République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

N^{0}d'ordre :..................

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat de Troisième Cycle

Spécialité

Analyse fonctionnelle

Par

Boughaba Houda

Thème

Propriétés asymptotiques de certaines classes d'équations fonctionnelles dans un corps ultramétrique

Soutenue publiquement le 25/06/2024, devant la commission d'examen

Président :	N. Touafek	Prof	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
Directeur :	T. Zerzaihi	Prof	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
Examinateurs :	A. Bouchair	Prof	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
	K. Bessila	M.C.A	Univ. Constantine 1
	S. Kaouache	M.C.A	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf (Mila)
	R. Belhadef	M.C.A	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout puissant, qui m'a donné le courage, la volonté et la patience pour accomplir cette thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à mon directeur de thèse **le professeur Tahar Zerzaihi** pour sa patience, sa gentillesse, sa disponibilité, ses encouragements et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Mes vifs remerciements vont également à monsieur le **professeur Nouressadat Touafek** qui m'a honoré d'accepter la présidence du jury.

Messieurs **Bouchair Abderrahmane**, professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia, **Khaled Bessila**, Maître de Conférences A à l'université de Constantine 1, **Smail Kaouache**, Maître de Conférences A à l'université de Abdelhafid Boussouf (Mila) et **Rafik Belhadef**, Maître de Conférences A à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia, vous me faites un grand honneur que vous acceptiez d'évaluer et d'expertiser ce travail. Veuillez recevoir mes plus vifs remerciements et mes respectueuses considérations.

Je remercie très sincèrement **mes parents** à qui si je demande une étoile, ils m'offeraient la lune : sans vous, mon chemin de la vie aurait été plus ardu.

A titre plus personnel, je remercie chaleureusement mon fiancé, **Salih Bouternikh**, pour son soutien moral et ses motivations.

Je remercie tous les membres de ma famille qui m'ont encouragé dans la poursuite de mes études.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les membres du laboratoire de mathématiques pures et appliquées (LMPA) pour les échanges de bons procédés et pour les bons moments, je vous souhaite beaucoup de bonheur et succès.

Mes sincères remerciements à mes chères amies pour leur encouragement, leur amitié et leur soutien. Merci beaucoup, vous êtes des meilleurs.

Table des matières

Introduction générale

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique des solutions méromorphes de certaines classes des équations fonctionnelles (aux différences et aux q-différences) dans un corps commutatif, ultramétrique, complet et algébriquement clos de caractéristique zéro, que nous désignerons par $\mathbb{K}$. Ces équations découlent de l'étude analogique des équations fonctionnelles dans le domaine des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Dans le domaine des nombres complexes, de nombreux travaux ont été consacrés au cours de ces dernières années à l'étude de certaines propriétés des solutions méromorphes des équations aux différences et aux q-différences et de nombreux résultats significatifs et cruciaux ont été réalisés par plusieurs mathématiciens sur l'existence et la croissance de leurs solutions méromorphes en général et entières en particulier où les coefficients de ces équations peuvent être des constants ou des fonctions méromorphes. On mentionne par exemple: l'équation q-différence de type Schröder qui a été étudiée par G. G. Gundersen et al. en 2002 (voir [34]), aussi, l'équation aux q-différence (resp. l'équation aux différence) de type Painlevé qui a été publiée en 2020 (resp. en 2014) par C. W. Peng et H. W. Huang (resp. par C. W. Peng et Z. X. Chen), (pour plus de détails, voir [62], [**?**]), ainsi que l'équation aux différence de type Malmquist qui a été étudiée par M. J. Ablowitz et al. en 2000 (voir [1]), . . . , etc.

La méthode la plus utilisée dans tous les travaux mentionnés précédemment est basée sur la théorie classique de Nevanlinna qui joue un rôle majeur dans la distribution des valeurs des fonctions méromorphes. Cette théorie a été fondée par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna en 1925 et se compose de deux théorèmes importants: le premier théorème principal a été établi à partir de la formule de Jensen. Le deuxième théorème principal est le plus utilisé dans la distribution des valeurs.

Le but principal de ce travail est d'étendre et généraliser certains des résultats concernant les équations aux q-différences complexes de type Schröder et Painlevé et les équations aux différences complexes de type Painlevé et Malmquist dans un corps commutatif ultramétrique, complet et algébriquement clos. Précisément, on s'intéresse exactement à la taille de leurs solutions méromorphes et à la relation entre leur ordre de croissance et le degré de l'équation ainsi que les degrés des coefficients. Dans tous les cas, nous supposons que la solution est existe. Dans tout notre travail, on utilise la théorie de Nevanlinna ultramétrique qui est l'analogue de la théorie de Nevanlinna classique. Cette théorie est due à Boutabaa [15, 16, 19].

Cette thèse est répartie sur l'introduction générale et trois chapitres.

Le premier chapitre est essentiellement consacré à quelques propriétés élémentaires concernant le corps ultramétrique. Dans un premier temps, on présente quelques notions basiques d'un corps ultramétrique (par exemple les propriétés d'une valeur absolue ultramétrique, ...) et ses propriétés principales topologiques et analytiques (par exemple: les caractéristiques des disques, la convergence des séries entières, ...). Ensuite, on aborde certaines des propriétés classiques liées aux fonctions méromorphes et analytiques dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. On va énoncer aussi le polygone de valuation pour établir la formule de Jensen ultramétrique et on termine ce chapitre par le théorème de factorisation appelé le théorème de Weirstrasse.

Le deuxième chapitre est un aperçu sur la théorie de Nevanlinna ultramétrique. D'abord, on donne l'analogue ultramétrique de la formule de Jensen et quelques fonctions liées à la théorie de Nevanlinna (on prend par exemple: $N(r, f)$; la fonction de comptage des pôles de f avec leurs multiplicités, $m(r, f)$; la fonction de compensation de f et $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$; la fonction de Nevanlinna appelée aussi la fonction caractéristique de f). Puis, à partir de la formule de Jensen, on va présenter la théorie de Nevanlinna ultramétrique qui est comme dans le cas classique, composée de deux théorèmes fondamentaux (le premier et le deuxième) et on examine également quelques propriétés liées à cette théorie. Enfin, on décrit le théorème de Valiron-Mokhon'ko ultramétrique et on donne la définition de l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe et ses propriétés qui sont semblables à celle connue dans le cas complexe. Ce théorème et cette définition jouent un rôle majeur dans notre travail.

Le dernier chapitre est composé de deux sections fondamentales ; dans la première section, nous traitons les équations aux différences de type Painlevé de la forme

$$\big(f(x)+f(x+1)\big)\big(f(x-1)+f(x)\big)=R(x,f(x)), \tag{1}$$

et l'équation aux différence de type Malmquist de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} A_i(x)f(x+c_i)=R(x,f(x)), \tag{2}$$

$$\prod_{i=0}^{n} A_i(x)f(x+c_i)=R(x,f(x)), \tag{3}$$

où $R(x,f(x))$ est une fonction rationnelle à deux variables, $A_1,\dots,A_n$ sont des constants et $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{N}/\{0\}$. On démontre que la solution méromorphe transcendante de chaque équation est d'ordre infini à partir de certaines conditions sur les degrés des deux parties de ces équations.

La deuxième section est essentiellement destinée à étudier la taille des solutions des équations aux q-différences de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} A_j(x)f(q^jx)=R(x,f(x)),\quad \text{(l'équation de type Schröder)}, \tag{4}$$

où $A_1(x),\dots,A_n(x)$ sont des fonctions rationnelles et $q\in\mathbb{K}$.

Ou de la forme

$$\big(f(qx)+f(x)\big)\big(f(x)+f\big(x/q\big)\big)=R(x,f(x)),\quad \text{(l'équation de type Painlevé)}, \tag{5}$$

ou bien de la forme

$$R_1(qx,f(qx))=R_2(x,f(x)), \tag{6}$$

où $R_1(x,f(x))$ et $R_2(x,f(x))$ sont des fonctions rationnelles irréductibles en f avec des coefficients méromorphes.

Enfin, les équations

$$\prod_{i=1}^{n} f(q_ix)=R(x,f(x)), \tag{7}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(q_i x) = f(x)^m, \tag{8}$$

où $q_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n$.

Et

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x) f(q^j x) = A_{n+1}(x), \tag{9}$$

où $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x), A_{n+1}(x)$ sont des polynômes.

On donnera une estimation des solutions méromorphes de chaque équation ci-dessus et on étudiera la relation entre le degré de chaque équation, le degré de la fonction rationnelle $R(x, f(x))$, $q \in \mathbb{K}$ et l'ordre de croissance de leurs solutions méromorphes.

Chapitre 1

Propriétés élémentaires des corps ultramétriques

Sommaire

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur les propriétés fondamentales et des notions basiques dans un corps ultramétrique qui nous seront utiles dans la preuve de nos résultats. Dans un premier temps, on rappelle quelques notions concernant le corps ultramétrique. Après, nous donnons quelques définitions et caractéristiques des fonctions méromorphes et leurs applications. On examine aussi la relation entre les zéros des fonctions méromorphes et le polygone de valuation. On termine ce chapitre par un théorème très important, qui est le théorème de factorisation et ses corollaires.

Tout au long de cette thèse, on notera les corps: ultramétrique, des nombres complexes, réels par $\mathbb{K}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

1.1 Valeurs absolues sur un corps ultramétrique

Cette section consiste à rappeler quelques définitions basiques concernant les corps ultramétriques.

Définition 1.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{K}$ est une application $|.| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes:*

1) $|x| \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{K}$;

2) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$, pour tout $x \in \mathbb{K}$;

3) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$;

4) $|xy| = |x||y|$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.

La propriété 3) est connue comme l'inégalité triangulaire forte.

Définition 1.1.2. *L'application $d(x, y) = |x - y|$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$, est une distance associée à la valeur absolue $|.|$. $(\mathbb{K}, d)$ est donc un espace métrique.*

On a la proposition suivante qui décrit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur absolue soit ultramétrique (ou non-archimédienne)

Proposition 1.1.3. *[44, Proposition 1.14] Soit $\mathbb{K}$ un corps muni d'une valeur absolue non triviale $|.|$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $|.|$ est une valeur absolue ultramétrique,

2. $|n| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

***Preuve**.* Tout d'abord, on démontre l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) par récurrence.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $n = 1$, on a: $|1| = 1$.
Supposons que $|s| \leq 1$, pour tout $s = 1, \ldots, n-1$ et montrons que $|n| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Nous avons: $|n| = |(n-1) + 1| \leq \max\{|n-1|, 1\} \leq 1$.
Si $n \in \mathbb{Z}$, on a $n = -n^{'}, n^{'} \in \mathbb{N}$, donc $|n| = |-n^{'}| = |n^{'}| \leq 1$. Alors, $|n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Maintenant, on va prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$, on a $|x+y| \leq \max\big\{|x|, |y|\big\}$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} |x+y|^n &= |(x+y)^n| \\ &= \Big|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\Big| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |C_n^k||x|^{n-k}|y|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |x|^{n-k}|y|^k. \end{aligned}$$

Car C_n^k est un entier, i.e. $|C_n^k| \leq 1$. D'autre part, on a $|x| \leq \max\big(|x|, |y|\big)$ et $|y| \leq \max\big(|x|, |y|\big)$, alors, pour $0 \leq k \leq n$, on a $|x|^{n-k}|y|^k \leq (\max(|x|, |y|))^n$, d'où

$$|x+y|^n \leq \sum_{i=0}^{n} \big(\max(|x|, |y|)\big)^n = (n+1)\big(\max(|x|, |y|)\big)^n. \tag{1.1}$$

Prenant la n-ième racine sur les deux côtés de la relation (1.1), et par passage à la limite, on obtient $|x+y| \leq \max\big(|x|, |y|\big)$. □

Définition 1.1.4. *On dit qu'un corps* $(\mathbb{K}, |.|)$ *est ultramétrique si la valeur absolue* $|.|$ *est ultramétrique.*

Proposition 1.1.5. *[44, Proposition 1.15] Soient* x *et* y *deux éléments d'un corps ultramétrique* $(\mathbb{K}, |.|)$*, tels que* $|x| \neq |y|$*, alors* $|x \pm y| = \max(|x|, |y|)$*.*

Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{K}$, supposons que $|y| < |x|$. Comme $(\mathbb{K}, |.|)$ est un corps ultramétrique, on a

$$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|,$$

d'autre part, si $|y| \leq |x+y|$, on a

$$|x| = |x+y-y| \leq \max\{|x+y|, |y|\} = |x+y|.$$

Sinon, on a une contradiction avec $|y| < |x|$.
Pour la deuxième égalité, quand $|x| \neq |y|$, on a $|x-y| = |x+(-y)| = \max(|x|, |-y|) = \max(|x|, |y|)$. □

Proposition 1.1.6. *[44, Proposition 1.15] Soient a et x deux éléments d'un corps ultramétrique* $(\mathbb{K}, |.|)$. *Si $|x-a| < |a|$, alors $|x| = |a|$.*

Preuve. Soient $x, a \in \mathbb{K}$, on suppose que $|x-a| \leq |a|$. Puisque $(\mathbb{K}, |.|)$ est un corps ultramétrique, on a

$$|x| = |x - a + a| \leq \max\{|x-a|, |a|\} = |a|,$$

par ailleurs, on a

$$|a| = |a - x + x| \leq \max\{|x-a|, |x|\} = |x|,$$

car sinon, on a une contradiction avec l'hypothèse $|x-a| < |a|$ et donc $|x| = |a|$. □

Corollaire 1.1.7. *[44, Remark 1.16] Dans un espace ultramétrique, tous les triangles sont isocèles.*

1.2 Propriétés topologiques d'un corps ultramétrique

Dans cette section, premièrement, nous allons introduire quelques notations des disques dans $\mathbb{K}$, puis on va présenter et démontrer quelques propriétés importantes.
Soit r un réel strictement positif, et a un élément dans $\mathbb{K}$. Nous notons $D^+(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r, c'est à dire l'ensemble des x dans $\mathbb{K}$ tels que $|x-a| \leq r$; $D^-(a, r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r, c'est à dire l'ensemble des x dans $\mathbb{K}$ tels que $|x-a| < r$; et $C(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r, c'est à dire l'ensemble des x dans $\mathbb{K}$ tels que $|x-a| = r$.

Remarque. *La notation $D(a, r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux ensembles $D^+(a, r)$ ou $D^-(a, r)$.*

Proposition 1.2.1. *[33, Proposition 2.3.7] Soient $\mathbb{K}$ un corps ultramétrique, $a, b \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On a les propriétés suivantes:*

1) La sphère $C(a, r)$ est un ensemble ouvert.

2) Un disque ouvert $D^-(a, r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.

3) Un disque fermé $D^+(a, r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.

4) Tout point d'un disque est un centre de ce disque.

5) Deux disques de $\mathbb{K}$ sont disjoints ou l'un est contenu dans l'autre.

Preuve. 1) Pour montrer que $C(a,r)$ est un ouvert, il suffit de montrer que

$$\forall x \in C(a,r), \exists r_0 \text{ tel que } D^-(x,r_0) \subset C(a,r).$$

Soit $x \in C(a,r)$, on choisit r_0 tel que $0 < r_0 < r$. Soit $y \in D^-(x,r_0)$, alors $|y-x| < r_0 < r$ et donc $|(y-a)-(x-a)| < |x-a|$. D'après la propriété de triangle isocèle, on obtient $|y-a| = |x-a| = r$.
Alors, $y \in C(a,r)$, ce qui montre que $C(a,r)$ est un ensemble ouvert.
2) On a tout disque ouvert $D^-(a,r)$ est un ensemble ouvert dans un espace métrique quelconque. D'autre part, pour montrer que $D^-(a,r)$ est un ensemble fermé, on montre que $C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)}$ est un ouvert.
On a

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)} &= \Big\{x \in \mathbb{K} : |x-a| \geq r\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{K} : |x-a| > r\Big\} \cup C(a,r) \\ &= C_{\mathbb{K}}^{D^+(a,r)} \cup C(a,r). \end{aligned}$$

On a $D^+(a,r)$ est un ensemble fermé dans un espace métrique, alors $C_{\mathbb{K}}^{D^+(a,r)}$ est un ensemble ouvert. D'autre part, on a $C(a,r)$ est un ensemble ouvert. Ce qui implique que $C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)}$ est un ensemble ouvert et par conséquent $D^-(a,r)$ est un ensemble fermé.
3) On sait que tout disque fermé est un ensemble fermé dans un espace métrique quelconque. il reste à montrer que $D^+(a,r)$ est un ensemble ouvert.
On a $D^+(a,r) = D^-(a,r) \cup C(a,r)$. Puisque $D^-(a,r)$ et $C(a,r)$ sont des ensembles ouverts, alors $D^+(a,r)$ est un ensemble ouvert.
4) On va montrer que si $x \in D^-(a,r)$, alors $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.
Soient $x \in D^-(a,r)$ et $y \in D^-(x,r)$, alors $|x-a| < r$ et $|y-x| < r$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |y-a| &= |(y-x)+(x-a)| \\ &\leq \max\{|y-x|, |x-a|\} \\ &< r. \end{aligned}$$

Donc, $y \in D^-(a,r)$ et par conséquent, $D^-(x,r) \subset D^-(a,r)$.
Maintenant, on va démontrer que $D^-(a,r) \subset D^-(x,r)$. Soit $y \in D^-(a,r)$, alors $|y-a| < r$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} |y-x| &= |(y-a)+(a-x)| \\ &\leq \max\{|y-a|, |x-a|\} \\ &< r. \end{aligned}$$

Donc, $y \in D^-(x,r)$ et par conséquent, $D^-(a,r) \subset D^-(x,r)$. Il résulte que, $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.
5) Soient $D(a,r)$ et $D(b,r_0)$ deux disques de $\mathbb{K}$. Supposons que $D(a,r) \cap D(b,r_0) \neq \phi$, pour tous $r, r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et on montre que $D(a,r) \subset D(b,r_0)$ ou $D(b,r_0) \subset D(a,r)$.
On suppose que $r \leq r_0$. Soit $x \in D(a,r) \cap D(b,r_0)$, alors $x \in D(a,r)$ et $x \in D(b,r_0)$.
D'après la propriété 4), on a

$$D(a,r) = D(x,r) \; et \; D(b,r_0) = D(x,r_0).$$

Mais $D(x,r) \subset D(x,r_0)$ (puisque $r \leq r_0$), donc $D(a,r) \subset D(b,r_0)$. De même, quand $r \geq r_0$, on trouve que $D(a,r) \supset D(b,r_0)$. □

Corollaire 1.2.2. *[44, Proposition 2.6.] Le cercle $C(a,r)$ est un ensemble ouvert et fermé à la fois.*

Preuve. On a vu déjà dans la Proposition 1.2.1 que $C(a,r)$ est ouvert. D'autre part, on sait que

$$\begin{aligned} C(a,r) &= D^+(a,r) \backslash D^-(a,r) \\ &= D^+(a,r) \cap C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)}, \end{aligned}$$

comme $D^+(a,r)$ et $C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)}$ sont des ensembles fermés (puisque $D^-(a,r)$ est un ouvert), alors, $C(a,r)$ est un ensemble fermé. □

1.3 Propriétés analytiques d'un corps ultramétrique

Dans cette partie, nous allons étudier et démontrer les propriétés élémentaires de la convergence des suites et des séries définies dans $\mathbb{K}$. Tout au long de cette section, notons que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, ultramétrique et complet.

