République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BENYAHIA-JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

T H È S E

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat LMD

Spécialité Mathématiques
Contrôle optimal et calcul des variations
présentée et soutenue par

Somia Tamouza

Thème

Inclusions et équations différentielles appliquées à des problèmes de contrôle optimal

le 02/07/2024

Devant le jury composé de

Président	Tahar Haddad	Prof. Université de Jijel
Directeur de thèse	Fatine Aliouane	M.C.A. Université de Jijel
Co-Directeur de thèse	Dalila Azzam-Laouir	Prof. Université de Jijel
Examinateur	Nadir Arada	M.C.A. Université de Jijel
Examinateur	Amar Debbouche	Prof. Université de Guelma
Examinateur	Farida Belhannache	M.C.A. Université de Jijel

Remerciements

Tout d'abord, rendons louange à Dieu, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible.

J'exprime ma sincère gratitude envers ma directrice de thèse, Mlle **FATINE ALIOUANE**, Maitre de conférence classe A à l'université de Jijel. Sa disponibilité constante, ses efforts dévoués, son soutien inestimable et ses conseils éclairés tout au long des cinq années de thèse ont été d'une importance capitale pour la réussite de ce travail. Je lui suis profondément reconnaissante pour la pertinence scientifique de son sujet et ses encouragements constants qui ont été un moteur essentiel dans ce parcours.

Je souhaite également exprimer mes sincères remerciements à ma co-directrice de thèse, Mme **DALILA AZZAM-LAOUIR**, Professeur à l'université de Jijel. Son engagement constant, son intérêt persistant pour la réussite de ce travail malgré ses multiples responsabilités, ainsi que ses conseils avisés ont été d'une aide précieuse. Je lui suis très reconnaissante pour tout ce que j'ai pu apprendre à ses côtés.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Mr **Tahar Haddad**, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury.

Je souhaite également remercier les membres du jury : Mr **Nadir Arada**, Maitre de conférence classe A à l'université de Jijel, Mr **Amar Debbouche**, Professeur à l'université de Guelma et Mme **Farida Belhannache**, Maitre de conférence classe A à l'université de Jijel, pour avoir accepté d'évaluer ce travail. Leur intérêt est hautement apprécié.

$\mathcal{J}$'adresse mes sincères remerciements et ma gratitude aux personnes qui me sont les plus chères : mes parents, mes sœurs et mes frères, pour leur soutien, leurs encouragements et leur patience à mon égard, surtout dans les moments difficiles. $\mathcal{J}$e remercie également tous mes professeurs, depuis le primaire jusqu'à présent.

Somia Tamouza

Table des matières

INTRODUCTION

Les prémices du calcul fractionnaire (CF) remontent à la fin du XVl éme siècle, vers 1695-1697, lorsque Leibnitz évoqua dans une lettre à l'Hôspital le sens de la dérivée d'ordre $n = \frac{1}{2}$. Cependant, ce n'est qu'en 1738 que des avancées significatives ont été accomplies par Euler. Par la suite, en 1812, Laplace introduisa le concept de différentiation d'ordre non entier pour les fonctions représentables par une intégrale. Dans le traité de Lacroix 1820, l'idée d'Euler a été reprise et il a obtenu la formule suivante

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^a}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a+\frac{1}{2}}$$

qui exprime la dérivée d'ordre $1/2$ de la fonction x^a, en utilisant le symbole Γ qui généralise le factoriel. En 1822, Fourier suggéra l'idée d'utiliser l'égalité

$$\frac{d^n g(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^n d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\theta x - \theta t + n\frac{\pi}{2}) dt,$$

afin de définir des dérivées pour des ordres non entiers. C'était la première définition de la dérivée d'ordre arbitraire positif adaptée à toute fonction suffisamment régulière, non nécessairement une fonction puissance. Les exemples mentionnés ci-dessus peuvent être considérés comme une préhistoire de l'intégration-dérivation fractionnaire. L'histoire appropriée du calcul fractionnaire a commencé avec les articles d'Abel et de Liouville.

Sur la base des travaux de Liouville en 1832, Riemann considéra en 1847 dans un document, une première formulation d'intégrale fractionnaire connu par l'intégral de Riemann-Liouville, ce document ne fut publié qu'en 1876, dix ans après sa mort. Liouville, reconnu

comme le pionnier de la théorie fondamentale de l'intégration et de la dérivation fractionnaire a inspiré de nombreux autres mathématiciens à explorer d'avantage ces concepts, notamment N.Ya. Sonin (1869), A.V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892 – 1912) etc.
Au début du XX éme siècle, un document complet par Hadamard (1892) est apparu. L'idée de la différentiation fractionnaire d'une fonction analytique via la différentiation de sa série de Taylor

$$D^{\alpha}g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} C_k (z-z_0)^{k-\alpha}, \quad C_k = \frac{g^k(z_0)}{k!}, \tag{1}$$

était déjà connue avant la parution du document de Hadamard, elle a été utilisée ici comme un outil mathématique efficace. Depuis, toute méthode utilisant (1) est généralement nommée après Hadamard. Nous notons que Hadamard a traité de l'intégrale fractionnaire

$$I^{\alpha}\big(g(x)\big)(z) = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} g(z\tau)d\tau,$$

cela l'a ensuite conduit à examiner des intégrales fractionnaires généralisées de la forme

$$\int_0^1 u(\tau)g(z\tau)d\tau.$$

Cependant, Hadamard n'a pas développé cette idée, bien qu'il ait envisagé le cas

$$u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-\ln\tau)^{\alpha-1}.$$

Pour des détails supplémentaires sur l'histoire de l'intégration et de la dérivation fractionnaires, nous invitons le lecteur à consulter [74, 75, 77].

Malgré la longue histoire du CF, ce sujet a été peu discuté et n'a pas reçu suffisamment d'attention de la part des chercheurs. Mais au début des années 1970, et avec la révolution provoquée par l'apparition de l'ordinateur, ce sujet suscita l'intérêt d'éminents chercheurs tels que B. Ross, K. B. Oldham, J. Spanier, S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev et d'autres.

Avec l'avènement rapide des progrès scientifiques, de nombreux domaines scientifiques ont émergé (voir [6, 39, 45, 55, 62, 67, 68]). De nombreux chercheurs en physique, en mécanique, en biologie et dans d'autres disciplines scientifiques ont été confrontés à des défis et problèmes majeurs dans la modélisation mathématique de ces derniers. Depuis l'apparition des problèmes fractionnaires, les problèmes aux conditions aux limites des équations et les inclusions différentielles fractionnaires (EDF, IDF), ont acquis une grande renommée et suscitent un vif intérêt au sein de la communauté scientifique, de la part des chercheurs, en raison de leur capacité à développer diverses disciplines scientifiques (voir [7, 17, 40, 33, 62, 69] et leurs références).

Il s'avère que la classe des inclusions différentielles d'ordre entier a également produit des résultats qualitatifs significatifs, tel que la dynamique isotherme avec des vitesses stochastiques [66], les problèmes de contrôle optimal [58] et les processus de la rafle [8, 64, 70]. Ces derniers ont été introduits et étudiés en profondeur par Moreau dans les années 1970 (voir [70]). Il avait considéré l'inclusion différentielle du premier ordre suivante

$$-\dot{u}(t) \in \partial\psi_{S(t)}(u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T], T > 0,$$

où $\psi_{S(t)}$ désigne la fonction indicatrice d'un sous ensemble mobile non vide, fermé et convexe $S(t)$, et $\partial\psi_{S(t)}(\cdot) = N_{S(t)}(\cdot)$ est le cône normal de $S(t)$. Pour résoudre ce problème, J.J. Moreau a introduit une idée novatrice en proposant un "algorithme de rattrapage". Cette méthode consiste en la subdivision de l'intervalle de temps en sous intervalles, où des solutions approximatives sont définies sur chacun d'eux. Avec des majorations subtiles, il arriva à montrer que les limites de ces suites sont solutions du problème considéré. Depuis, plusieurs résultats ont été obtenus pour répondre aux besoins de divers domaines, tel que les processus de rafle non convexes [27, 35, 36], les processus de la rafle stochastiques [31], les processus de la rafle perturbés [32, 80, 82], la dépendance de l'état dans l'ensemble mobile [10, 64], le contrôle optimal [72, 83], les processus de la rafle du second ordre [1, 3, 9, 10, 30], l'extension de l'étude aux espaces de Banach [2, 8, 25], processus de la rafle fractionnaire [84], pour n'en citer que quelques-uns.

D'autre part, pour aussi répondre aux besoins des mathématiques appliquées et de la physique, les problèmes aux limites multi-points ont suscité une attention considérable de la part de nombreux auteurs. L'étude de ce type de problèmes a été initiée par V.A. Il'in et E.A. Moiseev [56] pour les équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre, motivée par les travaux de Bitsadze et Samarskii [24] sur les problèmes aux limites elliptiques linéaires non locales. Afin d'étendre la situation à une classe beaucoup plus large, Salem en [76] a étudié une EDF avec des conditions aux limites multi-points. Depuis, de nombreux chercheurs se sont intéressés à ce genre de problèmes ainsi qu'aux IDF plus générales avec les mêmes conditions aux limites. Voir par exemple [22, 40, 86].

Le redoutable développement scientifique a attiré des chercheurs dans les domaines des impacts environnementaux, de la biologie [59] et des phénomènes physiques [50] tel que la synchronisation de systèmes chaotiques, de systèmes couplés d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. Pour voir plus d'études, consulter les articles suivants [7, 17, 85].

Récemment, Castaing et al. [34] ont exploité des résultats d'existence du processus de la rafle et la structure topologique de l'ensemble de solutions d'une équation différentielle fractionnaire pour étudier diverses classes de problèmes d'ordre fractionnaire couplées à ceux d'évolution gouvernés par un opérateur maximal monotone, en particulier ceux gouvernés par le cône normal aux ensembles convexes fermés, c'est-à-dire le processus de la rafle.

La présente thèse est composée de trois chapitres. Quelques outils d'analyse convexe et non convexe ainsi que ceux du calcul fractionnaire utilisés pour montrer nos théorèmes principaux sont présentés dans le premier chapitre.

Motivées par [22, 40] et inspirées par [34], nous étudions dans le deuxième chapitre, dans un espace de Hilbert séparable, l'existence de solution absolument continue d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites multi-points couplée avec un processus de la rafle convexe du second ordre, autrement dit, on considère le problème suivant

$$(\mathcal{P}_g)\begin{cases} D^q x(t) = v(t) \quad \forall t \in\ [1,T], \\ x(1)=0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i), \\ -\ddot{v}(t) \in N_{C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t))}(\dot{v}(t)) + g(t,x(t),v(t),\dot{v}(t)) \quad p.p.\ t \in [1,T], \\ \dot{v}(t) \in C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t)) \quad \forall t \in [1,T], \\ v(1)=0,\ \dot{v}(1)=u_0, \end{cases}$$

où D^q est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1,2]$, $r \in (0,1)$, $\mu_i \in (1,T)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n},\ n \geq 2,\ g : [1,T] \times H \times H \times H \to\ H$ est Lebesgue mesurable sur $[1,T]$ et continue sur $H \times H \times H$ et $C : [1,T] \times H \times H \times H \rightrightarrows\ H$ est une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées.

À la fin du chapitre, un exemple numérique est également construit illustrant l'applicabilité de nos résultats théoriques obtenus. Ce résultat à fait l'objet d'une publication dans une revue de classe A (voir [79]).

Le troisième chapitre se compose de deux sections. Dans la première, étant suscitée par [40], et inspirée par [14], et afin d'enrichir ce domaine académique, nous étudions dans cette section dans un espace de Hilbert séparable, l'existence de solutions de l'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire aux conditions aux limites multi-points, i.e.,

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} D^q x(t)\ \in\ F(t,x(t),D^{q-1}x(t)) \quad p.p.\ t \in\ [1,T], \\ x(1)=0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i)), \end{cases}$$

où D^q est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1,2]$, $r \in (0,q-1)$, $\mu_i \in (1,T)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$ et $F : [1,T] \times H \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides, fermées et satisfaisant une propriété pseudo-Lipschitz. Nous explorerons la même méthode dans [14] pour le cas d'ordre entier, où la structure de la preuve est similaire à celle du théorème de Fillippov [48].

Contrairement aux problèmes de contrôle optimal régis par des équations différentielles avec un ordre entier (voir [41] et ses références), la classe des problèmes de contrôle régis par des équations différentielles fractionnaires, n'ont pas encore été systématiquement étudié. Néanmoins, l'intérêt pour ces problèmes s'est accru ces derniers temps grâce à certaines études citées dans la littérature. Ce développement a conduit à des applications dans la pratique tel que les objets contrôlés d'ordre fractionnaire, optimisation fractionnaire de systèmes dynamiques et autres ([15, 16, 23, 60, 61] et leurs les références). On s'intéresse dans la deuxième section à une application du résultat obtenu dans la première, à un problème d'optimisation, qui consiste à minimiser la fonction coût

$$\int_1^T L(t, x_u(t), D^q x_u(t))dt,$$

où $x_u(\cdot)$ est l'unique solution du problème

$$(\mathcal{P}_{g,u}) \begin{cases} D^q x(t) = g(t, x(t), D^{q-1}x(t), u(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ x(1) = 0, \quad D^r x(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i)), \end{cases}$$

g est une fonction univoque et u est la fonction de contrôle qui appartient à un ensemble approprié. La preuve repose essentiellement sur [47], où les auteurs ont étudié l'existence d'une solution à un système composé de deux inclusions différentielles, toutes deux régies par un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert séparable. Les résultats de ce chapitre, sont soumis pour publication dans une revue bien impactée [11].

Notations

Dans cette thèse, nous adopterons les notations suivantes

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	L'ensemble des nombres réels positifs
$\overline{\mathbb{R}}$	La droite achevée, i.e., $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des nombres naturels non nuls
(a, b)	Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
$J = [1, T]$	Pour $(T > 1)$, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$
$\big(\Omega, \Sigma, \mu\big)$	Espace mesuré
H	Un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\\| \cdot \\|$
$\mathcal{L}(J)$	La tribu de Lebesgue sur J
$\mathcal{B}(H)$	La tribu de Borel sur H
$\overline{\mathbf{B}}_H$	La boule unité fermée de H
$\overline{\mathbf{B}}_H(x, \eta)$	La boule fermée de rayon $\eta > 0$ et de centre $x \in H$
$\mathbf{B}_H(x, \eta)$	La boule ouverte de rayon $\eta > 0$ et de centre $x \in H$
$dom(g)$	Le domaine d'une fonction $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par $$dom(g) = \Big\{x \in H,\ g(x) < +\infty\Big\}$$
2^Y	L'ensemble des parties de Y

$\dot{v}(t)$	La dérivée première de l'application v au point t
$\ddot{v}(t)$	La dérivée seconde de v au point t
$I^{\alpha}f(\cdot)$	L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$
$D^{\alpha}f(\cdot)$	La dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$
$\Gamma(\cdot)$	La fonction Gamma d'Euler définie par : $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t)dt, \quad \text{pour } \alpha > 0.$$
$\mathfrak{B}(\cdot,\cdot)$	La fonction Bêta définie par : $$\mathfrak{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad \text{pour } \alpha,\beta > 0.$$
$\mathcal{F}(X,Y)$	L'espace de toutes les applications $f : X \longrightarrow Y$.
$\mathcal{C}(J,H)$	L'espace de Banach de toutes les applications continues $v(\cdot)$ de J dans H muni de la norme du sup $$\|v(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t\in J}\|v(t)\|.$$
$\mathcal{C}_{\delta^n}([a,b],\mathbb{R})_{(n\geq 1)}$	L'espace de Banach de toutes les applications à valeurs réelles g sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $\delta^n g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $\delta^n(\cdot) = \left(t\dfrac{d}{dt}\right)^n$
$\mathbf{L}^0(J,H)$	L'espace des applications mesurables $g : J \longrightarrow H$
$\mathbf{L}^p(J,H)$	Pour $p \in [1,\infty[$, l'espace de Banach des applications mesurables $g : J \to H$ muni de la norme $$\|g(\cdot)\|_p = \left(\int_J \|g(\cdot)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$\mathbf{L}^{\infty}(J,H)$	L'espace de Banach des applications mesurables essentiellement bornées $g : J \to H$, muni de sa norme $$\|g(\cdot)\|_{\infty} = \inf\Big\{c \geq 0 : \ \|g(t)\| \leq c \quad p.p \text{ sur } J\Big\}.$$
$W^{2,1}(J,H)$	L'espace des applications absolument continues $v : J \to H$ telles que leurs dérivées secondes $\ddot{v} \in \mathbf{L}^1(J,H)$.
$\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$	L'espace de toutes les applications continues f telles que leurs dérivées fractionnaires de Hadamard d'ordre $(q-1)$ (resp. q) sont continues (resp. intégrables au sens de Bochner), i.e., $$\mathcal{W}^{q,1}(J,H) = \big\{f \in \mathcal{C}(J,H) : \ D^{q-1}f \in \mathcal{C}(J,H) \text{ et } D^q f \in \mathbf{L}^1(J,H)\big\}.$$

	Pour un sous ensemble non vide S de H, on note par
$Fr(S)$	La frontière de l'ensemble S
$int(S)$	L'intérieur de S
$S^{\perp}$	L'orthogonal de S, défini par $$S^{\perp} = \Big\{x \in H : \langle y, x\rangle = 0,\ \forall\, y \in S\Big\}$$
$co(S)$	L'enveloppe convexe de S
$\overline{co}(S)$	L'enveloppe convexe fermée de S
$\chi_S(\cdot)$	La fonction caractéristique de S, définie par $$\chi_S(y) = \begin{cases} 1 & y \in S; \\ 0 & y \notin S \end{cases}$$
$\psi_S(\cdot)$	La fonction indicatrice de S, définie par $$\psi_S(\cdot) = \begin{cases} 0 & y \in S; \\ +\infty & y \notin S \end{cases}$$
$\delta^*(\cdot, S)$	La fonction d'appui de S, définie par $$\delta^*(S, \xi) = \sup_{x \in S}\langle x, \xi\rangle, \quad \text{pour tout } \xi \in H.$$
$d_S(\cdot)$	La fonction distance de S définie par $$d_S(x) = \inf_{y \in S} \|x - y\|, \quad \text{pour tout } x \in H.$$
$p_S(x)$,	La projection de x sur S définie par $$p_S(x) = \big\{y \in S,\ d_S(x) = \|x - y\|\big\}$$
$\partial g(\cdot)$	Le sous différentiel d'une fonction g
$\partial^C g(\cdot)$	Le sous différentiel de Clarke de g
$N_S(\cdot)$	Cône normal à S
$N_S^C(\cdot)$	Cône normal de Clarke à S
$\mathcal{H}(A, B)$	La distance de Hausdorff entre les sous ensembles fermés A et B de H

Chapitre 1

Résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous présenterons brièvement certains résultats préliminaires essentiels issus de l'analyse convexe et fonctionnelle et du calcul fractionnaire. Ces notions fournissent une base solide pour la suite de notre thèse, en tirant parti des références pertinentes sélectionnées. Nous explorerons ainsi, quelques résultats de base et certaines propriétés clés qui seront d'une grande utilité dans le développement ultérieur de notre étude.

1.1 Continuité

Pour les résultats de cette section, voir les références [12], [18], [42] et [78].

Définition 1.1.1 ***(Application absolument continue)***
Soit E un espace vectoriel normé. Une application $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ est dite absolument continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de

l'intervalle $[a,b]$ *par des intervalles disjoints* $]a_j, b_j[$ *tel que*

$$\sum_j (b_j - a_j) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_j \|g(b_j) - g(a_j)\| < \epsilon.$$

Proposition 1.1.2
Une application $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to E$ *est dite absolument continue si et seulement si, il existe une fonction intégrable* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $t \in (a,b]$

$$g(t) - g(a) = \int_a^t u(t)dt.$$

Dans ce cas, g *est différentiable presque partout et sa dérivée* $\dot{g} = u$ *presque partout.*

Définition 1.1.3 ***(Équi-continuité)***
Soient $(X,d), (Y,d')$ *deux espaces métriques. Une partie* S *de* $\mathcal{F}(X,Y)$ *est dite équi-continue au point* x *si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x' \in X, \forall g \in S : d(x,x') < \eta \Rightarrow d(g(x), g(x')) < \epsilon.$$

• S est dite équi-continue sur X si elle est équi-continue en tout point $x \in X$.

Définition 1.1.4
Soit $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction. Alors*

(*i*) *la limite inférieure de la fonction* g *au point* $x_0 \in X$*, notée* $\liminf_{x \to x_0} g(x)$*, est définie par*

$$\liminf_{x\to x_0} g(x) = \sup_{U \in \mathcal{V}(x_0)} \Big(\inf_{x \in U} g(x) \Big),$$

(*ii*) *la limite supérieure de la fonction* g *au point* $x_0 \in X$*, notée* $\limsup_{x \to x_0} g(x)$*, est définie par*

$$\limsup_{x\to x_0} g(x) = \inf_{U \in \mathcal{V}(x_0)} \Big(\sup_{x \in U} g(x) \Big).$$

Ici $\mathcal{V}(x_0)$ *est l'ensemble des voisinages du point* x_0*.*

Définition 1.1.5 ***(Semi-continuité)***
Soit (X,d) *un espace métrique et* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Alors,*
(**1**) *g est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point* $x_0 \in X$ *si et seulement si, pour tout* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* $k < g(x_0)$*, il existe un voisinage* U_{x_0} *de* x_0 *tel que* $k < g(x)$*, pour tout* $x \in U_{x_0}$*.*

• *g est s.c.i. sur X si g est s.c.i. en tout point de X.*
(**2**) *g est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{R}$ tel que $k > g(x_0)$, il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 tel que $k > g(x)$, pour tout $x \in U_{x_0}$.*
• *g est s.c.s. sur X si g est s.c.s. en tout point de X.*

Proposition 1.1.6
Soit (X, d) un espace métrique et $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors,

- *g est s.c.i. au point x_0 si et seulement si* $\liminf\limits_{x \to x_0} g(x) \geq g(x_0)$,
- *g est s.c.s. au point x_0 si et seulement si* $\limsup\limits_{x \to x_0} g(x) \leq g(x_0)$.

1.2 Quelques résultats de base de l'analyse convexe

Voir [12] pour les résultat de cette section.

Définition 1.2.1
Soit E un espace vectoriel, et soit M une partie non vide de E. On dit que M est convexe si pour tous $x, y \in M$, $\alpha \in [0, 1]$ on a

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

En d'autres termes, pour tous $x, y \in M$, le segment de droite $[x, y]$ est inclus dans M (voir Fig. *1.1.)*

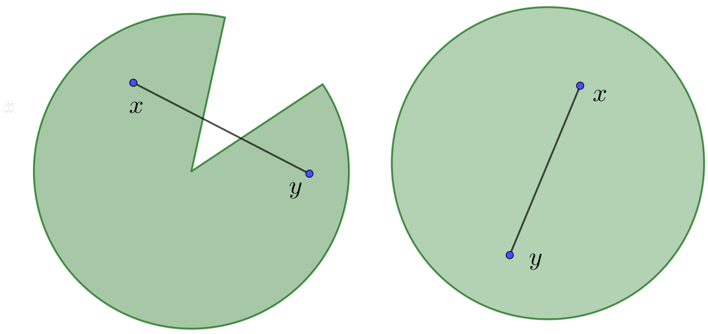

Figure 1.1 – L'ensemble à gauche est non convexe et celui à droite est convexe

Définition 1.2.2
Soit E un espace vectoriel et soient $y_1, y_2, \ldots, y_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tout élément $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ tel que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_n$, où Δ_n est le simplexe de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\Delta_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \ \alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Proposition 1.2.3
Soit E un espace vectoriel et soit M un sous ensemble de E. Alors M est convexe si et seulement si, il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Définition 1.2.4
Soit E un espace vectoriel et soit M un sous ensemble de E. On appelle enveloppe convexe de M, notée $co(M)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contiennent M. C'est le plus petit convexe de E qui contient M.

Définition 1.2.5
Soit E un espace vectoriel topologique et soit M un sous ensemble de E. On appelle enveloppe convexe fermée de M, notée $\overline{co}(M)$, le plus petit ensemble convexe fermé de E qui contient M.

Théorème 1.2.6
Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Alors pour tout ensemble non vide M de E, on a

$$\overline{co}(M) = \left\{ y \in E : \quad \langle y', y \rangle \leq \delta^*(y', M) \quad \forall y' \in E' \right\}.$$

Définition 1.2.7
Soit E un espace vectoriel et soit $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une application. On dit que g est propre si $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g \not\equiv +\infty$ i.e., il existe $x_0 \in E$, tel que $g(x_0) \neq +\infty$.

Définition 1.2.8
Soit E un espace vectoriel et soit $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une application. On dit que g est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in dom(g)$ et $\alpha \in [0, 1]$ on a,

$$g\big(\alpha x + (1 - \alpha) y\big) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha) g(y).$$

1.3 Topologie faible et compacité

Les résultats de cette section sont extraits des références [12], [18], [20], [28], [63] et [78].

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé réel. On note par E' l'espace dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|g\|_{E'} = \sup_{y\in\overline{\mathbf{B}}_E} |g(y)| = \sup_{y\in\overline{\mathbf{B}}_E} |\langle g, y\rangle|.$$

Ici $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre E et E'.

Définition 1.3.1
Soit $g \in E'$ et soit

$$\begin{array}{rrcl} \phi_g : & E & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \phi_g(y) = g(y) =: \langle g, y\rangle. \end{array}$$

La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, est la topologie la plus fine rendant continues les applications ϕ_g.

Proposition 1.3.2
La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.

Proposition 1.3.3
Soit $(y_n)_n$ une suite de points de E. Alors

(i) $(y_n)_n$ converge vers y pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle g, y_n\rangle)_n$ converge vers $\langle g, y\rangle$ pour tout $g \in E'$;

(ii) si $(y_n)_n$ converge fortement vers y, i.e., $\|y_n - y\|_E \to 0$ alors $(y_n)_n$ converge faiblement vers y;

(iii) si $(y_n)_n$ converge faiblement vers y, alors $(\|y_n\|_E)_n$ est bornée et on a

$$\|y\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|y_n\|_E;$$

(iv) si $(y_n)_n$ converge faiblement vers y, et si $(g_n)_n \subset E'$ converge fortement vers g, i.e., $\|g_n - g\|_{E'} \to 0$ alors, $(\langle g_n, y_n\rangle)_n$ converge vers $\langle g, y\rangle$.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, E' son dual et E'' son bidual $\big($c'est à dire, le dual de E' muni de la norme $\|\zeta\|_{E''} = \sup_{g\in\overline{\mathbf{B}}_{E'}} |\langle\zeta, g\rangle|\big)$.

Définition 1.3.4
On appelle injection canonique entre E et E'' l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: \ & E \to E'' \\ & y \mapsto \mathcal{J}(y) = \mathcal{J}_y, \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_y: \ & E' \to \mathbb{R} \\ & g \mapsto \mathcal{J}_y(g) = g(y) = \langle g, y \rangle. \end{aligned}$$

Définition 1.3.5 ***(Boule compacité)***
Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble A de E est boule compact, si pour toute boule fermée $\overline{\mathbf{B}}_E(x,\eta)$ de E, l'ensemble $\overline{\mathbf{B}}_E(x,\eta) \cap A$ est compact.

Remarque 1.3.6
Il est clair que tout ensemble boule compact A est fermé.

Définition 1.3.7
Soit X un espace topologique séparé et A un sous ensemble de X. On dit que A est relativement compact si son adhérence dans X est compacte.

Théorème 1.3.8
Soit (X,d) un espace métrique complet et A un sous ensemble de X. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) *A est relativement compact.*

(ii) *Pour toute suite $(x_n)_n$ de A, on peut extraire une sous suite qui converge dans X.*

Théorème 1.3.9 ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà).***
Soit (X,d) un espace métrique compact, (Y,d') un espace métrique complet et $\mathcal{M}$ un sous ensemble de $\mathcal{C}(X,Y)$, muni de la distance de la convergence uniforme. Alors, $\mathcal{M}$ est relativement compact si et seulement si, $\mathcal{M}$ est équi-continu et $\mathcal{M}(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$, avec

$$\mathcal{M}(x) = \big\{ g(x) : \quad g \in \mathcal{M} \big\}.$$

Lemme 1.3.10 ***(Banach-Mazur).***
Soit E un espace de Banach et soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers y. Alors, il existe une suite $(z_j)_j \subset E$ qui converge fortement vers y et tel que chaque z_j est une combinaison convexe des éléments $y_j, y_{j+1}, \dots$

Théorème 1.3.11 ***(Théorème de Mazur).***
Soit E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors, $\overline{co}(A)$ est compact.

Définition 1.3.12 ***(Espaces réflexifs)***
Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif si $\mathcal{J}(E) = E''$. Dans ce cas, $\mathcal{J}$ est un isomorphisme isométrique de E dans E''.
- *Nous avons que tout espace de Hilbert est réflexif.*
- *Nous avons que les espaces $\mathbf{L}^p (1 < p < +\infty)$ sont réflexifs.*

Théorème 1.3.13
Soit E un espace de Banach réflexif. Alors la boule unité fermée de E est faiblement compacte.

1.4 Multi-applications

Les résultats suivants proviennent des références [12] et [38].

Définition 1.4.1
Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle application multivoque ou multi-application (m.a.) définie sur X à valeurs dans Y toute application G définie sur X à valeurs dans 2^Y (l'ensemble de toutes les parties de Y). On la note $G : X \rightrightarrows Y$ c'est-à-dire, pour tout $x \in X$, $G(x)$ est un sous ensemble de Y.

