République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahia
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

# THÈSE

Pour obtenir le diplôme de

## Doctorat LMD

**Filière :** Mathématiques
**Option :** Contrôle Optimal et Calcul des Variations
présentée et soutenue par

## Dib Karima

Thème

# Systèmes d'Inclusions Différentielles et Applications à des Problèmes de Contrôle Optimal

soutenue le 02/06/2024

**Devant le jury composé de**

| | | |
|---|---|---|
| *Président* | Mme Yasmina Daikh | M.C.A. Université MSB-Jijel |
| *Directeur de thèse* | Mme Dalila Azzam-Laouir | Prof. Université MSB-Jijel |
| *Co-Directeur de thèse* | Melle Fatine Aliouane | M.C.A. Université MSB-Jijel |
| *Examinateur* | Mr Arezki Kheloufi | Prof. Université de Béjaia |
| *Examinateur* | Mr Ilyas Kecis | M.C.A. Université MSB-Jijel |
| *Examinateur* | Mme Amira Makhlouf | M.C.A. Université MSB-Jijel |

# Remerciements

Tout d'abord, je remercie ***Allah*** qui m'a donné la volonté et la patience, me permettant de terminer ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de thèse **Madame le Professeur Dalila Azzam-Laouir**, professeur à l'université de Jijel, pour son encadrement scientifique de haute qualité qui exprime à tout moment sa compétence et sa rigueur mathématique, aussi je la remercie pour ses conseils, sa disponibilité permanente malgré toutes les circonstances, ainsi que pour sa patience tout au long des années de recherche doctorale.

**Merci infiniment pour tous ces efforts.**

Je voudrais adresser mes remerciement à ma co-directrice de thèse **Melle Fatine Aliouane**, M.C.A. à l'université de Jijel, pour sa disponibilité, ses conseils et sa gentillesse tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement, **Madame Yasmina Daikh**, M.C.A. à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je tiens également à remercier les membres du jury : **Monsieur Arezki Kheloufi**, professeur à l'université de Béjaia, **Monsieur Ilyas Kecis**, M.C.A. à l'université de Jijel et **Madame Amira Makhlouf**, M.C.A. à l'université de Jijel, qui m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche d'examiner et de juger cette thèse.

Mes plus vifs remerciements à mon mari **Bousba Djameleddine** pour son soutien et encouragements tout au long de mes études. J'adresse aussi mes plus vifs remerciements à mes parents **Abdesalem** et **Bouchefirat Linda** pour leur aide et encouragements dans la réalisation de cette thèse, et pour leur bienveillance depuis mon enfance. Merci à mes enfants ; **Yahia Seif el islam** et **Mohammed Djawad**. A mes beaux parents **Abderahim** et **Salima** merci à vous. Merci à mes soeurs, à **Louiza** qui va bientôt soutenir sa thèse de doctorat en physique, à **Amina**, **Sara** et **Rania** et à ma belle soeur **Meriem**. Merci à mon frère **Abdelghani** et à mes beaux frères **Abdelali** et **Mohammed**.

# Table des matières


## 1 Résultats Préliminaires

1.1 Continuité des applications . . . . . . **16**

1.2 Quelques éléments d'analyse convexe . . . . . . **20**

1.3 Topologie faible . . . . . . **22**

1.4 Quelques résultats de compacité . . . . . . **23**

1.5 Quelques résulats de convergence . . . . . . **25**

1.6 Projection . . . . . . **27**

1.7 Généralités sur les multi-applications . . . . . . **29**

- 1.7.1 Distance de Hausdorff . . . . . . 30
- 1.7.2 Continuité des multi-applications . . . . . . 31
- 1.7.3 Mesurabilité des multi-applications . . . . . . 32

1.8 Notions d'opérateurs maximaux monotones. . . . . 34

1.8.1 Opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert . . . . . 34

1.8.2 Résolvante d'un opérateur maximal monotone . . . . . 40

1.8.3 Pseudo-distance de Vladimirov . . . . . 40

1.9 Sous-différentiels et cônes normaux . . . . . 42

1.9.1 Sous-différentiels . . . . . 42

1.9.2 Cônes normaux . . . . . 44

1.10 Lemmes de Grönwall . . . . . 49

**2 Existence de solutions pour un système de deux inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones**

2.1 Introduction . . . . . 51

2.2 Résultat d'existence. . . . . 53

2.3 Application à un problème de minimisation. . . . . 79

2.4 Application à un problème de Skorohod. . . . . 90

**3 Invariance faible et forte des ensembles fermés par rapport à une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone dépendant du temps**

