République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT

Domaine : Mathématiques et Informatique **Filière :** Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Présentée par

Fatima Fennour

Intitulée

Sur une classe d'inclusions différentielles dans un espace de Hilbert

Soutenue publiquement le 29/06/2024 à la bibliothèque centrale

Devant le jury composé de :

Tahar Zerzaihi	Professeur	Univ. de Jijel	Président
Soumia Saïdi	Professeur	Univ. de Jijel	Encadreur
Tayeb Hamaizia	Professeur	Univ. de Constantine 1	Examinateur
Ammar Boudeliou	Maitre de Conférences A	Univ. de Constantine 1	Examinateur
Nadjet Abada	Maitre de Conférences A	ENS de Constantine	Examinateur
Amira Makhlouf	Maitre de Conférences A	Univ. de Jijel	Examinateur

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **ALLAH** qui m'a donné des connaissances que je ne connaissais pas et m'a donné la force, la capacité et la volonté dont j'avais besoin pour atteindre ce niveau et mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur, Professeur **Soumia Saïdi** qui a encadré ce travail et ne m'a pas lésiné avec ses conseils et corrections scientifiques et linguistiques, en plus de son grand intérêt pour le suivi de mes recherches à toutes les étapes, et pour sa confiance, son soutien et ses précieux conseils tout au long de ces années de recherche. Grâce à elle, j'ai appris combien une bonne organisation est importante, comment préparer de bonnes références et comment rédiger correctement des textes académiques. Vous m'avez encouragé et aidé à surmonter des difficultés scientifiques et des situations stressantes. J'ai grandement bénéficié de chaque discussion que j'ai eue avec elle au cours des dernières années, elle m'a conseillé dans toutes mes publications et présentations. Et c'est avec fierté que j'exprime ma reconnaissance pour sa supervision de ma thèse, et avant cela, d'être l'un de ses étudiants qui ont bénéficié de sa vaste connaissance et de sa compréhension. Je lui adresse sincèrement mes remerciements, mon appréciation et mon respect.

J'adresse également mes remerciements aux membres du jury qui vont examiner ma thèse : le président : Prof. **Tahar Zerzaihi** et les examinateurs : Prof. **Tayeb Hmaizia**, Prof. **Ammar Boudeliou**, Prof. **Nadjet Abada** et Prof. **Amira Makhlouf** pour leur temps précieux, leurs commentaires et remarques perspicaces et leurs suggestions utiles pour élargir mon champ de recherche.

J'exprime mes plus sincères remerciements à mes parents bien-aimés, car vous avez été une source de force et de soutien sans précédent dans mon parcours académique. Votre soutien illimité et votre motivation constante ont été mon levier qui m'a accompagné à travers chaque défi. Merci pour votre chaleureuse compassion et vos conseils avisés. Vos paroles ont toujours été une inspiration qui me pousse à atteindre la meilleure version de moi-même. J'apprécie vos grands sacrifices et votre dévouement à créer un environnement favorable qui contribue à mon épanouissement personnel et professionnel. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et à promettre que mon succès sera toujours un petit retour pour cet énorme cadeau de mes merveilleux parents.

J'exprime mes plus sincères remerciements à mes frères et sœurs bien-aimés qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours doctoral. Grâce à vous, les difficultés se sont transformées en défis surmontables, et les moments difficiles sont devenus des moments d'apprentissage. Vous avez été un pilier fort et une motivation constante, et chaque jour a été une source d'encouragement et d'optimisme grâce à votre présence. Merci pour votre profonde compréhension, les sacrifices que vous avez consentis et l'esprit de collaboration qui a coloré chaque étape de mon parcours scientifique. Vous êtes plus que de simples membres de ma famille, mais des compagnons de route et des partenaires dans la construction de souvenirs qui méritent d'être célébrés. J'espère que notre fraternité et notre cohésion continueront, et je vous promets que ce que j'ai accompli ne sera pas la fin, mais plutôt le début d'un avenir radieux que nous partagerons ensemble.

À mes amies et collègues du laboratoire LMPA, université de Jijel, merci pour les beaux moments que nous avons passés ensemble, et pour les rires et les souvenirs que vous avez ajoutés à ma vie. Vous avez toujours été une source d'inspiration et de joie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à la réussite de ce travail, que ce soit de près ou de loin, ne serait-ce qu'un peu.

Merci ... Merci ... Merci

Fatima Fennour.

Table des matières

Introduction générale 4

Notations générales 10

1 Préliminaires 12

1.1 Continuité des applications 12

1.2 Ensembles et fonctions convexes 13

1.3 Topologie faible 14

1.4 Multi-applications 15

1.4.1 Premières définitions 15

1.4.2 Continuité et mesurabilité des multi-applications 16

1.5 Opérateurs maximaux monotones 17

1.5.1 Définitions et propriétés 17

1.5.2 Pseudo-distance de Vladimirov 18

1.6 Quelques résultats utiles 19

2 Problème de minimisation soumis à un système couplé par des opérateurs maximaux monotones 23

2.1 Introduction 23

2.2 Étude du système couplé par des opérateurs maximaux monotones 24

2.3 Résultat principal 47

3 Sur une classe de problèmes d'évolution régis par des opérateurs maximaux monotones avec une perturbation intégrale **56**

3.1 Introduction 56

3.2 Étude d'une inclusion intégro-différentielle par des opérateurs maximaux monotones 57

3.3 Problème de contrôle optimal 73

Conclusion et perspective **79**

Bibliographie **80**

Introduction générale

Les inclusions différentielles régies par les opérateurs maximaux monotones $A(t)$ de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + g(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

ont été considérées par plusieurs auteurs (où une application ou une multi-application g a été ajoutée au côté droit de l'inclusion différentielle), voir par exemple, [6, 7, 8, 20, 27, 30, 32, 33, 49, 51, 57, 69, 70].

Dans le papier récent [27], une perturbation intégrale à fait son apparition dans les inclusions différentielles gouvernées par les opérateurs maximaux monotones $A(t)$ du type

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \displaystyle\int_0^t g(t, s, u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Cette dernière inclusion a été étudiée dans [25] pour $A(t) = A$ l'opérateur m-acrétif et dans [12] avec $A(t) = \partial\varphi(t, \cdot)$ le sous-différentiel d'une fonction $\varphi(t, \cdot)$ dépendante du temps. Le problème connu sous le nom de processus de la rafle intégro-différentiel (ou processus de la rafle avec perturbation intégrale) pour $A(t) = N_{C(t)}$ le cône normal d'un ensemble mobile dépendante du temps $C(t)$ a été aussi abordé récemment dans [13, 14, 15]. Ce dernier a été introduit d'abord dans [17], ensuite dans [37].

Récemment, une attention a été portée au cas plus général où l'opérateur dépend à la fois du temps et de l'état. Le problème d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, u(t))u(t) + g(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

a été étudié dans [3, 50, 67], où g est une application univoque. Le problème du second ordre correspondant a été également discuté dans des travaux récents, voir par exemple [26, 28, 60, 62, 63, 64, 66].

Une étude récente de systèmes dynamiques régis par deux inclusions différentielles avec des opérateurs maximaux monotones, des sous-différentiels, ou mixtes avec des processus de la rafle a été développée dans la littérature scientifique, nous citons par exemple, [2, 11, 42, 52, 61, 65].

Dans la lignée des travaux cités ci-dessus, nous étudions une nouvelle classe de problèmes intégro-différentiels : des systèmes dynamiques avec des opérateurs maximaux monotones et une perturbation intégrale. Et ce pour envisager d'investir les résultats correspondants dans la théorie du contrôle optimal.

Notre objectif principal du deuxième chapitre de cette thèse est d'étudier les solutions optimales au problème de minimisation

$$\min_{(\psi,\phi)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \int_0^T L(t,u_\psi(t),\dot{x}_\phi(t))dt,$$

où (u_ψ, x_ϕ) désigne la solution associée du contrôle $(\psi,\phi)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ du système contrôlé

$$(\mathcal{CS}_{\psi,\phi}) \qquad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,\psi(t))u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \quad \text{p.p. } t\in I=[0,T], \\ -\dot{x}(t) \in B(t,\phi(t))x(t) + g(t,u(t),x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u(t),x(t)) \in \mathrm{D}\left(A(t,\psi(t))\right)\times \mathrm{D}\left(B(t,\phi(t))\right), \quad t\in I, \\ (u(0),x(0)) = (u_0,x_0) \in \mathrm{D}\left(A(0,\psi(0))\right)\times\mathrm{D}\left(B(0,\phi(0))\right). \end{cases}$$

H est un espace de Hilbert, la fonctionnelle du coût $L : I\times H\times H \to [0,+\infty[$ est semi-continue inférieurement, et les ensembles $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont construits convenablement. Les opérateurs maximaux monotones $A(t,z)$ et $B(t,z)$ varient au sens de la pseudo-distance (voir (H_A^1) et (H_B^1) ci-dessous) dont les domaines sont notés respectivement $\mathrm{D}\left(A(t,z)\right)$ et $\mathrm{D}\left(B(t,z)\right)$, pour tout $(t,z)\in I\times H$. Les fonctions $f : I\times I\times H\times H\to H$ et $g : I\times H\times H\to H$ sont univoques.

À mentionner que les systèmes contrôlés décrits par des équations différentielles ordinaires avec des inclusions différentielles non linéaires ont été développés dans la littérature en dimension finie voir [1, 16, 22], et les références qui s'y trouvent. Récemment, les auteurs de [16] ont contribué à un problème d'optimisation sur l'ensemble des solutions du système dynamique considéré. Les auteurs dans [22] ont développé des conditions d'optimalité nécessaires, tandis qu'un schéma numérique a été proposé dans [1]. Dans [16], l'existence d'une solution optimale au problème original a été démontrée en tant que limite de solutions aux problèmes discrétisés. D'autres problèmes d'optimisation pour des fonctionnelles intégrales sur les solutions d'inclusions différentielles contrôlées avec des opérateurs maximaux monotones ou des processus de la rafle peuvent être trouvés dans les références [13, 21, 23, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 53, 54, 55, 56, 73], parmi d'autres.

Pour mener à bien cette étude, nous nous intéressons au système dynamique formulé par

$$(\mathcal{P}_{f,g}) \qquad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ -\dot{x}(t) \in B(t)x(t) + g(t,u(t),x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u(t),x(t)) \in \mathrm{D}\,(A(t)) \times \mathrm{D}\,(B(t)), \quad t \in I, \\ (u(0),x(0)) = (u_0,x_0), \end{cases}$$

où les opérateurs $A(t)$ et $B(t)$ sont maximaux monotones et varient au sens de la pseudo-distance (voir (h_A^1) et (h_B^1) ci-dessous). Nous procédons par une approche de discrétisation pour montrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution pour $(\mathcal{P}_{f,g})$, sans aucune hypothèse de compacité. Ensuite, nous énonçons le théorème relatif à $(\mathcal{CS}_{\psi,\phi})$, et nous prouvons le résultat d'optimalité pour le problème de minimisation ci-dessus.

Nous considérons, dans le troisième chapitre de cette thèse, le problème intégro-différentiel suivant

$$(\mathcal{IDP}_{A(t,u)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,u(t))u(t) + \displaystyle\int_{T_0}^t f(t,s,u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I := [T_0,T], \\ u(T_0) = u_0 \in D(A(T_0,u_0)), \end{cases}$$

où $A(t,x) : D(A(t,x)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone dont le domaine est noté $D(A(t,x))$, pour tout $(t,x) \in I \times H$, et $f : I \times I \times H \to H$ est une application univoque.

Notre problème généralise le problème intégro-différentiel avec des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps $A(t)$

$$(\mathcal{IDP}_{A(t)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \displaystyle\int_{T_0}^t f(t,s,u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(T_0) = u_0 \in D(A(T_0)), \end{cases}$$

voir [27]. Nous nous proposons donc d'étudier un cas plus général, c'est-à-dire lorsque l'opérateur dépend à la fois des variables du temps et de l'état.

Dans notre développement, nous utilisons le théorème du point fixe de Schauder (voir aussi [3]) pour établir notre résultat principal d'existence. Pour cela, nous utilisons l'unicité de la solution de $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$ et une estimation de la dérivée. Cependant, les articles [50, 67] ont adopté une méthode de discrétisation pour discuter le cas où une application $f(\cdot,\cdot)$ est considérée au lieu de la perturbation intégrale.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous traitons le problème de contrôle optimal

$$(\mathcal{OCP}) \qquad \min \phi[u,a,b] = \phi_1(u(T)) + \int_0^T \phi_2(t,u(t),a(t),b(t),\dot{u}(t),\dot{a}(t),\dot{b}(t))dt,$$

sur l'ensemble des applications de contrôle $(a(\cdot),b(\cdot))$ et les solutions associées $u(\cdot)$ du problème contrôlé

$$(\mathcal{CP}_{a,b}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,a(t))u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t,s,b(s),u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ \quad u(t) \in D(A(t,a(t)))\ t \in [0,T], \\ (a(\cdot),b(\cdot)) \in W^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^{n+m}), \\ a(0) = a_0,\ u(0) = u_0 \in D(A(0,a_0)), \end{cases}$$

où la fonction du coût $\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ et le coût de fonctionnement $\phi_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{4n+2m} \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfont à des conditions appropriées.

Cette étude est motivée par les deux exemples suivants : le premier consiste à minimiser une fonctionnelle de type Bolza soumise à l'inclusion différentielle contrôlée de la forme

$$(\mathcal{CP}_{x,a,b}) \quad -\dot{u}(t) \in N_{C(x(t))}(u(t)) + f_1(a(t),u(t)) + \int_0^t f_2(b(s),u(s))ds \text{ p.p. } t \in [0,T],$$

où $A(t,x(t)) = N_{C(x(t))}$ est le cône normal d'un ensemble mobile $C(x(t))$, $(x(\cdot),a(\cdot),b(\cdot))$ sont les contrôles intervenant dans les ensembles mobiles, les perturbations additives, et la partie intégrale de la dynamique de la rafle (voir [13]). Le deuxième exemple concerne un problème d'optimisation soumis à l'inclusion différentielle contrôlée décrite par

$$(\mathcal{CP}_{x,a}) \quad -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(a(t),u(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T],$$

où $C(t) = C + x(t)$ et $(x(\cdot),a(\cdot))$ sont des applications de contrôle (voir [23]).
La nouveauté du problème considéré $(\mathcal{OCP})$ est le fait que nous minimisons sur l'ensemble des solutions d'une inclusion intégro-différentielle contrôlée, où les contrôles agissent à la fois dans l'état de l'opérateur (dépendant du temps et de l'état) et dans la perturbation intégrale.

Ce travail est divisé en trois parties : Dans le Chapitre 1, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires. Dans le Chapitre 2, nous nous concentrons sur le résultat d'existence et d'unicité du système couplé $(\mathcal{P}_{f,g})$. Ensuite, nous montrons que le problème de minimisation soumis au système contrôlé $(\mathcal{CS}_{\psi,\phi})$ admet une solution optimale. Dans le Chapitre 3, nous discutions $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$ et nous développons le cas $(\mathcal{IDP}_{A(t,u)})$. Ensuite, nous appliquons les résultats obtenus pour montrer que $(\mathcal{CP}_{a,b})$ est bien posé et nous établissons l'existence de solutions optimales à $(\mathcal{OCP})$. À la fin de cette thèse, nous proposons quelques perspectives.

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire LMPA, Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel.

Le Chapitre 2 et 3 ont fait l'objet de deux publications internationales dans le journal Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana [43], et dans le journal CUBO Mathematical Journal [44] respectivement.

Notations générales et espaces usuels

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels positifs.
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $[-\infty, +\infty]$.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels.
I	$[0, T]$ $(T > 0)$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
E	un espace vectoriel normé réel noté encore $(E, \|\cdot\|_E)$.
E'	le dual topologique de E.
H	un espace de Hilbert réel.
(Ω, Σ)	un espace mesurable.
I_H	opérateur identité de H.
$\lvert\cdot\rvert$	la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	le produit scalaire de H.
$\|\cdot\|$	la norme de H.
$\overline{B}_H$	la boule unité fermée de H.
$\overline{B}_H[u_0, r]$	la boule fermée de H de centre $u_0 \in H$ et de rayon $r > 0$.
$\overline{A}$	l'adhérence de A.
$co(A)$	l'enveloppe convexe de A.
$\overline{co}(A)$	l'enveloppe convexe fermée de A.
$\rightharpoonup$	désigne la convergence faible.
$\to$	désigne la convergence forte.
$\sigma\big(E, E'\big)$	la topologie faible sur E.
$\dot{u}(t)$	la dérivée de u au point t.
ssi	si et seulement si.
p.p	presque partout.
resp.	respectivement.
s.c.i	semi-continu inférieurement.
s.c.s	semi-continu supérieurement.
$L^p_H(I)$	l'espace des applications mesurables u définies sur I à valeurs dans H telles que $\int_0^T \|u(t)\|^p dt < +\infty$ muni de la norme

$$\big\|u\big\|_{L^p_H(I)} = \left(\int_0^T \big\|u(t)\big\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

$L^\infty_H(I)$	l'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty_H(I)} = \inf\big\{c \geq 0, \quad \|u(t)\| \leq c \ p.p\big\}.$$

$\mathcal{C}_H(I)$ l'espace des applications continues définies sur I à valeurs dans H muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} \|u(t)\|.$$

$W^{1,2}(I, H)$ l'espace des fonctions absolument continues u de I dans H avec des dérivées $\dot{u}$ dans $L^2_H(I)$.

δ_A la fonction indicatrice d'un ensemble A, définie par

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

δ^*_A la fonction support d'un ensemble A, définie sur E' par

$$\delta^*_A(x) = \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle \quad \forall x \in E'.$$

$\mathbf{1}_A(x)$ la fonction caractéristique de A, définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$d(\cdot, A)$ la fonction distance de A, définie par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \; \forall x \in H.$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons les notations, les définitions et les résultats de base que nous allons utiliser dans les Chapitres 2 et 3 de cette thèse.

1.1 Continuité des applications

On considère un espace métrique X et une fonction définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ notée f.

Définition 1.1. [46] *Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i au point $x_0 \in X$ ssi*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Définition 1.2. [46] *Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.s au point $x_0 \in X$ ssi*

$$f(x_0) \geq \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Proposition 1.3. [46] *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

- *f est s.c.i sur X ssi f est s.c.i en tout point de X.*
- *f est s.c.s sur X ssi f est s.c.s en tout point de X.*
- *f est continue au point x_0 ssi f est s.c.i et s.c.s au point x_0.*

Définition 1.4. [46] *Soient (Y, d), $(Z, \widetilde{d})$ deux espaces métriques. On dit que $f : Y \to Z$ est continue au point $a \in Y$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in Y \ :\ d(x, a) < \delta \Rightarrow \widetilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.5. [46] *Un sous-ensemble S de l'espace des fonctions définies de (X, d) dans $(Y, \widetilde{d})$ est dit équi-continu au point a dans X si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ \forall g \in S\ :\ (d(x,a) < \eta) \Rightarrow \left(\widetilde{d}(g(x), g(a)) < \varepsilon\right).$$

L'ensemble S est équi-continu si il est équi-continu en tout point de X.

Définition 1.6. [4] *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to H$ une application. Alors f est dite absolument continue ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_j, b_j]$, on a*

$$\sum_{j\geq 0}(b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j\geq 0} \|f(b_j) - f(a_j)\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.7. [4] *Une fonction $f : [a,b] \to H$ est absolument continue ssi il existe une fonction intégrable $v : [a,b] \to H$ telle que pour tout $t \in [a,b]$*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)dt,$$

dans ce cas, f est dérivable presque partout et sa dérivée $\dot{f} = v$ p.p.

1.2 Ensembles et fonctions convexes

Soit X un espace vectoriel et A un sous-ensemble de X.

Définition 1.8. [18] *On dit que A est convexe ssi pour tous $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Définition 1.9. [4] *L'enveloppe convexe $co(A)$ de A est l'intersection de tous les sous ensembles convexes de X contenant A.*

Définition 1.10. [4] *On appelle enveloppe convexe fermée de A, que l'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de X contenant A.*

Définition 1.11. [68] *L'ensemble Δ_n défini par*

$$\Delta_n = \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n :\ \lambda_i \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

est appelé le simplexe de $\mathbb{R}^n$ et c'est un ensemble convexe fermé.

Proposition 1.12. [68] *On peut exprimer l'enveloppe convexe de A comme suit*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ n \geq 1, \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \Delta_n, \ x_1, \cdots, x_n \in A \right\}.$$

Proposition 1.13. [68] *Soit A un sous ensemble non vide de X. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \{ x \in X : \ \langle y, x \rangle \leq \delta_A^*(x) \ \forall y \in X' \}.$$

Définition 1.14. [10] *On dit que $f : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est propre ssi pour tout $x \in X$, $f(x) \neq -\infty$ et il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \neq +\infty$.*

Définition 1.15. [10] *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

- *On appelle domaine effectif de f, l'ensemble*

$$dom(f) = \big\{ x \in X : \quad f(x) < +\infty \big\}.$$

- *On appelle épigraphe de f, l'ensemble*

$$epi(f) = \{ (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq \lambda \}.$$

Définition 1.16. [10] *On dit que $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe ssi pour tous $x, y \in dom(f)$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Proposition 1.17. [10] *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors,*

- *$dom(f)$ est convexe si f est une fonction convexe.*
- *f est une fonction convexe si son épigraphe est convexe de $X \times \mathbb{R}$.*
- *f est une fonction propre ssi $dom(f) \neq \emptyset$.*

1.3 Topologie faible

Définition 1.18. [18] *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé réel et E' son dual topologique muni de la norme*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \big| \langle f, x \rangle \big|,$$

où l'on note $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$.
Soit $f \in E'$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f parcourt E', on obtient une famille de fonctions $(\varphi_f)_{f\in E'}$. On appelle la topologie faible sur E, la topologie la moins fine sur E rendant continues les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ et on la note $\sigma(E,E')$.

Proposition 1.19. [18] *Soit $(x_n)_n$ un suite de points de E, et $x\in E$ et soit $(f_n)_n\subset E'$. Alors*

- *Si $x_n\longrightarrow x$ alors $x_n\rightharpoonup x$.*
- *$x_n\rightharpoonup x\Leftrightarrow\big\langle f,x_n\big\rangle\longrightarrow\big\langle f,x\big\rangle$ pour tout $f\in E'$.*
- *Si $x_n\rightharpoonup x$ et $f_n\longrightarrow f$ alors $\big\langle f_n,x_n\big\rangle\longrightarrow\big\langle f,x\big\rangle$ dans $\mathbb{R}$.*
- *Si $x_n\rightharpoonup x$ alors $(\|x_n\|_E)_n$ est bornée et $\|x\|\leq\liminf\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|_E$.*

1.4 Multi-applications

1.4.1 *Premières définitions*

Définition 1.20. [4] *Soient X,Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application toute applications G définie sur X à valeurs dans $P(Y)$, telle que $P(Y)$ est la famille de tous les ensembles de Y, et on note $G:X\longrightarrow P(Y)$ ou bien $G:X\longrightarrow 2^Y$ ou bien $G:X\rightrightarrows Y$.*

Définition 1.21. [4] *Soit $G:X\rightrightarrows Y$ une multi-application. On définit*

- *Le domaine de G, noté $\mathrm{D}(G)$, l'ensemble*
$$\mathrm{D}(G)=\big\{x\in X;\ G(x)\neq\emptyset\big\}.$$
- *Le graphe de G, noté $Gr(G)$, le sous ensemble de $X\times Y$ défini par*
$$Gr(G)=\big\{(x,y)\in\mathrm{D}(G)\times Y;\ y\in G(x)\big\}.$$
- *Le rang de G, noté $R(G)$, l'ensemble*
$$R(G)=\big\{y\in Y;\ \exists x\in\mathrm{D}(G),\ y\in G(x)\big\}.$$

Définition 1.22. [31] *Soit $G:X\rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de G toute fonction $g:X\to Y$ telle que $g(x)\in G(x)$ pour tout $x\in X$.*

Définition 1.23. [9] *Soient* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré fini et* X *un espace de Banach séparable. Soit* $G : \Omega \rightrightarrows X \setminus \{0\}$ *une multi-application et* $1 \leq p \leq \infty$. *On définit l'ensemble*

$$S_G^p = \{g \in L_X^p(\Omega) : \ g(\omega) \in G(\omega) \ \mu\text{−p.p. } \omega \in \Omega\},$$

où $L_X^p(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* $f : \Omega \to X$ *qui sont de puissance* p μ*-intégrables.*

Proposition 1.24. [9] *L'ensemble* S_G^p *est non vide ssi*

$$\inf\{\|u\|_X : \ u \in G(\omega)\} \leq \varphi(\omega) \ \mu\text{−p.p. } \omega \in \Omega$$

avec $\varphi \in L_{R_+}^p(\Omega)$.
L'ensemble S_G^p *est fermé (resp. convexe) ssi pour* μ*-p.p.* $\omega \in \Omega$ *l'ensemble* $F(\omega)$ *est fermé (resp. convexe).*

1.4.2 Continuité et mesurabilité des multi-applications

Définition 1.25. [31] *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques et* $G : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application.*

- *On dit que* G *est s.c.s au point* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* $U \subset Y$ *contenant* $G(x_0)$, *il existe un voisinage* $V \subset X$ *de* x_0 *tel que* $G(V) \subset U$.
- *On dit que* G *est s.c.i au point* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* $U \subset Y$ *vérifiant* $G(x_0) \cap U \neq \emptyset$, *il existe un voisinage* $V \subset X$ *de* x_0 *tel que* $G(x) \cap U \neq \emptyset$, *pour tout* $x \in V$.
- *On dit que* G *est continue au point* x_0 *ssi elle est s.c.s et s.c.i au point* x_0.

Proposition 1.26. [31] *Soit* $G : X \rightrightarrows Y$. *Alors, on a*

- G *est s.c.s sur* X *ssi* G *est s.c.s en tout point de* X.
- G *est s.s.i sur* X *ssi* G *est s.c.i en tout point de* X.

Définition 1.27. [31] *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable et* X *un espace métrique. Soit* $G : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application. On dit que* G *est* Σ*-mesurable si pour tout ouvert* V *de* X, $G^{-1}(V) \in \Sigma$, *avec*

$$G^{-1}(V) = \{t \in \Omega; \ G(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

On termine cette section par rappeler un résultat de [24], adapté au contexte étudié dans cette thèse.

