d}(\dot{\psi}(\tau), F(\tau, y)) \le \alpha + \beta\|y - \psi(\tau)\|$.

Alors, le problème $(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *admet une solution.*

Preuve. Soit $D_\psi : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application définie par

$$D_\psi(\tau) = C(\tau) - \psi(\tau).$$

L'ensemble $D_\psi(\cdot)$ est convexe fermé non vide et pour chaque $\mu \in \mathbf{R}^d$ et tous $\tau, s \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{d}(\mu, D_\psi(\tau)) - \mathbf{d}(\mu, D_\psi(s))| &= |\mathbf{d}(\mu, C(\tau) - \psi(\tau)) - \mathbf{d}(\mu, C(s) - \psi(s))| \\
&\le \|\psi(\tau) - \psi(s)\| + |\mathbf{d}(\mu, C(\tau)) - \mathbf{d}(\mu, C(s))| \\
&\le \|\psi(\tau) - \psi(s)\| + haus(C(\tau), C(s)) \\
&\le \|\psi(\tau) - \psi(s)\| + L|\tau - s| \\
&\le \int_s^\tau \|\dot{\psi}(\varsigma)\| d\varsigma + L|\tau - s|.
\end{aligned}$$

Soit $\tilde{\lambda}$ une constante positive, telle que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\|\dot{\psi}(\tau)\| \le \tilde{\lambda}$. En posant $L_2 = L + \tilde{\lambda}$, on aura

$$haus(D_\psi(\tau), D_\psi(s)) \le L_2|\tau - s|.$$

Soit $G : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides définie par

$$G(\tau, z) = -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z + \psi(\tau)).$$

Pour toute $v(\tau) \in G(\tau, z)$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$, on trouve que

$$\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) = \inf_{v(\tau) \in G(\tau, z)} \|v(\tau)\| = \inf_{v(\tau) \in -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z + \psi(\tau))} \|v(\tau)\|,$$

posons $w(\tau) = v(\tau) + \dot{\psi}(\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) &= \inf_{w(\tau) \in F(\tau, z + \psi(\tau))} \| - \dot{\psi}(\tau) + w(\tau)\| \\
&= \mathbf{d}(\dot{\psi}(\tau), F(\tau, z + \psi(\tau))),
\end{aligned}$$

en utilisant $(\mathcal{H}_7)$, on aura

$$\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) \leq \alpha + \beta\|z\|.$$

Pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ et tous $z_1, z_2 \in b\overline{B}$ tels que $z_1 \neq z_2$, on a

$$haus_\rho(G(\tau, z_1), G(\tau, z_2)) = haus_\rho\Big(-\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z_1 + \psi(\tau)), -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z_2 + \psi(\tau))\Big),$$

il s'ensuit de $(\mathcal{H}_6)$ que

$$haus_\rho(G(\tau, z_1), G(\tau, z_2)) < \beta\|z_1 - z_2\|.$$

Par le Théorème 2.2, le problème

$$\begin{cases} \dot{y}(\tau) \in -\mathcal{N}_{D_\psi(\tau)}(y(\tau)) + G(t, y(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ y(\tau) \in D_\psi(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ y(0) = 0 \in D_\psi(0), \end{cases}$$

admet une solution $y : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que $\|y(\tau)\| \leq r(\tau)$ et $y(\tau) = u(\tau) - \psi(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. Alors, $u \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ et

$$\|u(\tau) - \psi(\tau)\| \leq r(\tau), \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}.$$

□

2.3 Relaxation

Le résultat suivant établit la relation entre les ensembles de solutions $\mathcal{R}(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ et $\mathcal{R}(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$. Pour cette raison, par la Proposition 2.1, supposons $\gamma > 0$ et u_* la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{u}_*(\tau) \in -\mathcal{N}_{C(\tau)}(u_*(\tau)) + f_*(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_*(\tau) \in C(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I} \text{ et } \ u_*(0) = u_0, \end{cases}$$

où $f_*(\tau) \in \overline{co}(F(\tau, u_*(\tau)) \cap \gamma\overline{B})$ et $u_* \in \mathcal{R}(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$. On définit une multi-application $Q(u_*) : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d$ comme suit

$$Q(u_*) = \left\{(\tau, y) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d : y \in \overline{B}(u_*(\tau), b)\right\}, \ b > 0.$$

Théorème 2.4. *Supposons que $(\mathcal{H}_C)$ soit vérifié et $F : Q(u_*) \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ satisfait $(\mathcal{H}_5)$ et les hypothèses suivantes:*

($\mathcal{H}_8$) *il existe* $\alpha > 0$*, telle que pour tout* $(\tau, y) \in Q(u_*)$*,* $F(\tau, y) \cap \alpha\overline{B} \neq \emptyset$*;*

($\mathcal{H}_9$) *il existe* $\eta, k_* > 0$*, telles que pour tous* $(\tau, y_1), (\tau, y_2)$ *dans* $Q(u_*)$ *avec* $\rho \geq 0$*,*

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) < (k_* + \eta\rho)\|y_1 - y_2\|;$$

($\mathcal{H}_{10}$) *il existe* $\sigma_* > 0$*, telle que pour tout* $(\tau, y) \in Q(u_*)$ *avec* $y \neq u_*$*, on a*

$$\mathbf{d}(\dot{y}(\tau), F(\tau, y)) \leq \sigma_* \|u_*(\tau) - y\|.$$

Alors, $\mathcal{R}(\mathcal{T}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *est dense dans* $\mathcal{R}(\mathcal{T}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ *par rapport à la topologie de convergence uniforme.*

Preuve. Soit $H : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable, fermée et non vide, définie par

$$H(\tau) = F(\tau, u_*(\tau)) \cap \gamma\overline{B}.$$

En utilisant le Théorème 1.4, on obtient $S^1(\overline{co}H) = \overline{co}S^1(H)$. Alors, $f_*(\tau) \in \overline{co}S^1(H)$ et

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\ h_\epsilon \in coS^1(H) :\ \|f_* - h_\epsilon\|_1 \leq \epsilon.$$

Par la Proposition 2.1, le problème $(\mathcal{T}_{h_\epsilon,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution $u_{h_\epsilon} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$, telle que

$$u_{h_\epsilon} \text{ converge uniformément vers } u_* \text{ quant } \epsilon \to 0.$$

Puisque $h_\epsilon \in coS^1(H)$, il existe une collection finie d'éléments

$$f_i \in S^1(H),\ i = 1, \cdots, \bar{n},$$

et des constantes positives α_i, telles que $\sum_{i=1}^{\bar{n}} \alpha_i = 1$, et $h_\epsilon = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \alpha_i f_i$.
Soit $\bar{F} : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application intégrablement bornée, définie par

$$\bar{F}(\tau) = \{f_i(\tau) : i = 1, ..., \bar{n}\},\ \forall\tau \in \mathcal{I}.$$

Alors $h_\epsilon \in co\bar{F}(\tau)$, par le Théorème 1.5, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ telle que $v_n(\tau) \in \bar{F}(\tau) \subset H(\tau)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq s\leq\tau\leq T} \left\| \int_s^\tau \Big(v_n(\varsigma) - h_\epsilon(\varsigma)\Big) d\varsigma \right\| = 0.$$

Par le Lemme 1.2, nous déduisons que $(v_n)_n$ converge faiblement vers h_ϵ dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$. Selon la Proposition 2.1, le problème $(\mathcal{T}_{v_n,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution $g_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ avec

$$g_n \text{ converge uniformément vers } u_{h_\epsilon} \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Puisque,

$$\|g_n - u_*\|_{\mathcal{C}} \leq \|g_n - u_{h_\epsilon}\|_{\mathcal{C}} + \|u_{h_\epsilon} - u_*\|_{\mathcal{C}},$$

on conclut que

$$g_n \text{ converge uniformément vers } u_* \text{ quant } \ n \to \infty.$$

Alors,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ :\ \|g_n - u_*\|_{\mathcal{C}} \leq b/2. \tag{2.39}$$

Posons

$$l = \sup(\alpha, k_*, \gamma, \sigma_*). \tag{2.40}$$

D'après $(\mathcal{H}_8)$ et (2.40), on a pour tout $n \geq n_0$ et tout $(\tau, y(\tau)) \in Q(u_*)$,

$$F(\tau, y(\tau)) \cap l\overline{B} \neq \emptyset. \tag{2.41}$$

Par $(\mathcal{H}_{10})$, (2.39) et (2.40), on a

$$\mathbf{d}(\dot{g}_n(\tau), F(\tau, g_n(\tau))) \leq l\|u_*(\tau) - g_n(\tau)\|. \tag{2.42}$$

D'autre part, pour tout $n \geq n_0$ et tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$

$$\begin{aligned} -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau)) \cap l\overline{B} &\subset (-\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau))) \cap (-\dot{g}_n(\tau) + l\overline{B}) \\ &\subset (-\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau))) \cap (L + 3l)\overline{B}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Prenant (2.41) en compte, pour tout $n \geq n_0$ et tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$, il existe une application $\tilde{p}_n(\tau) \in F(\tau, z + g_n(\tau)) \cap l\overline{B}$. On pose $y_n(\tau) = \tilde{p}_n(\tau) - \dot{g}_n(\tau)$, donc

$$y_n(\tau) \in -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau)) \cap l\overline{B},$$

d'après (2.43), on conclut que pour tous $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$, $n \geq n_0$

$$(-\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau))) \cap (L + 3l)\overline{B} \neq \emptyset.$$

Posons $\rho = 2L + 5l$ et $\mu_n(\tau) = y_n(\tau) + \dot{g}_n(\tau)$, alors, $\mu_n(\tau) \in F_\rho(\tau, z + g_n(\tau))$, et $(\mathcal{H}_9)$ donne pour tous $z, \acute{z} \in (b/2)\overline{B}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mu_n(\tau), F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau))) &\leq e(F_\rho(\tau, z + g_n(\tau)), F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau))) \\ &\leq haus_\rho(F(\tau, z + g_n(\tau)), F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau))) \\ &< (k_* + \eta\rho)\|z - \acute{z}\| \\ &\leq (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|, \end{aligned}$$

donc, il existe $\acute{n}(\tau) \in F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau))$, telle que

$$\mu_n(\tau) - \acute{n}(\tau) \in (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|\overline{B},$$

alors,

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &\in -\dot{g}_n(\tau) + \acute{n}(\tau) + (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|\overline{B} \\ &\subset -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau)) + (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|\overline{B}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Soit $G_n : \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable définie par

$$G_n(\tau, z) = -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau)),\ n \geq n_0. \tag{2.45}$$

De (2.44) et (2.45), on peut écrire pour tous $z, \acute{z} \in (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$

$$G_n(\tau, z) \cap (L + 3l)\overline{B} \subset G_n(\tau, \acute{z}) + (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|\overline{B}. \tag{2.46}$$

Si $\rho = L + 3l$, cette dernière inclusion implique que

$$e(G_{n,\rho}(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|, \tag{2.47}$$

en échangeant les rôles entre z et $\acute{z}$, on obtient

$$e(G_{n,\rho}(\tau, \acute{z}), G_n(\tau, z)) \leq (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|. \tag{2.48}$$

D'après (2.47) et (2.48), on peut écrire

$$haus_\rho(G_n(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq (l + \eta(2L + 5l))\|z - \acute{z}\|. \tag{2.49}$$

En revenant à (2.46), par l'interchangement des rôles entre z et $\acute{z}$ et pour $\acute{z} = 0$, on aura pour tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$

$$G_n(\tau, 0) \cap (L + 3l)\overline{B} \subset G_n(\tau, z) + (l + \eta(2L + 5l))\|z\|\overline{B}.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$ avec $\|z\| \leq b/2$ et $y_n(\tau) \in G_n(\tau, 0) \cap (L + 3l)\overline{B}$, il existe $w_n(\tau) \in G_n(\tau, z)$, telle que

$$\|y_n(\tau) - w_n(\tau)\| \leq (l + \eta(2L + 5l))\|z\|,$$

cela implique que

$$\mathbf{d}(y_n(\tau), G_n(\tau, z)) \leq (l + \eta(2L + 5l))\|z\|. \tag{2.50}$$

Par conséquent,

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq \|y_n(\tau)\| + \mathbf{d}(y_n(\tau), G_n(\tau, z)).$$

Par (2.50), on peut écrire

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq \|y_n(\tau)\| + (l + \eta(2L + 5l))\|z\|. \tag{2.51}$$

(2.42) et (2.45), donnent

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, 0)) \leq l\|u_*(\tau) - g_n(\tau)\|. \tag{2.52}$$

Puisque $y_n(\tau) \in G_n(\tau, 0) \cap (L + 3l)\overline{B}$, l'inégalité (2.51) implique que

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) &\leq \inf_{y_n(\tau) \in G_n(\tau,0)} \|y_n(\tau)\| + (l + \eta(2L + 5l))\|z\| \\ &= \mathbf{d}(0, G_n(\tau, 0)) + (l + \eta(2L + 5l))\|z\|,\end{aligned}$$

pour tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$, il en résulte, grâce à (2.52), que

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq l\|u_* - g_n\|_{\mathcal{C}} + (l + \eta(2L + 5l))\|z\|. \tag{2.53}$$

Posons

$$a_n = l\|u_* - g_n\|_{\mathcal{C}} \;\; \text{et} \;\; \kappa = l + \eta(2L + 5l).$$

Avec ces notations, (2.49) et (2.53) deviennent pour tout $n \geq n_0$

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq a_n + \kappa\|z\|,$$

$$haus_\rho(G_n(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq \kappa\|z - \acute{z}\|.$$

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{r}_n(\tau) = a_n + \kappa r_n(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ r_n(0) = 0, \end{cases}$$

avec la solution $r_n(\tau) = \frac{a_n}{\kappa}(e^{\kappa\tau} - 1)$. Notons que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $r_n(\tau)$ converge vers 0, quand n tend vers ∞, par conséquent, pour tout $n \geq n_0$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$, $0 \leq r_n(\tau) \leq b/2$. Par le Théorème 2.3,

$$\begin{cases} \dot{u}_n(\tau) \in -\mathcal{N}_{C(\tau)}(u_n(\tau)) + F(\tau, u_n(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(\tau) \in C(\tau), \; \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

admet une solution $u_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ satisfaisant

$$\|u_n(\tau) - g_n(\tau)\| \leq r_n(\tau), \; \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Alors,

$$\|u_n(\tau) - u_*(\tau)\| \leq r_n(\tau) + \|g_n(\tau) - u_*(\tau)\|,$$

par passage à la limite, on trouve que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers u_*, avec $\|u_n(\tau) - u_*(\tau)\| \leq b$. $\square$

CHAPITRE 3

PROBLÈMES D'EXISTENCE ET DE RELAXATION POUR UN PROCESSUS DE LA RAFLE DÉPENDANT DE L'ÉTAT

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du processus de la rafle du premier ordre dépendant de l'état avec une perturbation multivoque. Cette inclusion d'évolution peut être exprimée sous la forme

$$(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})\begin{cases}-\dot{u}(\tau)\in\mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau))+F(\tau,u(\tau)),\ \text{p.p. }\tau\in\mathcal{I};\\ u(\tau)\in C(u(\tau)),\ \forall\tau\in\mathcal{I};\\ u(0)=u_0\in C(u_0),\end{cases}$$

où $C:\mathbf{R}^d\rightrightarrows\mathbf{R}^d$ est une multi-application à valeurs fermées non vides convexes, et $F:\mathcal{I}\times b\overline{B}\rightrightarrows\mathbf{R}^d$ avec $b>0$, est une multi-application à valeurs fermées non vides non convexes vérifiant les hypothèses suivantes:

$(\mathcal{H}_1)$ il existe $\xi,\lambda\in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telles que, pour tout $(\tau,y)\in\mathcal{I}\times b\overline{B}$,

$$\mathbf{d}(0,F(\tau,y))\leq\xi(\tau)+\lambda(\tau)\|y\|\ \text{ et }\ \mathbf{d}(0,F(\tau,0))=0\ \text{ pour }\ \xi(\tau)=0;$$

$(\mathcal{H}_2)$ pour tous $(\tau,y_1),\ (\tau,y_2)$ dans $\mathcal{I}\times b\overline{B}$,

$$haus_\rho(F(\tau,y_1),F(\tau,y_2))<\lambda(\tau)\|y_1-y_2\|.$$

Ce chapitre est spécifiquement orienté à examiner l'existence de solutions du problème $(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ en utilisant la méthode donnée dans [10] et les techniques développées dans [61], ainsi que l'existence de solutions pour le problème convexifié

$$(\mathcal{S}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau)) + \overline{co}F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in C(u(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

et on achève le chapitre par donner le théorème de relaxation.