- Nous appelons domaine (effectif) de G, noté $D(G)$, le sous ensemble de X défini par
$$D(G) = \Big\{x \in X : G(x) \neq \emptyset\Big\}.$$
- On appelle image de G, notée $\mathrm{R}(G)$, le sous ensemble de Y défini par
$$\mathrm{R}(G) = \Big\{y \in Y : \ \exists x \in D(G), \ y \in G(x)\Big\} = \bigcup_{x \in D(G)} G(x).$$
- On appelle graphe de G, noté $gph(G)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par
$$gph(G) = \Big\{(x, y) \in D(G) \times Y : \ y \in G(x)\Big\}.$$
- La multi-application inverse $G^{-1} : Y \rightrightarrows X$ de G est définie par
$$x \in G^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in G(x).$$

- L'image réciproque large de $U \subset Y$ par G, notée $G^{-1}(U)$, est l'ensemble défini par

$$G^{-1}(U) = \Big\{ x \in X : \ G(x) \cap U \neq \emptyset \Big\}.$$

- On appelle image réciproque étroite de $U \subset Y$ par G, notée $G_+^{-1}(U)$, l'ensemble défini par

$$G_+^{-1}(U) = \Big\{ x \in X : \ G(x) \subset U \Big\}.$$

Définition 1.4.2
Soit (X, d) un espace métrique et soient K_1, K_2 deux sous ensembles de X, l'écart entre K_1 et K_2 est défini par

$$e(K_1, K_2) = \sup_{a \in K_1} d_{K_2}(a).$$

et la distance de Hausdorff entre K_1 et K_2 est définie par

$$\mathcal{H}(K_1, K_2) = \sup \big(e(K_1, K_2), e(K_2, K_1) \big).$$

Proposition 1.4.3
Soient K_1, K_2 des sous ensembles de X. Nous avons, pour tout $x \in X$

$$|d_{K_1}(x) - d_{K_2}(x)| \leq \mathcal{H}(K_1, K_2).$$

1.4.1 Continuité des multi-applications

Définition 1.4.4
Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.
On dit que G est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout ouvert W de Y vérifiant $G(x_0) \cap W \neq \emptyset$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, $G(x) \cap W \neq \emptyset$.
- *On dit que G est s.c.i. si elle est s.c.i. en tout point $x_0 \in X$.*

Proposition 1.4.5
Soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

(*i*) *G est est s.c.i. sur X.*

(*ii*) *$G^{-1}(U)$, est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.*

(*iii*) *$G_+^{-1}(V)$, est un fermé de X pour tout fermé V de Y.*

Exemple 1.4.6
Soit

$$\begin{aligned} G:\ & \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R} \\ & x \mapsto G(x) = \begin{cases} [-1,1] & si \quad x \neq 0, \\ \{0\} & si \quad x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La multi-application G est s.c.i. sur $\mathbb{R}$. En effet, G est s.c.i. sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $G_+^{-1}(V)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ pour tout fermé V de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} G_+^{-1}(V) =& \Big\{ x \in \mathbb{R} :\ G(x) \subset V \Big\} \\ =& \Big\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} :\ [-1,1] \subset V \Big\} \cup \Big\{ x = 0 :\ \{0\} \subset V \Big\}. \end{aligned}$$

- *Si $[-1,1] \subset V$, alors $G_+^{-1}(V) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \cup \{0\} = \mathbb{R}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$.*
- *Si $\{0\} \not\subset V$, alors $[-1,1] \not\subset V$, donc $G_+^{-1}(V) = \emptyset$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$.*
- *Si $\{0\} \subset V$ et $[-1,1] \not\subset V$ alors $G_+^{-1}(V) = \{0\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$.*

D'où G est une multi-application s.c.i. sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.7
Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.
On dit que G est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout ouvert W de Y contenant $G(x_0)$ $(G(x_0) \subset W)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $G(V) \subset W$, c'est-à-dire $G(y) \in W$, $\forall y \in V$.
• *On dit que G est s.c.s. si elle est s.c.s. en tout point $x_0 \in X$.*

Proposition 1.4.8
Soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) *G est est s.c.s. sur X.*

(ii) *$G_+^{-1}(U)$, est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.*

(iii) *$G^{-1}(V)$, est un fermé de X pour tout fermé V de Y.*

Exemple 1.4.9
Soit

$$\begin{aligned} G:\ & [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R} \\ & x \mapsto G(x) = \begin{cases} \{1\} & si \quad x \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big), \\ \{0,1\} & si \quad x = \dfrac{1}{2}, \\ \{0\} & si \quad x \in \Big(\dfrac{1}{2}, 1\Big]. \end{cases} \end{aligned}$$

La multi-application G est s.c.s. sur $[0,1]$. En effet, G est s.c.s. sur $[0,1]$ si et seulement si $G_+^{-1}(U)$ est un ouvert de $[0,1]$ pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} G_+^{-1}(U) =& \Big\{ x \in [0,1] : \ G(x) \subset U \Big\} \\ =& \Big\{ x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big) : \ \{1\} \subset U \Big\} \cup \Big\{ x \in \frac{1}{2} : \ \{0,1\} \subset U \Big\} \cup \Big\{ x \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big] : \ \{0\} \subset U \Big\}. \end{aligned}$$

- *Si $\{0,1\} \subset U$, alors $\{0\} \subset U$ et $\{1\} \subset U$, donc* $G_+^{-1}(U) = \Big[0, \frac{1}{2}\Big) \cup \Big\{\frac{1}{2}\Big\} \cup \Big(\frac{1}{2}, 1\Big] = [0,1]$ *qui est un ouvert de $[0,1]$.*
- *Si $\{0\} \not\subset U$ et $\{1\} \not\subset U$, alors $\{0,1\} \not\subset U$, donc $G_+^{-1}(U) = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ qui est un ouvert de $[0,1]$.*
- *Si $\{0\} \subset U$ et $\{1\} \not\subset U$, alors $\{0,1\} \not\subset U$, donc $G_+^{-1}(U) = \Big(\frac{1}{2}, 1\Big]$ qui est un ouvert de $[0,1]$.*
- *Si $\{0\} \not\subset U$ et $\{1\} \subset U$, alors $\{0,1\} \not\subset U$, donc $G_+^{-1}(U) = \Big[0, \frac{1}{2}\Big)$ qui est un ouvert de $[0,1]$.*

D'où, G est une multi-application s.c.s sur $[0,1]$.

Définition 1.4.10

Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.
On dit que G est continue au point $x_0 \in X$ si elle est à la fois s.c.i. et s.c.s. au point $x_0 \in X$. Elle est dite continue, si elle est continue en tout point $x_0 \in X$.

Proposition 1.4.11

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit E un espace de Banach séparable et E' son dual topologique. Soit $F : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes et soit $G : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides, convexes fermées. Si pour tout $x' \in E'$,

$$\delta^*(x', G(t)) \leq \delta^*(x', F(t)) \ \mu - p.p.$$

Alors,

$$G(t) \subset F(t) \ \mu - p.p.$$

1.4.2 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.4.12

Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique. Une multi-application $G : \Omega \rightrightarrows X$ est Σ-mesurable ou simplement mesurable, si pour tout ouvert U de X, on a $G^{-1}(U) \in \Sigma$.

Définition 1.4.13
Soit E un espace de Banach et soit $G : J \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable. Alors on dit que G est intégrablement bornée s'il existe une application positive $\gamma(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $G(t) \subset \gamma(t)\overline{\mathbf{B}}_E$, pour tout $t \in J$, on a

$$\sup\{\|u\|,\ u \in G(t)\} \leq \gamma(t).$$

Définition 1.4.14
Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et soit E un espace vectoriel normé. Soit $G : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que G est scalairement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $t \mapsto \delta^*(x', G(t))$ est mesurable.

Définition 1.4.15
Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et soit E un espace vectoriel normé. Soit $G : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que G est scalairement intégrable si pour tout $x' \in E'$, l'application $t \mapsto \delta^*(x', G(t))$ est mesurable et intégrable.

Définition 1.4.16
Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et soit $G : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application. Une application $\xi : \Omega \to X$ est dite sélection de G si pour tout $t \in \Omega$, $\xi(t) \in G(t)$.

Définition 1.4.17
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. Soit E un espace vectoriel normé et $G : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application. Alors

- *L'ensemble de toutes les sélections mesurables de G est défini par*

$$S_G = \big\{\xi \in \mathbf{L}^0(\Omega, E) :\ \xi(t) \in G(t) \quad \mu - p.p.\big\}.$$

- *L'ensemble de toutes les sélections intégrables de G est défini par*

$$S_G^1 = \big\{\xi \in \mathbf{L}^1(\Omega, E) :\ \xi(t) \in G(t) \quad \mu - p.p.\big\}.$$

Proposition 1.4.18
Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable complet et soit $G : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Si G est mesurable alors, elle admet au moins une sélection mesurable, i.e., $S_G \neq \emptyset$.

Théorème 1.4.19
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie et Σ est μ-complète. Soit E un espace de Banach séparable, et $G : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application intégrablement bornée à valeurs non vides convexes et faiblement compactes. Alors, S_G^1 est convexe et $\sigma(\mathbf{L}^1(\Omega, E), \mathbf{L}^\infty(\Omega, E'))$-compact.

Théorème 1.4.20
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie et Σ est μ-complète. Soit E un espace de Banach séparable, E' son dual topologique, et $G : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application scalairement intégrable à valeurs non vides compactes et convexes. On suppose que

(i) $\displaystyle\int_\Omega G d\mu = \left\{ \int_\Omega \xi d\mu : \quad \xi \in S_G \right\}$ *est inclus dans E;*

(ii) pour tout sous ensemble fixé équi-continu S dans E', il existe une fonction positive $g_S \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$\sup_{x' \in S} \left| \delta^*(x', G(v)) \right| \leq g_S(v), \quad \forall v \in \Omega.$$

Alors, $\displaystyle\int_\Omega G d\mu$ est un ensemble convexe compact dans E.

Théorème 1.4.21
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu $\mu-$complète, X un espace métrique séparable, et soit $G : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(a) G est mesurable.

(b) G admet une suite de sélections mesurables $(\vartheta_n(\cdot))_n$ telle que

$$G(t) = \overline{\{\vartheta_n(t)\}}_n.$$

(c) Le graphe de G appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

1.5 Sous différentiels et cônes normaux

Les résultats suivants sont pris des références [26], [43], [44] et [73].

1.5.1 Sous différentiels

Définition 1.5.1 ***(Sous différentiel)***
Soient H un espace de Hilbert, $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe, et $y_0 \in H$ tel que $g(y_0) < +\infty$. Le sous différentiel (au sens de l'analyse convexe) de g au point y_0 est défini par

$$\partial g(y_0) = \{y' \in H : \ g(y) \geq g(y_0) + \langle y', y - y_0 \rangle \quad \forall y \in H\}.$$

Si $g(y_0) = +\infty$, alors $\partial g(y_0) = \emptyset$.

Interprétation géométrique :
le sous différentiel d'une fonction g en un point représente tous les vecteurs qui définissent des plans tangents à la fonction à ce point.

Exemple 1.5.2
Soit

$$\begin{aligned} g:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x \mapsto g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & si \quad x \geq 0, \\ +\infty & si \quad x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors,

$$\partial g(x) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{-1}{2\sqrt{x}} \right\} & si \quad x > 0, \\ \emptyset & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

En effet,

- *si* $x < 0$, *alors* $g(x) = +\infty$, *donc* $\partial g(x) = \emptyset$.
- *Si* $x > 0$, *alors* $g(x) = -\sqrt{x}$, g *est dérivable donc* $\partial g(x) = \Big\{ g'(x) \Big\} = \left\{ \dfrac{-1}{2\sqrt{x}} \right\}$.
- *Si* $x = 0$, *alors*

$$\begin{aligned} \partial g(0) &= \Big\{ y \in \mathbb{R} :\ g(x) \geq g(0) + \langle y, x - 0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} :\ g(x) \geq yx, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} :\ -\sqrt{x} \geq yx, \quad \forall x \geq 0 \Big\} \cap \Big\{ y \in \mathbb{R} :\ +\infty > yx, \quad \forall x < 0 \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} :\ y\sqrt{x} \leq -1, \quad \forall x > 0 \Big\} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} :\ y \leq \frac{-1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0 \Big\} \cap \mathbb{R} \\ &= \emptyset \cap \mathbb{R} = \emptyset. \end{aligned}$$

Définition 1.5.3 ***(Dérivée directionnelle)***
Soient $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $y_0 \in dom(g)$ *et* $h \in H$. *On appelle dérivée directionnelle de* g *au point* y_0 *dans la direction* h *la limite notée* $g'(y_0; h)$ *quand elle existe avec*

$$g'(y_0; h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t}.$$

Proposition 1.5.4

Soit $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre, convexe et soit* $y_0 \in dom(g)$. *Alors pour tout* $h \in H$, $g'(y_0; h)$ *existe.*

Preuve.
Soient $y_0 \in dom(g), h \in H$ et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & t & \longmapsto & f(t) = g(y_0 + th). \end{array}$$

Il est clair que f est propre et convexe car g l'est aussi. De plus, puisque $y_0 \in dom(g)$ alors $0 \in dom(f)$. Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, i.e.,

$$f'_d(0) = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t} = g'(y_0; h) \text{ existe.}$$

■

Proposition 1.5.5

Soit $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et soit $y_0 \in dom(g), h \in H$. Nous avons $y' \in \partial g(y_0)$ si seulement si $\langle y', h\rangle \leq g'(y_0; h)$, pour tout $h \in H$.

Preuve.
Soit $y' \in \partial g(y_0)$, on a

$$g(y) \geq g(y_0) + \langle y', y - y_0\rangle, \quad \forall y \in H.$$

En particulier pour $y = y_0 + th$, pour tout $h \in H, t > 0$, on obtient

$$\frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t} \geq \langle y', h\rangle,$$

donc

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t} \geq \langle y', h\rangle.$$

Par conséquent, $g'(y_0; h) \geq \langle y', h\rangle, \quad \forall h \in H$.
Inversement, supposons que

$$g'(y_0; h) \geq \langle y', h\rangle, \quad \forall h \in H,$$

ceci est équivalent à,

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t} - \langle y', h\rangle \right) \geq 0, \quad \forall h \in H.$$

Posons

$$l = \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t} - \langle y', h\rangle \right) \geq 0, \quad \forall h \in H,$$

Par définition, on a pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < t < \delta$;

$$\left| \frac{g(y_0 + th) - g(y_0)}{t} - \langle y', h\rangle - l \right| < \epsilon, \quad \forall h \in H.$$

Donc, pour tout $n > 0$, il existe $\delta_n > 0$ tel que pour tout $0 < t_n < \delta_n$;

$$\left| \frac{g(y_0 + t_n h) - g(y_0)}{t_n} - \langle y', h \rangle - l \right| < \frac{1}{n}, \quad \forall h \in H,$$

Posons $h_n = \dfrac{y - y_0}{t_n}, y \in H$. On aura, pour tout $n > 0$, il existe $\delta_n > 0$; pour tout $0 < t_n < \delta_n$;

$$\left| \frac{g(y) - g(y_0) - \langle y', y - y_0 \rangle}{t_n} - l \right| < \frac{1}{n},$$

i.e.,

$$l - \frac{1}{n} < \frac{g(y) - g(y_0) - \langle y', y - y_0 \rangle}{t_n} < l + \frac{1}{n},$$

d'où,

$$g(y) - g(y_0) - \langle y', y - y_0 \rangle > t_n l - t_n \frac{1}{n}.$$

Sachant que, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $l \geq 0$. On aura

$$g(y) - g(y_0) - \langle y', y - y_0 \rangle \geq 0, \quad \forall y \in H,$$

(car $l < +\infty$ via la Proposition 1.5.4). D'où, $y' \in \partial g(y_0)$. ■

1.5.2 Cônes normaux

Définition 1.5.6 ***(Cône)***
Soit S un sous ensemble de H. On dit que S est un cône si

$$\forall y \in S, \ \forall \lambda > 0, \ \lambda y \in S,$$

i.e.,

$$\forall \lambda > 0, \ \lambda S \subset S.$$

Définition 1.5.7
Soit S un cône convexe. Alors les relations suivantes sont équivalentes

(i) $\forall t \geq 0, \ \forall r \geq 0, \ tS + rS \subset S,$

(ii) $S + S \subset S.$

Définition 1.5.8 ***(Cône polaire)***
Soit H un espase de Hilbert et S un sous ensemble non vide de H. On definit le cône polaire de S par

$$S^0 = \Big\{ y' \in H : \ \langle y', v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in S \Big\}.$$

Définition 1.5.9 ***(Cône normal au sens de l'analyse convexe)***
Soit H un espace de Hilbert et S un sous ensemble non vide de H. On appelle cône normal à S au point $y_0 \in S$, l'ensemble défini par

$$N_S(y_0) := \Big\{ y' \in H : \ \langle y', y - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in S \Big\}, \ \textit{et} \ \ N_S(y_0) = \emptyset \ \ \textit{si}\ y_0 \notin S.$$

Voir FIG. *1.2*

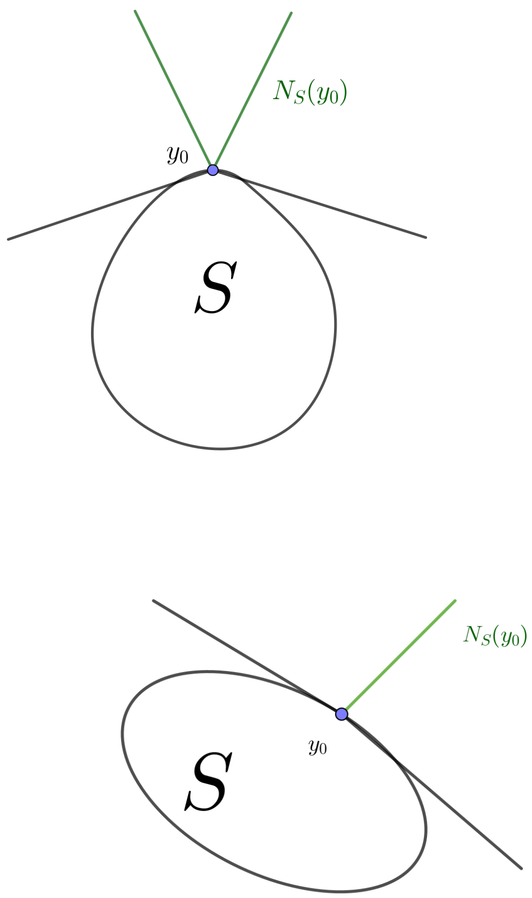

FIGURE 1.2 – Cône normal

Interprétation géométrique :
C'est l'angle délimité par les normales à l'ensemble S.

Proposition 1.5.10
Soit S un sous ensemble non vide de H. Les deux assertions suivantes sont satisfaites.

(i) Si $y_0 \in int(S)$, alors $N_S(y_0) = \{0\}$,

(ii) si S est convexe et fermé avec $int(S) \neq \emptyset$ et si $y_0 \in Fr(S)$, alors $N_S(y_0) \neq \{0\}$.

Proposition 1.5.11
Pour tout sous-ensemble S de H et tout $y_0 \in S$, nous avons

$$N_K(y_0) = \partial\psi_S(y_0).$$

Preuve.
Comme $y_0 \in S$, $\psi_S(y_0) = 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\partial\psi_S(y_0) &= \Big\{y' \in H : \ \psi_S(y) \geq \psi_S(y_0) + \langle y', y - y_0\rangle \ \ \forall y \in H\Big\} \\
&= \Big\{y' \in H : \ \psi_S(y) \geq \langle y', y - y_0\rangle \ \ \forall y \in S\Big\} \bigcap \\
&\quad \Big\{y' \in H : \ \psi_S(y) \geq \langle y', y - y_0\rangle \ \ \forall y \in H \backslash S\Big\} \\
&= \Big\{y' \in H : \ \psi_S(y) \geq \langle y', y - y_0\rangle \ \ \forall y \in S\Big\} \bigcap H \\
&= \Big\{y' \in H : \ \langle y', y - y_0\rangle \leq 0 \ \ \forall y \in S\Big\} = N_S(y_0).
\end{aligned}$$

■

Ci-dessous, nous fournissons quelques exemples de cônes normaux voir [18].

Exemple 1.5.12
Soit S la boule unité fermée de H et $y_0 \in S$. Alors

$$N_S(y_0) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ y_0, & si \ \ \|y_0\| = 1; \\ \{0\}, & si \ \ \|y_0\| < 1. \end{cases}$$

Exemple 1.5.13
Soit S un cône convexe non vide dans H et soit $y_0 \in S$. Alors $N_S(y_0) = S^0 \cap \{y_0\}^\perp$.
En effet, soit $z \in S^0 \cap \{y_0\}^\perp$, alors

$$z \in S^0 \ et \ z \in \{y_0\}^\perp,$$

de manière équivalente

$$\big\langle z, y\big\rangle \leq 0, \quad \forall\, y \in S \quad et \quad \big\langle z, y_0\big\rangle = 0.$$

Ainsi

$$\langle z, y - y_0 \rangle = \langle z, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in S.$$

Donc $z \in N_S(y_0)$*. Inversement, soit* $z \in N_S(y_0)$*, alors*

$$\langle z, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in S.$$

Puisque S *est un cône, on a* $\left\{\frac{y_0}{2}, 2y_0\right\} \subset S$*. En particulier, pour* $y = \frac{y_0}{2} \in S$*, on a* $\langle z, y_0 \rangle \geq 0$*, et pour* $y = 2y_0 \in S$*, on a* $\langle z, y_0 \rangle \leq 0$*. On déduit que*

$$\langle z, y_0 \rangle = 0,$$

et alors

$$\langle z, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in S,$$

il s'en suit que $z \in \{y_0\}^{\perp}$ *et* $z \in S^0$*.*

Dans ce qui suit, nous donnons quelques propriétés importantes du sous différentiel de l'application distance à un ensemble non vide, fermé et convexe.

Proposition 1.5.14
Soit S *un sous ensemble non vide, fermé et convexe de* H *et* $x_0 \in S$*. Alors,*

(i) $\partial d_S(x_0) = N_S(x_0) \cap \overline{\mathbf{B}}_H$*.*

(ii) $\partial d_S(x_0)$ *est un sous ensemble convexe, faiblement compact de* H*.*

Preuve.
(i) Soit $x_0 \in S$. Montrons que $\partial d_S(x_0) \subset N_S(x_0) \cap \overline{\mathbf{B}}_H$.
Soit $y' \in \partial d_S(x_0)$, par la Définition 1.5.1, on a

$$\langle y', y - x_0 \rangle \leq d_S(y) - d_S(x_0) \quad \forall y \in H,$$

donc,

$$\langle y', y - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in S,$$

ceci implique que $y' \in N_S(x_0)$ et comme $\partial d_S(x_0) \subset \overline{\mathbf{B}}_H$ (voir [43]), on trouve que $y' \in N_S(x_0) \cap \overline{\mathbf{B}}_H$.
Inversement, soit $y' \in N_S(x_0) \cap \overline{\mathbf{B}}_H$, alors

$$y' \in N_S(x_0) \text{ et } \|y'\| \leq 1.$$

C'est-à-dire

$$\langle y', z - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall z \in S \text{ et } \|y'\| \leq 1.$$

Donc, pour tout $y \in H$ et $z \in S$, on a

$$\begin{aligned}\langle y', y - x_0\rangle &= \langle y', y - z + z - x_0\rangle \\ &= \langle y', y - z\rangle + \langle y', z - x_0\rangle \\ &\leq \langle y', y - z\rangle \\ &\leq \|y'\|\|y - z\| \\ &\leq \|y - z\|.\end{aligned}$$

Donc $\langle y', y - x_0\rangle \leq \inf\limits_{z\in S} \|y - z\| = d_S(y)$, ceci implique, puisque $x_0 \in S$, que

$$\langle y', y - x_0\rangle \leq d_S(y) = d_S(y) - d_S(x_0)$$

d'où $y' \in \partial d_S(x_0)$.
(ii) Montrons que $\partial d_S(x_0)$ est convexe. Soit $x', y' \in \partial d_S(x_0)$ et $\alpha \in [0, 1]$, par définition

$$\begin{cases} \langle x', y - x_0\rangle & \leq & d_S(y) - d_S(x_0) & \forall y \in S, \\ \langle y', y - x_0\rangle & \leq & d_S(y) - d_S(x_0) & \forall y \in S. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \langle \alpha x', y - x_0\rangle \leq \alpha d_S(y) - \alpha d_S(x_0) \quad \forall y \in S, \\ \langle (1-\alpha)y', y - x_0\rangle \leq (1-\alpha)d_S(y) - (1-\alpha)d_S(x_0) \quad \forall y \in S. \end{cases}$$

Donc

$$\langle \alpha x' + (1-\alpha)y', y - x_0\rangle \leq d_S(y) - d_S(x_0) \quad \forall y \in S.$$

Ceci est équivalent à $\alpha x' + (1-\alpha)y' \in \partial d_S(x_0)$. D'où, $\partial d_S(x_0)$ est convexe.
Maintenant, montrons que $\partial d_S(x_0)$ est faiblement compact, on a par (i), $\partial d_S(x_0) \subset \overline{\mathbf{B}}_H$, et d'après le Théorème 1.3.13, $\overline{\mathbf{B}}_H$ est faiblement compact, donc il suffit de montrer que $\partial d_S(\cdot)$ est faiblement fermé. Soit $(y'_n)_n \subset \partial d_S(x_0)$ une suite qui converge vers y'. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle y'_n, y - x_0\rangle \leq d_S(y) - d_S(x_0) \quad \forall y \in S,$$

par passage à la limite quand $n \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\langle y', y - x_0\rangle \leq d_S(y) - d_S(x_0) \quad \forall y \in S,$$

en déduit que $y' \in \partial d_S(\cdot)$, d'où $\partial d_S(\cdot)$ est fortement fermée et donc $\partial d_S(\cdot)$ est faiblement fermé (puisque $\partial d_S(\cdot)$ est convexe). On conclut que $\partial d_S(\cdot)$ est faiblement compact. ■

La proposition suivante fournit une propriété de la semi-continuité supérieure de la fonction d'appui du sous différentiel de la fonction distance aux ensembles convexes fermés non vides. Pour la preuve, nous renvoyons le lecteur à [53].

Proposition 1.5.15
Soit H un espace de Hilbert et soit $\{S(t,x) : (t,x) \in J \times H\}$ une famille d'ensembles non vides, fermés et convexes de H, et soit un réel $\eta \geq 0$. Supposons qu'il existe une constante réelle $L \geq 0$ et une application continue $a : J \to \mathbb{R}$ tel que pour tous $x_1, x_2, y \in H$ et $t, s \in J$,

$$|d_{S(t,x_1)}(y) - d_{S(s,x_2)}(y)| \leq |a(t) - a(s)| + L\|x_1 - x_2\|. \tag{1.1}$$

Alors les affirmations suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $(t,x,y) \in gph(S)$, nous avons $\eta \partial d_{S(t,x)}(y) \subset \eta \overline{\mathbf{B}}_H$.

(ii) Pour toute suite $(t_n)_n \subset J$ convergeant vers t, toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, et toute suite $(y_n)_n$ convergeant vers $y \in S(t,x)$ avec $y_n \in S(t_n, x_n)$ et tout $\xi \in H$, nous avons

$$\limsup_{n \to +\infty} \delta^*\big(\xi, \eta \partial d_{S(t_n,x_n)}(y_n)\big) \leq \delta^*\big(\xi, \eta \partial d_{S(t,x)}(y)\big).$$

1.6 Notion d'opérateurs maximaux monotones

Voir les références [18], [20] et [29].

Soit $A : H \rightrightarrows H$ une multi-application, qu'on appelle aussi opérateur multivoque de H, avec $D(A), \mathrm{R}(A)$ et $gph(A)$ sont le domaine, l'image et le graphe de A, respectivement.

Définition 1.6.1
Un opérateur A de H est dit monotone si pour tous (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in gph(A)$, on a

$$\big\langle b_1 - b_2, a_1 - a_2 \big\rangle \geq 0.$$

Définition 1.6.2
Un opérateur monotone A de H est dit maximal monotone s'il est maximal parmi les opérateurs monotones par rapport à l'inclusion des graphes.

Proposition 1.6.3
Un opérateur monotone A de H est dit maximal si et seulement si pour tout $(a,b) \in H \times H$,

$$\big\langle b - b_0, a - a_0 \big\rangle \geq 0 \quad \textit{pour tout } (a_0, b_0) \in gph(A), \textit{ alors } (a,b) \in gph(A).$$

Remarque 1.6.4
Le cône normal associé à un ensemble convexe fermé non vide S, est un opérateur maximal monotone.

Définition 1.6.5 *[4, 21, 65]*
Soit un opérateur $A : [1,T] \times H \rightrightarrows H$*. Si pour tout* $L > 0$ *donné, il existe une application réelle* $\alpha_L \in \mathbf{L}^1(J,\mathbb{R})$ *telle que si*

$$a_i \in A_{(t,x_i)}(b_i) \quad \textit{pour tout}\ a_i \in H,\ x_i, b_i \in L\overline{\mathbf{B}}_H,\ i=1,2,$$

alors

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2\rangle \geq -\alpha_L(t)\|b_1 - b_2\|\big(\|x_1 - x_2\|\big). \tag{1.2}$$

On dit alors que A *est pseudo-hypomonotone dans ce sens.*

L'exemple suivant fournit la pseudo-hypomonotonie d'un opérateur $A_{(t,x)}$ (voir [65]).