Théorème 1.28. *Soit $G : [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs convexes compactes, alors la multi-application intégrale*

$$\int_0^T G(s)ds = \left\{ \int_0^T g(s)ds,\ g \in S_G^1 \right\}$$

est convexe compacte.

1.5 Opérateurs maximaux monotones

1.5.1 Définitions et propriétés

Définition 1.29. [5] *L'opérateur $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est dit monotone, si*

$$\forall (x_i, y_i) \in Gr(A),\ i = 1, 2 :\ \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Définition 1.30. [5] *Un opérateur monotone $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone, si son graphe ne peut être contenu strictement dans le graphe de tout autre opérateur monotone.*

Proposition 1.31. [5] *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *A est maximal monotone.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, $R(I_H + \lambda A) = H$.*

Définition 1.32. [20] *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors pour tout $\lambda > 0$, la résolvante de A est un opérateur univoque défini par*

$$J_\lambda^A = (I_H + \lambda A)^{-1}.$$

L'approximation Yosida de A est définie par

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(I_H - J_\lambda^A\right).$$

Définition 1.33. [4] *Soit A un opérateur maximal monotone de H. Alors, pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$, Ax est un ensemble non vide, fermé et convexe. De plus, il existe un élément unique $A^0(x) \in Ax$ (l'élément de norme minimale) qui est la projection de 0 sur Ax, c'est-à-dire,*

$$A^0(x) = Proj_{Ax}(0), \quad \|A^0(x)\| = \inf_{z \in Ax} \|z\| = d(0, Ax).$$

Proposition 1.34. [20] *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors*

1. *J_λ^A et A_λ sont univoques et définis sur tout l'espace H.*
2. *$J_\lambda^A x \in \mathrm{D}(A)$ et $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda^A x)$, $\forall x \in H$.*
3. *A_λ est du type Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$ et est maximal monotone.*
4. *$\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0(x)\|$ pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$.*

Lemme 1.35. [49] *Soit A un opérateur maximal monotone de H. Si $x \in \overline{\mathrm{D}(A)}$ et $y \in H$ sont tels que*

$$\langle A^0(z) - y, z - x\rangle \geq 0 \ \ \forall z \in \mathrm{D}(A),$$

alors $x \in \mathrm{D}(A)$ et $y \in A(x)$.

1.5.2 Pseudo-distance de Vladimirov

Définition 1.36. [71] *Soient $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ et $B : D(B) \subset H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. Alors, on note $\mathrm{dis}(A, B)$ la pseudo-distance entre A et B définie par*

$$\mathrm{dis}(A,B) = \sup\left\{\frac{\langle y - y', x' - x\rangle}{1 + ||y|| + ||y'||} : \ (x, y) \in Gr(A),\ (x', y') \in Gr(B)\right\}. \tag{1.1}$$

Lemme 1.37. [71] *Soient $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ et $B : D(B) \subset H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. Alors*

- $\mathrm{dis}(A, B) \in [0, +\infty]$.
- $\mathrm{dis}(A, B) = 0$ *ssi* $A = B$.
- $\mathrm{dis}(A, B) = \mathrm{dis}(B, A)$.

Lemme 1.38. [49] *Soient A_n $(n \in \mathbb{N})$, A des opérateurs maximaux monotones de H tels que $\mathrm{dis}(A_n, A) \to 0$. Supposons aussi que $x_n \in \mathrm{D}(A_n)$ avec $x_n \to x$ et $y_n \in A_n(x_n)$ avec $y_n \rightharpoonup y$ pour certains $x, y \in H$. Alors $x \in \mathrm{D}(A)$ et $y \in A(x)$.*

Lemme 1.39. [49] *Soient A, B des opérateurs maximaux monotones de H. Alors, on a*

- *pour $\lambda > 0$ et $x \in \mathrm{D}(A)$*

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|A^0(x)\| + \mathrm{dis}(A, B) + \sqrt{\lambda\big(1 + \|A^0(x)\|\big)dis(A, B)},$$

- *pour $\lambda > 0$ et $x, x' \in H$*

$$\|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(x')\| \leq \|x - x'\|.$$

Lemme 1.40. [49] *Soient* A_n $(n \in \mathbb{N})$, A *des opérateurs maximaux monotones de* H *tels que* $\operatorname{dis}(A_n, A) \to 0$ *et* $\|A_n^0(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$ *pour certains* $c > 0$, *tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathrm{D}(A_n)$. *Alors pour tout* $z \in \mathrm{D}(A)$ *il existe une suite* (z_n) *telle que*

$$z_n \in \mathrm{D}(A_n), \quad z_n \to z \ \text{ et } \ A_n^0(z_n) \to A^0(z).$$

1.6 Quelques résultats utiles

Rappelons d'abord quelques résultats sur la compacité.

Caractérisaion 1.41. *Soient* X *un espace métrique et* S *un sous-ensemble de* X.
L'ensemble S *est relativement compact ssi de toute suite* (u_n) *de* S, *on peut extraire une sous-suite qui converge dans* X.
L'ensemble S *est compact ssi de toute suite* (u_n) *de* S, *on peut extraire une sous-suite qui converge dans* S.

Comme conséquence de ce qui précède, on a :

Remarque 1.42. *L'ensemble* S *est compact ssi* S *est relativement compact et fermé.*

Proposition 1.43. *Tout fermé inclus dans un compact est compact.*

Définition 1.44 (Boule-compact). *Soit* E *un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble* $D \subset E$ *est boule-compact si son intersection avec toute boule fermée de* E *est compacte.*

Théorème 1.45. [18] *Soit* X *un espace de Banach. Alors* X *est réflexif ssi* $\overline{B}_X$ *est compacte pour la topologie* $\sigma(X, X')$.

On énonce le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 1.46 (Théorème du point fixe de Schauder). [41] *Soit* C *un sous-ensemble non vide convexe fermé et borné d'un espace de Banach et soit* $f : C \to C$ *une application continue. Si* $f(C)$ *est relativement compact, alors* f *admet un point fixe.*

On rappelle le théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.47 (**Théorème d'Ascoli-Arzelà**). [4] *Soient X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et S un sous-ensemble de l'espace des applications continues définies de X dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors S est relativement compact ssi S est équi-continu et $S(x)$ est relativement compact, pour tout $x \in X$, où*

$$S(x) = \{g(x), \quad g \in S\}, \; \forall x \in X.$$

Théorème 1.48. [19] *Soit X un espace de Banach réflexif. Soit (x_n) une suite bornée dans X. Alors, il existe une sous suite (x_{n_k})qui converge faiblement dans X.*

Théorème 1.49 (**Théorème de Dunford-Pettis**). [59]*Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini, X un espace métrique et $(x_n(\cdot))$ une suite bornée dans $L^1_X(\Omega)$, où $L^1_X(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to X$ qui sont μ-intégrables. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$(x_n(\cdot))$ est uniformément intégrable sur X.*
2. *Pour chaque sous-suite de $(x_n(\cdot))$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^1_X(\Omega)$.*

Nous rappelons la définition classique de la convergence au sens de Komlós.

Définition 1.50. [29] *Une suite (u_n) dans $L^1_H(I)$ converge au sens de Komlós vers une fonction $u \in L^1_H(I)$ si pour toute sous-suite (v_n) de (u_n), on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_j(t) = u(t) \quad \text{p.p.}$$

Nous avons également besoin du proposition suivant qui permet de déduire la relation entre la convergence au sens de Komlós et les suites bornées dans $L^1_H(I)$.

Proposition 1.51. [47] *Soit (u_n) une suite bornée dans $L^1_H(I)$. Alors, il existe une sous-suite (v_n) de (u_n) et $u \in L^1_H(I)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j(t) = u(t) \quad \text{p.p.},$$

pour toute sous-suite (w_n) de (v_n).

Théorème 1.52 (**Théorème de Banach-Mazur**). [18] *Soit E un espace de Banach, et soit (u_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers u. Alors, il existe une* *suite* (z_n) *de combinaisons convexes des* $(u_k)_{k\geq n}$ *(i.e.* $z_n \in co\{u_k,\ k \geq n\}$*) qui converge fortement vers* u *telle que*

$$u \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{u_k,\ k \geq n\}.$$

Définition 1.53. [58] *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une suite* (x_n) *dans* X *est dite une suite de Cauchy si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad (\forall p, q \geq N_\varepsilon) \Rightarrow (d(x_p, x_q) < \varepsilon)\,.$$

Proposition 1.54. [58] *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Alors toute suite de Cauchy converge.*

Théorème 1.55 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue). [18] *Soit* (f_n) *une suite de fonctions dans* $L^p_H(I)$ *telle que* $1 \leq p < +\infty$

1. *la suite* $(f_n)_n$ *converge presque partout vers* f *sur* I*,*
2. *il existe une fonction* $g(\cdot) \in L^p_{\mathbb{R}_+}(I)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n(t)\| \leq g(t) \quad p.p.\ t \in I.$$

Alors $f \in L^p_H(I)$ *et*

$$\int_I \|f_n(t) - f(t)\|^p dt \to 0, \ \textit{lorsque}\ n \to \infty.$$

Théorème 1.56 (Théorème de différentiation de Lebesgue). [48] *Pour toute fonction intégrable au sens de Lebesgue* g *sur* $\mathbb{R}$*, on a pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} g(\tau)d\tau = g(t).$$

La version discrète du lemme de type Gronwall est donnée comme suit :

Lemme 1.57. [49] *Soient* (α_i), (β_i), (γ_i) *et* (η_i) *des suites de nombres réels positifs telles que*

$$\eta_{j+1} \leq \alpha_j + \beta_j(\eta_0 + \cdots + \eta_{j-1}) + (1 + \gamma_j)\eta_j \text{ pour } j \in \mathbb{N}.$$

Alors, on a

$$\eta_i \leq \left(\eta_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1}(k\beta_k + \gamma_k)\right) \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*.$$

Nous terminons cette section en rappelant l'inégalité différentielle de type Gronwall.

Lemme 1.58 (Inégalité différentielle de type Gronwall). [14] *Soit $y : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction absolument continue et soient $h_1, h_2, z : I \to \mathbb{R}_+$ des fonctions intégrables. Supposons qu'il y ait un réel $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\dot{y}(t) \leq z(t) + \varepsilon + h_1(t)y(t) + h_2(t)(y(t))^{\frac{1}{2}} \int_0^t (y(s))^{\frac{1}{2}} ds \text{ p.p. } t \in I.$$

Alors, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}(y(t))^{\frac{1}{2}} &\leq (y(0)+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\int_0^t (h(s)+1)ds\right) + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}\int_0^t \exp\left(\int_s^t (h(r)+1)dr\right)ds \\ &+ 2\left[\left(\int_0^t z(s)ds + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \exp\left(\int_0^t (h(r)+1)dr\right)\right] \\ &+ 2\int_0^t \Big(h(s)+1\Big) \exp\left(\int_s^t (h(r)+1)dr\right)\left(\int_0^s z(r)dr + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} ds,\end{aligned}$$

où $h(t) = \max\left(\frac{h_1(t)}{2}, \frac{h_2(t)}{2}\right)$ p.p. $t \in I$.

Chapitre 2

Problème de minimisation soumis à un système couplé par des opérateurs maximaux monotones

2.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre un problème d'optimisation soumis à un système contrôlé avec des opérateurs maximaux monotones et une perturbation intégrale. Dans la première section, nous nous intéressons au système dynamique formulé par

$$(\mathcal{P}_{f,g}) \qquad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ -\dot{x}(t) \in B(t)x(t) + g(t,u(t),x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u(t),x(t)) \in \mathrm{D}\,(A(t)) \times \mathrm{D}\,(B(t)), \quad t \in I, \\ (u(0),x(0)) = (u_0,x_0), \end{cases}$$

où les opérateurs maximaux monotones $A(t)$ et $B(t)$ définis sur un espace de Hilbert réel séparable H, varient au sens de la pseudo-distance (voir (h_A^1) et (h_B^1)) avec $f : I\times I\times H\times H \to H$ et $g : I\times H\times H \to H$ sont des perturbations univoques. Nous procédons par une approche de discrétisation pour montrer le résultat d'existence et d'unicité à $(\mathcal{P}_{f,g})$, sans aucune hypothèse de compacité.

Dans la deuxième section, on considère le problème de minimisation du type

$$\min_{(\psi,\phi)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \int_0^T L(t, u_\psi(t), \dot{x}_\phi(t))dt,$$

où (u_ψ, x_ϕ) est la solution associée au contrôle $(\psi, \phi) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ du système contrôlé

$$(\mathcal{CS}_{\psi,\phi}) \quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, \psi(t))u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ -\dot{x}(t) \in B(t, \phi(t))x(t) + g(t, u(t), x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u(t), x(t)) \in \mathrm{D}\left(A(t, \psi(t))\right) \times \mathrm{D}\left(B(t, \phi(t))\right), \quad t \in I, \\ (u(0), x(0)) = (u_0, x_0) \in \mathrm{D}\left(A(0, \psi(0))\right) \times \mathrm{D}\left(B(0, \phi(0))\right). \end{cases}$$

La fonctionnelle du coût $L : I \times H \times H \to [0, +\infty[$ est semi-continu inférieurement, et les ensembles $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont construits convenablement. Les opérateurs $A(t, z)$ et $B(t, z)$ sont maximaux monotones et varient au sens de la pseudo-distance de Vladimirov (voir (H_A^1) et (H_B^1)) dont les domaines sont notés respectivement $\mathrm{D}\left(A(t, z)\right)$ et $\mathrm{D}\left(B(t, z)\right)$, pour $(t, z) \in I \times H$.

2.2 Étude du système couplé par des opérateurs maximaux monotones

Dans notre étude, nous utiliserons les hypothèses suivantes.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : \mathrm{D}\left(A(t)\right) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone tel que

(h_A^1) il existe une fonction $\alpha \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ qui est positive et croissante sur $[0, T[$ avec $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(T) < +\infty$ telle que

$$\mathrm{dis}\left(A(t), A(s)\right) \le |\alpha(t) - \alpha(s)|, \ \forall t, s \in I;$$

(h_A^2) il existe un nombre réel positif c_1 tel que

$$\|A^0(t)x\| \le c_1(1 + ||x||) \ \text{ pour } \ t \in I, \ x \in \mathrm{D}\left(A(t)\right).$$

Soit pour tout $t \in I$, $B(t) : \mathrm{D}\left(B(t)\right) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone tel que

(h_B^1) il existe une fonction $\beta \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ qui est positive et croissante sur $[0, T[$ avec $\beta(0) = 0$, $\beta(T) < +\infty$ telle que

$$\mathrm{dis}\left(B(t), B(s)\right) \le |\beta(t) - \beta(s)|, \ \forall t, s \in I;$$

(h_B^2) il existe un nombre réel positif c_2 tel que

$$\|B^0(t)x\| \le c_2(1 + ||x||) \ \text{ pour } \ t \in I, \ x \in \mathrm{D}\left(B(t)\right).$$

Soit $f : I \times I \times H \times H \to H$ une application telle que

(H_f^1) l'application $f(\cdot,\cdot,x,u)$ est mesurable pour chaque $(x,u) \in H \times H$, $f(t,s,\cdot,\cdot)$ est continue pour chaque $(t,s) \in I \times I$ et il existe une constante réelle positive m_f telle que pour tout $(t,s,x,u) \in I \times I \times H \times H$, on a

$$||f(t,s,x,u)|| \leq m_f(1 + ||x|| + ||u||), \tag{2.1}$$

(H_f^2) pour chaque $\eta > 0$, il existe une fonction $\varphi_{f,\eta}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour tout $t \in I$ et tout $(x,u),(y,v) \in \overline{B}_H[0,\eta] \times \overline{B}_H[0,\eta]$, on a

$$\|f(t,s,x,u) - f(t,s,y,v)\| \leq \varphi_{f,\eta}(t)\left(\|x-y\| + \|u-v\|\right). \tag{2.2}$$

Soit $g : I \times H \times H \longrightarrow H$ une application telle que

(H_g^1) l'application $g(\cdot,x,u)$ est mesurable sur I, pour chaque $(x,u) \in H \times H$, $g(t,\cdot,\cdot)$ est continue sur $H \times H$, pour chaque $t \in I$ et il existe une constante réelle positive m_g telle que pour tout $(t,x,u) \in I \times H \times H$, on a

$$\|g(t,x,u)\| \leq m_g(1 + \|x\| + \|u\|), \tag{2.3}$$

(H_g^2) pour chaque $\eta > 0$, il existe une fonction $\varphi_{g,\eta}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour tout $t \in I$ et tout $(x,u),(y,v) \in \overline{B}_H[0,\eta] \times \overline{B}_H[0,\eta]$, on a

$$\|g(t,x,u) - g(t,y,v\| \leq \varphi_{g,\eta}(t)\left(\|x-y\| + \|u-v\|\right). \tag{2.4}$$

Théorème 2.1. *Supposons que pour tout $t \in I$, $A(t) : \mathrm{D}(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps satisfaisant (h_A^1)-(h_A^2). Supposons que pour tout $t \in I$, $B(t) : \mathrm{D}(B(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps satisfaisant (h_B^1) -(h_B^2). Soient $f : I \times I \times H \times H \to H$ et $g : I \times H \times H \to H$ deux applications satisfaisant (H_f^1)-(H_f^2) et (H_g^1)-(H_g^2) respectivement. Alors, pour tout $(u_0,x_0) \in \mathrm{D}(A(0)) \times \mathrm{D}(B(0))$, il existe une solution unique absolument continue $(u,x) : I \to H \times H$ au système dynamique $(\mathcal{P}_{f,g})$. De plus, les inégalités suivantes sont vraies*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq k_1(1 + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)) \quad et \quad \|\dot{x}(t)\| \leq k_2(1 + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)) \text{ pour p.p. } t \in I,$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles positives dépendantes de $\|u_0\|$, $\|x_0\|$, c_1, c_2, α, β, T, m_f, m_g.

Démonstration. Partie 1 : Existence de la solution. Nous procédons dans la démonstration en utilisant un schéma de discrétisation.

Étape 1. Construction des suites (u_n) et (x_n).

Pour tout $n \geq 1$, considérons une partition $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_i^n < t_{i+1}^n < \cdots < t_n^n = T$

de l'intervalle I. On définit pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$

$$h_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \ \alpha_{i+1}^n = \alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n), \ \beta_{i+1}^n = \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n), \tag{2.5}$$

et on suppose que

$$h_i^n \leq h_{i+1}^n, \ \alpha_i^n \leq \alpha_{i+1}^n, \ \beta_i^n \leq \beta_{i+1}^n.$$

Soit γ l'application définie par $\gamma(t) = t + \alpha(t) + \beta(t)$ pour tout $t \in I$. Puisque α et β sont absolument continus, alors, on choisit cette partition telle que pour tout $i = 0, 1, \cdots, n-1$

$$\sigma_{i+1}^n = h_{i+1}^n + \alpha_{i+1}^n + \beta_{i+1}^n \leq \frac{\gamma(T)}{n} = l_n, \tag{2.6}$$

où $l_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Posons $u_0^n = u_0 \in \mathrm{D}\,(A(0))$, $x_0^n = x_0 \in \mathrm{D}\,(B(0))$ et pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$u_{i+1}^n = J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n) ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n) ds \right\} d\tau \right), \tag{2.7}$$

$$x_{i+1}^n = J_{h_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n)} \left(x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(\tau, u_i^n, x_i^n) d\tau \right), \tag{2.8}$$

où

$$J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)} = \left(I_H + h_{i+1}^n A(t_{i+1}^n) \right)^{-1},$$

$$J_{h_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n)} = \left(I_H + h_{i+1}^n B(t_{i+1}^n) \right)^{-1}.$$

Observons par construction et Proposition 1.34 (2) que

$$u_{i+1}^n \in \mathrm{D}\,(A(t_{i+1}^n)) \ \text{ et } \ x_{i+1}^n \in \mathrm{D}\,(B(t_{i+1}^n)). \tag{2.9}$$

Alors, d'après (2.7) et (2.8), on a les deux inclusions

$$u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n) ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n) ds \right\} d\tau \in u_{i+1}^n + h_{i+1}^n A(t_{i+1}^n) u_{i+1}^n,$$

$$x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(\tau, u_i^n, x_i^n) d\tau \in x_{i+1}^n + h_{i+1}^n B(t_{i+1}^n) x_{i+1}^n,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1}^n} \in & A(t_{i+1}^n) u_{i+1}^n \\ & + \frac{1}{h_{i+1}^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n) ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n) ds \right\} d\tau, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$-\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{h_{i+1}^n} \in B(t_{i+1}^n)x_{i+1}^n + \frac{1}{h_{i+1}^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(\tau, u_i^n, x_i^n)d\tau. \tag{2.11}$$

Le Lemme 1.39 permet de simplifier comme suit

$$\begin{aligned}
&\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&= \left\| J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left\{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n)ds\right\}d\tau\right) - u_i^n\right\| \\
&\le \left\| J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left\{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n)ds\right\}d\tau\right)\right. \\
&\quad \left. - J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n)\right\| + \left\| J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n) - u_i^n\right\| \\
&\le \left\| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left\{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n)ds\right\}d\tau\right\| + h_{i+1}^n||A^0(t_i^n)u_i^n|| \\
&\quad + \mathrm{dis}\,(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) + \sqrt{h_{i+1}^n(1 + ||A^0(t_i^n)u_i^n||)\mathrm{dis}\,(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))}. \\
&\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left(\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \|f(\tau, s, u_j^n, x_j^n)\|ds + \int_{t_i^n}^{\tau} \|f(\tau, s, u_i^n, x_i^n)\|ds\right)d\tau + h_{i+1}^n||A^0(t_i^n)u_i^n|| \\
&\quad + \mathrm{dis}\,(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) + \sqrt{h_{i+1}^n(1 + ||A^0(t_i^n)u_i^n||)\mathrm{dis}\,(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))}.
\end{aligned}$$

Nous savons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$ et en utilisant (h_A^1), (h_A^2), (2.1), (2.5), pour tout $n \ge 1$ et $i = 0, 1, \cdots, n-1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left(\sum_{j=0}^{i-1} m_f\left(1 + \|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right)h_{j+1}^n + (\tau - t_i^n)m_f\left(1 + \|u_i^n\| + \|x_i^n\|\right)\right)d\tau \\
&\quad + h_{i+1}^n c_1(1 + \|u_i^n\|) + \alpha_{i+1}^n + \frac{h_{i+1}^n}{2}\left(1 + c_1(1 + \|u_i^n\|)\right) + \frac{1}{2}\alpha_{i+1}^n \\
&\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left(\sum_{j=0}^{i-1} m_f\left(1 + \|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right)h_{j+1}^n + h_{i+1}^n m_f\left(1 + \|u_i^n\| + \|x_i^n\|\right)\right)d\tau \\
&\quad + \frac{3}{2}c_1 h_{i+1}^n\|u_i^n\| + \frac{3}{2}c_1 h_{i+1}^n + \frac{1}{2}h_{i+1}^n + \frac{3}{2}\alpha_{i+1}^n.
\end{aligned}$$

En simplifiant à l'aide de (2.6), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \le & h_{i+1}^n\left(\sum_{j=0}^{i-1} m_f\left(1 + \|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right)h_{j+1}^n + h_{i+1}^n m_f\left(1 + \|u_i^n\| + \|x_i^n\|\right)\right) \\
& + \frac{3}{2}c_1 h_{i+1}^n\|u_i^n\| + \frac{3}{2}c_1 h_{i+1}^n + \frac{1}{2}h_{i+1}^n + \frac{3}{2}\alpha_{i+1}^n \\
\le & \sigma_{i+1}^n\left(\sum_{j=0}^{i-1} m_f\left(1 + \|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right)h_{j+1}^n + h_{i+1}^n m_f\left(1 + \|u_i^n\| + \|x_i^n\|\right)\right) \\
& + \frac{3}{2}c_1\sigma_{i+1}^n\|u_i^n\| + \frac{3}{2}c_1\sigma_{i+1}^n + 2\sigma_{i+1}^n,
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq &\sigma_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} m_f \left(\|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right) h_{j+1}^n + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + h_{i+1}^n m_f\right) \|u_i^n\| \\ &+ \sigma_{i+1}^n h_{i+1}^n m_f \|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i} m_f h_{j+1}^n + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + 2\right) \\ \leq &\sigma_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} m_f \left(\|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right) h_{j+1}^n + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + T m_f\right) \|u_i^n\| \\ &+ \sigma_{i+1}^n T m_f \|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n T m_f + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + 2\right),\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $h_{j+1}^n \leq T$ et $\sum_{j=0}^{i} h_{j+1}^n \leq T$ si nécessaire.