3.2 Résultat d'existence

Commençons par présenter l'hypothèse suivante sur l'ensemble mobile:

$(\mathcal{H}_C)$ Soit $C : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application satisfaisant:

$(\mathcal{A}_1)$ pour chaque $u \in \mathbf{R}^d$, les ensembles $C(u)$ sont fermées non vides et convexes;

$(\mathcal{A}_2)$ il existe une constante $L \in [0, 1[$ telle que, pour tous $v, w, x \in \mathbf{R}^d$, on a

$$|\mathbf{d}(x, C(v)) - \mathbf{d}(x, C(w))| \leq L\|v - w\|.$$

Pour la preuve des résultats suivants, nous avons besoin de la proposition suivante où la perturbation de

$$(\mathcal{S}_{f,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau)) + f(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in C(u(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

est une application univoque, telle que

$$\exists \xi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I}) : \|f(\tau)\| \leq \xi(\tau), \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}. \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *Supposons que $(\mathcal{H}_C)$ soit vérifié.*

(1) Soit $f : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ vérifie (3.1). Alors, $(\mathcal{S}_{f,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution unique absolument continue $\tilde{u} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$, avec

$$\|\dot{\tilde{u}}(\tau)\| \leq \frac{2}{1-L}\|f(\tau)\|, \ \textit{p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

et pour tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\|\tilde{u}(\tau)\| \leq \|u_0\| + \frac{2\|\xi\|_1}{1-L}.$$

(2) Soit $(f_n)_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ *une suite de fonction vérifie* (3.1), *converge faiblement vers* $f \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *et* $\tilde{u}_n(0) = u_0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{u}_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{f_n,u_0,\mathcal{I}})$ *converge uniformément vers* $\tilde{u} \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{f,u_0,\mathcal{I}})$.

(3) Si $\tilde{u}_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{f_n,u_0^n,\mathcal{I}})$ *(resp.* $\tilde{u}_m \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{f_m,u_0^m,\mathcal{I}})$*), on a, pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$

$$\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\| \leq \|u_0^n - u_0^m\| + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\| ds. \tag{3.2}$$

Preuve. 1) Par la Proposition 3.2 dans [10] on trouve l'existence de la solution, alors, il suffit de montrer l'unicité. Soient $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ deux solutions de $(\mathcal{S}_{f,u_0,\mathcal{I}})$ avec $\tilde{u}_1(0) = \tilde{u}_2(0) = u_0$, la monotonicité du cône normal donne, pour presque $\tau \in \mathcal{I}$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\tilde{u}_1(\tau) - \tilde{u}_2(\tau)\|^2 = \langle \dot{\tilde{u}}_1(\tau) - \dot{\tilde{u}}_2(\tau), \tilde{u}_1(\tau) - \tilde{u}_2(\tau)\rangle \leq 0,$$

par intégration, on obtient $\|\tilde{u}_1(\tau) - \tilde{u}_2(\tau)\|^2 \leq \|\tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0)\|^2 = 0$.

2) On a pour tout $n \geq 1$, $\tilde{u}_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{f_n,u_0,\mathcal{I}})$ et

$$\|\dot{\tilde{u}}_n(\tau)\| \leq \frac{2\xi(\tau)}{1-L}, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

puisque $\xi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I}) \subset L^1_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, on obtient la compacité relative de $(\tilde{u}_n(\tau))_{n\geq 1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ et l'équi-continuité de $(\tilde{u}_n(\cdot))_{n\geq 1}$. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, $(\tilde{u}_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, d'où, on peut extraire une sous suite de $(\tilde{u}_n)_{n\geq 1}$ (notée aussi $(\tilde{u}_n)_{n\geq 1}$) qui converge uniformément vers une certaine fonction z.
Comme $\tilde{u}$ est la solution du $(\mathcal{S}_{f,u_0,\mathcal{I}})$, par la propriété de monotonie, on peut écrire pour tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\tilde{u}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 &\leq \langle f_n(\tau) - f(\tau), \tilde{u}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\rangle \\ &= \langle f_n(\tau) - f(\tau), \tilde{u}(\tau) - z(\tau)\rangle + \langle f_n(\tau) - f(\tau), z(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\rangle,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\tilde{u}(\tau) - \tilde{u}_n(\tau)\|^2 &\leq \int_0^\tau \langle f_n(s) - f(s), \tilde{u}(s) - z(s)\rangle ds + \int_0^\tau \langle f_n(s) - f(s), z(s) - \tilde{u}_n(s)\rangle ds \\ &\leq \int_0^\tau \langle f_n(s) - f(s), \tilde{u}(s) - z(s)\rangle ds + 2\|\xi\|_1 \|z - \tilde{u}_n\|_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite et puisque $(f_n - f)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ et que $(\tilde{u}_n)$ converge uniformément vers z, on obtient $\tilde{u} = z$.

3) Par la monotonicité du cône normal, on obtient

$$\langle -(\dot{\tilde{u}}_n(\tau) + f_n(\tau)) + (\dot{\tilde{u}}_m(\tau) + f_m(\tau)), \tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\rangle \geq 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

ainsi,

$$\langle \dot{\tilde{u}}_n(\tau) - \dot{\tilde{u}}_m(\tau), \tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\rangle \leq \langle f_n(\tau) - f_m(\tau), \tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\rangle, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\|^2 \leq \langle f_n(\tau) - f_m(\tau), \tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\rangle.$$

Par intégration, il vient que

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0^n - u_0^m\|^2 + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\|\|\tilde{u}_n(s) - \tilde{u}_m(s)\|ds,$$

en utilisant le Lemme 1.6, on trouve

$$\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\| \leq \|u_0^n - u_0^m\| + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\|ds.$$

□

Dans le résultat d'existence suivant, nous supposons que la perturbation de $(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ multivoque à valeurs non convexes et non bornées.

Théorème 3.1. *Supposons que* $(\mathcal{H}_C)$ *soit vérifié et* $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ *pour* $b > 0$, *une multi-application à valeurs fermées non vides satisfaisant les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et*

$(\mathcal{H}_3)$ $F(\cdot, y(\cdot))$ *est mesurable pour chaque* $y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *avec* $\|y(\tau)\| \leq b$, *pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$.

Supposons que l'hypothèse suivante soit également vérifiée:

$(\mathcal{H}_4)$ *soient les suites* $(z_n) \subset L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *et* $(\tilde{z}_n) \subset \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, *telles que pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$, $(\tilde{z}_n(\tau))_n$ *converge,* $z_n(\tau) \in F(\tau, \tilde{z}_n(\Delta_n(\tau))) \cap (\xi(\tau) + \lambda(\tau)\kappa)\overline{B}$ *et* (z_n) *converge faiblement vers* $z \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, *on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n\|_{L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})} \leq \|z\|_{L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})},$$

avec $\kappa = 2(\|u_0\| + \frac{2}{1-L}\|\xi\|_1)$.

Alors, pour chaque $u_0 \in C(u_0)$, *le problème* $(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *admet une solution absolument continue* $u : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ *satisfaisant*

$$\|\dot{u}(\tau)\| \leq \tilde{\beta}(\tau), \ p.p. \ \tau \in \mathcal{I},$$

avec

$$\tilde{\beta}(\tau) = \frac{2}{1-L}\Big(\xi(\tau) + \lambda(\tau)\kappa\Big).$$

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition de $\mathcal{I}$ par les points

$$\tau_i^n = i\varepsilon_n \ , \ \varepsilon_n = \frac{T}{n}, 0 \leq i \leq n.$$

On note par $m_F(\tau, y)$ l'élément de norme minimale de l'ensemble fermé $F(\tau, y)$ donc par $(\mathcal{H}_1)$ et pour tout $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$, on obtient

$$\|m_F(\tau, y)\| \leq \xi(\tau) + \lambda(\tau)\|y\|. \tag{3.3}$$

On suppose que

$$\int_0^T \lambda(s)ds \leq \frac{1-L}{4}. \tag{3.4}$$

Étape 1. Construction des solutions approximatives.

Pour $u_0 \in C(u_0)$, traitons le problème suivant sur l'intervalle $[0, \tau_1^n]$:

$$\begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau)) + m_F(\tau, u_0), \text{ p.p. } \tau \in [0, \tau_1^n]; \\ u(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

où $m_F(\cdot, u_0) \in L^2_{\mathbf{R}^d}([0, \tau_1^n])$ dépend uniquement de τ. Par la Proposition 3.1, le problème précédent admet une solution absolument continue $u_0^n : [0, \tau_1^n] \to \mathbf{R}^d$, telle que

$$\|\dot{u}_0^n(\tau)\| \leq \frac{2}{1-L}\|m_F(\tau, u_0)\|, \quad \text{p.p. } \tau \in [0, \tau_1^n].$$

Puisque $u_0^n(\tau_1^n) \in C(u_0^n(\tau_1^n))$ est bien définie, prenons en compte dans l'intervalle $[\tau_1^n, \tau_2^n]$ le problème suivant

$$\begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau)) + m_F(\tau, u_0^n(\tau_1^n)), \quad \text{p.p. } \tau \in [\tau_1^n, \tau_2^n]; \\ u(\tau_1^n) = u_0^n(\tau_1^n) \in C(u_0^n(\tau_1^n)), \end{cases}$$

qui admet une solution notée $u_1^n : [\tau_1^n, \tau_2^n] \to \mathbf{R}^d$ avec $u_1^n(\tau_1^n) = u_0^n(\tau_1^n)$ et satisfaisant

$$\|\dot{u}_1^n(\tau)\| \leq \frac{2}{1-L}\|m_F(\tau, u_0^n(\tau_1^n))\|, \quad \text{p.p. } \tau \in [\tau_1^n, \tau_2^n].$$

Pour chaque n, il existe une suite finie d'applications absolument continues $u_i^n : [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n] \to \mathbf{R}^d$, $(0 \leq i \leq n-1)$ telle que, pour chaque $0 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{cases} -\dot{u}_i^n(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u_i^n(\tau))}(u_i^n(\tau)) + m_F(\tau, u_{i-1}^n(\tau_i^n)), \text{ p.p. } \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]; \\ u_i^n(\tau_i^n) = u_{i-1}^n(\tau_i^n) \in C(u_{i-1}^n(\tau_i^n)), \end{cases}$$

où $u_{-1}^n(0) = u_0$ et

$$\|\dot{u}_i^n(\tau)\| \leq \frac{2}{1-L}\|m_F(\tau, u_{i-1}^n(\tau_i^n))\|, \text{ p.p. } \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n].$$

On définit la fonction $u_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ par

$$u_n(\tau) = u_i^n(\tau);\ \forall \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n],\ 0 \leq i \leq n-1$$

et $\varrho_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ par

$$\varrho_n(\tau) = \tau_i^n,\ \forall \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n[,\ 0 \leq i \leq n-1,\ \varrho_n(0) = 0.$$

Ainsi, $u_n(\cdot)$ est une solution absolument continue de

$$\begin{cases} -\dot{u}_n(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u_n(\tau))}(u_n(\tau)) + m_F(\tau, u_n(\varrho_n(\tau))), \quad \text{p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

avec

$$\|\dot{u}_n(\tau)\| \leq \frac{2}{1-L}\|m_F(\tau, u_n(\varrho_n(\tau)))\|,\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{I}. \tag{3.6}$$

Par intégration sur $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]$, on obtient

$$\|u_n(\tau_{i+1}^n)\| \leq \|u_n(\tau_i^n)\| + \frac{2}{1-L}\int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} \|m_F(s, u_n(\tau_i^n))\| ds.$$

Par itération, on a pour chaque $0 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \|u_n(\tau_{i+1}^n)\| &\leq \|u_0\| + \frac{2}{1-L}\sum_{k=0}^{i}\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} \|m_F(s, u_n(\tau_k^n))\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \frac{2}{1-L}\sum_{k=0}^{i}\left\{\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} \xi(s) ds + \|u_n(\tau_k^n)\|\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} \lambda(s) ds\right\} \\ &\leq \|u_0\| + \frac{2}{1-L}\left\{\int_0^{\tau_{i+1}^n} \xi(s) ds + \max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\|\int_0^{\tau_{i+1}^n} \lambda(s) ds\right\}, \end{aligned}$$

par suite,

$$\max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\| \leq \|u_0\| + \frac{2}{1-L}\left\{\int_0^T \xi(s) ds + \max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\|\int_0^T \lambda(s) ds\right\}.$$

En utilisant (3.4), on aura

$$\max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\| \leq 2(\|u_0\| + \frac{2}{1-L}\|\xi\|_1),$$

d'où,

$$\|u_n(\varrho_n(\tau))\| \leq 2(\|u_0\| + \frac{2}{1-L}\|\xi\|_1) := \kappa. \tag{3.7}$$

Par (3.3), (3.6) et (3.7), on obtient

$$\|m_F(\tau, u_n(\varrho_n(\tau)))\| \leq \xi(\tau) + \lambda(\tau)\kappa := \kappa_1(\tau),$$

et

$$\|\dot{u}_n(\tau)\| \leq \frac{2}{1-L}\Big(\xi(\tau) + \lambda(\tau)\kappa\Big) := \tilde{\beta}(\tau),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{I}. \tag{3.8}$$

Étape 2. La convergence des suites.

On observe que, $|\varrho_n(\tau)-\tau| = |\tau_i^n - \tau| \leq \varepsilon_n$, alors $\varrho_n(\tau) \to \tau$ quand $n \to \infty$. En utilisant (3.8), on trouve que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$,

$$\|u_n(\varrho_n(\tau)) - u_n(\tau)\| \leq \int_{\varrho_n(\tau)}^{\tau} \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \int_{\varrho_n(\tau)}^{\tau} \tilde{\beta}(s) ds,$$

et $\|u_n(\tau)\| \leq \|\tilde{\beta}\|_1 + \kappa$, alors,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\varrho_n(\tau)) - u_n(\tau)\| = 0, \tag{3.9}$$

et $(u_n(\tau))_{n\geq 1}$ est relativement compacte, puisque $\tilde{\beta} \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I}) \subset L^1_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$. D'autre part, selon (3.8), $(u_n(\cdot))_{n\geq 1}$ est équi-continue, par le Théorème d'Ascoli-Arzelà nous concluons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, donc, on peut extraire une sous suite (à nouveau dénoter par) $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge uniformément vers une certaine application u. Par (3.8), $(\dot{u}_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers z avec $\|z(\tau)\| \leq \tilde{\beta}(\tau),$ p.p. $\tau \in \mathcal{I}$. En fixant $\tau \in \mathcal{I}$ et en prenant n'importe quel $\epsilon \in \mathbf{R}^d$, la convergence faible dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, \dot{u}_n(s)\rangle ds = \int_0^T \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, z(s)\rangle ds,$$

ou équivalent

$$\lim_{n\to\infty} \langle \epsilon, u_0 + \int_0^{\tau} \dot{u}_n(s) ds\rangle = \langle \epsilon, u_0 + \int_0^{\tau} z(s) ds\rangle.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\tau} \dot{u}_n(s)ds = \int_0^{\tau} z(s)ds$, puisque $u_n(\cdot)$ est une application absolument continue, on obtient $u(\tau) = u_0 + \int_0^{\tau} z(s)ds$ et $z = \dot{u}$.

Pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, nous avons

$$\|u_n(\varrho_n(\tau)) - u(\tau)\| \leq \|u_n(\varrho_n(\tau)) - u_n(\tau)\| + \|u_n(\tau) - u(\tau)\|,$$

en utilisant (3.9), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\varrho_n(\tau)) - u(\tau)\| = 0. \tag{3.10}$$

Posons $(m_F(\cdot, u_n(\varrho_n(\cdot))))_n = (f_n(\cdot))_n$, pour tout $n \geq 1$. Puisque $\|f_n(\tau)\| \leq \kappa_1(\tau)$, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers f avec $\|f(\tau)\| \leq \kappa_1(\tau),$ p.p. $\tau \in \mathcal{I}$. Comme $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ est uniformément convexe, l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ et la Proposition 1.5 donnent la convergence forte de $(f_n)_{n\geq 1}$.

De plus, puisque $f_n(\tau) \in F(\tau, u_n(\varrho_n(\tau))) \cap \rho(\tau)\overline{B}$ avec $\rho(\tau) = \kappa_1(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ et $n \geq 1$, alors par $(\mathcal{H}_2)$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(f(\tau), F(\tau, u(\tau))) &\leq \|f(\tau) - f_n(\tau)\| + \mathbf{d}(f_n(\tau), F(\tau, u(\tau))) \\
&\leq \|f(\tau) - f_n(\tau)\| + haus_{\rho(\tau)}(F(\tau, u_n(\varrho_n(\tau))), F(\tau, u(\tau))) \\
&< \|f(\tau) - f_n(\tau)\| + \lambda(\tau)\|u_n(\varrho_n(\tau)) - u(\tau)\|.
\end{aligned}$$

Grâce à (3.10), la convergence de la suite $(f_n(\cdot))_{n\geq 1}$ vers $f(\cdot)$ et en passant à la limite dans la dernière inégalité, on obtient

$$\mathbf{d}(f(\tau), F(\tau, u(\tau))) = 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.$$

La fermeture de $F(\tau, u(\tau))$ donne $f(\tau) \in F(\tau, u(\tau))$, p.p. $\tau \in \mathcal{I}$.

Étape 3. Nous prouvons que $u \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$.

Pour chaque $\tau \in \mathcal{I}$, et pour $n \geq 1$, par $(\mathcal{A}_2)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d}(u_n(\tau), C(u(\tau))) \\
&\leq \|u_n(\tau) - u_n(\varrho_n(\tau)\| + \mathbf{d}(u_n(\varrho_n(\tau)), C(u(\tau))) - \mathbf{d}(u_n(\varrho_n(\tau)), C(u_n(\varrho_n(\tau)))) \\
&\leq \|u_n(\tau) - u_n(\varrho_n(\tau)\| + L\|u_n(\varrho_n(\tau)) - u(\tau)\|.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.9), (3.10), en appliquant la limite à l'inégalité précédente et d'après la fermeture de $C(u(\tau))$, on obtient $u(\tau) \in C(u(\tau))$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$.