3.1 Introduction . . . . . 98

3.2 Résultats auxiliaires . . . . . 99

3.3 Invariance faible. . . . . 109

3.4 Invariance forte. . . . . 119

# Bibliographie

# Introduction

Les inclusions différentielles régies par des opérateurs maximaux monotones (ops.m.m.) dépendant du temps et définis sur un espace de Hilbert $H$, représentent une classe importante de problèmes d'évolution. Elles peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T] \quad (T > 0) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $(A(t))_{t\in[0,T]}$ est une famille d'ops. m.m. sur $H$ et $F$ est une application sur $[0, T] \times H$ à valeurs uniques ou multiples.

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs, nous citons par exemple [7, 11, 12, 14, 15, 28, 54, 56, 58, 69, 72, 73, 75] et leurs références. Ces recherches ont étudié l'existence de solutions de ce type d'inclusions différentielles avec différents types de perturbations ainsi que différentes formes de variation de l'opérateur par rapport au temps ; absolument continue, continue à variation bornée et continue à droite à variation bornée, et la même notion de régularité de cette variation s'impose sur la solution.

Le sous-différentiel d'une fonction convexe et semi-continue inférieurement ainsi que celui de la fonction indicatrice d'un ensemble fermé, convexe sont des exemples importants qui ont des caractéristiques spécifiques, c'est-à-dire, sont des cas particuliers d'ops.m.m. En analyse non linéaire, les opérateurs maximaux monotones jouent un rôle crucial dans la modélisation de problèmes unilatéraux, de systèmes dissipatifs non linéaires, d'optimisation convexe et dans beaucoup d'autres domaines.

Sachant que le cône normal d'un ensemble mobile (qui varie avec le temps) convexe fermé est un op.m.m., le processus dit de la rafle, c'est-à-dire, l'inclusion différentielle régie par ce cône normal est un cas particulier des inclusions différentielles régies par des ops.m.m. dépendant du temps. Ce problème a été introduit pour la première fois par J.J. Moreau dans les années 70, et largement étudié par lui-même dans une série d'articles voir [64, 65, 66], où l'on peut trouver l'interprétation et la motivation mécanique du processus de la rafle. De nombreuses variantes du processus de la rafle sont apparues dans la littérature, nous citons par exemple le problème perturbé, la dépendance de l'état dans l'ensemble mobile, processus de la rafle du second ordre, avec des applications en économie [51], circuits électriques [59], modélisation du mouvement des foules [61], et dans les problèmes de contrôle optimal [1, 27, 29, 37, 38, 39, 62, 73].

Dans [70], Skorohod a utilisé les caractéristiques d'une certaine application sur l'espace des fonctions continues réelles sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans lui même, pour construire la solution d'une équation différentielle Stochastique. Cette application a été définie à partir d'un problème déterministe lié à l'équation différentielle stochastique. Ce problème est connu sous le nom du problème de Skorohod et l'application qui en découle est appelée application de Skorohod. Soit $(T > 0)$ et $w : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $w(0) \geq 0$. Tout couple de fonctions $(x, k)$ satisfaisant :

1. $x = \{x(t) : \ t \in [0, T]\}$ continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

2. $k = \{k(t) : \ t \in [0, T]\}$ continue à variation bornée (sa variation sur $[0, t]$ est notée $|k|_t$) à valeurs dans $\mathbb{R}$, $k(0) = 0$

3. $x(t) = w(t) - k(t) \quad \forall t \in [0, T]$
4. $\displaystyle\int_0^T 1_{(x(s)>0)} d|k|_s = 0$

est appelé solution du problème de Skorohod sur $\mathbb{R}^+$. Pour plus de détails voir [32]. De nombreux résultats contenant l'existence de solutions à ce type de problème ont été réalisés, nous citons par exemple [15, 20, 60, 68].

Dans un autre contexte, de nombreux travaux récents en théorie du contrôle et en optimisation sont largement inspirés des sujets liés à la théorie de l'invariance [6, 8, 36, 47, 48, 49].