Exemple 1.6.6 *Considérons* $H = \mathbb{R}^n$*.*
Soient D *une matrice semi définie positive (il existe une constante* c_1 *telle que pour tout* $x \in \mathrm{R}(D+D^t)$*, on a* $\langle Dx, x\rangle \geq c_1\|x\|^2$*),* $g : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{R}(D+D^t)$ *une application lipschitzienne de rapport* M_g *par rapport à la deuxième variable définie sur les sous ensembles bornés. Pour chaque* $t \in [1,T]$ *fixé, soit* $C_t : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *un opérateur maximal monotone. On pose*

$$G_{(t,x)}(\cdot) = C_t(\cdot + g(t,x)).$$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ *l'opérateur*

$$A_{(t,x)} = (G^{-1}_{(t,x)} + D)^{-1}.$$

L'opérateur $A_{(t,x)}$ *est pseudo-hypomonotone. En effet, soit* $L > 0$*. Pour tous* $t \in [1,T], x_i \in L\overline{\mathbf{B}}_H,\ y_i \in A_{(t,x_i)}(x_i),\ i = 1,2$ *on a,*

$$y_i \in A_{(t,x_i)}(x_i) = (G^{-1}_{(t,x_i)} + D)^{-1}(x_i),$$

ceci est équivalent à,

$$y_i \in G_{(t,x_i)}(x_i - Dy_i) = C_t(x_i - Dy_i + g(t,x_i)).$$

De la monotonie de C_t *et puisque* g *est une application lipschitzienne de rapport* M_g *et* D *est une matrice semi définie positive, on a (en utilisant l'inégalité* $a^2+b^2 \geq 2ab,\ a,\ b \in \mathbb{R}$*)*

$$\begin{aligned}
\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle &= \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 - Dy_1 + g(t,x_1) + Dy_2 - g(t,x_2)\rangle \\
&\quad + \langle y_1 - y_2, Dy_1 - g(t,x_1) - Dy_2 + g(t,x_2)\rangle \\
&= \langle D(y_1 - y_2), y_1 - y_2\rangle - \langle y_1 - y_2, g(t,x_1) - g(t,x_2)\rangle \\
&\geq c_1\|y_1^{im} - y_2^{im}\|^2 - M_g\|y_1^{im} - y_2^{im}\|\|x_1 - x_2\| \\
&\geq -\frac{M_g^2}{4c_1}\|x_1 - x_2\|^2,
\end{aligned}$$

où $\mathrm{R}(g) \subset \mathrm{R}(D+D^t)$ *et* y^{im} *désigne la projection de* y *sur* $\mathrm{R}(D+D^t)$*. D'où le résultat.*

1.7 Quelques résultats de base sur l'intégrale et la dérivée fractionnaires d'Hadamard

Au fil des dernières années, les travaux de recherche et les avancées dans le domaine du calcul fractionnaire ont conduit à l'émergence de diverses définitions de dérivées fractionnaires. Dans la suite, nous exposons les concepts de l'intégrale et dérivée fractionnaire de Hadamard, lesquels seront appliquées dans le cadre de notre étude. Pour des propriétés supplémentaires, veuillez consulter les références [54] à [62].

Définition 1.7.1 ***(Fonction Gamma d'Euler)***
Soit $\alpha > 0$. La fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t)dt.$$

Exemple 1.7.2

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}, \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Proposition 1.7.3
Soit $\alpha > 0$, nous avons

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \tag{1.3}$$

En particulier, si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Proposition 1.7.4 *[77]*
Soit $\alpha > 0$, la fonction $\Gamma(\cdot)$ est analytique partout dans le plan réel sauf pour $\alpha = 0, -1, -2, \dots,$ où elle a des pôles simples et est représentée par la formule

$$\Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^k}{k!(\alpha + k)}, \quad \alpha \to -k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

Remarque 1.7.5
De la Proposition 1.7.4, on a

$$\Gamma(0) = \infty.$$

Définition 1.7.6 ***(Fonction Bêta)***
Soient $\alpha, \beta > 0$, on définit la fonction Bêta par

$$\mathfrak{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta-1}dt.$$

Remarque 1.7.7
La fonction Beta est symétrique, c'est-à-dire

$$\mathfrak{B}(\alpha,\beta)=\mathfrak{B}(\beta,\alpha).$$

La proposition suivante donne une relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta.

Proposition 1.7.8
Soient $\alpha,\beta>0$, nous avons

$$\mathfrak{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Nous présentons maintenant la définition de l'intégrale et dérivée fractionnaires de Hadamard et certaines propriétés.

Définition 1.7.9
L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha>0$ d'une application intégrable au sens de Bochner $h:[a,+\infty)\to H,(0<a<b<+\infty)$ qu'on note $I^{\alpha}h$, est définie par

$$I^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{h(s)}{s}ds,$$

à condition que l'intégrale existe.

Définition 1.7.10
La dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha>0$ d'une application intégrable au sens de Bochner $h:[a,+\infty)\to H,(0<a<b<+\infty)$ notée $D^{\alpha}h$ est définie par

$$D^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\frac{h(s)}{s}ds=\left(\delta^{n}I^{n-\alpha}h\right)(t),$$

où $n=[\alpha]+1$, $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Nous aurons besoin des lemmes suivants (voir [62]).

Lemme 1.7.11
Soient $t,x\in[a,b]$ $(0<a<b<\infty)$. Si $0<\alpha<\beta$. Alors

$$\left(I^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}$$

et

$$\left(D^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

Preuve.
Pour $0 < \alpha < \beta$, par la Définition 1.7.9, on a

$$\left(I^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{1}{t}dt.$$

On pose $s = \dfrac{\ln\frac{t}{a}}{\ln\frac{x}{a}}$, de la Définition 1.7.6 et la Proposition 1.7.8, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(I^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\left(\ln\frac{x}{a}\right) - s\left(\ln\frac{x}{a}\right)\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-1} s^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta} s^{\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\mathfrak{B}(\beta,\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Par la définition de La dérivée fractionnaire de Hadamard (Définition 1.7.10), la relation précédente et en utilisant la propriété $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, on a

$$\begin{aligned}
\left(D^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \left(\delta^n I^{n-\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-1}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(x\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-1}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\left(\beta+n-\alpha-1\right)\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-2}\right) \\
&= \frac{(\beta+n-\alpha-1)\Gamma(\beta)}{(\beta+n-\alpha-1)\Gamma(n+\beta-\alpha-1)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha-1)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-2}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(D^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha-1)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\left(x\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-2}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha-1)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\left(\Big(\beta+n-\alpha-2\Big)\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-3}\right)\\ &= \frac{(\beta+n-\alpha-2)\Gamma(\beta)}{(\beta+n-\alpha-2)\Gamma(n+\beta-\alpha-2)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-3}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta-\alpha-2)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-3}\right).\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$\left(D^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

$\blacksquare$

Remarque 1.7.12

En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, on aura la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une constante qui est en général, différente de zéro i.e.,

$$\left(D^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Proposition 1.7.13

Soient $\alpha > 0,\ 1 \leq p < \infty,\ 0 < a < b < \infty$ et $h \in \mathbf{L}^p((a,b),H)$. Alors,

$$\left\|I^{\alpha}h\right\|_p \leq K_1\left\|h\right\|_p,$$

où

$$K_1 = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{t}{p}\right)dt.$$

Preuve.

Pour $\alpha > 0$, et par la Définition 1.7.9, on a

$$\begin{aligned}\left\|I^{\alpha}h\right\|_p &= \left(\int_a^b\left|I^{\alpha}h(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int_a^b\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{h(s)}{s}ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On pose $\tau = \dfrac{t}{s}$ et en utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski (voir le Théorème 5), on obtient

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}h\|_p &= \left(\int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{t}{a}} (\ln \tau)^{\alpha-1} h\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{1}{\tau} d\tau \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^b \left(\int_1^{\frac{t}{a}} (\ln \tau)^{\alpha-1} \left| h\left(\frac{t}{\tau}\right) \right| \frac{1}{\tau} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\int_1^{\frac{t}{a}} \left((\ln \tau)^{\alpha-1} \left| h\left(\frac{t}{\tau}\right) \right| \frac{1}{\tau} \right)^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} (\ln \tau)^{\alpha-1} \frac{1}{\tau} \left(\int_{a\tau}^b \left| h\left(\frac{t}{\tau}\right) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} d\tau,
\end{aligned}$$

en posant $x = \dfrac{t}{\tau}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}h\|_p &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} (\ln \tau)^{\alpha-1} \frac{1}{\tau} \left(\int_a^{\frac{b}{\tau}} |h(x)|^p \tau dx \right)^{\frac{1}{p}} d\tau \\
&\leq \frac{\|h\|_p}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} (\ln \tau)^{\alpha-1} \tau^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\tau} d\tau,
\end{aligned}$$

donc

$$\|I^{\alpha}h\|_p \leq K_1 \|h\|_p,$$

avec

$$K_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} (\ln \tau)^{\alpha-1} \tau^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\tau} d\tau.$$

Pour $t = \ln \tau$, on a

$$K_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\ln \frac{b}{a}} t^{\alpha-1} \exp\left(\frac{t}{p}\right) dt.$$

■

Proposition 1.7.14
Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $0 < a < b < \infty$ et $h \in \mathbf{L}^1((a,b), H)$. L'égalité $(D^{\alpha}h)(t) = 0$ est vérifiée si et seulement si

$$h(t) = c_1 \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + c_2 \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-2} + \cdots + c_n \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-n},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,n})$ sont des constantes arbitraires.

Lemme 1.7.15
Soient $h \in \mathcal{C}_{\delta^n}([a,b], \mathbb{R})$, $t \in [a,b]$ et $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Alors

(i) $I^{\alpha}I^{\beta}h(t) = I^{\alpha+\beta}h(t)$;

(ii) $D^{\alpha}I^{\alpha}\left(h(t)\right) = h(t)$;

(iii) $D^{\alpha}I^{\beta}\left(h(t)\right) = I^{\beta-\alpha}h(t),$ *pour* $\beta > \alpha$;

(iv) $I^{\alpha}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_1\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + c_2\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-2} + \cdots + c_m\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-m},$

où $c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m}$ $\big($*m est le plus petit entier supérieur ou égal à* $\alpha\big)$.

Preuve.
Soient $h \in \mathcal{C}_{\delta^n}([a,b],\mathbb{R}),\ t \in [a,b]$ et $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$.
(i) De la Définition 1.7.9, on a

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}I^{\beta}h(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{I^{\beta}h(s)}{s}ds\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{\beta-1}\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau\right)ds\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(h(\tau)\frac{1}{\tau}\int_\tau^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{\beta-1}\frac{1}{s}ds\right)d\tau.
\end{aligned}$$

On pose $x = \dfrac{\ln\frac{s}{\tau}}{\ln\frac{t}{\tau}}$, par la Définition 1.7.6 et la Proposition 1.7.8, on obtient

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}I^{\beta}h(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t h(\tau)\frac{1}{\tau}\int_0^1\left(\ln\frac{t}{\tau} - x\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}x^{\beta-1}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)dxd\tau\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t h(\tau)\frac{1}{\tau}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dxd\tau\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t h(\tau)\frac{1}{\tau}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha+\beta-1}\mathfrak{B}(\beta,\alpha)d\tau\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t h(\tau)\frac{1}{\tau}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}d\tau\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha+\beta-1}h(\tau)\frac{1}{\tau}d\tau\\
=& I^{\alpha+\beta}h(t).
\end{aligned}$$

(ii) De la propriété (i), la définition de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Hadamard et en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
D^\alpha I^\alpha (h(t)) &= \left(\delta^n I^{n-\alpha} (I^\alpha h)\right)(t) \\
&= \left(\delta^n I^{n-\alpha+\alpha} h\right)(t) \\
&= (\delta^n I^n h)(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-1} \frac{h(s)}{s} ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\left(\ln \frac{t}{a}\right)^n h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^n h'(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Par la formule intégrale de Leibnit'z (voir le Théorème 3), on a

$$\begin{aligned}
D^\alpha I^\alpha (h(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \left(t\frac{d}{dt}\left[\left(\ln \frac{t}{a}\right)^n h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^n h'(s)ds\right]\right) \\
&= \frac{n}{\Gamma(n+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \left(\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{n-1} h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-1} h'(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \left(\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{n-1} h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-1} h'(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \left(\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{n-1} h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-1} h'(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-2} \left(t\frac{d}{dt}\left[\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{n-1} h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-1} h'(s)ds\right]\right) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-2} \left(\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{n-2} h(a) + \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-2} h'(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}
D^\alpha I^\alpha (h(t)) &= h(a) + \int_a^t h'(s)ds \\
&= h(t).
\end{aligned}$$

(iii) Pour $\beta > \alpha$, de la propriété (i), la définition de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Hadamard et en utilisant l'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
D^{\alpha} I^{\beta}\left(h(t)\right) &= \left(\delta^n I^{n-\alpha}\left(I^{\beta} h\right)\right)(t) \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n+\beta-\alpha} h\right)(t) \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{1}{\Gamma(n+\beta-\alpha)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n+\beta-\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{n+\beta-\alpha} h(a) + \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n+\beta-\alpha} h'(s) ds\right).
\end{aligned}$$

Par la formule intégrale de Leibnit'z (voir le Théorème 3), et en utilisant la propriété $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, et en procédant comme dans la preuve de la propriété (ii), on aura

$$D^{\alpha} I^{\beta}\left(h(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha} h(a) + \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-\alpha} h'(s) ds\right). \tag{1.5}$$

D'autre part, on a

$$\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-\alpha} h'(s) ds = -\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha} h(a) + (\beta-\alpha) \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds. \tag{1.6}$$

Par conséquent, en remplaçant (1.6) dans (1.5), on obtient

$$\begin{aligned}
D^{\alpha} I^{\beta}\left(h(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds. &(1.7)\\
&= I^{\beta-\alpha} h(t). &(1.8)
\end{aligned}$$

(iv) Puisque, d'après la propriété (ii),

$$D^{\alpha} I^{\alpha} h(t) = h(t),$$

il s'en suit que

$$D^{\alpha} I^{\alpha}\left(D^{\alpha} h(t)\right) = D^{\alpha} h(t).$$

Donc

$$D^{\alpha}\left(I^{\alpha} D^{\alpha} h(t) - h(t)\right) = 0.$$

De la Proposition 1.7.14, on obtient

$$I^{\alpha} D^{\alpha} h(t) = h(t) + c_1 \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + c_2 \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-2} + \cdots + c_n \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-n}.$$

$\blacksquare$

Chapitre 2

Problème d'ordre fractionnaire couplé à un processus de Moreau du second ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un résultat affirmant l'existence de solution absolument continue pour un système couplé, englobant un processus de la rafle du second ordre et une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions à bord non locales. La démonstration s'appuie sur un résultat d'existence déjà présenté dans la littérature, et sur le théorème du point fixe de Schauder. En termes plus mathématiques, on va étudier le problème suivant

$$(\mathcal{P}_g)\begin{cases} D^q x(t) = v(t) \quad \forall t \in \ [1,T], \\ x(1) = 0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i), \\ -\ddot{v}(t) \in N_{C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t))}(\dot{v}(t)) + g(t, x(t), v(t), \dot{v}(t)) \quad p.p.\ t \in [1,T], \\ \dot{v}(t) \in C(t, x(t), D^{q-1}x(t), v(t)) \quad \forall t \in [1,T], \\ v(1) = 0,\ \dot{v}(1) = u_0, \end{cases}$$

où D^q est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1,2]$, $r \in (0,1)$, $\mu_i \in (1,T)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n},\ n \geq 2,\ g : [1,T] \times H \times H \times H \to\ H$ est une application Lebesgue-mesurable sur $[1,T]$ et continue sur $H \times H \times H$ et $C : [1,T] \times H \times H \times H \rightrightarrows\ H$ est une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées. Par une solution de $(\mathcal{P}_g)$, nous voulons dire l'existence d'une application $x(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$ telle que $D^{q-1}x(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$ et $D^q x(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$ et l'existence d'une application $v \in \mathcal{C}(J,H)$ tel que $\dot{v}(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$ et $\ddot{v}(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)$ et (x,v) satisfait le problème $(\mathcal{P}_g)$.
Enfin, un exemple concret est fourni pour mettre en évidence les résultats théoriques.

2.2 Résultat principal

Nous commençons par fixer quelques notations et données. Dans le reste de ce chapitre, D^q (resp. I^q) sera la dérivée (resp. intégrale) fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1,2]$, $r \in (0,1), \mu_i \in (1,T),\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n},\ n \geq 2,$ et nous supposons que

$$(\ln T)^{q-r-1} \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\ln \mu_i)^{q-r-1}. \tag{2.1}$$

Soit $f \in \mathbf{L}^1(J,H)$ et considérons le problème aux limites pour une équation intégro-différentielle impliquant la dérivée fractionnaire de Hadamard

$$D^q x(t) = \int_1^t f(s)ds \quad \forall t \in J; \tag{2.2}$$

$$x(1) = 0,\ D^r x(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i). \tag{2.3}$$

Définition 2.3.1
Une application $x : J \to H$ est dite solution du problème (2.2)-(2.3) si $x(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$, $D^q x(\cdot)$ est absolument continue et $x(\cdot)$ satisfait le problème (2.2)-(2.3).

Proposition 2.3.2
Soient $f(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)$, $q \in (1,2]$ *et* $\kappa < q$. *Alors pour tout* $t \in J$ *et* $y \in H$, *on a*

$$I^{q-\kappa}\langle y, \int_1^t f(s)ds\rangle = \frac{1}{(q-\kappa)\Gamma(q-\kappa)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{q-\kappa}\langle y, f(\tau)\rangle d\tau. \tag{2.4}$$

Preuve.
Nous avons par la Définition 1.7.9,

$$\begin{aligned}
I^{q-\kappa}\langle y, \int_1^t f(s)ds\rangle &= \frac{1}{\Gamma(q-\kappa)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-\kappa-1}\frac{1}{s}\left\langle y, \int_1^s f(\tau)d\tau\right\rangle ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(q-\kappa)}\int_1^t \left(\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-\kappa-1}\frac{1}{s}\int_1^s \langle y, f(\tau)\rangle d\tau\right) ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(q-\kappa)}\int_1^t \left(\langle y, f(\tau)\rangle \int_\tau^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-\kappa-1}\frac{1}{s}ds\right) d\tau\\
&= \frac{1}{(q-\kappa)\Gamma(q-\kappa)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{q-\kappa}\langle y, f(\tau)\rangle d\tau.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.3
Soit $f(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)$ *une application donnée. Si* $x(\cdot)$ *est solution du problème* (2.2) *avec les conditions aux limites* (2.3), *alors* $x(\cdot)$ *peut être représentée de la manière suivante*

$$x(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds \quad \forall t \in J,$$

où

$$\begin{aligned}
G(t,s) = &\frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r}\chi_{[1,\mu_i]}(s) - \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r}\chi_{[1,T]}(s)\right)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q}\chi_{[1,t]}(s)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\rho := (\ln T)^{q-r-1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i(\ln\mu_i)^{q-r-1}.$$

Preuve.
Posons pour tout $t \in J$

$$\widetilde{f}(t) = \int_1^t f(s)ds.$$

En introduisant l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre q dans les deux côtés de l'équation (2.2), on obtient

$$I^q D^q x(t) = I^q \widetilde{f}(t) \quad \forall t \in J.$$

Fixons $y \in H$. D'après (iv) du Lemme 1.7.15 ($\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\delta^n}(J, \mathbb{R})$), on a pour tout $t \in J$,

$$\langle y, x(t)\rangle = I^q \langle y, \widetilde{f}(t)\rangle - c_1 (\ln t)^{q-1} - c_2 (\ln t)^{q-2}. \tag{2.6}$$

La condition aux limites $x(1) = 0$ implique que $c_2 = 0$. Pour calculer c_1, on va utiliser la deuxième condition aux limites dans (2.3). Par la relation (2.6), on a

$$\begin{aligned}\langle y, D^r x(t)\rangle &= D^r \langle y, x(t)\rangle \\ &= D^r I^q \langle y, \widetilde{f}(t)\rangle - c_1 D^r \left((\ln t)^{q-1}\right).\end{aligned}$$

En évoquant le Lemme 1.7.11 et (iii) du Lemme 1.7.15 ($\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\delta^n}(J, \mathbb{R})$), il en résulte que

$$D^r \langle y, x(t)\rangle = I^{q-r} \langle y, \widetilde{f}(t)\rangle - c_1 \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-r)} (\ln t)^{q-r-1}.$$

Donc

$$D^r \langle y, x(T)\rangle = I^{q-r} \langle y, \widetilde{f}(T)\rangle - c_1 \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-r)} (\ln T)^{q-r-1},$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r \langle y, x(\mu_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} \langle y, \widetilde{f}(\mu_i)\rangle - c_1 \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-r)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\ln \mu_i)^{q-r-1}.$$

On en déduit que

$$c_1 = \frac{-\Gamma(q-r)}{\rho \Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} \left\langle y, \widetilde{f}(\mu_i) \right\rangle - I^{q-r} \left\langle y, \widetilde{f}(T) \right\rangle \right). \tag{2.7}$$

avec

$$\rho := (\ln T)^{q-r-1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\ln \mu_i)^{q-r-1}.$$

Par conséquent, en remplaçant la Proposition 2.3.2 $\big($pour $\kappa = r$ et $\kappa = 0\big)$ et (2.7) dans (2.6), on a

$$\begin{aligned}\langle y, x(t)\rangle =& \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln \frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} \langle y, f(s)\rangle \, ds \right. \\ & \left. - \int_1^{T} \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{q-r} \langle y, f(s)\rangle \, ds \right) + \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_1^{t} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{q} \langle y, f(s)\rangle \, ds,\end{aligned}$$

cela implique que pour tout $t \in J$,

$$x(t) = \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln \frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} f(s)ds - \int_1^{T} \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{q-r} f(s)ds \right)$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_1^{t} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{q} f(s)ds.$$

Ceci termine la preuve du Lemme 2.3.3. ■

Énonçons ensuite quelques propriétés de la fonction de type Green donnée par la relation (2.5), qui sera utilisée dans la suite du chapitre.

Lemme 2.3.4
Soit G la fonction définie par la relation (2.5). Alors $G(\cdot,\cdot)$ satisfait l'estimation suivante

$$|G(t,s)| \leq \frac{(\ln T)^{q-1}}{|\rho|(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| (\ln \mu_i)^{q-r} + (\ln T)^{q-r} \right) + \frac{1}{\Gamma(q+1)} (\ln T)^{q} =: M_G. \tag{2.8}$$

Preuve.
Observons que, pour tout $t \in J$ fixé et pour $\alpha > 0$, la fonction

$$s \in J \longmapsto g(s) = \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha} \text{ est décroissante.}$$

Ainsi, à partir de (2.5), pour tous $t, s \in J$, on a

$$\begin{aligned}\big|G(t,s)\big| =& \Bigg| \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\ln \frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} \chi_{[1,\mu_i]}(s) - \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{q-r} \chi_{[1,T]}(s) \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{q} \chi_{[1,t]}(s) \Bigg| \\ \leq& \frac{(\ln T)^{q-1}}{|\rho|(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| (\ln \mu_i)^{q-r} + (\ln T)^{q-r} \right) + \frac{1}{\Gamma(q+1)} (\ln T)^{q} =: M_G.\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.5
Soit $f \in \mathbf{L}^1(J,H)$ et $u_f : J \to H$ la fonction définie par

$$u_f(t) = \int_1^{T} G(t,s) f(s)ds \quad \forall t \in J. \tag{2.9}$$

Alors,

(i) $u_f(1) = 0$ *et* $D^r u_f(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r u_f(\mu_i)$*, et pour tout* $t \in J$

$$\begin{aligned}(D^{q-1}u_f)(t) = &\frac{1}{\rho(q-r)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} f(s)ds - \int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r} f(s)ds\right)\\ &+\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right) f(s)ds,\end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\Big(D^q u_f\Big)(t) = \int_1^t f(s)ds \quad \forall t \in J. \tag{2.11}$$

(ii) Nous avons $u_f \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$*. De plus,* $D^q u_f$ *est absolument continue.*

Preuve.
(i) Soit $f \in \mathbf{L}^1(J,H)$ et posons pour tout $t \in J$,

$$u_f(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds.$$

Par la définition de $G(\cdot,\cdot)$, nous avons pour tout $t \in J$ $\Big($via la Proposition 2.3.2 pour $\kappa = r$ et $\kappa = 0$ et en tenant en compte le fait que $\widetilde{f}(t) = \int_1^t f(s)ds\Big)$

$$\begin{aligned}u_f(t) =&\frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} f(s)ds - \int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r} f(s)ds\right)\\ &+\frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^q f(s)ds\\ =&\frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\int_1^s f(\tau)d\tau ds - \int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\int_1^s f(\tau)d\tau ds\right)\\ &+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}\int_1^s f(\tau)d\tau ds\\ =&\frac{(\ln t)^{q-1}\,\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + I^q\widetilde{f}(t).\end{aligned} \tag{2.12}$$

La relation (2.12) implique que $u_f(1) = 0$. Pour prouver la deuxième condition aux limites, nous argumentons comme suit. Soit $y \in H$ arbitraire. Nous avons pour $r \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\langle y, D^r u_f(t)\rangle &= D^r\langle y, u_f(t)\rangle\\ &= \frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) D^r\left\langle y, (\ln t)^{q-1}\right\rangle + D^r I^q\left\langle y, \widetilde{f}(t)\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Le Lemme 1.7.11 ainsi que (iii) du Lemme 1.7.15 ($\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\delta^n}(J,\mathbb{R})$) permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}\langle y, D^r u_f(t)\rangle =& \frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right)\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-r)}\left\langle y, (\ln t)^{q-r-1}\right\rangle \\ &+ I^{q-r}\left\langle y, \widetilde{f}(t)\right\rangle \\ =& \frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right)\left\langle y, (\ln t)^{q-r-1}\right\rangle + I^{q-r}\left\langle y, \widetilde{f}(t)\right\rangle,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle y, D^r u_f(t)\rangle = \left\langle y, \frac{(\ln t)^{q-r-1}}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + I^{q-r}\widetilde{f}(t)\right\rangle.$$

Par conséquent,

$$D^r u_f(t) = \frac{(\ln t)^{q-r-1}}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + I^{q-r}\widetilde{f}(t). \tag{2.14}$$

D'où,

$$D^r u_f(T) = \frac{(\ln T)^{q-r-1}}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + I^{q-r}\widetilde{f}(T) \tag{2.15}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D^r u_f(\mu_i) = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\ln \mu_i\right)^{q-r-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i). \tag{2.16}$$

Rappelons que $\rho := (\ln T)^{q-r-1} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\ln \mu_i)^{q-r-1}$. On aura, par les relations (2.15) et (2.16),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D^r u_f(\mu_i) - D^r u_f(T) =& \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\ln \mu_i\right)^{q-r-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - \frac{(\ln T)^{q-r-1}}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) - I^{q-r}\widetilde{f}(T) \\ =& \frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\ln \mu_i\right)^{q-r-1} - (\ln T)^{q-r-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) \\ =& \frac{1}{\rho}(-\rho)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) \\ =& 0,\end{aligned}$$

nous concluons que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r u_f(\mu_i) = D^r u_f(T).$$

D'autre part, en appliquant D^{q-1} aux deux côtés de la relation (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\langle y, D^{q-1}u_f(t)\right\rangle = D^{q-1}\left\langle y, u_f(t)\right\rangle \\
&=\frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) D^{q-1}\left\langle y, (\ln t)^{q-1}\right\rangle + D^{q-1}\left\langle y, I^q\widetilde{f}(t)\right\rangle \\
&=\frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) D^{q-1}\left\langle y, (\ln t)^{q-1}\right\rangle + D^{q-1}I^q\left\langle y, \widetilde{f}(t)\right\rangle,
\end{aligned}$$

évoquant le Lemme 1.7.11 et (iii) du Lemme 1.7.15 ($\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\delta^n}(J,\mathbb{R})$), il s'en suit que pour tout $t \in J$

$$\left\langle y, D^{q-1}u_f(t)\right\rangle = \frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + I^1\left\langle y, \widetilde{f}(t)\right\rangle.$$

Tenant en compte la Proposition 2.3.2 pour $\kappa = r$, on en déduit que (par les mêmes simplifications ci-dessus),

$$\begin{aligned}
D^{q-1}u_f(t) &= \frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\widetilde{f}(\mu_i) - I^{q-r}\widetilde{f}(T)\right) + I^1\widetilde{f}(t) \\
&= \frac{1}{\rho(q-r)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} f(s)ds - \int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r} f(s)ds\right) \\
&+ \int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right) f(s)ds.
\end{aligned}$$

De même, en introduisant D^q dans la relation (2.12), on obtient (sachant que $\Gamma(0) = \infty$)

$$D^q u_f(t) = \int_1^t f(s)ds \quad \forall t \in J.$$

(ii) D'après la relation (2.9), $u_f \in \mathbf{L}^1(J,H)$. Donc par Lemme 1.7.13, $I^q u_f \in \mathbf{L}^1(J,H)$ et la Définition 1.7.10 montre que $D^q u_f \in \mathbf{L}^1(J,H)$. De plus, par la définition de D^{q-1}, on a $D^{q-1}u_f \in \mathcal{C}(J,H)$. D'où, $u_f \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$. D'après la relation (2.11), on a $D^q u_f$ est absolument continue. Ceci termine la preuve du Lemme 2.3.4. ■

Remarque 2.3.6

Soit $f \in \mathbf{L}^1(J,H)$. Si pour tout $t \in J$, $u_f(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds$, alors

$$\left\|u_f(t)\right\| \leq M_G\left\|f\right\|_1 \quad \forall t \in J \tag{2.17}$$

et

$$\left\|D^{q-1}u_f(t)\right\| \leq M_1\left\|f\right\|_1 \quad \forall t \in J, \tag{2.18}$$

pour une constante réelle non négative M_1.
En effet, du Lemme 2.3.4, la relation (2.17) est évidente. En ce qui concerne (2.18), on a de la relation (2.10),

$$\begin{aligned}
\|D^{q-1}u_f(t)\| \leq & \frac{1}{|\rho|(q-r)}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r}\|f(s)\|ds\right. \\
& \left.+\int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r}\|f(s)\|ds\right)+\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)\|f(s)\|ds \\
= & \frac{1}{|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^s\|f(\tau)\|d\tau\right)ds\right. \\
& \left.+\int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^s\|f(\tau)\|d\tau\right)ds\right)+\int_1^t\frac{1}{s}\left(\int_1^s\|f(\tau)\|d\tau\right)ds \\
\leq & \frac{\|f\|_1}{|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}ds+\int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}ds\right)+\|f\|_1\int_1^t\frac{1}{s}ds \\
\leq & \left[\frac{1}{|\rho|(q-r)}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r}+(\ln T)^{q-r}\right)+(\ln T)\right]\|f\|_1 =: M_1\|f\|_1.
\end{aligned}$$