D'autre part, nous avons

$$\| - \dot{u}_n(\tau) + f_n(\tau)\| \leq \|\dot{u}_n(\tau)\| + \|f_n(\tau)\| \leq \tilde{\beta}(\tau) + \kappa_1(\tau) := \tilde{M}(\tau). \tag{3.11}$$

Par (3.5) et (3.11), nous obtenons pour presque tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$-\dot{u}_n(\tau) + f_n(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u_n(\tau))}(u_n(\tau)) \cap \tilde{M}(\tau)\overline{B} = \tilde{M}(\tau)\partial\mathbf{d}(u_n(\tau), C(u_n(\tau)).$$

Comme $(-\dot{u}_n + f_n)$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers $-\dot{u} + f$, une application de Lemme de Mazur à $(-\dot{u}_n + f_n)$ fournit une suite $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ avec

$$\Lambda_n \in co\{-\dot{u}_m + f_m : m \geq n\},$$

de telle sorte que $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ converge fortement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers $-\dot{u} + f$. Donc, on peut extraire de $(\Lambda_n(\cdot))_{n\geq 1}$ une sous suite qui converge p.p. vers $-\dot{u}(\cdot) + f(\cdot)$. Alors, il existe un ensemble négligeable de Lebesgue $N \subset \mathcal{I}$ tel que pour tout $\tau \in \mathcal{I}\backslash N$

$$-\dot{u}(\tau) + f(\tau) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\Lambda_k(\tau) : k \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{-\dot{u}_k(\tau) + f_k(\tau) : k \geq n\}.$$

Fixons $\tau \in \mathcal{I}\backslash N$ et $\nu \in \mathbf{R}^d$, d'après l'inclusion précédente et le Théorème 1.6, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle -\dot{u}(\tau) + f(\tau), \nu\rangle &\leq \tilde{M}(\tau) \limsup_{n\to\infty} \delta^*(\partial\mathbf{d}(u_n(\tau), C(u_n(\tau))), \nu) \\
&\leq \tilde{M}(\tau)\delta^*(\partial\mathbf{d}(u(\tau), C(u(\tau))), \nu),
\end{aligned}$$

où la semicontinuité supérieure de la multi-application $\partial\mathbf{d}(\cdot, C(\cdot))$ entraîne la deuxième inégalité. Comme $\partial\mathbf{d}(u(\tau), C(u(\tau)))$ est convexe fermé, on aura

$$-\dot{u}(\tau) + f(\tau) \in \tilde{M}(\tau)\partial\mathbf{d}(u(\tau), C(u(\tau))) \subset \mathcal{N}_{C(u(\tau))}(u(\tau)).$$

Enfin, lorsque $\int_0^T \lambda(s)ds > \frac{1-L}{4}$, nous subdivisons $\mathcal{I}$ en intervalles satisfaisant (3.4), et en conséquence de ce qui précède, nous construisons une solution absolument continue dans chaque sous intervalle, alors le problème $(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ possède une solution sur $\mathcal{I}$. □

Dans le théorème suivant, nous traitons la bornitude de la solution en ajoutant une condition sur ρ, ce résultat jouera un rôle majeur dans la preuve du théorème de relaxation. On note par $\omega : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$, la solution de

$$\begin{cases} \dot{\omega}(\tau) = \xi(\tau) + \lambda(\tau)\omega(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \omega(0) = \omega_0 \geq 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

où

$$\omega(\tau) = \omega_0 e^{\tilde{m}(\tau)} + \int_0^\tau e^{\tilde{m}(\tau)-\tilde{m}(s)}\xi(s)ds, \ \tilde{m}(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s)ds, \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_C)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ du Théorème 3.1 soient vérifiées, ω satisfait (3.12) avec $\|u_0\| \leq \omega_0 < b$ et $0 \leq \rho \leq \dot{\omega}(\tau)$. Alors, $(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution absolument continue $v : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\|v(\tau)\| \leq \omega(\tau) \leq b$.*

Preuve. En utilisant (3.12), on trouve que $\dot{\omega}(\tau) > 0$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, alors l'application $\omega : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$ est strictement croissante. Comme $\|u_0\| \leq \omega_0 < b$, soit $\omega(\tau) \leq b$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, ou bien il existe un unique $d \in]0, T]$ tel que $\omega(\tau) > b$, pour $\tau \in]d, T]$ et $\omega(d) = b$. Posons $\mathcal{K} = [0, d]$. Pour $y \in \omega(\tau)\overline{B}$, nous avons par $(\mathcal{H}_1)$ et (3.12)

$$F(\tau, y) \cap \dot{\omega}(\tau)\overline{B} \neq \emptyset, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

Soient $(\tau, y_1), (\tau, y_2)$ dans $\mathcal{K} \times \omega(\tau)\overline{B}$ et $\rho(\tau) = \dot{\omega}(\tau)$, p.p. $\tau \in \mathcal{K}$, il existe $p(\tau) \in F_{\rho(\tau)}(\tau, y_1)$, telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(p(\tau), F(\tau, y_2)) &\leq e(F_{\rho(\tau)}(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) \\ &\leq haus_{\rho(\tau)}(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)), \end{aligned}$$

en utilisant $(\mathcal{H}_2)$, on obtient

$$\mathbf{d}(p(\tau), F(\tau, y_2)) < \lambda(\tau)\|y_1 - y_2\|,$$

alors,

$$p(\tau) \in F(\tau, y_2) + \lambda(\tau)\|y_1 - y_2\|\overline{B}, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{3.13}$$

Supposons que l'on peut définir par induction une suite $(h_n, v_n) \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K}) \times \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$ telle que pour tout $n \geq 1$, les conditions suivantes sont satisfaites

$$h_0(\tau) = v_0(\tau) = 0, \ \|v_n(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|h_n(s)\| ds, \ \forall \tau \in \mathcal{K}; \tag{3.14}$$

$$h_n(\tau) \in F(\tau, v_{n-1}(\tau)), \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}; \tag{3.15}$$

$$v_n \text{ la} \quad \text{solution correspondante} \quad \text{de } (\mathcal{S}_{h_n, u_0, \mathcal{K}}); \tag{3.16}$$

$$(v_n(\tau))_{n\geq 0} \text{ et } (h_n(\tau))_{n\geq 1} \ \text{ sont des suites de Cauchy pour tout } \ \tau \in \mathcal{K};$$

En effet, posons $\mathcal{K}_0 = \{\tau \in \mathcal{K} : \xi(\tau) = 0\}$, donc $(\mathcal{H}_1)$ implique

$$\tilde{\xi}_0(\tau) = \mathbf{d}(0, F(\tau, v_0(\tau))) \leq \xi(\tau), \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_0. \tag{3.17}$$

En utilisant $(\mathcal{H}_3)$, l'application $\tilde{\xi}_0$ est mesurable et

$$\tilde{\xi}_0(\tau) < \frac{\tilde{\xi}_0(\tau) + \xi(\tau)}{2} < \xi(\tau), \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_0.$$

Par (3.17), $F(\cdot, v_0(\cdot)) \cap \frac{\tilde{\xi}_0(\cdot)+\xi(\cdot)}{2}\overline{B}$, est mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, il existe une sélection mesurable w_0 de cette application. On pose

$$h_1(\tau) = \begin{cases} w_0(\tau) & \text{si } \tau \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_0; \\ h_0(\tau) & \text{si } \tau \in \mathcal{K}_0, \end{cases}$$

et

$$\|h_1(\tau)\| \leq \xi(\tau), \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}, \tag{3.18}$$

$$h_1(\tau) \in F(\tau, v_0(\tau)), \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

D'après la Proposition 3.1, prenons v_1 comme solution correspondante de $(\mathcal{S}_{h_1, u_0, \mathcal{K}})$. De (3.2), (3.12) et (3.18), on obtient

$$\|v_1(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|h_1(s)\| ds \leq \omega_0 + \int_0^\tau \dot{\omega}(s) ds = \omega(\tau).$$

Puisque pour $\tau \in \mathcal{K}$, $h_1(\tau) \in F(\tau, v_0(\tau)) \cap \dot{\omega}(\tau)\overline{B}$, p.p. $\tau \in \mathcal{K}$ et $\|v_0(\tau)\| = 0 \leq \omega(\tau)$, d'après (3.13) on aura

$$h_1(\tau) \in F(\tau, v_1(\tau)) + \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\|\overline{B}, \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

et

$$\mathbf{d}(h_1(\tau), F(\tau, v_1(\tau))) \leq \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\|, \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

quand $\|v_1(\tau)\| \neq 0$. Soit $\mathcal{K}_1 = \{\tau \in \mathcal{K} : \|v_1(\tau) - v_0(\tau)\| = 0\}$. Puisque $\tilde{\xi}_1(\tau) = \mathbf{d}(h_1(\tau), F(\tau, v_1(\tau)))$ est mesurable et

$$\tilde{\xi}_1(\tau) < \frac{\tilde{\xi}_1(\tau) + \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\|}{2} < \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\|, \ \tau \notin \mathcal{K}_1,$$

en tant que l'ensemble $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ est fermé, on voit que la multi-application

$$F(\cdot, v_1(\cdot)) \cap \Big(h_1(\cdot) + \frac{\tilde{\xi}_1(\cdot) + \lambda(\cdot)\|v_1(\cdot)\|}{2}\overline{B}\Big) \text{ sur } \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1$$

est mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, il existe une sélection mesurable w_1 de cette application sur $\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1$. On pose

$$h_2(\tau) = \begin{cases} w_1(\tau) & \text{si } \tau \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1; \\ h_1(\tau) & \text{si } \tau \in \mathcal{K}_1, \end{cases}$$

et

$$h_2(\tau) \in F(\tau, v_1(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$
$$\|h_1(\tau) - h_2(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\|, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{3.19}$$

Par conséquent, pour p.p. $\tau \in \mathcal{K}$

$$\|h_2(\tau)\| \leq \|h_1(\tau)\| + \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\| \leq \xi(\tau) + \lambda(\tau)\omega(\tau) = \dot{\omega}(\tau).$$

Par la Proposition 3.1, on pose v_2 la solution correspondante de $(\mathcal{S}_{h_2,u_0,\mathcal{K}})$. Ensuite, à partir de (3.2), on obtient $\|v_2(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|h_2(s)\|ds$, ainsi, $\|v_2(\tau)\| \leq \omega(\tau)$, et par (3.19),

$$\|h_1(\tau) - h_2(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\|v_1(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\Big(\|u_0\| + \int_0^\tau \|h_1(s)\|ds\Big),$$

donc,

$$\|h_1(\tau) - h_2(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\Big(\omega_0 + \int_0^\tau \xi(s)ds\Big), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{3.20}$$

Grâce à (3.2) et (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}\|v_2(\tau) - v_1(\tau)\| \leq \int_0^\tau \|h_1(s) - h_2(s)\|ds \leq & \omega_0 \int_0^\tau \lambda(s)ds + \int_0^\tau \xi(\varsigma) \int_\varsigma^\tau \lambda(s)dsd\varsigma \\ = & \omega_0 \tilde{m}(\tau) + \int_0^\tau (\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(\varsigma))\xi(\varsigma)d\varsigma.\end{aligned}$$

Par induction, supposons que $(h_1, v_1), \cdots, (h_n, v_n)$ sont définies et vérifient (3.14), (3.15), (3.16) et

$$\|h_{n+1}(\tau) - h_n(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\|v_n(\tau) - v_{n-1}(\tau)\|, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$
$$\|v_n(\tau)\| \leq \omega(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{K}, \ \|h_n(\tau)\| \leq \dot{\omega}(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}. \tag{3.21}$$

En raisonnant comme précédemment, pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{K}_n = \{\tau \in \mathcal{K} : \|v_n(\tau) - v_{n-1}(\tau)\| = 0\}$. Puisque $\tilde{\xi}_n(\tau) = \mathbf{d}(h_n(\tau)), F(\tau, v_n(\tau))$ est mesurable et

$$\tilde{\xi}_n(\tau) < \frac{\tilde{\xi}_n(\tau) + \lambda(\tau)\|v_n(\tau) - v_{n-1}(\tau)\|}{2} < \lambda(\tau)\|v_n(\tau) - v_{n-1}(\tau)\|, \ \tau \notin \mathcal{K}_n,$$

en tant que $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ est fermé, alors, pour $\tau \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_n$

$$F(\cdot, v_n(\cdot)) \cap \Big(h_n(\cdot) + \frac{\tilde{\xi}_n(\cdot) + \lambda(\cdot)\|v_n(\cdot) - v_{n-1}(\cdot)\|}{2}\overline{B}\Big),$$

est mesurable à valeurs fermées non vides. Il existe donc une sélection mesurable w_n de cette application sur $\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_n$. Posons

$$h_{n+1}(\tau) = \begin{cases} w_n(\tau) & \text{si } \tau \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_n; \\ h_n(\tau) & \text{si } \tau \in \mathcal{K}_n. \end{cases}$$

Donc, on obtient pour p.p. $\tau \in \mathcal{K}$, $h_{n+1}(\tau) \in F(\tau, v_n(\tau))$, $\|h_{n+1}(\tau) - h_n(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\|v_{n-1}(\tau) - v_n(\tau)\|$ et

$$\|h_{n+1}(\tau) - h_n(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\Big\{\omega_0\frac{(\tilde{m}(\tau))^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^\tau \frac{(\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s))^{n-1}}{(n-1)!}\xi(s)ds\Big\}, \ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

La Proposition 3.1 fournit la solution correspondante v_{n+1} de $(\mathcal{S}_{h_{n+1}, u_0, \mathcal{K}})$. D'autre part,

$$\|h_{n+1}(\tau)\| - \|h_1(\tau)\| \leq \sum_{j=1}^{i}\|h_{j+i}(\tau) - h_j(\tau)\| \leq \lambda(\tau)\sum_{j=1}^{i}\|v_j(\tau) - v_{j-1}(\tau)\|,$$

donc,

$$\begin{aligned}
\|h_{n+1}(\tau)\| &\leq \lambda(\tau)\sum_{j=1}^{i}\|v_j(\tau) - v_{j-1}(\tau)\| + \|h_1(\tau)\| \\
&\leq \lambda(\tau)\Big(\omega_0\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(\tilde{m}(\tau))^j}{j!} + \sum_{j=0}^{i-1}\int_0^\tau \frac{(\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s))^j}{j!}\xi(s)ds\Big) + \xi(\tau) \\
&\leq \lambda(\tau)\Big(\omega_0 e^{\tilde{m}(\tau)} + \int_0^\tau e^{\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s)}\xi(s)ds\Big) + \xi(\tau) \\
&= \lambda(\tau)\omega(\tau) + \xi(\tau) = \dot{\omega}(\tau).
\end{aligned}$$

Grâce à (3.2), on obtient $\|v_{n+1}(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|h_{n+1}(s)\|ds$, et $\|v_{n+1}(\tau)\| \leq \omega(\tau)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\|v_{n+1}(\tau) - v_n(\tau)\| \leq \int_0^\tau \|h_{n+1}(s) - h_n(s)\|ds \\
&\leq \int_0^\tau \lambda(s)\Big\{\omega_0\frac{(\tilde{m}(s))^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^s \frac{(\tilde{m}(s) - \tilde{m}(\varsigma))^{n-1}}{(n-1)!}\xi(\varsigma)d\varsigma\Big\}ds \\
&\leq \omega_0\int_0^\tau \lambda(s)\frac{(\tilde{m}(s))^{n-1}}{(n-1)!}ds + \int_0^\tau \lambda(s)\Big(\int_0^s \frac{(\tilde{m}(s) - \tilde{m}(\varsigma))^{n-1}}{(n-1)!}\xi(\varsigma)d\varsigma\Big)ds \\
&\leq \omega_0\int_0^\tau \lambda(s)\frac{(\tilde{m}(s))^{n-1}}{(n-1)!}ds + \int_0^s \xi(\varsigma)\Big(\int_0^\tau \lambda(s)\frac{(\tilde{m}(s) - \tilde{m}(\varsigma))^{n-1}}{(n-1)!}ds\Big)d\varsigma,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\|v_{n+1}(\tau) - v_n(\tau)\| \\
&\leq \omega_0 \int_0^\tau \lambda(s) \frac{(\tilde{m}(s))^{n-1}}{(n-1)!} ds + \int_0^\tau \xi(\varsigma) \Big(\int_\varsigma^\tau \lambda(s) \frac{(\tilde{m}(s) - \tilde{m}(\varsigma))^{n-1}}{(n-1)!} ds \Big) d\varsigma \\
&= \frac{\omega_0}{n(n-1)!} \int_0^\tau \lambda(s) n (\tilde{m}(s))^{n-1} ds + \frac{1}{n(n-1)!} \int_0^\tau \xi(\varsigma) \Big(\int_\varsigma^\tau \lambda(s) n (\tilde{m}(s) \\
&- \tilde{m}(\varsigma))^{n-1} ds \Big) d\varsigma \\
&= \frac{\omega_0}{n(n-1)!} \int_0^\tau n (\tilde{m}(s))^{n-1} \frac{d}{ds}(\tilde{m}(s)) ds + \frac{1}{n(n-1)!} \int_0^\tau \xi(\varsigma) \Big(\int_\varsigma^\tau n (\tilde{m}(s) \\
&- \tilde{m}(\varsigma))^{n-1} \frac{d}{ds}(\tilde{m}(s) - \tilde{m}(\varsigma)) ds \Big) d\varsigma \\
&= \frac{\omega_0}{n(n-1)!} \int_0^\tau \frac{d}{ds}(\tilde{m}(s))^n ds + \frac{1}{n(n-1)!} \int_0^\tau \xi(\varsigma) \Big(\int_\varsigma^\tau \frac{d}{ds}(\tilde{m}(s) - \tilde{m}(\varsigma))^n ds \Big) d\varsigma \\
&= \omega_0 \frac{(\tilde{m}(\tau))^n}{n!} + \int_0^\tau \frac{(\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(\varsigma))^n}{n!} \xi(\varsigma) d\varsigma.
\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \|v_{n+1}(\tau) - v_n(\tau)\| &\leq \omega_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{(\tilde{m}(\tau))^n}{n!} + \int_0^\tau \sum_{n=0}^\infty \frac{(\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s))^n}{n!} \xi(s) ds \\
&= \omega_0 e^{\tilde{m}(\tau)} + \int_0^\tau e^{\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s)} \xi(s) ds = \omega(\tau).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|v_{n+1}(\tau) - v_n(\tau)\|$ converge pour tout $\tau \in \mathcal{K}$, donc $(v_n(\tau))_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, d'où, elle converge vers l'application $v(\tau)$, et nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \|h_{n+1}(\tau) - h_n(\tau)\| \leq \lambda(\tau) \Big\{ \omega_0 \sum_{n=1}^\infty \frac{(\tilde{m}(\tau))^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^\tau \sum_{n=1}^\infty \frac{(\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s))^{n-1}}{(n-1)!} \xi(s) ds \Big\} \\
= \lambda(\tau) \Big\{ \omega_0 e^{\tilde{m}(\tau)} + \int_0^\tau e^{\tilde{m}(\tau) - \tilde{m}(s)} \xi(s) ds \Big\} = \lambda(\tau) \omega(\tau),
\end{aligned}$$

alors, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|h_{n+1}(\tau) - h_n(\tau)\|$ converge pour presque tout $\tau \in \mathcal{K}$, et $(h_n(\tau))_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge vers une certaine application $h(\tau)$.