L'invariance d'un ensemble fermé, $S \subset \mathbb{R}^d$, par rapport à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{du}{dt}(t) = f(u(t)) \quad p.p.\, t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

où $f$ est localement Lipschitzienne, est la propriété que pour tout point initial $u_0 \in S$, la solution unique $u(\cdot)$ satisfait $u(t) \in S$, pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire la solution démarre d'un point appartenant à $S$ et demeure dans $S$.
Le problème de l'approche d'un ensemble fermé donné par rapport à la forme suivante des systèmes dynamiques

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2}$$

qui est une extension naturelle des équations différentielles classiques, a attiré l'attention de nombreux chercheurs en raison du grand nombre de théorèmes d'existence bénéfiques, lorsque les inclusions différentielles sont prises en compte plutôt que des équations différentielles.

En général, l'unicité de solution du problème (2) (même de (1)) n'est pas garantie et nécessite des hypothèses très restrictives. Ce fait justifie les deux notions d'invariance, c'est-à-dire l'invariance faible (appelée aussi viabilité) et l'invariance forte. En effet, un ensemble fermé $S \subset \mathbb{R}^d$ est dit faiblement invariant par rapport au problème (2) si et seulement si pour tout point initial $u_0 \in S$, il existe une solution $u(\cdot)$ du problème (2) satisfaisant $u(t) \in S$, pour tout $t \geq 0$. Tandis que $S$ est dit fortement invariant si et seulement si pour tout point initial $u_0 \in S$ et pour toute solution $u(\cdot)$ du problème (2), nous avons $u(t) \in S$, pour tout $t \geq 0$.

Les ensembles invariants ont été soigneusement examinés dans de nombreuses références, nous citons par exemples [8, 10, 21, 24, 35, 36, 43, 44, 46, 45, 48, 50, 67, 74], voir aussi leurs références.

Le premier résultat d'invariance (voir [44]) a été réalisé par Nagumo [67]. Il a montré qu'un ensemble fermé $S$ est faiblement invariant pour (1) ($f$ étant continue) si la condition tangentielle suivante est satisfaite (voir la relation (1.13) pour la définition du cône tangent $T_S^B(\cdot)$) :

$$f(x) \in T_S^B(x) \quad \forall x \in S,$$

et dans [21], Bony a introduit le cône normal proximal, $N_S^P(\cdot)$, pour caractériser l'invariance de $S$ par rapport à (1) et a prouvé qu'elle est équivalente à

$$\langle f(x), \xi \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S, \quad \forall \xi \in N_S^P(x).$$

Haddad a montré dans [50], que l'invariance faible par rapport à (2) est équivalente à la condition tangentielle

$$F(x) \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$$

Alors que le cône normal proximal a été utilisé par Veliov dans [74] pour caractériser l'invariance faible comme suit :

$$h_F(x;\xi) = \inf_{z \in F(x)} \langle z, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S, \ \ \forall \xi \in N_S^P(x),$$

où $h_F$ est le Hamiltonien inférieur de $F$. La première caractérisation de l'invariance forte par rapport à (2), où $F$ est Lipschitzienne, a été donnée par Clarke (voir [34]), qu'il a exprimé par :

$$H_F(x;\xi) = \sup_{z \in F(x)} \langle z, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S, \ \ \forall \xi \in N_S^P(x),$$

où $H_F$ est le Hamiltonien supérieur de $F$. L'extension aux espaces de Hilbert de dimension infinie des ensembles invariants a été étudiée par Clarke et al. dans [35].

Il convient de rappeler que l'invariance faible et forte par rapport à (2) ont été caractérisées par différentes manières [45, 46], où les auteurs ont supposé que la multi-application $F$ est unilatérale Lipschitzienne, en anglais : one sided Lipschitz (OSL) (voir [43] pour la définition), qui est plus faible que la condition de Lipschitz supposée dans les travaux antérieurs.

Dans [39], les auteurs ont étendu les études mentionnées ci-dessus au processus de la rafle perturbé exprimé par :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + G(t,u(t)) \quad p.p.\, t \geq 0 \\ u(t) \in C(t) \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

où, pour tout $t \geq 0$, $C(t)$ est un ensemble fermé uniformément prox-régulier et $N_{C(t)}(\cdot)$ est le cône normal de Clarke à $C(t)$. Dans leur étude, la caractérisation de l'invariance faible était largement basée sur la théorie existant dans [36]. Alors que l'invariance forte, qui est en général un problème difficile à résoudre (le côté droit de (3) ne satisfait pas l'hypothèse de (OSL) imposée dans [43]), les auteurs ont utilisé l'avantage de la structure particulière de (3) afin de surmonter cette difficulté.