La Proposition 2.3.5 entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.7
Soit $f \in \mathbf{L}^1(J,H)$, *le problème aux conditions aux limites (2.2)-(2.3) admet une unique solution* $x(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ *définie par*

$$x(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds.$$

Preuve.
D'après (i) de la Proposition 2.3.5, il existe au moins une solution du problème (2.2)-(2.3) donnée par

$$x(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds. \tag{2.19}$$

Pour montrer l'unicité, considérons deux solutions $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ du problème (2.2)-(2.3). Alors, on a pour tout $s \in J$

$$D^q x_1(s) = D^q x_2(s),$$

d'où (puisque par (ii) de la Proposition 2.3.5, $D^q x_i(\cdot), i = 1, 2$ est absolument continue)

$$\frac{d}{ds}D^q x_1(s) = \frac{d}{ds}D^q x_2(s).$$

Donc
$$\int_1^T G(t,s)\frac{d}{ds}D^q x_1(s)ds = \int_1^T G(t,s)\frac{d}{ds}D^q x_2(s)ds.$$
Montrons que
$$\int_1^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds}D^q x_i(s)\right)ds = x_i(t) \quad \forall t \in J, i=1,2. \tag{2.20}$$

Fixons $y \in H$. Nous avons pour tout $t \in J$ $\big($en utilisant la Proposition 2.3.2 pour $\kappa = r$ et $\kappa = 0\big)$

$$\begin{aligned}
&\left\langle y, \int_1^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds}D^q x_i(s)\right)ds\right\rangle = \int_1^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds}D^q \langle y, x_i(s)\rangle\right)ds\\
&= \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)}\Bigg(\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r}\frac{d}{ds}\Big(D^q\langle y, x_i(s)\rangle\Big)ds\\
&- \int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r}\frac{d}{ds}\Big(D^q\langle y, x_i(s)\rangle\Big)ds\Bigg) + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q}\frac{d}{ds}\Big(D^q\langle y, x_i(s)\rangle\Big)ds\\
&= \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\int_1^s\left(\frac{d}{d\tau}D^q\langle y, x_i(\tau)\rangle d\tau\right)ds\right.\\
&\left.- \int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\int_1^s\left(\frac{d}{d\tau}D^q\langle y, x_i(\tau)\rangle d\tau\right)ds\right)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}\int_1^s\left(\frac{d}{d\tau}D^q\langle y, x_i(\tau)\rangle d\tau\right).\\
&= \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho\Gamma(q)}\Bigg(\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}D^q\langle y, x_i(s)\rangle ds\\
&- \int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}D^q\langle y, x_i(s)\rangle ds\Bigg) + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}D^q\langle y, x_i(s)\rangle ds\\
&= \frac{(\ln t)^{q-1}\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i I^{q-r}D^q\langle y, x_i(\mu_i)\rangle - I^{q-r}D^q\langle y, x_i(T)\rangle\right) + I^qD^q\langle y, x_i(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Or, d'après (iv) du Lemme 1.7.15 ($x_i(\cdot) \in \mathcal{C}_{\delta^n}(J,\mathbb{R})$, utilisant la relation (2.19)), on a
$$\langle y, x_i(t)\rangle = I^qD^q\langle y, x_i(t)\rangle - c_1(\ln t)^{q-1} - c_2(\ln t)^{q-2}. \tag{2.22}$$

En utilisant la condition aux limites $x(1) = 0$, on en déduit que $c_2 = 0$. Pour trouver c_1, on procède comme dans la preuve du Lemme 2.3.3, ce qui nous permet de déduire que
$$\langle y, x_i(t)\rangle = I^qD^q\langle y, x_i(t)\rangle + \frac{(\ln t)^{q-1}\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i I^{q-r}D^q\langle y, x_i(\mu_i)\rangle - I^{q-r}D^q\langle y, x_i(T)\rangle\right).$$

En revenant à la relation (2.21), on obtient

$$\left\langle y, \int_1^T G(t,s)\frac{d}{ds}D^q x_i(s)ds \right\rangle = \langle y, x_i(t)\rangle\,,$$

ce qui implique que, pour tout $t \in J$, $i = 1, 2$,

$$\int_1^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds}D^q x_i(s)\right)ds = x_i(t).$$

Donc

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \text{pour tout } t \in J.$$

D'où l'unicité de la solution. ■

La preuve de notre résultat principal est basée sur une variante du Théorème 3.1 dans [10], que nous énonçons ci-dessous. Tout d'abord, supposons les hypothèses suivantes.

Soit $D : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes non vides et $\widetilde{g}$: $[0,T] \times H \times H \to H$ une application Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$ et continue sur $H \times H$ satisfaisant :

$(\mathcal{H}_1^D)$ pour tout sous ensemble borné $A \subset H$, l'ensemble $D\big([0,T] \times A\big)$ est boule compact.

$(\mathcal{H}_2^D)$ Il existe une fonction positive absolument continue et strictement croissante a : $[0,T] \to \mathbb{R}$, et une constante réelle positive λ, tel que pour tous $t, s \in [0,T]$ et $x, y, u \in H$,

$$|d_{D(t,x)}(u) - d_{D(s,y)}(u)| \leq |a(t) - a(s)| + \lambda\|x - y\|.$$

$(\mathcal{H}_1^{\widetilde{g}})$ $\|\widetilde{g}(t,x,u)\| \leq c(1 + \|x\| + \|u\|) \quad \forall (t,x,u) \in [0,T] \times H \times H.$

Théorème 2.3.8

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1^D)$, $(\mathcal{H}_2^D)$ *et* $(\mathcal{H}_1^{\widetilde{g}})$, *pour tout* $(u_0, v_0) \in H \times H$ *avec* $u_0 \in D(0, v_0)$, *il existe une solution absolument continue* $(u, v) : [0, T] \to H \times H$ *de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{D(t,v(t))}(u(t)) + \widetilde{g}(t, v(t), u(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T]; \\ u(t) \in D(t, v(t)) \quad \forall t \in [0, T]; \\ v(t) = v_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0;\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

En d'autres termes, l'inclusion différentielle du second ordre

$$(\mathcal{P}_{\widetilde{g}}) \begin{cases} -\ddot{v}(t) \in N_{D(t,v(t))}(\dot{v}(t)) + \widetilde{g}(t, v(t), \dot{v}(t)) \quad p.p.\ t\ \in [0, T]; \\ \dot{v}(t) \in D(t, v(t)) \quad \forall t \in [0, T]; \\ v(0) = v_0;\ \dot{v}(0) = u_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $v(\cdot) \in W^{2,1}([0, T], H)$. *De plus,*

$$\|\ddot{v}(t)\| \leq (1 + \lambda l + \alpha c)(\dot{a}(t) + 1) + \alpha c =: M(t) \quad p.p.\ t \in [0, T],$$

où

$$l = \Big(\|u_0\| + (1 + 2c(1 + \|v_0\|))T\Big) \exp\Big((\lambda + c(3T + 2))T\Big)$$

et

$$\alpha = 1 + \|v_0\| + (1 + T)l.$$

Remarque 2.3.9

Nous soulignons ici que le Théorème 2.3.8 a était établi sous l'hypothèse qui concerne la propriété équi-uniforme sous lissicité de la famille $\{D(t, v) :\ (t, v) \in [0, T] \times H\}$ *(voir [13] pour les définition et les détails). Cette classe d'ensembles contient strictement celle des ensembles convexes (voir Proposition 5.4 dans [81]) :*
Soit $(S_i)_{i \in I}$ *une famille d'ensembles de* H. *Si tous les ensembles* S_i *sont convexes, alors* $(S_i)_{i \in I}$ *est une famille d'ensembles équi-uniformement sous lisse.*

Nous avons également besoin du lemme suivant qui donne une propriété topologique de l'ensemble de solutions du problème (2.2)-(2.3). La preuve est inspirée de celle du Théorème 3 dans [34].

Lemme 2.3.10
Soit $F : J \rightrightarrows H$ une multi-application mesurable à valeurs non vides, convexes et compactes. Supposons qu'il existe une fonction positive $\gamma(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,\mathbb{R})$ telle que $F(t) \subset \gamma(t)\overline{\mathbf{B}}_H$ pour tout $t \in J$. Soit S_F^1 l'ensemble de toutes les sélections intégrables de F. Alors, l'ensemble des solutions appartenant à $\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ du problème

$$\begin{cases} D^q u(t) = \displaystyle\int_1^t f(s)ds \quad \forall t \in J,\ f \in S_F^1 \\ u(1) = 0, \quad D^r u(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r u(\mu_i) \end{cases}$$

est compact dans $\mathcal{C}(J,H)$.

Preuve. Rappelons (voir le Théorème (1.4.19)) que S_F^1 est $\sigma\big(\mathbf{L}^1(J,H),\mathbf{L}^\infty(J,H)\big)$-compact et par le Théorème 1.4.20 la multi-application $t \mapsto \displaystyle\int_1^T G(t,s)F(s)ds$ est à valeurs convexes compactes dans H. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{X} =: \left\{ u_f : J \to H,\ u_f(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds \ \forall t \in J,\ f \in S_F^1 \right\},$$

et montrons qu'il est équi-continu. En effet, soient $t_1, t_2 \in J$ tel que $t_1 < t_2$. Nous avons pour tout $f \in S_F^1$,

$$\begin{aligned} u_f(t_2)-&u_f(t_1) \\ &= \int_1^T \Big(G(t_2,s) - G(t_1,s) \Big) f(s)ds \\ &= \frac{(\ln t_2)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln \frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} f(s)ds - \int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{q-r} f(s)ds \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_1^{t_2} \left(\ln \frac{t_2}{s}\right)^{q} f(s)ds \\ &- \frac{(\ln t_1)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln \frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r} f(s)ds - \int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{q-r} f(s)ds \right) \\ &- \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_1^{t_1} \left(\ln \frac{t_1}{s}\right)^{q} f(s)ds, \end{aligned}$$

d'où (en utilisant la Proposition 2.3.2 pour $\kappa = r$ et $\kappa = 0$)

$$
\begin{aligned}
u_f(t_2)-u_f(t_1) &\\
&= \left(\frac{(\ln t_2)^{q-1}-(\ln t_1)^{q-1}}{\rho(q-r)\Gamma(q)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r}f(s)ds\right.\\
&\left.-\int_1^{T}\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r}f(s)ds\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_1^{t_1}\left(\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q}-\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{q}\right)f(s)ds+\frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q}f(s)ds.\\
&= \left(\frac{(\ln t_2)^{q-1}-(\ln t_1)^{q-1}}{\rho\Gamma(q)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}f(\tau)d\tau\right)ds\right.\\
&\left.-\int_1^{T}\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}f(\tau)d\tau\right)ds\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^{t_1}\left(\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q-1}-\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{q-1}\right)\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}f(\tau)d\tau\right)ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}f(\tau)d\tau\right)ds.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\|u_f(t_2)-u_f(t_1)\| &\\
&\leq \frac{|(\ln t_2)^{q-1}-(\ln t_1)^{q-1}|}{|\rho|\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}\|f(\tau)\|d\tau\right)ds\right.\\
&\left.+\int_1^{T}\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}\|f(\tau)\|d\tau\right)ds\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(q)}\left(\int_1^{t_1}\left|\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q-1}-\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{q-1}\right|\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}\|f(\tau)\|d\tau\right)ds\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}\left(\int_1^{s}\|f(\tau)\|d\tau\right)ds.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\|u_f(t_2)-u_f(t_1)\| \\
&\leq \left[\frac{(\ln t_2)^{q-1}-(\ln t_1)^{q-1}}{|\rho|\Gamma(q)}\right]\left(\|\gamma\|_1\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}ds\right. \\
&\left.+\|\gamma\|_1\int_1^{T}\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}ds\right)+\frac{\|\gamma\|_1}{\Gamma(q)}\left(\int_1^{t_1}\left[\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q-1}-\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{q-1}\right]\frac{1}{s}ds\right) \\
&+\frac{\|\gamma\|_1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}ds \\
&=\frac{\|\gamma\|_1}{|\rho|(q-r)\Gamma(q)}\left[\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r}+(\ln T)^{q-r}\right]\left((\ln t_2)^{q-1}-(\ln t_1)^{q-1}\right) \\
&+\frac{\|\gamma\|_1}{\Gamma(q+1)}\Big((\ln t_2)^{q}-(\ln t_1)^{q}\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u_f(t_2)-u_f(t_1)\|\leq \mathrm{R}\left((\ln t_2)^{q-1}-(\ln t_1)^{q-1}\right)+\frac{\|\gamma\|_1}{\Gamma(q+1)}\Big((\ln t_2)^{q}-(\ln t_1)^{q}\Big), \qquad (2.23)$$

où

$$\mathrm{R}=\frac{\|\gamma\|_1}{|\rho|(q-r)\Gamma(q)}\left[\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r}+(\ln T)^{q-r}\right].$$

Quand $t_1\to t_2$ le membre de droit de l'inégalité (2.23) tend vers zéro, ce qui montre que $\mathcal{X}$ est équi-continu.
D'autre part, observons que pour tout $t\in J$, l'ensemble $\mathcal{X}(t)=\Big\{u_f(t)\,:\,u_f\in\mathcal{X}\Big\}$ est inclus dans l'ensemble compact convexe $\displaystyle\int_1^T G(t,s)F(s)ds$. Donc, il est relativement compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà 1.3.9, nous concluons que $\mathcal{X}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J,H)$.
Il reste à montrer que $\mathcal{X}$ est fermé. La preuve de cette fermeture est similaire à celle de la preuve du Théorème 3 dans [34]. Néanmoins, nous la donnons ici pour la commodité de lecture.
Soit $(u_{f_n})_n$ une suite de $\mathcal{X}$, qui converge uniformément vers une certaine application $u_\infty(\cdot)\in\mathcal{C}(J,H)$ i.e.,

$$u_{f_n}(t)=\int_1^T G(t,s)f_n(t)ds\ \forall t\in J,(f_n)_n\subset S_F^1,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{f_n}-u_\infty\|_{\mathcal{C}}=0. \qquad (2.24)$$

Comme S^1_F est $\sigma(\mathbf{L}^1(J,H), \mathbf{L}^\infty(J,H)$-compact, nous pouvons supposer que $(f_n)_n$ $\sigma(\mathbf{L}^1(J,H), \mathbf{L}^\infty(J,H))$-converge vers $f_\infty \in S^1_F$, c'est-à-dire pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty(J,H)$

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle f_n(\cdot), y(\cdot)\big\rangle = \big\langle f_\infty(\cdot), y(\cdot)\big\rangle,$$

où d'une manière équivalente

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^T \big\langle f_n(s), y(s)\big\rangle ds = \int_1^T \big\langle f_\infty(s), y(s)\big\rangle ds.$$

En particulier, pour $y_t(\cdot) = G(t,\cdot)\chi_{[1,T]}e_j$, pour tout $t \in J$ fixé, où $(e_j)_j$ est une base de H (car H est séparable), on obtient

$$\left\langle \lim_{n\to\infty} \int_1^T f_n(s)G(t,s)ds, e_j \right\rangle = \left\langle \int_1^T f_\infty(s)G(t,s)ds, e_j \right\rangle,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^T G(t,s)f_n(s)ds = \int_1^T G(t,s)f_\infty(s)ds. \tag{2.25}$$

Alors pour tout $t \in J$,

$$\lim_{n\to\infty} u_{f_n}(t) = \int_1^T G(t,s)f_\infty(s)ds.$$

Nous concluons de (2.24) et (2.25), que

$$u_\infty(t) = \int_1^T G(t,s)f_\infty(s)ds \quad \forall t \in J$$

i.e., $u_\infty = u_{f_\infty} \in \mathcal{X}$. Ainsi $\mathcal{X}$ est compact dans $\mathcal{C}(J,H)$. ■

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer et de prouver notre théorème principal. Pour cela, supposons les hypothèses suivantes :
Soit $C : J \times H \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, fermées et convexes tel que

$(\mathcal{H}_1^C)$ pour tout sous ensemble borné $K \subset H \times H \times H$, l'ensemble $C(J \times K)$ est boule-compact et supposons qu'il existe une multi-application intégrablement bornée $F : J \rightrightarrows H$ à valeurs non vides, convexes et compactes tel que

$$C(t,x,y,z) \subset F(t) \quad \forall t \in J,\ \forall x,y,z \in H.$$

$(\mathcal{H}_2^C)$ Il existe une fonction absolument continue positive et strictement croissante $a : J \to \mathbb{R}$ et une constante réelle positive λ tel que pour tous $t,s \in J$ et $x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z},u \in H$,

$$|d_{C(t,x,y,z)}(u) - d_{C(s,\bar{x},\bar{y},\bar{z})}(u)| \leq |a(t)-a(s)| + \lambda\big(\|x-\bar{x}\| + \|y-\bar{y}\| + \|z-\bar{z}\|\big).$$

Soit $g : J \times H \times H \times H \to H$ une application Lebesgue-mesurable sur J et continue sur $H \times H \times H$, satisfaisant

$(\mathcal{H}_1^g)$ $\|g(t,x,y,z)\| \leq c(1+\|x\|+\|y\|+\|z\|) \quad \forall\,(t,x,y,z) \in J\times H\times H\times H.$

$(\mathcal{H}_2^g)$ Pour tous $t \in J$, $x_i, y_i, z_i \in H$, $i=1,2$, et pour une certaine fonction positive $k(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,\mathbb{R})$ on a

$$\|g(t,x_1,y_1,z_1) - g(t,x_2,y_2,z_2)\| \leq k(t)\Big(\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|+\|z_1-z_2\|\Big).$$

$(\mathcal{H}_C^N)$ Le cône normal de $C(t,x,y,u)$ est pseudo-hypomonotone dans le sens suivant (voir [4, 21, 65]) : pour tout $L>0$ donné, il existe une application réelle $\alpha_L \in \mathbf{L}^1(J,\mathbb{R})$ telle que si

$$a_i \in N_{C(t,x_i,y_i,z_i)}(b_i) \quad \text{pour } a_i \in H,\ x_i,y_i,z_i,b_i \in L\overline{\mathbf{B}}_H,\ i=1,2,$$

alors

$$\langle a_1-a_2, b_1-b_2\rangle \geq -\alpha_L(t)\|b_1-b_2\|\big(\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|+\|z_1-z_2\|\big). \tag{2.26}$$

Théorème 2.3.11

Supposons que $(\mathcal{H}_1^C)$, $(\mathcal{H}_2^C)$, $(\mathcal{H}_1^g)$, $(\mathcal{H}_2^g)$ et $(\mathcal{H}_C^N)$ soient vérifiées. Alors, pour tout $u_0 \in C(1,0,0,0)$, il existe une solution absolument continue $(x,u,v) : J \to H\times H\times H$ du problème

$$\begin{cases} D^q x(t) = v(t) \quad \forall t \in J; \\ x(1)=0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i D^r x(\mu_i); \\ v(t) = \displaystyle\int_1^t u(s)ds \quad \forall t \in J; \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t))}(u(t)) + g(t,x(t),v(t),u(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u(t) \in C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t)) \quad \forall t \in J; \\ u(1)=u_0,\ v(1)=0. \end{cases}$$

En d'autres termes, il existe une solution absolument continue $(x,v) : J \to H\times H$ du problème

$$(\mathcal{P}_g)\begin{cases} D^q x(t) = v(t) \quad \forall t \in J; \\ x(1)=0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i D^r x(\mu_i); \\ -\ddot{v}(t) \in N_{C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t))}(\dot{v}(t)) + g(t,x(t),v(t),\dot{v}(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ \dot{v}(t) \in C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t)) \quad \forall t \in J; \\ v(1)=0,\ \dot{v}(1)=u_0, \end{cases}$$

où q, r, λ_i et μ_i sont données dans la relation (2.1). De plus,

$$\|\ddot{v}(t)\| \leq M(t) \quad \forall t \in J,$$

pour une fonction positive $M(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,\mathbb{R})$.

Preuve.

Étape 1. Existence de solution pour un processus de Moreau du second ordre. Par $(\mathcal{H}_1^C)$, F est intégrablement bornée. Donc il existe une application positive $\gamma(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $F(t) \subset \gamma(t)\overline{\mathbf{B}}_H$, pour tout $t \in J$ (voir Définition 1.4.13). Considérons l'ensemble

$$\mathcal{X} =: \left\{ u_f : J \to H,\ u_f(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds \quad \forall t \in J,\ f \in S_F^1 \right\}.$$

Nous avons montré que $\mathcal{X}$ est convexe et compact (voir le Lemme 2.3.10). Soit $h \in \mathcal{X}$. Alors il existe $f \in S_F^1$ tel que

$$h(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds \quad \forall t \in J. \tag{2.27}$$

Par (i) de la Proposition 2.3.5 on a, par la relation (2.10), que $D^{q-1}h(\cdot)$ existe et est bien définie. Soit $D : J \times H \rightrightarrows H$ la multi-application définie par

$$D(t,z) = C(t, h(t), D^{q-1}h(t), z) \quad \forall (t,z) \in J \times H.$$

On doit montrer que D satisfait les hypothèses du Théorème 2.3.8. Il est clair que la multi-application D est à valeurs non vides, fermées et convexes. Maintenant, vérifions que $(\mathcal{H}_1^D)$ est vraie. Soit A un sous ensemble borné de H. Nous avons

$$D(J \times A) = C(J \times h(J) \times D^{q-1}h(J) \times A).$$

L'ensemble $\big(h(J) \times D^{q-1}h(J) \times A\big)$ est borné dans $H \times H \times H$. En effet, puisque $h \in \mathcal{X}$, par les relations (2.17) et (2.27), on a pour tout $t \in J$,

$$\big\|h(t)\big\| \leq M_G \big\|f\big\|_1 \leq M_G \big\|\gamma\big\|_1 =: M_2. \tag{2.28}$$

De même, en utilisant la relation (2.18), on a

$$\big\|D^{q-1}h(t)\big\| \leq M_1 \big\|\gamma\big\|_1 =: \widetilde{M_2} \quad \forall t \in J. \tag{2.29}$$

Celà donne que $D(J \times A)$ est boule compact puisque C satisfait $(\mathcal{H}_1^C)$. De plus, pour tous $t, s \in J$, et $x, y, u \in H$, $(\mathcal{H}_2^C)$ permet d'avoir

$$\begin{aligned} |d_{D(t,x)}(u) - d_{D(s,y)}(u)| =& |d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),x)}(u) - d_{C(s,h(s),D^{q-1}h(s),y)}(u)| \\ \leq& |a(t) - a(s)| + \lambda\big(\|h(t) - h(s)\| \\ &+ \|D^{q-1}h(t) - D^{q-1}h(s)\| + \|x - y\|\big). \end{aligned}$$

D'autre part, de (i) du Proposition 2.3.5, nous avons pour tous $t, s \in J$ $(s < t)$

$$\begin{aligned}\left\|D^{q-1}h(t) - D^{q-1}h(s)\right\| =& \left\|\int_1^t \left(\ln\frac{t}{\tau}\right) f(\tau)d\tau - \int_1^s \left(\ln\frac{s}{\tau}\right) f(\tau)d\tau\right\| \\ =& \left\|\int_s^t \left(\ln\frac{t}{\tau}\right) f(\tau)d\tau + \int_1^s \left[\left(\ln\frac{t}{\tau}\right) - \left(\ln\frac{s}{\tau}\right)\right] f(\tau)d\tau\right\| \\ \leq& \int_s^t \left(\ln\frac{t}{\tau}\right) \|f(\tau)\|d\tau + \big(\ln t - \ln s\big)\int_1^s \|f(\tau)\|d\tau \\ \leq& \left(\ln\frac{t}{s}\right)\left[\int_s^t \|\gamma(\tau)\|d\tau + \int_1^s \|\gamma(\tau)\|d\tau\right] \\ =& \big(\ln t - \ln s\big)\int_1^t \big\|\gamma(\tau)\big\|d\tau \leq \big(\ln t - \ln s\big)\big\|\gamma\big\|_1. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Revenons à la relation (2.23) on trouve, en évoquant (2.30), que

$$\begin{aligned}|d_{D(t,x)}(u) - d_{D(s,y)}(u)| \leq& |a(t) - a(s)| + \lambda\Bigg[\mathrm{R}\left((\ln t)^{q-1} - (\ln s)^{q-1}\right) \\ &+ \frac{\|\gamma\|_1}{\Gamma(q+1)}\Big((\ln t)^q - (\ln s)^q\Big) + \big(\ln t - \ln s\big)\big\|\gamma\big\|_1 + \|x-y\|\Bigg] \\ =& \beta(t) - \beta(s) + \lambda\|x-y\|,\end{aligned}$$

où

$$\beta(t) := a(t) + \lambda\Big(\mathrm{R}\,(\ln t)^{q-1} + \frac{\big\|\gamma\big\|_1}{\Gamma(q+1)}(\ln t)^q + (\ln t)\,\big\|\gamma\big\|_1\Big) \quad \forall t \in J,$$

et β est absolument continue. Considérons maintenant l'application $\widetilde{g} : J \times H \times H \to H$ définie par

$$\widetilde{g}(t,x,y) = g(t,h(t),x,y) \quad \forall t,x,y \in J \times H \times H,$$

et comme ci-dessus, montrons qu'elle satisfait les hypothèses du Théorème 2.3.8. Grâce à la mesurabilité de g sur J et sa continuité sur $H \times H \times H$, on en déduit que $\widetilde{g}$ est mesurable sur J et continue sur $H \times H$. De plus, par $(\mathcal{H}_1^g)$ et (2.28), on a pour tout $t \in J$ et $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}(t,x,y)\| =& \|g(t,h(t),x,y)\| \leq c\big(1 + \|h(t)\| + \|x\| + \|y\|\big) \\ \leq& c\big(1 + M_2 + \|x\| + \|y\|\big) \leq c_1\big(1 + \|x\| + \|y\|\big),\end{aligned}$$

où $c_1 := c(1 + M_2)$.

Par conséquent, d'après le Théorème 2.3.8, pour tout $h \in \mathcal{X}$, nous avons l'existence d'au moins une solution absolument continue (u_h, v_h) de l'inclusion

$$(\mathcal{P}_h)\begin{cases} v_h(t) = \displaystyle\int_1^t u_h(s)ds \quad \forall t \in J; \\ -\dot{u}_h(t) \in N_{D(t,v_h(t))}(u_h(t)) + \widetilde{g}(t, v_h(t), u_h(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u_h(t) \in D(t, v_h(t)) \quad \forall t \in J; \\ u_h(1) = u_0,\ v_h(1) = 0, \end{cases}$$

d'une manière équivalente

$$(\mathcal{P}_h)\begin{cases} v_h(t) = \displaystyle\int_1^t u_h(s)ds \quad \forall t \in J; \\ -\dot{u}_h(t) \in N_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v_h(t))}(u_h(t)) + g(t, h(t), v_h(t), u_h(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u_h(t) \in C(t, h(t), D^{q-1}h(t), v_h(t)) \quad \forall t \in J; \\ u_h(1) = u_0,\ v_h(1) = 0, \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{u}_h(t)\| \leq M(t) \quad p.p.\ t \in J, \tag{2.31}$$

pour une fonction positive $M(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R})$, et par suite on aura pour tout $t \in J$

$$\|u_h(t)\| \leq \|u_0\| + \int_1^t \|\dot{u}_h(s)\|ds \leq \|u_0\| + \|M\|_1 =: M_3, \tag{2.32}$$

et

$$\|v_h(t)\| \leq \int_1^t \|u_h(s)\|ds \leq M_3(T-1) =: M_4. \tag{2.33}$$

Étape 2. Unicité de la solution.