Pour tout $\tau \in \mathcal{K}$, puisque $\|\dot{v}_n(\tau)\| \leq \dot{\omega}(\tau)$ et $\dot{\omega} \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{K}) \subset L^1_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{K})$, $(\dot{v}_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$ vers y avec $\|y(\tau)\| \leq \dot{\omega}(\tau)$. En fixant $\tau \in \mathcal{K}$ et en prenant n'importe quel $\epsilon \in \mathbf{R}^d$, la convergence faible dans $L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$ donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^d \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, \dot{v}_n(s) \rangle ds = \int_0^d \langle \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon, y(s) \rangle ds,$$

ou d'une façon équivalente

$$\lim_{n\to\infty} \langle \epsilon, u_0 + \int_0^\tau \dot{v}_n(s) ds \rangle = \langle \epsilon, u_0 + \int_0^\tau y(s) ds \rangle.$$

Alors, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\tau \dot{v}_n(s)ds = \int_0^\tau y(s)ds$, puisque $v_n(\cdot)$ est une application absolument continue, on obtient $v(\tau) = u_0 + \int_0^\tau y(s)ds$ et $y = \dot{v}$. D'après le Lemme de Mazur et par l'utilisation des arguments présidents dans la preuve du théorème 3.1, on obtient

$$\dot{v}(\tau) \in -\mathcal{N}_{C(v(\tau))}(v(\tau)) + h(\tau).$$

Par $(\mathcal{H}_2)$, (3.13), (3.15) et (3.21), on obtient

$$\mathbf{d}(h_{n+1}(\tau), F(\tau, v(\tau))) \leq \lambda(\tau)\|v_n(\tau) - v(\tau)\|, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve

$$\mathbf{d}(h(\tau), F(\tau, v(\tau))) = 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

La fermeture de $F(\tau, v(\tau))$ donne $h(\tau) \in F(\tau, v(\tau))$, p.p. $\tau \in \mathcal{K}$. $\square$

La proposition suivante donne les conditions sous lesquelles le problème convexifié admet une solution.
Il existe $\mu \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et $\zeta > 0$ telles que pour tout $\rho \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, on note par $\breve{\omega} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$ la solution de

$$\begin{cases} \dot{\breve{\omega}}(\tau) = \rho(\tau) + 4(\mu(\tau) + \zeta\rho(\tau))\breve{\omega}(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \breve{\omega}(0) = \omega_0 \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 3.2. *Supposons que $(\mathcal{H}_C)$ soit vérifié et que $\|u_0\| \leq \omega_0 < b$. Soit $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application à valeurs fermées non vides satisfaisant les hypothèses suivantes*:

$(\mathcal{H}_1^{\overline{co}})$ *$\overline{co}F(\cdot, y(\cdot))$ est mesurable pour chaque $y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ avec $\|y(\tau)\| \leq b$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$;*

$(\mathcal{H}_2^{\overline{co}})$ *pour tout $\rho \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et tous y_1, y_2 dans $b\overline{B}$, $y_1 \neq y_2$*

$$haus_{\rho(\tau)}(\overline{co}F(\tau, y_1), \overline{co}F(\tau, y_2)) < (\mu(\tau) + \zeta\rho(\tau))\|y_1 - y_2\|;$$

$(\mathcal{H}_3^{\overline{co}})$ *pour tout $\rho_0 \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et tout $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$, $\mathbf{d}(0, \overline{co}F(\tau, y)) \leq \rho_0(\tau)$.*

Alors, il existe une application $u \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{\overline{co}F, u_0, \mathcal{I}})$ satisfaisant

$$\|u(\tau)\| \leq \breve{\omega}(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I},$$

et pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\breve{\omega}(\tau) \leq b$.

Preuve. Posons $\rho(\tau) = 2\rho_0(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. Il résulte de $(\mathcal{H}_3^{\overline{co}})$ que $\overline{co}F(\tau, y)) \cap \rho_0(\tau)\overline{B} \neq \emptyset$ et $\overline{co}F(\tau, y)) \cap \rho(\tau)\overline{B} \neq \emptyset$, d'où on peut définir une multi-application mesurable $U : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ à valeurs fermées non vides par

$$U(\tau, y) = \overline{co}F(\tau, y) \cap \rho(\tau)\overline{B}, \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}.$$

La Proposition 1.8 implique que pour tous $v, w \in b\overline{B}$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} haus(U(\tau, v), U(\tau, w)) &= haus(\overline{co}F_{\rho(\tau)}(\tau, v), \overline{co}F_{\rho(\tau)}(\tau, w)) \\ &\leq \frac{2\rho(\tau)}{\rho(\tau) - \rho_0(\tau)} haus_{\rho(\tau)}(\overline{co}F(\tau, v), \overline{co}F(\tau, w)), \end{aligned}$$

selon $(\mathcal{H}_2^{\overline{co}})$, on peut écrire

$$\begin{aligned} haus(U(\tau, v), U(\tau, w)) &< \frac{2\rho(\tau)}{\rho(\tau) - \rho_0(\tau)} (\mu(\tau) + \zeta\rho(\tau))\|v - w\| \\ &= 4(\mu(\tau) + \zeta\rho(\tau))\|v - w\|. \end{aligned}$$

Pour $x(\tau) \in U(\tau, 0)$ et $y \in b\overline{B}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(0, U(\tau, y)) &\leq \mathbf{d}(0, x(\tau)) + \mathbf{d}(x(\tau), U(\tau, y)) \\ &\leq \|x(\tau)\| + \sup_{x(\tau)\in U(\tau,0)} \mathbf{d}(x(\tau), U(\tau, y)) \\ &\leq \rho(\tau) + haus(U(\tau, y), U(\tau, 0)) \\ &< \rho(\tau) + 4(\mu(\tau) + \zeta\rho(\tau))\|y\|. \end{aligned}$$

Par le Théorème 3.2, il existe une application u solution de $(\mathcal{S}_{U,u_0,\mathcal{I}})$, puisque $U(\tau, u(\tau)) \subset \overline{co}F(\tau, u(\tau))$, on conclut que $u \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$. $\square$

Nous présentons maintenant une autre version du Théorème 3.2 nécessaire à l'étude de la propriété de relaxation.

Soient $\psi : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ une application Lipschitz avec $\psi(0) = u_0$ et $Q : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d$ une multi-application définie par

$$Q(\psi) = \left\{(\tau, y) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d : y \in \overline{B}(\psi(\tau), b)\right\}, \ b > 0.$$

Théorème 3.3. *Supposons que* $(\mathcal{H}_C)$ *soit vérifié et que* $0 \leq \omega_0 < b$. *Soit* $F : Q(\psi) \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ *une multi-application à valeurs fermées non vides telle que*

- $(\mathcal{H}_5)$ $F(\cdot, y(\cdot))$ *est mesurable pour chaque* $y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *avec* $\|y(\tau) - \psi(\tau)\| \leq b$, *pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$ *;*
- $(\mathcal{H}_6)$ *pour tout* $(\tau, y) \in Q(\psi)$, $\mathbf{d}(\dot{\psi}(\tau), F(\tau, y)) \leq \xi(\tau) + \lambda(\tau)\|y - \psi(\tau)\|$;

$(\mathcal{H}_7)$ *pour* $0 \leq \rho \leq \dot{\omega}(\tau)$ *et* $y_1 \neq y_2$ *tels que* $(\tau, y_1), (\tau, y_2)$ *sont dans* $Q(\psi)$, *on a*

$$haus_\rho(-\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, y_1), -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, y_2)) < \lambda(\tau)\|y_1 - y_2\|.$$

Alors, le problème $(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *admet une solution.*

Preuve. Soit $D_\psi : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application définie par:

$$D_\psi(v) = C(v + \psi(\tau)) - \psi(\tau).$$

L'ensemble $D_\psi(\cdot)$ satisfait $(\mathcal{A}_1)$ et par $(\mathcal{A}_2)$, on obtient pour tous $\nu, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^d$

$$|\mathbf{d}(\nu, D_\psi(z_1)) - \mathbf{d}(\nu, D_\psi(z_2))| \leq L\|z_1 - z_2\|.$$

Soit $G : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides définie par $G(\tau, z) = -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z + \psi(\tau))$. Pour tout $x(\tau) \in G(\tau, z)$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$,

$$\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) = \inf_{x(\tau) \in (-\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z + \psi(\tau)))} \|x(\tau)\|,$$

posons $w(\tau) = x(\tau) + \dot{\psi}(\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) &= \inf_{w(\tau) \in F(\tau, z + \psi(\tau))} \| - \dot{\psi}(\tau) + w(\tau)\| \\ &= \mathbf{d}(\dot{\psi}(\tau), F(\tau, z + \psi(\tau))),\end{aligned}$$

d'après $(\mathcal{H}_6)$, on trouve que

$$\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) \leq \xi(\tau) + \lambda(\tau)\|z\|.$$

Pour tous $\tau \in \mathcal{I}$ et $z_1, z_2 \in b\overline{B}$ tels que $z_1 \neq z_2$, on a

$$haus_\rho(G(\tau, z_1), G(\tau, z_2)) = haus_\rho(-\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z_1 + \psi(\tau)), -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z_2 + \psi(\tau))),$$

en utilisant $(\mathcal{H}_7)$, il s'ensuit que

$$haus_\rho(G(\tau, z_1), G(\tau, z_2)) < \lambda(\tau)\|z_1 - z_2\|.$$

Par le Théorème 3.2, le problème

$$\begin{cases} -\dot{y}(\tau) \in \mathcal{N}_{D_\psi(y(\tau))}(y(\tau)) + G(\tau, y(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ y(\tau) \in D_\psi(y(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ y(0) = 0 \in D_\psi(0), \end{cases}$$

admet une solution $y : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que $\|y(\tau)\| \leq \omega(\tau)$ et $y(\tau) = u(\tau) - \psi(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. Alors, $u \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ et

$$\|u(\tau) - \psi(\tau)\| \leq \omega(\tau), \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}.$$

□

3.3 Relaxation

Au cours de cette section, nous établissons l'approximation des ensembles de solutions $\mathcal{R}(\mathcal{S}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ par les ensembles de solutions $\mathcal{R}(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$. Pour cette raison, par la Proposition 3.1, supposons que $\gamma \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et u_{co} telles que

$$\begin{cases} -\dot{u}_{co}(\tau) \in \mathcal{N}_{C(u_{co}(\tau))}(u_{co}(\tau)) + f_{co}(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_{co}(\tau) \in C(u_{co}(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I} \text{ et } u_{co}(0) = u_0, \end{cases}$$

où $f_{co}(\tau) \in \overline{co}(F(\tau, u_{co}(\tau)) \cap \gamma(\tau)\overline{B})$ et $u_{co} \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$. Nous définissons une multi-application $Q(u_{co}) : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d$ comme suit

$$Q(u_{co}) = \Big\{(\tau, y) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d : y \in \overline{B}(u_{co}(\tau), b)\Big\}, \ b > 0.$$

Théorème 3.4. *Supposons que $(\mathcal{H}_C)$ soit vérifié et $F : Q(u_{co}) \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ satisfait $(\mathcal{H}_5)$ et les hypothèses suivantes*:

($\mathcal{H}_8$) *il existe $\xi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telle que pour tout $(\tau, y) \in Q(u_{co})$, $F(\tau, y) \cap \xi(\tau)\overline{B} \neq \emptyset$;*

($\mathcal{H}_9$) *il existe $\zeta > 0$ et $\phi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ telles que pour tous $(\tau, y_1), (\tau, y_2)$ dans $Q(u_{co})$ avec $\rho \geq 0$,*

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) < (\phi(\tau) + \zeta\rho)\|y_1 - y_2\|;$$

($\mathcal{H}_{10}$) *il existe $\Psi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telle que pour tout $(\tau, y) \in Q(u_{co})$ avec $y \neq u_{co}$, on a*

$$\mathbf{d}(\dot{y}(\tau), F(\tau, y)) \leq \Psi(\tau)\|u_{co}(\tau) - y\|.$$

Alors, $\mathcal{R}(\mathcal{S}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ est dense dans $\mathcal{R}(\mathcal{S}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ par rapport à la topologie de convergence uniforme.

Preuve. Soit $\Pi : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable, fermée et non vide, définie par

$$\Pi(\tau) = F(\tau, u_{co}(\tau)) \cap \gamma(\tau)\overline{B}.$$

En utilisant le Théorème 1.4, on trouve que $S^2(\overline{co}\Pi) = \overline{co}S^2(\Pi)$. Donc $f_{co}(\tau) \in \overline{co}S^2(\Pi)$ et

$$\forall \epsilon > 0, \exists h_\epsilon \in coS^2(\Pi) : \|f_{co} - h_\epsilon\|_2 \leq \epsilon.$$

Par la Proposition 3.1, le problème $(\mathcal{S}_{h_\epsilon,u_0,\mathcal{I}})$ possède une solution $u_{h_\epsilon}:\mathcal{I}\to\mathbf{R}^d$, telle que u_{h_ϵ} converge uniformément vers u_{co} lorsque $\epsilon\to 0$. Puisque $h_\epsilon\in coS^2(\Pi)$, il existe une collection finie d'éléments

$$f_i\in S^2(\Pi),\ 1\le i\le \bar{n},$$

et des constantes positives α_i, telles que $\sum_{i=1}^{\bar{n}}\alpha_i=1$, et $h_\epsilon=\sum_{i=1}^{\bar{n}}\alpha_i f_i$.
Soit $\bar{F}:\mathcal{I}\rightrightarrows\mathbf{R}^d$ une multi-application définie par

$$\bar{F}(\tau)=\{f_i(\tau):1\le i\le\bar{n}\},\ \forall\tau\in\mathcal{I}.$$

Alors, $h_\epsilon\in co\bar{F}(\tau)$, puisque $\tau\to\|\bar{F}(\tau)\|$ est carré intégrable, c-à-d, $\int_0^T\|\bar{F}(\tau)\|^2d\tau<\infty$, en utilisant le Théorème 1.5 il existe une suite $(r_n)_{n\in N^*}\subset L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ telle que

$$r_n(\tau)\in\bar{F}(\tau)\subset\Pi(\tau),$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le s\le\tau\le T}\|\int_s^\tau(r_n(\varsigma)-h_\epsilon(\varsigma))d\varsigma\|=0.$$

Par le Lemme 1.2, nous concluons que $(r_n)_n$ converge faiblement vers h_ϵ dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$. Par la Proposition 3.1, $(\mathcal{S}_{r_n,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution $g_n:\mathcal{I}\to\mathbf{R}^d$ avec g_n converge uniformément vers u_{h_ϵ} quand n tend vers ∞. Puisque,

$$\|g_n-u_{co}\|_{\mathcal{C}}\le\|g_n-u_{h_\epsilon}\|_{\mathcal{C}}+\|u_{h_\epsilon}-u_{co}\|_{\mathcal{C}},$$

on déduit que g_n converge uniformément vers u_{co} quand $n\to\infty$. Alors, on peut écrire

$$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\ge n_0\ :\ \|g_n-u_{co}\|_{\mathcal{C}}\le b/2. \tag{3.22}$$

Posons

$$\vartheta(\tau)=\max(\xi(\tau),\phi(\tau),\gamma(\tau),\Psi(\tau)),\ \forall\tau\in\mathcal{I}. \tag{3.23}$$