Dans [2], les auteurs ont également examiné la notion de l'invariance (faible et forte) des ensembles fermés dans $\mathbb{R}^d$, mais par rapport à un système dynamique différent, qui est modélisé par l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -Au(t) + F(u(t)) \quad p.p.\, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

où $A$ est un op.m.m. de $\mathbb{R}^d$ indépendant du temps et $F$ est une multi-application Lipschitzienne à valeurs non vides, convexes et compactes (appelée Cusco-application), qu'ils ont exprimé par différentes caractérisations. Concernant l'invariance faible, l'élément de norme minimale de l'op.m.m. $A$ doit satisfaire une condition de bornitude, afin de pouvoir appliquer la théorie existant dans [44]. Tandis que la caractérisation de l'invariance forte était basée sur la nature générale de l'opérateur maximal monotone. Nous faisons également référence à [3, 4] pour le cas $F(x) = \{f(x)\}$, i.e., $F$ à valeurs univoques.

Inspirés par les études mentionnées précédemment, ainsi que par leur pertinence dans plusieurs domaines mathématiques et physiques et leurs applications, à travers cette thèse, nous avons apporté une contribution à ce domaine de recherche en étudiant le couple d'inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones, aussi bien que la caractérisation de l'invariance des ensembles fermés dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à une inclusion différentielle plus générale, régie par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et avec perturbation multivoque non-autonome de type Cusco.

Le manuscrit est essentiellement composé de trois chapitres. Le premier est consacré aux résultats préliminaires et aux outils de base utilisés dans les preuves de nos théorèmes principaux.

Le deuxième chapitre est lui même composé de trois sections. Dans la première, nous donnons le résultat d'existence de solutions absolument continues du système d'évolution suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t, v(t))u(t) + F(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T]; \\ u(t) \in D(A(t, v(t))) \quad \forall t \in [0, T]; \\ -\dfrac{dv}{dt}(t) \in B(t, u(t))v(t) + G(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T]\ ; \\ v(t) \in D(B(t, u(t))) \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0, v_0)), v(0) = v_0 \in D(B(0, u_0)), \end{cases}$$

où $(A(t, x))_{(t,x)}$, $(B(t, x))_{(t,x)}$ sont des familles d'opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état, et où $F$ et $G$ sont des multi-applications semi-continues supérieurement à valeurs non vides, fermées et convexes. Notre théorème principal généralise le résultat obtenu dans [20], qui concerne l'existence de solutions d'un couple d'inclusions différentielles, la première régie par un op.m.m. dépendant du temps et de l'état et la deuxième par le cône normal à des ensembles non vides, fermés et convexes dépendant du temps et de l'état, avec des perturbations univoques.

La deuxième section contient une application à un problème de minimisation de l'intégrante

$$\int_0^t L(t, u_\xi(t), v_\xi(t), \dot{u}_\xi(t), \dot{v}_\xi(t)),$$

où $(u_\xi, v_\xi)$ est l'unique solution du problème contrôlé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, \xi(t))u(t) + f(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T]; \\ u(t) \in D(A(t, \xi(t))) \quad \forall t \in [0, T]; \\ -\dot{v}(t) \in B(t, \xi(t))v(t) + g(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T]\ ; \\ v(t) \in D(B(t, \xi(t))) \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0, v_0)), v(0) = v_0 \in D(B(0, u_0)), \end{cases}$$

et $\xi(\cdot)$ est la fonction de contrôle qui appartient à un ensemble bien approprié que nous définissons plus tard.
La troisième section est consacrée à une application à un problème de Skorohod par rapport à un système dynamique de deux inclusions différentielles, toutes deux régies par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état, se présentant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(t) = \displaystyle\int_0^t K(s, X(s))ds + Y(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ Y(t) \in D(A(t, Z(t))) \quad \forall t \in [0, T] \\ -\dfrac{dY}{dt}(t) \in A(t, Z(t))Y(t) + \displaystyle\int_0^t K(s, X(s))ds \quad p.p.\ t \in [0, T] \\ -\dfrac{dZ}{dt}(t) \in B(t, Y(t))Z(t) + g(t, Y(t), Z(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T] \\ Z(t) \in D(B(t, Y(t))) \quad \forall t \in [0, T] \\ X(0) = Y(0) = d_0 \in D(A(0, k_0)) \\ Z(0) = k_0 \in D(B(0, d_0)). \end{cases}$$

Le troisième chapitre se compose de deux sections. Dans la première, on s'intéresse à l'étude de la condition nécessaire et suffisante pour l'invariance faible d'un ensemble fermé $S \subset \mathbb{R}^d$, par rapport à l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + G(t, u(t)) \quad p.p.t \in [0, T] \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in [0, T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

Alors que l'objectif principal de la deuxième section est l'établissement de la condition nécessaire et suffisante pour l'invariance forte de $S$, toujours par rapport au problème (4).