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_2^g)$ et $(\mathcal{H}_C^N)$, on a l'unicité de la solution. En effet, supposons qu'il y ait deux solutions $\left(u_h^1, v_h^1\right)$ et $\left(u_h^2, v_h^2\right)$ de l'inclusion $(\mathcal{P}_h)$. Soit

$$g_h^i(t) = g\big(t, h(t), v_h^i(t), u_h^i(t)\big) = \widetilde{g}\big(t, v_h^i(t), u_h^i(t)\big),\ i = 1, 2.$$

Nous avons par les relations (2.28), (2.29), (2.32), (2.33), $(\mathcal{H}_2^g)$ et $(\mathcal{H}_C^N)$, pour tout $t \in J$ en posant $L =: \max\big(M_2, \widetilde{M_2}, M_3, M_4\big)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 \\
&\quad=\big\langle \dot{u}_h^1(t) - \dot{u}_h^2(t), u_h^1(t) - u_h^2(t)\big\rangle \\
&\quad=\big\langle \dot{u}_h^1(t) + g_h^1(t) - \dot{u}_h^2(t) - g_h^2(t), u_h^1(t) - u_h^2(t)\big\rangle + \big\langle g_h^2(t) - g_h^1(t), u_h^1(t) - u_h^2(t)\big\rangle \\
&\quad\leq\alpha_L(t)\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\| + \|g_h^1(t) - g_h^2(t)\|\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\| \\
&\quad\leq(\alpha_L(t) + k(t))\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\| + k(t)\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 \\
&\quad\leq\left(\frac{\alpha_L(t) + 3k(t)}{2}\right)\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 + \left(\frac{\alpha_L(t) + k(t)}{2}\right)\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2,
\end{aligned}$$

et (puisque $\dot{v}_h^1 = u_h^1$ et $\dot{v}_h^2 = u_h^2$), il en résulte que $\big($appliquant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ pour $a, b \in \mathbb{R}\big)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 + \|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2\Big] \\
&\quad = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 + \big\langle u_h^1(t) - u_h^2(t), v_h^1(t) - v_h^2(t)\big\rangle \\
&\quad \leq \bigg(\frac{\alpha_L(t) + 3k(t)}{2}\bigg)\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 + \bigg(\frac{\alpha_L(t) + k(t)}{2}\bigg)\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2 \\
&\quad + \|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\| \\
&\quad \leq \bigg(\frac{\alpha_L(t) + 3k(t) + 1}{2}\bigg)\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 + \bigg(\frac{\alpha_L(t) + k(t) + 1}{2}\bigg)\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2 \\
&\quad \leq \bigg(\frac{\alpha_L(t) + 3k(t) + 1}{2}\bigg)\Big[\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 + \|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2\Big].
\end{aligned}
$$

Le Lemme de Gronwall (Lemme 4), nous donne $\big($en tenant compte que $v_h^1(1) = v_h^2(1) = 0$ et $u_h^1(1) = u_h^2(1) = u_0\big)$ que

$$\|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2 + \|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in J,$$

alors

$$\|u_h^1(t) - u_h^2(t)\|^2 = 0 \text{ et } \|v_h^1(t) - v_h^2(t)\|^2 = 0 \quad \forall t \in J.$$

On conclut que $v_h^1 = v_h^2$ et $u_h^1 = u_h^2$, ce qui signifie l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_h)$.

Étape 3. Définition de l'application à laquelle le théorème du point fixe sera appliqué.

Pour $h \in \mathcal{X}$, on définit l'application $\Phi(\cdot)$ par

$$\Phi(h)(t) := \int_1^T G(t,s)u_h(s)ds \quad \forall t \in J, \tag{2.34}$$

où (u_h, v_h) est l'unique solution absolument continue de $(\mathcal{P}_h)$. Il faut montrer, en appliquant le théorème du point fixe de Schauder (Théorème 2), l'existence de $\widetilde{h} \in \mathcal{X}$ tel que $\Phi(\widetilde{h}) = \widetilde{h}$. Pour cela, nous devons prouver que $\Phi(\cdot)$ est définie de $\mathcal{X}$ dans lui-même et est continue. En effet, puisque pour tout $t \in J$,

$$u_h(t) \in C(t, h(t), D^{q-1}h(t), v_h(t)) \subset F(t), \tag{2.35}$$

nous avons que $\Phi(h) \in \mathcal{X}$, c'est-à-dire $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Montrons par la suite la continuité de Φ. Il suffit donc de vérifier que, si $(h_n(\cdot))_n \subset \mathcal{X}$ converge uniformément vers $h(\cdot)$, $\big(\Phi(h_n)\big)_n$ converge uniformément vers $\Phi(h)$ dans $\mathcal{X}$, i.e.,

$$\sup_{t\in J}\|\Phi(h_n)(t) - \Phi(h)(t)\| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty;$$

et que la suite de solutions absolument continue $(v_{h_n}(\cdot),\ u_{h_n}(\cdot))_n$ associée à $(h_n(\cdot))_n$, c'est-à-dire qui vérifie le problème

$$\begin{cases} v_{h_n}(t) = \displaystyle\int_1^t u_{h_n}(s)ds \quad \forall t \in J; \\ -\dot{u}_{h_n}(t) \in N_{C(t,h_n(t),D^{q-1}h_n(t),v_{h_n}(t))}(u_{h_n}(t)) + g(t, h_n(t), v_{h_n}(t), u_{h_n}(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u_{h_n}(t) \in C(t, h_n(t), D^{q-1}h_n(t), v_{h_n}(t)) \quad \forall t \in J; \\ u_{h_n}(1) = u_0,\ v_{h_n}(1) = 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

converge uniformément vers la solution absolument continue $(v_h(\cdot), u_h(\cdot))$ associée à $h(\cdot)$, du problème

$$\begin{cases} v_h(t) = \displaystyle\int_1^t u_h(s)ds \quad \forall t \in J; \\ -\dot{u}_h(t) \in N_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v_h(t))}(u_h(t)) + g(t, h(t), v_h(t), u_h(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u_h(t) \in C(t, h(t), D^{q-1}h(t), v_h(t)) \quad \forall t \in J; \\ u_h(1) = u_0,\ v_h(1) = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Par les relations (2.36) (troisième relation), (2.28), (2.29), (2.32) et (2.33), nous avons pour tout $t \in J$

$$(u_{h_n}(t))_n \subset C(J \times M_2\overline{\mathbf{B}}_H \times \widetilde{M_2}\overline{\mathbf{B}}_H \times M_4\overline{\mathbf{B}}_H) \cap M_3\overline{\mathbf{B}}_H, \tag{2.38}$$

qui est compact via l'hypothèse $(\mathcal{H}_2^C)$. On en déduit que, pour chaque $t \in J$, $(u_{h_n}(t))_n$ est relativement compacte. D'autre part, pour $t, s \in J$ $(s < t)$, on a par (2.31)

$$\|u_{h_n}(t) - u_{h_n}(s)\| \leq \int_s^t \|\dot{u}_{h_n}(\tau)\|d\tau \leq \int_s^t M(\tau)d\tau, \tag{2.39}$$

ce qui montre l'équi-continuité de $(u_{h_n}(\cdot))_n$. Par conséquent, d'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà, $(u_{h_n}(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(J, H)$, et on peut en extraire une sous suite, notée aussi $(u_{h_n}(\cdot))_n$, qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{C}(J, H)$. Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{h_n}(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = 0. \tag{2.40}$$

Montrons la convergence faible dans $\mathbf{L}^1(J, H)$ de la suite $(\dot{u}_{h_n}(\cdot))_n$.
En utilisant la relation (2.31), $(\dot{u}_{h_n}(\cdot))_n$ est intégrablement bornée, alors nous pouvons extraire une sous suite, notée aussi $(\dot{u}_{h_n}(\cdot))_n$, qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1(J, H), \mathbf{L}^\infty(J, H))$ vers une application $w \in \mathbf{L}^1(J, H)$ i.e., pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty(J, H)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_{h_n}(\cdot), y(\cdot)\rangle = \langle w(\cdot), y(\cdot)\rangle$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^T \langle \dot{u}_{h_n}(s), y(s)\rangle ds = \int_1^T \langle w(s), y(s)\rangle ds.$$

En particulier, pour $y_t(\cdot) = \chi_{[1,t]}(\cdot)e_j$, pour tout $t \in J$ fixé où $(e_j)_j$ est une base de H. Alors, on obtient

$$\left\langle \lim_{n\to\infty} \int_1^t \dot{u}_{h_n}(s)ds, e_j \right\rangle = \left\langle \int_1^t w(s)ds, e_j \right\rangle \forall j,$$

qui assure que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^t \dot{u}_{h_n}(s)ds = \int_1^t w(s)ds.$$

Comme $(u_{h_n}(\cdot))_n$ est une suite d'applications absolument continues, on a l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} (u_{h_n}(t) - u_{h_n}(1)) = \lim_{n\to\infty} \int_1^t \dot{u}_{h_n}(s)ds = \int_1^t w(s)ds,$$

alors,

$$u(t) = u_0 + \int_1^t w(s)ds,$$

d'où $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot)$ *p.p.* Donc $(\dot{u}_{h_n}(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(J, H)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.

Concernant la convergence uniforme de $(v_{h_n}(\cdot))_n$. Par la relation (2.32), on a $(u_{h_n}(.))_n$ est uniformément bornée par M_3. En appliquant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient de la première relation de (2.36), pour tout $t \in J$,

$$\lim_{n\to\infty} v_{h_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_1^t u_{h_n}(s)ds = \int_1^t u(s)ds =: v(t), \tag{2.41}$$

c'est-à-dire, $(v_{h_n}(\cdot))_n$ converge uniformément vers une certaine application $v \in \mathcal{C}(J, H)$ et $\dot{v} = u$ *p.p.*

Maintenant, nous prouvons la convergence uniforme de $\left(D^{q-1}h_n(\cdot)\right)_n$. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathcal{X}$. C'est-à-dire, il existe une suite $(f_n)_n \subset S_F^1$ telle que

$$h_n(t) = \int_1^T G(t,s)f_n(s)ds \quad \forall t \in J.$$

Par la définition de la dérivée fractionnaire d'Hadamard (Définition 1.7.10), nous avons

$$D^{q-1}h_n(t) = \frac{1}{\Gamma(k-q+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^k \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{h_n(s)}{s}ds, \quad k = [q-1]+1.$$

En évoquant la relation (2.28), on obtient pour tout $t, s \in J$ $(s < t)$

$$\left\| \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{h_n(s)}{s} \right\| \leq \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{1}{s}\|h_n(s)\| \leq \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{1}{s}M_2,$$

par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et puisque $(h_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $h(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} D^{q-1}h_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(k-q+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^k \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{h_n(s)}{s}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-q+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^k \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{h(s)}{s}ds =: D^{q-1}h(t).\end{aligned}$$

Nous concluons que $\big(D^{q-1}h_n(\cdot)\big)_n$ converge uniformément vers $D^{q-1}h(\cdot)$.

Les limites des suites ci-dessus satisfont les inclusions :

$$u(t) \in C(t, h(t), D^{q-1}h(t), v(t)) \quad \forall t \in J \tag{2.42}$$

et

$$-\dot{u}(t) - g(t, h(t), v(t), u(t)) \in N_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t)) \quad p.p.\ t \in J. \tag{2.43}$$

En effet, en utilisant la troisième relation de (2.36) et $(\mathcal{H}_2^C)$, nous avons pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
&d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t))\\
&\quad\le \|u(t) - u_{h_n}(t)\| + d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u_{h_n}(t))\\
&\quad= \|u(t) - u_{h_n}(t)\| + |d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u_{h_n}(t)) - d_{C(t,h_n(t),D^{q-1}h_n(t),v_{h_n}(t))}(u_{h_n}(t))|\\
&\quad\le \|u(t) - u_{h_n}(t)\| + \lambda\big[\|h_n(t) - h(t)\| + \|D^{q-1}h_n(t) - D^{q-1}h(t)\| + \|v_{h_n}(t) - v(t)\|\big].
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient de la convergence uniforme de $(h_n(\cdot))_n$ vers $h(\cdot)$, $\big(D^{q-1}h_n(\cdot)\big)_n$ vers $D^{q-1}h(\cdot)$ et $(v_{h_n}(\cdot))_n$ vers $v(\cdot)$, que

$$d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t)) \le 0,$$

et par la fermeture des valeurs de C, on en déduit (2.42). Maintenant, pour tout $t \in J$, on pose $g_n(t) = g(t, h_n(t), v_{h_n}(t), u_{h_n}(t))$. Puisque $(h_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $h(\cdot)$, des relations (2.40), (2.41) et la continuité de $g(t,\cdot,\cdot,\cdot)$, il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} g(t, h_n(t), v_{h_n}(t), u_{h_n}(t)) = g(t, h(t), v(t), u(t)). \tag{2.44}$$

De plus, par $(\mathcal{H}_1^g)$ et les relations (2.28), (2.32) et (2.33), nous avons

$$\|g_n(t)\| \le c\Big(1 + \|h_n(t)\| + \|v_{h_n}(t)\| + \|u_{h_n}(t)\|\Big) \le M_5 \tag{2.45}$$

où $M_5 := c\big(1 + M_2 + M_4 + M_3\big)$, en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \big\|g_n(\cdot) - g(\cdot, h(\cdot), v(\cdot), u(\cdot))\big\|_1 &\le \lim_{n\to\infty} \int_1^T \big\|g_n(t) - g(t, h(t), v(t), u(t))\big\| dt\\
&= \int_1^T \lim_{n\to\infty} \big\|g_n(t) - g(t, h(t), v(t), u(t))\big\| dt\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Nous concluons que $(g_n(\cdot))_n$ converge vers $g(\cdot, h(\cdot), v(\cdot), u(\cdot))$ dans $\mathbf{L}^1(J, H)$, donc elle converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(J, H)$ vers le même limite. Par les relations (2.31) et (2.45), on a pour tout $t \in J$

$$\|\dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t)\| \le M(t) + M_5 =: \widetilde{M}(t). \tag{2.47}$$

En utilisant cette dernière inégalité, la deuxième relation de (2.36) et *(i)* de la Proposition 1.5.14, nous obtenons pour presque tout $t \in J$,

$$-\dot{u}_{h_n}(t) - g_n(t) \in \widetilde{M}(t)\partial d_{C(t,h_n(t),D^{q-1}h_n(t),v_{h_n}(t))}(u_{h_n}(t)). \tag{2.48}$$

Or, $(\dot{u}_{h_n}(\cdot))$, converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(J,H)$ vers $\dot{u}(\cdot)$ et $\big(\dot{u}_{h_n}(\cdot) + g_n(\cdot)\big)_n$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(J,H)$ vers $\dot{u}(\cdot)+g(\cdot,h(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))$. Alors, le lemme de Mazur (Lemme 1.3.10) assure l'existence d'une suite $(z_n)_n$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n \in co\big\{\dot{u}_{h_p}(\cdot) + g_p(\cdot) : \ p \geq n\big\}$$

et $(z_n)_n$ converge fortement vers $\dot{u}(\cdot) + g(\cdot,h(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))$ dans $\mathbf{L}^1(J,H)$. Par conséquent, nous pouvons en extraire une sous suite qui converge presque partout vers $\dot{u}(\cdot) + g(\cdot,h(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))$, d'où l'existence d'un sous ensemble $N_0 \subset J$ de mesure nulle tel que, pour tout $t \in (J\backslash N_0)$,

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) + g(t,h(t),v(t),u(t)) &\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{z_k(t), k \geq n\}}\\ &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co\Big\{\dot{u}_{h_k}(t) + g_k(t),\ k \geq n\Big\}},\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\dot{u}(t) + g(t,h(t),v(t),u(t)) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\Big\{\dot{u}_{h_k}(t) + g_k(t),\ k \geq n\Big\}.$$

D'après le Théorème 1.2.6, pour presque tout $t \in J$, pour tout $\xi \in H$,

$$\begin{aligned}\Big\langle \xi, \dot{u}_h(t) + g(t,h(t),v(t),u(t))\Big\rangle &\leq \sup_{k\geq n}\Big\langle \xi, \dot{u}_{h_k}(t) + g_k(t)\Big\rangle, \ \forall n \in \mathbb{N}\\ &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\Big\langle \xi, \dot{u}_{h_k}(t) + g_k(t)\Big\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\Big\langle \xi, \dot{u}_h(t) + g(t,h(t),v(t),u(t))\Big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\Big\langle \xi, \dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t)\Big\rangle.$$

La relation (2.48) implique que

$$\begin{aligned}&\langle \xi, \dot{u}_h(t) + g(t,h(t),v(t),u(t))\rangle\\ &\qquad\leq \limsup_{n\to\infty}\ \delta^*\big(\xi, -\widetilde{M}(t)\partial d_{C(t,h_n(t),D^{q-1}h_n(t),v_{h_n}(t))}(u_{h_n}(t)\big)\\ &\qquad\leq \delta^*\big(\xi, -\widetilde{M}(t)\partial d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t))\big),\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle de la propriété (ii) dans la Proposition 1.5.15, due à $(\mathcal{H}_2^C)$, la convergence de $(h_n(\cdot))_n$ (resp. $\big(D^{q-1}h_n(\cdot)\big)_n$) à $h(\cdot)$ (resp. $D^{q-1}h(\cdot)$), la troisième relation de (2.36), (2.40), (2.41) et (2.42). Puisque $t \mapsto -\widetilde{M}(t)\partial d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t))$ est une multi-application scalairement mesurable à valeurs convexes et faiblement compactes et H est séparable, nous obtenons pour presque tout $t \in J$ via la Proposition 1.4.11,

$$\begin{array}{rcl} \dot{u}(t) + g(t,h(t),v(t),u(t)) & \in & -\widetilde{M}(t)\partial d_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t)) \\ & \subset & -N_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t)). \end{array}$$

Il vient que,

$$\begin{cases} v(t) = \displaystyle\int_1^t u(s)ds \quad \forall t \in J; \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,h(t),D^{q-1}h(t),v(t))}(u(t)) + g(t,h(t),v(t),u(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u(1) = u_0,\ v(1) = 0. \end{cases}$$

Par l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_h)$, nous concluons que $u = u_h$ et $v = v_h$, autrement dit (u_{h_n}, v_{h_n}) converge uniformément ver (u_h, v_h). D'autre part, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \|\Phi(h_n)(t) - \Phi(h)(t)\| & = & \left\| \displaystyle\int_1^T G(t,s)u_{h_n}(s) - \int_1^T G(t,s)u_h(s)ds \right\| \\ & \leq & \displaystyle\int_1^T M_G \|u_{h_n}(s) - u_h(s)\| ds. \end{array}$$

Comme (2.40) est vraie, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\sup_{t \in J} \|\Phi(h_n)(t) - \Phi(h)(t)\| \leq \int_1^T M_G \|u_{h_n}(\cdot) - u_h(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Donc,

$$\Phi(h_n)(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(h)(\cdot) \text{ dans } \mathcal{C}(I,H).$$

Étape 4. Existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_g)$.

Toutes les conditions du théorème du point fixe de Schauder sont satisfaites, par conséquent, il existe un point fixe de Φ, disons $\widetilde{h} \in \mathcal{X}$, avec $\widetilde{h} = \Phi(\widetilde{h})$. Alors,

$$\widetilde{h}(t) = \Phi(\widetilde{h})(t) = \int_1^T G(t,s)u_{\widetilde{h}}(s)ds \quad \forall t \in J,$$

et de (2.34) et (2.11), on déduit que $D^q\widetilde{h}(t) = \displaystyle\int_1^t u_{\widetilde{h}}(s)ds, \quad \forall t \in J.$

En utilisant les notations ci-dessus et en rappelant la Remarque 2.3.7, nous avons montré l'existence de $\widetilde{h} \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ tel que $\big($mettant $\widetilde{h} = x, v_{\widetilde{h}} = v, u_{\widetilde{h}} = u\big)$

$$\begin{cases} D^q x(t) = v(t) \quad t \in J; \\ x(1) = 0, \;\; D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i)); \\ v(t) = \displaystyle\int_1^t u(t)ds, \\ -\dot{u}(t) \in \;\; N_{C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t))}(u(t)) + g(t,x(t),v(t),u(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ u(t) \in C(t,x(t),D^{q-1}x(t),v(t)) \quad \forall t \in J; \\ u(1) = u_0, \;\; v(1) = 0. \end{cases}$$

Ceci termine la preuve de notre Théorème. ■

Nous fournissons ci-après un exemple d'application de notre résultat principal.

Exemple 2.3.12
Soit $H = \mathbb{R}$, et considérons l'application $g : [1,T] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$g(t,x,y,z) = \frac{e^t}{2}\left(\sin|x| + \frac{|y|}{1+|y|} + |z|\right), \quad \forall (t,x,y,z) \in J \times \mathbb{R}^3.$$

Évidement, g satisfait $(\mathcal{H}_1^g)$ et $(\mathcal{H}_2^g)$. En effet, pour $t \in J$, $(x,y,z), (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} |g(t,x,y,z)| = & \left|\frac{e^t}{2}\left(\sin|x| + \frac{|y|}{1+|y|} + |z|\right)\right| \le \frac{e^T}{2}\big(|x| + |y| + |z|\big) \\ \le & \frac{e^T}{2}\big(1 + |x| + |y| + |z|\big), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |g(t,x,y,z) - g(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \le & \frac{e^t}{2}\left(\big|\sin|x| - \sin|\bar{x}|\big| + \left|\frac{|y|}{1+|y|} - \frac{|\bar{y}|}{1+|\bar{y}|}\right| + \big||z| - |\bar{z}|\big|\right) \\ \le & k(t)\big(\,|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|\,\big), \end{aligned}$$

où la fonction $k(\cdot)$ est définie par $k(t) = \dfrac{e^t}{2}$ pour tout $t \in J$ et est intégrable.
Nous considérons également la multi-application $C : [1,T] \times \mathbb{R}^3 \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$C(t,x,y,z) = K(t) = [t,T],$$

c'est-à-dire que C dépend uniquement du temps. Il est clair que C satisfait $(\mathcal{H}_1^C)$, $(\mathcal{H}_2^C)$ et $(\mathcal{H}_C^N)$. En effet, pour tout $t \in J$, $K(t)$ est un sous ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}$, et pour tous $t, s \in J$ et $u \in \mathbb{R}$

$$|d_{K(t)}(u) - d_{K(s)}(u)| = |d_{[t,T]}(u) - d_{[s,T]}(u)| \le |t-s|.$$

En outre, $N_{K(t)}(\cdot)$ *est monotone, et alors pseudo-hypomonotone dans le sens de* $(\mathcal{H}_C^N)$. *Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.3.11 avec les données :* $T \geq e$, $q = \frac{3}{2}$, $r = \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$, $\mu_1 = \frac{5}{4}$, *et* $\mu_2 = \frac{3}{2}$, *pour* $u_0 \in K(1) = [1, T]$, *on en déduit l'existence d'une solution absolument continue* (x, v) *du problème*

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}x(t) = v(t) \quad \forall t \in [1, T]; \\ x(1) = 0, \quad D^{\frac{1}{3}}x(T) = 2D^{\frac{1}{3}}x(\frac{5}{4}) - \frac{4}{3}D^{\frac{1}{3}}x(\frac{3}{2}); \\ \dot{v}(t) \in K(t) \quad \forall t \in J; \\ -\ddot{v}(t) \in N_{K(t)}(\dot{v}(t)) + g(t, x(t), v(t), \dot{v}(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ v(1) = 0, \ \dot{v}(1) = u_0. \end{cases}$$

Sachant que pour $K(t) = [t, T]$,

$$N_{K(t)}(x) = \begin{cases} \{0\} \quad si\, x \in]t, T[\\ \mathbb{R}_- \quad si\ x = t \\ \mathbb{R}_+ \quad si\ x = T. \end{cases}$$

Chapitre 3

Inclusion différentielle d'ordre fractionnaire avec une multi-application pseudo-Lipschitz

3.1 Introduction

Ce chapitre est partagé en deux parties : dans la première, nous présentons un résultat d'existence de solutions absolument continues d'une inclusion différentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites. En effet, nous sommes fondamentalement intéressées par l'existence de solutions du problème suivant

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} D^q x(t) \in F(t, x(t), D^{q-1}x(t)) \quad p.p.\ t \in [1, T], \\ x(1) = 0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i)), \end{cases}$$

où D^q est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1,2]$, $r \in (0, q-1)$, $\mu_i \in (1,T)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$ et $F : [1,T] \times H \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides, fermées et satisfait une condition de pseudo-lipschitzité. La structure de la preuve est similaire à celle du théorème de Fillippovs [48]. Par une solution de $(\mathcal{P}_F)$, nous voulons dire l'existence d'une application $x(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$ telle que $D^{q-1}x(\cdot) \in \mathcal{C}(J,H)$ et $D^q x(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)$ et l'existence d'une application mesurable $\xi : J \to H$ tel que

$$\begin{cases} D^q x(t) = \xi(t) \quad \forall t \in [1,T], \\ x(1) = 0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i)), \\ \xi(t) \in F(t, x(t), D^{q-1}x(t)) \quad p.p.\ t \in [1,T]. \end{cases}$$

Dans la deuxième partie, on applique le résultat obtenu à un problème de contrôle optimale, qui consiste à minimiser la fonction coût

$$\int_1^T L(t, x_u(t), D^q x_u(t))dt,$$

où $x_u(\cdot)$ est l'unique solution du problème

$$(\mathcal{P}_{g,u}) \begin{cases} D^q x(t) = g(t, x(t), D^{q-1}x(t), u(t)) \quad p.p.\ t \in J; \\ x(1) = 0, \quad D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i)), \end{cases}$$

g est une fonction univoque et u est la fonction de contrôle qui appartient à un ensemble approprié que nous définissons ultérieurement.

3.2 Résultat principal

Le résultat technique suivant est prouvé dans [22].

Lemme 3.2.1
Soit $f(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)$. Alors la solution $x(\cdot)$ du problème

$$D^q x(t) = f(t) \quad \forall t \in J; \tag{3.1}$$

$$x(1) = 0,\ D^r x(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i). \tag{3.2}$$

est donnée par

$$x(t) = \int_1^T G(t,s) f(s) ds \quad \forall t \in J,$$

où

$$G(t,s) = \frac{(\ln t)^{q-1}}{\Gamma(q)\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\chi_{[1,\mu_i]}(s) - \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}\chi_{[1,T]}(s)\right)$$
$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}\chi_{[1,t]}(s), \tag{3.3}$$

et

$$\rho := (\ln T)^{q-r-1} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\ln\mu_i)^{q-r-1}. \tag{3.4}$$

Preuve.
D'après (iv) du Lemme 1.7.15, on a pour tout $t \in J$,

$$\langle y, x(t)\rangle = I^q\langle y, f(t)\rangle - c_1(\ln t)^{q-1} - c_2(\ln t)^{q-2}. \tag{3.5}$$

En appliquant la condition aux limites $x(1) = 0$, on a $c_2 = 0$. On va utiliser la deuxième condition aux limites de (3.2), par évocation du Lemme 1.7.11 et (iii) du Lemme 1.7.15, on obtient

$$c_1 = \frac{-\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}\langle y, f(\mu_i)\rangle - I^{q-r}\langle y, f(T)\rangle\right), \tag{3.6}$$

avec

$$\rho := (\ln T)^{q-r-1} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\ln\mu_i)^{q-r-1}.$$

Par conséquent, en remplaçant (3.6) et c_2 dans (3.5), on déduit que

$$x(t) = \frac{(\ln t)^{q-1}}{\Gamma(q)\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{f(s)}{s}ds - \int_1^{T}\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{f(s)}{s}ds\right)$$
$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{f(s)}{s}.$$

■

Maintenant, énonçons le lemme suivant, qui est l'un des outils clés utilisés dans la preuve de notre théorème d'existence.

Lemme 3.2.2 *[57]*
Considérons le système d'inégalités récursives suivant

$$\delta_{n+1} - \delta_n \leq \eta_{n+1}, \quad \eta_{n+1} \leq \xi_n \eta_n, \quad \xi_n = k + \beta\delta_n, \quad \delta_n \geq 0, \ \eta_n \geq 0, \tag{3.7}$$

où k et β sont des paramètres positifs. Supposons que les valeurs initiales δ_1, η_1 et ξ_1 soient données satisfaisant l'inégalité

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta\eta_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{3.8}$$

pour un certain $\lambda \in]0,1[$. Soit finalement $(\delta_n, \eta_n, \xi_n)$ la solution correspondante du système récursif. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \leq \frac{\eta_1}{1-\lambda}.$$

Preuve.
Nous affirmons que sous les hypothèses supposées on a

$$\xi_n \leq \lambda, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet, par la relation (3.8), on a $\xi_1 \leq \lambda$. Supposons que

$$\xi_n \leq \lambda, \ \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Par la première et la troisième relation de (3.7), on a

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= k + \beta\delta_{n+1} \\ &\leq k + \beta(\delta_n + \eta_{n+1}) \\ &= k + \beta\delta_n + \beta\eta_{n+1} \\ &= \xi_n + \beta\eta_{n+1}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &\leq \xi_n + \beta\eta_{n+1} \\ &\leq \xi_{n-1} + \beta\eta_n + \beta\eta_{n+1} \\ &\leq \xi_{n-2+} + \beta\eta_{n-1} + \beta\eta_n + \beta\eta_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous appliquons cette estimation par récurrence, en utilisant la deuxième relation de (3.7) et le fait que $\xi_1 < \lambda$, on obtient, puisque $\lambda \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\xi_{n+1} &\leq \xi_1 + \beta\eta_2 + \beta\eta_3 + \ldots + \beta\eta_{n+1} \\
&= \xi_1 + \beta(\eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_{n+1}) \\
&\leq \xi_1 + \beta(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n) \\
&\leq \xi_1 + \beta(\xi_1\eta_1 + \xi_1^2\eta_1 + \ldots + \xi_1^n\eta_1) \\
&\leq \xi_1 + \beta(\lambda\eta_1 + \lambda^2\eta_1 + \ldots + \lambda^n\eta_1) \\
&= \xi_1 + \beta\eta_1(\lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n) \\
&\leq \xi_1 + \beta\eta_1\frac{\lambda}{1-\lambda} \\
&\leq \lambda.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\eta_n &\leq \xi_{n-1}\eta_{n-1} \\
&\leq \xi_{n-1}\xi_{n-2}\eta_{n-2} \\
&\leq \xi_{n-1}\xi_{n-2}\ldots\xi_1\eta_1 \\
&\leq \lambda^{n-1}\eta_1,
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n \leq \eta_1\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}.$$

Puisque $\lambda \in]0,1[, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$ converge vers $\dfrac{1}{1-\lambda}$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n \leq \frac{\eta_1}{1-\lambda}.$$

■

Tout d'abord, fixons quelques notations et données.

D^q (resp. I^q) est la dérivée (resp. intégrale) fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1,2]$, $\mu_i \in (1,T),\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n},\ n \geq 2$ et $r \in (0, q-1)$, et supposons que $\rho \neq 0$ (ρ est donné dans la relation (3.4)). (3.9)

Dans ce qui suit, nous mettons en évidence quelques propriétés de la fonction de Green.