La proposition suivante caractérise les suites de Cauchy dans $\mathbb{K}$

Proposition 1.3.1. *[44, Théorème 3.1] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$. $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, si et seulement si elle satisfait*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

Preuve. Tout d'abord, on va montrer que si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0\,;\ |a_m - a_n| < \varepsilon,$$

en particulier, pour $m = n + 1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\,;\ |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

D'où,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

Maintenant, on va démontrer l'implication inverse qui n'est pas certainement vraie dans $\mathbb{R}$ mais est vraie dans un corps ultramétrique $\mathbb{K}$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq 0$, on a $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

Pour tout $m > n > n_0$, par l'inégalité triangulaire forte, on a

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - \cdots + a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \max\left\{|a_m - a_{m-1}|, \ldots, |a_{n+1} - a_n|\right\} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. □

Corollaire 1.3.2. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$. On a, $(a_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.*

Proposition 1.3.3. *[44, Ch. 3, Sec. 1] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$. Si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{K}$, alors, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} |a_n| = 0$, ou il existe $n_0 \in \mathbb{N}\,;\ |a_n| = |a_{n_0}|$, pour $n \geq n_0$, (la suite $(|a_n|)_{n\geq 0}$ est stationnaire à partir d'un rang n_0).*

Preuve. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.
Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $m > n$, on a

$$0 \leq \big||a_m| - |a_n|\big| \leq |a_m - a_n| \longrightarrow 0,$$

donc, $\big(|a_n|\big)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $\mathbb{R}$ est complet, alors $\big(|a_n|\big)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = l > 0$. Fixons $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $\big||a_n| - l\big| < \dfrac{l}{2}$, il s'ensuit que

$$\frac{l}{2} < |a_n| < \frac{3l}{2},$$

alors, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, on a $|a_n| > \dfrac{l}{2}$.
De la même manière, comme $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente, alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Donc, pour $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ fixé, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m > N_2$, on a $|a_n - a_m| < \dfrac{l}{2}$.
D'où, pour tous $n, m \geq \max(N_1, N_2) = n_0$, on a

$$|a_n| = |a_n - a_m + a_m| \leq \max\big\{|a_n - a_m|, |a_m|\big\} = |a_m|.$$

Si $m = n_0$, on obtient $|a_n| \leq |a_{n_0}|$, pour tout $n \geq n_0$. De même

$$|a_m| = |a_m - a_n + a_n| \leq \max\big\{|a_m - a_n|, |a_n|\big\} = |a_n|,$$

alors, $|a_{n_0}| \leq |a_n|$ pour tout $n \geq n_0$.
D'où, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, on a $|a_n| = |a_{n_0}|$. $\square$

Considérons maintenant une série numérique $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ dans $\mathbb{K}$. Cette série sera donc convergente dans $\mathbb{K}$ si la suite des sommes partielles, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ converge dans $\mathbb{K}$ et sera converge absolument dans $\mathbb{K}$ si la série $\sum\limits_{i\geq 0} |a_i|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.4. *[44, Proposition 3.2] Si la série $\sum\limits_{i\geq 0} |a_i|$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la série $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ est convergente dans $\mathbb{K}$.*

Preuve. On suppose que $\sum_{i\geq 0}|a_i|$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes partielles ; $K_n=\sum_{i=0}^{n}|a_i|$ est convergente dans $\mathbb{R}$, donc K_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Alors, on a pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier N tel que pour tous $n,m\in\mathbb{N}$ satisfaisant $m>n>N$, on a

$$|K_m-K_n|=\Big|\sum_{i=0}^{m}|a_i|-\sum_{i=0}^{n}|a_i|\Big|=\sum_{i=n+1}^{m}|a_i|<\varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$|S_m-S_n|=\Big|\sum_{i=0}^{m}a_i-\sum_{i=0}^{n}a_i\Big|=\Big|\sum_{i=n+1}^{m}a_i\Big|\leq\sum_{i=n+1}^{m}|a_i|<\varepsilon,$$

donc, $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet, alors S_n converge dans $\mathbb{K}$ et par conséquent la série $\sum_{i\geq 0}a_i$ converge dans $\mathbb{K}$. $\square$

La proposition suivante illustre une propriété qui est une distinction par rapport à ce qui se passe dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Proposition 1.3.5. *[44, Proposition 3.3] Soit $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ une série dans $\mathbb{K}$. On a, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.*
De plus, on a

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\Big|\leq\max_{n\geq 1}|a_n|.$$

Preuve. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge dans $\mathbb{K}$ si et seulement si la suite des sommes partielles ; $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ converge dans $\mathbb{K}$. Alors, S_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Donc, on a $\lim_{n\to+\infty}|S_n-S_{n-1}|=0$.
Par ailleurs, on a $a_n=S_n-S_{n-1}$, d'où $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.
Maintenant, supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge. Le cas $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=0$ est évident. Sinon, d'après la Proposition 1.3.3, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, on a

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\Big|=\Big|\sum_{n=1}^{n_0}a_n\Big|,$$

sachant que $\left|\sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| \leq \max_{1\leq n\leq n_0}\{|a_n|\} \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n|\}$, alors, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n|\}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

1.4 Fonctions méromorphes sur un corps ultramétrique

Cette section est essentiellement destinée aux propriétés déjà connues des fonctions méromorphes ultramétriques: on commence par un petit rappel des propriétés élémentaires des fonctions données sous forme d'une série entière. Ensuite, nous établissons quelques définitions sur les fonctions analytiques et méromorphes.

1.4.1 Fonctions Analytiques

Premièrement, nous introduisons quelques rappels à propos des propriétés des fonctions données sous forme d'une série entière.

On considère une série entière, de terme général $a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{K}$. Cette série sera donc convergente si et seulement si $a_n x^n$ tend vers zéro dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.4.1. *Soit l'ensemble* $A = \{r \in [0, +\infty[, |a_n|\, r^n \to 0\}$ *est un ensemble non vide. On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$*, la borne supérieure de* A *si* A *est majoré que l'on note* R*. Sinon* $R = +\infty$*.*

La proposition suivante décrit les critères de D'Alembert, Cauchy et d'Hadamard qui sont utilisés pour l'étude de la convergence des séries

Proposition 1.4.2. *[6, Proposition 16] Soit* $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. Alors*

1) Si a_n *est non nul à partir d'un certain rang et si la limite de* $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *quand* $n \to +\infty$ *existe et égal à* L*, on a* $R = \dfrac{1}{L}$ *(Formule de d'Alembert).*

2) Si la limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ *quand* $n \to +\infty$ *existe et égal* L*, on a* $R = \dfrac{1}{L}$ *(Formule de Cauchy).*

3) Dans tous les cas, on a $R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *(Formule d'Hadamard).*

Comme dans le domaine des nombres complexes $\mathbb{C}$, les cas limites $L = 0$ et $L = +\infty$ conduisent aussi au bon résultat sur le rayon de convergence ; quand $L = +\infty$, on a $R = 0$ et donc la série est convergente seulement lorsque $x = 0$ et quand $L = 0$, on a $R = +\infty$, donc la série converge pour tout $x \in \mathbb{K}$ et dans ce cas, on dit que la série est entière.

Les propriétés de R sont aussi semblables à celle connue dans $\mathbb{C}$: si R non nul, la série est convergente pour tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $|x| < R$ et pour $|x| > R$, elle est divergente.
En général, on ne peut rien dire sur la convergence sur le cercle $|x| = R$.

Remarque. *Le disque* $D^-(0, R)$ *est appelé le disque de convergence.*

Nous énonçons la proposition suivante pour préciser la relation entre la série entière et sa dérivée. Pour la preuve de cette proposition, voir [6, page 12]

Proposition 1.4.3. *[6, Proposition 17] On appelle série dérivée de la série* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *où* $a_n \in \mathbb{K}$*, la série* $g(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$*, et on a*

1) La série dérivée de la série f a exactement le même rayon de convergence que la série f.

2) Si le rayon de convergence R de la série f est non nul, alors la fonction f est dérivable sur son disque de convergence et la fonction dérivée est égale à la somme de la série dérivée

$$g(x) = f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

3) Plus généralement, si $R > 0$, la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de f et on a

$$f^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

Remarque. *Les résultats valides dans $\mathbb{C}$ s'étendent sans problèmes au cas ultramétrique.*

Définition 1.4.4. *Soit f une fonction définie de $D(a, R)$ dans $\mathbb{K}$, on dit que f est une fonction analytique sur $D(a, R)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}$, tel que* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| R^n = 0$,

et pour tout $x \in D(a,R)$, on a $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.
Autrement dit, si une fonction f est développable en série entière autour de chaque point de son domaine de définition, alors f est analytique sur son domaine de définition.

Définition 1.4.5. *Soit f une fonction dans $\mathbb{K}$. On dit que f est entière si elle est analytique sur tout le corps $\mathbb{K}$.*

Définition 1.4.6. *Une fonction entière transcendante est une fonction entière sur $\mathbb{K}$ qui n'est pas un polynôme.*

Dans toute la suite, notons que $\mathcal{A}\left(\mathbb{K}\right)$ (resp. $\mathcal{A}\left(D(a,r)\right)$) l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{K}$ (resp. $D(a,r)$) et $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[x]$ l'ensemble des fonctions entières transcendantes sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.4.7. *[28, Proposition 13.3] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) $f \in \mathcal{A}\left(D^-(a,R)\right)$,

ii) *La série $f(x)$ est convergente pour tout $x \in D^-(a,R)$.*

1.4.2 Fonctions méromorphes

Dans cette partie, nous rassemblons quelques définitions et propriétés liées aux fonctions méromorphes dans un corps ultramétrique.

Définition 1.4.8. *Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est un point singulier isolé d'une fonction f s'il existe un voisinage de a $\big($c'est-à-dire il existe un disque ouvert de centre a et de rayon $r\big)$ tel que f est analytique sur ce voisinage sauf a $\big($c'est-à-dire $f \in \mathcal{A}(D^-(a,r)\setminus\{a\})\big)$.*

Définition 1.4.9. *Si une fonction f est analytique sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. f est analytique dans $D(0,R)\big)$ sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles, alors f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. f est méromorphe dans $D(0,R)\big)$.*

Notation. *On note $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{M}(D^-(\theta,R))\big)$ le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^-(\theta,R)\big)$, c'est-à-dire le corps des fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. de fractions de $\mathcal{A}(D^-(\theta,R))\big)$ et $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Aussi, on note par $\mathcal{M}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fonctions méromorphes transcendantes sur $\mathbb{K}$ $\big($c'est-à-dire les fonctions méromorphes qui ne sont pas des fractions rationnelles dans $\mathbb{K}\big)$.

Remarques. *1. Toute fonction entière est une fonction méromorphe. Autrement dit $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{K})$.*
2. Toute fonction rationnelle dans $\mathbb{K}$ est une fonction méromorphe.

1.4.3 Les zéros et les pôles des fonctions méromorphes

Nous procédons dans cette section à l'étude du comportement des séries entières. Dans tout qui suit et tout au long de notre travail, on posera $\mathbb{K}$ un corps commutatif, algébriquement clos et complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|.|$.

Définition 1.4.10. *On dit que $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[X]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$.*

Définition 1.4.11. *Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, $\gamma \in \mathbb{K}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=q}^{+\infty} b_n(x-\gamma)^n$, pour tout $x \in \mathbb{K}$ où $b_q \neq 0$, et $q > 0$. Dans ce cas, on dit que γ est un zéro de f d'ordre de multiplicité q ou simplement que γ est un zéro de f d'ordre q.*
De même q sera appelé l'ordre de multiplicité de γ.

Si f admet γ comme zéro d'ordre q, on posera $w_\gamma(f) = q$. Si $f(\gamma) \neq 0$, on posera simplement $w_\gamma(f) = 0$.

Proposition 1.4.12. *[6, Proposition 18] Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est-à-dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.*

Preuve. Supposons que b est un zéro de f. Alors, $f(x) = a_m(x-b)^m + a_{m+1}(x-b)^{m+1} + \cdots$, tel que $m \geq 1$ et $a_m \neq 0$.
Par conséquent, si $|x-b|$ est assez petit, et non nul, on a $|f(x)| = |a_m|\,|x-b|^m \neq 0$. □

Théorème 1.4.13. *[28, Théorème 14.1] Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non nulle et $\gamma \in \mathbb{K}$. Si $f(\gamma) = 0$ (c'est à dire γ est un zéro de f), alors, il existe $q \in \mathbb{N}$ unique tel que f puisse être écrite dans $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ sous la forme $(x-\gamma)^q g(x)$ où $g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $g(\gamma) \neq 0$.*

Remarques. *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D(0,R))\big)$, alors, il existe deux fonctions $g,h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $g,h \in \mathcal{A}(D(0,R))\big)$, telles qu'on peut écrire $f = \dfrac{h}{g}$, où g et h sans des zéros communs et on a*

1. *Le nombre des pôles de f est fini dans un domaine borné.*
2. *Les zéros de f sont des zéros de h, et les pôles de f sont des zéros de g.*

Pour la preuve du théorème suivant, voir [28, page 129].

Théorème 1.4.14. *[28, Théorème 23.16] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}\left(D^-(0,R)\right)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) f n'a pas de zéros dans le disque $D^-(0,R)$,

ii) $|f(x)|$ est égal à une constante non nulle dans le disque $D^-(0,R)$.

Corollaire 1.4.15. *[42, Corollaire 1.27] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non constante. Alors, f admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}$. De plus, si f est transcendante, alors f a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$.*

Corollaire 1.4.16. *[42, Corollaire 1.28] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Si f n'a aucun zéro dans $\mathbb{K}$, alors f est une constante.*

Théorème 1.4.17. *[31, Théorème 2.1.2] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. Si f n'a aucun pôle dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. f n'a aucun pôle dans le disque $D^-(0,R)\big)$, alors $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$.*

Preuve. Supposons que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, donc on peut écrire f sous la forme $f = \dfrac{h}{g}$ où $h,g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $h,g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) et $g \neq 0$.
Si f n'admet aucun pôle dans $\mathbb{K}$ (resp. f n'admet aucun pôle dans $D^-(0,R)$), alors g n'a aucun zéro dans $\mathbb{K}$ (resp. g n'a aucun zéro dans $D^-(0,R)$).
Donc, d'après le Théorème 1.4.14, on a g est une fonction constante dans $\mathbb{K}$ (resp. g est constante dans $D^-(0,R)$), et par conséquent, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$). $\square$

À partir des Corollaires 1.4.15 et 1.4.16, on a immédiatement les corollaires suivants

Corollaire 1.4.18. *Les fonctions méromorphes transcendantes dans $\mathbb{K}$ ont une infinité des zéros ou une infinité des pôles.*

Corollaire 1.4.19. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *n'ayant ni zéros ni pôles dans* $\mathbb{K}$ $\big($*resp. dans* $D^-(0,R)\big)$. *Alors,* f *est une constante dans* $\mathbb{K}$ $\big($*resp. dans* $D^-(0,R)\big)$.

1.4.4 Polygône de valuation

Définition 1.4.20. *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. *Pour* $r \in]0,+\infty[$, *on appelle par*

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n.$$

le module maximum de f.

Remarque. *L'application* $r \mapsto |f|(r)$ *définit une fonction réelle sur* $\mathbb{R}$.

L'énonce de la proposition suivante nous donne les propriétés de la fonction $|f|(r)$

Proposition 1.4.21. *[6, Proposition 25] Soient la fonction* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ *non nulle et* $r \in]0,+\infty[$. *Alors, on a*

1. *La fonction* $|f|(r)$ *est croissante.*
2. *Si la fonction* f *a un zéro* b *dans* $\mathbb{K}$, *la fonction* $|f|(r)$ *est strictement croissante si* $r > |b|$.
3. *La fonction* $|f|(r)$ *est continue.*

Preuve. 1. Supposons que $r \geq r_2 \geq r_1 \geq 0$, alors

$$|f|(r_1) = \max_{x\in D^+(0,r_1)} |f(x)| \leq \max_{x\in D^+(0,r_2)} |f(x)| = |f|(r_2).$$

Ce qui donne le résultat désiré.

2. Soit $r_0 > |b|$. Sachant qu'il existe au moins un zéros dans le disque $D^+(0,r_0)$, on a $|f|(r_0) = |a_s| r_0^s$, pour un $s \geq 1$. Puisque a_s n'est pas nul, si $r > r_0$, on a $|a_s| r^s > |a_s| r_0^s$, alors,

$$|f|(r) = \max_{k\geq 0} |a_k| r^k \geq |a_s| r^s > |a_s| r_0^s = |f|(r_0).$$

Par conséquent, $|f|(r)$ est strictement croissante pour $r > |b|$.

3. Fixons $\beta \in]0, r[$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} |a_n| \beta^n = 0$ tel qu'il existe un entier N tel que

$$\max_{n\leq N} |a_n| \beta^n = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \beta^n.$$

Par conséquent, si $t \in [0, \beta]$, on a aussi

$$\max_{n \le N} |a_n| t^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| t^n = |f|(t).$$

Comme la fonction $t \mapsto \max |a_n| t^n$ est clairement continue, on a le résultat désiré, et donc la preuve de la Proposition 1.4.21 est complète. $\square$

Définition 1.4.22. *Soit $f(x) = \sum_{n \ge 0} a_n x^n$ une série entière non constante de rayon de convergence R non nul $\big($éventuellement infini$\big)$. La fonction définie par*

$\Phi_f : I =]-\infty, \log R[\to \mathbb{R}$

$$\log r \mapsto \Phi_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n \ge 0} \{\log |a_n| + n \log r\},$$

est appelée la fonction de valuation de f. Cette fonction est continue, croissante, convexe et affine par morceau.