En utilisant $(\mathcal{H}_8)$, (3.22) et (3.23), on trouve pour tout $n\ge n_0$ et tout $(\tau,y(\tau))\in Q(u_{co})$

$$F(\tau,y(\tau))\cap\vartheta(\tau)\overline{B}\neq\emptyset. \tag{3.24}$$

D'après $(\mathcal{H}_{10})$, (3.22) et (3.23), on a

$$\mathbf{d}(\dot{g}_n(\tau),F(\tau,g_n(\tau)))\le\vartheta(\tau)\|u_{co}(\tau)-g_n(\tau)\|. \tag{3.25}$$

De plus, pour tout $n\ge n_0$ et tout $(\tau,z)\in\mathcal{I}\times(b/2)\overline{B}$

$$\begin{aligned}-\dot{g}_n(\tau)+F(\tau,z+g_n(\tau))\cap\vartheta(\tau)\overline{B}&\subset(-\dot{g}_n(\tau)+F(\tau,z+g_n(\tau)))\cap(-\dot{g}_n(\tau)+\vartheta(\tau)\overline{B})\\&\subset(-\dot{g}_n(\tau)+F(\tau,z+g_n(\tau)))\cap\Big(\frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\overline{B}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

En prenant en compte (3.24), pour $n \geq n_0$ et tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$, il existe une application $\acute{p}_n(\tau) \in F(\tau, z + g_n(\tau)) \cap \vartheta(\tau)\overline{B}$. Posons $\acute{y}_n(\tau) = \acute{p}_n(\tau) - \dot{g}_n(\tau)$, donc

$$\acute{y}_n(\tau) \in -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau)) \cap \vartheta(\tau)\overline{B},$$

de (3.26), on conclut que pour tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$

$$(-\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau))) \cap \Big(\frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\overline{B} \neq \emptyset.$$

On pose $\rho(\tau) = \frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}$ et $\mu_n(\tau) = \acute{y}_n(\tau) + \dot{g}_n(\tau)$, alors, $\mu_n(\tau) \in F_{\rho(\tau)}(\tau, z + g_n(\tau))$, et $(\mathcal{H}_9)$ donne pour tous $z, \acute{z} \in (b/2)\overline{B}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\mu_n(\tau), F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau))) &\leq e(F_{\rho(\tau)}(\tau, z + g_n(\tau)), F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau)))\\
&\leq haus_{\rho(\tau)}(F(\tau, z + g_n(\tau)), F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau)))\\
&< (\phi(\tau) + \zeta\rho(\tau))\|z - \acute{z}\|\\
&\leq \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|.
\end{aligned}$$

Donc, il existe $\acute{n}(\tau) \in F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau))$, telle que

$$\mu_n(\tau) - \acute{n}(\tau) \in \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B},$$

par suite,

$$\begin{aligned}
\acute{y}_n(\tau) &\in -\dot{g}_n(\tau) + \acute{n}(\tau) + \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B} \qquad (3.27)\\
&\subset -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, \acute{z} + g_n(\tau)) + \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B}.
\end{aligned}$$

Soit $G_n : \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable définie par

$$G_n(\tau, z) = -\dot{g}_n(\tau) + F(\tau, z + g_n(\tau)), \ n \geq n_0. \qquad (3.28)$$

D'après (3.27) et (3.28), on peut écrire pour tous $z, \acute{z} \in (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$,

$$G_n(\tau, z) \cap \Big(\frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\overline{B} \subset G_n(\tau, \acute{z}) + \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B}. \qquad (3.29)$$

Si $\rho(\tau) = \frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}$, cette dernière inclusion entraîne que

$$e(G_{n,\rho(\tau)}(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|, \qquad (3.30)$$

en alternant les rôles entre z et $\acute{z}$, on obtient

$$e(G_{n,\rho(\tau)}(\tau, \acute{z}), G_n(\tau, z)) \leq \Big(\vartheta(\tau) + \zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|. \qquad (3.31)$$

À partir de (3.30) et (3.31), on peut écrire

$$haus_{\rho(\tau)}(G_n(\tau,z),G_n(\tau,\acute{z}))\leq\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z-\acute{z}\|. \tag{3.32}$$

En revenant à (3.29), par l'échange des rôles entre z et $\acute{z}$ et pour $\acute{z}=0$, on obtient pour tout $(\tau,z)\in\mathcal{I}\times(b/2)\overline{B}$ et tout $n\geq n_0$

$$G_n(\tau,0)\cap\Big(\frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\overline{B}\subset G_n(\tau,z)+\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|\overline{B}.$$

Ainsi, pour tout $n\geq n_0$ avec $\|z\|\leq b/2$ et $\acute{y}_n(\tau)\in G_n(\tau,0)\cap\Big(\frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\overline{B}$, il existe $\acute{w}_n(\tau)\in G_n(\tau,z)$, telle que

$$\|\acute{y}_n(\tau)-\acute{w}_n(\tau)\|\leq\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|,$$

ou de manière équivalente

$$\mathbf{d}(\acute{y}_n(\tau),G_n(\tau,z))\leq\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|. \tag{3.33}$$

Par conséquent,

$$\mathbf{d}(0,G_n(\tau,z))\leq\|\acute{y}_n(\tau)\|+\mathbf{d}(\acute{y}_n(\tau),G_n(\tau,z)).$$

De (3.33), on écrit

$$\mathbf{d}(0,G_n(\tau,z))\leq\|\acute{y}_n(\tau)\|+\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|. \tag{3.34}$$

(3.25) et (3.28), donnent

$$\mathbf{d}(0,G_n(\tau,0))\leq\vartheta(\tau)\|u_{co}(\tau)-g_n(\tau)\|. \tag{3.35}$$

Puisque $\acute{y}_n(\tau)\in G_n(\tau,0)\cap\Big(\frac{(3-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\overline{B}$, l'inégalité (3.34) implique que

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(0,G_n(\tau,z))&\leq\inf_{\acute{y}_n(\tau)\in G_n(\tau,0)}\|\acute{y}_n(\tau)\|+\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|\\&=\mathbf{d}(0,G_n(\tau,0))+\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|,\end{aligned}$$

pour tous $z\in(b/2)\overline{B}$ et $n\geq n_0$, il résulte de (3.35)

$$\mathbf{d}(0,G_n(\tau,z))\leq\vartheta(\tau)\|u_{co}-g_n\|_{\mathcal{C}}+\Big(\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big)\Big)\|z\|. \tag{3.36}$$

Posons

$$\tilde{a}_n(\tau)=\vartheta(\tau)\|u_{co}-g_n\|_{\mathcal{C}},$$

et

$$\tilde{k}(\tau)=\vartheta(\tau)+\zeta\Big(\frac{(5-L)\vartheta(\tau)}{1-L}\Big).$$

Avec ces notations, (3.32) et (3.36) deviennent

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq \tilde{a}_n(\tau) + \tilde{k}(\tau)\|z\|,$$

$$haus_{\rho(\tau)}(G_n(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq \tilde{k}(\tau)\|z - \acute{z}\|.$$

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{\omega}_n(\tau) = \tilde{a}_n(\tau) + \tilde{k}(\tau)\omega_n(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \omega_n(0) = 0, \end{cases}$$

avec la solution $\omega_n(\tau) = \int_0^\tau e^{\eta(\tau)-\eta(s)}\tilde{a}_n(s)ds$ et $\eta(\tau) = \int_0^\tau \tilde{k}(s)ds, \ \forall \tau \in \mathcal{I}$. Notons que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\omega_n(\tau)$ converge vers 0, lorsque n tend vers ∞, donc, pour tout $n \geq n_0$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$, $0 \leq \omega_n(\tau) \leq b/2$. Selon le Théorème 3.3,

$$\begin{cases} \dot{u}_n(\tau) \in -\mathcal{N}_{C(u_n(\tau))}(u_n(\tau)) + F(\tau, u_n(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(\tau) \in C(u_n(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

admet une solution $u_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ satisfaisant

$$\|u_n(\tau) - g_n(\tau)\| \leq \omega_n(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Alors,

$$\|u_n(\tau) - u_{co}(\tau)\| \leq \omega_n(\tau) + \|g_n(\tau) - u_{co}(\tau)\|,$$

par passage à la limite, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers u_{co}, avec $\|u_n(\tau) - u_{co}(\tau)\| \leq b$ pour tout $b > 0$. □

CHAPITRE 4

PROBLÈMES D'EXISTENCE ET DE RELAXATION POUR UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION RÉGIE PAR UN OPÉRATEUR MAXIMAL MONOTONE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre but est d'étudier une inclusion d'évolution gouvernée par un opérateur maximal monotone dépendant du temps dans un espace de dimension finie $\mathbf{R}^d$, de la forme

$$(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})\begin{cases}-\dot{u}(\tau)\in A(\tau)u(\tau)+F(\tau,u(\tau)),\ \text{p.p. } \tau\in\mathcal{I};\\ u(\tau)\in D(A(\tau)),\ \forall\tau\in\mathcal{I};\\ u(0)=u_0\in D(A(0)),\end{cases}$$

où $F:\mathcal{I}\times b\overline{B}\rightrightarrows\mathbf{R}^d$ pour $b>0$ est une multi-application à valeurs fermées non vides non convexes et non nécessairement bornées, considérée comme la perturbation du problème et $A(\tau):D(A(\tau))\subset\mathbf{R}^d\rightrightarrows\mathbf{R}^d$ est un opérateur maximal monotone avec son domaine $D(A(\tau))$, à variation absolument continue et sa norme minimale satisfait une condition de croissance linéaire. Nous examinons aussi l'inclusion lorsque le terme de perturbation est convexifié. Cette inclusion peut être sous la forme

$$(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + \overline{co}F(\tau, u(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(\tau) \in D(A(\tau)), \ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Grâce aux techniques développée précédemment, ce chapitre est dédié a l'examen des résultats d'existence du problème original $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ et du problème convexifié $(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ et la propriété de relaxation entre ces deux problèmes.

4.2 Résultat d'existence

On commence par présenter l'hypothèse suivante:

$(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ Soit $A(\tau) : D(A(\tau)) \subset \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ un opérateur maximal monotone vérifie:

$(\mathcal{A}_1)$ il existe un $\alpha \in W^{1,2}_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ strictement croissante, tel que

$$dis(A(\tau), A(s)) \leq |\alpha(\tau) - \alpha(s)|, \ \forall \tau, s \in \mathcal{I};$$

$(\mathcal{A}_2)$ il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|A^0(\tau)u\| \leq c(1 + \|u\|), \ \forall \tau \in \mathcal{I} \text{ et } u \in D(A(\tau)).$$

Ensuite, il est nécessaire de rappeler le théorème suivant de [17], qui traite l'existence et l'unicité de solution pour le problème non perturbé.

Théorème 4.1. *Supposons que $(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ soit vérifié. Alors pour chaque $u_0 \in D(A(0))$, le problème*

$$\begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau), \ p.p. \ \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

possède une solution unique absolument continue $u : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ avec

$$\|\dot{u}(\tau)\| \leq K(1 + \dot{\alpha}(\tau)), \ p.p. \ \tau \in \mathcal{I},$$

pour une certaine constante $K \in]0, \infty[$ dépendant de $\|u_0\|$, c, T et α.

Maintenant, nous énonçons la proposition suivante, qui sera utile dans les prochains résultats, où la perturbation $f : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ de

$$(\mathcal{M}_{f,u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + f(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

est une application univoque, telle que:

$$\exists \varphi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I}) : \|f(\tau)\| \leq \varphi(\tau), \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{I}. \tag{4.1}$$

Proposition 4.1. *Supposons que $(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ soit vérifié.*

(1) Si $f : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ vérifie (4.1), alors, $(\mathcal{M}_{f,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution unique absolument continue $\tilde{u} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$, avec

$$\|\dot{\tilde{u}}(\tau)\| \leq M_{\|f\|_1}\Big(1 + \dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1 + M_{\|f\|_1}\Big)\varphi(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

et

$$\|\tilde{u}(\tau)\| \leq \|u_0\| + M_{\|f\|_1}\Big(T + \alpha(T)\Big) + \Big(1 + M_{\|f\|_1}\Big)\|\varphi\|_1, \ \forall \tau \in \mathcal{I},$$

où $M_{\|f\|_1} = 2\Big(1 + c(1 + \|f\|_1)(1 + M^1_{\|f\|_1})\Big)$, et
$M^1_{\|f\|_1} = \Big(\|u_0\| + 2(1 + c(1 + \|f\|_1))(T + \alpha(T) + \|f\|_1)\Big)e^{2c(1+\|f\|_1)(T+\alpha(T)+\|f\|_1)}$.

(2) Soit $(f_n)_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ une suite d'application vérifiant (4.1), qui converge faiblement vers $f \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ et $\tilde{u}_n(0) = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{u}_n \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{f_n,u_0,\mathcal{I}})$ converge uniformément vers $\tilde{u} \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{f,u_0,\mathcal{I}})$.

(3) Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $\tilde{u}_n \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{f_n,u_0^n,\mathcal{I}})$ et $\tilde{u}_m \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{f_m,u_0^m,\mathcal{I}})$, alors

$$\|\tilde{u}_n(\tau) - \tilde{u}_m(\tau)\| \leq \|u_0^n - u_0^m\| + \int_0^\tau \|f_n(s) - f_m(s)\| ds, \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Preuve. 1) Pour chaque $\tau \in \mathcal{I}$, posons $\Lambda(\tau) = \int_0^\tau f(s)ds$, et considérons l'opérateur maximal monotone $Z(\tau) : D(Z(\tau)) \subset \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ défini par

$$Z(\tau)y = A(\tau)(y - \Lambda(\tau)), \ \forall y \in D(Z(\tau)),$$

où

$$\begin{aligned} D(Z(\tau)) &= \{y \in \mathbf{R}^d : Z(\tau)y \neq \emptyset\} \\ &= \{y \in \mathbf{R}^d : A(\tau)(y - \Lambda(\tau)) \neq \emptyset\} \\ &= \{w + \Lambda(\tau) \in \mathbf{R}^d : A(\tau)w \neq \emptyset\} \\ &= \{w \in \mathbf{R}^d : A(\tau)w \neq \emptyset\} + \Lambda(\tau) \\ &= D(A(\tau)) + \Lambda(\tau). \end{aligned}$$

L'opérateur $Z(\tau)$ vérifie $(\mathcal{A}_1)$ et $(\mathcal{A}_2)$. En effet, soient $s, \tau \in \mathcal{I}$, $x_1 \in D(Z(\tau))$, $x_2 \in D(Z(s))$ et $y_1 \in Z(\tau)x_1$, $y_2 \in Z(s)x_2$. Selon la définition de $dis(\cdot,\cdot)$, et le fait que pour $\tau \in \mathcal{I}$, $A(\tau)$ satisfait $(\mathcal{A}_1)$, on a

$$\begin{aligned}\langle y_2 - y_1, x_1 - \Lambda(\tau) - (x_2 - \Lambda(s))\rangle &\leq dis(A(\tau), A(s))(1 + \|y_1\| + \|y_2\|)\\ &\leq |\alpha(\tau) - \alpha(s)|(1 + \|y_1\| + \|y_2\|).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle &\leq \langle y_2 - y_1, x_1 - \Lambda(\tau) - (x_2 - \Lambda(s))\rangle + \langle y_2 - y_1, \Lambda(\tau) - \Lambda(s)\rangle\\ &\leq \Big(|\alpha(\tau) - \alpha(s)| + \|\Lambda(\tau) - \Lambda(s)\|\Big)\Big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\Big).\end{aligned}$$

Posons pour $\tau \in \mathcal{I}$, $\alpha_1(\tau) = \int_0^\tau (\dot{\alpha}(\varsigma) + \|f(\varsigma)\|)d\varsigma$. Par conséquent, α_1 est absolument continue avec

$$dis(Z(\tau), Z(s)) \leq |\alpha_1(\tau) - \alpha_1(s)|.$$

D'autre part, notons que pour tous $\tau \in \mathcal{I}$, $y \in D(Z(\tau))$, on obtient

$$\begin{aligned}\|Z^0(\tau)y\| &= \|A^0(\tau)(y - \Lambda(\tau))\|\\ &\leq c(1 + \|y - \Lambda(\tau)\|)\\ &\leq c(1 + \|y\| + \|f\|_1)\\ &\leq c(1 + \|y\| + \|f\|_1) + c\|y\|\|f\|_1\\ &\leq c(1 + \|f\|_1)(1 + \|y\|),\end{aligned}$$

alors, il existe une constante $c_Z = c(1 + \|f\|_1)$ telle que $\|Z^0(\tau)y\| \leq c_Z(1 + \|y\|)$. Par conséquent, le problème $(\mathcal{M}_{f,u_0,\mathcal{I}})$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\dot{z}(\tau) \in Z(\tau)z(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I};\\ z(0) = u_0 \in D(Z(0)),\end{cases}$$

par le Théorème 4.1, le problème ci-dessus admet une solution unique absolument continue $z : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que

$$\|\dot{z}(\tau)\| \leq K\Big(1 + \dot{\alpha}_1(\tau)\Big), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

où

$$K = 2\bigg(1 + c_Z\Big(1 + \Big(\|u_0\| + 2\Big(1 + c_Z\Big)\Big(T + \alpha_1(T)\Big)\Big)e^{2c_Z\left(T + \alpha_1(T)\right)}\Big)\bigg),$$

et $z(\tau) = \tilde{u}(\tau) + \Lambda(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. Par conséquent $\tilde{u} \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{f,u_0,\mathcal{I}})$ et

$$\begin{aligned}\|\dot{\tilde{u}}(\tau)\| &\leq M_{\|f\|_1}(1 + \dot{\alpha}(\tau) + \|f(\tau)\|) + \|f(\tau)\|\\ &\leq M_{\|f\|_1}\Big(1 + \dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1 + M_{\|f\|_1}\Big)\varphi(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.\end{aligned}$$

2) Puisque pour tout $n \geq 1$, $\tilde{u}_n \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{f_n,u_0,\mathcal{I}})$ et

$$\|\dot{\tilde{u}}_n(\tau)\| \leq M_{\|\varphi\|_1}\Big(1+\dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1}\Big)\varphi(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

puisque $\dot{\alpha}, \varphi \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I}) \subset L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, on obtient la compacité relative de $(\tilde{u}_n(\tau))_{n\geq 1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ et l'équi-continuité de $(\tilde{u}_n(\cdot))_{n\geq 1}$. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà $(\tilde{u}_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, donc, on peut extraire une sous suite de $(\tilde{u}_n)_{n\geq 1}$ (notée aussi $(\tilde{u}_n)_{n\geq 1}$) qui converge uniformément vers une certaine application z.
Comme $\tilde{u}$ est la solution de $(\mathcal{M}_{f,u_0,\mathcal{I}})$, par la propriété de monotonie de l'opérateur maximal monotone, on peut écrire pour tout $\tau \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\tilde{u}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|^2 &\leq \langle f_n(\tau)-f(\tau), \tilde{u}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\rangle \\ &= \langle f_n(\tau)-f(\tau), \tilde{u}(\tau)-z(\tau)\rangle + \langle f_n(\tau)-f(\tau), z(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\rangle,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\tilde{u}(\tau)-\tilde{u}_n(\tau)\|^2 &\leq \int_0^\tau \langle f_n(s)-f(s), \tilde{u}(s)-z(s)\rangle ds + \int_0^\tau \langle f_n(s)-f(s), z(s)-\tilde{u}_n(s)\rangle ds \\ &\leq \int_0^\tau \langle f_n(s)-f(s), \tilde{u}(s)-z(s)\rangle ds + 2\|\varphi\|_1\|z-\tilde{u}_n\|_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite et puisque $(f_n - f)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ et que $(\tilde{u}_n)$ converge uniformément vers z, on obtient $\tilde{u} = z$.