Les résultats du chapitre 2 on fait l'objet d'une publication dans une revue spécialisée (voir [41]).
Ceux du chapitre 3 on fait l'objet d'une publication, aussi dans une revue spécialisée (voir [16]).

# Notations

Nous adopterons les notations suivantes, tout au long du manuscrit.

| | |
|---|---|
| $\overline{\mathbb{R}}$ | La droite achevée, i.e., $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. |
| $H$ | Un espace de Hilbert réel séparable. |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Le produit scalaire de $H$. |
| $\|\cdot\|_H$ | La norme de $H$, s'il n'y a pas ambiguïté elle sera notée par $\|\cdot\|$. |
| $I_H$ | Opérateur identité de $H$. |
| $2^H$ | La famille de tous les sous-ensembles de $H$. |
| $\overline{B}_H$ | La boule unité fermée de $H$. |
| $\overline{B}_H(x, r)$ | La boule fermée de $H$ de centre $x$ et de rayon $r > 0$. |
| $B_H(x, r)$ | La boule ouverte de $H$ de centre $x$ et de rayon $r > 0$. |

Si $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on note par $dom(f)$ l'ensemble :

$$dom(f) = \big\{x \in H : \ f(x) < +\infty\big\}.$$

| | |
|---|---|
| $Fr(C)$ | La frontière de l'ensemble $C \subset H$. |

| | |
|---|---|
| $\overline{C}$ | L'adhérence de $C$. |
| $int(C)$ | L'intérieur de $C$. |
| $co(C)$ | L'enveloppe convexe de $C$. |
| $\overline{co}(C)$ | L'enveloppe convexe fermée de $C$. |
| $Proj(\cdot, C)$ ou bien $Proj_C(\cdot)$ | Projecteur sur le sous-ensemble non vide $C$ de $H$. Dans le cas où cet opérateur est univoque on le notera $proj(\cdot, C)$. |
| $x_n \to x$ | La suite $(x_n)_n$ converge fortement vers $x$. |
| $x_n \rightharpoonup x$ | La suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x$. |

Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$.

$t \downarrow t_0$ veut dire $t \to t_0$ et $t > t_0$.

$t \uparrow t_0$ veut dire $t \to t_0$ et $t < t_0$.

Soit $T > 0$, et soit $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note par :

$\mathcal{L}(I)$ La tribu de Lebesgue sur $I$.

$\lambda = dt$ La mesure de Lebesgue sur $I$.

$\mathcal{B}(H)$ La tribu de Borel sur $H$.

p.p L'abréviation de presque partout.

$L^p(I, H)$ L'espace des applications $\text{p}^{\text{ième}}$ intégrables ($1 \leq p < \infty$) définies sur $I$ à valeurs dans $H$ muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \forall f \in L^p(I, H).$$

$L^\infty(I, H)$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans $H$, muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{L^\infty} = \inf\left\{c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c \text{ p.p sur I}\right\}.$$

$\mathcal{C}(I, H)$ L'espace de Banach des applications continues définies sur $I$ à valeurs dans $H$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|.$$

$\dot{u}(t) = \dfrac{du}{dt}(t)$ La dérivée de l'application $u$ au point $t$ quand elle existe.

$\mathcal{W}^{1,p}(I, H)$ L'espace des applications $u : I \to H$ continues tel que $\dot{u} \in L^p(I, H)$. Dans le cas où $p = 1$, $W^{1,1}(I, H)$ est l'espace des applications absolument continues.