Lemme 3.2.3

Soit G la fonction définie par la relation (3.3). Alors

(i) $G(\cdot,\cdot)$ satisfait l'estimation suivante

$$|G(t,s)| \leq \frac{(\ln T)^{q-1}}{\Gamma(q)|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|(\ln\mu_i)^{q-r-1}+(\ln T)^{q-r-1}\right)+\frac{1}{\Gamma(q)}(\ln T)^{q-1} =: M_G. \quad (3.10)$$

(ii) Si $u\in\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ satisfait les conditions aux limites (3.2), alors

$$u(t)=\int_1^T G(t,s)D^q u(s)ds \quad \forall t\in J. \quad (3.11)$$

(iii) Soit $f\in\mathbf{L}^1(J,H)$ et $u_f : J\to H$ la fonction définie par

$$u_f(t)=\int_1^T G(t,s)f(s)ds \quad \forall t\in J. \quad (3.12)$$

Alors, $u_f(1)=0$ et $D^r u_f(T)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D^r u_f(\mu_i)$, pour tout $t\in J$

$$(D^{q-1}u_f)(t)=\frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i)-I^{q-r}f(T)\right)+I^1 f(t), \quad (3.13)$$

et

$$D^q u_f(t)=f(t), \quad \forall t\in J. \quad (3.14)$$

Clairement, $u_f\in\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$.

Preuve.

(i) En utilisant le fait que, pour tout t fixé et pour $a>0$, la fonction $s\in J\mapsto\left(\ln\frac{t}{s}\right)^a\frac{1}{s}$ est décroissante ($r<q-1$), à partir de la relation (3.3), on obtient (3.10).

Pour le reste des propriétés, nous procédons en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 2.3.4. Nous allons donc simplement donner un aperçu de la preuve.

(ii) Soit $u\in\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ satisfaisant (3.2). Fixons $y\in H$. Nous avons pour tout $t\in J$

$$\begin{aligned}
&\left\langle y,\int_1^T G(t,s)D^q u(s)ds\right\rangle=\int_1^T G(t,s)D^q\langle y,u(s)\rangle ds\\
&=\frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}D^q\langle y,u(s)\rangle ds-\int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{1}{s}D^q\langle y,u(s)\rangle ds\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{1}{s}D^q\langle y,u(s)\rangle ds\\
&=\frac{(\ln t)^{q-1}\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}D^q\langle y,u(\mu_i)\rangle-I^{q-r}D^q\langle y,u(T)\rangle\right)+I^q D^q\langle y,u(t)\rangle.
\end{aligned} \quad (3.15)$$

D'après (iv) du Lemme 1.7.15, on a pour tout $t \in J$,

$$\langle y, u(t)\rangle = I^q D^q \langle y, u(t)\rangle - c_1 (\ln t)^{q-1} - c_2 (\ln t)^{q-2}. \tag{3.16}$$

En appliquant la condition aux limites $u(1) = 0$, on a $c_2 = 0$. L'utilisation de la deuxième condition aux limites de (3.2), nous amène à calculer c_1. Par évocation de la relation (3.16), le Lemme 1.7.11 et (iii) du Lemme 1.7.15, on obtient

$$c_1 \quad = \quad \frac{-\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} D^q \langle y, u(\mu_i)\rangle - I^{q-r} D^q \langle y, u(T)\rangle \right), \tag{3.17}$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\langle y, u(t)\rangle = I^q D^q \langle y, u(t)\rangle + \frac{(\ln t)^{q-1}\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} D^q \langle y, u(\mu_i)\rangle - I^{q-r} D^q \langle y, u(T)\rangle \right).$$

Revenons à la relation (3.15), nous obtenons pour tout $t \in J$,

$$u(t) = \int_1^T G(t,s) D^q u(s) ds.$$

(iii) Soit $f \in \mathbf{L}^1(J, H)$ et soit pour tout $t \in J$,

$$u_f(t) = \int_1^T G(t,s) f(s) ds.$$

Nous avons pour tout $t \in J$, selon la définition de $G(\cdot,\cdot)$,

$$\begin{aligned} u_f(t) =& \frac{(\ln t)^{q-1}}{\rho\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln \frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1} \frac{1}{s} f(s) ds - \int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{q-r-1} \frac{1}{s} f(s) ds \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{q-1} \frac{1}{s} f(s) ds \\ =& \frac{(\ln t)^{q-1}\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} f(\mu_i) - I^{q-r} f(T) \right) + I^q f(t). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Alors, de la relation (3.18) on trouve que $u_f(1) = 0$. Maintenant, nous prouvons la deuxième condition aux limites. Soit $y \in H$, arbitraire. Nous avons pour $r \in (0, q-1)$,

$$\begin{aligned} \langle y, D^r u_f(t)\rangle &= D^r \langle y, u_f(t)\rangle \\ &= \frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} f(\mu_i) - I^{q-r} f(T) \right) D^r \left\langle y, (\ln t)^{q-1} \right\rangle + D^r I^q \langle y, f(t)\rangle. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Du Lemme 1.7.11 et (iii) du Lemme 1.7.15, on a

$$\begin{aligned}\langle y, D^r u_f(t)\rangle =& \frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i)-I^{q-r}f(T)\right)\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-r)}\left\langle y,(\ln t)^{q-r-1}\right\rangle + I^{q-r}\langle y, f(t)\rangle\\ =& \frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i)-I^{q-r}f(T)\right)\left\langle y,(\ln t)^{q-r-1}\right\rangle + I^{q-r}\langle y, f(t)\rangle,\end{aligned}$$

on en déduit que

$$D^r u_f(t) = \frac{(\ln t)^{q-r-1}}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i)-I^{q-r}f(T)\right)+I^{q-r}f(t), \tag{3.20}$$

Rappelons que $\rho := (\ln T)^{q-r-1} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\ln\mu_i)^{q-r-1}$. On a

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D^r u_f(\mu_i) - D^r u_f(T) = 0,$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D^r u_f(\mu_i) = D^r u_f(T).$$

D'autre part, en appliquant D^{q-1} aux deux côtés de la relation (3.18), on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle y, D^{q-1}u_f(t)\right\rangle =& D^{q-1}\langle y, u_f(t)\rangle\\ =& \frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i)-I^{q-r}f(T)\right)D^{q-1}\left\langle y,(\ln t)^{q-1}\right\rangle + D^{q-1}I^{q}\langle y, f(t)\rangle,\end{aligned}$$

évoquant le Lemme 1.7.11 et (iii) du Lemme 1.7.15, on en déduit pour tout $t \in J$,

$$D^{q-1}u_f(t) = \frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i)-I^{q-r}f(T)\right)+I^1 f(t).$$

De même, en introduisant D^q dans la relation (3.18), on obtient $\big($en tenant compte du fait que $\Gamma(0)=\infty\big)$

$$D^q u_f(t) = f(t) \quad \forall t \in J.$$

Par les dernières relations, on voit que $D^{q-1}u_f \in \mathcal{C}(J,H)$ et $D^q u_f \in \mathbf{L}^1(J,H)$. Donc $u_f \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$. Ceci termine la preuve. ■

Du Lemme 3.2.3, nous pouvons déduire la proposition cruciale suivante.

Proposition 3.2.4
Soit $f \in \mathbf{L}^1(J, H)$. Alors le problème avec conditions aux limites (3.1)-(3.2) admet une unique solution $\in \mathcal{W}^{q,1}(J, H)$ définie par

$$x(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds \quad \forall t \in J.$$

Le Lemme suivant est une conséquence du théorème III-41 [38].

Lemme 3.2.5
Soient E un espace de Banach séparable, $M : J \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides et $c : J \to E, r : J \to \mathbb{R}_+$ deux applications mesurables. Alors

1. *$t \longmapsto L(t) = \overline{\mathbf{B}}_E(c(t), r(t))$ est une multi-application mesurable.*
2. *De plus, si pour chaque $t \in J$*

$$M(t) \cap \big(c(t) + r(t)\overline{\mathbf{B}}_E\big) \neq \emptyset,$$

alors la multi-application $t \mapsto M(t) \cap \big(c(t) + r(t)\overline{\mathbf{B}}_E\big)$ admet une sélection mesurable

Preuve.
(i) Soit $(x_n(\cdot))_n$ une suite dense dans $\overline{\mathbf{B}}_E$ ($\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E).
On pose

$$\vartheta_n(t) = c(t) + r(t)x_n.$$

Alors ϑ_n est mesurable et

$$\overline{\mathbf{B}}_E(c(t), r(t)) = \overline{c(t) + r(t)\mathbf{B}_E} = \overline{c(t) + r(t)x_n} = \overline{\{\vartheta_n(t),\ n \in \mathbb{N}\}}.$$

Par le Théorème 1.4.21 (b), $t \to \overline{\mathbf{B}}_E(c(t), r(t))$ est mesurable.
(ii) Pour tout $t \in J$, on pose

$$\varphi(t) = M(t) \cap \big(c(t) + r(t)\overline{\mathbf{B}}_E\big)\,.$$

Il est clair que φ est une multi-application à valeurs fermées non vides. De plus,

$$\begin{aligned}
gph(\varphi) &= \Big\{(t,x) \in J \times E :\ x \in \varphi(t)\Big\} \\
&= \Big\{(t,x) \in J \times E :\ x \in M(t) \text{ et } \ \|x - c(t)\| \leq r(t)\Big\} \\
&= \Big\{(t,x) \in J \times E :\ x \in M(t)\Big\} \cap \Big\{(t,x) \in J \times E :\ \|x - c(t)\| \leq r(t)\Big\} \\
&= \Big\{(t,x) \in J \times E :\ x \in M(t)\Big\} \cap \Big\{(t,x) \in J \times E :\ x \in L(t)\Big\} \\
&= gph(M) \cap gph(L(t))
\end{aligned}$$

Donc, de (i) et d'après le Théorème 1.4.21, φ est mesurable et on déduit que $t \mapsto M(t) \cap \big(c(t) + r(t)\overline{\mathbf{B}}_E\big)$ admet une sélection mesurable. ■

Dans ce qui suit, nous donnons un résultat très important (voir le Théorème 8.1.6 dans [37]), concernant la semi-continuité inférieure faible-forte d'une fonction intégrande.

Lemme 3.2.6
Soit (Ω, S, P) un espace de probabilité, E un espace de Banach réflexif séparable et X un espace métrique. Soient $L : \Omega \times X \times E \to [0, +\infty)$ une function mesurable semi-continue inférieurement, $(u_n)_n$ une suite de multi-applications mesurables de Ω dans X qui converge en mesure vers u_∞ et $(v_n)_n$ une suite dans $\mathbf{L}^1(\Omega, E)$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1(\Omega, E), \mathbf{L}^\infty(\Omega, E'))$ vers $v_\infty \in \mathbf{L}^1(\Omega, E)$. Supposons que $(L(t, u_n(t), v_n(t))_n$ est uniformément intégrable et $L(t, u_\infty(t), \cdot)$ est convexe sur E. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega L(t, u_n(t), v_n(t))dP(t) \geq \int_\Omega L(t, u_\infty(t), v_\infty(t))dP(t). \tag{3.21}$$

Supposons maintenant les hypothèses suivantes.
Soit $F : J \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application telle que
$(\mathcal{H}_1^F)$ $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ est à valeurs fermées non vides et est $\mathcal{L}(J) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable.
$(\mathcal{H}_2^F)$ Pour tout $t \in J$, $F(t, \cdot, \cdot)$ est pseudo-Lipschitz, c'est-à-dire qu'ils existent $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ et deux fonctions positives $k_1(\cdot), k_2(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R})$ tel que pour tout $v \in F(t, x, y)$, $t \in J$ et $x, y, x', y' \in H$ on a,

$$d_{F(t,x',y')}(v) \leq \big(k_1(t) + \beta_1\|v\|\big)\|x - x'\| + \big(k_2(t) + \beta_2\|v\|\big)\|y - y'\|.$$

$(\mathcal{H}_3^F)$ L'application $t \longmapsto d_{F(t,0,0)}(0)$ est Lebesgue-intégrable.

Proposition 3.2.7
Supposons que $(\mathcal{H}_1^F)$, $(\mathcal{H}_2^F)$ et $(\mathcal{H}_3^F)$ sont satisfaites. Alors, pour tout $y(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J, H)$, l'application $t \longmapsto d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)$ est intégrable.

Preuve.
Soit $v \in F(t, 0, 0)$, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
&d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)\\
\leq &d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(v\big) + \|D^q y(t) - v\|\\
\leq &(k_1(t) + \beta_1\|v\|)\,\|y(t)\| + (k_2(t) + \beta_2\|v\|)\,\|D^{q-1}y(t)\| + \|D^q y(t)\| + \|v\|\\
\leq &\left(k_1(t) + \beta_1 \inf_{v\in F(t,0,0)} \|v\|\right)\|y(t)\| + \left(k_2(t) + \beta_2 \inf_{v\in F(t,0,0)} \|v\|\right)\|D^{q-1}y(t)\| + \|D^q y(t)\| + \|v\|,
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big) \leq & \big(k_1(t)+\beta_1 d_{F(t,0,0)}(0)\big)\,\|y(t)\| + \big(k_2(t)+\beta_2 d_{F(t,0,0)}(0)\big)\,\|D^{q-1}y(t)\| \\ & +\|D^q y(t)\| + d_{F(t,0,0)}(0). \end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés de la dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^T d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)dt \leq & \|y\|_{\mathcal{C}} \int_1^T \big(k_1(t)+\beta_1 d_{F(t,0,0)}(0)\big)\,dt \\ & +\|D^{q-1}y\|_{\mathcal{C}} \int_1^T \big(k_2(t)+\beta_2 d_{F(t,0,0)}(0)\big)\,dt \\ & + \int_1^T \big(\|D^q y(t)\| + d_{F(t,0,0)}(0)\big)\,dt, \end{aligned}$$

ceci montre l'intégrabilité au sens de Lebesgue de $t \longmapsto d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)$, grâce à l'intégrabilité de $t \longmapsto d_{F(t,0,0)}(0)$, $k_i(\cdot)$; $i=1,2$ et $D^q y(\cdot)$. ∎

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver notre résultat principal.

Théorème 3.2.8
Supposons que $(\mathcal{H}_1^F)$, $(\mathcal{H}_2^F)$, $(\mathcal{H}_3^F)$ *sont satisfaites, que* $\rho \neq 0$ *et* $\dfrac{\Gamma(q)}{(\ln T)^{q-1}} \leq 1$. *Considérons* $y(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$, *tel que*

$$y(1)=0, \quad D^r y(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r y(\mu_i). \tag{3.22}$$

Fixons $\gamma \in]0,+\infty]$, *on pose*

$$\mathcal{X} = \Big\{(t,u,v) \in J \times H \times H : \|u-y(t)\| < \gamma; \quad \|v - D^{q-1}y(t)\| < \gamma\Big\},$$

et

$$\begin{aligned} \eta = M_G(1+\alpha)\int_1^T d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)dt, \quad \delta_1 = M_G\|D^q y\|_1, \\ k = M_G(1+\alpha)\|k_1+k_2\|_1, \quad \beta = (1+\alpha)(\beta_1+\beta_2), \quad \xi_1 = k+\beta\delta_1, \end{aligned}$$

où α *est un paramètre non négatif. Supposons que pour un certain* $\lambda \in]0,1[$

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta\eta\frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{3.23}$$

et que

$$\eta < (1-\lambda)\gamma. \tag{3.24}$$

Alors, il existe $x(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$, *solution du problème* $(\mathcal{P}_F)$ *tel que pour tout* $t \in J$

$$\big(t, x(t), D^{q-1}x(t)\big) \in \mathcal{X}. \tag{3.25}$$

Preuve.
Par définition, nous avons pour tout $t \in J$,

$$F\big(t, y(t), D^{q-1}y(t)\big) \cap \Big(D^q y(t) + l(t)\overline{\mathbf{B}}_H\Big) \neq \emptyset,$$

où $l(t) := (1+\alpha) d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)$. En effet, on a pour tout $t \in J$,

$$d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big) = \inf_{z \in F(t,y(t),D^{q-1}y(t))} \Big\|D^q y(t) - z\Big\|.$$

Par la caractérisation de la borne inférierure, on a pour tout $\epsilon > 0$, l'existence de $z_\epsilon \in F(t, y(t), D^{q-1}y(t))$ tel que

$$\Big\|D^q y(t) - z_\epsilon\Big\| < d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big) + \epsilon.$$

Soit $\alpha > 0, \epsilon = \alpha d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)$, on obtient l'existence de $z_\alpha \in F(t, y(t), D^{q-1}y(t))$ tel que

$$\begin{aligned}\Big\|D^q y(t) - z_\alpha\Big\| &\leq d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big) + \alpha d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)\\ &= (1+\alpha) d_{F(t,y(t),D^{q-1}y(t))}\big(D^q y(t)\big)\\ &= l(t),\end{aligned}$$

donc

$$\Big\|D^q y(t) - z_\alpha\Big\| \leq l(t),$$

c'est-à-dire

$$z_\alpha \in F(t, y(t), D^{q-1}y(t)) \quad \text{et} \quad z_\alpha \in \overline{\mathbf{B}}_H\big(D^q y(t), l(t)\big),$$

d'une manière équivalente

$$z_\alpha \in F\big(t, y(t), D^{q-1}y(t)\big) \cap \Big(D^q y(t) + l(t)\overline{\mathbf{B}}_H\Big).$$

D'où le résultat.
On a, $l(\cdot)$ est Lebesgue-intégrable grâce à la Proposition 3.2.7. Par conséquent, en vertu du Lemme 3.2.5, il existe une sélection mesurable $f_1 : J \to H$ pour la multi-application $t \mapsto F\big(t, y(t), D^{q-1}y(t)\big) \cap \Big(D^q y(t) + l(t)\overline{\mathbf{B}}_H\Big)$ i.e.,

$$f_1(t) \in F\big(t, y(t), D^{q-1}y(t)\big) \ \ \forall t \in J, \tag{3.26}$$

et

$$\|f_1(t) - D^q y(t)\| \leq l(t) \ \ \forall t \in J. \tag{3.27}$$

Il est clair que $f_1 \in \mathbf{L}^1(J, H)$ puisque $D^q y(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, H)$ et $l(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R}_+)$.
Soit pour tout $t \in J$,

$$x_1(t) = \int_1^T G(t, s) f_1(s) ds. \tag{3.28}$$

De (iii) du Lemme 3.2.3, nous avons pour tout $t \in J$

$$\left(D^{q-1}x_1\right)(t) = \frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f_1(\mu_i) - I^{q-r}f_1(T)\right) + I^1 f_1(t). \tag{3.29}$$

Dans la suite, nous allons prouver les inégalités suivantes,

$$\|x_1(t) - y(t)\| \leq M_G \|f_1 - D^q y\|_1 \quad \text{et} \quad \left\|D^{q-1}x_1(t) - D^{q-1}y(t)\right\| \leq M_G \|f_1 - D^q y\|_1 \quad \forall t \in J.$$

En effet, par la relation (3.22), en utilisant (ii) du Lemme 3.2.3, nous avons pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\|x_1(t) - y(t)\| &= \left\|\int_1^T G(t,s)f_1(s)ds - \int_1^T G(t,s)D^q y(s)ds\right\| \\
&= \left\|\int_1^T G(t,s)\Big(f_1(s) - D^q y(s)\Big)\right\| \\
&\leq M_G \int_1^T \|f_1(s) - D^q y(s)\|\, ds = M_G \|f_1 - D^q y\|_1 .
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Par la relation (3.29) avec (3.22) et la Définition 1.7.9 nous avons, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\left\|D^{q-1}x_1(t) - D^{q-1}y(t)\right\| &= \Bigg\|\frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f_1(\mu_i) - I^{q-r}f_1(T)\right) + I^1 f_1(t) \\
&- \frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}D^q y(\mu_i) - I^{q-r}D^q y(T)\right) - I^1 D^q y(t)\Bigg\| \\
&= \Bigg\|\frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}(f_1 - D^q y)(\mu_i) - I^{q-r}(f_1 - D^q y)(T)\right) \\
&+ I^1(f_1 - D^q y)(t)\Bigg\| \\
&= \Bigg\|\frac{\Gamma(q-r)}{\rho\Gamma(q-r)}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{(f_1 - D^q y)(s)}{s}ds\right. \\
&\left. - \int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{(f_1 - D^q y)(s)}{s}ds\right) + \int_1^t \frac{(f_1 - D^q y)(s)}{s}ds\Bigg\| \\
&= \Bigg\|\frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \int_1^{\mu_i}\left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1}\frac{(f_1 - D^q y)(s)}{s}ds\right. \\
&\left. - \int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1}\frac{(f_1 - D^q y)(s)}{s}ds\right) + \int_1^t \frac{(f_1 - D^q y)(s)}{s}ds\Bigg\|.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

En utilisant le fait que, pour tout t fixé et pour $a > 0$, la fonction $s \in J \mapsto \left(\ln \frac{t}{s}\right)^a \frac{1}{s}$ est décroissante $\big($ rappelons aussi que $\frac{\Gamma(q)}{(\ln T)^{q-1}} \leq 1$ et $r < q-1\big)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|D^{q-1}x_1(t) - D^{q-1}y(t)\right\| &\leq \frac{1}{|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r-1}\int_1^{\mu_i}\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds\right.\\
&\quad\left.+\left(\ln T\right)^{q-r-1}\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds\right)+\int_1^t\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds\\
&\leq \left[\frac{1}{|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r-1}+\left(\ln T\right)^{q-r-1}\right)+1\right]\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds\\
&= \frac{\Gamma(q)M_G}{(\ln T)^{q-1}}\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds\\
&\leq M_G\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds = M_G\|f_1-D^q y\|_1. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sup\left(\left\|x_1(t)-y(t)\right\|, \left\|D^{q-1}x_1(t)-D^{q-1}y(t)\right\|\right) \leq M_G\|f_1-D^q y\|_1, \quad \forall t \in J.$$

Maintenant, montrons que

$$gph\big(x_1(\cdot), D^{q-1}x_1(\cdot)\big) = \left\{\big(t, x_1(t), D^{q-1}x_1(t)\big) : t \in J\right\} \subset \mathcal{X}. \qquad (3.33)$$

Des relations (3.24), (3.27) et (3.30), nous obtenons pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\|x_1(t)-y(t)\| &\leq M_G\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|\,ds \leq M_G\int_1^T l(s)ds\\
&= \eta < (1-\lambda)\gamma < \gamma,
\end{aligned}$$

et de (3.24), (3.27) et (3.32), on en déduit que pour tout $t \in J$,

$$\left\|D^{q-1}x_1(t)-D^{q-1}y(t)\right\| \leq M_G\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds \leq M_G\int_1^T l(s)ds = \eta < \gamma.$$

De ces dernières inégalités, nous concluons notre affirmation.
On pose

$$\eta_1 = M_G\int_1^T\|f_1(s)-D^q y(s)\|ds = M_G\|f_1-D^q y\|_1.$$

Puisque $\eta_1 \leq \eta$, il en résulte que $\lambda - \beta\eta_1\frac{\lambda}{1-\lambda} \geq \lambda - \beta\eta\frac{\lambda}{1-\lambda}$, et puisque $\xi_1 \leq \lambda - \beta\eta\frac{\lambda}{1-\lambda}$ $\big($voir (3.23)$\big)$, on a

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta\eta_1\frac{\lambda}{1-\lambda}. \qquad (3.34)$$

Nous allons maintenant construire, par récurrence, des suites $\big(x_n(\cdot)\big)_n \subset \mathcal{C}(J,H)$, $(f_n(\cdot))_n \subset \mathbf{L}^1(J,H)$ qui vérifient les propriétés suivantes

$$x_0(t) = y(t),\ f_0(t) = D^q y(t); \tag{3.35}$$

et pour $n \geq 1$

$$x_n(t) = \int_1^T G(t,s) f_n(s) ds \quad \forall t \in J; \tag{3.36}$$

$$f_n(t) \in F(t, x_{n-1}(t), D^{q-1}x_{n-1}(t)) \ \ \forall t \in J; \tag{3.37}$$

$$\big\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\big\| \leq M_G \left\|f_n - f_{n-1}\right\|_1 \quad \forall t \in J; \tag{3.38}$$

$$\big\|D^{q-1}x_n(t) - D^{q-1}x_{n-1}(t)\big\| \leq M_G \left\|f_n - f_{n-1}\right\|_1 \quad \forall t \in J; \tag{3.39}$$

et

$$gph\big(x_n(\cdot), D^{q-1}x_n(\cdot)\big) = \Big\{\big(t, x_n(t), D^{q-1}x_n(t)\big) : t \in J\Big\} \subset \mathcal{X}. \tag{3.40}$$

Remarquons d'abord que pour $n = 1$, $x_1(\cdot)$ et $f_1(\cdot)$ sont bien définies satisfaisant (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) et (3.40) ; voir les relations (3.26), (3.28), (3.30), (3.32) et (3.33). De plus, nous avons de (3.27) et (3.35), que

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq l(t) \quad \forall t \in J.$$

Supposons que cette construction soit réalisée pour $j = 1, \ldots, n$. On pose

$$\eta_n = M_G \big\|f_n - f_{n-1}\big\|_1, \quad \delta_n = M_G \|f_n\|_1 \quad \text{et} \quad \xi_n = k + \beta\delta_n.$$

Pour chaque $t \in J$, nous avons par $(\mathcal{H}_2^F)$ et les relations (3.37), (3.38) et (3.39),

$$\begin{aligned} d_{F(t,x_n(t),D^{q-1}x_n(t))}(f_n(t)) \leq& \big(k_1(t) + \beta_1\|f_n(t)\|\big)\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \\ &+ \big(k_2(t) + \beta_2\|f_n(t)\|\big)\|D^{q-1}x_n(t) - D^{q-1}x_{n-1}(t)\| \\ \leq& \big(k_1(t) + \beta_1\|f_n(t)\|\big) M_G \left\|f_n - f_{n-1}\right\|_1 \\ &+ \big(k_2(t) + \beta_2\|f_n(t)\|\big) M_G \|f_n - f_{n-1}\|_1 \\ =& \Big(M_G\big(k_1(t) + k_2(t)\big) + \big(\beta_1 + \beta_2\big) M_G \|f_n(t)\|\Big)\|f_n - f_{n-1}\|_1. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Par cette dernière inégalité on a, pour tout $t \in J$,

$$F(t, x_n(t), D^{q-1}x_n(t)) \cap \Big(f_n(t) + r(t)\overline{\mathbf{B}}_H\Big) \neq \emptyset,$$

où $r(t) := (1+\alpha)\Big(M_G\big(k_1(t)+k_2(t)\big)+\big(\beta_1+\beta_2\big)M_G\|f_n(t)\|\Big)\|f_n-f_{n-1}\|_1$. Donc, par le Lemme 3.2.5, il existe une sélection mesurable $f_{n+1}: J \to H$ de la multi-application

$$t \mapsto F(t, x_n(t), D^{q-1}x_n(t)) \cap \Big(f_n(t)+r(t)\Big)\overline{\mathbf{B}}_H\Big),$$

i.e.,

$$f_{n+1}(t) \in F(t, x_n(t), D^{q-1}x_n(t)) \quad \forall t \in J,$$

et pour tout $t \in J$

$$\big\|f_{n+1}(t)-f_n(t)\big\| \leq (1+\alpha)\Big(M_G\big(k_1(t)+k_2(t)\big)+\big(\beta_1+\beta_2\big)M_G\|f_n(t)\|\Big)\|f_n-f_{n-1}\|_1. \tag{3.42}$$

Il est clair que $f_{n+1} \in \mathbf{L}^1(J,H)$ $\big($puisque $k_1(\cdot),\ k_2(\cdot),\ f_n(\cdot),\ f_{n-1}(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)\big)$. On pourra alors intégrer (3.42) et obtenir

$$\begin{aligned}\int_1^T &\big\|f_{n+1}(t)-f_n(t)\big\|dt\\ &\leq (1+\alpha)\Big(M_G\int_1^T\big(k_1(t)+k_2(t)\big)dt+\big(\beta_1+\beta_2\big)M_G\int_1^T\|f_n(t)\|dt\Big)\|f_n-f_{n-1}\|_1,\end{aligned} \tag{3.43}$$

d'où,

$$\|f_{n+1}-f_n\|_1 \leq (1+\alpha)\Big(M_G\|k_1+k_2\|_1+(\beta_1+\beta_2)M_G\|f_n\|_1\Big)\|f_n-f_{n-1}\|_1.$$

Donc

$$\|f_{n+1}-f_n\|_1 \leq \xi_n\|f_n-f_{n-1}\|_1, \tag{3.44}$$

alors

$$M_G\|f_{n+1}-f_n\|_1 \leq \xi_n M_G\|f_n-f_{n-1}\|_1, \tag{3.45}$$

qui est équivalent à,

$$\eta_{n+1} \leq \xi_n\eta_n. \tag{3.46}$$

Observons par ailleurs que,

$$\delta_{n+1}-\delta_n = M_G\left(\|f_{n+1}\|_1-\|f_n\|_1\right) \leq M_G\|f_{n+1}-f_n\|_1 = \eta_{n+1}. \tag{3.47}$$

Par l'évocation du Lemme 3.2.2, relations (3.24), (3.34), (3.46), (3.47) et l'inégalité $\eta_1 \leq \eta$, nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n \leq \frac{\eta_1}{1-\lambda} \leq \frac{\eta}{1-\lambda} < \gamma. \tag{3.48}$$

Pour tout $t \in J$, on pose

$$x_{n+1}(t) = \int_1^T G(t,s) f_{n+1}(s) ds.$$

Alors, à partir de cette dernière relation, on a $\big($en utilisant (iii) du Lemme 3.2.3$\big)$

$$\left(D^{q-1} x_{n+1}\right)(t) = \frac{\Gamma(q-r)}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} f_{n+1}(\mu_i) - I^{q-r} f_{n+1}(T) \right) + I^1 f_{n+1}(t).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| =& \left\| \int_1^T G(t,s) f_{n+1}(s) ds - \int_1^T G(t,s) f_n(s) ds \right\| \\
\leq & M_G \int_1^T \|f_{n+1}(s) - f_n(s)\| \, ds \\
=& M_G \|f_{n+1} - f_n\|_1 = \eta_{n+1}. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments dans la preuve de la relation (3.32) nous avons,