Remarque. *En analyse ultramétrique, le graphe de Φ_f est connue comme le polygone de valuation de la fonction f.*

Théorème 1.4.23. *[28, Théorème 13.1] Soit $r \in]0, +\infty[$. Alors, $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ telles que $\lim_{n \to -\infty} |a_n| r^n = 0$, et*

$$\|f\|_{D(0,r)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n = \lim_{|x| \to r, |x| < r} |f(x)| = |f|(r).$$

De plus, on a $\|.\|$ est une norme ultramétrique multiplicative sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$, qui est appelée la norme de Gauss.

Nous allons maintenant regarder la relation entre le module maximum d'une fonction analytique et sa dérivée

Théorème 1.4.24. *[28, Corollaire 13.6] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Pour tout $r \in]\,0, +\infty[$, on a*

$$|f'|(r) \le \frac{1}{r} |f|(r).$$

Preuve. Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $r \in]0, +\infty[$. Si $f(x) = \sum_{n \ge 0} a_n x^n$, alors $f'(x) = \sum_{n \ge 1} n a_n x^{n-1}$. D'où,

$$\begin{aligned} |f'|(r) = \max_{n \ge 1} |n a_n| r^{n-1} &= \frac{1}{r} \max_{n \ge 1} |\mathrm{n} a_n| r^n \\ &\le \frac{1}{r} \max_{n \ge 0} |a_n| r^n \\ &= \frac{1}{r} |f|(r). \end{aligned}$$

□

Remarque. *La norme multiplicative* $|.|(r)$ *définie sur* $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp. définie sur* $\mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *quand* $r \in [0,+\infty[$ $\big($*resp. quand* $r \in]0,R[\big)$, *est étendue à* $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *quand* $r \in [0,+\infty[$ *(resp.* $r \in]0,R[$*), comme suit: si* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *est donnée par* $f = \dfrac{h}{g}$, *tel que* $g,h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\big($*resp.* $g,h \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, *alors, on a* $|f|(r) = \dfrac{|h|(r)}{|g|(r)}$.

Le résultat qui suit est une version généralisée du résultat précédent

Théorème 1.4.25. *[17, Lemme 4] Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. *Pour tout* $r > 0$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *on a* $|f'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|f|(r)$.

Preuve. Posons $f = \dfrac{h}{g}$ où $h,g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$). Pour tout $r > 0$ (resp. $r \in]0,R[$), et en vertu du Théorème 1.4.24, on a

$$\begin{aligned}
\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} = \left|\frac{f'}{f}\right|(r) &= \left|\frac{g'h - gh'}{gh}\right|(r)\\
&= \frac{|g'h - gh'|(r)}{|gh|(r)}\\
&\leq \max\left\{\frac{|g'|(r)}{|g|(r)}, \frac{|h'|(r)}{|h|(r)}\right\} < \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.26. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. *Pour tout* $r > 0$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $|f^{(n)}|(r) \leq \dfrac{1}{r^n}|f|(r)$, *où* $f^{(n)}$ *est la dérivée d'ordre* n *de* f.

Proposition 1.4.27. *[28, Lemme 4.2] Soit* $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ *non nul et soit* $r \in]0,+\infty[$. *Alors,* $|P(x)|$ *admet une limite* $|P|(r)$ *quand* $|x|$ *tend vers* r *mais* $|x| \neq r$ *et* $|P|(r) = \max\limits_{0\leq j\leq q} |a_j| r^j$. *De même, pour* $a \in D(0,r)$, $|P(x)|$ *admet la même limite* $|P|(r)$ *quand* $|x-a|$ *tend vers* r *mais* $|x-a| \neq r$. *Soit* $x \in D(0,r)$. *Alors,* $|P(x)| \leq |P|(r)$. *Si* P *n'a pas de zéros dans la classe de* x *dans* $D(0,r)$, *alors* $|P(x)| = |P|(r)$. *Si* P *admet au moins un zéro dans cette classe, alors* $|P(x)| < |P|(r)$.

Le lemme suivant décrit les racines d'un polynôme sur $\mathbb{K}$.

Lemme 1.4.28. *[6, Lemme 1] Soit* $Q(x) = b_0 + \cdots + b_s x^s$, *un polynôme de* $\mathbb{K}[x]$. *On suppose que* $|b_s| r^s = \max\left\{|b_j| r^j\right\} = \|Q\|$. *Alors, le polynôme* Q *a toutes ses racines dans* $D^+(0,r)$.

1.4.5 Théorème de Préparation de Weierstrass

Théorème 1.4.29. *[6, Théorème 1] Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière non nulle à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, convergente dans le disque* $D^+(0,r)$*, appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ *et* s *un indice tel que* $|a_s|r^s = |f|(r)$*, et* $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ *pour* $j > s$*. Il existe alors un couple* (Q,H)*, où* Q *étant un polynôme de* $\mathbb{K}[x]$*, tel que* $Q(x) = b_0 + \cdots + b_s r^s$*, avec* $|b_s|\, r^s = |Q|(r) = |f|(r)$ *et* $H(x)$ *une série entière appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ *telle que* $|H-1|(r) < 1$ *et* $f(x) = Q(x)H(x)$*.*

Nous allons rassembler de ce théorème un certain nombre de résultats comme suit. Pour la preuve, voir [6, page 14-15].

Théorème 1.4.30. *[6, Corollaire 3] Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière non nulle à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, convergente dans le disque* $D^+(0,r)$*, appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0,r))$*, et* s *un indice tel que l'on ait* $|a_s|r^s = |f|(r)$*, et* $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ *pour* $j > s$*. On a*

1) *Si* $s \geq 1$*, la fonction* f *a exactement* s *zéros dans le disque* $D^+(0,r)$*, compte tenu des multiplicités ;*
2) *La fonction* f *n'a aucun zéro dans le disque* $D^+(0,r)$ *si et seulement si* $s = 0$*, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.*

Corollaire 1.4.31. *[6, Corollaire 4] Soit* $f(x)$ *une série entière vérifiant les hypothèses du théorème précédent. On suppose de plus que l'entier* s *est égal à* 1*. Alors, la série* $f(x)$ *a un zéro unique dans le disque* $D^+(0,r) \subset \mathbb{K}$*.*

Théorème 1.4.32. *[28, Théorème 23.10] Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}\left(D^-(0,R)\right)$*. Alors,* f *a un nombre fini des zéros dans* $D^-(0,R)$ *si et seulement s'il existe un entier* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $|a_q|\, R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, R^n$*. De plus, si* $t \in \mathbb{N}$ *est le plus petit de tous les entiers* q *tel que* $|a_q|\, R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, R^n$*, alors,* f *a exactement* t *zéros dans le disque* $D^-(0,R)$*.*

Chapitre 2

La théorie de distribution des valeurs (la théorie de Nevanlinna ultramétrique)

Sommaire

La théorie de Nevanlinna joue un rôle crucial dans les domaines: l'analyse complexe et l'analyse ultramétrique, en particulier dans les problèmes de distribution de valeurs. Dans ce chapitre, on va décrire les définitions basiques de la théorie de Nevanlinna dans un corps commutatif ultramétrique, complet et algébriquement clos $\mathbb{K}$ et on va présenter les deux fameux théorèmes de cette théorie (le premier et le deuxième théorème). Ensuite, nous énonçons l'analogue du théorème classique de Valiron-Mokhon'ko. On termine ce chapitre par la définition d'ordre de croissance d'une fonction méromorphe et ses propriétés qui sont semblables à celle connue dans l'analyse complexe.

2.1 Formule de Jensen

Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ et α un zéro ou un pôle de f. On note $\omega_\alpha(f)$ $\big(\omega_\alpha(f) \in \mathbb{N}\big)$ l'ordre de α, c'est-à-dire $f(x) = \sum\limits_{n \geq n_\alpha} a_n(x-\alpha)^n$ et $a_{n_\alpha} \neq 0$, alors $\omega_\alpha(f) = n_\alpha$.

Le théorème suivant illustre la version ultramétrique de la formule de Jensen qui est la naissance de la théorie de Nevanlinna et qu'on utilisera dans notre travail

Théorème 2.1.1. *[42, Formule (1.8), P. 21] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

$$\log(|f|(r)) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} \Big(\omega_\alpha(f) - \omega_\alpha\Big(\frac{1}{f}\Big)\Big) \log\frac{r}{|\alpha|}. \tag{2.1}$$

Pour plus de détails concernant la preuve de ce théorème, voir [42, page 21].

2.2 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R)))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0 et $r \in]\,0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$). La fonction

$$Z(r,f) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \omega_\alpha(f) > 0}} \omega_\alpha(f)(\log r - \log|\alpha|),$$

est dite la fonction de comptage des zéros de f dans $D^-(0,r)$, comptés avec leurs multiplicités. De même, la fonction

$$\bar{Z}(r,f) = \sum_{|\alpha| \leq r} (\log r - \log|\alpha|),$$

est dite la fonction de comptage des zéros de f sans prendre en compte les multiplicités. Aussi, la fonction

$$N(r,f) = -\sum_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \omega_\alpha(f) < 0}} \omega_\alpha(f)(\log r - \log|\alpha|) = Z\Big(r, \frac{1}{f}\Big) \text{ et } \bar{N}(r,f) = \bar{Z}\Big(r, \frac{1}{f}\Big),$$

est dite la fonction de comptage des pôles de f dans $D^-(0,r)$, comptés avec leurs multiplicités, où $\bar{N}(r,f)$ la fonction de comptage des pôles de f dans le disque $D^-(0,r)$ sans prendre en compte les multiplicités.

Finalement, pour $x > 0$, on pose $\log^+ x = \max(0, \log x)$, où log est la fonction logarithmique réelle. Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$m(r, f) = \log^+ |f|(r) = \max\{\log |f|(r), 0\}.$$

La fonction $m(r, .)$ est appelée fonction de compensation et donc, on peut définit la fonction de Nevanlinna (appelé aussi la fonction caractéristique) de f par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Remarques. *1. Les fonctions $Z(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$ sont positives.*
2. Supposons que f est une fonction méromorphe admet un zéro ou un pôle à l'origine, nous pouvons faire un changement d'origine pour redéfinir les fonctions $Z(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$.

Grâce à les définitions de $N(r, f)$, $Z(r, f)$ et $m(r, f)$, on peut reformuler la formule de Jensen à une forme plus élaborée, simple et utilisée que la formule (2.1)

Théorème 2.2.1. *[42, Formule (2.1), P. 33] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors,*

$$\log |f|(r) = Z(r, f) - N(r, f) + \log(|f(0)|), \ \textit{pour tout } r > 0 \ \big(\textit{resp. } r \in]0, R[\big). \tag{2.2}$$

Le théorème suivant présente une autre version de la fonction caractéristique de f.

Théorème 2.2.2. *[19, Introduction] Supposons que f est une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$, n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$T(r, f) = \max\Big\{N(r, f), N\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + O(1)\Big\}.$$

Preuve. D'après la formule (2.2), on a

$$\log |f|(r) = Z(r, f) - N(r, f) + \log |f(0)|.$$

Ce qui implique

$$\log |f|(r) + N(r, f) = Z(r, f) + \log |f(0)|. \tag{2.3}$$

En introduisant la fonction max dans les deux côtés de l'équation (2.3), on trouve

$$\max\{\log|f|(r) + N(r,f), N(r,f)\} = \max\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\}.$$

Alors,

$$N(r,f)+\max\{\log|f|(r)+N(r,f)-N(r,f), N(r,f)-N(r,f)\} = \max\{Z(r,f)+\log|f(0)|, N(r,f)\}$$

D'où,

$$N(r,f) + \max\{\log|f|(r), 0\} = \max\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\},$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} T(r,f) &= \max\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\} \\ &= \max\Big\{N(r,f), N\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + O(1)\Big\}. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.2.2 est complètement démontrer. $\square$

Remarque. *A. Escassut et autres ont considéré que* $T(r,f) = \max\{Z(r,f), N(r,f)\}$ *ou* $T(r,f) = \max\{Z(r,f), N(r,f)\} + O(1)$. *Ces deux définitions sont équivalentes aux définitions de la fonction caractéristique de Nevanlinna précédentes.*

Les notations suivantes sont nécessaires pour le reste de notre travail

Notation. *Soient* g, h *deux fonctions réelles définies sur l'intervalle* $I =]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $I =]0, R[\big)$ *et soit* $r \in I$ *tel que* h *ne s'annule pas pour* r *assez grand* $\big($*resp.* r *assez proche de* $R\big)$.

1. *S'il existe* $M > 0$ *tel que* $\left|\dfrac{g(r)}{h(r)}\right| \leq M$, *alors* $g(r) = O(h(r))$, *(c'est à dire* g *est dominée par* h*).*
2. *Si* $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{g(r)}{h(r)} = 0$ $\Big($*resp.* $\lim\limits_{r\to R} \dfrac{g(r)}{h(r)} = 0\Big)$, *alors* $g(r) = o(h(r))$, *(c'est à dire* g *est négligeable devant* h*).*

Grâce à la définition de la fonction caractéristique $T(r,.)$, on obtient les corollaires suivants: le premier corollaire représente la fonction de Nevanlinna d'une fonction entière et le deuxième précise la relation entre la fonction de Nevanlinna d'une fonction méromorphe et la fonction de Nevanlinna de son inverse.

Corollaire 2.2.3. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *tel que* $f(0) \neq 0$. *Alors, pour tout* $r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *on a*

$$T(r,f) = Z(r,f) + O(1). \tag{2.4}$$

Corollaire 2.2.4. *[15, Formule (1.5), P. 253] Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *n'a ni zéro ni pôle en* 0. *Alors, pour tout* $r > 0$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *on a*

$$T\Big(r,\frac{1}{f}\Big) = T(r,f) + O(1).$$

Preuve. Supposons que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors, on a $T(r,\frac{1}{f}) = m(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f})$ et $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$. Donc, d'après la formule de Jensen (2.2), on a

$$\log|f|(r) = Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)|.$$

Puisque $\log|f|(r) = \log^+|f|(r) - \log^+|\frac{1}{f}|(r) = m(r,f) - m(r,\frac{1}{f})$, alors

$$\log|f(0)| = m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) - Z(r,f) + N(r,f).$$

et par conséquent

$$T\Big(r,\frac{1}{f}\Big) = T(r,f) - \log|f(0)|.$$

Donc, le corollaire 2.2.4 est complètement démontré. $\square$

Maintenant, nous allons introduire quelques propriétés des fonctions $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $m(r,f)$

Proposition 2.2.5. *[42, Proposition 2.1] Soient* $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f,g \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *et n'ayant ni zéro ni pôle en* 0. *Alors, pour* $r > 0$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *on a*

i) $N(r,f+g) \leq N(r,f) + N(r,g)$,

ii) $N(r,fg) \leq N(r,f) + N(r,g)$.

Preuve. On sait que l'ordre de multiplicité de pôles de $f+g$ ou fg au point x est au plus égal à la somme d'ordre de multiplicité de pôles de f et g au point x, alors

$$Z\Big(r,\frac{1}{f+g}\Big) \leq Z\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + Z\Big(r,\frac{1}{g}\Big) \text{ et } Z\Big(r,\frac{1}{fg}\Big) \leq Z\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + Z\Big(r,\frac{1}{g}\Big),$$

et par conséquent,

$$N(r, f+g) \leq N(r, f) + N(r, g) \;\; et \;\; N(r, fg) \leq N(r, f) + N(r, g).$$

$\square$

Proposition 2.2.6. *[42, Proposition 2.2] Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^{-}(0, R))\big)$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $r > 0$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

1. $m(r, f+g) \leq \max\big\{m(r, f), m(r, g)\big\}$;
2. $m(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g)$;
3. $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0$;
4. $m(r, f-a) = m(r, f) + O(1)$;
5. $m(r, af) = m(r, f) + O(1)$.

Preuve. Comme $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique, alors, elle satisfait l'inégalité triangulaire forte et grâce à la croissance de la fonction logarithmique, on conclut sans difficulté les relations 1, 2 et 5.
3) D'après le Théorème 1.4.25, on a $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$. Alors, pour $r \geq 1$ (resp. $r \in]1, R[$), on a $\log \dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq -\log r \leq 0$ et par conséquent, $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0$.
4) Supposons que $|f|(r) > |a|$, et pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a

$$|f-a|(r) = \max\{|f|(r), |a|\} = |f|(r),$$

donc, $m(r, f-a) = m(r, f)$.
D'autre part, si $|f|(r) \leq |a|$, on a $|f-a|(r) \leq |a|$, alors

$$|m(r, f-a) - m(r, f)| \leq \max\{m(r, f-a), m(r, f)\} \leq \log^{+}|a|,$$

ce qui implique que $m(r, f-a) = m(r, f) + O(1)$. Donc, la Proposition 2.2.6 est complètement démontrée. $\square$

Dans la proposition suivante, on donne des propriétés de la fonction $T(r, .)$ utiles dans la démonstration du premier théorème principal de Nevanlinna

Proposition 2.2.7. *[15, 26, Proposition I2, Théorème 5] Soient $a \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $a \in D^-(0,R)\big)$ et f, g deux fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^-(0,R)\big)$, non identiquement nulles et n'ayant ni zéro ni pôle en 0 tel que $f(0) \neq a$. Alors, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

1) $T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g)$;
2) $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g)$;
3) *Si* $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, *on a* $T(r, f+g) \leq \max\{T(r,f), T(r,g)\}$;
4) $T(r, af) = T(r, f) + O(1)$;
5) $T(r, f-a) = T(r, f) + O(1)$.

Preuve. À partir de la définition de la fonction caractéristique de Nevanlinna, on a $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$ et $T(r,g) = m(r,g) + N(r,g)$. D'autre part, on a

$$T(r,f+g) = m(r,f+g)+N(r,f+g) \leq m(r,f)+N(r,f)+m(r,g)+N(r,g) = T(r,f)+T(r,g).$$

D'une façon équivalente, on trouve façilement que $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g)$. Donc, les inégalités 1) et 2) sont démontrées.
3) Comme $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, alors $N(r,f) = N(r,g) = 0$, ce qui implique que $T(r,f) = m(r,f)$ et $T(r,g) = m(r,g)$.
Donc,

$$\begin{aligned} T(r, f+g) &= N(r, f+g) + m(r, f+g) \\ &\leq N(r,f) + N(r,g) + \max\{m(r,f), m(r,g)\} \\ &\leq \max\{m(r,f), m(r,g)\} \\ &\leq \max\{T(r,f), T(r,g)\} \qquad . \end{aligned}$$

Pour montrer les égalités 4) et 5), en utilisant le fait que le nombre des pôles de af, $f-a$ et f sont égaux, c'est à dire $N(r, af) = N(r, f-a) = N(r, f)$.
Aussi, on a d'après la Proposition 2.2.6, $m(r, af) = m(r,f) + O(1)$ et $m(r, f-a) = m(r,f) + O(1)$. Donc,

$$T(r, af) = T(r, f) + O(1) \text{ et } T(r, f-a) = T(r, f) + O(1).$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Remarques. *1. La plupart des propriétés de la fonction de Nevanlinna d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ et dans le domaine des nombres complexes $\mathbb{C}$ sont semblables.*
2. La propriété 3) est spécifique d'un corps ultramétrique.