$\mathbf{1}_C(\cdot)$ La fonction caractéristique du sous-ensemble $C \subset H$, définie par

$$\mathbf{1}_C(x) = \begin{cases} 1 \; si \quad x \in C, \\ 0 \; si \quad x \notin C. \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $d(\cdot, C)$ ou bien $d_C(\cdot)$ | La fonction distance à $C$, définie par : $$d(x,C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$ |
| $\delta_C(\cdot)$ | La fonction indicatrice de $C$, définie par : $$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C, \\ +\infty & x \notin C. \end{cases}$$ |
| $\delta^*(x', C)$ | La fonction d'appui de $C$, définie par $$\delta^*(x', C) = \sup_{y \in C} \langle x', y \rangle \ \ \forall x' \in H.$$ |

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ un espace vectoriel normé, $E'$ son dual topologique, on note par

| | |
|---|---|
| $\sigma(E, E')$ | La topologie faible sur $E$. |

Enfin, on note par :

| | |
|---|---|
| $\mathcal{F}(X, Y)$ | L'espace de toutes les applications $f : X \longrightarrow Y$. |

Chapitre 1

# Résultats Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats nécessaires à la bonne lecture du manuscrit, et qui nous seront utiles dans les preuves des théorèmes étudiés à travers cette thèse.

## 1.1 Continuité des applications

Les résultats de cette section sont pris des références [33] et [71].
Soient $(X, d)$, $(Y, d')$ deux espaces métriques.

**Définition 1.1.1 (Application continue)**
*On dit qu'une application $f : (X, d) \to (Y, d')$ est continue au point $x_0 \in X$, si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

*$f$ est continue sur $X$ si et seulement si elle est continue en tout point $x_0 \in X$.*

**Définition 1.1.2**
*On dit que $f$ est Lipschitzienne de rapport $k > 0$, si*

$$d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \textit{pour tous } x, y \in X.$$

**Définition 1.1.3**
*On dit que $f$ est localement Lipschitzienne, de rapport $k > 0$, si pour tout $x_0 \in X$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in B(x_0, \delta).$$

**Théorème 1.1.4**
*Si $f$ est une fonction réelle continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors $f$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes inférieure et supérieure sur $[a, b]$.*

**Preuve**
On montre qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M \;\; \forall x \in [a, b]$. Supposons le contraire, i.e., supposons l'existence d'une suite $(x_n)_n \subset [a, b]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty. \tag{1.1}$$

Il est clair que $(x_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, on peut alors lui extraire une sous suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge vers $\overline{x} \in [a, b]$. Comme $f$ est continue il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_{\phi(n)})| = |f(\overline{x})|. \tag{1.2}$$

Sachant que si une suite réelle converge vers $+\infty$, alors toutes ses sous suites extraites convergent aussi vers $+\infty$, on aboutit à une contradiction de (1.2) avec (1.1).
Par conséquent, $f$ est bornée et donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ sont bien définis.
Par définition de la borne supérieure, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] \;\text{ avec }\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Alors, on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge vers un élément $\overline{x} \in [a, b]$, donc par continuité de $f$, on obtient

$$f(\overline{x}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

De la même manière, on montre le cas de la borne inférieure. ■

**Définition 1.1.5**
*Soit $(\Omega, \Sigma)$ un espace mesurable et soient $X, Y$ deux espaces topologiques et*

$$\begin{aligned} f : \Omega \times X &\longrightarrow Y \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x). \end{aligned}$$

*On dit que $f$ est une application de Carathéodory si, et seulement si, pour tout $t \in \Omega$ fixé, l'application*

$$\begin{aligned} f_t : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f_t(x) = f(t, x) \end{aligned}$$

*est continue sur $X$, et pour tout $x \in X$ fixé, l'application*

$$\begin{aligned} f_x : \Omega &\longrightarrow Y \\ t &\longmapsto f_x(t) = f(t, x) \end{aligned}$$

*est mesurable sur $\Omega$.*

Soit $X$ un espace vectoriel topologique.

**Définition 1.1.6 (Semicontinuité inférieure)**
*Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda < f(x_0)$, il existe un voisinage $V_{x_0}$ de $x_0$ tel que $\lambda < f(x)$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*
*$f$ est s.c.i sur $X$ si, et seulement si, $f$ est s.c.i en tout point de $X$.*

**Définition 1.1.7 (Semicontinuité supérieure)**
*On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > f(x_0)$, il existe un voisinage $V_{x_0}$ de $x_0$ tel que $\lambda > f(x)$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*
*$f$ est s.c.s sur $X$ si et seulement si $f$ est s.c.s en tout point de $X$.*

**Proposition 1.1.8**
*$f$ est continue au point $x_0 \in X$ si, et seulement si, $f$ est s.c.s et s.c.i au point $x_0$.*

**Définition 1.1.9**
*Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}$. Alors, la limite supérieure de la suite $(a_n)_n$, notée $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, est définie par :*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq n} a_k).$$

*Similairement, la limite inférieure de la suite $(a_n)_n$, notée $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, est définie par :*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geq n} a_k).$$

**Proposition 1.1.10**
*Si* $l = \liminf_{n\to\infty} a_n$. *Alors, il existe une sous suite extraite de* $(a_n)_n$, *notée* $(a_{\phi(n)})_n$, *tel que* $\lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)} = l$.