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{q-1} x_{n+1}(t) - D^{q-1} x_n(t) \right\| \qquad (3.50) \\
&= \left\| \frac{\Gamma(q-r)}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} f_{n+1}(\mu_i) - I^{q-r} f_{n+1}(T) \right) + I^1 f_{n+1}(t) \right. \\
&\left. - \frac{\Gamma(q-r)}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} f_n(\mu_i) - I^{q-r} f_n(T) \right) - I^1 f_n(t) \right\| \\
&= \left\| \frac{\Gamma(q-r)}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r} (f_{n+1} - f_n)(\mu_i) - I^{q-r} (f_{n+1} - f_n)(T) \right) + I^1 (f_{n+1} - f_n)(t) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln \frac{\mu_i}{s} \right)^{q-r-1} \frac{(f_{n+1} - f_n)(s)}{s} ds \right. \right. \\
&\left. \left. - \int_1^T \left(\ln \frac{T}{s} \right)^{q-r-1} \frac{(f_{n+1} - f_n)(s)}{s} ds \right) + \int_1^t \frac{(f_{n+1} - f_n)(s)}{s} ds \right\| \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\left\|D^{q-1}x_{n+1}(t)-D^{q-1}x_n(t)\right\| && (3.52)\\
&\leq \frac{1}{|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r-1}\int_1^{\mu_i}\|f_{n+1}(s)-f_n(s)\|ds\right.\\
&\left.+\left(\ln T\right)^{q-r-1}\int_1^{T}\|f_{n+1}(s)-f_n(s)\|ds\right)+\int_1^{t}\|f_{n+1}(s)-f_n(s)\|ds && (3.53)\\
&\leq \left[\frac{1}{|\rho|}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\left(\ln\mu_i\right)^{q-r-1}+\left(\ln T\right)^{q-r-1}\right)+1\right]\int_1^{T}\|f_{n+1}(s)-f_n(s)\|ds\\
&=\frac{\Gamma(q)M_G}{(\ln T)^{q-1}}\int_1^{T}\|f_{n+1}(s)-f_n(s)\|ds\\
&=\frac{\Gamma(q)M_G}{(\ln T)^{q-1}}\|f_{n+1}-f_n\|_1\leq M_G\|f_{n+1}-f_n\|_1=\eta_{n+1}. && (3.54)
\end{aligned}$$

Montrons par la suite que $gph\big(x_{n+1}(\cdot),D^{q-1}x_{n+1}(\cdot)\big)\subset\mathcal{X}$.
Pour tout $t\in J$, la relation (3.49) mène à

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}(t)-y(t)\right\| &\leq\left\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\right\|+\left\|x_n(t)-y(t)\right\|\\
&\leq\eta_{n+1}+\left\|x_n(t)-y(t)\right\|\\
&\leq\eta_{n+1}+\eta_n+\left\|x_{n-1}(t)-y(t)\right\|, && (3.55)
\end{aligned}$$

par itération, on obtient de la relation (3.48)

$$\|x_{n+1}(t)-y(t)\|\leq\sum_{i=1}^{n+1}\eta_i\leq\frac{\eta_1}{1-\lambda}<\gamma. \tag{3.56}$$

D'autre part, de la relation (3.54), on peut déduire de la même manière que

$$\begin{aligned}
\left\|D^{q-1}x_{n+1}(t)-D^{q-1}y(t)\right\| &\leq\left\|D^{q-1}x_{n+1}(t)-D^{q-1}x_n(t)\right\|+\left\|D^{q-1}x_n(t)-D^{q-1}y(t)\right\|\\
&\leq\eta_{n+1}+\left\|D^{q-1}x_n(t)-D^{q-1}y(t)\right\|\\
&\leq\sum_{i=1}^{n+1}\eta_i\leq\frac{\eta_1}{1-\lambda}<\gamma. && (3.57)
\end{aligned}$$

Donc $gph\big(x_{n+1}(\cdot),D^{q-1}x_{n+1}(\cdot)\big)\subset\mathcal{X}$. Nous concluons que les suites $(f_n(\cdot))_n$ et $(x_n(\cdot))_n$ sont bien définies satisfaisant (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) et (3.40).
Nous prouvons ensuite la convergence des suites $(f_n(\cdot))_n,(x_n(\cdot))_n$ et $(D^{q-1}x_n(\cdot))_n$.
Par la relation (3.48), nous avons

$$M_G\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n-f_{n-1}\|_1<\gamma,$$

ce qui montre que $(f_n(\cdot))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^1(J,H)$, donc elle converge vers une certaine application $f(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J,H)$, c'est à dire,

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0. \tag{3.58}$$

En ce qui concerne la convergence uniforme de $\big(x_n(\cdot)\big)_n \Big(\text{resp. } \big(D^{q-1}x_n(\cdot)\big)_n\Big)$, par la relation (3.49), (3.54), observons que

$$\|x_{n+1}(\cdot) - x_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M_G \|f_{n+1} - f_n\|_1,$$

et

$$\|D^{q-1}x_{n+1}(\cdot) - D^{q-1}x_n(\cdot)\|_{\mathcal{C}} \leq M_G \|f_{n+1} - f_n\|_1,$$

de sorte que $\big(x_n(\cdot)\big)_n \Big(\text{resp. } \big(D^{q-1}x_n(\cdot)\big)_n\Big)$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(J,H)$, donc elle converge uniformément vers une application $x(\cdot)$ $\Big(\text{resp. } w(\cdot)\Big) \in \mathcal{C}(J,H)$, autrement dit,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\mathcal{C}} = 0, \tag{3.59}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|D^{q-1}x_n - w\|_{\mathcal{C}} = 0. \tag{3.60}$$

Maintenant, nous allons montrer que

$$x(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds \quad \forall t \in J.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\left\|x_n(t) - \int_1^T G(t,s)f(s)ds\right\| &= \left\|\int_1^T G(t,s)f_n(s)ds - \int_1^T G(t,s)f(s)ds\right\| \\ &\leq M_G \int_1^T \|f_n(s) - f(s)\|ds = M_G\|f_n - f\|_1,\end{aligned} \tag{3.61}$$

ceci, selon (3.58), montre que pour tout $t \in J$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds. \tag{3.62}$$

Donc

$$x(t) = \int_1^T G(t,s)f(s)ds.$$

De même, en suivant les mêmes étapes pour obtenir la relation (3.54), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{q-1}x_n(t) - \left[\frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i) - I^{q-r}f(T)\right) - I^1 f(t)\right]\right\| \\
&=\left\|\frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f_n(\mu_i) - I^{q-r}f_n(T)\right) - I^1 f_n(t)\right. \\
&\left. -\frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i) - I^{q-r}f(T)\right) + I^1 f(t)\right\| \\
&\leq M_G\|f_n - f\|_1,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

passant à la limite quand $n \to \infty$, en utilisant (3.58), nous obtenons pour tout $t \in J$

$$\lim_{n\to\infty} D^{q-1}x_n(t) = \frac{\Gamma(q-r)}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{q-r}f(\mu_i) - I^{q-r}f(T)\right) - I^1 f(t) = D^{q-1}x(t) \quad \forall t \in J. \tag{3.64}$$

D'où

$$w(t) = D^{q-1}x(t) \quad \forall t \in J.$$

Montrons dans la suite que

$$f(t) \in F(t, x(t), D^{q-1}x(t)) \quad p.p.\ t \in J. \tag{3.65}$$

Puisque $(f_n(\cdot))_n$ converge vers $f(\cdot)$ fortement dans $\mathbf{L}^1(J, H)$, par extraction d'une sous suite $(f_{n_j})_j$, on peut supposer que

$$\|f_{n_j}(t) - f(t)\| \to 0 \quad p.p.\ t \in J.$$

Utilisons la relation (3.37) et $(\mathcal{H}_2^F)$, on a pour presque tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
d_{F(t,x(t),D^{q-1}x(t))}(f(t)) \leq & d_{F(t,x(t),D^{q-1}x(t))}(f_{n_j}(t)) + \|f_{n_j}(t) - f(t)\| \\
\leq & \big(k_1(t) + \beta_1\|f_{n_j}(t)\|\big)\|x_{n_j-1}(t) - x(t)\| \\
& + \big(k_2(t) + \beta_2\|f_{n_j}(t)\|\big)\|D^{q-1}x_{n_j-1}(t) - D^{q-1}x(t)\| + \|f_{n_j}(t) - f(t)\|.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $j \to \infty$, de la convergence uniforme de $\big(x_n(\cdot)\big)_n$ vers $x(\cdot)$ et de $\big(D^{q-1}x_n(\cdot)\big)_n$ vers $D^{q-1}x(\cdot)$, on conclut que

$$d_{F(t,x(t),D^{q-1}x(t))}(f(t)) \leq 0,$$

et par la fermeture des valeurs de F, on trouve

$$f(t) \in F(t, x(t), D^{q-1}x(t)) \quad p.p.\ t \in J.$$

Par (3.62) et (iii) du Lemme 3.2.3, on a

$$D^q x(t) = f(t) \in F(t, x(t), D^{q-1}x(t)) \quad p.p.\ t \in J,$$

avec $x(1) = 0, \quad D^r x(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i))$. On obtient ainsi que $x(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J, H)$ est un solution du problème $(\mathcal{P}_F)$. Pour terminer, en passant à la limite dans (3.56) et (3.57), les estimations souhaitées sur $x(\cdot)$ et $D^{q-1}x(\cdot)$ sont obtenues, à savoir,

$$\|x(t) - y(t)\| < \gamma,$$

et

$$\|D^{q-1}x(t) - D^{q-1}y(t)\| < \gamma.$$

Ceci termine la preuve de notre Théorème. ∎

3.3 Application à un problème d'optimisation

Dans cette section, nous donnons un problème de minimisation. Pour cela, nous allons prouver un résultat d'unicité. Soit $f : [1, T] \times H \times H \to H$ satisfaisant les hypothèses suivantes

$(\mathcal{H}_1^f)$ f is $\mathcal{L}(J) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable ;

$(\mathcal{H}_2^f)$ il existe une fonction positive $\widetilde{m}(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq \widetilde{m}(t) \left(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\right),$$

pour tous $t \in J, \ x_i, y_i \in H \ (i = 1, 2)$, avec

$$M_G \|\widetilde{m}\|_1 < \frac{1}{2}. \tag{3.66}$$

$(\mathcal{H}_3^f)$ La fonction $t \longmapsto f(t, 0, 0)$ est Lebesgue-intégrable.

Nous considérons le problème avec conditions aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} D^q x(t) = f\big(t, x(t), D^{q-1}x(t)\big) \quad p.p.\ t \in J; \\ x(1) = 0, \ D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i), \end{cases}$$

où D^q est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q \in (1, 2], \ r \in (0, q-1), \ \mu_i \in (1, T), \ \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, \ n \geq 2$.

Théorème 3.3.1
Supposons que $(\mathcal{H}_1^f)$, $(\mathcal{H}_2^f)$ *et* $(\mathcal{H}_3^f)$ *sont satisfaites, que* $\rho \neq 0$, *et* $\dfrac{\Gamma(q)}{(\ln T)^{q-1}} \leq 1$. *Considérons* $y(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$, *satisfaisant* (3.22). *Pour un certain* $\gamma \in]0,+\infty]$ *fixé, on pose*

$$\mathcal{X} = \Big\{(t,v,w) \in J \times H \times H : \|v - y(t)\| < \gamma; \quad \|w - D^{q-1}y(t)\| < \gamma\Big\}.$$

et

$$\eta = M_G(1+\alpha)\int_1^T \|D^q y(t) - f(t,y(t),D^{q-1}y(t))\|dt, \quad \delta_1 = M_G\|D^q y\|_1, \quad k_1(t) = k_2(t) = \widetilde{m}(t),$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad k = 2M_G\|\widetilde{m}\|_1,$$

où α *est un paramètre positif. Pour un certains* $\lambda \in]0,1[$ *tel que* $k \leq \lambda$. *Nous supposons que* $\eta < (1-\lambda)\gamma$. *Alors, le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution unique* $x(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$.

Preuve.
En appliquant le Théorème 3.2.8 pour les données ci-dessus et $\xi_1 = k$, $F = \{f\}$, il existe $x(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$, solution du problème $(\mathcal{P}_f)$ tel que $\big(t, x(t), D^{q-1}x(t)\big) \in \mathcal{X}$ pour tout $t \in J$. Reste à montrer l'unicité de la solution. Pour cela, nous suivons l'idée de la preuve du Théorème 5.1 dans [33]. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ deux solutions du problème $(\mathcal{P}_f)$. Posons $\widetilde{x} = x_1 - x_2$ et $\phi(\cdot) = D^q\widetilde{x}(\cdot)$. En vertu de $(\mathcal{H}_2^f)$, nous avons pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)\| &= \|D^q\widetilde{x}(t)\| = \|D^q x_1(t) - D^q x_2(t)\| \\
&= \|f\big(t,x_1(t),D^{q-1}x_1(t)\big) - f\big(t,x_2(t),D^{q-1}x_2(t)\big)\| \\
&\leq \widetilde{m}(t)\Big(\|x_1(t)-x_2(t)\| + \|D^{q-1}x_1(t) - D^{q-1}x_2(t)\|\Big),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

où (en utilisant le Lemme 3.2.1)

$$x_i(t) = \int_1^T G(t,s)D^q x_i(s)ds, \; i = 1,2.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|x_1(t) - x_2(t)\| &= \left\|\int_1^T G(t,s)\Big(D^q x_1(s)ds - D^q x_2(s)\Big)ds\right\| \\
&= \left\|\int_1^T G(t,s)\phi(s)ds\right\| \\
&\leq M_G \int_1^T \|\phi(s)\|ds.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Ensuite, la relation (3.29) avec (3.14) $\big($gardant à l'esprit que pour tout t fixé et pour $\alpha > 0$, la fonction $s \in J \mapsto \left(\ln \dfrac{t}{s}\right)^\alpha \dfrac{1}{s}$ est décroissante, $\dfrac{\Gamma(q)}{(\ln T)^{q-1}} \leq 1$ et $r < q-1\big)$, nous obtenons pour tout $t \in J$,

$$
\begin{aligned}
\left\|D^{q-1}x_1(t) - D^{q-1}x_2(t)\right\| & \qquad\qquad (3.69)\\
&= \left\| \frac{\Gamma(q-r)}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r}\Big(D^q x_1(\mu_i) - D^q x_2(\mu_i)\Big) \right.\right. \\
&\left.\left. - I^{q-r}\Big(D^q x_1(T) - D^q x_2(T)\Big)\right) + I^1\Big(D^q x_1(t) - D^q x_2(t)\Big)\right\| \\
&= \left\| \frac{\Gamma(q-r)}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{q-r}\phi(\mu_i) - I^{q-r}\phi(T) \right) + I^1\phi(t) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} \left(\ln\frac{\mu_i}{s}\right)^{q-r-1} \frac{\phi(s)}{s} ds - \int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{q-r-1} \frac{\phi(s)}{s} ds \right) + \int_1^t \frac{\phi(s)}{s} ds \right\| \\
&\leq \left[\frac{1}{|\rho|} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \left(\ln \mu_i\right)^{q-r-1} + (\ln T)^{q-r-1} \right) + 1 \right] \int_1^T \|\phi(s)\| ds \\
&= \frac{\Gamma(q) M_G}{(\ln T)^{q-1}} \int_1^T \|\phi(s)\| ds \leq M_G \int_1^T \|\phi(s)\| ds. \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

Combinant (3.68), (3.70) et (3.67), on obtient

$$\|\phi(t)\| \leq 2M_G \widetilde{m}(t) \int_1^T \|\phi(s)\| ds.$$

En intégrant sur $[1, T]$, il vient que

$$\int_1^T \|\phi(s)\| ds \leq 2M_G \left\|\widetilde{m}\right\|_1 \int_1^T \|\phi(s)\| ds.$$

Donc

$$\left(1 - 2M_G \left\|\widetilde{m}\right\|_1\right) \int_1^T \|\phi(s)\| ds \leq 0.$$

Alors, en utilisant le fait que $2M_G \left\|\widetilde{m}\right\|_1 < 1$, on a $\int_1^T \|\phi(s)\| ds = 0$. D'où

$$\phi(t) = 0 \quad p.p.\ t \in J,$$

c'est-à-dire

$$D^q x_1(t) = D^q x_2(t) \quad p.p.\ t \in J,$$

par conséquent,

$$\int_1^T G(t,s) D^q x_1(s) ds = \int_1^T G(t,s) D^q x_2(s) ds.$$

Nous concluons grâce au Lemme 3.2.1 que $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t \in J$, ce qui signifie que la solution du problème $(\mathcal{P}_f)$ est unique. ■

Nous sommes maintenant en mesure de présenter une application des résultats ci-dessus à un problème de minimisation.
Soit $u_0 \in H$, et considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ défini par

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathcal{C}(J, H) : \ u(t) = u_0 + \int_1^t \dot{u}(s)ds \quad \forall t \in J, \ \dot{u}(t) \in \Delta \quad p.p.\ t \in J \right\},$$

où Δ est un sous ensemble compact convexe de H.

Proposition 3.3.2
L'ensemble $\mathcal{U}$ est un sous ensemble compact convexe de $\mathcal{C}(J, H)$.

Preuve
La convexité de $\mathcal{U}$ est évidente grâce à la convexité de Δ. Pour montrer la compacité dans $\mathcal{C}(J, H)$, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzelà. Puisque Δ est compact, on peut trouver $c_1 > 0$ tel que $\Delta \subset c_1 \overline{\mathbf{B}}_H$, donc on obtient

$$\mathcal{U} \subset \tilde{c_1} \overline{\mathbf{B}}_H,$$

avec $\tilde{c_1} := \|u_0\| + (T-1)c_1$.
On a pour presque tout $t \in J, \dot{u}(t) \in \Delta$, alors

$$\|\dot{u}(t)\| \leq c_1. \tag{3.71}$$

Montrons que $\mathcal{U}$ est équi-continue. Pour $t, s \in J$ $(s < t)$, on a par (3.71)

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\| d\tau \leq \int_s^t c_1 d\tau = (t-s)c_1, \tag{3.72}$$

ceci montre que $\mathcal{U}$ est équi-continu. D'autre part, observons que pour tout $t \in J, \mathcal{U}(t) = \left\{ u(t) : u \in \mathcal{U} \right\}$ est inclus dans l'ensemble compact convexe $u_0 + \displaystyle\int_1^t \Delta ds$ (voir le Théorème 1.4.20). Donc, il est relativement compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà 1.3.9, nous concluons que $\mathcal{U}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J, H)$.
Il reste à montrer que $\mathcal{U}$ est fermé. Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathcal{U}$ qui converge uniformément vers une certaine application $u_\infty(\cdot) \in \mathcal{C}(J, H)$ i.e.,

$$u_n(t) = u_0 + \int_1^t \dot{u}_n(s)ds \ \forall t \in J, \quad \dot{u}_n(t) \in \Delta, \ p.p.\ t \in J \text{ et}$$

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{C}} = 0. \tag{3.73}$$

Par la relation (3.71), $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ est uniformément bornée, alors nous pouvons extraire une sous suite, notée aussi $(\dot{u}_n(\cdot))_n$, qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1(J, H), \mathbf{L}^\infty(J, H))$ vers une application $w \in \mathbf{L}^1(J, H)$ i.e., pour tout $z \in \mathbf{L}^\infty(J, H)$,

$$\lim_{n \to \infty} \langle \dot{u}_n(\cdot), z(\cdot) \rangle = \langle w(\cdot), z(\cdot) \rangle$$

or,

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^T \langle \dot{u}_n(s), z(s)\rangle ds = \int_1^T \langle w(s), z(s)\rangle ds.$$

En particulier, pour $z_t(\cdot) = \chi_{[1,t]}(\cdot)e_j$, pour tout $t \in J$ fixé où $(e_j)_j$ est une base de H. Alors, on obtient

$$\left\langle \lim_{n\to\infty}\int_1^t \dot{u}_n(s)ds, e_j\right\rangle = \left\langle \int_1^t w(s)ds, e_j\right\rangle \forall j,$$

qui assure que

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^t \dot{u}_n(s)ds = \int_1^t w(s)ds.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty}(u_n(t) - u_n(1)) = \lim_{n\to\infty}\int_1^t \dot{u}_n(s)ds = \int_1^t w(s)ds; \tag{3.74}$$

Nous concluons par (3.73) et (3.74), que

$$u(t) = u_0 + \int_1^T w(s)ds \quad \forall t \in J,$$

d'où $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot)$, *p.p.* Montrons que $\dot{u}(t) \in \Delta$, *p.p.* $t \in J$. Or, $(\dot{u}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{u} \in \mathbf{L}^1(J, H)$. Alors, le lemme de Mazur (Lemme 1.3.10) assure l'existence d'une suite $(z_n)_n$ de combinaisons convexes de $(\dot{u}_n)_n$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n \in \overline{co}\{\dot{u}_p : p \geq n\}$$

et $(z_n)_n$ converge fortement vers $\dot{u}(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1(J, H)$. Par conséquent, nous pouvons en extraire une sous suite qui converge presque partout vers $\dot{u}(\cdot)$, d'où l'existence d'un sous ensemble $N_0 \subset J$ de mesure nulle tel que, pour tout $t \in (J\backslash N_0)$, $\dot{u}(t) \in \overline{co}\Delta = \Delta$ (puisque Δ est convexe compact). On conclut que $\mathcal{U}$ est fermé. D'où, $\mathcal{U}$ est compact dans $\mathcal{C}(J, H)$. ■

Maintenant, nous donnerons le problème de minimisation.
Soit $g : [1, T] \times H \times H \times H \to H$ une application satisfaisant les hypothèses suivantes

$(\mathcal{H}_1^g)$ g est $\mathcal{L}(J) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable ;

$(\mathcal{H}_2^g)$ il existe une application positive $\widetilde{m}(\cdot) \in \mathbf{L}^1(J, \mathbb{R})$ tel que

$$\|g(t, x_1, y_1, z_1) - g(t, x_2, y_2, z_2)\| \leq \widetilde{m}(t)\left(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|\right),$$

pour tous $t \in J$, $x_i, y_i, z_i \in H$ $(i = 1, 2)$, avec

$$M_G\|\widetilde{m}\|_1 < \frac{1}{2}. \tag{3.75}$$

$(\mathcal{H}_3^g)$ L'application $t \longmapsto g(t, 0, 0, 0)$ est Lebesgue-intégrable.

Théorème 3.3.3
Supposons que $(\mathcal{H}_1^g)$, $(\mathcal{H}_2^g)$ *et* $(\mathcal{H}_3^g)$ *sont vérifiées, que* $\rho \neq 0$ *et* $\dfrac{\Gamma(q)}{(\ln T)^{q-1}} \leq 1$. *Considérons* $y(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J, H)$, *satisfaisant* (3.22). *Pour* $\gamma \in]0, +\infty[$ *fixé, on pose*

$$\mathcal{X} = \Big\{(t, v, w) \in J \times H \times H : \|v - y(t)\| < \gamma; \quad \|w - D^{q-1}y(t)\| < \gamma\Big\}.$$

et

$$\eta = M_G(1+\alpha)\int_1^T \|D^q y(t) - g(t, y(t), D^{q-1}y(t), 0)\|dt, \quad \delta_1 = M_G\|D^q y\|_1, \quad k_1(t) = k_2(t) = \widetilde{m}(t),$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad k = 2M_G\|\widetilde{m}\|_1,$$

où α *est un paramètre positif. Pour un certain* $\lambda \in]0, 1[$ *tel que* $k \leq \lambda$. *Nous supposons que*

$$\eta + M_G(1+\alpha)\|\widetilde{m}\|_1 \tilde{c_1} < (1 - \lambda)\gamma.$$

Soit $L : J \times H \times H \to [0, \infty[$ *une fonction semi-continue inférieurement telle que* $L(t, x, \cdot)$ *est convexe sur* H, *pour tout* $(t, x) \in J \times H$. *Alors le problème de minimisation de la fonction coût*

$$\int_1^T L(t, x_u(t), D^q x_u(t))dt \tag{3.76}$$

admet une solution optimale, où $x_u(\cdot) \in \mathcal{W}^{q,1}(J, H)$ *est l'unique solution du problème*

$$(\mathcal{P}_{g,u})\begin{cases} D^q x(t) = g\big(t, x(t), D^{q-1}x(t), u(t)\big) & p.p.\ t \in J; \\ x(1) = 0,\ D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i D^r x(\mu_i), \end{cases}$$

associé au contrôle $u \in \mathcal{U}$.

Preuve.
Pour tout $u \in \mathcal{U}$, fixé on pose $f_u(t, x_1, x_2) = g(t, x_1, x_2, u(t))\ \forall (t, x_1, x_2) \in J \times H \times H$. Il est clair que f_u est mesurable. Pour tous $t \in J,\ x_i, x_i' \in H,\ i = 1, 2$, nous avons par $(\mathcal{H}_2^g)$

$$\begin{aligned}\|f_u(t, x_1, x_2) - f_u(t, x_1', x_2')\| &= \|g(t, x_1, x_2, u(t)) - g(t, x_1', x_2', u(t))\| \\ &\leq \widetilde{m}(t)\big(\|x_1 - x_1'\| + \|x_2 - x_2'\|\big),\end{aligned}$$

et par $(\mathcal{H}_3^g)$, on a

$$\begin{aligned}\int_1^T \|f_u(t,0,0)\|dt =& \int_1^T \|g(t,0,0,u(t))\|dt \\ \leq& \int_1^T \|g(t,0,0,u(t)) - g(t,0,0,0)\|dt + \int_1^T \|g(t,0,0,0)\|dt \\ \leq& \int_1^T \widetilde{m}(t)\|u(t)\|dt + \int_1^T \|g(t,0,0,0)\|dt \\ \leq& \|u\|_{\mathcal{C}}\|\widetilde{m}\|_1 + \int_1^T \|g(t,0,0,0)\|dt < +\infty.\end{aligned}$$

On utilisant $(\mathcal{H}_2^g)$, on obtient

$$\begin{aligned}\eta_u =& M_G(\alpha+1)\int_1^T \|D^q y(t) - g(t,y(t),D^{q-1}y(t),u(t))\|dt \\ \leq& M_G(\alpha+1)\int_1^T \|D^q y(t) - g(t,y(t),D^{q-1}y(t),0)\|dt \\ +& M_G(\alpha+1)\int_1^T \|g(t,y(t),D^{q-1}y(t),u(t)) - g(t,y(t),D^{q-1}y(t),0)\|dt \\ \leq& \eta + M_G(\alpha+1)\int_1^T \tilde{m}(t)\|u(t)\|dt \\ \leq& \eta + M_G(\alpha+1)\|u\|_{\mathcal{C}}\|\tilde{m}\|_1 \\ \leq& \eta + M_G(\alpha+1)\|\tilde{m}\|_1\tilde{c_1} < (1-\lambda)\gamma.\end{aligned}$$

On déduit que f_u vérifie les hypothèses du Théorème 3.3.1. Il existe alors une unique solution $\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$ du problème

$$(\mathcal{P}_{f_u})\begin{cases} D^q x(t) = f_u\big(t,x(t),D^{q-1}x(t)\big) = g\big(t,x(t),D^{q-1}x(t),u(t)\big) \quad p.p.\ t\in J \\ x(1)=0,\ D^r x(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D^r x(\mu_i), \end{cases}$$

ce qui est équivaut au problème $(\mathcal{P}_{g,u})$. Notons cette solution par $x_u(\cdot)$, et observons que

$$\|x_u(t) - y(t)\| < \gamma \quad et \quad \|D^{q-1}x_u(t) - D^{q-1}y(t)\| < \gamma.$$

Soit $(u_n)_n \subset \mathcal{U}$ une suite minimisante de (3.76), donc on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^T L(t,x_{u_n}(t),D^q x_{u_n}(t))dt = \inf_{u\in\mathcal{U}}\int_1^T L(t,x_u(t),D^q x_u(t))dt. \tag{3.77}$$

En effet, posons

$$z := \inf_{u\in\mathcal{U}}\int_1^T L(t,x_u(t),D^q x_u(t))dt.$$

Par la caractérisation de la borne inférieure on a pour tout $n > 0$, il existe $u_n \in \mathcal{U}$ tel que

$$\int_1^T L(t, x_{u_n}(t), D^q x_{u_n}(t))dt < z + \frac{1}{n},$$

ceci est équivalent à

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^T L(t, x_{u_n}(t), D^q x_{u_n}(t))dt = z.$$

Puisque pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x_{u_n}(\cdot)$ est l'unique solution $\mathcal{W}^{q,1}(J, H)$ de $(\mathcal{P}_{g,u_n})$, il vient que

$$D^q x_{u_n}(t) = g(t, x_{u_n}(t), D^{q-1}x_{u_n}(t), u_n(t)) \quad p.p.\ \ t \in J, \tag{3.78}$$

avec

$$x_{u_n}(1) = 0,\ D^r x_{u_n}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x_{u_n}(\mu_i), \tag{3.79}$$

et puisque $gph\big(x_{u_n}(\cdot), D^{q-1}x_{u_n}(\cdot)\big) \subset \mathcal{X}$, on a

$$\|x_{u_n}(t)\| < \|y(t)\| + \gamma \quad et \quad \|D^{q-1}x_{u_n}(t)\| < \|D^{q-1}y(t)\| + \gamma. \tag{3.80}$$

Utilisant le Lemme 3.2.1, la solution du problème $(\mathcal{P}_{g,u_n})$ est donnée par

$$x_{u_n}(t) = \int_1^T G(t,s)g\big(s, x_{u_n}(s), D^{q-1}x_{u_n}(s), u_n(s)\big)ds \quad \forall t \in J. \tag{3.81}$$

Puisque $(u_n)_n$ est une suite de l'ensemble compact $\mathcal{U}$, en extrayant une sous suite non réétiquetée, on peut supposer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers une application $\bar{u} \in \mathcal{U}$.