À partir des propriétés de $T(r, .)$, on a

Proposition 2.2.8. *[15, Proposition I.4] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ telle que f n'a ni zéro ni pôle en zéro. Nous avons les équivalences suivantes:*

1. *f est une constante si et seulement si $T(r, f) = o(\log r)$, $r \to +\infty$,*
2. *f est non constante si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que*

$$T(r, f) \geq \log r + c, \text{ pour } r > A.$$

La proposition suivante précise la relation entre les fonctions méromorphes et leurs dérivées.

Proposition 2.2.9. *[15, Proposition I.5] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, R))\big)$ telle que pour tout entier n, $f^{(n)}$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

1. $N(r, f^{(n)}) = N(r, f) + n\bar{N}(r, f)$,
2. $Z(r, f^{(n)}) \leq Z(r, f) + n\bar{N}(r, f) - \log r + O(1)$,
3. $T(r, f^{(n)}) \leq T(r, f) + n\bar{N}(r, f) \leq (n + 1)T(r, f)$.

Corollaire 2.2.10. *Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^{-}(0, R))\big)$ et $n \in \mathbb{N}$ telles que $f^{(n)}$ n'a pas de zéro en 0. Alors, on a*

$$T\left(r, f^{(n)}\right) \leq T(r, f) + O(1), \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Pour plus de détails concernant les preuves de la Proposition 2.2.8 et de la Proposition 2.2.9, voir [15, page 254-255, 256-257].

2.3 Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna

Le théorème suivant est le premier théorème principal de Nevanlinna qui est un analogue du Théorème 1.2 [35] sur $\mathbb{C}$.

Théorème 2.3.1. *[42, Théorème 2.13] Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante et $a \in \mathbb{K}$ tels que f n'a ni zéro ni pôle en zéro et $f(0) \neq 0$. Alors, pour $r > 0$, on a*

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = T(r, f) + O(1).$$

Preuve. La preuve découle directement de la propriété 2) de la Proposition 2.2.7 et du Corollaire 2.2.4, (pour plus de détails, voir [42, pages 42–43]). □

2.4 Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna

Comme on a déjà vu, les deux théorèmes fondamentaux de Nevanlinna jouent un rôle majeur dans la distribution des valeurs que ce soit dans le domaine des nombres complexes ou dans un corps ultramétrique. Mais, on peut dire que l'importance du premier théorème est très peu par rapport à le second théorème.

On appelle le deuxième théorème principal de Nevanlinna le Théorème 2.4.1 qui est un analogue du Théorème 2.15 [42] sur $\mathbb{C}$. Concernant la preuve du ce théorème, voir [42, pages 44-46].

Théorème 2.4.1. *[42, Théorème 2.15] Soient $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$ où $q \geq 2$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non constante telle que f n'ayant ni zéro ni pôle en 0, f' et $f - a_i$ ne sont pas nulles en 0. Alors, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$(q-1)T(r,f) \leq \bar{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'} : f(x) \neq a_i \,\forall i = 1, \dots, q\right) - \log r + O(1).$$

2.5 Le comportement asymptotique des fonctions méromorphes

Dans cette section, nous abordons d'abord quelques propriétés de la théorie de Nevanlinna liées aux fonctions méromorphes. On termine cette section par le théorème de Valiron-Mokhonko.

Lemme 2.5.1. *[19, Lemme 2.4] Soient $f \in \mathcal{M}\left(D^-(0,R)\right)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $h, l \in \mathcal{A}\left(D^-(0,R)\right)$ telles que $f = h/l$, et $Z(r,h) \leq Z(r,f) + \varepsilon$, $Z(r,l) \leq N(r,f) + \varepsilon$ $\forall r \in]0, R[$.*

Corollaire 2.5.2. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0,R))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0. *Alors, il existe* $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $h, l \in \mathcal{A}(D^{-}(0,R))\big)$ *telles que* $f = h/l$, *satisfait*

$$T(r,f) + O(1) \geq \max\big\{T(r,h), T(r,l)\big\}.$$

Preuve. Supposons que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, alors il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telles que $f = h/l$. Alors, pour tout $r > 0$, on a $Z(r,h) = Z(r,f) + O(1)$ et $Z(r,l) = N(r,f) + O(1)$. Par conséquent, pour tout $r > 0$, on a

$$\max\{Z(r,h), Z(r,l)\} \leq \max\{Z(r,f), N(r,f)\} + O(1).$$

Par ailleurs, si $f \in \mathcal{M}\left(D^{-}\left(0,R\right)\right)$, en utilisant le Lemme 2.5.1, on a pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $h, l \in \mathcal{A}\left(D^{-}\left(0,R\right)\right)$ telles que $f = h/l$ et pour tout $r \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{cases} Z(r,h) \leq Z(r,f) + \varepsilon, \\ Z(r,l) \leq N(r,f) + \varepsilon. \end{cases}$$

Il s'ensuit que,

$$\max\{Z(r,h), Z(r,l)\} \leq \max\{Z(r,f), N(r,f)\} + \epsilon, \quad \forall r \in]0, R[.$$

Sachant que, $\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a

$$T(r,f) + O(1) \geq \max\{Z(r,f), N(r,f)\},$$

ce qui implique que,

$$T(r,f) + O(1) \geq \max\{Z(r,h), N(r,l)\}.$$

En vertu du Corollaire 2.2.3, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a

$$\begin{cases} Z(r,h) = T(r,h) + O(1), \\ Z(r,l) = T(r,l) + O(1). \end{cases}$$

Donc,

$$T(r,f) + O(1) \geq \max\{T(r,h), T(r,l)\}.$$

Ceci achève la preuve. □

Définition 2.5.3. *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, *sans zéros communs, le nombre* $\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ *est appelé le degré de la fonction rationnelle* $R(x)$ *telle que* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Dans la suite, on va donner une estimation de la fonction caractéristique de Nevanlinna d'une fonction rationnelle.

On estime $T(r, R(x))$ telle que R une fonction rationnelle où $R(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, $A(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j (a_k \neq 0)$, et $B(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j (b_q \neq 0)$. Soient $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ les ensembles des zéros de A et B respectivement avec $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \ldots, \omega_{\alpha_n}$ et $\omega_{\beta 1}, \omega_{\beta 2}, \ldots, \omega_{\beta m}$ leurs ordres de multiplicités respectivement.

D'abord, on va donner une estimation de $T(r, A)$ et $T(r, B)$.

Supposons que $\alpha = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$, $r \geq \alpha$ et $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq m} |\beta_i|$, $r \geq \beta$. Alors,

$$\begin{aligned}
N\Big(r, \frac{1}{A}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} (\log r - \log |\alpha_i|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} (\log r - \log \gamma) + \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} (\log \gamma - \log |\alpha_i|) \\
&= \log r \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} \Big(\log \frac{\gamma}{|\alpha_i|} - \log \gamma \Big).
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{K}$ est un corps ultramétrique complet et algébriquement clos, on a $\sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} = \deg(A)$.

D'où,

$$T(r, A) = \deg(A) \log r + O(1).$$

D'une façon analogue, on obtient

$$T(r, B) = \deg(B) \log r + O(1).$$

Donc, pour tout $r > \max\{\alpha, \beta\}$, on a

$$T(r, R) = \deg R \log r + O(1),$$

où $\deg R = \max\{k, q\}$.

Donc, on a la conclusion suivante:

Pour toute fonction rationnelle, on a $T(r, f) = O(\log r)$. Inversement, si une fonction méromorphe f sur $\mathbb{K}$ satisfait

$$T(r, f) = O(\log r) \ (r \to +\infty),$$

alors, f est une fonction rationnelle.
Autrement dit, f est une fonction rationnelle si et seulement si $T(r, f) = O(\log r)$.

De tout ce qui précède, on trouve les corollaires suivants:

Corollaire 2.5.4. *[42, Corollaire 2.46] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$, on dit que f est une fonction rationnelle de degré d si et seulement si $\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = d$.*

Preuve. Soit f une fonction rationnelle de degré d. Alors, pour tout r assez grand, on a

$$T(r, f) = d \log r + O(1).$$

Donc, on trouve façilement que $\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = d$. □

Corollaire 2.5.5. *[42, Corollaire 2.7] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ qui n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors, f est transcendante si et seulement si $\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty$.*

Preuve. Soit f une fonction méromorphe transcendante. En conséquence, f possède soit une infinité des zéros, soit une infinité des pôles, et on a donc, pour tout $\lambda > 0$

$$T(r, f) > \lambda \log r, \quad \forall r > 0.$$

Ce qui implique que $\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty$. □

Maintenant, nous énonçons un théorème qui représente l'estimation de la fonction caractéristique de la fonction suivante

$$A \circ f(x) = A(x, f(x)) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x) f(x)^j,$$

où f, $a_j \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $(j = 0, 1, \ldots, k)$ tels que $a_k \neq 0$.

Théorème 2.5.6. *[42, Théorème 2.11] Soit f est une fonction méromorphe non constante, alors*

$$T(r, A \circ f) = kT(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{k} T(r, a_j)\right). \tag{2.5}$$

Ensuite, on passe au cas plus général, le théorème suivant décrire l'estimation d'une fonction rationnelle avec plusieurs variables $R \circ f(x) = R(x, f(x)) = \frac{A(x, f(x))}{B(x, f(x))}$, telle que

$B(x, f(x)) = \sum_{j=0}^{q} b_j(x) f(x)^j$, où $b_0, \ldots, b_q$ sont des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ avec $b_q \neq 0$ et $B(x, f(x))$ et $A(x, f)$ sont des polynômes premiers entre eux en f.

Notons que ce théorème est dù à Gackstatter et Laine dans [32], et Mokhon'ko dans [56] pour les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Théorème 2.5.7. *[42, Théorème 2.12] Soit f une fonction méromorphe non constante, alors*

$$T(r, R \circ f) = \max\{k, q\} T(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{k} T(r, a_j) + \sum_{j=0}^{q} T(r, b_j) \right). \tag{2.6}$$

Dans un corps ultramétrique, le théorème suivant (démontré par A. Boutabaa, voir [15]) est l'analogue du théorème de Valiron-Mokhon'ko dans le domaine des nombres complexes

Théorème 2.5.8. *[15, Théorème II.1] Soient f une fonction méromorphe et $R(x, f(x))$ une fonction rationnelle irréductible en f telle que*

$$R\big(x, f(x)\big) = \frac{P\big(x, f(x)\big)}{Q\big(x, f(x)\big)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i(x) f(x)^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j(x) f(x)^j},$$

où les coefficients $a_i(x)$ et $b_j(x)$ sont des fonctions rationnelles, alors la fonction caractéristique de $R(x, f)$ satisfait

$$T\big(r, R(x, f)\big) = \max\{p, q\} T(r, f) + O(\log r). \tag{2.7}$$

Ce théorème joue un rôle majeur et sera très utilisé tout au long du dernier chapitre.

2.6 L'ordre de croissance d'une fonction méromorphe et ses propriétés

La définition de l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ est semblable à celle connue dans $\mathbb{C}$ (voir [68]).

Notons que la définition de l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe dans un corps ultramétrique $\mathbb{K}$ a été définie par K. Boussaf, A. Boutabaa et A. Escassut dans [14].

Définition 2.6.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, la limite supérieure*

$$\rho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \tag{2.8}$$

est appelée l'ordre de croissance de f ou l'ordre de f.

Dans le cas particulier où f est une fonction entière dans $\mathbb{K}$, l'ordre de croissance est également défini par la relation équivalente

$$\rho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log(\log |f|(r))}{\log r}. \tag{2.9}$$

Théorème 2.6.2. *[14, Théorème 1] Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Alors, si $c(|f|(r))^{\alpha} \geq |g|(r)$ avec α et $c > 0$, pour r assez grand, on a*

1. $\rho(f) \geq \rho(g)$;
2. $\rho(f+g) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$;
3. $\rho(fg) = \max(\rho(f), \rho(g))$.

Remarques. *1. Les propriétés de l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ sont semblables à celles qui sont dans le domaine des nombres complexes, sauf la propriété 3) dans le cas complexe, on a $\rho(fg) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$.*

2. Si $\rho(f) < +\infty$, alors f est d'ordre fini.

3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\rho(P) = 0$ (c'est valide aussi dans $\mathbb{C}$).

4. On peut facilement construire des fonctions entières transcendantes d'ordre 0 ou d'ordre ∞.

Chapitre 3

Étude du comportement des solutions méromorphes de certains équations fonctionnelles dans un corps ultramétrique

Sommaire

Au cours des deux dernières décennies, l'existence et la croissance des solutions méromorphes des équations aux différences et q-différences ont été introduites et étudiées dans $\mathbb{C}$ par G. G. Gundersen, G. Zhang, B. Sheng Li, C. W. Peng, Z. X. Chen et autres (voir

[1, 3, 5, 7, 8, 11, 34, 38, 39, 50, 75, 77]). Notre objectif dans ce chapitre est d'étendre et de généraliser cette étude au cas des équations fonctionnelles dans un corps commutatif, ultramétrique complet et algébriquement clos $\mathbb{K}$. Précisément, on s'intéresse à l'étude du comportement des solutions méromorphes des équations aux différences de type Malmquist ainsi que Painlevé et les équations q-différences de type Schröder et Painlevé. De plus, on va préciser l'existence des solutions de ces équations et donner la relation entre l'ordre de croissance et le degré des équations, on va donner également la relation entre les coefficients des équations et leurs degrés.

Tout au long de ce qui reste dans cette thèse, on note $\mathbb{K}$ un corps ultramétrique complet et algébriquement clos, $R(x, f(x)) = \dfrac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))}$ est une fonction rationnelle irréductible, $p = \deg P, t = \deg Q$, $d = \max\{p, t\}$ et $[s]$ désigne la partie entière du nombre réel s.

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans les revues de classe B: Lobachevskii Journal of Mathematics [9] et p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications [10]

3.1 Lemmes préliminaires

On aura besoin des lemmes suivants pour la démonstration de nos théorèmes

Lemme 3.1.1. *[11, Lemme 4.1] Pour tout $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, chaque $r > 0$ et chaque $n \in \mathbb{N}$, on a*

1. $|f(q^n x)|(r) = |f|(|q|^n r)$;
2. $m(r, f(q^n x)) = m(|q|^n r, f)$;
3. $N(r, f(q^n x)) = N(|q|^n r, f)$;
4. $T(r, f(q^n x)) = T(|q|^n r, f)$.

Lemme 3.1.2. *[69, Lemme 3.2] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. *f est un polynôme,*
2. *il existe $c > 0$ et $s \geq 0$ tels que $|f|(r) \leq cr^s$, pour r assez grand.*

On note par σ la fonction définit par $\sigma(x) = x + c$ pour chaque $x, c \in \mathbb{K}$. Pour chaque $k \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, on obtient $\sigma^k = \sigma \circ \cdots \circ \sigma$. Alors, on a le lemme suivant

Lemme 3.1.3. *[11, Lemme 5.2] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ et $r > 1$. pour chaque $k \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, on a*

1. $|f \circ \sigma^k|(r) = |f|(r)$;
2. $m(r, f \circ \sigma^k) = m(r, f)$;
3. $N(r, f \circ \sigma^k) = N(r, f) + O(1)$;
4. $T(r, f \circ \sigma^k) = T(r, f) + O(1)$.

3.2 Études des propriétés des solutions méromorphes des équations aux différences

Dans le domaine des nombres complexes, il y a beaucoup d'articles qui sont concentrés sur les équations aux différences et contiennent des résultats très importants dans ce domaine (par exemple, voir [1], [38], [63], ...). Dans cette section, on commence par l'étude de l'équation célèbre de Painlevé et nous donnons quelques résultats sur l'estimation de la croissance des solutions méromorphes de cette équation dans $\mathbb{K}$ et nous faisons également une étude similaire de l'équation aux différence de type Malmquist.

3.2.1 Équation aux différence de type Painlevé

L'équation de Painlevé a été introduite par le mathématicien français Paul Painlevé en 1900 (voir [61]), sous la forme suivante

$$y'' = R(x, y, y'),$$

où R est rationnel en y', et algébrique en y, x.
Dans le domaine des nombres complexes $\mathbb{C}$, il y a différents résultats concernant les équations aux différences de type Painlevé réalisés par plusieurs mathématiciens (voir par exemple [38], [43], [63], ...). Prenons un exemple: C. W. Peng et Z. X. Chen ont considéré une équation aux différence de type Painlevé sous la forme

$$\big(f(x) + f(x+1)\big)\big(f(x-1) + f(x)\big) = R(x, f(x)), \tag{3.1}$$

et ont démontré de nombreux résultats sur la croissance de ces solutions méromorphes (voir [63, Théorème 1.1], [63, Théorème 1.2], ...).

Tout au long de cette section, notons $R(x, f(x)) = \dfrac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))} = \dfrac{\sum_{j=0}^{p} a_j(x) f(x)^j}{\sum_{j=0}^{t} b_j(x) f(x)^j}$ où $a_j(x), b_j(x)$ sont des fonctions rationnelles telles que $a_p(x) b_t(x) \neq 0$.