Alors,

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq &\sigma_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} m_f \left(\|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right) h_{j+1}^n + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + T m_f\right) \|u_i^n\| \\ &+ \sigma_{i+1}^n T m_f \|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n \left(T m_f + \frac{3}{2}c_1 + 2\right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n\| \leq &\sigma_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} m_f \left(\|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right) h_{j+1}^n + \left(1 + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + T m_f\right)\right) \|u_i^n\| \\ &+ \sigma_{i+1}^n T m_f \|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n \left(T m_f + \frac{3}{2}c_1 + 2\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Maintenant, d'après Lemme 1.39, on a

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \quad \leq \quad & \left\| J_{h_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n)} \left(x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(\tau, u_i^n, x_i^n) d\tau\right) - J_{h_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n)}(x_i^n) \right\| \\ & + \left\| J_{h_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n)}(x_i^n) - x_i^n \right\| \\ \leq \quad & \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} ||g(\tau, u_i^n, x_i^n)|| d\tau + h_{i+1}^n ||B^0(t_i^n) x_i^n|| + \mathrm{dis}\left(B(t_i^n), B(t_{i+1}^n)\right) \\ & + \sqrt{h_{i+1}^n (1 + ||B^0(t_i^n) x_i^n||) \mathrm{dis}\left(B(t_i^n), B(t_{i+1}^n)\right)}.\end{aligned}$$

Nous savons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ et par (h_B^1), (h_B^2), (2.3), (2.5), pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, 1, \cdots, n-1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq &h_{i+1}^n m_g (1 + \|u_i^n\| + \|x_i^n\|) + h_{i+1}^n c_2 (1 + \|x_i^n\|) + \beta_{i+1}^n \\ &+ \frac{h_{i+1}^n}{2} \left(1 + c_2 (1 + \|x_i^n\|)\right) + \frac{1}{2}\beta_{i+1}^n \\ \leq &h_{i+1}^n m_g \|u_i^n\| + h_{i+1}^n \left(m_g + \frac{3}{2}c_2\right) \|x_i^n\| + h_{i+1}^n \left(m_g + \frac{3}{2}c_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\beta_{i+1}^n.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (2.6), il s'ensuit que

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n m_g \|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n d_1 \|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n d_2, \tag{2.14}$$

où $d_1 = m_g + \frac{3}{2}c_2$ et $d_2 = m_g + \frac{3}{2}c_2 + 2$.
Ainsi,

$$\|x_{i+1}^n\| \leq (1 + \sigma_{i+1}^n d_1)\|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n m_g \|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n d_2. \tag{2.15}$$

La somme de (2.13) et (2.15), membre à membre donne

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &+ \|x_{i+1}^n\| \\
&\leq \sigma_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} m_f \left(\|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right) h_{j+1}^n + \left(1 + \sigma_{i+1}^n \left(\frac{3}{2}c_1 + Tm_f + m_g\right)\right) \|u_i^n\| \\
&\quad + (1 + \sigma_{i+1}^n (d_1 + Tm_f))\|x_i^n\| + \sigma_{i+1}^n \left(Tm_f + \frac{3}{2}c_1 + 2 + d_2\right) \\
&\leq m_f l_n^2 \sum_{j=0}^{i-1} \left(\|u_j^n\| + \|x_j^n\|\right) + \left(1 + l_n \left(\frac{3}{2}c_1 + Tm_f + d_1\right)\right) \left(\|u_i^n\| + \|x_i^n\|\right) \\
&\quad + l_n \left(Tm_f + \frac{3}{2}c_1 + 2 + d_2\right),
\end{aligned}$$

en utilisant (2.6).
Du Lemme 1.57, on trouve

$$\|u_i^n\| + \|x_i^n\| \leq M, \tag{2.16}$$

où

$$M = (\|x_0\| + \|u_0\| + (Tm_f + \frac{3}{2}c_1 + 2 + d_2)\gamma(T)) \exp\left(\frac{1}{2}m_f \gamma^2(T) + (\frac{3}{2}c_1 + Tm_f + d_1)\gamma(T)\right).$$

D'une part, notons de (2.12) et (2.16) que

$$\|u_i^n\| \leq k_1, \quad \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n k_1, \tag{2.17}$$

où $k_1 := \max\left(M, \left(2Tm_f + \frac{3}{2}c_1\right) M + Tm_f + \frac{3}{2}c_1 + 2\right)$.
D'autre part, de (2.14) et (2.16), il résulte

$$\|x_i^n\| \leq k_2, \quad \|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n k_2, \tag{2.18}$$

où $k_2 := \max(M, d_1 M + d_2)$.
On définit pour tout $n \geq 1$, les applications $u_n, x_n : I \to H$, pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$i \in \{0, \cdots, n-1\}$, par

$$
\begin{aligned}
u_n(t) = u_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Bigg(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n) ds \\
+ \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n) ds \Bigg\} d\tau \Bigg) - \int_{t_i^n}^{t} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n) ds \\
+ \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n) ds \Bigg\} d\tau, \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

$$
x_n(t) = x_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Bigg(x_{i+1}^n - x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(\tau, u_i^n, x_i^n) d\tau\Bigg) - \int_{t_i^n}^{t} g(\tau, u_i^n, x_i^n) d\tau, \qquad (2.20)
$$

avec $u_n(T) = u_n^n$, $x_n(T) = x_n^n$.

Observons que les applications u_n et x_n sont absolument continues sur I, avec $u_n(t_{i+1}^n) = u_{i+1}^n$ et $x_n(t_{i+1}^n) = x_{i+1}^n$. De plus, pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_n(t) =& \frac{1}{h_{i+1}^n}\Bigg(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n, x_j^n) ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n, x_i^n) ds \Bigg\} d\tau \Bigg) \\
&- \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(t, s, u_j^n, x_j^n) ds - \int_{t_i^n}^{t} f(t, s, u_i^n, x_i^n) ds, \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

$$
\dot{x}_n(t) = \frac{1}{h_{i+1}^n}\Bigg(x_{i+1}^n - x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(\tau, u_i^n, x_i^n) d\tau\Bigg) - g(t, u_i^n, x_i^n). \qquad (2.22)
$$

D'après (2.10) et (2.11), on écrit

$$
-\dot{u}_n(t) - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(t, s, u_j^n, x_j^n) ds - \int_{t_i^n}^{t} f(t, s, u_i^n, x_i^n) ds \in A(t_{i+1}^n) u_{i+1}^n \quad \text{p.p. } t \in I, \quad (2.23)
$$

$$
-\dot{x}_n(t) - g(t, u_i^n, x_i^n) \in B(t_{i+1}^n) x_{i+1}^n \quad \text{p.p. } t \in I. \qquad (2.24)
$$

En combinant (2.1), (2.6), (2.16), (2.17) et (2.19), on a pour tout $t \in [t_i^n, t_{+1}^n[$

$$
\begin{aligned}
&\|u_n(t) - u_i^n\| \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \|f(\tau, s, u_j^n, x_j^n)\| ds + \int_{t_i^n}^{\tau} \|f(\tau, s, u_i^n, x_i^n)\| ds \Bigg\} d\tau \\
&+ \int_{t_i^n}^{t} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \|f(\tau, s, u_j^n, x_j^n)\| ds + \int_{t_i^n}^{\tau} \|f(\tau, s, u_i^n, x_i^n)\| ds \Bigg\} d\tau
\end{aligned}
$$

alors,

$$
\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Bigg(m_f(1 + M) \sum_{j=0}^{i} h_{j+1}^n \Bigg) d\tau \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2T m_f h_{i+1}^n (1 + M) \\
&\leq \sigma_{i+1}^n k_1 + 2T m_f h_{i+1}^n (1 + M) \\
&\leq l_n(k_1 + 2T m_f (1 + M)) = l_n L_1, \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

où $L_1 = k_1 + 2Tm_f(1 + M)$.

Grâce à (2.3), (2.6), (2.18) et (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - x_i^n\| &\leq \|x_{i+1}^n - x_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(\tau, u_i^n, x_i^n)\| d\tau + \int_{t_i^n}^{t} \|g(\tau, u_i^n, x_i^n)\| d\tau \\ &\leq \|x_{i+1}^n - x_i^n\| + 2m_g h_{i+1}^n(1 + M) \\ &\leq \sigma_{i+1}^n k_2 + 2m_g h_{i+1}^n (1 + M) \\ &\leq l_n(k_2 + 2m_g(1 + M)) = l_n L_2, \end{aligned} \tag{2.26}$$

où $L_2 = k_2 + 2m_g(1 + M)$.

Maintenant, notons que pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq k_1\Big(\gamma(t) - \gamma(s)\Big) + (k_1 + 2L_1)l_n. \tag{2.27}$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors, de (2.6), (2.17) et (2.25)

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\| &\leq \|u_n(t) - u_j^n\| + \|u_j^n - u_i^n\| + \|u_i^n - u_n(s)\| \\ &\leq \|u_j^n - u_i^n\| + 2L_1 l_n \\ &\leq \sum_{l=0}^{j-i-1} \|u_{i+l+1}^n - u_{i+l}^n\| + 2L_1 l_n \\ &\leq k_1 \sum_{l=0}^{j-i-1} \sigma_{i+l+1}^n + 2L_1 l_n \\ &= k_1\Big(\gamma(t_j^n) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L_1 l_n \\ &\leq k_1\Big(\gamma(t) - \gamma(s) + \gamma(s) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L_1 l_n \\ &\leq k_1\Big(\gamma(t) - \gamma(s) + \gamma(t_{i+1}^n) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L_1 l_n \\ &\leq k_1\Big(\gamma(t) - \gamma(s)\Big) + k_1\sigma_{i+1}^n + 2L_1 l_n \\ &\leq k_1\Big(\gamma(t) - \gamma(s)\Big) + (k_1 + 2L_1)l_n. \end{aligned}$$

En justifiant de la même manière à l'aide de (2.6), (2.18) et (2.26), on obtient pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq k_2\Big(\gamma(t) - \gamma(s)\Big) + (k_2 + 2L_2)l_n. \tag{2.28}$$

D'une part, on observe de (2.1), (2.16), (2.17) et (2.21), que pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t)\| \leq & \frac{1}{h_{i+1}^n}\Bigg(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\Bigg\{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n}\|f(\tau,s,u_j^n,x_j^n)\|ds \\
& + \int_{t_i^n}^{\tau}\|f(\tau,s,u_i^n,x_i^n)\|ds\Bigg\}d\tau\Bigg) + \sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n}\|f(t,s,u_j^n,x_j^n)\|ds \\
& + \int_{t_i^n}^{t}\|f(t,s,u_i^n,x_i^n)\|ds \\
\leq & \frac{1}{h_{i+1}^n}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left(m_f(1+M)\sum_{j=0}^{i}h_{j+1}^n\right)d\tau\right) + m_f(1+M)\sum_{j=0}^{i}h_{j+1}^n \\
\leq & \frac{1}{h_{i+1}^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2Tm_f(1+M) \\
\leq & k_1\frac{\sigma_{i+1}^n}{h_{i+1}^n} + 2Tm_f(1+M),
\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant (2.6)

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq k_1\left(1 + \frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} + \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right) + 2Tm_f(1+M). \tag{2.29}$$

D'autre part, on remarque de (2.3), (2.16), (2.18) et (2.22), que pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &\leq \frac{1}{h_{i+1}^n}\|x_{i+1}^n - x_i^n\| + 2m_g(1+M) \\
&\leq k_2\frac{\sigma_{i+1}^n}{h_{i+1}^n} + 2m_g(1+M),
\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant (2.6)

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq k_2\left(1 + \frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} + \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right) + 2m_g(1+M).$$

Puisque $\alpha, \beta \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$, alors, pour p.p $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} \quad \text{et} \quad \dot{\beta}(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n},$$

d'après le théorème de différentiation de Lebesgue, il existe un sous-ensemble de mesure de Lebesgue nulle $K \subset I$ tel que pour chaque $t \in I \setminus K$, il y a des constantes finies a_t, a_t^1, b_t et b_t^1 telles que

$$\left|\frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right| \leq a_t^1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right| \leq b_t^1,$$

alors

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq a_t \ \text{ et } \ \|\dot{x}_n(t)\| \leq b_t. \tag{2.30}$$

Maintenant, nous allons montrer que $(\dot{u}_n)$ et $(\dot{x}_n)$ sont bornés dans $L^2_H(I)$.
En vertu de (2.29), pour tout $t \in [t^n_i, t^n_{i+1}[$, on écrit

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{k_1}{t^n_{i+1} - t^n_i} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r(s)ds + 2Tm_f(1 + M),$$

où $r(t) = 1 + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)$ et $r \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{k_1}{(t^n_{i+1} - t^n_i)^{1/2}} \left(\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s)ds \right)^{1/2} + 2Tm_f(1 + M),$$

et le fait que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ donne

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n\|^2_{L^2_H(I)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|\dot{u}_n(t)\|^2 dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \left(\frac{k_1}{(t^n_{i+1} - t^n_i)^{1/2}} \left(\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s)ds \right)^{1/2} + 2Tm_f(1 + M) \right)^2 dt \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \left(\frac{k_1^2}{t^n_{i+1} - t^n_i} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s)ds + 4T^2 m_f^2 (1 + M)^2 \right) dt, \\
&= 2k_1^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s)ds + 8T^2 m_f^2 (1 + M)^2 T \\
&= 2k_1^2 \|r\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I)} + 8T^3 m_f^2 (1 + M)^2 = \xi_1^2 < +\infty. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on obtient

$$\|\dot{x}_n\|^2_{L^2_H(I)} \leq 2k_2^2 \|r\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I)} + 8m_g^2(1 + M)^2 T = \xi_2^2 < +\infty. \qquad (2.32)$$

Maintenant, soient les applications $\Delta_n, \delta_n : I \to I$ définies par

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^n_i & \text{si } t \in]t^n_i, t^n_{i+1}] \text{ pour certain } i \in \{0, \cdots, n-1\}, \end{cases}$$

et

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^n_{i+1} & \text{si } t \in]t^n_i, t^n_{i+1}] \text{ pour certain } i \in \{0, \cdots, n-1\}. \end{cases}$$

Observons que par construction (voir (2.6)) pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n(t) = t \text{ et } \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t.$$

De plus, puisque les applications α et β sont continues, alors, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\Delta_n(t)) = \gamma(t) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \gamma(\delta_n(t)) = \gamma(t). \qquad (2.33)$$

En utilisant (2.9), (2.23) et (2.24), on écrit

$$-\dot{u}_n(t) \in A(\delta_n(t))u_n(\delta_n(t)) + h_n(t) \text{ p.p } t \in I, \tag{2.34}$$

$$-\dot{x}_n(t) \in B(\delta_n(t))x_n(\delta_n(t)) + g_n(t) \text{ p.p } t \in I, \tag{2.35}$$

$$(u_n(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) \in \mathrm{D}\,(A(\delta_n(t))) \times \mathrm{D}\,(B(\delta_n(t)))\ t \in I, \tag{2.36}$$

où les applications h_n et g_n sont définies pour tout n et tout $t \in I$ par

$$h_n(t) = \int_0^t f(t, s, u_n(\Delta_n(s)), x_n(\Delta_n(s)))ds,$$

et

$$g_n(t) = g(t, u_n(\Delta_n(t)), x_n(\Delta_n(t))).$$

Étape 2. Convergence des suites $(u_n(\cdot))$ et $(x_n(\cdot))$.

Nous allons montrer que les suites $(u_n(\cdot))$ et $(x_n(\cdot))$ satisfont le critère uniforme de Cauchy sur I. Notons de (2.1) et (2.16) que pour tout n et tout $t \in I$

$$\|f(t, s, u_n(\Delta_n(s)), x_n(\Delta_n(s)))\| \leq m_f(1 + M), \tag{2.37}$$

alors

$$\|h_n(t)\| = \left\| \int_0^t f(t, s, u_n(\Delta_n(s)), x_n(\Delta_n(s)))ds \right\| \leq T m_f(1 + M). \tag{2.38}$$

De plus, de (2.3) et (2.16), on a pour tout n et tout $t \in I$

$$\|g_n(t)\| = \|g(t, u_n(\Delta_n(t)), x_n(\Delta_n(t)))\| \leq m_g(1 + M). \tag{2.39}$$

Soient p et q deux entiers arbitraires. Rappelons que pour p.p. $t \in I$

$$-\dot{u}_p(t) - h_p(t) \in A(\delta_p(t))u_p(\delta_p(t)),$$
$$-\dot{u}_q(t) - h_q(t) \in A(\delta_q(t))u_q(\delta_q(t)).$$

En combinant la définition de la pseudo-distance (1.1), (h_A^1), (2.6) et (2.38), avec ces dernières inclusions, il résulte

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_p(t) + h_p(t) - \dot{u}_q(t) - h_q(t), u_p(\delta_p(t)) - u_q(\delta_q(t)) \rangle \\
&\leq (1 + \|\dot{u}_p(t) + h_p(t)\| + \|\dot{u}_q(t) + h_q(t)\|) \mathrm{dis}\,(A(\delta_p(t)), A(\delta_q(t))) \\
&\leq (1 + \|\dot{u}_p(t)\| + \|\dot{u}_q(t)\| + 2T m_f(1 + M)) \left(|\alpha(\delta_p(t)) - \alpha(t)| + |\alpha(t) - \alpha(\delta_q(t))|\right) \\
&\leq (l_p + l_q)(1 + \|\dot{u}_p(t)\| + \|\dot{u}_q(t)\| + 2T m_f(1 + M)) = \breve{F}_{p,q}(t).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

On note en vertu de (2.6) et (2.31) que

$$0 \leq \int_0^T \breve{F}_{p,q}(t)dt \leq (l_p + l_q)(T + 2T^{\frac{1}{2}}\xi_1 + 2T^2 m_f(1+M)) \to 0 \text{ lorsque } p, q \to \infty. \tag{2.41}$$

D'une part, en tenant compte de (2.31) et la continuité absolue de $u_n(\cdot)$, il existe une constante réelle $m_1 > 0$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tout n

$$||u_n(t)|| \leq m_1. \tag{2.42}$$

D'autre part, de (2.32) et la continuité absolue de $x_n(\cdot)$, il existe une constante réelle positive $m_2 > 0$ telle que pour tout $t \in I$, et pour tout n

$$||x_n(t)|| \leq m_2. \tag{2.43}$$

On pose $\zeta = \max(m_1, m_2)$. De (H_f^2), il existe alors une fonction $\varphi_{f,\zeta}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour p.p. $t \in I$

$$\begin{aligned} \|h_p(t) - h_q(t)\| &\leq \int_0^t ||f(t,s,u_p(\Delta_p(s)), x_p(\Delta_p(s))) - f(t,s,u_q(\Delta_q(s)), x_q(\Delta_q(s)))||ds \\ &\leq \varphi_{f,\zeta}(t) \int_0^t \Big(||u_p(\Delta_p(s)) - u_q(\Delta_q(s))|| + ||x_p(\Delta_p(s)) - x_q(\Delta_q(s))|| \Big) ds. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Observons que pour tout $t \in I$

$$||u_p(\Delta_p(t)) - u_q(\Delta_q(t))|| \leq ||u_p(\Delta_p(t)) - u_p(t)|| + ||u_p(t) - u_q(t)|| + ||u_q(t) - u_q(\Delta_q(t))||.$$

Puisque u_p est absolument continue pour chaque p, et par construction (voir (2.6)), pour tout $t \in I$ et tout p, on a $0 \leq t - \Delta_p(t) \leq l_p$, alors, il résulte de (2.31) que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} ||u_p(t) - u_p(\Delta_p(t))|| &\leq \int_{\Delta_p(t)}^t ||\dot{u}_p(s)||ds \\ &\leq (t - \Delta_p(t))^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T ||\dot{u}_p(s)||^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq l_p^{\frac{1}{2}} \xi_1. \end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit que pour tout $t \in I$ et tous p, q

$$||u_p(\Delta_p(t)) - u_q(\Delta_q(t))|| \leq ||u_p(t) - u_q(t)|| + \xi_1 \left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}} \right). \tag{2.45}$$

En procédant de la même manière à l'aide de (2.32), on trouve pour chaque p, q et tout $t \in I$

$$||x_p(\Delta_p(t)) - x_q(\Delta_q(t))|| \leq ||x_p(t) - x_q(t)|| + \xi_2 \left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}} \right). \tag{2.46}$$

De retour à (2.44), et tenant en compte (2.45)-(2.46), on obtient

$$\|h_p(t)-h_q(t)\| \leq \varphi_{f,\zeta}(t)\int_0^t \Big(||u_p(s)-u_q(s)||+||x_p(s)-x_q(s)||\Big)ds + \varphi_{f,\zeta}(t)T(\xi_1+\xi_2)\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.47}$$

Maintenant, grâce à (2.45), on écrit pour tout $t\in I$ et tous p, q

$$\begin{aligned}||u_p(\delta_p(t))-u_q(\delta_q(t))|| &\leq ||u_p(\delta_p(t))-u_p(t)||+||u_p(t)-u_q(t)||+||u_q(t)-u_q(\delta_q(t))||\\ &\leq ||u_q(t)-u_p(t)||+\xi_1\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{2.48}$$

En simplifiant à l'aide de (2.47)-(2.48), on obtient

$$\begin{aligned}&\langle h_q(t)-h_p(t),u_p(\delta_p(t))-u_q(\delta_q(t))\rangle\\ &\leq \varphi_{f,\zeta}(t)\left(\int_0^t\Big(||u_p(s)-u_q(s)||+||x_p(s)-x_q(s)||\Big)ds+T(\xi_1+\xi_2)\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right)\right)\\ &\quad\times\left(||u_p(t)-u_q(t)||+\xi_1\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right)\right)\\ &\leq \varphi_{f,\zeta}(t)||u_p(t)-u_q(t)||\int_0^t\Big(||u_p(s)-u_q(s)||+||x_p(s)-x_q(s)||\Big)ds\\ &+\varphi_{f,\zeta}(t)\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\xi_1\int_0^t\Big(||u_p(s)-u_q(s)||+||x_p(s)-x_q(s)||\Big)ds\right.\\ &\left.+T(\xi_1+\xi_2)\left[||u_p(t)-u_q(t)||+\xi_1\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right)\\ &\leq \varphi_{f,\zeta}(t)||u_p(t)-u_q(t)||\int_0^t\Big(||u_p(s)-u_q(s)||+||x_p(s)-x_q(s)||\Big)ds+\hat{F}_{p,q}(t),\end{aligned} \tag{2.49}$$

où l'application $\hat{F}_{p,q}$ est définie sur I par

$$\hat{F}_{p,q}(t)=2T\varphi_{f,\zeta}(t)\left(l_p^{\frac{1}{2}}+l_q^{\frac{1}{2}}\right)\left(2\xi_1\zeta+(\xi_1+\xi_2)\left(\zeta+\xi_1(\gamma(T))^{\frac{1}{2}}\right)\right),$$

pour chaque $t\in I$.

Comme $\varphi_{f,\zeta}(\cdot)\in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ par hypothèse, les suites $(u_n(\cdot))$ et $(x_n(\cdot))$ sont bornées (voir (2.42)-(2.43)) et $l_p,l_q\to 0$ lorsque $p,q\to\infty$, alors, il résulte

$$\lim_{p,q\to\infty}\hat{F}_{p,q}(t)=0 \ \text{ p.p. } t\in I.$$

De plus, $|\hat{F}_{p,q}(t)|\leq 4T(\gamma(T))^{\frac{1}{2}}\varphi_{f,\zeta}(t)\left(2\xi_1\zeta+(\xi_1+\xi_2)\left(\zeta+\xi_1(\gamma(T))^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ pour tout $t\in I$. Ainsi, il découle du théorème de la convergence dominé de Lebesgue que

$$\lim_{p,q\to\infty}\int_0^T\hat{F}_{p,q}(t)dt=0. \tag{2.50}$$

On remarque pour tout $t \in I$ et tous p, q que

$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}_p(t) - \dot{u}_q(t), u_p(t) - u_p(\delta_p(t)) - u_q(t) + u_q(\delta_q(t))\rangle \\ &\quad \leq (\|\dot{u}_p(t)\| + \|\dot{u}_q(t)\|)(\|u_p(t) - u_p(\delta_p(t))\| + \|u_q(\delta_q(t)) - u_q(t)\|) = \widetilde{F}_{p,q}(t).\end{aligned} \tag{2.51}$$

En vertu de (2.27) et (2.31), il résulte

$$\begin{aligned}0 \leq \int_0^T \widetilde{F}_{p,q}(t)dt \leq & \int_0^T (\|\dot{u}_p(t)\| + \|\dot{u}_q(t)\|)\Big(k_1(\gamma(\delta_p(t)) - \gamma(t)) \\ & + (k_1 + 2L_1)l_p + k_1(\gamma(\delta_q(t)) - \gamma(t)) + (k_1 + 2L_1)l_q\Big)dt \\ & \leq 4(k_1 + L_1)(l_p + l_q)T^{\frac{1}{2}}\xi_1 \to 0 \quad \text{lorsque } \ p, q \to +\infty.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Par conséquent, (2.40), (2.49) et (2.51), permettent de conclure que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_p(t) - u_q(t)||^2 = \langle \dot{u}_p(t) - \dot{u}_q(t), u_p(t) - u_q(t)\rangle \\ &\leq \langle \dot{u}_p(t) - \dot{u}_q(t), u_p(t) - u_p(\delta_p(t)) - u_q(t) + u_q(\delta_q(t))\rangle \\ &+ \langle \dot{u}_p(t) + h_p(t) - \dot{u}_q(t) - h_q(t), u_p(\delta_p(t)) - u_q(\delta_q(t))\rangle \\ &+ \langle h_q(t) - h_p(t), u_p(\delta_p(t)) - u_q(\delta_q(t))\rangle \\ &\leq \varphi_{f,\varsigma}(t)||u_p(t) - u_q(t)|| \int_0^t \Big(||u_p(s) - u_q(s)|| + ||x_p(s) - x_q(s)||\Big)ds + \hat{F}_{p,q}(t) \\ &+ \breve{F}_{p,q}(t) + \widetilde{F}_{p,q}(t) \\ &\leq \sqrt{2}\varphi_{f,\varsigma}(t)||u_p(t) - u_q(t)|| \int_0^t \Big(||u_p(s) - u_q(s)||^2 + ||x_p(s) - x_q(s)||^2\Big)^{\frac{1}{2}}ds + F_{p,q}(t),\end{aligned} \tag{2.53}$$

sachant que $a + b \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ pour a, $b \geq 0$, où l'application $F_{p,q}$ est définie sur I par

$$F_{p,q}(t) = \breve{F}_{p,q}(t) + \widetilde{F}_{p,q}(t) + \hat{F}_{p,q}(t), \tag{2.54}$$

pour chaque $t \in I$.

Il est facile de déduire de (2.41), (2.50), (2.52) et (2.54) que

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^T F_{p,q}(t)dt = 0. \tag{2.55}$$

Observons en outre que

$$||u_p(t) - u_q(t)|| \leq \Big(||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(t) - x_q(t)||^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

car $a \leq (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ pour a, $b \geq 0$.