3) En utilisant à nouveau la propriété de monotonicité, on aura

$$\langle -(\dot{\tilde{u}}_n(\tau)+f_n(\tau)) + (\dot{\tilde{u}}_m(\tau)+f_m(\tau)), \tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\rangle \geq 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

donc,

$$\langle \dot{\tilde{u}}_n(\tau)-\dot{\tilde{u}}_m(\tau), \tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\rangle \leq \langle f_n(\tau)-f_m(\tau), \tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\rangle, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I},$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\|^2 \leq \langle f_n(\tau)-f_m(\tau), \tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\rangle.$$

Par intégration, on trouve

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0^n-u_0^m\|^2 + \int_0^\tau \|f_n(s)-f_m(s)\|\|\tilde{u}_n(s)-\tilde{u}_m(s)\|ds,$$

par l'utilisation du Lemme 1.6, on obtient

$$\|\tilde{u}_n(\tau)-\tilde{u}_m(\tau)\| \leq \|u_0^n-u_0^m\| + \int_0^\tau \|f_n(s)-f_m(s)\|ds.$$

□

Maintenant, nous présentons un théorème concernant l'existence de solution pour le problème $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$.

Théorème 4.2. *Supposons que* $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ *soit vérifié et* $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ *pour* $b > 0$, *une multi-application à valeurs fermées non vides satisfaisant:*

$(\mathcal{H}_1)$ $F(\cdot, y(\cdot))$ *est mesurable pour chaque* $y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *avec* $\|y(\tau)\| \leq b$, *pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$ *;*

$(\mathcal{H}_2)$ *il existe* $\varphi, \chi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, *telles que pour tout* $(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}$

$$\mathbf{d}(0, F(\tau, y)) \leq \varphi(\tau) + \chi(\tau)\|y\| \ \ et \ \ \mathbf{d}(0, F(\tau, 0)) = 0 \ \ pour \ \ \varphi(\tau) = 0;$$

$(\mathcal{H}_3)$

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) < \chi(\tau)\|y_1 - y_2\|, \ \forall(\tau, y_1), \ (\tau, y_2) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}.$$

Supposons que l'hypothèse suivante soit également vérifiée:

$(\mathcal{H}_4)$ *soient les suites* $(z_n) \subset L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *et* $(\tilde{z}_n) \subset \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, *telles que pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$, $(\tilde{z}_n(\tau))_n$ *converge,* $z_n(\tau) \in F(\tau, \tilde{z}_n(\Delta_n(\tau))) \cap (\varphi(\tau) + \chi(\tau)\kappa)\overline{B}$ *et* (z_n) *converge faiblement vers* $z \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, *on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n\|_{L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})} \leq \|z\|_{L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})},$$

avec

$$\kappa = 2\Big(\|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}(T + \alpha(T)) + \Big(1 + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\|\varphi\|_1\Big).$$

Alors, pour $u_0 \in D(A(0))$, *le problème* $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *admet une solution absolument continue* $u : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ *satisfaisant*

$$\|\dot{u}(\tau)\| \leq \beta(\tau), \ p.p. \ \tau \in \mathcal{I},$$

avec

$$\beta(\tau) = M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(1 + \dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1 + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big(\varphi(\tau) + \chi(\tau)\kappa\Big).$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une partition de $\mathcal{I}$ par les points

$$\tau_i^n = i\varepsilon_n \ , \ \varepsilon_n = \frac{T}{n}, 0 \leq i \leq n,$$

On note par $m_F(\tau, y)$ l'élément de norme minimale de l'ensemble fermé $F(\tau, y)$ donc par $(\mathcal{H}_2)$, on obtient

$$\|m_F(\tau, y)\| \leq \varphi(\tau) + \chi(\tau)\|y\|, \ \forall(\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}. \tag{4.2}$$

Supposons que

$$\int_0^T \chi(s)ds \leq \frac{1}{2(1 + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1})}, \tag{4.3}$$

où $M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1} = 2\Big(1 + c(1 + \|\varphi\|_1 + \kappa\|\chi\|_1)(1 + M^1_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1})\Big)$ et $M^1_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1} = \Big(\|u_0\| + 2(1 + c(1 + \|\varphi\|_1 + \kappa\|\chi\|_1))(T + \alpha(T) + \|\varphi\|_1 + \kappa\|\chi\|_1)\Big)e^{2c(1+\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1)(T+\alpha(T)+\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1)}$.

Étape 1. Construction des solutions approximatives.

Pour $u_0 \in D(A(0))$, traitons le problème suivant sur l'intervalle $[0, \tau_1^n]$:

$$\begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + m_F(\tau, u_0), \text{ p.p. } \tau \in [0, \tau_1^n]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

Puisque $m_F(\cdot, u_0) \in L^2_{\mathbf{R}^d}([0, \tau_1^n])$, par la Proposition 4.1, le dernier problème admet une solution absolument continue $u_0^n : [0, \tau_1^n] \to \mathbf{R}^d$, telle que

$$\|\dot{u}_0^n(\tau)\| \leq M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(1 + \dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1 + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big(\varphi(\tau) + \chi(\tau)\|u_0\|\Big), \text{ p.p. } \tau \in [0, \tau_1^n]. \tag{4.4}$$

De même, prenons en compte dans l'intervalle $[\tau_1^n, \tau_2^n]$ le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + m_F(\tau, u_0^n(\tau_1^n)), \quad \text{p.p. } \tau \in [\tau_1^n, \tau_2^n]; \\ u(\tau_1^n) = u_0^n(\tau_1^n) \in D(A(\tau_1^n)), \end{cases}$$

qui admet une solution dénotée par $u_1^n : [\tau_1^n, \tau_2^n] \to \mathbf{R}^d$ avec $u_1^n(\tau_1^n) = u_0^n(\tau_1^n)$ et satisfaisant (4.4). Pour chaque n, il existe une suite finie d'application absolument continue $u_i^n : [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n] \to \mathbf{R}^d$, $(0 \leq i \leq n-1)$ telle que, pour chaque $0 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{cases} -\dot{u}_i^n(\tau) \in A(\tau)u_i^n(\tau) + m_F(\tau, u_{i-1}^n(\tau_i^n)), \text{ p.p. } \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]; \\ u_i^n(\tau_i^n) = u_{i-1}^n(\tau_i^n) \in D(A(\tau_i^n)), \end{cases}$$

où $u_{-1}^n(0) = u_0$ et

$$\begin{aligned} &\|\dot{u}_i^n(\tau)\| \\ &\leq M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(1 + \dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1 + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big(\varphi(\tau) + \chi(\tau)\|u_{i-1}^n(\tau_i^n)\|\Big), \text{ p.p. } \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]. \end{aligned}$$

On définit la fonction $u_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ par

$$u_n(\tau) = u_i^n(\tau); \ \forall \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n], \ 0 \leq i \leq n-1,$$

et $\theta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ par

$$\theta_n(\tau) = \tau_i^n, \ \forall \tau \in [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n[, \ 0 \leq i \leq n-1, \ \theta_n(0) = 0.$$

Ainsi, $u_n(\cdot)$ est une solution absolument continue de

$$\begin{cases} -\dot{u}_n(\tau) \in A(\tau)u_n(\tau) + m_F(\tau, u_n(\theta_n(\tau))), \quad \text{p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

avec

$$\|\dot{u}_n(\tau)\| \leq M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(1+\dot{\alpha}(\tau)\Big)+\Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big(\varphi(\tau)+\chi(\tau)\|u_n(\theta_n(\tau))\|\Big), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}. \tag{4.6}$$

Par intégration sur $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]$, on obtient

$$\|u_n(\tau_{i+1}^n)\| \leq \|u_n(\tau_i^n)\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n}\Big(1+\dot{\alpha}(s)\Big)ds + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n}\varphi(s) + \chi(s)\|u_n(\tau_i^n)\|ds.$$

Par conséquent, par itération, nous avons pour chaque $0 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned}
&\|u_n(\tau_{i+1}^n)\| \\
&\leq \|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\sum_{k=0}^{i}\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n}\Big(1+\dot{\alpha}(s)\Big)ds + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\sum_{k=0}^{i}\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n}\varphi(s) \\
&+ \chi(s)\|u_n(\tau_k^n)\|ds \\
&\leq \|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\int_0^{\tau_{i+1}^n}\Big(1+\dot{\alpha}(s)\Big)ds + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\sum_{k=0}^{i}\Big\{\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n}\varphi(s)ds \\
&+ \|u_n(\tau_k^n)\|\int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n}\chi(s)ds\Big\} \\
&\leq \|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\int_0^{\tau_{i+1}^n}\Big(1+\dot{\alpha}(s)\Big)ds + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big\{\int_0^{\tau_{i+1}^n}\varphi(s)ds \\
&+ \max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\|\int_0^{\tau_{i+1}^n}\chi(s)ds\Big\},
\end{aligned}$$

donc,

$$\max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\| \leq \|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\int_0^T\Big(1+\dot{\alpha}(s)\Big)ds + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big\{\int_0^T\varphi(s)ds + \max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\|\int_0^T\chi(s)ds\Big\}.$$

En utilisant (4.3), il vient que

$$\max_{0\leq k\leq n}\|u_n(\tau_k^n)\| \leq 2\Big(\|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(T+\alpha(T)\Big) + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\|\varphi\|_1\Big),$$

alors, on a

$$\|u_n(\theta_n(\tau))\| \leq 2\Big(\|u_0\| + M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(T+\alpha(T)\Big) + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\|\varphi\|_1\Big) := \kappa. \tag{4.7}$$

Par (4.2), (4.6) et (4.7), on obtient

$$\|m_F(\tau, u_n(\theta_n(\tau)))\| \leq \varphi(\tau) + \chi(\tau)\kappa := \kappa_1(\tau),$$

et

$$\|\dot{u}_n(\tau)\| \leq M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big(1+\dot{\alpha}(\tau)\Big) + \Big(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1}\Big)\Big(\varphi(\tau)+\chi(\tau)\kappa\Big) := \beta(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}. \tag{4.8}$$

Étape 2. La convergence des suites.

On a, $|\theta_n(\tau)-\tau| = |\tau_i^n-\tau| \leq \varepsilon_n$, donc $\theta_n(\tau)\to\tau$ lorsque $n\to\infty$. En utilisant (4.8), on trouve pour tout $\tau\in\mathcal{I}$

$$\|u_n(\theta_n(\tau))-u_n(\tau)\| \leq \int_{\theta_n(\tau)}^{\tau}\|\dot{u}_n(s)\|ds \leq \int_{\theta_n(\tau)}^{\tau}\beta(s)ds,$$

et $\|u_n(\tau)\|\leq\|\beta\|_1+\kappa$, alors,

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n(\theta_n(\tau))-u_n(\tau)\| = 0, \tag{4.9}$$

et $(u_n(\tau))_{n\geq1}$ est relativement compacte, puisque $\beta\in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})\subset L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$. D'autre part $(u_n(\cdot))_{n\geq1}$ est équi-continue selon (4.8). Par conséquent, par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, on conclut que $(u_n)_{n\geq1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$, donc on peut extraire une sous suite (dénotée à nouveau par) $(u_n)_{n\geq1}$ qui converge uniformément vers une certaine application u. De (4.8), $(\dot{u}_n)_{n\geq1}$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers z. En fixant $\tau\in\mathcal{I}$ et en prenant n'importe quel $\epsilon\in\mathbf{R}^d$, la convergence faible dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ donne

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\langle\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon,\dot{u}_n(s)\rangle ds = \int_0^T\langle\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\epsilon,z(s)\rangle ds,$$

ou d'une manière équivalente

$$\lim_{n\to\infty}\langle\epsilon,u_0+\int_0^\tau\dot{u}_n(s)ds\rangle = \langle\epsilon,u_0+\int_0^\tau z(s)ds\rangle.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\tau\dot{u}_n(s)ds=\int_0^\tau z(s)ds$, puisque $u_n(\cdot)$ est une application absolument continue, nous obtenons $u(\tau)=u_0+\int_0^\tau z(s)ds$ et $z=\dot{u}$.

Pour tout $\tau\in\mathcal{I}$, nous avons

$$\|u_n(\theta_n(\tau))-u(\tau)\| \leq \|u_n(\theta_n(\tau))-u_n(\tau)\|+\|u_n(\tau)-u(\tau)\|,$$

en utilisant (4.9), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n(\theta_n(\tau))-u(\tau)\| = 0. \tag{4.10}$$

Posons $(m_F(\cdot,u_n(\theta_n(\cdot))))_n=(f_n(\cdot))_n$, pour tout $n\geq1$. Puisque $\|f_n(\tau)\|\leq\kappa_1(\tau)$, $(f_n)_{n\geq1}$ converge faiblement dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ vers f avec $\|f(\tau)\|\leq\kappa_1(\tau)$, p.p. $\tau\in\mathcal{I}$. Comme $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ est uniformément convexe, l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ et la Proposition 1.5 donnent la convergence forte de $(f_n)_{n\geq1}$.