Dans cette partie, on va généraliser et étendre l'étude de l'équation (3.1) au cas d'équation aux différence ultramétrique et nous obtenons le résultat suivant

Théorème 3.2.1. *Si l'équation (3.1) admet une solution méromorphe transcendante d'ordre fini, alors $d \leq 4$.*

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.1) et $d > 4$. En prenant la fonction caractéristique de Nevanlinna des deux côtés de l'équation (3.1) et en utilisant le Théorème 2.5.8, on obtient

$$dT(r, f) + O(\log r) \leq 4T(r, f) + O(1).$$

Alors, on trouve

$$T(r + 1, f) \geq (d/4)T(r, f) + O(\log r).$$

De la même manière, on a

$$T(r + 2, f) \geq (d/4)^2 T(r, f) + (d/4)O(\log r) + O(\log(r + 1)).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on obtient

$$T(r + k, f) \geq (d/4)^k T(r, f) + \mu(r), \tag{3.2}$$

où $\mu(r) = O(\phi(r))$ et $\phi(r) = \log(r + k - 1) + (d/4)\log(r + k - 2) + \cdots + (d/4)^{k-1} \log r$.
Pour r suffisamment grand, on a $\log(r + i) \leq \log r + \log i$. Alors, on trouve

$$\begin{aligned}\phi(r) = (d/4)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \log(r + i)/(d/4)^i &\leq (d/4)^{k-1} \log r \sum_{i=0}^{k-1} \log i/(d/4)^i \\ &\leq (d/4)^{k-1} \log r \sum_{i=0}^{+\infty} \log i/(d/4)^i.\end{aligned}$$

De cela, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \log i/(d/4)^i$ est convergente quand $d > 4$.
Par conséquent,

$$|\mu(r)| < C(d/4)^k \log r, \tag{3.3}$$

où C est une constante positive. Puisque f est une solution méromorphe transcendante, pour chaque r suffisamment grand, on a

$$T(r,f) > 2C\log r. \tag{3.4}$$

Donc, De (3.2), (3.3) et (3.4), il existe un entier $q' > 0$ tel que pour tout $r > q'$, on a

$$T(r+k,f) \geq C(d/4)^k \log(q'), \tag{3.5}$$

tel que $\log(\log(q')) > 0$.
Soit $k(\xi) = [\xi] - q'$ avec $\xi > q'$, ce qui implique que $\xi = k(\xi) + u$.
Alors, $u \geq q'$. Donc, de (3.5), on a

$$T(\xi,f) = T(u+k(\xi),f) \geq C\big(\frac{d}{4}\big)^{k(\xi)}\log(u).$$

Il s'ensuit que,

$$\frac{\log(T(\xi,f))}{\log(\xi)} \geq \frac{k(\xi)\log\Big(C\big(\frac{d}{4}\big)\Big)}{\log(\xi)} + \frac{\log(\log(u))}{\log(\xi)}.$$

Puisque $u \geq q'$, il est évident que $\log(\log(u)) > 0$, ainsi

$$\frac{\log(T(\xi,f))}{\log(\xi)} \geq \frac{k(\xi)\log\Big(C\big(\frac{d}{4}\big)\Big)}{\log(\xi)}.$$

Aussi, on a $k(\xi) \geq \xi - 1 - q'$, donc

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{k(\xi)}{\log(\xi)} = +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\log(T(\xi,f))}{\log(\xi)} = +\infty.$$

□

3.2.2 Équation aux différence de type Malmquist

Les équations aux différences de type Malmquist ont été étudiées dans de nombreux articles dans le cas des nombres complexes (pour plus de détails, voir par exemple [1], [38],...).

Récemment, S. Bouternikh et T. Zerzaihi ont fait dans $\mathbb{K}$ une étude analogue à celle dans $\mathbb{C}$ sur les équations aux différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} A_i(x)f(x+c_i) = R(x, f(x)), \tag{3.6}$$

et

$$\prod_{i=0}^{n} A_i(x)f(x+c_i) = R(x, f(x)), \tag{3.7}$$

où $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des constants, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}/\{0\}$. Ils ont obtenu des résultats très importants (voir par exemple [20, Théorème 3]).

Maintenant, nous étudions les équations (3.6) et (3.7) au cas plus général où les coefficients sont des fonctions rationnelles et nous obtenons les résultats suivants

Théorème 3.2.2. *Si l'équation* (3.6) *admet une solution méromorphe transcendante d'ordre fini, alors $d \leq n$.*

Preuve. Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.6) et $d > n$. La fonction caractéristique de Nevanlinna donne,

$$T(r, f(x+c_i)) \leq (1+\epsilon)T(r+1, f) + O(1),$$

et ϵ est une constante positive. Puisque $A_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ sont des fonctions rationnelles, on a

$$T(r, R(x, f(x))) = T(r, \sum_{i=1}^{n} A_i(x)f(x+c_i)) \leq nT(r+1, f) + O(\log r). \tag{3.8}$$

D'autre part, d'après le Théorème 2.5.8, on a

$$T(r, R(x, f(x))) = dT(r, f(x)) + O(\log r). \tag{3.9}$$

Les relations (3.8) et (3.9) assurent que

$$T(r+1, f) \geq \beta T(r, f) + O(\log r), \tag{3.10}$$

où $\beta = \dfrac{d}{n(1+\epsilon)}$. Par l'itération de (3.10), on a

$$T(r+k, f) \geq \beta^k T(r, f) + g(r), \tag{3.11}$$

où $g(r) = O(h(r))$ et $h(r) = \beta^{k-1}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\dfrac{\log(r+i)}{\beta^i}$. De plus, on a

$$h(r) = \beta^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\log(r+i)}{\beta^i} \leq \beta^{k-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\log(r+i)}{\beta^i}, \tag{3.12}$$

puisque $\beta > 1$, en utilisant $\log(r+i) \leq \log r \log i$, pour tout r, i suffisamment grand et par (3.12), la série $\beta^{k-1}\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\dfrac{\log(r+i)}{\beta^i}$ est convergente. Alors, on a

$$|g(r)| \leq C\beta^k \log r, \tag{3.13}$$

où C est une constante positive. Comme f est une fonction méromorphe transcendante, alors pour tout r assez grand, on a

$$T(r,f) > 2C\log r. \tag{3.14}$$

Donc, de (3.11), (3.13) et (3.14), il existe un entier $q'' > 0$ tel que pour tout $r > q''$, on a

$$T(r+k,f) \geq C\beta^k \log(q''), \tag{3.15}$$

tel que $\log(\log(q'')) > 0$.
Soit $k(\xi) = [\xi] - q''$ avec $\xi > q''$, ce qui implique que $\xi = k(\xi) + v$.
Alors, $v \geq q''$. Donc, de (3.15), on a

$$T(\xi,f) = T(v+k(\xi),f) \geq C\beta^{k(\xi)}\log(v).$$

Il s'ensuit que,

$$\frac{\log(T(\xi,f))}{\log(\xi)} \geq \frac{k(\xi)\log(C\beta)}{\log(\xi)} + \frac{\log(\log(v))}{\log(\xi)}.$$

Puisque $v \geq q''$, il est évident que $\log(\log(v)) > 0$, ainsi

$$\frac{\log(T(\xi,f))}{\log(\xi)} \geq \frac{k(\xi)\log(C\beta)}{\log(\xi)}.$$

Aussi, on a $k(\xi) \geq \xi - 1 - q''$, donc

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{k(\xi)}{\log(\xi)} = +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\log(T(\xi,f))}{\log(\xi)} = +\infty.$$

$\square$

Théorème 3.2.3. *Si l'équation (3.7) admet une solution méromorphe transcendante d'ordre fini, alors $d \leq n$.*

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, nous utilisons l'identité

$$T(r, \prod_{i=0}^{n} A_i(x) f(x + c_i)) \leq \sum_{i=0}^{n} T(r, A_i(x) f(x + c_i)),$$

et on procède comme dans la preuve du théorème ci-dessus. $\square$

3.3 Estimation de la croissance des solutions méromorphes des équations aux q-différences

Récemment, dans le domaine des nombres complexes, plusieurs auteurs ont étudié les propriétés de l'ordre de croissance des solutions méromorphes des équations q-différences et ont obtenu beaucoup des résultats quand les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes (pour plus de détails concernant les équations q-différences, voir [22, 34, 57, 62]) et aussi il existe de nombreux articles sur la croissance des solutions méromorphes des équations q-différences dans $\mathbb{K}$ (voir par exemple [8], [11]). Cette section, examine quelques types d'équations aux q-différences ainsi que l'existence et l'ordre de croissance de leurs solutions méromorphes dans $\mathbb{K}$ et établit quelques caractéristiques de ces solutions.

Au début de cette section, on s'intéresse à l'étude de l'équation q-différence de la forme

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x) f(q^j x) = A_{n+1}(x), \tag{3.16}$$

où $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des polynômes et $q \in \mathbb{K}$.
Cette équation a été étudiée par B. Q. Chen et al. dans le cas des nombres complexes (voir [22]). Ils ont obtenu les résultats suivants

Théorème 3.3.1. *[22, Théorème 4] Supposons que $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n+1}(x)$ sont des polynômes et $q \in \mathbb{C}$ est une constante avec $|q| = 1$. Si l'équation (3.16) possède une solution entière non constante $f(x)$, alors*

1. *Si $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n+1}(x)$ sont des constantes avec $A_0 A_n \neq 0$, alors chaque $s \in \{0, \ldots, n\}$ satisfait*

$$|A_s| \leq \max_{j \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{s\}} \{|A_j|\}.$$

2. *Si $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n+1}(x)$ ne sont pas toutes des constantes avec $A_0(x)A_n(x) \neq 0$ et $f(x)$ est un polynôme, alors il existe des $s \in \{0, \ldots, n\}$, tels que*

$$\deg A_s \geq \deg A_{n+1} - \deg f.$$

3. *Si $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n+1}(x)$ ne sont pas toutes des constantes et $f(x)$ est une fonction entière transcendante, alors il existe au moins deux nombres $s, l \in \{0, \ldots, n\}$, tels que*

$$\deg A_s = \deg A_l = \max_{j \in \{0,\ldots,n\}} \{\deg A_j\}.$$

Nous nous intéressons à l'étude de l'équation (3.16) dans le cas ultramétrique. D'abord, on va commencer par étudier l'équation (3.16) lorsque les coefficients $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des constants, $A_{n+1}(x)$ est un polynôme et $|q| = 1$. On obtient le résultat suivant

Théorème 3.3.2. *Si f est une solution entière transcendante de l'équation (3.16), alors pour chaque $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a*

$$|A_k| \leq \max_{j \in \{0,\ldots,n\}/\{k\}} \{|A_j|\}.$$

Preuve. Supposons que f est une solution entière transcendante de l'équation (3.16). Par (3.16), pour chaque $k \in \{0, \ldots, n\}$, il est évident que

$$A_k f(q^k x) = A_{n+1}(x) - \sum_{j \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{k\}} A_j f(q^j x).$$

En utilisant le module maximum, on obtient

$$\big|A_k f(q^k x)\big|(r) = \big|A_{n+1}(x) - \sum_{j \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{k\}} A_j f(q^j x)\big|(r).$$

En outre, puisque $|.|(r)$ est une norme multiplicative et $|f(q^j x)|(r) = |f|(|q|^j r) = |f|(r)$ où $|q| = 1$, on trouve

$$|A_k||f|(r) \leq \max\big\{|A_{n+1}|(r), \max_{j \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{k\}} |A_j||f|(r)\big\}.$$

Alors, on obtient

$$|A_k| \leq \max\bigg\{\frac{|A_{n+1}|(r)}{|f|(r)}, \max_{j \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{k\}} |A_j|\bigg\}. \tag{3.17}$$

Comme $\lim_{r \longrightarrow +\infty} \dfrac{|A_{n+1}|(r)}{|f|(r)} = 0$, la relation (3.17) donne $|A_k| \leq \max_{j \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{k\}} |A_j|$.
Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

Maintenant, on va étudier l'équation (3.16) quand les coefficients $A_0(x), A_1(x), \dots, A_{n+1}(x)$ sont des polynômes et $|q| = 1$. Dans ce cas, on a le théorème suivant

Théorème 3.3.3. *Pour toute solution entière transcendante de l'équation (3.16), il existe $k, s \in \{0, \dots, n\}$ tels que*

$$\deg A_k = \deg A_s = \max_{j \in \{0,\dots,n\}} \{\deg A_j\}.$$

Preuve. Soit f une solution entière transcendante de l'équation (3.16) et il existe seulement $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $d_k = \deg A_k$ et $d = \max_{j \in \{0,\dots,n\} \setminus \{k\}} \{\deg A_j\}$.
En introduisant le module maximum aux deux côtés de l'équation (3.16), on obtient

$$\Big|\sum_{i=0}^{n} A_j(x) f(q^j x)\Big|(r) = |A_{n+1}(x)|(r).$$

Puisque $|.|(r)$ est une norme multiplicative et $|f(q^j x)|(r) = |f|(|q|^j r) = |f|(r)$ où $|q| = 1$, on a

$$\Big|\sum_{i=0}^{n} A_j(x) f(q^j x)\Big|(r) \leq \max_{0 \leq j \leq n} \{|A_j|(r)\} |f|(r). \tag{3.18}$$

En outre, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r > r_0$, on a

$$|A_j(x)|(r) \leq r^{d+\frac{1}{3}} < r^{d+\frac{1}{2}} < r^{d_k - \frac{1}{3}} \leq |A_k(x)|(r).$$

De cela, la relation (3.18) assure que

$$\Big|\sum_{i=0}^{n} A_j(x) f(q^j x)\Big|(r) \leq r^{d+\frac{1}{2}} |f|(r) < r^{d_k - \frac{1}{3}} |f|(r).$$

Ainsi,

$$r^{d+\frac{1}{2}} |f|(r) < r^{d_k - \frac{1}{3}} |f|(r) \leq |A_k|(r) |f|(r). \tag{3.19}$$

D'autre part, on a

$$A_k(x) f(q^k x) = A_{n+1}(x) - \sum_{j \in \{0,\dots,n\} \setminus \{k\}} A_j(x) f(q^j x).$$

D'où, on obtient

$$|A_k|(r) |f|(r) \leq \max\Big\{|A_{n+1}|(r), \max_{j \in \{0,\dots,n\} \setminus \{k\}} |A_j|(r) |f|(r)\Big\}.$$

Ce qui implique que,

$$|A_k|(r)|f|(r) \leq r^{d+\frac{1}{3}}|f|(r). \tag{3.20}$$

D'après (3.19) et (3.20), on remarque immédiatement que $r^{d+\frac{1}{2}}|f|(r) \leq r^{d+\frac{1}{3}}|f|(r)$. Donc, on conclut une contradiction avec $r^{d+\frac{1}{2}} > r^{d+\frac{1}{3}}$. □

On termine cette partie par l'étude de l'équation (3.16) lorsque les coefficients $A_0(x)$, $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des constants, $q \in \mathbb{K}$ satisfait $0 < |q| < 1$ et $A_{n+1}(x) = e^{P(x)}$, où P est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$. Alors, on a le résultat suivant

Théorème 3.3.4. *Soit f une solution entière de l'équation* (3.16)*. Alors, on a*

$$\rho(f) = d.$$

Preuve. Supposons que f est une solution entière de l'équation (3.16). À partir de l'équation (3.16), on peut écrire $f(x) = \alpha e^{P(x)} - \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f(q^j x)$, avec $\alpha = 1/A_0$ et $\alpha_j = A_j/A_0$, pour $j = 1, \ldots, n$.

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{N}$

$$|f|(|q|^{-s}) \leq \max\{|\alpha e^{P(x)}|(|q|^{-s}), |\alpha_1||f(qx)|(|q|^{-s}), \ldots, |\alpha_n||f(q^n x)|(|q|^{-s})\}.$$

En vertu du Lemme 3.1.1, on obtient

$$|f|(|q|^{-s}) \leq \max\{|\alpha e^{P(x)}|(|q|^{-s}), |\alpha_1||f|(|q|^{1-s}), \ldots, |\alpha_n||f|(|q|^{n-s})\}.$$

Sachant que $|.|(r)$ est une fonction croissante, on a

$$|f|(|q|^{1-s}) \geq |f|(|q|^{2-s}) \geq \ldots \geq |f|(|q|^{n-s}).$$

D'où, comme P est un polynôme, alors il existe $c > 0$, tel que

$$|f|(|q|^{-s}) \leq \max\left\{|\alpha| e^{c|q|^{-ds}}, \lambda|f|(|q|^{1-s})\right\}, \text{ avec } \lambda = \max_{1\leq j\leq n} |\alpha_j|. \tag{3.21}$$

De façon équivalente, on a

$$|f|(|q|^{1-s}) \leq \max\{|\alpha| e^{c|q|^{d(1-s)}}, \lambda|f|(|q|^{2-s})\}.$$

Aussi, on a $e^{c|q|^{d(1-s)}} \leq e^{c|q|^{-ds}}$. D'où, on obtient

$$|f|(|q|^{1-s}) \leq \max\{|\alpha| e^{c|q|^{-ds}}, \lambda|f|(|q|^{2-s})\}. \tag{3.22}$$

Donc, de (3.21) et (3.22), il est claire que

$$|f|(|q|^{-s}) \leq \max\big\{|\alpha|e^{c|q|^{-ds}}, \lambda^2|f|(|q|^{2-s})\big\}.$$

En répétant ce raisonnement s fois, on obtient

$$|f|(|q|^{-s}) \leq \max\big\{|\alpha|e^{c|q|^{-ds}}, \lambda^s|f|(1)\big\}. \tag{3.23}$$

On note $r_s = |q|^{-s}$, il est claire que $s \geq \left[\frac{\log r_s}{\log |q|^{-1}}\right]$. De cela, l'inégalité (3.23) devient

$$\log|f|(r_s) \leq \max\Big\{\log|\alpha| + cr_s^d, \frac{\log r_s}{\log|q|^{-1}}\lambda + \log|f|(1)\Big\}.$$

Ce qui implique que

$$\frac{\log|f|(r_s)}{\log r} \leq \max\Big\{\frac{\log|\alpha| + cr_s^d}{\log r}, \frac{\log r_s}{\log r \log|q|^{-1}}\lambda + \frac{\log|f|(1)}{\log r}\Big\}.$$

De cela et puisque $r_s \to +\infty$ quand $s \to +\infty$, on a $\rho(f) \leq d$.
À partir de l'équation (3.16), on trouve immédiatement l'inégalité inverse $\rho(f) \geq d$. Ceci complète la preuve du Théorème 3.3.4. □

Maintenant, nous considérons les équations q-différences de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} f(q_i x) = R(x, f(x)), \tag{3.24}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(q_i x) = f(x)^m, \tag{3.25}$$

où $q_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n$.

Notons que dans le domaine des nombres complexes, les équations (3.24) et (3.25) ont été étudiées par N. Xu et C. P. Zhong dans [57]. Ils ont trouvé des résultats qui précisent la relation entre l'ordre de croissance de la solution et les coefficients de l'équation (voir par exemple [57, Théorème 1.1], [57, Théorème 1.2] et [57, Théorème 1.4]).