**Définition 1.1.11**
*Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in X$. *Alors, on a*

$(i)$ $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{U\in V(x_0)} (\sup_{x\in U} f(x))$.

$(ii)$ $\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{U\in V(x_0)} (\inf_{x\in U} f(x))$.

*Ici* $V(x_0)$ *désigne l'ensemble des voisinages du point* $x_0$.

**Proposition 1.1.12**
*Soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in X$. *Alors*

$(i)$ $f$ est s.c.i au point $x_0$ *si, et seulement si,* $\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$,

$(ii)$ $f$ est s.c.s au point $x_0$ *si, et seulement si,* $\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

Considérons dans la suite un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ .

**Définition 1.1.13 (Application absolument continue)**
*Soit* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une application* $f : [a, b] \longrightarrow E$ *est dite absolument continue si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle* $[a, b]$ *par des intervalles disjoints* $]a_k, b_k[$ *vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \quad \textit{on a} \quad \sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\|_E < \varepsilon.$$

**Théorème 1.1.14**
*Soit* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une application* $f : [a, b] \longrightarrow E$. *Si* $E$ *est réflexif, alors* $f$ *est absolument continue si, et seulement si, il existe une application intégrable* $v : [a, b] \longrightarrow E$ *tel que pour tout* $t \in [a, b]$

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s)ds.$$

*Dans ce cas,* $f$ *est dérivable presque partout et sa dérivée* $\dot{f} = v$ *p.p.*

**Remarque 1.1.15**
*Toute application absolument continue est continue, par contre la réciproque est fausse.*

**Théorème 1.1.16 (Théorème de différentiation de Lebesgue)**
*Pour toute fonction* $f$ *Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$, *on a pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\tau)d\tau = f(x).$$

**Définition 1.1.17 (Équi-continuité)**

*Soient $(X, d)$, $(Y, d')$ deux espaces métriques.*
*Un sous-ensemble $K$ de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dit équi-continu au point $x \in X$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in K : d(x, x') \leq \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

- *$K$ est dit équi-continu sur $X$ s'il est équi-continu en tout point $x \in X$.*

## 1.2 Quelques éléments d'analyse convexe

Pour les résultats de cette section on renvoie le lecteur à la référence [9].

**Définition 1.2.1 (Ensemble convexe)**
*Soient $E$ un espace vectoriel, $S$ un sous-ensemble de $E$. On dit que $S$ est convexe si, et seulement si, pour tous $u, v \in S$, $\alpha \in [0, 1]$ :*

$$\alpha u + (1 - \alpha)v \in S.$$

*Autrement dit, pour tous $u, v \in S$, le segment de droite*

$$[u, v] = \left\{ \alpha u + (1 - \alpha)v : \quad \alpha \in [0, 1] \right\} \subset S.$$

**Définition 1.2.2 (Simplexe)**
*On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\Delta_n$ défini par*

$$\Delta_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1, ..., n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

**Définition 1.2.3**
*Soit $E$ un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ tel que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_n$.*

**Définition 1.2.4 (Enveloppe convexe)**
*Soit $E$ un espace vectoriel et soit $S$ un sous-ensemble de $E$. On appelle enveloppe convexe de $S$ qu'on note $co(S)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de $E$ qui contiennent $S$. ($co(S)$ est le plus petit convexe de $E$ qui contient $S$.)*

**Définition 1.2.5 (Enveloppe convexe fermé)**
*Soit $E$ un espace vectoriel topologique et soit $S$ un sous-ensemble de $E$. On appelle enveloppe convexe fermée de $S$ qu'on note $\overline{co}(S)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de $E$ qui contiennent $S$. ($\overline{co}(S)$ est le plus petit convexe fermé de $E$ qui contient $S$.)*

**Définition 1.2.6**
*Soit $E$ un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f$ est propre si $f : E \to ]-\infty, +\infty]$ et $f \not\equiv +\infty$, i.e., il existe $x_0 \in E$, tel que $f(x_0) \neq +\infty$, c'est-à-dire $dom(f) \neq \emptyset$.*