Maintenant, nous allons prouver la convergence des suites $\big(x_{u_n}(\cdot)\big)_n$ et $\big(D^{q-1}x_{u_n}(\cdot)\big)_n$ dans $\mathcal{C}(J, H)$. Pour cela, nous utiliserons le critère de Cauchy. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$ et on pose $v_n(\cdot) = \big(x_{u_n}(\cdot), D^{q-1}x_{u_n}(\cdot)\big)$. On a grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H}_2^g)$

$$\begin{aligned}
&\|x_{u_n}(t) - x_{u_m}(t)\| \\
\leq& M_G \int_1^T \|g(s, x_{u_n}(s), D^{q-1}x_{u_n}(s), u_n(s)) - g(s, x_{u_m}(s), D^{q-1}x_{u_m}(s), u_m(s))ds \\
\leq& M_G \int_1^T \widetilde{m}(s) \left(\|x_{u_n}(s) - x_{u_m}(s)\| + \|D^{q-1}x_{u_n}(s) - D^{q-1}x_{u_m}(s)\| + \|u_n(s) - u_m(s)\|\right) ds
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
&\|D^{q-1}x_{u_n}(t) - D^{q-1}x_{u_m}(t)\| \\
\leq& M_G \int_1^T \|g(s, x_{u_n}(s), D^{q-1}x_{u_n}(s), u_n(s)) - g(s, x_{u_m}(s), D^{q-1}x_{u_m}(s), u_m(s))ds \\
\leq& M_G \int_1^T \widetilde{m}(s) \left(\|x_{u_n}(s) - x_{u_m}(s)\| + \|D^{q-1}x_{u_n}(s) - D^{q-1}x_{u_m}(s)\| + \|u_n(s) - u_m(s)\|\right) ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in J$

$$
\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_m(t)\| =& \| \left(x_{u_n}(t), D^{q-1}x_{u_n}(t)\right) - \left(x_{u_m}(t), D^{q-1}x_{u_m}(t)\right) \| \\
=& \|x_{u_n}(t) - x_{u_m}(t)\| + \|D^{q-1}x_{u_n}(t) - D^{q-1}x_{u_m}(t)\| \\
\leq& 2M_G \int_1^T \widetilde{m}(s) \left(\|x_{u_n}(s) - x_{u_m}(s)\| + \|D^{q-1}x_{u_n}(s) - D^{q-1}x_{u_m}(s)\|\right) ds \\
&+ 2M_G \int_1^T \widetilde{m}(s)\|u_n(s) - u_m(s)\|ds \\
=& 2M_G \int_1^T \widetilde{m}(s)\|v_n(s) - v_m(s)\|ds + 2M_G \int_1^T \widetilde{m}(s)\|u_n(s) - u_m(s)\|ds \\
\leq& 2M_G \left(\|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} + \|u_n - u_m\|_{\mathcal{C}}\right) \int_1^T \widetilde{m}(s)ds \\
=& 2M_G\|\widetilde{m}\|_1 \left(\|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} + \|u_n - u_m\|_{\mathcal{C}}\right),
\end{aligned}
$$

ceci conduit à

$$\sup_{t\in J} \|v_n(t) - v_m(t)\| \leq 2M_G\|\widetilde{m}\|_1 \left(\|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} + \|u_n - u_m\|_{\mathcal{C}}\right),$$

donc

$$\|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} \leq 2M_G\|\widetilde{m}\|_1 \left(\|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} + \|u_n - u_m\|_{\mathcal{C}}\right).$$

Puisque $M_G\|\widetilde{m}\|_1 < \dfrac{1}{2}$, on aura

$$\|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} \leq \frac{2M_G\|\widetilde{m}\|_1}{1 - 2M_G\|\widetilde{m}\|_1}\|u_n - u_m\|_{\mathcal{C}}, \tag{3.82}$$

On peut conclure, par la convergence uniforme de $(u_n(\cdot))_n$, que $(v_n(\cdot))_n$ est une suite de Cauchy, et alors

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|v_n - v_m\|_{\mathcal{C}^2} = 0,$$

i.e., $(v_n(\cdot))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(J,H) \times \mathcal{C}(J,H)$. En d'autres termes, $(v_n(\cdot))_n$ converge dans $\mathcal{C}(J,H) \times \mathcal{C}(J,H)$ vers $(\bar{x}(\cdot), \bar{w}(\cdot))$ avec

$$\bar{x}(1) = \lim_{n\to+\infty} x_{u_n}(1) = 0.$$

Par la définition de la dérivée fractionnaire de Hadamard (Définition 1.7.10), on a

$$D^{q-1}x_{u_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(k-q+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^k \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{x_{u_n}(s)}{s}ds, \quad k = [q-1]+1.$$

En évoquant la relation (3.80), on obtient pour tous $t, s \in J$ $(s < t)$

$$\left\| \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{x_{u_n}(s)}{s} \right\| \leq \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q} \frac{1}{s} \left(\|y(t)\| + \gamma\right), \tag{3.83}$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la convergence uniforme de $(x_{u_n}(\cdot))_n$ vers $\bar{x}(\cdot)$, assurent que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} D^{q-1}x_{u_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(k-q+1)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^k\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q}\frac{x_{u_n}(s)}{s}ds\\ &=\frac{1}{\Gamma(k-q+1)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^k\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k-q}\frac{\bar{x}(s)}{s}ds = D^{q-1}\bar{x}(t)\end{aligned}\tag{3.84}$$

i.e., $\bar{w}(\cdot) = D^{q-1}\bar{x}(\cdot)$ et

$$D^r\bar{x}(T) = \lim_{n\to+\infty} D^r x_{u_n}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D^r x_{u_n}(\mu_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D^r\bar{x}(\mu_i).$$

Maintenant, nous allons prouver que $\bar{x}(t) = \displaystyle\int_1^T G(t,s)g(s,\bar{x}(s),D^{q-1}\bar{x}(s),\bar{u}(s))ds$. Sachant que $(x_{u_n}(\cdot))_n$ (resp. $D^{q-1}x_{u_n}(\cdot)$, $(u_n(\cdot))_n$) converge uniformément vers $\bar{x}(\cdot)$ (resp. $D^{q-1}\bar{x}(\cdot)$, $\bar{u}(\cdot)$), via l'hypothèse $(\mathcal{H}_2^g)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} g\left(t,x_{u_n}(t),D^{q-1}x_{u_n}(t),u_n(t)\right) = g\left(t,\bar{x}(t),D^{q-1}\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right).\tag{3.85}$$

En utilisant $(\mathcal{H}_2^g)$ et la relation (3.80), on a pour tout $t\in J$

$$\begin{aligned}&\|g(t,x_{u_n}(t),D^{q-1}x_{u_n}(t),u_n(t))\|\\ &\quad\le\|g(t,x_{u_n}(t),D^{q-1}x_{u_n}(t),u_n(t))-g(t,0,0,0)\|+\|g(t,0,0,0)\|\\ &\quad\le\widetilde{m}(t)\left(\|x_{u_n}(t)\|+\|D^{q-1}x_{u_n}(t)\|+\|u_n(t)\|\right)+\|g(t,0,0,0)\|\\ &\quad<\left(2\gamma+\|y(t)\|+\|D^{q-1}y(t)\|+\tilde{c_1}\right)\widetilde{m}(t)+\|g(t,0,0,0)\|,\end{aligned}$$

qui est intégrable au sens de Lebesgue via $(\mathcal{H}_3^g)$ et puisque $y\in\mathcal{W}^{q,1}(J,H)$, $\widetilde{m}(\cdot)\in\mathbf{L}^1(J,\mathbb{R}^+)$. Donc, de la relation (3.81) et la dernière estimation, et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que

$$\bar{x}(t) = \lim_{n\to+\infty} x_{u_n}(t) = \int_1^T G(t,s)g(s,\bar{x}(s),D^{q-1}\bar{x}(s),\bar{u}(s))ds.\tag{3.86}$$

En utilisant (iii) du Lemme 3.2.3, nous avons pour presque tout $t\in J$

$$D^q\bar{x}(t) = g(t,\bar{x}(t),D^{q-1}\bar{x}(t),\bar{u}(t))$$

avec $\bar{x}(1)=0$, $D^r\bar{x}(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_i D^r\bar{x}(\mu_i)$. Autrement dit, par l'unicité de la solution, $\bar{x}(\cdot) = x_{\bar{u}}(\cdot)$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\|D^q x_{u_n} - D^q x_{\bar{u}}\|_1 &\le \int_1^T \|D^q x_{u_n}(t) - D^q x_{\bar{u}}(t)\|dt\\ &\le \int_1^T \|g(t,x_{u_n}(t),D^{q-1}x_{u_n}(t),u_n(t)) - g\left(t,x_{\bar{u}}(t),D^{q-1}x_{\bar{u}}(t),x_{\bar{u}}(t)\right)\|dt\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc, $\big(D^q x_{u_n}(\cdot)\big)_n$ converge vers $D^q x_{\bar{u}}(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1(J,H)$, alors elle converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(J,H)$ vers la même limite. En appliquant le Lemme 3.2.6, il vient que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_1^T L(t, x_{u_n}(t), D^q x_{u_n}(t))dt \geq \int_1^T L(t, x_{\bar{u}}(t), D^q x_{\bar{u}}(t))dt.$$

Combinant cette dernière inégalité avec (3.77), on conclut que

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} \int_1^T L(t, x_u(t), D^q x_u(t))dt = \int_1^T L(t, x_{\bar{u}}(t), D^q x_{\bar{u}}(t))dt,$$

ce qui signifie que $\bar{u}$ est une solution optimale du problème de minimisation considéré et le théorème est bien prouvé. ■

Appendice

Définition 1 ***(Point fixe)***
Soit E un espace de Banach et $g : E \to E$ une application. Un élément y de E est dit point fixe de g si $g(y) = y$.

Théorème 2 *[71]*(***Point fixe de Schauder*** *)*
Soit S un sous ensemble convexe compact d'un espace de Banach E et g une application continue de S dans lui même. Alors g admet un point fixe.

Théorème 3 *[49]*(***Intégrale de Leibnit'z*** *)*
Soit $g : [a, t_2] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et ayant une dérivée continue $\dfrac{dg}{dt}$ dans $a \leq x \leq t$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Alors pour $t_1 \leq t \leq t_2$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_a^t g(x,t)dx = \int_a^t \frac{d}{dt} g(x,t)dx + g(t,t).$$

Lemme 4 *[51]*(***Lemme de Gronwall*** *)*
Soit $a \in \mathbf{L}^1([1,T], \mathbb{R})$, et soit $v : [1,T] \to \mathbb{R}$ une application absolument continue satisfaisant

$$\dot{v}(t) \leq a(t)v(t), \quad p.p.\ t \in [1,T].$$

Alors

$$v(t) \leq v(1) \exp\left(\int_1^t a(s)ds\right) \quad \text{pour tout } t \in [1,T].$$

Théorème 5 *[19](Inégalité intégrale de Minkowski)*
Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $S \subset \mathbb{R}$ est un ensemble mesurable. Supposons que g une application mesurable sur $\Omega \times S$ et $g(\cdot, y) \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ p.p. $y \in S$. Alors

$$\Big\| \int_S g(\cdot, y)dy \Big\|_p \leq \int_S \|g(\cdot, y)\|_p dy,$$

si le membre de droite est fini.

Voir les références [28] et [46] pour les résultat suivants

Théorème 6 ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et E un espace de Banach, soit $1 \leq p < \infty$ et $(g_n)_n \subset \mathbf{L}^p(\Omega, E)$. On supposons que

(i) $(g_n(t))_n$ converge presque partout vers une fonction $g(t)$ sur Ω.

(ii) il existe une fonction positive $h(\cdot) \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|g_n(t)\| \leq h(t) \quad p.p.\ t \in \Omega.$$

Alors, $g(\cdot) \in \mathbf{L}^p(\Omega, E)$ et la suite $(g_n)_n$ converge vers g dans $\mathbf{L}^p(\Omega, E)$.

Théorème 7 ***(Réciproque du théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach et Soit $1 \leq p < \infty$. Si $(g_n)_n$ converge vers g dans $\mathbf{L}^p(\Omega, E)$, alors il existe $(g_{n_k})_k$ une suite extraite de $(g_n)_n$ et une fonction positive $h \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

(i) $g_{n_k}(t) \to g(t)$ p.p. $t \in \Omega$

(ii) pour tout k, $|g_{n_k}(t)| \leq h(t)$ p.p. $t \in J$.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans la première partie de notre thèse, nous avons exploré l'existence d'une solution pour un processus de la rafle convexe du second ordre couplé à une équation différentielle fractionnaire en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Notre résultat étend au second ordre celui obtenu dans [34]. Notre prochain défi consiste à étudier le problème suivant

$$\begin{cases} D^q x(t) + \alpha D^{q-1} x(t) = f(x(t)) \quad t \in J, \ \alpha \geq 0 \\ x(1) = 0, \ D^r x(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^r x(\mu_i), \end{cases}$$

et essayer de prouver l'existence de solutions pour ce problème couplé à un processus de la ralfe.

Dans une deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes concentrées sur l'établissement de solutions pour une inclusion différentielle d'ordre fractionnaire impliquant une multi-application pseudo-lipschitzienne. Nous avons présenté un résultat nouveau et général par rapport à ceux existant dans la littérature. Nous soulignons ici qu'en utilisant les mêmes techniques, nous pouvons résoudre notre problème en considérant une dérivée de Riemann-Liouville. Notamment, lorsque $q = 2$, nous avons

$$D^2 x(t) = \ddot{x}(t) \quad \forall t \in J.$$

Alors notre problème $(\mathcal{P}_F)$ se réduit au cas déjà traité dans [14]. En conclusion de cette étude, nous avons appliqué nos résultats à un problème d'optimisation, en particulier lorsque le côté droit est une application lipschitzienne.

Cette étude de l'inclusion fractionnaire $(\mathcal{P}_F)$ offre de nouvelles perspectives, particulièrement en abordant des problèmes associés, tel que les inclusions différentielles fonctionnaires, problème de type Bolza et la relaxation dans la théorie du contrôle. Nous visons à utiliser la méthode du principe maximal de Pontryagin pour établir les conditions d'optimalité pour le problème étudié. Il est important de noter que ces aspects, dépassant le cadre de la présente thèse, pourraient constituer le point essentiel de travaux futurs.

Bibliographie

[1] Adly, S. ; Le, B.K. : Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces, J. Optim. Theory Appl. 169, 407-423 (2016)

[2] Adly, S. ; Le, B.K. : Unbounded state-dependent sweeping processes with perturbations in uniformly convex and q-uniformly smooth Banach spaces, Numer. Algebra, Control. Optim, 8, 81-95 (2018)

[3] Adly, S. ; Nacry, F. : An existence result for discontinuous second-order nonconvex state-dependent sweeping processes, Appl. Math. Optim. 79, 515-546 (2019)

[4] Adly, S. ; Haddad, T. ; Le, B.K. : State dependent implicit sweeping process in the framework of quasistatic evolution quasi-variational inequalities. J. Optim. Theory Appl. 182, 473-493 (2019)

[5] Agrawal, O.P. : A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems, Nonlinear Dyn. 38(1), 323-337 (2004)

[6] Ahmad, B. ; Alsaedi, A. ; Ntouyas, S.K. ; Tariboon, J. : Hadamard-type fractional differential equations, Inclusions and inequalities, Cham, Switzerland : Springer (2017)

[7] Ahmad, B. ; Ntouyas, S.K. ; Alsaedi, A. : Coupled systems of fractional differential inclusions with coupled boundary conditions, Electron. J. Differ. Equ. 2019, No. 69, 1-21 (2019)

[8] Aliouane, F. ; Azzam-Laouir, D. : A second order differential inclusion with proximal normal cone in Banach spaces, Topol. Methods Nonlinear Anal. 44(1), 143-160 (2014)

[9] Aliouane, F. ; Azzam-Laouir, D. : Second order sweeping process with a Lipschitz perturbation, J. Math. Anal. App. 452, 729-746 (2017)

[10] Aliouane, F. ; Azzam-Laouir, D. ; Castaing, C. ; Monteiro Marques, M.D.P. : Second-order time and state-dependent sweeping process in Hilbert space, J. Optim Theory Appl. 182, 153-188 (2019)

[11] Aliouane, F. ; Azzam-Laouir, D. ; Tamouza, S. : Fractional-order differential inclusion with pseudo-Lipschitz multi-valued map, soumis (2024)

[12] Aubin, J.P. ; Cellina, A. : Differential inclusions : set-valued maps and viability theory. Springer-Verlag, Berlin (1984)

[13] Aussel, D. ; Daniilidis, A. ; Thibault, L. : Subsmooth sets : functional characterizations and related concepts, Trans. Amer. Math. Soc. 357, No. 4, 1275-1301 (2005)

[14] Azzam-Laouir, D. ; Makhlouf, A. ; Thibault, L. : Existence and relaxation theorem for a second order differential inclusion, Numer Funct Anal Optim. 31(10), 1103-1119 (2010)

[15] Baleanu, D. ; Machado, J.A.T. ; Luo, A.C.J. : Fractional dynamics and control, Springer, New York (2012)

[16] Bandaliyev, R.A. ; Mamedov, I.G. ; Abdullayeva, A.B. ; Safarova, K.H. : Optimal control problem for a degenerate fractional differential equation, Lobachevskii J. Math. 42(6), 1239-1247 (2021)

[17] Belmor, S. ; Jarad, F. ; Abdeljawad, T. : On Caputo-Hadamard type coupled systems of nonconvex fractional differential inclusions, Adv. Differ. Equ. 1-12 (2021)

[18] Bauschke, H.H. ; Combettes, P. L. : Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Springer, (2017)

[19] Benaissa, B. : On the reverse Minkowski's integral inequality, Kragujev. J. Math. 46(3), 407-416, (2022)

[20] Benguessoum, M. : Quelques problèmes d'évolution pour des équations et des inclusions différentielles. Thèse doctorat en Sciences, Université de Jijel (2021)

[21] Benguessoum, M. ; Azzam-Laouir, D. ; Castaing, C. : On a time and state dependent maximal monotone operator coupled with a sweeping process with perturbations, Set-Valued Var. Anal. 29, 191-219 (2021)

[22] Benhamida, W. ; Graef, J.R. ; Hamani, S. : Boundary value problems for Hadamard fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions, Fract. Differ. Calc. 8, 165-176 (2018)

[23] Bergounioux, M. ; Bourdin, L. : Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constaints, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 26, 1-38 (2020)

[24] Bitsadze, A.V. ; Samarskii, A.A. : On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems, Sov. math. Dokl. 10, 398-400 (1969)

[25] Bounkhel, M. : Existence results for second order convex sweeping processes in p-uniformly smooth and q-uniformly convex Banach spaces, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 27, 1-10 (2012)

[26] Bounkhel, M. : Regularity concepts in nonsmooth analysis, Theory and Applications. Springer Science Business Media. LLC (2012)

[27] Bounkhel, M. ; Azzam-Laouir, D. : Existence results on the second-order nonconvex sweeping processes with perturbations, Set-Valued Anal. 12, 291-318 (2004)

[28] Brézis, H. : Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, (1983)

[29] Brézis, H. : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam (1973)

[30] Castaing, C. : Quelques problèmes d'évolution du second ordre, Sém. Anal. Convexe. Montpellier. Exposé No. 5. (1988)

[31] Castaing, C. : Version aléatoire de problème de rafle par un convexe variable, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 277, 1057-1059 (1973)

[32] Castaing, C. ; Duc Ha, T.X. ; Valadier, M. : Evolution equations governed by the sweeping process, Set-Valued Anal. 1, 109-139 (1993)

[33] Castaing, C. ; Godet-Thobie, C. ; Phung, P.D. ; Truong, X.L. : On fractional differential inclusions with nonlocal boundary condition, Fract. Calc. Appl. Anal. 22(2), 444-478 (2019)

[34] Castaing, C. ; Godet-Thobie, C. ; Truong, L.X. : Fractional order of evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator, Mathematics. 8(9), 1-30 (2020)

[35] Castaing, C. ; Ibrahim, A.G. ; Yarou, M.F. : Some contributions to nonconvex sweeping process, J. Nonlinear Convex. Anal. 10, No. 1, 1-20 (2009)

[36] Castaing, C. ; Monteiro Marques, M.D.P. : Evolution problems associated with nonconvex closed moving sets with bounded variation, Port. Math. 53, 73-87 (1996)

[37] Castaing, C. ; Raynaud de Fitte P. ; Valadier, M. : Young measures on topological spaces : with applications in control theory and probability theory, Kluwer Academic Publishers (2004)

[38] Castaing, C. ; Valadier, M. : Convex analysis and measurable multifunctions, Lect. Notes Math. Springer, Berlin (1977)

[39] Carvalho, A. ; Pinto, C.M.A. : A delay fractional order model for the co-infection of malaria and HIV/AIDS, Int. J. Dynam. Control, 5, 168-186 (2017)

[40] Cernea, A. : On some fractional integro-differential inclusions with nonlocal multi-point boundary conditions, Fract. Differ. Calc. 9, 139-148 (2019)

[41] Cesari, L. : Optimization theory and applications, problems with ordinary differential equations, Springer-Verlag, (1983)

[42] Chalendar, I. ; Fricain, E. : Compléments en analyse cours, et exercices, 2010- 2011 http ://math.univ-lyon1.fr/ chalenda/new-cours-complet.pdf

[43] Clarke, F.H. : Optimization and nonsmooth analysis, Wiley, New York, (1983)

[44] Clarke, F.H. ; Ledyaev, Y.S. ; Stern, R.J. ; Wolenski, P.R. : Nonsmooth analysis and control theory. Springer-Verlag New York (1998)

[45] Debnath, L. : Recent applications of fractional calculus to science and engineering. Int. J. Math. Sci., 54, 3413-3442 (2003)

[46] Descombes, R.D. : Cours d'analyse. Librairie Vuibert, Paris, (1962)

[47] Dib, K. ; Azzam-Laouir, D. : Existence solutions for a couple of differential inclusions involving maximal monotone operators, Appl. Anal. 102(9), 2628-2650 (2022)

[48] Fillippov, A.F. : Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side, SIAM J. Control, 5(4), 609-621, (1967)

[49] Flanders, H. : Differentiation under the integral sign, Amer. Math. Monthly, 80(6), 615-627 (1973)

[50] Ge, Z.M. ; Ou, C. Y. : Chaos synchronization of fractional order modified duffing systems with parameters excited by a chaotic signal, Chaos Solit. Fractals, 35, 705-717 (2008)

[51] Gronwall, T.H. : Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. Math. 20, 292-296 (1919)

[52] Gupur, G. : Functional analysis methods for reliability models, Birkhäuser. (2011)

[53] Haddad, T. ; Noel, J. ; Thibault, L. : Perturbed sweeping process with a subsmooth set depending on the state, J. Linear Nonlinear Anal. 2(1), 155-174 (2016)

[54] Hadamard, J. : Essai sur l'étude des fonctions données par leur dévelopment de Taylor, J. Math. Pures Appl. 4(8), 101-186 (1892)

[55] Hilfer, R. : Applications of fractional calculus in physics, vol. 35. World Scientific, Singapore (2000)

[56] Ilin, V.A. ; Moiseev, E.I. : Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm Liouville operator, Differ. Equ., vol. 23, 979-987 (1987)

[57] Ioffe, A. : Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions, J Convex Anal. 13, 353-362 (2006)

[58] Jafarian, M. : Robust consensus of unicycles using ternary and hybrid controllers, Int. J. Robust Nonlinear Control. 27(17), 4013-4034 (2017)

[59] Javidi, M. ; Ahmad, B. : Dynamic analysis of time fractional order phytoplankton-toxic phytoplankton-zooplankton system, Ecol. Model. 318, 8-18 (2015)

[60] Kamocki, R. : Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems, Math. Methods Appl. Sci. 37(11), 1668-1686 (2014)

[61] Kien, B.T. ; Fedorov, V. ; Phuong, T.D. : Optimal control problems governed by fractional differential equations with constraints, SIAM J. Control Optim. 60(3), 1732-1762, (2022)

[62] Kilbas, A.A. ; Srivastava, H.M. ; Trujillo, J.J. : Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Math. Stud, Elsevier science B. V. Amsterdam, The Netherlands. 204 (2006)

[63] Kisieliwicz, M. : Differential inclusion and optimal control, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic ublishers, Dortrecht, Boston, London (1991)

[64] Kunze, M. ; Monteiro Marques, M.D.P. : On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes, Topol. Methods Nonlinear Anal. 12, 179-191 (1998)

[65] Le, B.K. : Well-posedeness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions, Optimization, 69, 1-13 (2020)

[66] Makarova, A.V. : On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities II, Glob. Stoch. Anal. 2(1), 101-112 (2012)

[67] Magin, R.L. : Fractional calculus in bioengineering, Begell House, Readding (2006)

[68] Mainardi, F. : Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity : An introduction to mathematical models. World Scientific, Singapore (2010)

[69] Miller, K.S. ; Ross, B. : An introduction to fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley nad Sons, New York, NY, USA (1993)

[70] Moreau, J.J. : Evolution Problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, J. Differ. Equ. 26, 347-374 (1977)

[71] Morris, S.A. : The Schauder-Tychonoff fixed point theorem and applications, Matematický časopis, Vol. 25, No. 2, 165-172 (1975)

[72] de Pinho, M.d.R. ; Ferreira, M.M.A. ; Smirnov, G.V. : Optimal control involving sweeping processes, Set-Valued Var. Anal. 27, 523-548 (2019)

[73] Rockafellar, R.T. ; Wets, R.J.B. : Variational analysis, Springer (1998)

[74] Ross, B. : Fractional Calculus and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, (1975)

[75] Ross, B. : A brief history and exposition of fundamental theory of the fractional calculus, Springer Lecture notes in mathematics, 57, 1-36 (1975)

[76] Salem, H. : On the fractional m-point boundary value problem in reflexive Banach spaces and weak topologies, J. Comput. Appl. Math. 224(2), 565-572 (2009)

[77] Samko, S.G. ; Kilbas, A.A. ; Marichev, O.I. : Fractional integrals and derivatives : Theory and applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993)

[78] Sonntag, Y. : Topologie et Analyse fonctionnelle, Ellipses, édition marketing S.A, (1998)

[79] Tamouza, S. ; Aliouane, F. ; Azzam-Laouir, D. : Fractional-order problem coupled with a second-order Moreau's sweeping process, Fract. Calc. Appl. Anal. 26(3), 1238-1272 (2023)

[80] Thibault, L. : Sweeping process with regular and nonregular sets, J. Differ. Equ. vol. 193, 1-26 (2003)

[81] Thibault, L. : Submooth functions and sets, J. Linear Nonlinear Anal. 4(2), 157-269 (2018)

[82] Tolstonogov, A. : BV solutions of a convex sweeping process with a composed perturbation, Evol. Equ. Control Theory. vol. 11, Number 2, 537-557 (2022)

[83] Tolstonogov, A. : Control sweeping process. J. Convex Anal. 23, 1099-1123 (2016)

[84] Zeng, S. ; Haddad, T. ; Bouach, A. : Well-posedness of fractional Moreau's sweeping processes of Caputo type, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 125(5) : 107361 (2023)

[85] Zhai, C. ; Ren, J. : A coupled system of fractional differential equations on the half-line, Bound. Value Probl. 2019(1), 117, 1-22 (2019)

[86] Zhong, W. ; Lin, W. : Nonlocal and multi-point boundary value problem for fractional differential equations, Comput. Math. with Appl. 59(3), 1345-1351 (2010)

ملخص

هدفنا في هذه الرسالة هو دراسة وجود حلول لمشكلة من الرتبة الكسرية مع شروط حدود متعددة النقاط مقترنة مع مشكلة اضطراب من الرتبة الثانية. نحصل على نتائجنا من خلال تطبيق نظرية نقطة الثابت شاودر. بالإضافة إلى ذلك، نحن مهتمون بوجود حلول لتضمين تفاضلي من الرتبة الكسرية، تحت الشرط الذي يفي بأن التطبيق المتعدد يفي بخاصية الليبشيتز الزائفة، باستخدام نظرية فيليبوف. نوضح هذه المفاهيم أيضًا من خلال تطبيق على مشكلة التحكم الأمثل، من خلال استبدال التضمين بمعادلة تفاضلية كسرية.

Résumé

Notre objectif dans cette thèse, est d’étudier l'existence de solutions pour un problème d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites multipoints couplé avec un problème de rafle du second ordre perturbé. Nous obtenons nos résultats en appliquant le théorème du point fixe de Schauder. Par ailleurs, nous nous intéressant à l'existence de solutions pour une inclusion différentielle d'ordre fractionnaire, sous la condition que la multi-application satisfasse une propriété de pseudo-lipschitzité, en utilisant le théorème de Filippov. Nous illustrons également ces concepts par une application à un problème de contrôle optimal, en remplaçant l'inclusion par une équation différentielle fractionnaire.

Abstract

Our aim in this thesis is to investigate the existence of solutions for a fractional-order problem with multipoint boundary conditions coupled with a perturbed second-order perturbed sweeping process. We obtain our results by applying the Schauder fixed-point theorem. Additionally, we are concerned with the existence of solutions for a fractional-order differential inclusion, under the condition that the multi-valued map satisfies a property of pseudo-lipschitzness, using the Filippov theorem. We also illustrate these concepts through an application to an optimal control problem, replacing the inclusion with a fractional differential equation.