Notre but est d'étudier l'existence de solutions méromorphes des équations (3.24) et (3.25) dans $\mathbb{K}$ et nous donnons également une estimation de la croissance des solutions méromorphes transcendantes de chaque équation. Alors, on trouve les résultats suivants

Théorème 3.3.5. *Supposons que $q_i \in \mathbb{K}$ satisfaisant $|q_i| < 1$. Si $d > n$, alors l'équation (3.24) n'a pas de solution méromorphe transcendante d'ordre zéro.*

Preuve. Supposons que l'équation (3.24) admet une solution méromorphe transcendante d'ordre zéro. En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna et utilisant le Théorème 2.5.8, on obtient

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) = dT(r, f) + O(\log r). \tag{3.26}$$

D'autre part, puisque $|q_i| < 1$, on a

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) \leq \sum_{i=1}^{n} T(|q_i| r, f) + O(1) \leq nT(r, f) + O(1). \tag{3.27}$$

Par (3.26) et (3.27), on obtient

$$dT(r, f) \leq T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) \leq nT(r, f) + O(1).$$

C'est une contradiction avec $d > n$. □

Théorème 3.3.6. *Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.24) et $q_i \in \mathbb{K}$ satisfaisant $|q_i| > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $|q_1| \leq |q_2| \leq \ldots \leq |q_{n-1}| \leq |q_n|$. Si $d > n$, alors*

$$\frac{\log d - \log n}{\log |q_n|} \leq \rho(f) \leq \frac{\log(d + n - 1)}{\log |q_n| - \log |q_{n-1}|}.$$

Preuve. De l'équation (3.24), on a

$$f(q_n x) = \frac{R(x, f(x))}{\prod_{i=1}^{n-1} f(q_i x)}.$$

En utilisant la fonction caractéristique de Nevanlinna et le Théorème 2.5.8, on obtient

$$T(r, f(q_n x)) = T\left(r, \frac{R(x, f(x))}{\prod_{i=1}^{n-1} f(q_i x)}\right) \leq dT(r, f) + \sum_{i=1}^{n-1} T(r, f(q_i x)) + O(\log r). \tag{3.28}$$

Puisque $T(r, f(q_i x)) = T(|q_i| r, f)$, $(i = 1, \ldots, n)$, $|q_i| > 1$, $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $|q_1| \leq |q_2| \leq \ldots \leq |q_{n-1}| \leq |q_n|$ et par (3.28), on a

$$T(|q_n| r, f) \leq dT(|q_{n-1}| r, f) + (n - 1)T(|q_{n-1}| r, f) + O(\log |q_{n-1}| r). \tag{3.29}$$

Posons $R = |q_n| r$ et $\beta = \dfrac{|q_{n-1}|}{|q_n|}$, on remplace dans (3.29), on trouve

$$T(R, f) \leq (d + n - 1)T(\beta R, f) + O(\log \beta R).$$

De la même manière, on obtient

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^2 T(\beta^2 R, f) + (d+n-1)O(\log \beta^2 R) + O(\log \beta R).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^k T(\beta^k R, f) + O\big(\sum_{i=0}^{k-1} (d+n-1)^i \log(\beta^{i+1} R)\big).$$

Comme $\dfrac{|q_{n-1}|}{|q_n|} < 1$, on a

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^k T(\beta^k R, f) + O\big(\sum_{i=0}^{k-1} (d+n-1)^i \log R\big).$$

De cela, on obtient

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^k \left(T(\beta^k R, f) + \left(\frac{1 - 1/(d+n-1)^k}{(d+n-1)-1} \right) O(\log R) \right). \tag{3.30}$$

On pose $\rho = \beta^k R$, pour chaque $R \geq \rho$ suffisamment grand, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k = \left[\dfrac{\log \rho - \log R}{\log \beta} \right]$.
Selon (3.30), on obtient

$$\begin{aligned} \log T(R,f) \leq & \frac{\log R - \log \beta}{-\log \beta} \log(d+n-1) \\ & + \log \left(T(\rho, f) + \left(\frac{1 - 1/(d+n-1)^{(\log \rho - \log R)/\log \beta}}{(d+n-1)-1} \right) O(\log R) \right). \end{aligned}$$

De cela, on a

$$\begin{aligned} \frac{\log T(R,f)}{\log R} \leq & \frac{\log R - \log \beta}{-\log \beta \log R} \log(d+n-1) \\ & + \frac{1}{\log R} \log \left(T(\rho, f) + \left(\frac{1 - 1/(d+n-1)^{(\log \rho - \log R)/\log \beta}}{(d+n-1)-1} \right) O(\log R) \right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

De (3.31), on déduit que

$$\rho(f) \leq \frac{\log(d+n-1)}{\log |q_n| - \log |q_{n-1}|}.$$

Ensuite, on prouve l'inégalité inverse $\rho(f) \geq \dfrac{\log d - \log n}{\log |q_n|}$. En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna et utilisant le Théorème 2.5.8, on obtient

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) = dT(r,f) + O(\log r). \tag{3.32}$$

D'autre part, puisque $T(r, f(q_i x)) = T(|q_i|r, f)$, $(i = 1, \dots, n)$ et $|q_1| \leq |q_2| \leq \dots \leq |q_{n-1}| \leq |q_n|$, on a

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) \leq nT(|q_n|r, f) + O(1). \tag{3.33}$$

De les relations (3.32) et (3.33), découle l'inégalité suivante

$$T(|q_n|r, f) \geq \Big(\frac{d}{n}\Big) T(r, f) + O(\log r).$$

D'une façon analogue, on obtient

$$T(|q_n|^2 r, f) \geq \Big(\frac{d}{n}\Big)^2 T(r, f) + O\Big(\Big(\frac{d}{n}\Big) \log r + \log(|q_n| r)\Big).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(|q_n|^k r, f) \geq \Big(\frac{d}{n}\Big)^k T(r, f) + g(r), \tag{3.34}$$

où $g(r) = O(h(r))$ et $h(r) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \Big(\frac{d}{n}\Big)^{k-1-i} \log |q_n|^i r$.

D'autre part, on a pour r suffisamment grand, on voit qu'il existe $r_0 \geq 1$ tel que pour tout $r \geq r_0$, $\log(|q_n|^i r) = i \log |q_n| + \log r \leq i \log |q_n| \log r \leq 2i \log |q_n| \log r$.

Donc, on a

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Big(\frac{d}{n}\Big)^{k-1-i} \log |q_n|^i r \leq 2 \log |q_n| \log r \sum_{i=0}^{k-1} i \Big(\frac{d}{n}\Big)^{k-1-i}.$$

En utilisant le fait que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} i \Big(\frac{d}{n}\Big)^{k-1-i} < \infty$, quand $d > n$. Alors, la série $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \Big(\frac{d}{n}\Big)^{k-1-i} \log |q_n|^i$ est convergente.

Par conséquent,

$$|g(r)| \leq C \Big(\frac{d}{n}\Big)^k \log r, \tag{3.35}$$

où C est une constante positive.

Alors, de (3.34) et (3.35), on trouve

$$T(|q_n|^k r, f) \geq \big(\frac{d}{n}\big)^k T(r, f) - C \Big(\frac{d}{n}\Big)^k \log r. \tag{3.36}$$

Sachant que f est une fonction méromorphe transcendante, alors

$$T(r, f) \geq 2C \log r, \tag{3.37}$$

où r assez grand. Les relations (3.36) et (3.37), assurent que

$$T(|q_n|^k r, f) \geq C\Big(\frac{d}{n}\Big)^k \log r. \tag{3.38}$$

D'où, pour chaque $r \geq r_0$ suffisamment grand, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que

$$|q_n|^k r_0 \leq r < |q_n|^{(k+1)} r_0 \ i.e.\ k > \frac{\log r - \log |q_n| r_0}{\log |q_n|}, \tag{3.39}$$

d'après (3.38) et (3.39), on obtient

$$T(r, f) \geq k'\Big(\frac{d}{n}\Big)^{\left(\frac{\log r}{\log |q_n|}\right)} \log r_0,$$

où $k' = C\Big(\frac{d}{n}\Big)^{\frac{-\log |q_n| r_0}{\log |q_n|}}$. Ce qui implique que

$$\frac{\log T(r, f)}{\log r} \geq \frac{\log r}{\log |q_n| \log r} \log\left(\frac{d}{n}\right) + \frac{\log(k' \log r_0)}{\log r}. \tag{3.40}$$

De (3.40), il est claire que

$$\rho(f) \geq \frac{\log d - \log n}{\log |q_n|}.$$

$\square$

Théorème 3.3.7. *Soit f une solution méromorphe non constante de l'équation (3.24) et $q_i \in \mathbb{K}$ satisfaisant $0 < |q_i| < 1$ tels que $|q_1| \leq |q_2| \leq \ldots \leq |q_{n-1}| \leq |q_n|$. Si $d \leq n$, alors*

$$\rho(f) \leq \frac{\log(n/d)}{-\log |q_n|}.$$

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe non constante de l'équation (3.24). Par la fonction caractéristique de Nevanlinna et en utilisant le Théorème 2.5.8, on obtient

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) = dT(r, f) + O(\log r). \tag{3.41}$$

D'autre part, puisque $T(r, f(q_i x)) = T(|q_i| r, f)$, $(i = 1, \ldots, n)$ et $|q_1| \leq |q_2| \leq \ldots \leq |q_{n-1}| \leq |q_n|$, on a

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) \leq nT(|q_n| r, f) + O(1). \tag{3.42}$$

Ainsi, par (3.41) et (3.42), on trouve

$$T(r,f) \leq (n/d)T(|q_n|r,f) + O(\log r).$$

De la même manière, on obtient

$$T(r,f) \leq (n/d)^2 T(|q_n|^2 r,f) + (n/d)O(\log |q_n| r) + O(\log r).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(r,f) \leq (n/d)^k T(|q_n|^k r,f) + O\Big(\sum_{i=0}^{k-1} (n/d)^i \log |q_n|^i r\Big). \tag{3.43}$$

Sachant que $|q_n| < 1$, l'inégalité (3.43) devient

$$T(r,f) \leq (n/d)^k T(|q_n|^k r,f) + O\Big(\sum_{i=0}^{k-1} (n/d)^i \log r\Big). \tag{3.44}$$

D'après (3.44), on obtient

$$T(r,f) \leq (n/d)^k \Big(T(|q_n|^k r,f) + \Big(\frac{1 - 1/(n/d)^k}{(n/d) - 1}\Big) O(\log r)\Big). \tag{3.45}$$

On pose $\rho = |q_n|^k r$, pour chaque r suffisamment grand, pour tout $r \geq \rho$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k = \left[\dfrac{\log \rho - \log r}{\log |q_n|}\right]$.

À partir de (3.45), on a

$$\begin{aligned}\log T(r,f) \leq{}& \frac{\log \rho - \log r}{\log |q_n|} \log(n/d) \\ &+ \log\left(T(\rho,f) + \left(\frac{1 - 1/(n/d)^{(\log \rho - \log r)/\log |q_n|}}{(n/d) - 1}\right) O(\log r)\right).\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\frac{\log T(r,f)}{\log r} \leq{}& \frac{\log \rho - \log r}{\log r \log |q_n|} \log(n/d) \\ &+ \frac{1}{\log r} \log\left(T(\rho,f) + \left(\frac{1 - 1/(n/d)^{(\log \rho - \log r)/\log |q_n|}}{(n/d) - 1}\right) O(\log r)\right).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Selon (3.46), on conclut que

$$\rho(f) \leq \log(n/d)/ - \log |q_n|.$$

□

Théorème 3.3.8. *Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.25), où m, n sont des entiers positifs , $|q_i| > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, et $|q| = \max\{|q_1|, |q_2|, ..., |q_n|\}$. Si $m > n$, alors*

$$\rho(f) \geq \frac{\log m - \log n}{\log |q|}.$$

Preuve. Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.25). En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna aux deux côtés de l'équation (3.25) et utilisant le Théorème 2.5.8, on trouve

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) = mT(r, f) + O(1). \tag{3.47}$$

D'autre part, on a

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) \leq \sum_{i=1}^{n} T(|q_i| r, f) + O(1). \tag{3.48}$$

Puisque $|q| = \max\{|q_1|, |q_2|, \ldots, |q_n|\}$, l'inégalité (3.48) devient

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f(q_i x)) \leq nT(|q| r, f) + O(1). \tag{3.49}$$

Il s'ensuit de les relations (3.47) et (3.49) que

$$T(|q| r, f) \geq (m/n) T(r, f) + O(1).$$

De la même manière, on a

$$T(|q|^2 r, f) \geq (m/n)^2 T(r, f) + O(1).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(|q|^k r, f) \geq (m/n)^k T(r, f). \tag{3.50}$$

D'où, pour chaque r suffisamment grand, pour tout $r \geq r_0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|q|^k r_0 \leq r < |q|^{(k+1)} r_0 \ i.e. \ k > \frac{\log r - \log |q| r_0}{\log |q|}, \tag{3.51}$$

la relation (3.51) implique que

$$T(r, f) \geq (m/n)^{\left(\frac{\log r - \log |q| r_0}{\log |q|}\right)} T(r_0, f).$$

Il s'ensuit que,

$$\frac{\log T(r,f)}{\log r} \geq \frac{\log r - \log|q|r_0}{\log r \log|q|} \log\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{\log T(r_0,f)}{\log r}. \tag{3.52}$$

De (3.52), on conclut que

$$\rho(f) \geq \frac{\log m - \log n}{\log|q|}.$$

□

3.3.1 Équations aux q-différences de type Schröder

En 1925, J. F. Ritt [64] a formulé une équation q-différence sous la forme

$$f(qx) = R(f(x)),$$

où $q \in \mathbb{C}, q \neq 0, 1$ et $R(f(x))$ est une fonction rationnelle en f. Cette équation est appelée l'équation de Schröder.

Que se passera-t-il si le côté droit de cette équation est une fonction rationnelle dans les deux variables ?, c'est à dire pour l'équation fonctionnelle

$$f(qx) = R(x, f(x)), \tag{3.53}$$

$q \in \mathbb{C}, q \neq 0, 1$ et $R(x, f(x))$ est irréductible en f. On note que cette question a été posée par L. A. Rubel dans [67] en 1983. La réponse de cette question a été réalisée par G. G. Gundersen et al. dans [34] en 2002, ils ont examiné la relation entre l'ordre de croissance d'une solution méromorphe de l'équation (3.53), q et $\deg_f R$. Ils ont obtenu le résultat suivant

Théorème 3.3.9. *[34, Théorème 3.2] Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation* (3.53)*, avec $|q| > 1$, alors $\rho(f) = \log d / \log|q|$.*

Plus tard, en 2013 dans [76], G. Zhong a étudié l'équation la plus générale que l'équation (3.53), c'est à dire l'équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} A_j(x) f(q^j x) = R(x, f(x)), \tag{3.54}$$

où $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des fonctions rationnelles et $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| \neq 1$.

Il a obtenu quelques résultats sur la croissance des solutions méromorphes de cette équation (pour plus de détails, voir [76, Théorème 2] et [76, Théorème 7]).

Tout au long de cette partie, notons que $R(x, f(x)) = \dfrac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))} = \dfrac{\sum_{j=0}^{p} a_j(x) f(x)^j}{\sum_{j=0}^{t} b_j(x) f(x)^j}$, tel que $a_j(x)$, $b_j(x)$ sont des fonctions rationnelles.

Dans ce qui suit, le but est d'étudier l'analogue de cette équation dans $\mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{K}$ tel que $|q| \neq 1$ et on va donner quelques caractéristiques d'ordre de croissance de ses solutions méromorphes. On obtient les résultats suivants

Théorème 3.3.10. *Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.54) et $|q| > 1$. Si $n < d$, on a*

$$(\log d - \log n)/n \log |q| \leq \rho(f) \leq \log(d + n - 1)/ \log |q|.$$

Preuve. Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.54). En introduisant la fonction de Nevanlinna à les deux côtés de l'équation (3.54), on trouve

$$T(r, \sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x)) = T(r, R(x, f(x))). \tag{3.55}$$

En vertu de le Théorème 2.5.8, on obtient

$$T(r, R(x, f(x))) = dT(r, f) + O(\log r), \tag{3.56}$$

puisque $|q| > 1$ et $T(r, f(qx)) = T(|q|r, f)$, il est facile de voir que

$$T(r, \sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x)) \leq n\big(T(|q|^n r, f) + O(\log r)\big). \tag{3.57}$$

Il s'ensuit de les relations (3.55), (3.56) et (3.57) que

$$T(|q|^n r, f) \geq CT(r, f) + O(\log r),$$

où $C = \dfrac{d}{n}$. De la même façon, on a

$$T(|q|^{2n} r, f) \geq C^2 T(r, f) + O(C \log r + \log(|q|^n r)).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(|q|^{kn}r, f) \geq C^k T(r, f) + \mu(r), \tag{3.58}$$

avec $\mu(r) = O(\phi(r))$ et $\phi(r) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{C^{k-1}}{C^i} \log(|q|^{in}r)$.

D'autre part, pour r suffisamment grand, il est claire qu'il existe $r_0 > 1$ tel que pour tout $r \geq r_0$, on a $\log(|q|^{in}r) = \log(|q|^{in}) + \log r \leq \log(|q|^{in}) \log r = in \log|q| \log r \leq 2in \log|q| \log r$. Donc, on obtient

$$\phi(r) \leq 2n \log|q| \log r \sum_{i=0}^{k-1} \frac{iC^{k-1}}{C^i}. \tag{3.59}$$

Il est facile de voir que $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{iC^{k-1}}{C^i} < \infty$ quand $C > 1$. Il s'ensuit que

$$|\mu(r)| \leq C'C^k \log r, \tag{3.60}$$

où C' est une constante positive. Il résulte de (3.58) et (3.60) que

$$T(|q|^{kn}r, f) \geq C^k T(r, f) - C'C^k \log r. \tag{3.61}$$

Sachant que f est une fonction méromorphe transcendante, on a

$$T(r, f) \geq 2C' \log r, \tag{3.62}$$

quand r suffisamment grand.

Observons que par les relations (3.61) et (3.62), on obtient

$$T(|q|^{kn}r, f) \geq C'C^k \log r. \tag{3.63}$$

Nous fixons r_0, alors il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ non dépendant de ξ, tel que

$$\frac{\log(\xi) - \log(|q|^n r_0)}{n \log(|q|)} < k \leq \frac{\log(\xi) - \log(r_0)}{n \log(|q|)}. \tag{3.64}$$

De (3.63) et (3.64), on obtient

$$T(\xi, f) \geq k' C^{\frac{\log(\xi)}{n \log(|q|)}} \log(r_0),$$

où $k' = C'C^{\frac{-\log(|q|^n r_0)}{n \log(|q|)}}$ est une constante positive.