Maintenant, on pose $y(t) = ||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(x) - x_q(t)||^2$, $t \in I$. De retour à (2.53), il résulte

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_p(t) - u_q(t)||^2 \leq \sqrt{2}\varphi_{f,\varsigma}(t)(y(t))^{\frac{1}{2}} \int_0^t (y(s))^{\frac{1}{2}}ds + F_{p,q}(t). \tag{2.56}$$

Soient p et q deux entiers arbitraires. Rappelons que pour p.p. $t \in I$

$$-\dot{x}_p(t) - g_p(t) \in B(\delta_p(t))x_p(\delta_p(t)),$$
$$-\dot{x}_q(t) - g_q(t) \in B(\delta_q(t))x_q(\delta_q(t)).$$

En combinant la définition de la pseudo-distance (1.1), (h_B^1), (2.6) et (2.39), avec ces dernières inclusions, il résulte

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{x}_p(t) + g_p(t) - \dot{x}_q(t) - g_q(t), x_p(\delta_p(t)) - x_q(\delta_q(t))\rangle \\
&\leq (1 + \|\dot{x}_p(t) + g_p(t)\| + \|\dot{x}_q(t) + g_q(t)\|)\mathrm{dis}\,(B(\delta_p(t)), B(\delta_q(t))) \\
&\leq (1 + \|\dot{x}_p(t)\| + \|\dot{x}_q(t)\| + 2m_g(1+M))\,(|\beta(\delta_p(t)) - \beta(t)| + |\beta(t) - \beta(\delta_q(t))|) \\
&\leq (l_p + l_q)(1 + \|\dot{x}_p(t)\| + \|\dot{x}_q(t)\| + 2m_g(1+M)) = \breve{G}_{p,q}(t). \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

On note en vertu de (2.6) et (2.32) que

$$0 \leq \int_0^T \breve{G}_{p,q}(t)dt \leq (l_p + l_q)(T + 2T^{\frac{1}{2}}\xi_2 + 2Tm_g(1+M)) \to 0 \text{ lorsque } p, q \to \infty. \quad (2.58)$$

De (H_g^2), (2.45) et (2.46), il existe une fonction $\varphi_{g,\zeta}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour p.p. $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\|g_p(t) - g_q(t)\| &= ||g(t, u_p(\Delta_p(t)), x_p(\Delta_p(t))) - g(t, u_q(\Delta_q(t)), x_q(\Delta_q(t)))|| \\
&\leq \varphi_{g,\zeta}(t)\Big(||u_p(\Delta_p(t)) - u_q(\Delta_q(t))|| + ||x_p(\Delta_p(t)) - x_q(\Delta_q(t))||\Big) \\
&\leq \varphi_{g,\zeta}(t)\Big(||u_p(t) - u_q(t)|| + ||x_p(t) - x_q(t)||\Big) \\
&\quad + \varphi_{g,\zeta}(t)(\xi_1 + \xi_2)\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right), \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

et par le même raisonnement de (2.48), on peut écrire

$$\begin{aligned}
||x_p(\delta_p(t)) - x_q(\delta_q(t))|| &\leq ||x_p(\delta_p(t)) - x_p(t)|| + ||x_p(t) - x_q(t)|| + ||x_q(t) - x_q(\delta_q(t))|| \\
&\leq ||x_p(t) - x_q(t)|| + \xi_2\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

ceci avec (2.59), permet de simplifier comme suit

$$\begin{aligned}
&\langle g_q(t) - g_p(t), x_p(\delta_p(t)) - x_q(\delta_q(t))\rangle \\
&\leq \varphi_{g,\zeta}(t)\left(\Big(||u_p(t) - u_q(t)|| + ||x_p(t) - x_q(t)||\Big) + (\xi_1 + \xi_2)\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&\quad \times \left(||x_p(t) - x_q(t)|| + \xi_2\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&\leq \varphi_{g,\zeta}(t)\Big(||x_p(t) - x_q(t)||||u_p(t) - u_q(t)|| + ||x_p(t) - x_q(t)||^2\Big) \\
&+ \varphi_{g,\zeta}(t)\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg(\xi_2\Big(||u_p(t) - u_q(t)|| + ||x_p(t) - x_q(t)||\Big) \\
&+ (\xi_1 + \xi_2)\left(||x_p(t) - x_q(t)|| + \xi_2\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right)\right)\Bigg) \\
&\leq \frac{3}{2}\varphi_{g,\zeta}(t)\Big(||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(t) - x_q(t)||^2\Big) + \hat{G}_{p,q}(t), \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

notant que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, où l'application $\hat{G}_{p,q}$ est définie sur I par

$$\hat{G}_{p,q}(t) = 2\varphi_{g,\zeta}(t)\left(l_p^{\frac{1}{2}} + l_q^{\frac{1}{2}}\right)\left(2\xi_2\zeta + (\xi_1+\xi_2)\left[\zeta + \xi_2(\gamma(T))^{\frac{1}{2}}\right]\right),$$

pour chaque $t \in I$.

Comme $\varphi_{g,\zeta}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ par hypothèse, les suites $(u_n(\cdot))$ et $(x_n(\cdot))$ sont bornées (voir (2.42)-(2.43)) et $l_p, l_q \to 0$ lorsque $p, q \to \infty$, alors, il résulte

$$\lim_{p,q\to\infty} \hat{G}_{p,q}(t) = 0 \;\text{ p.p. } t \in I.$$

De plus, $|\hat{G}_{p,q}(t)| \leq 4\varphi_{g,\zeta}(t)(\gamma(T))^{\frac{1}{2}}\left(2\xi_2\zeta + (\xi_1+\xi_2)\left[\zeta + \xi_2(\gamma(T))^{\frac{1}{2}}\right]\right)$ pour tout $t \in I$. Ainsi, il découle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^T \hat{G}_{p,q}(t)dt = 0. \tag{2.61}$$

On remarque pour tout $t \in I$ et tous p, q que

$$\begin{aligned}&\langle \dot{x}_p(t) - \dot{x}_q(t), x_p(t) - x_p(\delta_p(t)) - x_q(t) + x_q(\delta_q(t))\rangle \\ &\quad\leq (\|\dot{x}_p(t)\| + \|\dot{x}_q(t)\|)(\|x_p(t) - x_p(\delta_p(t))\| + \|x_q(\delta_q(t)) - x_q(t)\|) = \widetilde{G}_{p,q}(t).\end{aligned} \tag{2.62}$$

En vertu de (2.28) et (2.32), il résulte

$$\begin{aligned}0 \leq \int_0^T \widetilde{G}_{p,q}(t)dt &\leq 2(k_2+L_2)(l_p+l_q)\int_0^T (\|\dot{x}_p(t)\| + \|\dot{x}_q(t)\|)dt \\ &\leq 4(k_2+L_2)(l_p+l_q)T^{\frac{1}{2}}\xi_2 \to 0 \quad \text{lorsque } p, q \to \infty.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Par conséquent, (2.57), (2.60) et (2.62), permettent de conclure que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||x_p(t) - x_q(t)||^2 = \langle \dot{x}_p(t) - \dot{x}_q(t), x_p(t) - x_q(t)\rangle \\ &= \langle \dot{x}_p(t) - \dot{x}_q(t), x_p(t) - x_p(\delta_p(t)) - x_q(t) + x_q(\delta_q(t))\rangle \\ &+ \langle \dot{x}_p(t) + g_p(t) - \dot{x}_q(t) - g_q(t), x_p(\delta_p(t)) - x_q(\delta_q(t))\rangle \\ &+ \langle g_q(t) - g_p(t), x_p(\delta_p(t)) - x_q(\delta_q(t))\rangle \\ &\leq \breve{G}_{p,q}(t) + \widetilde{G}_{p,q}(t) + \frac{3}{2}\varphi_{g,\zeta}(t)\Big(||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(t) - x_q(t)||^2\Big) + \hat{G}_{p,q}(t) \\ &\leq \frac{3}{2}\varphi_{g,\zeta}(t)\Big(||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(t) - x_q(t)||^2\Big) + G_{p,q}(t),\end{aligned} \tag{2.64}$$

où l'application $G_{p,q}$ est définie sur I par

$$G_{p,q}(t) = \breve{G}_{p,q}(t) + \widetilde{G}_{p,q}(t) + \hat{G}_{p,q}(t),$$

pour chaque $t \in I$.

Il est facile de déduire de (2.58), (2.61) et (2.63) que

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^T G_{p,q}(t)dt = 0. \tag{2.65}$$

Maintenant, on pose $y(t) = ||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(t) - x_q(t)||^2$, $t \in I$. De retour à (2.64), on écrit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||x_p(t) - x_q(t)||^2 \leq \frac{3}{2}\varphi_{g,\zeta}(t)y(t) + G_{p,q}(t). \tag{2.66}$$

En combinant (2.56) et (2.66), on trouve

$$\dot{y}(t) \leq 3\varphi_{g,\zeta}(t)y(t) + 2\sqrt{2}\varphi_{f,\zeta}(t)(y(t))^{\frac{1}{2}} \int_0^t (y(s))^{\frac{1}{2}}ds + 2(F_{p,q}(t) + G_{p,q}(t)).$$

Appliquons Lemme 1.58, pour $\varepsilon > 0$

$$y(t) = ||u_p(t) - u_q(t)||^2 + ||x_p(t) - x_q(t)||^2,$$

$$h_1(t) = 3\varphi_{g,\zeta}(t),\ h_2(t) = 2\sqrt{2}\varphi_{f,\zeta}(t),$$

$$h(t) = \max\Big(\frac{h_1(t)}{2}, \frac{h_2(t)}{2}\Big),\ z(t) = 2(F_{p,q}(t) + G_{p,q}(t)),\ \text{pour presque tout}\ \ t \in I.$$

Par conséquent, on écrit pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}(y(t))^{\frac{1}{2}} \leq (y(0)+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \exp\Big(\int_0^t (h(s)+1)ds\Big) + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}\int_0^t \exp\Big(\int_s^t (h(r)+1)dr\Big)ds \\ + 2\Big[\Big(\int_0^t z(s)ds + \varepsilon\Big)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \exp\Big(\int_0^t (h(r)+1)dr\Big)\Big] \\ + 2\int_0^t \Big(h(s)+1\Big)\exp\Big(\int_s^t (h(r)+1)dr\Big)\Big(\int_0^s z(r)dr + \varepsilon\Big)^{\frac{1}{2}} ds.\end{aligned}$$

en tenant compte de (2.55), (2.65) et le fait que $||u_p(0) - u_q(0)|| = 0$, $||x_p(0) - x_q(0)|| = 0$, ensuite, en faisant tendre ε vers 0, on déduit que

$$\lim_{p,q\to\infty} ||u_p(\cdot) - u_q(\cdot)||_\infty = 0 \text{ et } \lim_{p,q\to\infty} ||x_p(\cdot) - x_q(\cdot)||_\infty = 0.$$

Ainsi, d'une part, le critère uniforme de Cauchy garantit que $(u_n(\cdot))$ converge uniformément sur I vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$, et on déduit de (2.42) que

$$||u(t)|| \leq m_1,\ \forall t \in I.$$

De plus, d'après (2.27) et (2.33), on obtient

$$\|u_n(\Delta_n(t)) - u_n(t)\| \leq k_1\Big(\gamma(t) - \gamma(\Delta_n(t))\Big) + (k_1 + 2L_1)l_n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{2.67}$$

De même, on obtient

$$\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Remarquons que pour tout $t \in I$

$$\|u_n(\Delta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(\Delta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|,$$

puis, en utilisant (2.67), et la convergence uniforme de (u_n) vers u, il résulte

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\Delta_n(t)) - u(t)\| = 0. \tag{2.68}$$

En procédant de la même manière, il s'ensuit

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0. \tag{2.69}$$

Remarquons de (2.31) que la suite $(\dot{u}_n(\cdot))$ est bornée dans $L^2_H(I)$. Alors, d'après Théorème 1.48 on peut extraire une sous-suite notée encore $(\dot{u}_n(\cdot))$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.
D'autre part, le critère uniforme de Cauchy ci-dessus garantit que $(x_n(\cdot))$ converge uniformément sur I vers une application $x(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$, et on déduit de (2.43) que

$$||x(t)|| \leq m_2, \ \forall t \in I.$$

De plus, d'après (2.28) et (2.33), on obtient

$$\|x_n(t) - x_n(\Delta_n(t))\| \to 0 \text{ et } \ \|x_n(\delta_n(t)) - x_n(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{2.70}$$

De (2.70), et la convergence uniforme de (x_n) vers x, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\Delta_n(t)) - x(t)\| = 0. \tag{2.71}$$

De même, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| = 0. \tag{2.72}$$

Maintenant, de (2.32), la suite $(\dot{x}_n(\cdot))$ est bornée dans $L^2_H(I)$. Alors, d'après Théorème 1.48 on peut extraire une sous-suite notée encore $(\dot{x}_n(\cdot))$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot{x}(\cdot)$.
En vertu de (2.68), (2.71) et la continuité de $f(t, s, \cdot, \cdot)$ pour tout $(t, s) \in I \times I$, on déduit

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t, s, u_n(\Delta_n(s)), x_n(\Delta_n(s))) - f(t, s, u(s), x(s))\| = 0.$$

En combinant cela avec (2.37), le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^t f(t,s,u_n(\Delta_n(s)),x_n(\Delta_n(s)))ds-\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds\right\|=0.$$

Encore une fois, en tenant compte de cette limite et (2.38), il s'ensuit

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left\|\int_0^t f(t,s,u_n(\Delta_n(s)),x_n(\Delta_n(s)))ds-\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds\right\|^2dt=0,$$

par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

En vertu de (2.68), (2.71) et la continuité de $g(t,\cdot,\cdot)$ pour tout $t\in I$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\|g(t,u_n(\Delta_n(t)),x_n(\Delta_n(t)))-g(t,u(t),x(t))\|=0.$$

En combinant cela avec (2.39), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\|g(t,u_n(\Delta_n(t)),x_n(\Delta_n(t)))-g(t,u(t),x(t))\|^2dt=0,$$

par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Étape 3. Nous allons montrer que (u,x) est une solution du système couplé $(\mathcal{P}_{f,g})$.

Tout d'abord, démontrons que $(u(t),x(t))\in \mathrm{D}\,(A(t))\times\mathrm{D}\,(B(t))$ pour tout $t\in I$.

Rappelons que $(u_n(\delta_n(t)),x_n(\delta_n(t)))\in\mathrm{D}\,(A(\delta_n(t)))\times\mathrm{D}\,(B(\delta_n(t)))$ pour tout $t\in I$ (voir (2.36)). Alors, de (h_A^1), (h_B^1) et (2.6), on remarque que pour tout $t\in I$

$$\mathrm{dis}\,(A(\delta_n(t)),A(t))\leq|\alpha(\delta_n(t))-\alpha(t)|\to 0 \text{ lorsque } n\to\infty, \tag{2.73}$$

et

$$\mathrm{dis}\,(B(\delta_n(t)),B(t))\leq|\beta(\delta_n(t))-\beta(t)|\to 0 \text{ lorsque } n\to\infty, \tag{2.74}$$

car $\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=t$, α et β sont des applications continues.

Remarquons de (h_A^2), (h_B^2) et (2.16) que les suites

$$(y_n)=\left(A^0(\delta_n(t))u_n(\delta_n(t))\right)\ \text{ et }\ (z_n)=\left(B^0(\delta_n(t))x_n(\delta_n(t))\right)$$

sont bornées. Alors, on peut extraire de (y_n) (resp. (z_n)) une sous-suite notée (y_n) (resp. (z_n)) qui converge faiblement vers $y\in H$ (resp. $z\in H$). En appliquant Lemme 1.38, en tenant compte (2.69) et (2.72), on conclut que $(u(t),x(t))\in\mathrm{D}\,(A(t))\times\mathrm{D}\,(B(t))$ pour tout $t\in I$.

Posons $\kappa(t)=\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds$ pour chaque $t\in I$. Comme la suite $(\dot u_n(\cdot)+h_n(\cdot))$

converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot u(\cdot)+\kappa(\cdot)$. Alors, d'après le théorème de Banach-Mazur, il existe une suite (ξ_n) qui converge fortement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot u(\cdot)+\kappa(\cdot)$ telle que pour chaque $n\in\mathbb{N}$

$$\xi_n \in co\{\dot u_j + h_j,\ j\geq n\}.$$

Alors, on peut extraire de (ξ_n) une sous-suite qui converge p.p. vers $\dot u(\cdot)+\kappa(\cdot)$, i.e., il existe un sous-ensemble K' de I Lebesgue négligeable tel que pour tout $t\in I\setminus K'$

$$\dot u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{\xi_j(t),\ j\geq n\}} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{co}\{\dot u_j(t)+h_j(t),\ j\geq n\}.$$

Alors, d'après Proposition 1.13, on a pour tout $w\in H$ et tout $t\in I\setminus K'$

$$\begin{aligned}\langle \dot u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds, w\rangle &\leq \delta^*_{\{\dot u_j(t)+h_j(t),\ j\geq n\}}(w),\ \forall n\in\mathbb{N}\\ &= \sup_{j\geq n}\langle \dot u_j(t)+h_j(t), w\rangle,\ \forall n\in\mathbb{N}\\ &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{j\geq n}\langle \dot u_j(t)+h_j(t), w\rangle\end{aligned}$$

donc,

$$\langle \dot u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds, w\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\langle \dot u_n(t)+h_n(t), w\rangle. \tag{2.75}$$

Rappelons que pour tout $t\in I$, $u(t)\in \mathrm{D}\,(A(t))$. Pour montrer l'inclusion

$$-\dot u(t)\in A(t)u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \ \text{ p.p. } t\in I,$$

en utilisant Lemme 1.35, il suffit d'établir

$$\langle \dot u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds, u(t)-\eta\rangle \leq \langle A^0(t)\eta, \eta-u(t)\rangle \quad \text{p.p. } t\in I,$$

pour tout $\eta\in \mathrm{D}\,(A(t))$.

Soit $\eta\in \mathrm{D}\,(A(t))$. Alors, (h^2_A), (2.73) et Lemme 1.40 assurent l'existence d'une suite (η_n) telle que

$$\eta_n\in \mathrm{D}\,(A(\delta_n(t))),\ \ \eta_n\to\eta \ \text{ et } \ A^0(\delta_n(t))\eta_n\to A^0(t)\eta. \tag{2.76}$$

Pour $n\geq 1$, soit $I\setminus S_n$ l'ensemble sur lequel (2.34) est vérifiée. L'opérateur $A(t)$ étant monotone pour tout $t\in I$ entraîne que pour $t\in I\setminus S_n$

$$\langle \dot u_n(t)+h_n(t), u_n(\delta_n(t))-\eta_n\rangle \leq \langle A^0(\delta_n(t))\eta_n, \eta_n-u_n(\delta_n(t))\rangle. \tag{2.77}$$

D'après (2.30), (2.38) et (2.77), on obtient pour $t \in I \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \cup K \cup K')$

$$\begin{aligned}\langle \dot{u}_n(t)+h_n(t), u(t)-\eta\rangle &= \langle \dot{u}_n(t)+h_n(t), u_n(\delta_n(t))-\eta_n\rangle \\ &\quad +\langle \dot{u}_n(t)+h_n(t), (u(t)-u_n(\delta_n(t)))-(\eta-\eta_n)\rangle \\ &\leq \langle A^0(\delta_n(t))\eta_n, \eta_n-u_n(\delta_n(t))\rangle \\ &\quad +\Big(a_t+Tm_f(1+M)\Big)\Big(\|u_n(\delta_n(t))-u(t)\|+\|\eta_n-\eta\|\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent, en combinant cela avec (2.69), (2.75), (2.76), il s'ensuit

$$\langle \dot{u}(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds, u(t)-\eta\rangle \leq \langle A^0(t)\eta, \eta-u(t)\rangle.$$

D'où (voir Lemme 1.35)

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \ \text{ p.p. } t\in I,$$

avec $u(0)=u_0$.

Maintenant, nous établissons la deuxième inclusion différentielle

$$-\dot{x}(t) \in B(t)x(t)+g(t,u(t),x(t)) \text{ p.p. } t\in I.$$

Nous savons que la suite $(\dot{x}_n(\cdot)+g_n(\cdot))$ converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot{x}(\cdot)+g(\cdot,u(\cdot),x(\cdot))$. Alors, par le théorème de Banach-Mazur, il existe une suite (ζ_n) qui converge fortement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot{x}(\cdot)+g(\cdot,u(\cdot),x(\cdot))$ telle que pour chaque $n\in\mathbb{N}$

$$\zeta_n \in co\{\dot{x}_j+g_j,\ j\geq n\}.$$

Alors, on peut extraire de (ζ_n) une sous-suite qui converge p.p. vers $\dot{x}(\cdot)+g(\cdot,u(\cdot),x(\cdot))$, i.e., il existe un sous-ensemble S de I Lebesgue négligeable tel que pour tout $t\in I\setminus S$

$$\dot{x}(t)+g(t,u(t),x(t)) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\zeta_j(t),\ j\geq n\}} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{\dot{x}_j(t)+g_j(t),\ j\geq n\}.$$

Alors, pour tout $w\in H$ et tout $t\in I\setminus S$, on a

$$\langle \dot{x}(t)+g(t,u(t),x(t)), w\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\langle \dot{x}_n(t)+g_n(t), w\rangle. \tag{2.78}$$

Comme $x(t)\in \mathrm{D}(B(t))$ sur I, par Lemme 1.35, il suffit de montrer que

$$\langle \dot{x}(t)+g(t,u(t),x(t)), x(t)-\theta\rangle \leq \langle B^0(t)\theta, \theta-x(t)\rangle \quad \text{p.p. } t\in I, \text{ pour tout } \ \theta\in \mathrm{D}(B(t)).$$

Soit $\theta\in\mathrm{D}(B(t))$. Alors, (h^2_B), (2.74) et Lemme 1.40, assurent l'existence d'une suite (θ_n) telle que

$$\theta_n\in \mathrm{D}(B(\delta_n(t))), \ \ \theta_n\to\theta \ \text{ et } \ B^0(\delta_n(t))\theta_n \to B^0(t)\theta. \tag{2.79}$$

Pour $n \geq 1$, soit $I \setminus V_n$ l'ensemble sur lequel (2.35) est vérifiée. L'opérateur $B(t)$ étant monotone pour tout $t \in I$, entraîne que pour $t \in I \setminus V_n$

$$\langle \dot{x}_n(t) + g_n(t), x_n(\delta_n(t)) - \theta_n \rangle \leq \langle B^0(\delta_n(t))\theta_n, \theta_n - x_n(\delta_n(t)) \rangle. \tag{2.80}$$

D'après (2.30), (2.39) et (2.80), on obtient pour $t \in I \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \cup S \cup K)$

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_n(t) + g_n(t), x(t) - \theta \rangle &= \langle \dot{x}_n(t) + g_n(t), x_n(\delta_n(t)) - \theta_n \rangle \\ &+ \langle \dot{x}_n(t) + g_n(t), (x(t) - x_n(\delta_n(t))) - (\theta - \theta_n) \rangle \\ &\leq \left\langle B^0(\delta_n(t))\theta_n, \theta_n - x_n(\delta_n(t)) \right\rangle \\ &+ (b_t + m_g(1+M)) \left(\|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| + \|\theta_n - \theta\| \right).\end{aligned}$$

Par conséquent, en combinant cela avec (2.72), (2.78), (2.79), il résulte

$$\langle \dot{x}(t) + g(t, u(t), x(t)), x(t) - \theta \rangle \leq \langle B^0(t)\theta, \theta - x(t) \rangle.$$

D'où (voir le Lemme 1.35)

$$-\dot{x}(t) \in B(t)x(t) + g(t, u(t), x(t)) \text{ p.p. } t \in I,$$

avec $x(0) = x_0$.

Par conséquent, le système couplé $(\mathcal{P}_{f,g})$ admet au moins une solution absolument continue $(u, x) : I \to H \times H$.

Maintenant, remarquons de (2.27)-(2.28) que pour tous s, t tels que $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq k_1 \left(t - s + \alpha(t) - \alpha(s) + \beta(t) - \beta(s)\right) + (k_1 + 2L_1)l_n,$$

et

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq k_2 \left(t - s + \alpha(t) - \alpha(s) + \beta(t) - \beta(s)\right) + (k_2 + 2L_2)l_n.$$

Passons à la limite dans ces dernières inégalités

$$\|\dot{u}(t)\| \leq k_1(1 + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)) \text{ et } \|\dot{x}(t)\| \leq k_2(1 + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)) \quad \text{pour p.p. } \ t \in I.$$

Partie 2 : Unicité de la solution. Soient (u_1, x_1), (u_2, x_2) deux solutions du système couplé $(\mathcal{P}_{f,g})$. Puisque la solution est bornée, alors, il existe η tel que $\|u_i(t)\| \leq \eta$ et $\|x_i(t)\| \leq \eta$ pour tout $t \in I$, $i = 1, 2$. Du comportement du type Lipschitz de f dans (2.2), on a

$$\begin{aligned}&\left\langle \int_0^t f(t,s,u_1(s),x_1(s))ds - \int_0^t f(t,s,u_2(s),x_2(s))ds, u_2(t)-u_1(t)\right\rangle\\ &\qquad\le \left(\int_0^t \|f(t,s,u_1(s),x_1(s)) - f(t,s,u_2(s),x_2(s))\|ds\right)\|u_1(t)-u_2(t)\|\\ &\qquad\le \varphi_{f,\eta}(t)\|u_1(t)-u_2(t)\|\int_0^t \Big(\|u_1(s)-u_2(s)\| + \|x_1(s)-x_2(s)\|\Big)ds\\ &\qquad\le \sqrt{2}\varphi_{f,\eta}(t)\|u_1(t)-u_2(t)\|\int_0^t \Big(\|u_1(s)-u_2(s)\|^2 + \|x_1(s)-x_2(s)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}ds,\end{aligned}$$

notant que $a+b \le \sqrt{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $a,b\ge 0$. Observons que

$$\|u_1(t)-u_2(t)\| \le \left(\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 + \|x_1(t)-x_2(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

car $a \le (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $a\ge 0$, $b\in\mathbb{R}$.