De plus, puisque $f_n(\tau)\in F(\tau,u_n(\theta_n(\tau)))\cap\rho(\tau)\overline{B}$ avec $\rho(\tau)=\kappa_1(\tau)$ pour tous $\tau\in\mathcal{I}$ et $n\geq1$, alors en utilisant la condition $(\mathcal{H}_3)$, on peut conclure que

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(f(\tau),F(\tau,u(\tau))) &\leq \|f(\tau)-f_n(\tau)\|+\mathbf{d}(f_n(\tau),F(\tau,u(\tau)))\\ &\leq \|f(\tau)-f_n(\tau)\|+haus_{\rho(\tau)}(F(\tau,u_n(\theta_n(\tau))),F(\tau,u(\tau)))\\ &< \|f(\tau)-f_n(\tau)\|+\chi(\tau)\|u_n(\theta_n(\tau))-u(\tau)\|.\end{aligned}$$

Grâce à (4.10), la convergence de la suite $(f_n(\cdot))_{n\geq 1}$ vers $f(\cdot)$ et en passant à la limite dans la dernière inégalité, on obtient

$$\mathbf{d}(f(\tau), F(\tau, u(\tau))) = 0, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.$$

La fermeture de $F(\tau, u(\tau))$ donne $f(\tau) \in F(\tau, u(\tau))$, p.p. $\tau \in \mathcal{I}$.
Ensuite, nous prouvons que $u \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, selon (4.5), et en appliquant la propriété de fermeture de l'opérateur maximal monotone, cela implique que

$$-\dot{u}(\tau) \in A(\tau)u(\tau) + f(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}.$$

Enfin, lorsque $\int_0^T \chi(s)ds > \frac{1}{2(1+M_{\|\varphi\|_1+\kappa\|\chi\|_1})}$, nous subdivisons $\mathcal{I}$ en intervalles satisfaisant (4.3), et par suite de ce qui précède, nous construisons une solution absolument continue dans chaque sous intervalle, alors le problème $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution sur $\mathcal{I}$. □

Pour prouver le théorème de relaxation, nous avons besoin du théorème suivant, qui fournit la bornitude de la solution en introduisant une condition sur ρ.
On note par $\varpi : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$, la solution de

$$\begin{cases} \dot{\varpi}(\tau) = \varphi(\tau) + \chi(\tau)\varpi(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \varpi(0) = \varpi_0 \geq 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

où

$$\varpi(\tau) = \varpi_0 e^{\tilde{m}(\tau)} + \int_0^\tau e^{\tilde{m}(\tau)-\tilde{m}(s)}\varphi(s)ds, \ \tilde{m}(\tau) = \int_0^\tau \chi(s)ds, \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Théorème 4.3. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ du Théorème 4.2 soient vérifiées, ϖ satisfait (4.11) avec $\|u_0\| \leq \varpi_0 < b$ et $0 \leq \rho \leq \dot{\varpi}(\tau)$. Alors, $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution absolument continue $v : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\|v(\tau)\| \leq \varpi(\tau) \leq b$.*

Preuve. L'application de la méthode de construction utilisée pour prouver le Théorème 3.2 et la Proposition 4.1 permet d'obtenir, pour tout $n \geq 1$, une suite $(h_n, v_n) \in L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K}) \times \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K})$ qui satisfait

$$h_0(\tau) = v_0(\tau) = 0, \ \|v_n(\tau)\| \leq \|u_0\| + \int_0^\tau \|h_n(s)\|ds, \ \forall \tau \in \mathcal{K};$$

$$h_n(\tau) \in F(\tau, v_{n-1}(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K};$$

$$v_n \text{ la solution correspondante de } (\mathcal{M}_{h_n,u_0,\mathcal{K}});$$

$$\|h_{n+1}(\tau) - h_n(\tau)\| \leq \chi(\tau)\|v_n(\tau) - v_{n-1}(\tau)\|, \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{K};$$

$$\|v_n(\tau)\| \leq \varpi(\tau),\ \forall \tau \in \mathcal{K},\ \|h_n(\tau)\| \leq \dot{\varpi}(\tau),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K};$$

$$(v_n(\tau), h_n(\tau))_{n\geq 1} \text{ converge vers } (v(\tau), h(\tau)) \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{K}.$$

Ainsi,

$$(\dot{v}_n)_{n\geq 1} \text{ converge faiblement vers } \ \dot{v} \in L^1_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{K}),$$

et

$$h(\tau) \in F(\tau, v(\tau)),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K},$$

où $\mathcal{K} = [0, d]$ pour un unique $d \in]0, T]$. Grâce à la propriété de fermeture de l'opérateur maximal monotone, on obtient

$$-\dot{v}(\tau) \in A(\tau)v(\tau) + F(\tau, v(\tau)),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{K}.$$

□

Les conditions sous lesquelles le problème convexifié admet une solution sont présentées dans la proposition suivante. Pour la preuve, nous utilisons des techniques similaires à celles utilisées dans la Proposition 3.2.

Il existe $\mu \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et $\zeta > 0$ telles que pour tout $\rho \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, on note par $\breve{\varpi} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^+$ la solution de

$$\begin{cases} \dot{\breve{\varpi}}(\tau) = \rho(\tau) + 4(\mu(\tau) + \zeta\rho(\tau))\breve{\varpi}(\tau),\ \text{p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \breve{\varpi}(0) = \varpi_0 \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 4.2. *Supposons que $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ soit vérifié et $\|u_0\| \leq \varpi_0 < b$. Soit $F : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application à valeurs fermées non vides satisfaisant les hypothèses suivantes*:

$(\mathcal{H}_1^{\overline{co}})$ *$\overline{co}F(\cdot, y(\cdot))$ est mesurable pour chaque $y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ avec $\|y(\tau)\| \leq b$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$;*

$(\mathcal{H}_2^{\overline{co}})$ *pour tout $\rho \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$,*

$$haus_{\rho(\tau)}(\overline{co}F(\tau, y_1), \overline{co}F(\tau, y_2)) < (\mu(\tau)+\zeta\rho(\tau))\|y_1-y_2\|,\ \forall y_1, y_2 \in b\overline{B} \text{ avec } y_1 \neq y_2;$$

$(\mathcal{H}_3^{\overline{co}})$ *pour tout $\rho_0 \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, on a*

$$\mathbf{d}(0, \overline{co}F(\tau, y)) \leq \rho_0(\tau),\ \forall (\tau, y) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}.$$

Alors, il existe une application $u \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{\overline{co}F, u_0, \mathcal{I}})$ satisfaisant

$$\|u(\tau)\| \leq \breve{\varpi}(\tau),\ \forall \tau \in \mathcal{I},$$

et pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\breve{\varpi}(\tau) \leq b$.

Nous présentons maintenant une autre version du Théorème 4.3 qui est essentielle pour examiner la propriété de relaxation.
Soient $\psi : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ une application Lipschitz avec $\psi(0) = u_0$ et $Q : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d$ une multi-application définie par

$$Q(\psi) = \Big\{(\tau, y) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d : y \in \overline{B}(\psi(\tau), b)\Big\}, \text{ pour } b > 0.$$

Théorème 4.4. *Supposons que* $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ *soit vérifié et que* $0 \leq \varpi_0 < b$. *Soit* $F : Q(\psi) \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ *une multi-application à valeurs fermées non vides telle que*

- $(\mathcal{H}_5)$ $F(\cdot, y(\cdot))$ *est mesurable pour chaque* $y \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ *avec* $\|y(\tau) - \psi(\tau)\| \leq b$, *pour tout* $\tau \in \mathcal{I}$;
- $(\mathcal{H}_6)$ *pour tout* $(\tau, y) \in Q(\psi)$, $\mathbf{d}(\dot{\psi}(\tau), F(\tau, y)) \leq \varphi(\tau) + \chi(\tau)\|y - \psi(\tau)\|$;
- $(\mathcal{H}_7)$ *pour* $0 \leq \rho \leq \dot{\varpi}(\tau)$ *et tout* $(\tau, y_1), (\tau, y_2) \in Q(\psi)$ *avec* $y_1 \neq y_2$, *on a*

$$haus_\rho(-\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, y_1), -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, y_2)) < \chi(\tau)\|y_1 - y_2\|.$$

Alors, le problème $(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ *admet une solution.*

Preuve. Soit $B_\psi : D(B_\psi(\tau)) \subset \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ un opérateur maximal monotone défini par

$$B_\psi(\tau)z = A(\tau)(z + \psi(\tau)), \ \forall(\tau, z) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d,$$

où $D(B_\psi(\tau)) = D(A(\tau)) + \psi(\tau)$. Alors, B_ψ satisfait les hypothèses $(\mathcal{A}_1)$ et $(\mathcal{A}_2)$ telles que

$$dis(B_\psi(\tau), B_\psi(s)) \leq |\alpha_2(\tau) - \alpha_2(s)|, \ \forall s, \tau \in \mathcal{I},$$

pour une application absolument continue $\alpha_2(\tau) = \int_0^\tau (\dot{\alpha}(\varsigma) + \|\dot{\psi}(\varsigma)\|)d\varsigma$, pour $\tau \in \mathcal{I}$, et

$$\|B^0_\psi(\tau)y\| \leq c_B(1 + \|y\|), \ \forall\tau \in \mathcal{I} \text{ et } y \in D(B_\psi(\tau)),$$

pour $c_B = c(1 + \|u_0\| + \|\dot{\psi}\|_1)$.
Soit $G : \mathcal{I} \times b\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides définie par $G(\tau, z) = -\dot{\psi}(\tau) + F(\tau, z + \psi(\tau))$. Alors G vérifie les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ telles que

$$\mathbf{d}(0, G(\tau, z)) \leq \varphi(\tau) + \chi(\tau)\|z\|, \ \forall(\tau, z) \in \mathcal{I} \times b\overline{B},$$

et

$$haus_\rho(G(\tau, z_1), G(\tau, z_2)) < \chi(\tau)\|z_1 - z_2\|, \ \forall(\tau, z_1), \ (\tau, z_2) \in \mathcal{I} \times b\overline{B}.$$

Par le Théorème 4.3, le problème

$$\begin{cases} -\dot{y}(\tau) \in B_\psi(\tau)y(\tau) + G(\tau, y(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ y(0) = 0 \in D(B_\psi(0)), \end{cases}$$

admet une solution $y : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ où $y(\tau) = u(\tau) - \psi(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. Alors, $u \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$. □

4.3 Relaxation

Dans cette section, nous établirons l'approximation des ensembles de solutions $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ par les ensembles de solutions $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$. Pour cela, par la Proposition 4.1, supposons que $\gamma \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$ et $u_{\overline{co}}$ telles que

$$(\mathcal{M}_{f_{\overline{co}},u_0,\mathcal{I}}) \begin{cases} -\dot{u}_{\overline{co}}(\tau) \in A(\tau)u_{\overline{co}}(\tau)) + f_{\overline{co}}(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_{\overline{co}}(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

où $f_{\overline{co}}(\tau) \in \overline{co}(F(\tau, u_{\overline{co}}(\tau)) \cap \gamma(\tau)\overline{B})$ et $u_{\overline{co}} \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$. On définit une multi-application $Q(u_{\overline{co}}) : \mathbf{R}^d \rightrightarrows \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d$ comme suit

$$Q(u_{\overline{co}}) = \left\{(\tau, y) \in \mathcal{I} \times \mathbf{R}^d : y \in \overline{B}(u_{\overline{co}}(\tau), b)\right\}, \text{ pour } b > 0.$$

Théorème 4.5. *Supposons que $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ soit vérifié et $F : Q(u_{\overline{co}}) \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ satisfait $(\mathcal{H}_5)$ et les hypothèses suivantes:*

$(\mathcal{H}_8)$ *il existe $\varphi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telle que*

$$F(\tau, y) \cap \varphi(\tau)\overline{B} \neq \emptyset, \ \forall (\tau, y) \in Q(u_{\overline{co}});$$

$(\mathcal{H}_9)$ *il existe $\zeta > 0$ et $\phi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telles que*

$$haus_\rho(F(\tau, y_1), F(\tau, y_2)) < (\phi(\tau) + \zeta\rho)\|y_1 - y_2\|, \ \forall (\tau, y_1), (\tau, y_2) \in Q(u_{\overline{co}}) \text{ et } \rho \geq 0;$$

$(\mathcal{H}_{10})$ *il existe $\Psi \in L^2_{\mathbf{R}^+}(\mathcal{I})$, telle que*

$$\mathbf{d}(\dot{y}(\tau), F(\tau, y)) \leq \Psi(\tau)\|u_{\overline{co}}(\tau) - y\|, \ \forall (\tau, y) \in Q(u_{\overline{co}}) \text{ avec } y \neq u_{\overline{co}}.$$

Alors, $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{F,u_0,\mathcal{I}})$ est dense dans $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{\overline{co}F,u_0,\mathcal{I}})$ par rapport à la topologie de la convergence uniforme.

Preuve. Soit $\Pi : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable, fermée et non vide, définie par

$$\Pi(\tau) = F(\tau, u_{\overline{co}}(\tau)) \cap \gamma(\tau)\overline{B}.$$

Par le Théorème 1.4, on aura $S^2(\overline{co}\Pi) = \overline{co}S^2(\Pi)$. Alors $f_{\overline{co}}(\tau) \in \overline{co}S^2(\Pi)$ et

$$\forall \epsilon > 0, \exists f_\epsilon \in coS^2(\Pi) : \|f_{\overline{co}} - f_\epsilon\|_2 \leq \epsilon.$$

D'après la Proposition 4.1, le problème $(\mathcal{M}_{f_\epsilon,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution $u_{f_\epsilon} : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$, telle que u_{f_ϵ} converge uniformément vers $u_{\overline{co}}$ lorsque ϵ tend vers 0.
Puisque $f_\epsilon \in coS^2(\Pi)$, il existe une collection finie d'éléments $h_i \in S^2(\Pi)$, $1 \leq i \leq \bar{n}$ et des constantes positives δ_i, telles que $\sum_{i=1}^{\bar{n}} \delta_i = 1$, et $f_\epsilon = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \delta_i h_i$.
Soit $H : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application définie par

$$H(\tau) = \{h_i(\tau) : 1 \leq i \leq \bar{n}\}, \ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Alors, $f_\epsilon \in coH(\tau)$. Puisque $\tau \to \|H(\tau)\|$ est carrée intégrable et par l'utilisation du Théorème 1.5, il existe une suite $(\omega_n)_{n \in N^*} \subset L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$ telle que

$$\omega_n(\tau) \in H(\tau) \subset \Pi(\tau),$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0 \leq s \leq \tau \leq T} \| \int_s^\tau \Big(\omega_n(\varsigma) - f_\epsilon(\varsigma)\Big) d\varsigma \| = 0.$$

Par le Lemme 1.2, on conclut que $(\omega_n)_n$ converge faiblement vers f_ϵ dans $L^2_{\mathbf{R}^d}(\mathcal{I})$. Et par la Proposition 4.1, $(\mathcal{M}_{\omega_n,u_0,\mathcal{I}})$ admet une solution $r_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ telle que r_n converge uniformément vers u_{f_ϵ} lorsque n tend vers ∞. Comme

$$\|r_n - u_{\overline{co}}\|_{\mathcal{C}} \leq \|r_n - u_{f_\epsilon}\|_{\mathcal{C}} + \|u_{f_\epsilon} - u_{\overline{co}}\|_{\mathcal{C}},$$

on déduit que r_n converge uniformément vers $u_{\overline{co}}$ lorsque $n \to \infty$. Alors, on peut écrire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0 \ : \ \|r_n - u_{\overline{co}}\|_{\mathcal{C}} \leq b/2. \tag{4.12}$$

Posons

$$\xi(\tau) = \max\Big(\dot{\alpha}(\tau), \varphi(\tau), \phi(\tau), \gamma(\tau), \Psi(\tau)\Big), \ \forall \tau \in \mathcal{I}. \tag{4.13}$$

D'après $(\mathcal{H}_8)$, (4.12) et (4.13), on a pour tout $n \geq n_0$ et tout $(\tau, y(\tau)) \in Q(u_{\overline{co}})$

$$F(\tau, y(\tau)) \cap \xi(\tau)\overline{B} \neq \emptyset. \tag{4.14}$$

De $(\mathcal{H}_{10})$, (4.12) et (4.13), on aura

$$\mathbf{d}(\dot{r}_n(\tau), F(\tau, r_n(\tau))) \leq \xi(\tau)\|u_{\overline{co}}(\tau) - r_n(\tau)\|. \tag{4.15}$$

De plus, pour tout $n \geq n_0$ et tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$

$$\begin{aligned}
-\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, z + r_n(\tau)) \cap \xi(\tau)\overline{B} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.16)\\
\subset \Big(-\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, z + r_n(\tau))\Big) \cap \Big(-\dot{r}_n(\tau) + \xi(\tau)\overline{B}\Big)\\
\subset \Big(-\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, z + r_n(\tau))\Big) \cap \Big(M_{\|\gamma\|_1} + 2\xi(\tau)(1 + M_{\|\gamma\|_1})\Big)\overline{B}.\\
(4.17)
\end{aligned}$$

Prenant en compte (4.14), pour $n \geq n_0$ et tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$, il existe une application $\acute{p}_n(\tau) \in F(\tau, z + r_n(\tau)) \cap \xi(\tau)\overline{B}$. On pose $\acute{y}_n(\tau) = \acute{p}_n(\tau) - \dot{r}_n(\tau)$, donc

$$\acute{y}_n(\tau) \in -\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, z + r_n(\tau)) \cap \xi(\tau)\overline{B},$$

à partir de (4.16), on conclut que pour tous $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$, $n \geq n_0$

$$\Big(-\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, z + r_n(\tau))\Big) \cap \Big(M_{\|\gamma\|_1} + 2\xi(\tau)(1 + M_{\|\gamma\|_1})\Big)\overline{B} \neq \emptyset.$$

Posons $\rho(\tau) = 2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})$ et $\mu_n(\tau) = \acute{y}_n(\tau) + \dot{r}_n(\tau)$, alors, $\mu_n(\tau) \in F_{\rho(\tau)}(\tau, z + r_n(\tau))$, et $(\mathcal{H}_9)$ donne pour tous $z, \acute{z} \in (b/2)\overline{B}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\mu_n(\tau), F(\tau, \acute{z} + r_n(\tau))) &\leq e(F_{\rho(\tau)}(\tau, z + r_n(\tau)), F(\tau, \acute{z} + r_n(\tau)))\\
&\leq haus_{\rho(\tau)}(F(\tau, z + r_n(\tau)), F(\tau, \acute{z} + r_n(\tau)))\\
&< \Big(\phi(\tau) + \zeta\rho(\tau)\Big)\|z - \acute{z}\|\\
&\leq \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\acute{n}(\tau) \in F(\tau, \acute{z} + r_n(\tau))$, telle que

$$\mu_n(\tau) - \acute{n}(\tau) \in \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B},$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\acute{y}_n(\tau) &\in -\dot{r}_n(\tau) + \acute{n}(\tau) + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B} \qquad (4.18)\\
&\subset -\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, \acute{z} + r_n(\tau)) + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B}.
\end{aligned}$$

Soit $G_n : \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B} \rightrightarrows \mathbf{R}^d$ une multi-application mesurable définie par

$$G_n(\tau, z) = -\dot{r}_n(\tau) + F(\tau, z + r_n(\tau)),\ n \geq n_0. \tag{4.19}$$