De cela, on a

$$\log(T(\xi, f)) \geq \frac{\log(\xi)}{n \log(|q|)} \log(C) + \log(k' \log(r_0)).$$

Ainsi,

$$\frac{\log(T(\xi, f))}{\log(\xi)} \geq \frac{\log(\xi)}{n\log(\xi)\log(|q|)}\log(C) + \frac{\log(k'\log(r_0))}{\log(\xi)}.$$

Par conséquent,

$$\rho(f) \geq (\log(d) - \log(n))/n\log(|q|).$$

Ensuite, nous démontrons l'inégalité inverse $\rho(f) \leq \log(d+n-1)/\log|q|$. L'équation (3.54) peut être écrite comme suit

$$f(q^n x) = \frac{1}{A_n(x)}\Big(R(x, f(x)) - \sum_{j=1}^{n-1} A_j(x) f(q^j x)\Big). \tag{3.65}$$

En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna à les deux côtés de l'équation (3.65), on obtient

$$T(r, f(q^n x)) = T\Big(r, \frac{1}{A_n(x)}\big(R(x, f(x)) - \sum_{j=1}^{n-1} A_j(x) f(q^j x)\big)\Big). \tag{3.66}$$

D'autre part, on a

$$T\Big(r, \frac{1}{A_n(x)}\big(R(x, f(x)) - \sum_{j=1}^{n-1} A_j(x) f(q^j x)\big)\Big) \leq dT(r, f) + \sum_{j=1}^{n-1} T(r, A_j(x) f(q^j x)) + O(\log r). \tag{3.67}$$

Il s'ensuit de les relations (3.66) et (3.67) que

$$T(r, f(q^n x)) \leq dT(r, f) + \sum_{j=1}^{n-1} T(r, A_j(x) f(q^j x)) + O(\log r).$$

Sachant que $|q| > 1$ et $T(r, f(q^j x)) = T(|q|^j r, f)$, on trouve

$$T(|q|^n r, f) \leq (d+n-1)T(|q|^{n-1} r, f) + O(\log(|q|^{n-1} r)).$$

On pose $R = |q|^n r$ et $\beta = \dfrac{1}{|q|}$, l'inégalité précédente devient

$$T(R, f) \leq (d+n-1)T(\beta R, f) + O(\log(\beta R)).$$

D'une façon analogue, on a

$$T(R, f) \leq (d+n-1)^2 T(\beta^2 R, f) + (d+n-1)O(\log \beta^2 R) + O(\log(\beta R)).$$

En répétant ce raisonnement s fois, on trouve

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^s T(\beta^s R, f) + O\Big(\sum_{i=0}^{s-1}(d+n-1)^i \log(\beta^{i+1}R)\Big).$$

Et par suite, puisque $|\beta| < 1$, nous avons

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^s T(\beta^s R, f) + \sum_{i=0}^{s-1}(d+n-1)^i O(\log R).$$

Ce qui implique que

$$T(R,f) \leq (d+n-1)^s \left(T(\beta^s R, f) + \Big(\frac{1-1/(d+n-1)^s}{(d+n-1)-1}\Big) O(\log R) \right), \tag{3.68}$$

posons $\rho = \beta^s R$, pour tout R suffisament grand, pour tout $R \geq \rho$, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $s = \left[\dfrac{\log\rho - \log R}{\log\beta}\right]$.
Selon (3.68), on obtient

$$\begin{aligned}\log T(R,f) \leq\ & \frac{\log R - \log\rho}{-\log|\beta|}\log(d+n-1) \\ & + \log\left(T(\rho, f) + \left(\frac{1-1/(d+n-1)^{(\log\rho - \log R)/\log|\beta|}}{(d+n-1)-1}\right) O(\log R)\right).\end{aligned}$$

De cela, on déduit que

$$\rho(f) \leq \log(d+n-1)/\log|q|.$$

□

Théorème 3.3.11. *Soit f une solution méromorphe non constante de l'équation* (3.54) *et* $|q| < 1$. *Si $d \leq n$, alors $\rho(f) \leq \log(n/d)/-\log|q|$.*

Preuve. On suppose que f est une solution méromorphe non constante de l'équation (3.54). En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna à les deux côtés de l'équation (3.54), on obtient

$$T(r, \sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x)) = T(r, R(x, f(x))).$$

En vertu de le Théorème 2.5.8, on trouve

$$dT(r,f) + O(\log r) \leq n\big(T(|q|r, f) + O(\log r)\big).$$

De cela, on obtient

$$T(r,f) \leq (n/d)T(|q|r,f) + O(\log r).$$

De la même manière, on obtient

$$T(r,f) \leq (n/d)^2 T(|q|^2 r,f) + (n/d)O(\log(|q|r)) + O(\log r).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(r,f) \leq (n/d)^k T(|q|^k r,f) + O\big(\sum_{i=0}^{k-1}(n/d)^i \log(|q|^i r)\big).$$

Puisque $|q| < 1$, on a

$$T(r,f) \leq (n/d)^k T(|q|^k r,f) + O\big(\sum_{i=0}^{k-1}(n/d)^i \log r\big).$$

De cette inégalité, on obtient

$$T(r,f) \leq (n/d)^k \Big(T(|q|^k r,f) + \big(\frac{1 - 1/(n/d)^k}{(n/d)-1}\big)O(\log r)\Big). \tag{3.69}$$

On pose $\rho = |q|^k r$, pour chaque r suffisamment grand, pour tout $r \geq \rho$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k = \left[\dfrac{\log\rho - \log r}{\log|q|}\right]$.

De la relation (3.69), découle l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\log T(r,f) \leq{}& \frac{\log\rho - \log r}{\log|q|}\log(n/d)\\ &+ \log\left(T(\rho,f) + \left(\frac{1 - 1/(n/d)^{(\log\rho - \log r)/\log|q|}}{(n/d)-1}\right)O(\log r)\right).\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\frac{\log T(r,f)}{\log r} \leq{}& \frac{\log\rho - \log r}{\log r\log|q|}\log(n/d)\\ &+ \frac{1}{\log r}\log\left(T(\rho,f) + \left(\frac{1 - 1/(n/d)^{(\log\rho - \log r)/\log|q|}}{(n/d)-1}\right)O(\log r)\right).\end{aligned} \tag{3.70}$$

Selon (3.70), on conclut que

$$\rho(f) \leq \log(n/d)/ - \log|q|.$$

□

On termine cette section, par l'étude de l'équation q-différence de la forme

$$R_1(qx, f(qx)) = R_2(x, f(x)), \tag{3.71}$$

où $R_1(x, f)$ et $R_2(x, f)$ sont des fonctions rationnelles irréductibles en f avec des coefficients méromorphes et $q \in \mathbb{K}$. On pose $a = \deg_f R_1, b = \deg_f R_2$. On obtient le résultat suivant

Théorème 3.3.12. *Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.71). Si $a \leq b$ et $|q| \neq 1$, alors $\rho(f) \geq (\log b - \log a)/\big|\log |q|\big|$.*

Preuve. Le cas $a = b$ est trivial.

Supposons que $a < b$ et f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.71). On discute les deux cas suivants:

cas 1. $|q| > 1$. Par la fonction caractéristique de Nevanlinna, on a

$$T(r, R_1(qx, f(qx))) = T(r, R_2(x, f(x))).$$

En utilisant le Théorème 2.5.8, on trouve

$$aT(|q|r, f) + O(\log |q|r) = bT(r, f) + O(\log r).$$

Il s'ensuit que,

$$T(|q|r, f) = (b/a)T(r, f) - O(\log(|q|r)).$$

De la même manière, on a

$$T(|q|^2 r, f) = \Big(b/a\Big)^2 T(r, f) - (b/a)O(\log(|q|r)) - O(\log(|q|^2 r)).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on obtient

$$T(|q|^k r, f) = \Big(b/a\Big)^k T(r, f) - \mu(r), \tag{3.72}$$

où $\mu(r) = O(\phi(r))$ et $\phi(r) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(b/a\big)^{k-1-i} \log(|q|^{i+1} r)$. D'autre part, il est claire que

$$\phi(r) = \Big(b/a\Big)^{k-1} \Bigg(\log |q| \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{\big(b/a\big)^i} + \log r \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\big(b/a\big)^i} \Bigg). \tag{3.73}$$

Puisque $a \leq b$ et par (3.73), la série $\sum_{i=0}^{+\infty} (b/a)^{k-1-i} \log(|q|^{i+1}r)$ est convergente.
Alors, on a

$$|\mu(r)| \leq C_1 \Big(b/a\Big)^k \log r, \tag{3.74}$$

où $C_1 > 0$. De plus, par (3.72) et (3.74), on obtient

$$T(|q|^k r, f) \geq \Big(b/a\Big)^k T(r, f) - C_1 \Big(b/a\Big)^k \log r. \tag{3.75}$$

Comme f est une fonction méromorphe transcendante, on peut choisir r_0 suffisamment grand tel que pour tout $r \geq r_0$, on a $T(r, f) \geq 2C_1 \log r$. D'où, de (3.75), il existe r_0 tel que pour tout $r \geq r_0$, on trouve

$$T(|q|^k r, f) \geq C_1 \Big(b/a\Big)^k \log r. \tag{3.76}$$

Donc, pour chaque $r \geq r_0$ suffisamment grand, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$k = \left[\frac{\log r - \log r_0}{\log |q|}\right], \text{ i.e., } k > \frac{\log r - \log |q| r_0}{\log |q|}. \tag{3.77}$$

Il résulte de (3.76) et (3.77) que

$$T(r, f) \geq C_2 \, (b/a)^{\log r / \log |q|},$$

où $C_2 = C_1 \Big(b/a\Big)^{-\log r_0 / \log |q|} \log r_0$ est une constante positive.
De cela, on a

$$\frac{\log T(r, f)}{\log r} \geq \frac{\log(b/a)}{\log |q|} + \frac{\log C_2}{\log r}.$$

Et par suite, il est évident que $\rho(f) \geq (\log b - \log a)/ \log |q|$.

Cas 2. $|q| < 1$. On remplace d'abord x par x/q dans l'équation (3.71), on obtient

$$R_1(x, f(x)) = R_2\Big(x/q, f\Big(x/q\Big)\Big). \tag{3.78}$$

En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna à les deux côtés de l'équation (3.71), on trouve

$$T\Big(r, R_1(x, f(x))\Big) = T\Big(r, R_2\Big(x/q, f\Big(x/q\Big)\Big)\Big).$$

D'après le Théorème 2.5.8, on a

$$aT(r, f) + O(\log r) = bT(\alpha r, f) + O(\log \alpha r),$$

où $\alpha = 1/|q|$. Ainsi

$$T(\alpha r, f) = (a/b)T(r, f) - O(\log \alpha r).$$

Pour terminer la preuve, on procède par la même méthode du **cas 1**. $\square$

3.3.2 Equations aux q-différences de type Painlevé

Dans cette section, nous considérons l'équation de type Painlevé IV

$$\big(f(qx)+f(x)\big)\big(f(x)+f\big(x/q\big)\big)=R(x,f(x)). \tag{3.79}$$

On note, $R(x,f(x))=\dfrac{P(x,f(x))}{Q(x,f(x))}=\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{p}a_j(x)f(x)^j}{\sum\limits_{j=0}^{t}b_j(x)f(x)^j}$, tel que $P(x,f(x)),Q(x,f(x))$ sont relativement premiers polynômes en f, $a_i(x)$ pour $i=0,\ldots,p$, $b_i(x)$ pour $i=0,\ldots,d$ sont des polynômes avec $a_p(x)b_t(x)\neq 0$, $q\in\mathbb{K}$, $d>4$ et $p-t\geq 3$.

C. W. Peng et H. W. Huang ont étudié dans [62] l'équation (3.79) dans le domaine des nombres complexes. Ils ont obtenu les résultats suivants

Théorème 3.3.13. *[62, Théorème 1.2]*

1. *Supposons que $|q|=1$. Alors, l'équation (3.79) n'a pas de solution méromorphe transcendante.*
2. *Supposons que $|q|\neq 1$ et f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.79). Alors, si f est entière ou admet une infinité des pôles, alors il existe une constante $K>0$ et $r_0>0$ tels que*

$$\log M(r,f)\geq K\Big(\frac{p-d}{2}\Big)^{\frac{\log r}{|\log|q||}},\forall r\geq r_0.$$

Dans cette partie, nous généralisons cette étude au cas ultramétrique et nous obtenons les résultats suivants

Théorème 3.3.14. *Si $q\in\mathbb{K}$ satisfait $|q|=1$, l'équation (3.79) n'a pas de solution entière transcendante ni de solution méromorphe transcendante qui a un nombre fini de pôles.*

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de (3.79) et que f possède un nombre fini de pôles. Alors, il existe un polynôme $g(x)$ et une fonction entière transcendante $h(x)$ tels que $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$. En remplaçant dans (3.79) et en multipliant par les dénominateurs, il est facile de voire que h satisfait une équation du même type lorsque $f(x)$ est une fonction entière transcendante. Alors, on peut supposer sans perdre la généralité que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X]$.

Soit f une solution entière transcendante de l'équation (3.79), par le module maximum, on a

$$\left|\big(f(qx)+f(x)\big)\big(f(x)+f\big(x/q\big)\big)\right|(r)=\frac{\left|P(x,f(x))\right|(r)}{\left|Q(x,f(x))\right|(r)}.$$

Par ailleurs, quand $|q|\geq 1$, on a

$$\left|\big(f(qx)+f(x)\big)\big(f(x)+f\big(x/q\big)\big)\right|(r)\leq\big(|f|(|q|r)\big)^2.$$

De plus, depuis f est une fonction entière transcendante et $a_0(x),a_1(x),\ldots,a_p(x)$ sont des polynômes, on a $\left|\sum\limits_{i=0}^{p-1}a_i(x)f(x)^i\right|(r)=o(|f|^p(r))$. Ainsi

$$\left|\sum_{i=0}^{p}a_i(x)f(x)^i\right|(r)\geq\frac{1}{2}|a_p|(r)|f|^p(r), \tag{3.80}$$

où r est suffisamment grand. En utilisant le fait que $|.|(r)$ est une norme multiplicative, on obtient

$$\left|\sum_{i=0}^{t}b_i(x)f(x)^i\right|(r)\leq\max_{0\leq i\leq t}\left\{|b_i|(r)|f|^i(r)\right\}.$$

Pour r suffisamment grand, on a $|f|^t(r)\geq\ldots\geq|f|(r)$, alors

$$\left|\sum_{i=0}^{t}b_i(x)f(x)^i\right|(r)\leq|f|^t(r)\max_{0\leq i\leq t}\left\{|b_i|(r)\right\}.$$

D'après le Lemme 3.1.2, on trouve

$$\left|\sum_{i=0}^{t}b_i(x)f(x)^i\right|(r)\leq C_1r^{\alpha}|f|^t(r), \tag{3.81}$$

où $C_1>0$ et $\alpha=\max\limits_{0\leq i\leq t}\{\deg\ b_i(x)\}$. Les relations (3.80) et (3.81), assurent que

$$\frac{\left|P(x,f(x))\right|(r)}{\left|Q(x,f(x))\right|(r)}\geq\frac{1}{2}Cr^{l-\alpha}|f|^{p-t}(r),$$

où r suffisamment grand, $l=\deg\ a_p(x)$ et C est une constante positive.

Puisque $|q|=1$, on a

$$2\log|f|(|q|r)=2\log|f|(r)\geq(p-t)\log|f|(r)+\phi(r),$$

où $\phi(r)=\log\big(\frac{1}{2}Cr^{l-\alpha}\big)$ et $|\phi(r)|\leq\beta\log r$, pour certain $\beta>0$. D'où, on a une contradiction avec $p-t\geq 3$. □

Théorème 3.3.15. *Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.79) et $q \in \mathbb{K}$ satisfait $|q| > 1$. Alors, on a $\rho(f) \geq (\log d - \log 4)/\big|\log |q|\big|$.*

Preuve. Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.79). En introduisant la fonction caractéristique de Nevanlinna à les deux côtés de l'équation (3.79), on trouve

$$T\Big(r, \big(f(qx) + f(x)\big)\big(f(x) + f\big(x/q\big)\big)\Big) = T\Big(r, \frac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))}\Big).$$

En utilisant le Théorème 2.5.8 et le fait que le côté gauche de l'équation (3.79) est borné par $4T(|q|r, f)$ quand r est assez grand et $|q| > 1$, on obtient

$$T(|q|r, f) \geq \beta T(r, f) + O(\log r),$$

où $\beta = d/4$. D'une façon analogue, on a

$$T(|q|^2 r, f) \geq \beta^2 T(r, f) + O(\beta \log r + \log(|q|r)).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on trouve

$$T(|q|^k r, f) \geq \beta^k T(r, f) + \mu(r), \tag{3.82}$$

où $\mu(r) = O(\phi(r))$ et $\phi(r) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta^{k-1-i} \log(|q|^i r)$. De plus,

$$\phi(r) = \beta^{k-1}\Bigg(\log |q| \sum_{i=0}^{k-1} i\beta^{-i} + \log r \sum_{i=0}^{k-1} \beta^{-i}\Bigg).$$

De cela et puisque $m > 4$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \beta^{k-1-i} \log(|q|^i r)$ est convergente. Alors, on a

$$|\mu(r)| \leq C_1 \beta^k \log r, \tag{3.83}$$

où $C_1 > 0$. Par (3.82) et (3.83), on obtient

$$T(|q|^k r, f) \geq \beta^k T(r, f) - C_1 \beta^k \log r. \tag{3.84}$$

Comme f est une fonction méromorphe transcendante, on peut choisir r_0 suffisamment grand tel que pour tout $r \geq r_0$, on a

$$T(r, f) \geq 2C_1 \log r.$$

Alors, par (3.84), il existe r_0 tel que pour $r \geq r_0$, on trouve

$$T(|q|^k r, f) \geq C_1 \beta^k \log r. \tag{3.85}$$

Ainsi, pour chaque $r \geq r_0$ suffisamment grand, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$k = \left[\frac{\log r - \log r_0}{\log |q|}\right], \text{ i.e., } k > \frac{\log r - \log |q| r_0}{\log |q|}. \tag{3.86}$$

Alors, de (3.85) et (3.86), on obtient

$$T(r, f) \geq C_2 \beta^{\log r / \log |q|}, \tag{3.87}$$

où C_2 est une constante positive tel que $C_2 = C_1 \beta^{-\log r_0 / \log |q|} \log r_0$.
La relation (3.86), implique que

$$\frac{\log T(r, f)}{\log r} \geq \frac{\log \beta}{\log |q|} + \frac{\log C_2}{\log r}.$$

Par conséquent,

$$\rho(f) \geq (\log d - \log 4) / \big| \log |q| \big|.$$

$\square$

Corollaire 3.3.16. *Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.79) et $q \in \mathbb{K}$ satisfait $|q| < 1$. Alors, on a $\rho(f) \geq (\log d - \log 4) / \big| \log |q| \big|$.*

***Preuve*.** Mettons $q_1 = 1/q$, alors $|q_1| > 1$. On remplace dans (3.79), on obtient une équation de la forme

$$\big(f(q_1 x) + f(x)\big)\big(f(x) + f\big(x/q_1\big)\big) = \frac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))}.$$

Nous appliquons la même méthode que dans la preuve du théorème ci-dessus, on trouve

$$T(r, f) \geq C \beta^{(\log r - \log r_0)/\log |q_1|} \log r_0, \tag{3.88}$$

où $C > 0$. Par (3.88), on a $\rho(f) \geq (\log d - \log 4) / \big| \log |q_1| \big|$.
Ainsi,

$$\rho(f) \geq (\log d - \log 4) / \big| \log |q| \big|.$$

$\square$

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux propriétés des solutions méromorphes de certaines équations aux différences et aux q-différences dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. Cette étude est l'analogue de celle connue dans le cas complexe. Nous avons démontré quelques résultats concernant la croissance de ces solutions et nous avons expliqué la relation entre le degré de l'équation, les coefficients et l'ordre de croissance de la solution et nous avons montré aussi quelques estimations de ces solutions. Ces résultats sont obtenus en utilisant la théorie de Nevanlinna ultramétrique.