Ensuite, on définit l'application y par

$$y(t) = \|u_1(t)-u_2(t)\|^2 + \|x_1(t)-x_2(t)\|^2, \tag{2.81}$$

pour tout $t\in I$, on obtient alors

$$\begin{aligned}&\left\langle \int_0^t f(t,s,u_1(s),x_1(s))ds - \int_0^t f(t,s,u_2(s),x_2(s))ds, u_2(t)-u_1(t)\right\rangle\\ &\qquad\qquad\le \sqrt{2}\varphi_{f,\eta}(t)(y(t))^{\frac{1}{2}}\int_0^t (y(s))^{\frac{1}{2}}ds.\end{aligned} \tag{2.82}$$

L'opérateur $A(t)$ étant monotone pour chaque $t\in I$ entraine

$$\begin{aligned}&\langle \dot u_1(t) - \dot u_2(t), u_1(t)-u_2(t)\rangle\\ &\qquad\le \left\langle \int_0^t f(t,s,u_1(s),x_1(s))ds - \int_0^t f(t,s,u_2(s),x_2(s))ds, u_2(t)-u_1(t)\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Par conséquent, en combinant (2.82)-(2.83), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 = \langle u_1(t)-u_2(t), \dot u_1(t)-\dot u_2(t)\rangle \le \sqrt{2}\varphi_{f,\eta}(t)(y(t))^{\frac{1}{2}}\int_0^t (y(s))^{\frac{1}{2}}ds. \tag{2.84}$$

En outre, du comportement du type Lipschitz de g dans (2.4), il existe une fonction $\varphi_{g,\eta}(\cdot)\in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que $g(t,\cdot,\cdot)$ est $\varphi_{g,\eta}(t)$-Lipschitz sur $\overline{B}_H[0,\eta]\times\overline{B}_H[0,\eta]$ pour chaque $t\in I$, donc

$$\begin{aligned}&\langle g(t,u_1(t),x_1(t)) - g(t,u_2(t),x_2(t)), x_2(t)-x_1(t)\rangle\\ &\qquad\le \varphi_{g,\eta}(t)\Big(\|u_1(t)-u_2(t)\| + \|x_1(t)-x_2(t)\|\Big)\|x_1(t)-x_2(t)\|\\ &\qquad= \varphi_{g,\eta}(t)\Big(\|x_1(t)-x_2(t)\|^2 + \|u_1(t)-u_2(t)\|\|x_1(t)-x_2(t)\|\Big)\\ &\qquad\le \frac{3}{2}\varphi_{g,\eta}(t)\Big(\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 + \|x_1(t)-x_2(t)\|^2\Big),\end{aligned} \tag{2.85}$$

en notant que $w^2 + wz \leq \frac{3}{2}(w^2 + z^2)$ pour tout $w, z \in \mathbb{R}_+$.
L'opérateur $B(t)$ étant monotone pour chaque $t \in I$, entraîne

$$\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t)\rangle \leq \langle g(t, u_1(t), x_1(t)) - g(t, u_2(t), x_2(t)), x_2(t) - x_1(t)\rangle. \quad (2.86)$$

Par conséquent, en combinant (2.81), (2.85) et (2.86), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = \langle x_1(t) - x_2(t), \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\rangle \leq \frac{3}{2}\varphi_{g,\eta}(t)y(t). \quad (2.87)$$

La somme de (2.84) et (2.87) membre à membre donne

$$\dot{y}(t) \leq 3\varphi_{g,\eta}(t)y(t) + 2\sqrt{2}\varphi_{f,\eta}(t)(y(t))^{\frac{1}{2}} \int_0^t (y(s))^{\frac{1}{2}} ds.$$

Rappelons que $||u_1(0) - u_2(0)|| = 0$ et $||x_1(0) - x_2(0)|| = 0$ et par hypothèse $\varphi_{f,\eta}(\cdot), \varphi_{g,\eta}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$. Du Lemme 1.58, il en résulte que $(u_1, x_1) = (u_2, x_2)$. ■

2.3 Résultat principal

Pour commencer cette section, démontrons un nouveau résultat concernant un système couplé plus général : lorsque les opérateurs dépendent de deux variables (le temps et l'état).

Théorème 2.2. *Supposons que pour tout $(t, z) \in I \times H$, $A(t, z) : \mathrm{D}(A(t, z)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone tel que*

(H_A^1) *il existe une constante réelle $\lambda_1 > 0$ et une fonction positive et croissante $\alpha(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ telle que*

$$\mathrm{dis}\,(A(t, x), A(s, y)) \leq |\alpha(t) - \alpha(s)| + \lambda_1\|x - y\|, \ \forall t, s \in I, \ \forall x, y \in H;$$

(H_A^2) *il existe un nombre réel $c_1 > 0$ tel que*

$$\|A^0(t, x)y\| \leq c_1(1 + ||x|| + ||y||) \ \text{ pour } \ t \in I, \ y \in \mathrm{D}\,(A(t, x)).$$

Supposons que pour tout $(t, z) \in I \times H$, $B(t, z) : \mathrm{D}\,(B(t, z)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone tel que

(H_B^1) *il existe une constante réelle $\lambda_2 > 0$ et une fonction positive et croissante $\beta(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ tel que*

$$\mathrm{dis}\,(B(t, x), B(s, y)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda_2\|x - y\|, \ \forall t, s \in I, \ \forall x, y \in H;$$

(H_B^2) *il existe un nombre réel $c_2 > 0$ tel que*

$$\|B^0(t,x)y\| \leq c_2(1+||x||+||y||) \text{ pour } t \in I,\ y \in \mathrm{D}\,(B(t,x)).$$

Soient $f : I \times I \times H \times H \to H$ et $g : I \times H \times H \to H$ deux applications satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1. Alors, pour tout $(\psi, \phi) \in W^{1,2}(I,H) \times W^{1,2}(I,H)$ et pour tout $(u_0, x_0) \in \mathrm{D}(A(0,\psi(0))) \times \mathrm{D}(B(0,\phi(0)))$, le système

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,\psi(t))u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ -\dot{x}(t) \in B(t,\phi(t))x(t) + g(t,u(t),x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u(t),x(t)) \in \mathrm{D}\,(A(t,\psi(t))) \times \mathrm{D}\,(B(t,\phi(t))), \quad t \in I, \\ (u(0),x(0)) = (u_0,x_0), \end{cases}$$

admet une unique solution (u,x), telle que

$$||\dot{u}(t)|| \leq k_1(1+\dot{\eta}_1(t)+\dot{\eta}_2(t)) \text{ et } ||\dot{x}(t)|| \leq k_2(1+\dot{\eta}_1(t)+\dot{\eta}_2(t)) \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.88}$$

pour des constantes réelles positives k_1 et k_2, qui dépendent de $\|u_0\|$, $\|x_0\|$, c_1, c_2, T, λ_1, λ_2, $\psi(\cdot)$, $\phi(\cdot)$, m_f, m_g, $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$, où les applications η_1 et η_2 sont définies par

$$\eta_1(t) = \int_0^t \left[\dot{\alpha}(s) + \lambda_1\|\dot{\psi}(s)\|\right] ds,\ \forall t \in I,$$

et

$$\eta_2(t) = \int_0^t \left[\dot{\beta}(s) + \lambda_2\|\dot{\phi}(s)\|\right] ds,\ \forall t \in I.$$

Démonstration. Pour tout $(\psi, \phi) \in W^{1,2}(I,H) \times W^{1,2}(I,H)$ fixe, définissons les opérateurs maximaux monotones dépendants du temps $A_\psi(t) := A(t,\psi(t))$ et $B_\phi(t) := B(t,\phi(t))$.

Soient $s,t \in I$ tels que $0 \leq s \leq t \leq T$, alors, on a de (H_A^1)

$$\begin{aligned} \mathrm{dis}(A_\psi(t), A_\psi(s)) &= \mathrm{dis}(A(t,\psi(t)), A(s,\psi(s))) \\ &\leq |\alpha(t)-\alpha(s)| + \lambda_1||\psi(t)-\psi(s)|| \\ &\leq \int_s^t \dot{\alpha}(\tau)d\tau + \lambda_1 \int_s^t ||\dot{\psi}(\tau)||d\tau = \eta_1(t) - \eta_1(s), \end{aligned}$$

où $\eta_1 \in W^{1,2}(I,\mathbb{R})$ est définie par

$$\eta_1(t) = \int_0^t \left[\dot{\alpha}(s) + \lambda_1\|\dot{\psi}(s)\|\right] ds, \quad t \in I.$$

De (H_B^1), pour tous $t,s \in I$ tels que $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{dis}(B_\phi(t), B_\phi(s)) &= \mathrm{dis}(B(t,\phi(t)), B(s,\phi(s))) \\ &\leq |\beta(t)-\beta(s)| + \lambda_2||\phi(t)-\phi(s)|| \\ &\leq \int_s^t \dot{\beta}(\tau)d\tau + \lambda_2 \int_s^t ||\dot{\phi}(\tau)||d\tau = \eta_2(t) - \eta_2(s), \end{aligned}$$

où $\eta_2 \in W^{1,2}(I,\mathbb{R})$ est définie par

$$\eta_2(t) = \int_0^t \left[\dot{\beta}(s) + \lambda_2\|\dot{\phi}(s)\|\right] ds, \quad t \in I.$$

De plus, d'après (H_A^2) et (H_B^2), il existe deux constantes réelles positives c_3 et c_4 qui dépendent de c_1 et $\psi(\cdot)$ (resp. c_2 et $\phi(\cdot)$) telles que pour tout $(x,z) \in \mathrm{D}(A(t,\psi(t))) \times \mathrm{D}(B(t,\phi(t)))$

$$\begin{aligned}||A_\psi^0(t)x|| = ||A^0(t,\psi(t))x|| &\leq c_1(1+||\psi(t)||+||x||)\\ &\leq c_3(1+||x||),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}||B_\phi^0(t)z|| = ||B^0(t,\phi(t))z|| &\leq c_2(1+||\phi(t)||+||z||)\\ &\leq c_4(1+||z||).\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du Théorème 2.1 sont satisfaites, il s'ensuit donc l'existence et l'unicité de la solution de notre système couplé. De plus, il existe des constantes appropriées k_1, k_2 telles que les estimations dans (2.88) soient vraies. ∎

Maintenant, nous sommes prêts à démontrer le résultat principal de cette section. Nous allons minimiser une fonctionnelle intégrale sur les applications "de contrôle" intervenant dans l'état des opérateurs maximaux monotones du le système dynamique considéré.

Théorème 2.3. *Supposons que pour tout $(t,z) \in I \times H$, $A(t,z) : \mathrm{D}(A(t,z)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant (H_A^1)-(H_A^2). Supposons de plus que*
(H_A^3) pour tout sous-ensemble borné $X \subset H$, l'ensemble $\mathrm{D}\left(A(I \times X)\right)$ est relativement boule-compact.
Supposons que pour tout $(t,z) \in I \times H$, $B(t,z) : \mathrm{D}(B(t,z)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant (H_B^1)-(H_B^2). Supposons en outre que
(H_B^3) pour tout sous-ensemble borné $X \subset H$, l'ensemble $\mathrm{D}\left(B(I \times X)\right)$ est relativement boule-compact.
Soient $f : I \times I \times H \times H \to H$ et $g : I \times H \times H \to H$ deux applications satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1. La fonctionnelle du coût $L : I \times H \times H \to [0,+\infty[$ est une application mesurable telle que $L(t,\cdot,\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur $H \times H$ pour chaque $t \in I$, et $L(t,x,\cdot)$ est convexe pour chaque $(t,x) \in I \times H$. Soient $\Psi, \Phi : I \rightrightarrows H$ des multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes telles que $\Psi(t) \subset \xi_1\overline{B}_H$,

$\Phi(t) \subset \xi_2 \overline{B}_H$ pour tout $t \in I$, où ξ_i $(i = 1, 2)$ sont des constantes réelles positives. Définissons les ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ par

$$\mathcal{X} = \{\psi \in W^{1,2}(I, H) : \ \psi(t) = w_0 + \int_0^t \dot{\psi}(s)ds, \ \dot{\psi} \in S^2_\Psi\},$$

et

$$\mathcal{Y} = \{\phi \in W^{1,2}(I, H) : \ \phi(t) = z_0 + \int_0^t \dot{\phi}(s)ds, \ \dot{\phi} \in S^2_\Phi\},$$

où S^2_Ψ et S^2_Φ sont les ensembles de toutes les sélections dans $L^2_H(I)$ de Ψ et Φ respectivement. Alors, le problème

$$\min_{(\psi,\phi)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \int_0^T L(t, u_\psi(t), \dot{x}_\phi(t))dt,$$

admet une solution optimale, où (u_ψ, x_ϕ) est la solution associée au contrôle $(\psi, \phi) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ du système contrôlé

$$(\mathcal{CS}_{\psi,\phi}) \qquad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, \psi(t))u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ -\dot{x}(t) \in B(t, \phi(t))x(t) + g(t, u(t), x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u(t), x(t)) \in \mathrm{D}\left(A(t, \psi(t))\right) \times \mathrm{D}\left(B(t, \phi(t))\right), \quad t \in I, \\ (u(0), x(0)) = (u_0, x_0) \in \mathrm{D}\left(A(0, w_0)\right) \times \mathrm{D}\left(B(0, z_0)\right). \end{cases}$$

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont convexes. Montrons que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des sous-ensembles compacts dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$.
Soit $(\psi, \phi) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, alors, par construction des ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on a

$$\psi(t) \in w_0 + \int_0^t \Psi(s)ds, \text{ pour tout } t \in I,$$

et

$$\phi(t) \in z_0 + \int_0^t \Phi(s)ds, \text{ pour tout } t \in I.$$

Comme $s \mapsto \Psi(s)$ et $s \mapsto \Phi(s)$ sont deux multi-applications mesurables, intégrablement bornées, à valeurs convexes compactes, alors le second membre de chacune des deux dernières inclusions est convexe compact d'après Théorème 1.28. Ainsi, $\mathcal{X}(t)$ est inclus dans le compact $X(t) = w_0 + \int_0^t \Psi(s)ds$ et $\mathcal{Y}(t)$ est inclus dans le compact $Y(t) = z_0 + \int_0^t \Phi(s)ds$, pour tout $t \in I$. Or tout compact de H (H espace séparé) est fermé, i.e. $X(t) = \overline{X}(t)$ et $Y(t) = \overline{Y}(t)$, pour tout $t \in I$. On en déduit que $\overline{\mathcal{X}(t)} \subset X(t)$ et $\overline{\mathcal{Y}(t)} \subset Y(t)$, pour tout $t \in I$. De Proposition 1.43, il résulte que $\overline{\mathcal{X}(t)}$ et $\overline{\mathcal{Y}(t)}$ sont compacts, pour tout $t \in I$. Donc, $\mathcal{X}(t)$ et $\mathcal{Y}(t)$ sont relativement compacts, pour tout $t \in I$. De plus, les ensembles $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont équicontinus. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, on déduit que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont relativement compacts dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$.

Il reste à vérifier que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont fermés dans $\mathcal{C}_H(I)$.

Soit une suite $(\psi_n, \phi_n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ convergeant vers $(\psi, \phi) \in \mathcal{C}_H(I) \times \mathcal{C}_H(I)$ et satisfaisant les estimations suivantes

$$||\dot{\psi}_n(t)|| \leq \xi_1 \text{ et } ||\dot{\phi}_n(t)|| \leq \xi_2 \text{ pour tout } t \in I,$$

c'est-à-dire que la suite $(\dot{\psi}_n, \dot{\phi}_n)$ est bornée dans $L^2_H(I) \times L^2_H(I)$. Comme les ensembles non vides S^2_Ψ et S^2_Φ sont fortement fermés dans $L^2_H(I)$, alors, quitte à remplacer par une sous-suite notée encore $(\dot{\psi}_n, \dot{\phi}_n)$, cette dernière converge faiblement dans $L^2_H(I) \times L^2_H(I)$ vers $(y, z) \in S^2_\Psi \times S^2_\Phi$ et

$$\lim_n \psi_n(t) = w_0 + \int_0^t y(s)ds \text{ et } \lim_n \phi_n(t) = z_0 + \int_0^t z(s)ds, \ t \in I.$$

En identifiant les limites, on trouve

$$\psi(t) = w_0 + \int_0^t y(s)ds \text{ et } \phi(t) = z_0 + \int_0^t z(s)ds,$$

avec $(\dot{\psi}, \dot{\phi}) = (y, z)$ p.p. D'où $(\psi, \phi) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Les ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont par conséquent fermés dans $\mathcal{C}_H(I)$.

En vertu du Théorème 2.2, pour tout $(\psi, \phi) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, il existe une unique solution (u_ψ, x_ϕ) au système $(\mathcal{CS}_{\psi,\phi})$. De plus, notons de (2.88) qu'il y a des constantes réelles positives k_1, k_2 telles que

$$||\dot{u}_\psi(t)|| \leq k_1(1 + \dot{\eta}_1(t) + \dot{\eta}_2(t)) \text{ et } ||\dot{x}_\phi(t)|| \leq k_2(1 + \dot{\eta}_1(t) + \dot{\eta}_2(t)) \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.89}$$

où les applications η_1 et η_2 sont définies par

$$\eta_1(t) = \int_0^t [\dot{\alpha}(s) + \lambda_1 \xi_1]ds, \ \forall t \in I,$$

et

$$\eta_2(t) = \int_0^t [\dot{\beta}(s) + \lambda_2 \xi_2]ds, \ \forall t \in I.$$

Soit $(\psi_n(\cdot), \phi_n(\cdot))$ une suite minimisante de notre problème, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T L(t, u_{\psi_n}(t), \dot{x}_{\phi_n}(t))dt = \min_{(\widetilde{\psi},\widetilde{\phi})\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \int_0^T L(t, u_{\widetilde{\psi}}(t), \dot{x}_{\widetilde{\phi}}(t))dt. \tag{2.90}$$

Alors, supposons que (ψ_n) (resp. (ϕ_n)) converge uniformément vers ψ (resp. ϕ) dans l'ensemble compact $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) de $\mathcal{C}_H(I)$. Rappelons que pour tout $n \geq 1$, (u_{ψ_n}, x_{ϕ_n}) est l'unique solution du système

$$(\mathcal{P}_{\psi_n,\phi_n}) \quad \begin{cases} -\dot{u}_{\psi_n}(t) \in A(t, \psi_n(t))u_{\psi_n}(t) + \displaystyle\int_0^t f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ -\dot{x}_{\phi_n}(t) \in B(t, \phi_n(t))x_{\phi_n}(t) + g(t, u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ (u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)) \in \mathrm{D}\left(A(t, \psi_n(t))\right) \times \mathrm{D}\left(B(t, \phi_n(t))\right), \quad t \in I, \\ (u_{\psi_n}(0), x_{\phi_n}(0)) = (u_0, x_0) \in \mathrm{D}\left(A(0, \psi_n(0))\right) \times \mathrm{D}\left(B(0, \phi_n(0))\right), \end{cases}$$

avec $(u_{\psi_n}, x_{\phi_n}) \in W^{1,2}(I,H) \times W^{1,2}(I,H)$ et par les estimations (2.89), on obtient

$$||\dot{u}_{\psi_n}(t)|| \leq k_1(1+\dot{\eta}_1(t)+\dot{\eta}_2(t)) \text{ et } ||\dot{x}_{\phi_n}(t)|| \leq k_2(1+\dot{\eta}_1(t)+\dot{\eta}_2(t)) \text{ p.p. } t \in I. \quad (2.91)$$

De plus, les suites $(u_{\psi_n}(\cdot))$, $(x_{\phi_n}(\cdot))$ sont équicontinues, et il existe $\rho > 0$ tel que

$$(u_{\psi_n}(t)) \subset \rho\overline{B}_H \quad \text{et} \quad (x_{\phi_n}(t)) \subset \rho\overline{B}_H \text{ pour tout } t \in I. \quad (2.92)$$

Notons également qu'il existe $\kappa > 0$ tel que

$$(\psi_n(t)) \subset \kappa\overline{B}_H \text{ et } (\phi_n(t)) \subset \kappa\overline{B}_H \text{ pour tout } t \in I. \quad (2.93)$$

Ceci avec le fait que $(u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)) \in \mathrm{D}\left(A(t,\psi_n(t))\right) \times \mathrm{D}\left(B(t,\phi_n(t))\right)$ pour chaque $t \in I$ et n, il s'ensuit

$$(u_{\psi_n}(t)) \subset \mathrm{D}\left(A(I \times \kappa\overline{B}_H)\right) \quad \text{et} \quad (x_{\phi_n}(t)) \subset \mathrm{D}\left(B(I \times \kappa\overline{B}_H)\right).$$

En combinant les dernières inclusions avec (2.92), (H_A^3) et (H_B^3), il résulte que les ensembles $\{u_{\psi_n}(t) : \ n \geq 1\}$ et $\{x_{\phi_n}(t) : \ n \geq 1\}$ sont relativement compacts dans H, pour chaque $t \in I$. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir Théorème 1.47) et Théorème 1.48 avec (2.91), quitte à remplacer par des sous-suites de même notation, on peut supposer que

$$(u_{\psi_n}) \ \text{ converge uniformément vers } u \in W^{1,2}(I,H) \text{ avec } u(0) = u_0, \quad (2.94)$$

$$(\dot{u}_{\psi_n}) \ \text{ converge faiblement dans } L_H^2(I) \text{ vers } \dot{u}, \quad (2.95)$$

$$(x_{\phi_n}) \text{ converge uniformément vers } x \in W^{1,2}(I,H) \text{ avec } x(0) = x_0, \quad (2.96)$$

$$(\dot{x}_{\phi_n}) \ \text{ converge faiblement dans } L_H^2(I) \text{ vers } \dot{x}. \quad (2.97)$$

Par le théorème de semi-continuité inférieure (voir Théorème 8.1.6 [29]) appliqué à la fonctionnelle intégrale convexe semi-continue inférieure associée à L, on déduit

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T L(t, u_{\psi_n}(t), \dot{x}_{\phi_n}(t))dt \geq \int_0^T L(t, u(t), \dot{x}(t))dt.$$

Ceci avec (2.90), il s'ensuit que

$$\inf_{(\widetilde{\psi},\widetilde{\phi})\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \int_0^T L(t, u_{\widetilde{\psi}}(t), \dot{x}_{\widetilde{\phi}}(t))dt = \int_0^T L(t, u(t), \dot{x}(t))dt.$$

D'une part, en combinant (2.2), (2.94) et (2.96), il existe $\varphi_{f,\rho}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour tous $t, s \in I$

$$\begin{aligned} ||f(t,s,u_{\psi_n}(s),&x_{\phi_n}(s)) - f(t,s,u(s),x(s))|| \\ &\leq \varphi_{f,\rho}(t)\Big(||u_{\psi_n}(s) - u(s)|| + ||x_{\phi_n}(s) - x(s)||\Big) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

D'autre part, de (2.4), (2.94) et (2.96), il existe $\varphi_{g,\rho}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$, telle que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} ||g(t, u_{\psi_n}(t), &x_{\phi_n}(t)) - g(t, u(t), x(t))|| \\ &\leq \varphi_{g,\rho}(t)\Big(||u_{\psi_n}(t) - u(t)|| + ||x_{\phi_n}(t) - x(t)||\Big) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \ n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.98}$$

De (2.1) et (2.92), on déduit que pour tout $(t, s) \in I \times I$ et tout n

$$||f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))|| \leq m_f(1 + 2\rho) < +\infty.$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_0^t f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))ds - \int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds \right\| = 0.$$

Ceci avec le fait que

$$\left\| \int_0^t f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))ds \right\| \leq Tm_f(1 + 2\rho) < +\infty,$$

encore une fois, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on conclut

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\| \int_0^t f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))ds - \int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds \right\|^2 dt = 0. \tag{2.99}$$

De plus, de (2.3) et (2.92), on écrit

$$||g(t, u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t))|| \leq m_g(1 + 2\rho) < +\infty,$$

en tenant compte de (2.98), il découle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|g(t, u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)) - g(t, u(t), x(t))\|^2 dt = 0. \tag{2.100}$$

Rappelons que $(u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)) \in \mathrm{D}\,(A(t, \psi_n(t))) \times \mathrm{D}\,(B(t, \phi_n(t)))$ pour tout $t \in I$ et $(u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)) \to (u(t), x(t))$ (voir (2.94) et (2.96)), les suites $(A^0(t, \psi_n(t))u_{\psi_n}(t))$, $(B^0(t, \phi_n(t))x_{\phi_n}(t))$ sont bornées en utilisant (H_A^2), (H_B^2) et (2.92), (2.93) pour chaque $t \in I$. De plus, notons que

$$\operatorname{dis}\left(A(t, \psi_n(t)), A(t, \psi(t))\right) \leq \lambda_1 \|\psi_n(t) - \psi(t)\| \to 0, \tag{2.101}$$

$$\operatorname{dis}\left(B(t, \phi_n(t)), B(t, \phi(t))\right) \leq \lambda_2 \|\phi_n(t) - \phi(t)\| \to 0, \tag{2.102}$$

lorsque $n \to \infty$, d'après (H_A^1), (H_B^1) et les modes de convergence ci-dessus. D'où, $(u(t), x(t)) \in \mathrm{D}\,(A(t, \psi(t))) \times \mathrm{D}\,(B(t, \phi(t)))$, par application du Lemme 1.38.