D'après (4.18) et (4.19), on peut écrire pour tous $z, \acute{z} \in (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
G_n(\tau, z) \cap \Big(M_{\|\gamma\|_1} + 2\xi(\tau)(1 + M_{\|\gamma\|_1})\Big)\overline{B} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.20)\\
\subset G_n(\tau, \acute{z}) + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|\overline{B}.
\end{aligned}$$

Si $\rho(\tau) = M_{\|\gamma\|_1} + 2\xi(\tau)(1 + M_{\|\gamma\|_1})$, cette dernière inclusion entraîne que

$$e(G_{n,\rho(\tau)}(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|, \tag{4.21}$$

en alternant les rôles entre z et $\acute{z}$, on obtient

$$e(G_{n,\rho(\tau)}(\tau, \acute{z}), G_n(\tau, z)) \leq \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|. \tag{4.22}$$

À partir de (4.21) et (4.22), on obtient

$$haus_{\rho(\tau)}(G_n(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z - \acute{z}\|. \tag{4.23}$$

Revenons à (4.20), avec l'interchangement des rôles entre z et $\acute{z}$ et pour $\acute{z} = 0$, on aura pour tout $(\tau, z) \in \mathcal{I} \times (b/2)\overline{B}$ et tout $n \geq n_0$

$$G_n(\tau, 0)\cap\Big(M_{\|\gamma\|_1}+2\xi(\tau)(1+M_{\|\gamma\|_1})\Big)\overline{B} \subset G_n(\tau, z)+\Big(\xi(\tau)+\zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1}+\xi(\tau)(3+4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\|\overline{B}.$$

Par conséquent, pour $n \geq n_0$ avec $\|z\| \leq b/2$ et $\acute{y}_n(\tau) \in G_n(\tau, 0) \cap \Big(M_{\|\gamma\|_1} + 2\xi(\tau)(1 + M_{\|\gamma\|_1})\Big)\overline{B}$, il existe $\acute{w}_n(\tau) \in G_n(\tau, z)$, telle que

$$\|\acute{y}_n(\tau) - \acute{w}_n(\tau)\| \leq \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\|,$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{d}(\acute{y}_n(\tau), G_n(\tau, z)) \leq \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\|. \tag{4.24}$$

Ainsi,

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq \|\acute{y}_n(\tau)\| + \mathbf{d}(\acute{y}_n(\tau), r_n(\tau, z)).$$

Par (4.24), on écrit

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq \|\acute{y}_n(\tau)\| + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\|. \tag{4.25}$$

(4.15) et (4.19), donnent

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, 0)) \leq \xi(\tau)\|u_{\overline{co}}(\tau) - r_n(\tau)\|. \tag{4.26}$$

Puisque $\acute{y}_n(\tau) \in G_n(\tau, 0) \cap \Big(M_{\|\gamma\|_1} + 2\xi(\tau)(1 + M_{\|\gamma\|_1})\Big)\overline{B}$, l'inégalité (4.25) implique que

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) &\leq \inf_{\acute{y}_n(\tau)\in G_n(\tau,0)}\|\acute{y}_n(\tau)\| + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\| \\ &= \mathbf{d}(0, G_n(\tau, 0)) + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\|,\end{aligned}$$

pour tous $z \in (b/2)\overline{B}$ et $n \geq n_0$, il s'ensuit de (4.26)

$$\mathbf{d}(0, G_n(\tau, z)) \leq \xi(\tau)\|u_{\overline{co}} - r_n\|_{\mathcal{C}} + \Big(\xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big)\Big)\|z\|. \tag{4.27}$$

Posons

$$q_n(\tau) = \xi(\tau)\|u_{\overline{co}} - r_n\|_{\mathcal{C}},$$

et

$$p(\tau) = \xi(\tau) + \zeta\Big(2M_{\|\gamma\|_1} + \xi(\tau)(3 + 4M_{\|\gamma\|_1})\Big).$$

Avec ces notations, (4.23) et (4.27) deviennent

$$d(0, G_n(\tau, z)) \leq q_n(\tau) + p(\tau)\|z\|,$$

$$haus_{\rho(\tau)}(G_n(\tau, z), G_n(\tau, \acute{z})) \leq p(\tau)\|z - \acute{z}\|.$$

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{\varpi}_n(\tau) = q_n(\tau) + p(\tau)\varpi_n(\tau), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ \varpi_n(0) = 0, \end{cases}$$

avec la solution $\varpi_n(\tau) = \int_0^\tau e^{\eta(\tau)-\eta(s)} q_n(s)ds$ et $\eta(\tau) = \int_0^\tau p(s)ds,\ \forall \tau \in \mathcal{I}$. Notons que pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, $\varpi_n(\tau)$ converge vers 0, lorsque n tend vers ∞, par conséquent, pour tout $n \geq n_0$ et tout $\tau \in \mathcal{I}$, $0 \leq \varpi_n(\tau) \leq b/2$. Par le Théorème 4.4,

$$\begin{cases} \dot{u}_n(\tau) \in -A(\tau)u_n(\tau) + F(\tau, u_n(\tau)), \text{ p.p. } \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(\tau) \in D(A(\tau)),\ \forall \tau \in \mathcal{I}; \\ u_n(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

admet une solution $u_n : \mathcal{I} \to \mathbf{R}^d$ satisfaisant

$$\|u_n(\tau) - r_n(\tau)\| \leq \varpi_n(\tau),\ \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Alors,

$$\|u_n(\tau) - u_{\overline{co}}(\tau)\| \leq \varpi_n(\tau) + \|r_n(\tau) - u_{\overline{co}}(\tau)\|,$$

par passage à la limite, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $u_{\overline{co}}$, avec $\|u_n(\tau) - u_{\overline{co}}(\tau)\| \leq b$. □

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, on a présenté des résultats d'existence et de relaxation pour des inclusions différentielles du premier ordre dans un cadre de dimension finie sans utiliser les hypothèses de convexité et de bornitude et par l'application d'une condition de Lipschitzité au sens de ρ-Hausdorff sur la perturbation.

Nous avons consacré la première et deuxième partie à l'étude du problème d'évolution du premier ordre gouverné par le processus de la rafle avec une perturbation multivoque. Notre résultat, établi pour les ensembles mobiles convexes, peut être élargi à une classe plus générale d'ensembles, incluant les ensembles uniformément r-prox réguliers ou sous lisses, comme perspectives, nous pouvons opter pour l'étudier du cas du processus de la rafle non convexe dépendant de l'état du second ordre dans un espace de dimension infinie avec une perturbation générale non bornée sous la forme d'une somme d'applications univoque et multivoque.

Finalement, la troisième partie a aborde l'étude du problème d'évolution du premier ordre gouverné par un opérateur maximal monotone avec une perturbation multivoque. Dans les travaux à venir, l'analyse du même problème en diminuant légèrement les hypothèses supposées sur l'opérateur maximal monotone sera abordée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Affane, *Quelque Problème de Contrôle optimal pour des inclusions différentielles*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel, (2012).

[2] D. Affane, M. Aissous and M. F. Yarou, *Existence results for sweeping process with almost convex perturbation,* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie. **61** (2018), 119–134.

[3] D. Affane, M. Aissous and M. F. Yarou, *Almost mixed semi-continuous perturbation of Moreau's sweeping process*, Evol. Equ. Control Theory. **9** (2020), 27–38.

[4] D. Affane and L. Boulkemh, *Topological properties for a perturbed first order sweeping process,* Acta Univ. Sapientiae Math. **13** (2021), 1–22.

[5] D. Affane and L. Boulkemh, *First order sweeping process with subsmooth sets*, Miskolc Math. Notes. **23** (2022), 13–27.

[6] D. Affane and S. Ghalia, *First-order iterative differential inclusion,* Electron. J. Math. Anal. Appl. **10** (2022), 1–10.

[7] D. Affane and M. F. Yarou, *Fixed point approach for differential inclusions governed by subdifferential operators*, AIP Conf. Proc. **2183** (2019), 060002.

[8] D. Affane and M. F. Yarou, *Second-order perturbed state-dependent sweeping process with subsmooth sets*, Comput. Math. Appl. (2020), 147–169.

[9] D. Affane and M. F. Yarou, *Unbounded perturbation for a class of variational inequalities*, Discuss. Math. Diff. inclu. control optim. **37** (2017), 83–99.

[10] D. Affane and M. F. Yarou, *Perturbed first-order state dependent Moreau's sweeping process,* Int. J. Nonlinear Anal. Appl. **12** (2021), 605–615.

[11] J. P. Ansel and Y. Ducel, *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration. 2e cycle universitaire*, Paris : Ellipses, (1995).

[12] H. Attouch and A. Damlamian, *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces*, Israel J. Math. **12** (1972), 373–390.

[13] H. Attouch and A. Damlamian, *Problémes d'évolution dans les Hilberts et applications*, J. Math. Pures Appl. **54** (1975), 53–74.

[14] H. Attouch and B. R. J. Wets, *Quantitative stability of variational systems : I. The epigraphical distance*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 695–729.

[15] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions*, Set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[16] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhauser, Boston. Basel. Berlin, (1990).

[17] D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, *Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications,* J. J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), 32.

[18] S. Boudada and M. F. Yarou, *Sweeping process with right uniformly lower semicontinuous mappings*, Positivity. **24** (2020), 207–228.

[19] N. Boudjerida, D. Affane and M. F. Yarou, *Non-convex perturbation to evolution problems involving Moreau's sweeping process,* Ann. West Univ. Timisoara-Math. Comput. Sci. **59** (2023), 151–175.

[20] N. Boudjerida, D. Affane and M. F. Yarou, *Truncated Perturbation to Evolution Problems Involving Time-Dependent Maximal Monotone Operators*, Lobachevskii J. Math. **45** (2024), 53–67.

[21] N. Boudjerida, D. Affane and M. F. Yarou, *Existence and relaxation problems of a perturbed Moreau's sweeping process*, submitted.

[22] M. Bounkhel and L. Thibault, *Nonconvex sweeping process and prox regularity in Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 359–3374.

[23] M. Bounkhel, *Regularity concepts in nonsmooth analysis*, Springer, (2012).

[24] H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, (1973).

[25] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, (1983).

[26] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, **2** (2011).

[27] C. Castaing, T. X. Duc Ha and M. Valadier, *Evolution equations governed by the sweeping process,* Set-Valued Anal. **1** (1993), 109–139.

[28] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. F. Yarou, *Existence problems in second order evolution inclusions : discretization and variational approach*, Taiwanese J. math. **12** (2008), 1435–1477.

[29] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. F. Yarou, *Some contributions to nonconvex sweeping process*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 1–20.

[30] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lect. Notes Math. Springer-Verlag, Berlin, **580** (1977).

[31] C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, *Perturbations convexes semi-continues supérieurement de problemes d'évolution dans les espaces de Hilbert*, Travaux Sém. Anal. Convexe. Montpellier, (1984).

[32] P. V. Chuong, *A density theorem with an application in relaxation of nonconvex-valued differential equations,* J. Math. Anal. Appl. **124** (1987), 1–14.

[33] F. Clarke, Y. Ledyaev, R. Stern and P. Wolneski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, (1998).

[34] G. Colombo, R. Henrion, N. D. Hoang and B. Sh. Mordukhovich, *Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets*, J. Differ. Equ. **260** (2016), 3397–3447.

[35] S. Djebali, L. Górniewicz and A. Ouahab, *Solution sets for differential equations and inclusions*, Walter De Gruyter, **18** (2012).

[36] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part I. General Theory*, Wiley-Interscience, New York, (1967).

[37] J. F. Edmond and L. Thibault, *BV solution of nonconvex sweeping process with perturbation,* J. Differ. Equ. **226** (2006) 135–179.

[38] J. F. Edmond and L. Thibault, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process*, Math. Program. Ser. B. **104** (2005), 347–373.

[39] A. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, SIAM J. Contro **5** (1967), 609–621.

[40] S. Ghalia and D. Affane, *Control problem governed by an iterative differential inclusion,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **72** (2023), 2621–2642.

[41] S. Ghalia and D. Affane, *On the Attainable Set of Iterative Differential Inclusions,* Math. Slovaca. **73** (2023), 1479–1498.

[42] D. Goeleven, *Complementarity and Variational Inequalities in Electronics*, Mathematical Analysis and its Applications, Academic Press, London, (2017).

[43] F. Hiai and H. Umegaki, *Integrals conditional expectations and martingales of multivalued functions,* J. Multivariate Anal. **7** (1977), 149–182.

[44] A. Ioffe, *Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions,* J. Convex Anal. **13** (2006), 353–362.

[45] A. Jourani and E. Vilches, *Positively α-far sets and existence results for generalized perturbed sweeping processes*, J. Convex Anal. **23** (2016), 775–821.

[46] M. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, *Existence of solutions for degenerate sweeping processes*, J. Convex Anal. **4** (1997), 165–176.

[47] V. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains*, Set-Valued Anal. **5** (1997), 57–72.

[48] M. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, *An introduction to Moreau's sweeping process*, Impacts in mechanical systems : Analysis and modelling, Springer, Berlin, (2000), 1–60.

[49] B. K. Le, *Well-posedness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions*, Optimization, **69** (2020), 1187-1217.

[50] J. J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space,* J. Diff. Eqs. **26** (1977), 347–374.

[51] J. J. Moreau, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics,* Nonsmooth Mechanics and Applications 302 in CISM, Courses and Lectures, Springer Verlag, (1988).

[52] J. J. Moreau, *Numerical aspects of the sweeping process,* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **177** (1999), 329–349.

[53] R. T. Rockafellar and R. J. B. Wets, *Variational analysis*, Springer Science and Business Media, (2009).

[54] S. Saïdi and M. F. Yarou, *Control problems governed by time-dependent maximal monotone operators*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **23** (2017), 455–473.

[55] G. V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, Grad. Stud. Math. **41** (2001), 1065–7339.

[56] S. A. Timoshin and A. A. Tolstonogov, *Existence and relaxation of BV solutions for a sweeping process with a nonconvex-valued perturbation,* J. Convex Anal. **27** (2020), 645–672.

[57] A. A. Tolstonogov and D. A. Tolstonogov, *Lp-Continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values. Relaxation theorems,* Set-Valued Anal. **87** (1996), 237–269.

[58] A. A. Tolstonogov, *Relaxation in non-convex optimal control problems described by first-order evolution equations,* Sb. Math. **190** (1999), 1689–1714.

[59] A. A. Tolstonogov, *Differential inclusions with unbounded right-hand side : existence and relaxation theorems,* Proc. Steklov Inst. Math. **291** (2015), 190–207.

[60] A. A. Tolstonogov, *Existence and relaxation of solutions for a subdifferential inclusion with unbounded perturbation,* J. Math. Anal. Appl. **447** (2017), 269–288.

[61] A. A. Tolstonogov, *Existence and relaxation of solutions to differential inclusion with unbounded right-Hand side in a Banach space,* Sib. Math. J. **58** (2017), 727–742.

[62] A. A. Tolstonogov, *BV continuous solutions of an evolution inclusion with maximal monotone operator and nonconvex-valued perturbation. Existence theorem,* Set Valued. Var. Anal. **29** (2021), 29–60.

[63] E. Vilches and B. T. Nguyen, *Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators with a full domain,* Set-Valued Var. Anal. **28** (2020), 569–581.

[64] A. A. Vladimirov, *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space,* Nonlinear Anal. **17** (1991), 499–518.

[65] J. Warga, *Optimal control of differential and Functional Equations*, Academic press, New York and London, (1972).

[66] S. Zeng and E. Vilches, *Well-posedness of history/state-dependent implicit sweeping processes*, J. Optim. Theory Appl. **186** (2020), 960–984.

ملخص : هذه الأطروحة مخصصة لدراسة الاحتواء التطوري الذي تحكمه عملية المسح، بالإضافة إلى فحص الاحتواء التطوري الذي يحكمه مؤثر رتيب أقصى يعتمد على الزمن. يحتوي الجانب الأيمن من الاحتواءات المدروسة على اضطراب متعدد القيم بقيم غير محدبة وغير محدودة. لقد توصلنا إلى نتائج جديدة تتعلق بوجود الحلول ونظريات الاسترخاء من خلال شرط ليبشيتزيت على ρ - هاوسدورف.

الكلمات المفتاحية : عملية المسح، الاسترخاء، الاضطراب متعدد القيم، المؤثر الرتيب الأقصى، التباين المستمر تمامًا.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude d'une inclusion d'évolution gouvernée par le processus de la rafle, ainsi que l'examination d'une inclusion d'évolution gouvernée par un opérateur maximal monotone dependant du temps. Le côté droit des inclusions considérées contient une perturbation multivoque avec des valeurs non convexes et non bornées. Nous avons établi de nouveaux résultats concernant l'existence de solutions et les théorèmes de relaxation via une condition de Lipschitzité au sens de ρ- Hausdorff.

Mots clés : Processus de la rafle, relaxation, perturbation multivoque, opérateur maximal monotone, variation absolument continue.

Abstract : This thesis is devoted to the study of an evolution inclusion governed by the sweeping process, as well as the examination of an evolution inclusion driven by a time-dependent maximal monotone operator. The right-hand side of the considered inclusions contains a set-valued perturbation with non-convex and unbounded values. We established new results concerning the existence of solutions and relaxation theorems via a condition of Lipschitzity in the sense of ρ-Hausdorff.

Keywords : Sweeping process, relaxation, set-valued perturbation, maximal monotone operator, absolutely continuous variation.