Il reste beaucoup de problèmes ouverts concernant les équations fonctionnelles dans les deux domaines ultramétrique et complexe. Notre but dans nos travaux futurs, est de traiter les équations différentielles étudiées déjà dans le cas complexe dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. Par exemple, on se propose d'étudier l'équation différentielle de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(x)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(x)f = 0,$$

où $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{k-1}(x)$ sont des fonctions méromorphes.

Bibliographie

[1] M. J. Ablowitz, R. Halburd, and B. Herbst, On the extension of the Painlevé property to difference equations, *Nonlinearity*, 13(3) :889–905, 2000, doi:10.1088/0951-7715/13/3/321.

[2] Y. Amice, Les nombres p-adiques, Presses Universitaires de Frances, Collection SUP, 1975, URL `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/GDL16/`.

[3] W. Bergweiler, K. Ishizaki, and N. Yanagihara, Meromorphic solutions of some functional equations, *Methods Appl. Anal.*, 5(3) :248–258, 1998, doi:10.4310/MAA.1998.v5.n3.a2.

[4] W. Bergweiler, K. Ishizaki, and N. Yanagihara, Growth of meromorphic solutions of some functional equations I, *Aequationes Math.*, 63(1-2) :140–151, 2002, doi:10.1007/s00010-002-8012-x.

[5] J. P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, *Aequationes Math.*, 43 (2-3) :159–176, 1992, doi:10.1007/BF01835698.

[6] J. P. Bézivin, Dynamique des fractions rationnelles p-adiques, *Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN*, 23, 2005, URL `http://jp.bezivin.pagesperso-orange.fr/dealatex.pdf`.

[7] J. P. Bézivin and A. Boutabaa, Sur les équations fonctionnelles p-adiques aux q-différences, *Collect. Math.*, 43(2) :125–140, 1992, URL `http://eudml.org/doc/39451`.

[8] N. Boudjerida, A. Boutabaa, and S. Medjerab, On some ultrametric q-difference equations, *Bull. Sci. Math.*, 137(2) :177–188, 2013, doi:10.1016/j.bulsci.2010.05.002.

[9] H. Boughaba and T. Zerzaihi, On the growth order of meromorphic solutions of some ultrametric q-difference equations, *Lobachevskii J. Math.*, 44(4) :1280–1288, 2023, doi:10.1134/S1995080223040066.

[10] H. Boughaba, S. Bouternikh, and T. Zerzaihi, Results on the growth of meromorphic solutions of some functional equations of painlevé and schröder type in ultrametric fields, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, 16(1) :14–22, 2024.

[11] S. Bourourou, A. Boutabaa, and T. Zerzaihi, On the growth of solutions of difference equations in ultrametric fields, *Indag. Math., New Ser.*, 27(1) :112–123, 2016, doi:10.1016/j.indag.2015.08.005.

[12] K. Boussaf and A. Escassut, Growth of analytic functions in an ultrametric open disk and branched values, *Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin*, 28(2) :179 – 194, 2021, doi:10.36045/j.bbms.200707.

[13] K. Boussaf, A. Boutabaa, and A. Escassut, Growth of p-adic entire functions and applications, *Houston J. Math.*, 40(3) :715–736, 2014, URL `https://hal.uca.fr/hal-01920321`.

[14] K. Boussaf, A. Boutabaa, and A. Escassut, Order, type and cotype of growth for p-adic entire functions : a survey with additional properties, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, 8(4) :280–297, 2016, doi:10.1134/S2070046616040026.

[15] A. Boutabaa, Théorie de Nevanlinna p-adique. (p-adic Nevanlinna theory), *Manuscr. Math.*, 67(3) :251–269, 1990, doi:10.1007/BF02568432.

[16] A. Boutabaa, Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique, *Collect. Math.*, 42 (1) :75–93, 1991, URL `http://eudml.org/doc/42458`.

[17] A. Boutabaa and A. Escassut, On uniqueness of p-adic meromorphic functions, *Proc. Am. Math. Soc.*, 126(9) :2557–2568, 1998, doi:10.1090/S0002-9939-98-04533-X.

[18] A. Boutabaa and A. Escassut, Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations, *Ann. Inst. Fourier*, 50(3) :751–766, 2000, doi:10.5802/aif.1771.

[19] A. Boutabaa and A. Escassut, Urs and ursims for p-adic meromorphic functions inside a disc, *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 44(3) :485–504, 2001, doi:10.1017/S0013091599000759.

[20] S. Bouternikh and T. Zerzaihi, On some properties of ultrametric meromorphic solutions of difference equations of malmquist type, *Russ. Math.*, 66(8) :19–26, 2022, doi:10.3103/S1066369X22080023.

[21] Z. X. Chen, Growth and zeros of meromorphic solution of some linear difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 373(1) :235–241, 2011, doi:10.1016/j.jmaa.2010.06.049.

[22] Z. X. Chen, B. Q. Chen, and S. Li, Properties on solutions of some q-difference equations, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, 26(10) :1877–1886, 2010, doi:10.1007/s10114-010-8339-5.

[23] W. Cherry and Z. Ye, Non-Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the non-Archimedean Nevanlinna inverse problem, *Trans. Am. Math. Soc.*, 349(12) : 5043–5071, 1997, doi:10.1090/S0002-9947-97-01874-6.

[24] Y. M. Chiang and S. J. Feng, On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.*, 16(1) :105–129, 2008, doi:10.1007/s11139-007-9101-1.

[25] Y. M. Chiang and S. J. Feng, On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, 361(7) :3767–3791, 2009, doi:10.1090/S0002-9947-09-04663-7.

[26] C. Corrales Rodrigáñez, Nevanlinna theory on the p-adic plane, *Ann. Pol. Math.*, 57 (2) :135–147, 1992, doi:10.4064/ap-57-2-135-147.

[27] B. Diarra, Analyse p-adique, *Cours de DEA-Algèbre Commutative, FAST-Université du Mali*, 1999, URL `https://lmbp.uca.fr/~diarra/coursDEA.pdf`.

[28] A. Escassut, *Analytic elements in p-adic analysis*, Singapore : World Scientific, 1995, doi:10.1142/2724.

[29] A. Escassut, *Value distribution in p-adic analysis*, Hackensack, NJ : World Scientific, 2016, doi:10.1142/9845.

[30] A. Escassut, *P-adic analytic functions*, Hackensack, NJ : World Scientific, 2021, doi:10.1142/11990.

[31] A. Escassut, W. Tutschke, and C. C. Yang, Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis, Beijing : Science Press, 2008, URL https://hdl.handle.net/1783.1/10589.

[32] F. Gackstatter and I. Laine, Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen, *Ann. Pol. Math.*, 38 :259–287, 1980, doi:10.4064/ap-38-3-259-287.

[33] F. Q. Gouvêa, *p-adic numbers. An introduction*, Cham : Springer, 2020, doi:10.1007/978-3-030-47295-5.

[34] G. G. Gundersen, J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo, and D. Yang, Meromorphic solutions of generalized Schröder equations, *Aequationes Math.*, 63(1-2) :110–135, 2002, doi:10.1007/s00010-002-8010-z.

[35] W. K. Hayman, Picard values of meromorphic functions and their derivatives, *Annals of Mathematics*, 70(1) :9–42, 1959.

[36] W. K. Hayman, Picard values of meromorphic functions and their derivatives, *Ann. Math. (2)*, 70 :9–42, 1959, doi:10.2307/1969890.

[37] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford University Press, Oxford, 1964.

[38] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo, and K. Tohge, Complex difference equations of Malmquist type, *Comput. Methods Funct. Theory*, 1(1) :27–39, 2001, doi:10.1007/BF03320974.

[39] J. Heittokangas, J. Wang, Z. T. Wen, and H. Yu, Meromorphic functions of finite φ-order and linear q-difference equations, *J. Difference Equ. Appl.*, 27(9) :1280–1309, 2021, doi:10.1080/10236198.2021.1982919.

[40] P. C. Hu and C. C. Yang, The Second Main Theorem for algebroid functions of several complex variables, *Math. Z.*, 220(1) :99–126, 1995, doi:10.1007/BF02572605.

[41] P. C. Hu and C. C. Yang, Further results on factorization of meromorphic solutions of partial differential equations, *Result. Math.*, 30(3-4) :310–320, 1996, doi:10.1007/BF03322198.

[42] P. C. Hu and C. C. Yang, *Meromorphic functions over non-Archimedean fields*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000, doi:10.1007/978-94-015-9415-8.

[43] Z. Jilong, D. Yunfei, G. Zongsheng and Z. Ming, Existence of zero-order meromorphic solutions of certain q-difference equations, *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1) :1–13, 2018.

[44] S. Katok, *p-adic analysis compared with real*, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2007, doi:10.1090/stml/037.

[45] H. H. Khóai, On p-adic meromorphic functions, *Duke Math. J.*, 50 :695–711, 1983, doi:10.1215/S0012-7094-83-05033-0.

[46] H. H. Khoái and M. V. Quang, On p-adic Nevanlinna theory, *Lect. Notes math.*, 1351 : 146–158, 1988, doi:10.1007/BFb0081250.

[47] N. Koblitz, *P-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Springer, Cham, 1977, doi:10.1007/978-1-4684-0047-2.

[48] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, Berlin : W. de Gruyter, 1992 doi:10.1515/9783110863147.

[49] I. Laine and C. C. Yang, Clunie theorems for difference and q-difference polynomials, *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 76(3) :556–566, 2007, doi:10.1112/jlms/jdm073.

[50] S. T. Lan and Z. X. Chen, Growth, zeros and fixed points of differences of meromorphic solutions of difference equations, *Appl. Math., Ser. B (Engl. Ed.)*, 35(1) :16–32, 2020, doi:10.1007/s11766-020-3582-8.

[51] P. Li and C. C. Yang, Meromorphic solutions of functional equations with nonconstant coefficients, *Proc. Japan Acad., Ser. A*, 82(10) :183–186, 2006, doi:10.3792/pjaa.82.183.

[52] S. Li and B. Chen, Results on meromorphic solutions of linear difference equations, *Adv. Difference Equ.*, 2012 :7, 2012, doi:10.1186/1687-1847-2012-203.

[53] Y. Liu, On growth of meromorphic solutions for linear difference equations with meromorphic coefficients, *Adv. Difference Equ.*, 2013 :9, 2013, doi:10.1186/1687-1847-2013-60.

[54] J. Malmquist, Sur les fonctions à un nombre fini de branches definies par les équations différentielles du premier ordre, *Acta Math.*, 36 :297–343, 1913, doi:10.1007/BF02422385.

[55] A. Z. Mokhon'ko, On the Nevanlinna characteristics of some meromor phic functions, *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.*, 14 :83–87, 1971.

[56] A. Z. Mokhon'ko, Estimations for the increase of branches of algebroidal functions and their Nevanlinna characteristics, *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.*, 33 :99–107, 1980.

[57] X. Na and C. P. Zhong, Existence and properties of meromorphic solutions of some q-difference equations, *Adv. Difference Equ.*, 2015 :9, 2015. ISSN 1687-1847, doi:10.1186/s13662-014-0346-x.

[58] P. N. Natarajan, *An introduction to ultrametric summability theory*, New Delhi : Springer, 2014, doi:10.1007/978-81-322-1647-6.

[59] R. Nevanlinna, Zur Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Math.*, 46 :1–99, 1925, doi:10.1007/BF02543858.

[60] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars, 1929, URL `https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=ens-001:1929:28::45`.

[61] P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 28 :201–261, 1900, doi:10.24033/bsmf.633.

[62] C. W. Peng and H. W. Huang, The growth of meromorphic solutions for q-difference Painlevé IV equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 492(2) :14, 2020, doi:10.1016/j.jmaa.2020.124485.

[63] C. W. Peng and Z. X. Chen, Properties of meromorphic solutions of some certain difference equations, *Kodai Math. J.*, 37(1) :97–119, 2014, doi:10.2996/kmj/1396008250.

[64] J. F. Ritt, Transcendental transcendency of certain functions of Poincaré, *Math. Ann.*, 95 :671–682, 1926, doi:10.1007/BF01206632.

[65] A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, New York, NY : Springer, 2000, doi:10.1007/978-1-4757-3254-2.

[66] M. Ru, A note on p-adic Nevanlinna theory, *Proc. Am. Math. Soc.*, 129(5) :1263–1269, 2001, doi:10.1090/S0002-9939-00-05680-X.

[67] L. A. Rubel, Some research problems about algebraic differential equations. II, *Ill. J. Math.*, 36(4) :659–680, 1992, doi:10.1090/S0002-9947-1983-0712248-1.

[68] L. A. Rubel, *Entire and meromorphic functions. With assistance from James E. Colliander*, New York, NY : Springer, 1996, doi:10.1007/978-1-4612-0735-1.

[69] B. Saoudi, A. Boutabaa, and T. Zerzaihi, On factorization of p-adic meromorphic functions, *Indag. Math., New Ser.*, 31(6) :921–933, 2020, doi:10.1016/j.indag.2020.07.002.

[70] G. Valiron, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 59 :17–39, 1931, doi:10.24033/bsmf.1170.

[71] C. C. Yang and P. C. Hu, A survey on p-adic Nevanlinna theory and its applications to differential equations, *Taiwanese J. Math.*, 3(1) :1–34, 1999, doi:10.11650/twjm/1500407052.

[72] K. Yosida, A generalisation of a Malmquist's theorem, *Jpn. J. Math.*, 9 :253–256, 1933, doi:10.4099/jjm1924.9.0_253.

[73] Z. L. Yuan and Q. Ling, Results on the growth of meromorphic solutions of some linear difference equations with meromorphic coefficients, *Adv. Difference Equ.*, 2014 : 13, 2014, doi:10.1186/1687-1847-2014-306.

[74] T. Zerzaihi, M. Kecies, and K. Michael, Hensel codes of square roots of p-adic numbers, *Appl. Anal. Discrete Math.*, 4(1) :32–44, 2010, doi:10.2298/AADM1000009M.

[75] G. Zhang, Growth of meromorphic solutions of some q-difference equations, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013 :6, 2013, doi:10.1155/2013/943209.

[76] G. Zhang, Growth of meromorphic solutions of some-difference equations, In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2013. Hindawi, 2013.

[77] X. M. Zheng and Z. X. Chen, Some properties of meromorphic solutions of q-difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 361(2) :472–480, 2010, doi:10.1016/j.jmaa.2009.07.009.

ملخص : في هذه الأطروحة، قمنا بدراسة السلوك المقارب للحلول الميرومورفية لفئات معينة من المعادلات في حقل فائق القياس تام ومغلق جبرياً. فمن جهة، قمنا بدراسة نمو الحلول الميرومورفية لمعادلات q-الفرقية (نوع شرودر، نوع بانلوفي، ...إلخ)، كما نعطي بعض خصائص ترتيب نمو هذه الحلول ونحدد علاقتها بمعاملات المعادلات, q ودرجات طرفي هذه المعادلات. ومن جهة أخرى، نختار المعادلات الفرقية من نوع بانلوفي ونوع مالمكويست و نقوم بإجراء دراسة مماثلة كما في معادلات q-الفرقية.

الكلمات المفتاحية : توابع ميرومورفية، نظرية نيفانلينا، المعادلات الخطية الفرقية، ترتيب النمو.

Résumé : Dans cette thèse, on étudie le comportement asymptotique des solutions méromorphes de certaines classes d'équations fonctionnelles dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. D'une part, nous examinons la croissance des solutions méromorphes d'équations aux q-différences (de type Schröder, de type Painlevé, ..., etc). on donne également quelques caractéristiques d'ordre de croissance de ces solutions et on précise leur relation avec les coefficients des equations et les degrés des deux côtés de chaque équation. D'autre part, nous considérons les équations aux différences de type Painlevé et de type Malmquist et nous faisons aussi une étude similaire au cas des équations aux q-différences.

Mots clés : Fonctions méromorphes, Théorie de Nevanlinna, Équations aux différences, Équations aux q-différences, Ordre de croissance.

Abstract : In this thesis, we study the asymptotic behavior of meromorphic solutions of certain classes of functional equations in a complete and algebraically closed ultrametric field. First, we examine the growth of meromorphic solutions of q-difference equations (Schröder type, Painlevé type, ..., etc), we also give some characteristics of the order of growth of these solutions and we specify their relationship with the coefficients of the equations, q, and the degrees of both sides of these equations. On the other hand, we consider the difference equations of the Painlevé type and the Malmquist type and we also make a similar study as in the q-difference equations.

Keywords : Meromorphic functions, Nevanlinna theory, Difference equations, q-Difference equations, Order of growth.