Reste à montrer que

$$-\dot{u}(t) \in A(t, \psi(t))u(t) + \int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I,$$

et

$$-\dot{x}(t) \in B(t, \phi(t))x(t) + g(t, u(t), x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \int_0^t f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))ds, \\ g_n(t) &= g(t, u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)), \\ h(t) &= \int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds. \end{aligned}$$

En utilisant (2.95) et (2.99), remarquons que $(\dot{u}_{\psi_n}(\cdot) + f_n(\cdot))$ converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot{u}(\cdot) + h(\cdot)$. Alors, $(\dot{u}_{\psi_n}(\cdot) + f_n(\cdot))$ converge au sens de Komlós vers $\dot{u}(\cdot) + h(\cdot)$. Alors, il y a un ensemble négligeable Y_1 tel que pour tout $t \in I \setminus Y_1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\dot{u}_{\psi_k}(t) + f_k(t) \Big) = \dot{u}(t) + \int_0^t f(t, s, u(s), x(s))ds, \tag{2.103}$$

et

$$-\dot{u}_{\psi_n}(t) \in A(t, \psi_n(t))u_{\psi_n}(t) + \int_0^t f(t, s, u_{\psi_n}(s), x_{\phi_n}(s))ds. \tag{2.104}$$

En utilisant (2.97) et (2.100), on remarque que

$$(\dot{x}_{\phi_n}(\cdot) + g_n(\cdot)) \text{ converge faiblement dans } L^2_H(I) \text{ vers } \dot{x}(\cdot) + g(\cdot, u(\cdot), x(\cdot)).$$

D'où, $(\dot{x}_{\phi_n}(\cdot) + g_n(\cdot))$ converge au sens de Komlós vers $\dot{x}(\cdot) + g(\cdot, u(\cdot), x(\cdot))$. Alors, il y a un ensemble négligeable Y_2 tel que pour $t \in I \setminus Y_2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\dot{x}_{\phi_k}(t) + g_k(t) \Big) = \dot{x}(t) + g(t, u(t), x(t)),$$

et

$$-\dot{x}_{\phi_n}(t) \in B(t, \phi_n(t))x_{\phi_n}(t) + g(t, u_{\psi_n}(t), x_{\phi_n}(t)). \tag{2.105}$$

Soit $(y, z) \in \mathrm{D}(A(t, \psi(t))) \times \mathrm{D}(B(t, \phi(t)))$. En combinant (2.101), (2.102), (H^2_A), (H^2_B), Lemme 1.40 assure alors l'existence d'une suite (y_n, z_n) telle que

$$y_n \in \mathrm{D}(A(t, \psi_n(t))),\ y_n \to y, \text{ et } A^0(t, \psi_n(t))y_n \to A^0(t, \psi(t))y, \tag{2.106}$$

$$z_n \in \mathrm{D}(B(t, \phi_n(t))),\ z_n \to z, \text{ et } B^0(t, \phi_n(t))z_n \to B^0(t, \phi(t))z. \tag{2.107}$$

De (2.104), et la monotonie de $A(t, \psi_n(t))$ pour tout $t \in I$, on a

$$\langle \dot{u}_{\psi_n}(t) + f_n(t), u_{\psi_n}(t) - y_n \rangle \leq \langle A^0(t, \psi_n(t))y_n, y_n - u_{\psi_n}(t) \rangle \ \text{ p.p.} \tag{2.108}$$

De même, de (2.105), et la monotonie de $B(t,\phi_n(t))$ pour tout $t\in I$, on a

$$\langle \dot{x}_{\phi_n}(t)+g_n(t), x_{\phi_n}(t)-z_n\rangle \leq \langle B^0(t,\phi_n(t))z_n, z_n - x_{\phi_n}(t)\rangle.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\langle \dot{u}_{\psi_n}(t)+f_n(t), u(t)-y\rangle &= \langle \dot{u}_{\psi_n}(t)+f_n(t), u_{\psi_n}(t)-y_n\rangle \\ &\quad + \langle \dot{u}_{\psi_n}(t)+f_n(t), u(t)-u_{\psi_n}(t)-(y-y_n)\rangle,\end{aligned}$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), u(t)-y\rangle &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), u_{\psi_k}(t)-y_k\big\rangle \\ &+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), u(t)-u_{\psi_k}(t)\rangle + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), y_k-y\big\rangle. \quad (2.109)\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient en utilisant (2.108)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), u(t)-y\big\rangle &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big\langle A^0(t,\psi_k(t))y_k, y_k-u_{\psi_k}(t)\big\rangle \\ &+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), u(t)-u_{\psi_k}(t)\big\rangle + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big\langle \dot{u}_{\psi_k}(t)+f_k(t), y_k-y\big\rangle.\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $n\to\infty$ dans cette dernière estimation en tenant compte de (2.94), (2.103), (2.106), il résulte

$$\Big\langle \dot{u}(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds, u(t)-y\Big\rangle \leq \big\langle A^0(t,\psi(t))y, y-u(t)\big\rangle \text{ p.p.}$$

Par application du Lemme 1.35, on obtient

$$-\dot{u}(t)\in A(t,\psi(t))u(t)+\int_0^t f(t,s,u(s),x(s))ds \text{ p.p. } t\in I.$$

En procédant de la même manière, on montre que

$$-\dot{x}(t)\in B(t,\phi(t))x(t)+g(t,u(t),x(t)) \text{ p.p. } t\in I,$$

avec $(u(t),x(t))\in \mathrm{D}(A(t,\psi(t)))\times\mathrm{D}(B(t,\phi(t)))$ pour tout $t\in I$. De l'unicité de la solution (voir Théorème 2.2), il s'ensuit que $(u,x)=(u_\psi,x_\phi)$, où (u_ψ,x_ϕ) est l'unique solution associée au contrôle $(\psi,\phi)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ du système $(\mathcal{CS}_{\psi,\phi})$.

■

Chapitre 3

Sur une classe de problèmes d'évolution régis par des opérateurs maximaux monotones avec une perturbation intégrale

3.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'étude d'une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps et de l'état avec une perturbation intégrale, dans le contexte d'un espace de Hilbert séparable.

Dans la première section, nous considérerons le problème régi par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps et de l'état suivant

$$(\mathcal{IDP}_{A(t,u)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, u(t))u(t) + \displaystyle\int_{T_0}^{t} f(t, s, u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I := [T_0, T], \\ u(T_0) = u_0 \in D(A(T_0, u_0)), \end{cases}$$

où $A(t, x) : D(A(t, x)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone, pour chaque $(t, x) \in I \times H$, et $f : I \times I \times H \to H$ est une application.

A cette fin, nous rétablissons d'abord la démonstration de l'existence de la solution de l'inclusion intégro-différentielle avec des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps :

$$(\mathcal{IDP}_{A(t)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \displaystyle\int_{T_0}^{t} f(t,s,u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u(T_0) = u_0 \in D(A(T_0)), \end{cases}$$

afin d'estimer la vitesse de la solution et d'énoncer le résultat correspondant à l'unicité, par une approche de discrétisation.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous traitons le problème de contrôle optimal

$$(\mathcal{OCP}) \qquad \min \phi[u,a,b] = \phi_1(u(T)) + \int_0^T \phi_2(t,u(t),a(t),b(t),\dot{u}(t),\dot{a}(t),\dot{b}(t))dt,$$

sur l'ensemble des applications de contrôle $(a(\cdot), b(\cdot))$ et les solutions associées $u(\cdot)$ du problème contrôlé

$$(\mathcal{CP}_{a,b}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,a(t))u(t) + \displaystyle\int_0^t f(t,s,b(s),u(s))ds \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ \quad u(t) \in D(A(t,a(t)))\ t \in [0,T], \\ (a(\cdot),b(\cdot)) \in W^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^{n+m}), \\ a(0) = a_0,\ u(0) = u_0 \in D(A(0,a_0)), \end{cases}$$

où la fonctionnelle de coût $\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ et le coût de fonctionnement $\phi_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{4n+2m} \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfont à des conditions appropriées.

3.2 Étude d'une inclusion intégro-différentielle par des opérateurs maximaux monotones

Nous commençons cette section par donner des détails importants (Proposition 4.4 [27]) qui concerne le résultat d'existence pour $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$. Nous réussissons ensuite à obtenir l'unicité de la solution et une estimation de sa dérivée. Soit $I = [T_0, T]$.

Théorème 3.1. *Soit $A(t) : \mathrm{D}(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone pour chaque $t \in I$, satisfaisant*

(h_A^1) *il existe une fonction $\alpha \in W^{1,2}(I,\mathbb{R})$ qui est positive sur $[T_0, T[$, croissante avec $\alpha(T_0) = 0$ et $\alpha(T) < +\infty$ telle que*

$$\mathrm{dis}\,(A(t), A(s)) \leq |\alpha(t) - \alpha(s)|,\ \forall t, s \in I;$$

(h_A^2) *il existe un nombre réel positive c_1 tel que*

$$\|A^0(t)x\| \leq c_1(1 + ||x||) \ \ \textit{pour}\ \ t \in I,\ x \in \mathrm{D}\,(A(t));$$

(h_A^3) *l'ensemble* $\mathrm{D}\,(A(t))$ *est relativement boule-compact pour tout* $t \in I$.

Soit $f : I \times I \times H \longrightarrow H$ *une application telle que*

(i) $f(\cdot,\cdot,x)$ *est mesurable sur* $I \times I$ *pour chaque* $x \in H$ *et* $f(t,s,\cdot)$ *est continue sur* H *pour chaque* $(t,s) \in I \times I$;

(ii) *pour tout* $\eta > 0$, *il existe une fonction* $\xi_\eta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}_+}(I)$ *telle que pour tous* $t,s \in I$ *et pour tous* $x,y \in \overline{B}_H[0,\eta]$

$$\|f(t,s,x) - f(t,s,y)\| \leq \xi_\eta(t)\|x-y\|;$$

(iii) *il existe une constante réelle positive* $m > 0$ *telle que pour tout* $(t,s,x) \in I \times I \times H$, *on a*

$$\|f(t,s,x)\| \leq m(1+\|x\|).$$

Alors, pour tout $u_0 \in \mathrm{D}\,(A(T_0))$, *le problème intégro-différentiel* $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$ *admet une unique solution absolument continue* $u(\cdot)$ *qui satisfait*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1+\dot{\alpha}(t)) \text{ p.p.}\, t \in I, \tag{3.1}$$

pour la constante réelle positive $K = (2(T-T_0)m + \frac{3}{2}c)(K_1+1) + 2$ *où*

$$K_1 = \left(\|u_0\| + (2(T-T_0)m + \frac{3}{2}c + 2)(T+\alpha(T))\right) \exp\left(((T-T_0)m + \frac{3}{2}c)(T-T_0) + m(T+\alpha(T))^2\right).$$

Démonstration. Proposition 4.4 [27] assure l'existence d'une solution $u(\cdot)$. Notre principale préoccupation est de trouver une estimation appropriée de $\dot{u}(\cdot)$, puis de prouver que $u(\cdot)$ est unique.

Partie 1 : Estimation de $\dot{u}(\cdot)$. Pour ce faire, on reprend la démonstration d'existence de la solution.

Étape 1. Construction de la suite (u_n).

Pour tout $n \geq 1$, on définit une partition de I par $T_0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = T$.

On pose pour tout $n \geq 1$ et $i = 0,1,\cdots,n-1$,

$$h_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \qquad \alpha_{i+1}^n = \alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n).$$

Supposons que

$$h_i^n \leq h_{i+1}^n, \qquad \alpha_i^n \leq \alpha_{i+1}^n.$$

On définit la fonction $\gamma(t) = t + \alpha(t),\ t \in I$. On choisit la partition telle que pour tout $i = 0,\cdots,n-1$ et $n \geq 1$,

$$\gamma_{i+1}^n = \alpha_{i+1}^n + h_{i+1}^n \leq \frac{\gamma(T)}{n} =: \eta_n. \tag{3.2}$$

Fixons un entier $n \geq 1$. On commence par définir $u_0^n := u_0$, pour $i = 0, \cdots, n-1$ et $\tau \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big\{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds\Big\}d\tau\Big), \tag{3.3}$$

où

$$J_{i+1}^n := J_{h_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)} = (I_H + h_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1}.$$

On observe de (3.3) et Proposition 1.34 que

$$u_{i+1}^n \in \mathrm{D}\,(A(t_{i+1}^n)), \tag{3.4}$$

et

$$u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big\{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds\Big\}d\tau \in u_{i+1}^n + h_{i+1}^n A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n.$$

Alors, on écrit

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1}^n} \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n + \frac{1}{h_{i+1}^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big\{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds\Big\}d\tau. \tag{3.5}$$

Grâce aux Lemme 1.39 et (3.3), on a

$$\begin{aligned}
&\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&= \Big\|J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big\{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds\Big\}d\tau\Big) - u_i^n\Big\| \\
&\leq \Big\|J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big\{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds\Big\}d\tau\Big) - J_{i+1}^n(u_i^n)\Big\| \\
&\quad + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big\|\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds\Big\|d\tau + h_{i+1}^n\|A^0(t_i^n)u_i^n\| \\
&\quad + \mathrm{dis}\,(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) + \sqrt{h_{i+1}^n(1 + \|A^0(t_i^n)u_i^n\|)\mathrm{dis}\,(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq{}& \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \|f(\tau, s, u_j^n)\|dsd\tau + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{t_i^n}^{\tau} \|f(\tau, s, u_i^n)\|dsd\tau \\
&+ \frac{3}{2}h_{i+1}^n\|A^0(t_i^n)u_i^n\| + \frac{3}{2}\mathrm{dis}\,(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) + \frac{1}{2}h_{i+1}^n.
\end{aligned}$$

Ensuite, en combinant (h_A^1), (h_A^2) et (iii), on obtient

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \frac{3}{2}h_{i+1}^n c(1+\|u_i^n\|) + \frac{3}{2}\alpha_{i+1}^n + \frac{1}{2}h_{i+1}^n \\ + h_{i+1}^n m \sum_{j=0}^{i-1} h_{j+1}^n(1+\|u_j^n\|) + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(\tau - t_i^n)m(1+\|u_i^n\|)d\tau,\end{aligned}$$

d'après (3.2) et le fait que $\tau - t_i^n \leq T - T_0$, on simplifie

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq h_{i+1}^n\left((T-T_0)m + \frac{3}{2}c\right)\|u_i^n\| + \gamma_{i+1}^n\left((T-T_0)m + \frac{3}{2}c + 2\right) \\ + h_{i+1}^n m \sum_{j=0}^{i-1} h_{j+1}^n(1+\|u_j^n\|). \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Rappelons que $h_{i+1}^n \leq \eta_n$ pour $i = 0, \cdots, n-1$, et $\sum_{j=0}^{i-1} h_{j+1}^n \leq T - T_0$, ceci à l'aide de (3.2), on trouve

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq h_{i+1}^n\left((T-T_0)m + \frac{3}{2}c\right)\|u_i^n\| + \gamma_{i+1}^n\left(2(T-T_0)m + \frac{3}{2}c + 2\right) \\ + \eta_n m \sum_{j=0}^{i-1} h_{j+1}^n\|u_j^n\|.\end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n\| \leq \left(1 + h_{i+1}^n\left((T-T_0)m + \frac{3}{2}c\right)\right)\|u_i^n\| \\ + \gamma_{i+1}^n\left(2(T-T_0)m + \frac{3}{2}c + 2\right) + \eta_n^2 m \sum_{j=0}^{i-1}\|u_j^n\|.\end{aligned}$$

En appliquant Lemme 1.57, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1, \cdots, n$

$$\|u_i^n\| \leq K_1, \qquad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned}K_1 := \left(\|u_0\| + \left(2(T-T_0)m + \frac{3}{2}c + 2\right)\gamma(T)\right) \\ \times \exp\left(((T-T_0)m + \frac{3}{2}c)(T-T_0) + m\gamma^2(T)\right).\end{aligned}$$

De retour à (3.6), à l'aide de (3.2), on trouve

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \gamma_{i+1}^n K, \qquad (3.8)$$

avec

$$K := \left(2(T-T_0)m + \frac{3}{2}c\right)(K_1 + 1) + 2.$$

Pour chaque $n \geq 1$, on définit l'application $u_n(\cdot) : I \to H$ par : pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, 0 \leq i \leq n-1$

$$u_n(t) = u_i^n + \frac{t - t_i^n}{h_{i+1}^n}\Bigg(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds \Bigg\} d\tau\Bigg)$$
$$- \int_{t_i^n}^{t} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds \Bigg\} d\tau, \tag{3.9}$$

$u_n(T) = u_n^n, \quad u_n(T_0) = u_0^n.$

Il est clair que la fonction $u_n(\cdot) : I \to H$ est absolument continue pour chaque $n \geq 1$, avec $u_n(t_i^n) = u_i^n$ et $u_n(t_{i+1}^n) = u_{i+1}^n$. De plus, pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{h_{i+1}^n}\Bigg(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(\tau, s, u_j^n)ds + \int_{t_i^n}^{\tau} f(\tau, s, u_i^n)ds \Bigg\} d\tau\Bigg)$$
$$- \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} f(t, s, u_j^n)ds - \int_{t_i^n}^{t} f(t, s, u_i^n)ds. \tag{3.10}$$

En combinant (iii), (3.7), (3.8) et (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2(T - T_0)m(1 + K_1)h_{i+1}^n \\ &\leq \gamma_{i+1}^n(K + 2(T - T_0)m(1 + K_1)), \end{aligned}$$

en tenant compte de (3.2), il résulte

$$\|u_n(t) - u_i^n\| \leq L\eta_n, \tag{3.11}$$

où

$$L := K + 2(T - T_0)m(1 + K_1).$$

Fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors, de (3.2), (3.8) et (3.11), on a

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| &\leq \|u_n(t) - u_j^n\| + \|u_j^n - u_i^n\| + \|u_i^n - u_n(s)\| \\ &\leq \|u_j^n - u_i^n\| + 2L\eta_n \leq \sum_{p=0}^{j-i-1} \|u_{i+p+1}^n - u_{i+p}^n\| + 2L\eta_n \\ &\leq K \sum_{p=0}^{j-i-1} \gamma_{i+p+1}^n + 2L\eta_n = K\Big(\gamma(t_j^n) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L\eta_n \\ &\leq K\Big(\gamma(t) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L\eta_n = K\Big(\gamma(t) - \gamma(s) + \gamma(s) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L\eta_n \\ &\leq K\Big(\gamma(t) - \gamma(s) + \gamma(t_{i+1}^n) - \gamma(t_i^n)\Big) + 2L\eta_n \\ &\leq K\Big(\gamma(t) - \gamma(s)\Big) + K\gamma_{i+1}^n + 2L\eta_n \\ &\leq K\Big(\gamma(t) - \gamma(s)\Big) + (K + 2L)\eta_n. \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'une part, on observe d'après (iii), (3.7), (3.8) et (3.10), que pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t)\| \leq & \frac{1}{h_{i+1}^n}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left\{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n}\|f(\tau, s, u_j^n)\|ds + \int_{t_i^n}^{\tau}\|f(\tau, s, u_i^n)\|ds\right\}d\tau\right) \\
& + \sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n}\|f(t, s, u_j^n)\|ds + \int_{t_i^n}^{t}\|f(t, s, u_i^n)\|ds \\
\leq & \frac{1}{h_{i+1}^n}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left(m(1+K_1)\sum_{j=0}^{i}h_{j+1}^n\right)d\tau\right) + m(1+K_1)\sum_{j=0}^{i}h_{j+1}^n \\
\leq & \frac{1}{h_{i+1}^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2(T-T_0)m(1+K_1) \\
\leq & K\frac{\gamma_{i+1}^n}{h_{i+1}^n} + 2m(T-T_0)(1+K_1),
\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant (3.2)

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq K\left(1 + \frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right) + 2m(T-T_0)(1+K_1). \tag{3.13}$$

Comme $\alpha \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$, alors pour p.p $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n},$$

d'après le théorème de différentielle de Lebesgue, il existe un sous-ensemble de mesure de Lebesgue nulle $S \subset I$, tel que pour chaque $t \in I \setminus S$ il existe une constante finie $a_t < +\infty$, telle que

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq a_t. \tag{3.14}$$

Nous allons maintenant montrer que $(\dot{u}_n)$ est bornée dans $L_H^2(I)$.
D'après (3.13) pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{K}{t_{i+1}^n - t_i^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} r(s)ds + 2m(T-T_0)(1+K_1),$$

où $r(t) = 1 + \dot{\alpha}(t)$ et $r \in L_{\mathbb{R}}^2(I)$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on écrit

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{K}{(t_{i+1}^n - t_i^n)^{1/2}}\left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} r^2(s)ds\right)^{1/2} + 2m(T-T_0)(1+K_1),$$

du fait que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on peut simplifier comme suit

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n\|^2_{L^2_H(I)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{u}_n(t)\|^2 dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{K}{(t_{i+1}^n - t_i^n)^{1/2}} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} r^2(s)ds \right)^{1/2} + 2m(T-T_0)(1+K_1) \right)^2 dt \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{K^2}{t_{i+1}^n - t_i^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} r^2(s)ds + 4m^2(T-T_0)^2(1+K_1)^2 \right) dt, \\
&= 2K^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} r^2(s)ds + 8m^2(T-T_0)^3(1+K_1)^2 \\
&= 2K^2\|r\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(I)} + 8m^2(T-T_0)^3(1+K_1)^2 = \xi^2 < +\infty. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Maintenant, soient les applications $\theta_n, \delta_n : I \to I$ définies par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} T_0 & \text{si } t = T_0 \\ t_i^n & \text{si } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \text{ pour } i \in \{0, \cdots, n-1\}, \end{cases}$$

et

$$\delta_n(t) = \begin{cases} T_0 & \text{si } t = T_0 \\ t_{i+1}^n & \text{si } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \text{ pour } i \in \{0, \cdots, n-1\}. \end{cases}$$

Observons par construction (voir (3.2)) que pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t \text{ et } \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t.$$

De plus, γ étant continue permet de déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\theta_n(t)) = \gamma(t) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \gamma(\delta_n(t)) = \gamma(t). \qquad (3.16)$$

En utilisant (3.4), (3.5), (3.9) et (3.10), on écrit

$$-\dot{u}_n(t) \in A(\delta_n(t))u_n(\delta_n(t)) + g_n(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \qquad u_n(\delta_n(t)) \in \mathrm{D}\left(A(\delta_n(t))\right), \qquad (3.17)$$

où l'application g_n est définie pour tout n et tout $t \in I$ par

$$g_n(t) = \int_{T_0}^{t} f(t, s, u_n(\theta_n(s)))ds.$$

Étape 2. Convergence de la suite (u_n).

Notons de (3.7) que pour tout $t \in I$

$$u_n(\delta_n(t)) \in \mathrm{D}\left(A(\delta_n(t))\right) \bigcap K_1\overline{B}_H,$$

et d'après (h_A^3) l'ensemble $\mathrm{D}\,(A(t))$ est relativement compact pour tout $t \in I$, alors l'ensemble $\{u_n(\delta_n(t)) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact dans H, pour tout $t \in I$. De plus, en combinant (3.12) et (3.16), il s'ensuit

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \leq K\Big(\gamma(t) - \gamma(\theta_n(t))\Big) + (K + 2L)\eta_n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{3.18}$$

De même, on obtient

$$\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Donc, pour tout $t \in I$, $\{u_n(t) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact. De plus $(u_n(\cdot))$ est équicontinue. En utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir Théorème 1.47), on peut extraire une sous-suite de $(u_n(\cdot))$ notée encore $(u_n(\cdot))$ qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$ avec $u(0) = u_0$.
Remarquons que, pour tout $t \in I$

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|,$$

alors, en utilisant (3.18), et la convergence uniforme de (u_n) vers u, il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0. \tag{3.19}$$

Procédant de la même manière, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0. \tag{3.20}$$

Ensuite, de (3.15), on remarque que la suite, $(\dot{u}_n(\cdot))$ est bornée dans $L^2_H(I)$. Alors, on peut extraire une sous-suite notée encore $(\dot{u}_n(\cdot))$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.
Grâce à (3.19) et à la continuité de $f(t, s, \cdot)$ pour tout $(t, s) \in I \times I$, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t, s, u_n(\theta_n(s))) - f(t, s, u(s))\| = 0. \tag{3.21}$$

De (iii) et (3.7), on a pour tout $(t, s) \in I \times I$

$$\|f(t, s, u_n(\theta_n(s)))\| \leq m(1 + K_1), \tag{3.22}$$

ceci avec (3.21), le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_{T_0}^t f(t, s, u_n(\theta_n(s)))ds - \int_{T_0}^t f(t, s, u(s))ds \right\| = 0.$$

De plus, d'après (3.22)

$$\|g_n(t)\| = \left\| \int_{T_0}^{t} f(t,s,u_n(\theta_n(s)))ds \right\| \leq m(T-T_0)(1+K_1). \tag{3.23}$$

Alors, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue assure

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T} \left\| \int_{T_0}^{t} f(t,s,u_n(\theta_n(s)))ds - \int_{T_0}^{t} f(t,s,u(s))ds \right\|^2 dt = 0.$$

Étape 3. Existence de la solution.

Nous allons montrer que u est une solution du problème $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$.

Tout d'abord, montrons que $u(t) \in \mathrm{D}\,(A(t))$ pour tout $t \in I$.

Rappelons que $u_n(\delta_n(t)) \in \mathrm{D}\,(A(\delta_n(t)))$ pour tout $t \in I$ (voir (3.17)). Alors, de (h_A^1) et (3.2), on remarque que

$$\mathrm{dis}\,(A(\delta_n(t)), A(t)) \leq |\alpha(\delta_n(t)) - \alpha(t)| \leq \eta_n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty, \tag{3.24}$$

car $\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$ et $\alpha(\cdot)$ est une application continue.

Remarquons de (h_A^2) et (3.7) que $(y_n) = (A^0(\delta_n(t))u_n(\delta_n(t)))$ est bornée dans H. Alors, on peut extraire de (y_n) une sous suite (notée encore (y_n)) qui converge faiblement vers $y \in H$. En appliquant Lemme 1.38 à l'aide de (3.20), on conclut que $u(t) \in \mathrm{D}\,(A(t))$ pour tout $t \in I$.

Posons $g(t) = \int_0^t f(t,s,u(s))ds$ pour tout $t \in I$. Comme la suite $(\dot{u}_n(\cdot) + g_n(\cdot))$ converge faiblement dans $L_H^2(I)$ vers $\dot{u}(\cdot) + g(\cdot)$. Alors, par le théorème de Banach-Mazur, il existe une suite (ξ_n) qui converge fortement dans $L_H^2(I)$ vers $\dot{u}(\cdot) + g(\cdot)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$

$$\xi_n \in co\{\dot{u}_j + g_j,\ j \geq n\}.$$

Alors, on peut extraire de (ξ_n) une sous-suite qui converge p.p. vers $\dot{u}(\cdot) + g(\cdot)$, i.e., il existe un sous-ensemble S' de I de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $t \in I \setminus S'$

$$\dot{u}(t) + \int_0^t f(t,s,u(s))ds \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\xi_j(t),\ j \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{\dot{u}_j(t) + g_j(t),\ j \geq n\}.$$

Alors, pour tout $w \in H$, $t \in I \setminus S'$, on a

$$\langle \dot{u}(t) + \int_0^t f(t,s,u(s))ds, w\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), w\rangle. \tag{3.25}$$

Rappelons que pour tout $t \in I$, $u(t) \in \mathrm{D}\,(A(t))$. Pour montrer l'inclusion intégro-différentielle

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \int_0^t f(t,s,u(s))ds \;\text{ p.p. } t \in I,$$

en utilisant Lemme 1.35, il suffit de montrer que

$$\langle \dot{u}(t)+\int_0^t f(t,s,u(s))ds, u(t)-\mu\rangle \leq \langle A^0(t)\mu, \mu-u(t)\rangle \quad \text{p.p. } t\in I, \text{ pour tout } \mu\in \mathrm{D}\,(A(t)).$$

Soit $\mu \in \mathrm{D}\,(A(t))$. Alors, (h_A^2), (3.24) et par application du Lemme 1.40 garantit l'existence d'une suite (μ_n) telle que

$$\mu_n \in \mathrm{D}\,(A(\delta_n(t))), \quad \mu_n \to \mu \;\text{ et }\; A^0(\delta_n(t))\mu_n \to A^0(t)\mu. \tag{3.26}$$

Pour $n \geq 1$, notons $I \setminus S_n$ l'ensemble sur lequel (3.17) est vérifiée. L'opérateur $A(t)$ étant monotone donne pour $t \in I \setminus S_n$

$$\langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u_n(\delta_n(t)) - \mu_n\rangle \leq \langle A^0(\delta_n(t))\mu_n, \mu_n - u_n(\delta_n(t))\rangle. \tag{3.27}$$

En vertu de (3.14), (3.23) et (3.27), on obtient pour $t \in I \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \cup S \cup S')$

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u(t) - \mu\rangle \\
&\qquad = \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u_n(\delta_n(t)) - \mu_n\rangle \\
&\qquad + \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), (u(t) - u_n(\delta_n(t))) - (\mu - \mu_n)\rangle \\
&\qquad \leq \langle A^0(\delta_n(t))\mu_n, \mu_n - u_n(\delta_n(t))\rangle \\
&\qquad + \Big(a_t + (T-T_0)m(1+K_1)\Big)\Big(\|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| + \|\mu_n - \mu\|\Big).
\end{aligned}$$

Donc, en combinant cela avec (3.20), (3.25), (3.26), il s'ensuit

$$\langle \dot{u}(t) + \int_0^t f(t,s,u(s))ds, u(t)-\mu\rangle \leq \langle A^0(t)\mu, \mu - u(t)\rangle.$$

Par conséquent

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \int_0^t f(t,s,u(s))ds \quad \text{p.p. } t\in I,$$

avec $u(0) = u_0$.

D'où, le problème $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$ admet au moins une solution absolument continue $u : I \to H$.

Remarquons maintenant d'après (3.12) que pour tous s, t tels que $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\big(\gamma(t) - \gamma(s)\big) + (K+2L)\eta_n = K\big(t - s + \alpha(t) - \alpha(s)\big) + (K+2L)\eta_n.$$

En passant à la limite dans cette dernière inégalité, il résulte

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\alpha}(t)) \quad \text{pour p.p. } t \in I.$$

Partie 2 : Unicité de la solution. Soient $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$ deux solutions de $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$. L'opérateur $A(t)$ étant monotone, alors, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t) - u_1(t)\|^2 \leq \left\langle \int_{T_0}^t f(t,s,u_1(s))ds - \int_{T_0}^t f(t,s,u_2(s))ds, u_2(t) - u_1(t)\right\rangle. \tag{3.28}$$

De l'estimation de la vitesse ci-dessus, il existe une constante réelle positive $\eta > 0$ telle que $\|u_1(t)\| \leq \eta$ et $\|u_2(t)\| \leq \eta$, pour chaque $t \in I$. Ainsi que (ii), il y a $\xi_\eta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que

$$\|f(t,s,u_1(s)) - f(t,s,u_2(s))\| \leq \xi_\eta(t)\|u_1(s) - u_2(s)\| \text{ pour tout } (t,s) \in I \times I.$$

De retour à (3.28), il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t) - u_1(t)\|^2 \leq \xi_\eta(t)\|u_2(t) - u_1(t)\| \int_{T_0}^{t} \|u_2(s) - u_1(s)\| ds.$$

Par conséquent, Lemme 1.58 avec $\varepsilon > 0$ arbitraire donne $u_1 = u_2$ et garantit l'unicité de la solution à $(\mathcal{IDP}_{A(t)})$. ∎

Nous établissons maintenant notre résultat principal de cette section concernant $(\mathcal{IDP}_{A(t,u)})$.

Théorème 3.2. *Soit $A(t,x) : \mathrm{D}(A(t,x)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone pour chaque $(t,x) \in I \times H$ satisfaisant*

(H^1_A) *il existe une constante réelle $\lambda_1 < 1$ et une fonction positive et croissante $\alpha(\cdot) \in W^{1,2}(I,\mathbb{R})$ telle que*

$$\mathrm{dis}\,(A(t,x), A(s,y)) \leq |\alpha(t) - \alpha(s)| + \lambda_1\|x - y\|, \ \forall t,s \in I, \ \forall x,y \in H;$$

(H^2_A) *il existe un nombre réel $c_1 > 0$ tel que*

$$\|A^0(t,x)y\| \leq c_1(1 + ||x|| + ||y||) \text{ pour } t \in I, \ y \in \mathrm{D}(A(t,x)).$$

(H^3_A) *pour tout sous-ensemble borné $X \subset H$, l'ensemble $\mathrm{D}(A(I \times X))$ est relativement boule-compact.*

Soit $f : I \times I \times H \longrightarrow H$ une application satisfaisant les hypothèses (i)-(ii)-(iii) du Théorème 3.1.

Posons $d = c_1(2 + \|u_0\|)$, $S = \left(2(T - T_0)m + \frac{3}{2}d\right)(S_1 + 1) + 2$, où

$$S_1 = \left(\|u_0\| + \left(2(T - T_0)m + \frac{3}{2}d + 2\right)(T + \alpha(T) + 1)\right) \exp\left(\left((T - T_0)m + \frac{3}{2}d\right)(T - T_0) + m(T + \alpha(T) + 1)^2\right).$$

Si $\lambda_1 S < 1$, alors, le problème intégro-différentiel $(\mathcal{IDP}_{A(t,u)})$ admet une solution absolument continue $u(\cdot)$ qui satisfait

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \dot{\varphi}(t) \text{ p.p. } t \in I, \tag{3.29}$$

où $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ est la solution absolument continue de

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{L}{1-\lambda_1 L}(1+\dot{\alpha}(t)),\ \varphi(T_0) = 0,$$

pour la constante réelle positive $L = \left(2(T-T_0)m + \frac{3}{2}d\right)(L_1+1)+2$, où

$$L_1 = \left(\|u_0\| + \left(2(T-T_0)m + \frac{3}{2}d + 2\right)(T+\alpha(T)+\lambda_1)\right) \exp\left(\left((T-T_0)m + \frac{3}{2}d\right)(T-T_0) + m(T+\alpha(T)+\lambda_1)^2\right).$$

Démonstration. Observons que $1-\lambda_1 L > 0$ (dans l'équation différentielle) en notant $\lambda_1 S < 1$ par hypothèse et $L < S$ alors, $\lambda_1 < \frac{1}{L}$.
Puisque $\varphi(\cdot)$ est absolument continue, alors il existe une constante réelle positive $\delta > 0$ telle que

$$\int_{T_0}^{T} \dot{\varphi}(s)ds < \delta \text{ pour tout } t \in I.$$

Pour simplifier les calculs, prenons $\delta = 1$ et supposons que

$$\int_{T_0}^{T} \dot{\varphi}(s)ds < 1 \text{ pour tout } t \in I. \tag{3.30}$$

Considérons le sous-ensemble fermé convexe Y de l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$ défini par

$$Y := \left\{u \in \mathcal{C}_H(I) : u(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)ds,\ \|\dot{u}(t)\| \le \dot{\varphi}(t),\ t \in I\right\}.$$

Soit $h \in Y$, et définissons l'opérateur maximal monotone dépendant du temps $B_h(t) = A(t, h(t))$, $t \in I$. Pour tous τ, t tels que $T_0 \le \tau \le t \le T$, on a en utilisant (H_A^1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{dis}(B_h(t), B_h(\tau)) &= \operatorname{dis}(A(t,h(t)), A(\tau, h(\tau))) \\
&\le \alpha(t) - \alpha(\tau) + \lambda_1\|h(t) - h(\tau)\| \\
&\le \int_{\tau}^{t} \dot{\alpha}(s)ds + \lambda_1 \int_{\tau}^{t} \|\dot{h}(s)\|ds \\
&\le \int_{\tau}^{t} \left[\dot{\alpha}(s) + \lambda_1\dot{\varphi}(s)\right] ds = \beta(t) - \beta(\tau),
\end{aligned}$$

où $\beta(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ est donnée par

$$\beta(t) = \int_{T_0}^{t} \left[\dot{\alpha}(s) + \lambda_1\dot{\varphi}(s)\right] ds,\ \forall t \in I.$$

De plus, on écrit en utilisant (H_A^2) et (3.30)

$$\begin{aligned}\|B_h^0(t)x\| = \|A^0(t,h(t))x\| &\leq c_1(1+\|h(t)\|+\|x\|)\\ &\leq c_1(1+\|u_0\|+\int_{T_0}^t \dot{\varphi}(s)ds+\|x\|)\\ &\leq c_1(2+\|u_0\|+\|x\|)\\ &\leq d(1+\|x\|),\end{aligned}$$

pour tout $t\in I$ et $x\in \mathrm{D}\,(A(t,h(t)))$, où $d=c_1(2+\|u_0\|)$.

En vertu du Théorème 3.1, il existe une unique solution absolument continue $u_h : I \to H$ à l'inclusion intégro-différentielle

$$(\mathcal{I}_h)\begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in B_h(t)u_h(t) + \displaystyle\int_{T_0}^t f(t,s,u_h(s))ds \text{ p.p. } t\in I,\ \ h\in Y,\\ u_h(t)\in \mathrm{D}\,(B_h(t)) = \mathrm{D}\,(A(t,h(t))),\ \forall t\in I\\ u_h(T_0)=u_0\in \mathrm{D}\,(B_h(T_0)) = \mathrm{D}\,(A(T_0,u_0)),\end{cases}$$

qui satisfait (voir (3.1))

$$\|\dot{u}_h(t)\| \leq \rho(1+\dot{\alpha}(t)+\lambda_1\dot{\varphi}(t)) \text{ p.p. } t\in I, \tag{3.31}$$

pour la constante réelle positive $\rho = (2(T-T_0)m+\frac{3}{2}d)(\rho_1+1)+2$, où

$$\begin{aligned}\rho_1 = \Bigg(\|u_0\|+\left(2(T-T_0)m+\frac{3}{2}d+2\right)(T+\beta(T))\Bigg)\\ \exp\left(\left((T-T_0)m+\frac{3}{2}d\right)(T-T_0)+m(T+\beta(T))^2\right).\end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $h\in Y$, considérons l'application Φ définie sur Y par

$$\Phi(h)(t) := u_h(t),\ t\in I,$$

où $u_h(\cdot)$ est l'unique solution absolument continue de l'inclusion intégro-différentielle $(\mathcal{I}_h)$. On remarque que $\rho < L$. En effet, de (H_A^1) et le fait que $\alpha(\cdot)$ est positive croissante, en tenant compte de la définition de $\beta(\cdot)$, on écrit

$$\beta(T) = \int_{T_0}^T [\dot{\alpha}(s)+\lambda_1\dot{\varphi}(s)]ds \leq \alpha(T)+\lambda_1\int_{T_0}^T \dot{\varphi}(s)ds \leq \alpha(T)+\lambda_1,$$

par (3.30). De retour à la définition de ρ_1 et L_1, on déduit que $\rho_1 < L_1$. Il suffit après de comparer pour conclure que $\rho < L$. Ainsi, en revenant à (3.31), on écrit

$$\|\dot{u}_h(t)\| \leq L(1+\dot{\alpha}(t)+\lambda_1\dot{\varphi}(t)) = \dot{\varphi}(t). \tag{3.32}$$

D'où, $\Phi(h) \in Y$.

De plus, de la continuité absolue de u_h et du fait que $\varphi(0) = 0$, on trouve

$$\|u_h(t)\| \leq \|u_0\| + \varphi(T) \text{ pour tout } t \in I \text{ et tout } h \in Y. \tag{3.33}$$

Montrons que $\Phi(Y)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$.

D'une part, notons de (3.33) que pour tout $h \in Y$

$$h(t) \in (\|u_0\| + \varphi(T))\overline{B}_H.$$

D'autre part, comme $u_h(t) \in \mathrm{D}\left(A(t, h(t))\right)$ pour chaque $t \in I$, alors

$$u_h(t) \in \mathrm{D}\left(A(I \times (\|u_0\| + \varphi(T))\overline{B}_H)\right) \cap (\|u_0\| + \varphi(T))\overline{B}_H.$$

En utilisant la boule-compacité dans l'hypothèse (H_A^3), on déduit que pour chaque $t \in I$, $\{\Phi(h)(t),\ h \in Y\}$ est relativement compacte dans H, pour tout $t \in I$. De plus, $(\Phi(h))$ est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir Théorème 1.47), $\Phi(Y)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_H(I)$.

On vérifie maintenant que Φ est continue. Il suffit de montrer que : si (h_n) converge uniformément vers h dans Y, alors, la suite des solutions absolument continues u_{h_n} associées à h_n de l'inclusion intégro-différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}_{h_n}(t) \in A(t, h_n(t))u_{h_n}(t) + \displaystyle\int_{T_0}^{t} f(t, s, u_{h_n}(s))ds \quad \text{p.p. } t \in I,\ h_n \in Y, \\ u_{h_n}(T_0) = u_0 \in \mathrm{D}\left(A(T_0, u_0)\right), \end{cases}$$

converge uniformément vers la solution absolument continue u_h associée à h de l'inclusion intégro-différentielle $(\mathcal{I}_h)$.

D'après ce qui précède $\{u_{h_n}(t)\}$ est relativement compacte pour tout $t \in I$. Comme (u_{h_n}) est équi-continue et l'estimation (3.31), on peut supposer qu'il existe une application $z \in W^{1,2}(I, H)$ telle que

$$(u_{h_n}) \text{ converge uniformément vers } z(\cdot), \tag{3.34}$$

et

$$(\dot{u}_{h_n}) \ \text{ converge } \sigma(L_H^1(I), L_H^\infty(I)) \text{ vers } w \in L_H^1(I) \text{ avec } w = \dot{z} \text{ p.p.} \tag{3.35}$$

On pose $\eta := \|u_0\| + \varphi(T)$. Alors, d'après (ii), il existe une fonction $\xi_\eta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}_+}(I)$ telle que pour tous $t, s \in I$

$$\|f(t, s, u_{h_n}(s)) - f(t, s, z(s))\| \leq \xi_\eta(t)\|u_{h_n}(s) - z(s)\|.$$

Ceci, en tenant compte de la convergence ponctuelle de (u_{h_n}) vers z, il résulte

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t,s,u_{h_n}(s)) - f(t,s,z(s))\| = 0. \tag{3.36}$$

Notons de (3.33) et (iii) que pour tout n et tous $t, s \in I$

$$\|f(t,s,u_{h_n}(s))\| \leq m(1+\eta), \tag{3.37}$$

en combinant ceci avec (3.36), il découle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\left\|\int_{T_0}^t f(t,s,u_{h_n}(s))ds - \int_{T_0}^t f(t,s,z(s))ds\right\| \leq \int_{T_0}^t \|f(t,s,u_{h_n}(s)) - f(t,s,z(s))\|ds,$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

De plus, d'après (3.37), nous remarquons que pour tous $t, s \in I$

$$\left\|\int_{T_0}^t f(t,s,u_{h_n}(s))ds\right\| \leq m(T-T_0)(1+\eta), \tag{3.38}$$

avec la convergence ci-dessus, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^T \left\|\int_{T_0}^t f(t,s,u_{h_n}(s))ds - \int_{T_0}^t f(t,s,z(s))ds\right\| dt = 0. \tag{3.39}$$

On définit pour tout $n \geq 1$, les fonctions g_n, g sur I par

$$g_n(t) = \int_{T_0}^t f(t,s,u_{h_n}(s))ds, \;\; g(t) = \int_{T_0}^t f(t,s,z(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Comme $u_{h_n}(t) \in \mathrm{D}\left(A(t,h_n(t))\right)$ pour tout $t \in I$ et $u_{h_n}(t) \to z(t)$, $(A^0(t,h_n(t))u_{h_n}(t))$ est bornée par (H_A^2) et la bornitude des suites (u_{h_n}) et (h_n) dans $\mathcal{C}_H(I)$, pour chaque $t \in I$

$$\operatorname{dis}\left(A(t,h_n(t)), A(t,h(t))\right) \leq \lambda_1\|h_n(t) - h(t)\| \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty, \tag{3.40}$$

par (H_A^1) et la convergence uniforme de (h_n) vers h dans $\mathcal{C}_H(I)$. Ainsi, du Lemme 1.38, on déduit que $z(t) \in \mathrm{D}\left(A(t,h(t))\right)$, pour chaque $t \in I$.

Maintenant, vérifions que $z(\cdot)$ satisfait l'inclusion intégo-différentielle

$$-\dot{z}(t) \in A(t,h(t))z(t) + \int_{T_0}^t f(t,s,z(s))ds \text{ p.p. } t \in I.$$

De (3.35) et (3.39), on déduit que $(\dot{u}_{h_n}(\cdot)+g_n(\cdot))$ converge $\sigma(L_H^1(I), L_H^\infty(I))$ vers $\dot{z}(\cdot)+g(\cdot)$. Par conséquent, $(\dot{u}_{h_n}(\cdot)+g_n(\cdot))$ converge au sens de Komlós vers $\dot{z}(\cdot)+g(\cdot)$, et il existe un ensemble négligeable V tel que pour $t \in I \setminus V$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (\dot{u}_{h_j}(t) + g_j(t)) = \dot{z}(t) + g(t), \tag{3.41}$$

et

$$-\dot{u}_{h_n}(t) \in A(t, h_n(t))u_{h_n}(t) + g_n(t). \tag{3.42}$$

Soit $x \in \mathrm{D}\left(A(t, h(t))\right)$. En vertu de (H_A^2), (3.40) et par application du Lemme 1.40, il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in \mathrm{D}\left(A(t, h_n(t))\right)$,

$$x_n \to x \;\text{ et }\; A^0(t, h_n(t))x_n \to A^0(t, h(t))x. \tag{3.43}$$

De (3.42), et le fait que par l'opérateur $A(t, h_n(t))$ est monotone, on a pour tout n et tout $t \in I$

$$\langle \dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t), u_{h_n}(t) - x_n \rangle \leq \left\langle A^0(t, h_n(t))x_n, x_n - u_{h_n}(t) \right\rangle. \tag{3.44}$$

Notons que

$$\langle \dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t), z(t) - x \rangle = \langle \dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t), u_{h_n}(t) - x_n \rangle + \langle \dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t), z(t) - u_{h_n}(t) \rangle + \langle \dot{u}_{h_n}(t) + g_n(t), x_n - x \rangle,$$

alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + g_j(t), z(t) - x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + g_j(t), u_{h_j}(t) - x_j \rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + g_j(t), z(t) - u_{h_j}(t) \rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + g_j(t), x_j - x \rangle.$$

Donc, en combinant (3.32), (3.38) et (3.44), on déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t) + g_j(t), z(t) - x \rangle \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle A^0(t, h_j(t))x_j, x_j - u_{h_j}(t) \right\rangle + \Big(\dot{\varphi}(t) + (T - T_0)m(1+\eta)\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|z(t) - u_{h_j}(t)\| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|x_j - x\|\Big).$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, en utilisant (3.34), (3.41), (3.43), cette dernière inégalité donne

$$\langle \dot{z}(t) + g(t), z(t) - x \rangle \leq \langle A^0(t, h(t))x, x - z(t) \rangle \text{ p.p. } \forall x \in \mathrm{D}\left(A(t, h(t))\right).$$

Il résulte du Lemme 1.35 que

$$-\dot{z}(t) \in A(t, h(t))z(t) + g(t) \text{ p.p. } t \in I,$$

avec $z(T_0) = u_0 \in \mathrm{D}\left(A(T_0, u_0)\right)$ et par l'unicité de la solution $z = u_h$.

Il résulte que $\Phi(h_n) - \Phi(h) \to 0$ dans $\mathcal{C}_H(I)$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, $\Phi : Y \to Y$ est continue une application du sous-ensemble fermé convexe borné Y de l'espace de Banach $\mathcal{C}_H(I)$ dans lui même avec $\Phi(Y)$ est relativement compact. En appliquant le théorème du point fixe de Schauder (voir Théorème 1.46) il existe $h \in Y$ tel que $h = \Phi(h)$, c'est-à-dire, $h(t) = u_h(t)$. De plus, l'estimation (3.29) est vraie sur I. ■

3.3 Problème de contrôle optimal

Dans cette section, nous tentons d'étudier le problème de contrôle optimal $(\mathcal{OCP})$. Commençons par démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{CP}_{a,b})$.

Proposition 3.3. *Soient $H = \mathbb{R}^n$ et $I = [0, T]$. Fixons un couple $(a(\cdot), b(\cdot)) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^{n+m})$. Supposons que pour tout $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$, $A(t, y) : \mathrm{D}(A(t, y)) \subset \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant les hypothèses (H_A^1)-(H_A^2). Soit $f : I \times I \times \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ une application telle que $f(\cdot, \cdot, x, y)$ est mesurable sur $I \times I$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ fixe, $f(t, s, \cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^{m+n}$ pour chaque $(t, s) \in I \times I$ et satisfaisant aux hypothèses suivantes :*

($\underline{i}$) *il existe une constante réelle $M > 0$, pour tout $v(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^m)$ telle que*

$$\|f(t, s, v(s), x)\| \leq \|v(s)\| + M\|x\|, \ \forall t, s \in I, \ \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

($\underline{ii}$) *pour une constante réelle $\eta > 0$ et tout $v(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^m)$, il existe une constante réelle positive l telle que*

$$\|f(t, s, v(s), x_1) - f(t, s, v(s), x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|, \ \forall t, s \in I, \ \forall x_1, x_2 \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}[0, \eta].$$

Alors, à ce couple de contrôle correspond une unique solution $u(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ au problème contrôlé $(\mathcal{CP}_{a,b})$. De plus, on a pour p.p. $t \in I$

$$\left\| \dot{u}(t) + \int_0^t f(t, s, b(s), u(s)) ds \right\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) + (1 + L)\zeta, \tag{3.45}$$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)), \tag{3.46}$$

où $\zeta = \max(\|b\|_{L^1_{\mathbb{R}^m}(I)}, TM)$, $L = \|u_0\| + K \int_0^T (1 + \dot{\beta}(s)) ds$, et la fonction $\beta(\cdot)$ est définie par

$$\beta(t) = \int_0^t [\dot{\alpha}(s) + \lambda_1 \|\dot{a}(s)\|] \, ds \ t \in I,$$

avec K est une constante réelle positive qui dépend de $\|u_0\|$, $\|a_0\|$, c_1, ζ, T et β.

Démonstration. Pour tout $t \in I$ et tout $a(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ fixe, on définit les opérateurs maximaux monotones dépendants du temps $B_a(t) := A(t, a(t))$ et procédons comme dans la première partie de la démonstration du Théorème 3.2.

Soient $s, t \in I$ tels que $0 \leq s \leq t \leq T$, alors, on a de (H_A^1)

$$\begin{aligned} \mathrm{dis}(B_a(t), B_a(s)) &= \mathrm{dis}(A(t, a(t)), A(s, a(s))) \\ &\leq \beta(t) - \beta(s), \end{aligned}$$

où $\beta(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ est définie par

$$\beta(t) = \int_0^t [\dot{\alpha}(s) + \lambda_1 \|\dot{a}(s)\|] \, ds, \ t \in I.$$

Maintenant, d'après la propriété (H_A^2), il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour $t \in I$, $z \in \mathrm{D}\,(A(t, a(t)))$

$$\begin{aligned} \|B_a^0(t)z\| = \|A^0(t, a(t))z\| &\leq c_1(1 + \|a(t)\| + \|z\|) \\ &\leq c_1 \left(1 + \left\|a_0 + \int_0^t \dot{a}(s)ds\right\| + \|z\|\right) \\ &\leq c_2(1 + \|z\|), \end{aligned}$$

où $c_2 = c_1 \left(1 + \|a_0\| + \int_0^T \|\dot{a}(s)\|ds\right)$.
Par conséquent, l'opérateur $B_a(t)$ satisfait (h_A^1)-(h_A^2) du Théorème 3.1, pour tout $t \in I$.
Ensuite, pour $b(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^m)$ fixe, on définit la fonction f_b sur $I \times I \times \mathbb{R}^n$ par

$$f_b(t, s, u) = f(t, s, b(s), u) \text{ pour tout } (t, s, u) \in I \times I \times \mathbb{R}^n.$$

Il est clair que la fonction $f_b(\cdot, \cdot, u)$ est mesurable sur $I \times I$ pour chaque $u \in \mathbb{R}^n$ et $f_b(t, s, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ pour chaque $(t, s) \in I \times I$, par hypothèse et par la continuité de $b(\cdot)$.
De plus, d'après $(\underline{i})$, on obtient

$$\|f_b(t, s, u)\| \leq \|b(s)\| + M\|u\| \leq \zeta(1 + \|u\|), \tag{3.47}$$

pour tout $(t, s, u) \in I \times I \times \mathbb{R}^n$, où $\zeta = \max(\|b\|_\infty, M)$.
Maintenant, d'après l'hypothèse $(\underline{ii})$, pour une constante réelle $\eta > 0$, il existe une constante réelle $l > 0$ telle que

$$\|f_b(t, s, u_1) - f_b(t, s, u_2)\| \leq l\|u_1 - u_2\|, \ \forall t \in I, \ \forall u_1, u_2 \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}[0, \eta].$$

Ainsi, l'application f_b satisfait les hypothèses du Théorème 3.1. Par conséquent, il s'ensuit l'existence et l'unicité de la solution de l'inclusion intégro-différentielle considérée.
De plus, d'après les relations (3.1) et (3.47) ainsi que de la continuité absolue de $u(\cdot)$, les estimations (3.45)-(3.46) sont vraies. La fonction $\dot{u}(\cdot)$ est donc dans $L^2_{\mathbb{R}^n}(I)$, et $u(\cdot) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$. ■

Nous allons imposer des hypothèses convenables qui garantissent l'existence de solutions optimales (globales) au problème de contrôle optimal $(\mathcal{OCP})$ lié à l'ensemble des solutions du problème contrôlé $(\mathcal{CP}_{a,b})$.

Théorème 3.4. *(Existence de solutions optimales) Supposons que pour tout* $(t,y) \in I \times \mathbb{R}^n$, $A(t,y) : \mathrm{D}(A(t,y)) \subset \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *est un opérateur maximal monotone satisfaisant les hypothèses* (H_A^1)*-*(H_A^2)*. Soit* $f : I \times I \times \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ *une application satisfaisant les hypothèses de la Proposition 3.3. Supposons que la fonctionnelle du coût terminale* $\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *est semi-continue inférieurement, tandis que la fonctionnelle du coût* $\phi_2 : I \times \mathbb{R}^{4n+2m} \to \overline{\mathbb{R}}$ *est semi-continu inférieurement par rapport à* t *et est majorée par une fonction sommable sur* I *le long des courbes de référence. De plus, supposons que* $\phi_2(t,\cdot)$ *est minorée sur des ensembles bornés pour* p.p. $t \in I$*. Supposons que la fonctionnelle du coût* ϕ_2 *est convexe par rapport aux variables de vitesse* $\dot{u}$, $\dot{a}$, $\dot{b}$*, et qu'il existe une suite minimisante* $(u^k(\cdot), a^k(\cdot), b^k(\cdot))$ *de* $(\mathcal{OCP})$*, auquelle* $(a^k(\cdot), b^k(\cdot))$ *est bornée dans* $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^{n+m})$*. Alors, le problème de contrôle optimal* $(\mathcal{OCP})$ *admet une solution optimale dans l'espace* $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^{2n+m})$*.*

Démonstration. De Proposition 3.3, on déduit que l'ensemble des solutions au problème de contrôle optimal $(\mathcal{OCP})$ est non vide. Fixons la suite minimisante des solutions $(u^k(\cdot), a^k(\cdot), b^k(\cdot))$ pour $(\mathcal{OCP})$ (d'après l'énoncé du théorème), qui est bornée dans $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^{2n+m})$. Ceci implique en particulier qu'il existe un couple $(a_0,b_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tel que $(a^k(0), b^k(0)) \to (a_0,b_0)$ dans cet espace lorsque $k \to \infty$, tandis que $(u_0,a_0,b_0) = (u(0),a(0),b(0))$ satisfait clairement les conditions initiales. On remarque que la suite $(\dot{a}^k(\cdot), \dot{b}^k(\cdot))$ est bornée dans $L^2_{\mathbb{R}^{n+m}}(I)$, quitte à remplacer par une sous-suite qui sera notée $(\dot{a}^k(\cdot), \dot{b}^k(\cdot))$, il existe un couple

$$(\dot{a}^k(\cdot), \dot{b}^k(\cdot)) \ \text{converge faiblement dans} \ L^2_{\mathbb{R}^{n+m}}(I) \text{ vers } (v^a(\cdot), v^b(\cdot)).$$

Définissons maintenant les fonctions

$$(\hat{a}(t), \hat{b}(t)) = (a_0,b_0) + \int_0^t (v^a(s), v^b(s))ds \text{ pour tout } t \in I,$$

et observons que $(\dot{\hat{a}}(t), \dot{\hat{b}}(t)) = (v^a(t), v^b(t))$ pour p.p. $t \in I$, et que le couple $(\hat{a}(\cdot), \hat{b}(\cdot))$ appartient à l'espace $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^{n+m})$. Il résulte de ce qui précède et des estimations de Proposition 3.3 que la suite des solutions correspondantes $(u^k(\cdot))$ est uniformément bornée et équicontinue sur I. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir Théorème 1.47), on peut extraire une sous-suite de $(u^k(\cdot))$ notée encore $(u^k(\cdot))$ qui converge uniformément sur I vers $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(I)$. Il résulte de (3.46) que $(\dot{u}^k(\cdot))$ est bornée dans $L^2_{\mathbb{R}^n}(I)$. Alors, d'après Théorème 1.48 on peut extraire une sous-suite notée $(\dot{u}^k(\cdot))$ qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers une fonction $w(\cdot)$ avec $\dot{\hat{u}}(t) = w(t)$ pour p.p. $t \in I$, c'est à dire,

$$(\dot{u}^k(\cdot)) \text{ converge faiblement dans } L^2_{\mathbb{R}^n}(I) \text{ vers } \dot{\hat{u}}(\cdot). \tag{3.48}$$

L'étape suivante consiste à vérifier que $\hat{z}(\cdot) = (\hat{u}(\cdot), \hat{a}(\cdot), \hat{b}(\cdot))$ satisfait l'inclusion différentielle $(\mathcal{CP}_{a,b})$.

Comme f est continue par hypothèse, alors d'après les modes de convergence précédents ci-dessus, on a

$$f(t, s, b^k(s), u^k(s)) \to f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s)) \text{ lorsque } k \to \infty,\ \forall t, s \in I.$$

Du fait que $(b^k(\cdot), u^k(\cdot))$ est bornée et de ($\underline{i}$), on a

$$\|f(t, s, b^k(s), u^k(s))\| \leq \|b^k(s)\| + M\|u^k(s)\| \leq constante < +\infty,\ t \in I.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il résulte que

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \int_0^t f(t, s, b^k(s), u^k(s))ds - \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds \right\| = 0.$$

De plus, notons que

$$\left\| \int_0^t f(t, s, b^k(s), u^k(s))ds \right\| < \|b^k\|_{L^1_{\mathbb{R}^m}(I)} + M\|u^k\|_{L^1_{\mathbb{R}^n}(I)},$$

alors, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \left\| \int_0^t f(t, s, b^k(s), u^k(s))ds - \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds \right\|^2 dt = 0. \tag{3.49}$$

Observons que $u^k(t) \in \mathrm{D}\left(A(t, a^k(t))\right)$, $a^k(t) \to \hat{a}(t)$, $u^k(t) \to \hat{u}(t)$, pour tout $t \in I$, la suite $(A^0(t, a^k(t))u^k(t))$ est bornée par (H_A^2) pour tout $t \in I$, et

$$\operatorname{dis}(A(t, a^k(t)), A(t, \hat{a}(t))) \leq \lambda_1 \|a^k(t) - \hat{a}(t)\| \to 0, \text{ lorsque } k \to \infty, \tag{3.50}$$

en utilisant (H_A^1). Ensuite, du Lemme 1.38, on déduit que $\hat{u}(t) \in D(A(t, \hat{a}(t))), \forall t \in I$.

Maintenant, nous allons vérifier que $\hat{u}(\cdot)$ satisfait l'inclusion intégro-différentielle

$$-\dot{\hat{u}}(t) \in A(t, \hat{a}(t))\hat{u}(t) + \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds \text{ p.p. } t \in I.$$

Définissons les applications g^k et g sur I par

$$g^k(t) = \int_0^t f(t, s, b^k(s), u^k(s))ds,\ g(t) = \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds,\ t \in I.$$

D'après les relations (3.48) et (3.49), on a

$$(\dot{u}^k(\cdot) + g^k(\cdot)) \text{ converge faiblement dans } L^2_{\mathbb{R}^n}(I) \text{ vers } \dot{\hat{u}}(\cdot) + g(\cdot).$$

D'où, $(\dot{u}^k(\cdot) + g^k(\cdot))$ converge au sens de Komlós vers $\dot{\hat{u}}(\cdot) + g(\cdot)$ (voir Proposition 1.51). Donc, il y a un ensemble négligeable Y tel que pour $t \in I \setminus Y$: $\dot{u}^k(\cdot) + g^k(\cdot) \to \dot{\hat{u}}(\cdot) + g(\cdot)$ au sens de Komlós, c'est à dire,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k \left(\dot{u}^p(t) + \int_0^t f(t, s, b^p(s), u^p(s))ds \right) = \dot{\hat{u}}(t) + \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds, \tag{3.51}$$

et
$$-\dot{u}^k(t) \in A(t, a^k(t))u^k(t) + \int_0^t f(t, s, b^k(s), u^k(s))ds.$$
Soit $y \in \mathrm{D}\,(A(t, \hat{a}(t)))$. On applique Lemme 1.40 aux opérateurs maximaux monotones $A(t, a^k(t))$ et $A(t, \hat{a}(t))$ qui satisfont (3.50). Ce dernier assure l'existence d'une suite (y^k) telle que $y^k \in \mathrm{D}\,(A(t, a^k(t)))$
$$y^k \to y \ \text{ et } \ A^0(t, a^k(t))y^k \to A^0(t, \hat{a}(t))y. \tag{3.52}$$

Comme
$$-\dot{u}^k(t) \in A(t, a^k(t))u^k(t) + \int_0^t f(t, s, b^k(s), u^k(s))ds \text{ p.p.},$$
et $A(t, a^k(t))$ est monotone pour tout t et tout k, on a
$$\langle \dot{u}^k(t) + g^k(t), u^k(t) - y^k\rangle \leq \langle A^0(t, a^k(t))y^k, y^k - u^k(t)\rangle. \tag{3.53}$$

Notons que
$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}^k(t) + g^k(t), \hat{u}(t) - y\rangle \\ &\qquad = \langle \dot{u}^k(t) + g^k(t), u^k(t) - y^k\rangle + \langle \dot{u}^k(t) + g^k(t), \hat{u}(t) - u^k(t) - (y - y^k)\rangle,\end{aligned}$$

alors
$$\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), \hat{u}(t) - y\rangle = \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\big\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), y^p - y\big\rangle$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\big\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), u^p(t) - y^p\big\rangle + \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), \hat{u}(t) - u^p(t)\rangle.$$
Donc, de (3.53), on obtient
$$\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\big\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), \hat{u}(t) - y\big\rangle \leq \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\big\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), y^p - y\big\rangle$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\big\langle A^0(t, a^p(t))y^p, y^p - u^p(t)\big\rangle + \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\big\langle \dot{u}^p(t) + g^p(t), \hat{u}(t) - u^p(t)\rangle.$$
Passons à la limite lorsque $k \to \infty$, en utilisant (3.51)-(3.52), le caractère borné de $(\dot{u}^p(\cdot) + g^p(\cdot))$ dans $\mathbb{R}^n$, et les modes de convergence précédents ci-dessus, donnent
$$\big\langle \dot{\hat{u}}(t) + \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds, \hat{u}(t) - y\big\rangle \leq \big\langle A^0(t, \hat{a}(t))y, y - \hat{u}(t)\big\rangle \ \text{ p.p.}$$
Par conséquent, Lemme 1.35 garantit que
$$-\dot{\hat{u}}(t) \in A(t, \hat{a}(t))\hat{u}(t) + \int_0^t f(t, s, \hat{b}(s), \hat{u}(s))ds \text{ p.p. } t \in I,$$

avec $\hat{u}(t) \in \mathrm{D}\left(A(t, \hat{a}(t))\right)$ pour tout $t \in I$. De l'unicité de la solution, il s'ensuit que $\hat{u}$ est l'unique solution de $(\mathcal{CP}_{\hat{a},\hat{b}})$ associée au couple des applications de contrôle $(\hat{a}(\cdot), \hat{b}(\cdot))$.
Pour justifier l'optimalité de $(\hat{u}(\cdot), \hat{a}(\cdot), \hat{b}(\cdot))$ dans $(\mathcal{OCP})$, il suffit de montrer que

$$\phi[\hat{u}, \hat{a}, \hat{b}] \leq \liminf_{k\to\infty} \phi[u^k, a^k, b^k], \tag{3.54}$$

pour la fonctionnelle de type Bolza dans $(\mathcal{OCP})$. Cette dernière relation (3.54) découle des hypothèses sur les fonctionnelles du coût ϕ_1 et ϕ_2 dues au théorème de Mazur et au théorème de la convergence dominée de Lebesgue. En effet, le théorème de Mazur garantit que la convergence faible de $\{\dot{u}^k, \dot{a}^k, \dot{b}^k\}$ vers $\{\dot{\hat{u}}, \dot{\hat{a}}, \dot{\hat{b}}\}$ dans $L^2_{\mathbb{R}^{2n+m}}(I)$ donne la convergence forte dans $L^2_{\mathbb{R}^{2n+m}}(I)$ des combinaisons convexes de $(\dot{u}^k, \dot{a}^k, \dot{b}^k)$ vers $(\dot{\hat{u}}, \dot{\hat{a}}, \dot{\hat{b}})$, et donc la convergence p.p. d'une sous-suite de ces combinaisons convexes sur I vers le triple limite.
En utilisant enfin la convexité supposée de la fonctionnelle du coût ϕ_2 par rapport aux variables de vitesse, l'inégalité (3.54) est vérifiée. ■

Conclusion et perspective

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux problèmes couplés par deux inclusions différentielles régies par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps avec une perturbation intégrale. Par une méthode de discrétisation et un passage par le critère de Cauchy, on a montré l'existence et l'unicité de la solution absolument continue. Ensuite, on a minimisé une fonctionnelle intégrale sur les contrôles intervenants dans l'état des opérateurs des systèmes couplés considérés. On envisage dans de futurs travaux l'étude d'existence de solutions à variation bornée aux problèmes couplés par des opérateur maximaux monotones. Dans la deuxième partie de cette thèse, on a établit un résultat d'existence de solution absolument continue à une classe d'inclusion différentielle gouvernée par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps et de l'état avec une perturbation intégrale. La démonstration repose sur le théorème du point fixe de Schauder. Pour terminer, on a étudié un problème de contrôle optimal. Il reste à considérer beaucoup de systèmes en relation y compris la recherche de la solution numérique, ou à variation bornée et la généralisation de nos résultats au cas d'espace de Banach.

Bibliographie

[1] L. Adam, J. Outrata, On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 19 (9) (2014), 2709-2738.

[2] M. Aissous, F. Nacry, V. A. Thuong Nguyen, First and second order state-dependent bounded subsmooth sweeping processes, Linear and Nonlinear Analysis, 6(3) (2020), 447-472.

[3] F. Amiour, M. Sene, T. Haddad, Existence results for state-dependent maximal monotone differential inclusions : Fixed point approach, Numer. Funct. Anal. Optim. 43 (2022), 838-859.

[4] J.P. Aubin, A. Cellina, Differential Inclusions. Set-valued maps and Viability Theory, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[5] J. P. Aubin, H. Frankowska, Set-Valued Analysis. Birkhäser, Boston Basel, Berlin (1990).

[6] D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing, M.D.P. Monteiro Marques, Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications, J. Fixed Point Theory Appl. 21 (2019).

[7] D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C Castaing, M.D.P. Monteiro Marques, Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators, Evol. Equ. Control Theory, 9(1) (2020), 219-254.

[8] D. Azzam-Laouir, I. Boutana-Harid, Mixed semicontinuous perturbation to an evolution problem with time dependent maximal monotone operator, J. Nonlinear Convex Anal., 20(1) (2019), 39-52.

[9] R. Bader, N. Papageorgiou, On the problem of periodic evolution inclusions of the subdifferential type, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 21(4) (2002), 963-984.

[10] H.H. Bauschke, P.L. Combettes, Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces, Springer, (2017)

[11] M. Benguessoum, D. Azzam-Laouir, C. Castaing, On a time and state dependent maximal monotone operator coupled with a sweeping process with perturbations, Set-Valued Var. Anal., 29 (2021), 191-219.

[12] A. Bouabsa, S. Saïdi, Coupled systems of subdifferential type with integral perturbation and fractional differential equations, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. 7 (1) (2023), 253-271.

[13] A. Bouach, T. Haddad, B.S. Mordukhovich, Optimal control of nonconvex integro-differential sweeping processes, J. Differential Equations, 329 (2022), 255-317.

[14] A. Bouach, T. Haddad, L. Thibault, Nonconvex integro-differential sweeping process with applications, SIAM J. Control Optim, 60 (5) (2022), 2971-2995.

[15] A. Bouach, T. Haddad, L. Thibault, On the discretization of truncated integro-differential sweeping process and optimal control, J. Optim. Theory Appl. 193 (1) (2022), 785-830.

[16] N. Bouhali, D. Azzam-Laouir, M.D.P. Monteiro Marques, Optimal control of an evolution problem involving time-dependent maximal monotone operators, J. Optim. Theory Appl., 194(1) (2022), 59-91.

[17] Y. Brenier, W. Gangbo, G. Savare, M. Westdickenberg, Sticky particle dynamics with interactions, J. Math. Pures Appl. 99 (2013), 577-617.

[18] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, (1983).

[19] H. Brézis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, New York, Springer, (2011).

[20] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Lecture Notes in Math., North-Holland (1973).

[21] L.M. Briceño-Arias, N.D. Hoang, J. Peypouquet, Existence, stability and optimality for optimal control problems governed by maximal monotone operators, J. Differential Equations 260 (2016), 733-757.

[22] M. Brokate, P. Krejčí, Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 18 (2) (2013), 331-348.

[23] T.H. Cao and B.S. Mordukhovich, Optimal control of a nonconvex perturbed sweeping process, J. Differential Equations 266 (2019), 1003-1050.

[24] C. Castaing, Quelques résultats de compacité liés a l'intégration, CR Acad. Sci. Paris, 270 (1970), 1732-1735.

[25] C. Castaing, C. Godet-Thobie, M.D.P. Monteiro Marques, A. Salvadori, Evolution problems with m-accretive operators and perturbations, Mathematics (2022).

[26] C. Castaing, C. Godet-Thobie, S. Saïdi, On fractional evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator, Set-Valued Var. Anal. 30(2) (2022), 621-656.

[27] C. Castaing, C. Godet-Thobie, S. Saïdi, M.D.P. Monteiro Marques, Various perturbations of time dependent maximal monotone/accretive operators in evolution inclusions with applications, Appl. Math. Optim. 87 :24 (2023).

[28] C. Castaing, C. Godet-Thobie and L.X. Truong, Fractional order of evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator, Mathematics MDPI, 8(9) (2020), 1-30.

[29] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte, M. Valadier, Young measures on topological spaces with applications in control theory and probability theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).

[30] C. Castaing, S. Saïdi, Lipschitz perturbation to evolution inclusions driven by time-dependent maximal monotone operators, Topol. Methods Nonlinear Anal., 58(2) (2021), 677-712.

[31] C. Castaing, M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, Lecture Notes in Math, 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1977).

[32] A. Cellina and M.V. Marchi, Non-convex perturbations of maximal monotone differential inclusions, Israel J. Math., 46 (1983), 1-11.

[33] G. Colombo, A. Fonda, A. Ornelas, Lower semicontinuous perturbations of maximal monotone differential inclusions, Israel J. Math., 61 (1988) 211-118.

[34] G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang, B.S. Mordukhovich, Optimal control of the sweeping process, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B 19 (2012), 117-159.

[35] G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang, B.S. Mordukhovich, Discrete approximations of a controlled sweeping process, Set-Valued Var. Anal 23 (2015), 69-86.

[36] G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang, B.S. Mordukhovich, Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets, J. Differential Equations 260 (2016), 3397-3447.

[37] G. Colombo, C. Kozaily, Existence and uniqueness of solutions for an integral perturbation of Moreau‘s sweeping process, J. Convex Anal. 27 (2020), 227-236.

[38] M.d.R. De Pinho, M. M. A. Ferreira, G. V. Smirnov, Optimal control involving sweep-ing processes, Set-Valued Var. Anal 27 (2) (2019), 523–548.

[39] M.d.R. De Pinho, M. M. A. Ferreira, G. V. Smirnov, Optimal control with sweeping processes : Numerical method, J. Optim. Theory Appl. 185 (3) (2020) 845–858.

[40] M.d.R. De Pinho, M. M. A. Ferreira, G. V. Smirnov, Necessary conditions for optimal control problems with sweeping systems and end point constraints, Optimization 71 (11) (2021) 3363–3381.

[41] K. Deimling, Non Linear Functional Analysis, Springer-verlag, Berlin, (1985).

[42] K. Dib, D. Azzam-Laouir, Existence of solutions for a couple of differential inclusions involving maximal monotone operators, Appl. Anal. 102(9) (2020), 2628–2650.

[43] F. Fennour, S. Saïdi, A minimization problem subject to a coupled system by maximal monotone operators, Bol. Soc. Mat. Mex., 29 (3) (2023) 78.

[44] F. Fennour, S. Saïdi, On a class of evolution problems driven by maximal monotone operators with integral perturbation, CUBO, 26 (1) (2024), 123–151.

[45] A. Fryszkowski and L. Gorniewicz, Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions, Set-Valued Anal., (8) (2000), 203-217.

[46] A. Geletu, Introduction to topological spaces and set-valued maps (Lecture notes), Ilmenau, Germany : Institute of Mathematics, Department of Operations Research and Stochastics, Ilmenau University of Technology (2006).

[47] M. Guessous, An elementary proof of Komlós-Révész Theorem in Hilbert spaces, J. Convex Anal. 4(2) (1997), 321-332.

[48] F. Kloop, Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz, (2017).

[49] M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques, BV solutions to evolution problems with time-dependent domains, Set-Valued Anal. 5 (1997), 57-72.

[50] B.K. Le, Well-posedeness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions, Optimization 69(6) (2020), 1187-1217.

[51] A. Makhlouf, D. Azzam-Laouir, C. Castaing, Existence and relaxation of solutions for evolution differential inclusions with maximal monotone operators, J. Fixed Point Theory Appl, 23 (2021), 1-23.

[52] F. Nacry, J. Noel, L. Thibault, On first and second order state-dependent prox-regular sweeping processes, Pure Appl. Funct. Anal., 6(6) (2021), 1453-1493.

[53] C. Nour, V. Zeidan, A control space ensuring the strong convergence of continuous approximation for a controlled sweeping process, Set-Valued Var. Anal 31 (2023).

[54] C. Nour, V. Zeidan, Nonsmooth optimality criterion for a $W^{1,2}$-controlled sweeping process : Nonautonomous perturbation, Applied Set-Valued Analysis et Optimization. 5 (2) (2023) 193–212.

[55] C. Nour, V. Zeidan, Numerical solution for a controlled nonconvex sweeping process, IEEE Control Systems Letters 6 (2021) 1190–1195.

[56] C. Nour, V. Zeidan, Optimal control of nonconvex sweeping processes with separable endpoints, Nonsmooth maximum principle for local minimizers, J. Differential Equations 318 (2022) 113–168.

[57] N.H. Pavel, Nonlinear evolution operators and semigroups, Lecture Notes in Mathematics, 1260, New York, Springer, 1987.

[58] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, New York : McGraw-hill, 3 (1964).

[59] H. Royden, P.M. Fitzpatrick, Real analysis, China Machine Press, (2010).

[60] S. Saïdi, A perturbed second-order problem with time and state-dependent maximal monotone operators, Discuss. Math., Differ. Incl. Control Optim., 41 (2021), 61-86.

[61] S. Saïdi, Coupled problems driven by time and state-dependent maximal monotone operators, to appear in Numer. Algebra Control Optim. https ://www.aimsciences.org/article/doi/10.3934/naco.2023006

[62] S. Saïdi, On a second-order functional evolution problem with time and state dependent maximal monotone operators, Evol. Equ. Control Theory, 11(4) (2022), 1001-1035.

[63] S. Saïdi, Set-valued perturbation to second-order evolution problems with time-dependent subdifferential operators, Asian-Eur. J. Math., 15(7) (2022), 1-20.

[64] S. Saïdi, Second-order evolution problems by time and state-dependent maximal monotone operators and set-valued perturbations, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 14 (1) (2023), 699–715.

[65] S. Saïdi, A. Bouabsa, A coupled problem described by time-dependent subdifferential operator and non-convex perturbed sweeping process, Evol. Equ. Control Theory, 12(4) (2023), 1145-1173.

[66] S. Saïdi, F. Fennour, Second-order problems involving time-dependent subdifferential operators and application to control, Math. Control Relat. Fields, 13 (3) (2023), 873-894.

[67] F. Selamnia, D. Azzam-Laouir, M.D.P. Monteiro Marques, Evolution problems involving state-dependent maximal monotone operators, Appl. Anal. 101 (1) (2022), 297-313.

[68] J. V. Tiel, Convex analysis. An introductory text, Wiley, New York 1984.

[69] A.A. Tolstonogov, BV continuous solutions of an evolution inclusion with maximal monotone operator and nonconvex-valued perturbation. Existence Theorem, Set-Valued Var. Anal 29 (2021), 29-60.

[70] E. Vilches and B.T. Nguyen, Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators with a full domain, Set-Valued Var. Anal., 28(3) (2020), 569-581.

[71] A.A. Vladimirov, Nonstationary dissipative evolution equations in Hilbert space, Nonlinear Anal. 17 (1991), 499-518.

[72] I.I. Vrabie, Compactness methods for nonlinear evolution equations, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, Longman Scientific and Technical, John Wiley and Sons, Inc. New York, 32 (1987).

[73] V. Zeidan, C. Nour, H. Saoud, A nonsmooth maximum principle for a control led nonconvex sweeping process, J. Differential Equations 269 (11) (2020) 9531-9582.

Abstract

This thesis is devoted to investigate absolutely continuous solutions for some evolution problems, in a Hilbert space, with applications to optimal control. In the first part, we establish a new existence and uniqueness theorem for a coupled system by two first-order differential inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators and single-valued perturbations. Then, we minimize an integral functional over the controls acting in the state of the operators into the coupled system under consideration. In the second part, we are interested in a first-order differential inclusion driven by time and state-dependent maximal monotone operators with an integral perturbation. As an application of its existence result, we investigate an optimal control problem subject to such a class, where the control maps act in the state of the operators and in the integral perturbation.

Résumé

Cette thèse est consacrée à la recherche de solutions absolument continues pour certains problèmes d'évolution, dans un espace de Hilbert, avec quelques applications au contrôle optimal. Dans la première partie, nous établissons un nouveau théorème d'existence et d'unicité pour un système couplé par deux inclusions différentielles du premier ordre régies par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps des avec perturbations univoques. Ensuite, nous minimisons une fonctionnelle intégrale sur les contrôles intervenants dans l'état des opérateurs dans le système couplé considéré. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps et de l'état avec une perturbation intégrale. Comme application du résultat d'existence de cette dernière, nous étudions un problème de contrôle optimal soumis à une telle classe, où les contrôles interviennent dans l'état des opérateurs et dans la perturbation intégrale.

الملخص

هذه الأطروحة مخصصة للبحث عن حلول مستمرة مطلقا لبعض المشاكل التطورية في فضاء هلبرت مع بعض التطبيقات في التحكم الأمثل. في الجزء الأول، قمنا بإثبات نظرية جديدة للوجود والوحدانية لجملة مقترنة باثنين من الاحتواءات التفاضلية من الدرجة الأولى تحكمها مؤثرات رتيبة قصوى تتعلق بالزمن مع اضطرابات أحادية القيم. بعد ذلك، قمنا بالتحكم الأمثل على تكاملات دالية حيث تظهر دوال التحكم بمتغير الحالة للمؤثر في جملة محل الدراسة. في الجزء الثاني، كان محور اهتمامنا احتواء تفاضلي من الدرجة الأولى تحكمه مؤثرات رتيبة قصوى تتعلق بالزمن والحالة مع اضطراب تكاملي. وكتطبيق لوجود الحل لهذا الأخير، قمنا بدراسة مشكلة التحكم الأمثل في ذات السياق، حيث تظهر دوال التحكم بمتغير الحالة للمؤثر وكذا بالاضطراب التكاملي.