**Définition 1.2.7**
*Soit $E$ un espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f$ est convexe si, et seulement si, pour tous $x, y \in dom(f), \alpha \in [0, 1]$, on a*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

**Théorème 1.2.8**
*Soit $E$ un espace vectoriel normé et soit $M$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $E$ et $x \notin M$. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement $M$ et $x$, i.e., il existe $x' \in E'$, $x' \not\equiv 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\langle x', x\rangle \leq \alpha < \langle x', y\rangle, \ \forall y \in M.$$

**Théorème 1.2.9**
*Soit $E$ un espace vectoriel normé et $E'$ son dual topologique. Alors, pour tout ensemble non vide $S \subset E$*

$$\overline{co}(S) = \left\{ x \in E : \quad \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \right\}.$$

**Lemme 1.2.10** *[42]*
*Soit $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré fini, $X$ un espace de Banach et $f : \Omega \to X$ une application intégrable au sens de Bochner. Alors, pour tout $E \in \Sigma$ avec $\mu(E) > 0$, on a*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x) d\mu(x) \in \overline{co}(f(E)).$$

**preuve**
Supposons le contraire, i.e., $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x) d\mu(x) \notin \overline{co}(f(E))$. Alors, par application du Théorème 1.2.8, il existe $x' \in E'$, $x' \not\equiv 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle x', \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x) d\mu(x)\rangle \leq \alpha < \langle x', y\rangle \quad \forall y \in \overline{co}(f(E))$$

en particulier pour $y \in f(E)$, on obtient

$$\langle x', \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)d\mu(x)\rangle \leq \alpha < \langle x', f(u)\rangle \quad \forall u \in E$$

donc, en intégrant sur $E$

$$\int_E \langle x', \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)d\mu(x)\rangle d\mu(u) \leq \alpha\mu(E) < \int_E \langle x', f(u)\rangle d\mu(u)$$

ce qui implique que

$$\langle x', \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)d\mu(x)\rangle \int_E d\mu(u) \leq \alpha\mu(E) < \int_E \langle x', f(u)\rangle d\mu(u)$$

par conséquent

$$\langle x', \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)d\mu(x)\rangle \mu(E) \leq \alpha\mu(E) < \int_E \langle x', f(u)\rangle d\mu(u)$$

d'où

$$\langle x', \int_E f(x)d\mu(x)\rangle \leq \alpha\mu(E) < \int_E \langle x', f(u)\rangle d\mu(u).$$

Ce qui est absurde. ■

## 1.3 Topologie faible

Pour cette section on fait référence à [25].

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé réel. On note $E'$ son dual topologique, c'est à dire, l'espace des formes linéaires continues sur $E$, i.e.,

$$E' = \{f : E \to \mathbb{R} : \ f \text{ linéaire continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B}_E} |f(x)| = \sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle f, x\rangle|.$$

Ici $\langle \cdot, \cdot\rangle$ note le crochet de dualité entre $E$ et $E'$. Dans le cas où $E = H$, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ coïncide avec le produit scalaire de $H$.

**Définition 1.3.1**

*Soit $f \in E'$ et soit*

$$\begin{array}{rcl}\varphi_f : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi_f(x) = f(x) =: \langle f, x\rangle.\end{array}$$

*La topologie faible sur $E$, notée $\sigma(E, E')$, est la topologie la plus fine pour laquelle toutes les applications $\varphi_f (f \in E')$ sont continues.*

**Proposition 1.3.2**

*La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

**Proposition 1.3.3**

*Soit $(x_n)_n$ une suite de points de $E$. Alors*

1. *$(x_n)_n$ converge faiblement vers $x$ (ou $\sigma(E, E')$) si, et seulement si, $(\langle f, x_n\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $(x_n)_n$converge faiblement vers $x$ alors, $\big(\|x_n\|_E\big)_n$ est bornée et nous avons*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

## 1.4 Quelques résultats de compacité

Pour plus de détails sur ces résultats, consulter les références [9], [25], [55] et [71].

**Définition 1.4.1**

*Soit $X$ un espace topologique séparé et $S$ une partie de $X$. On dit que $S$ est relativement compacte si son adhérence dans $X$ est compacte.*

**Théorème 1.4.2**

*Soit $E$ un espace vectoriel normé. Alors,*

(1) *$S$ est relativement compact si, et seulement si, de toute suite de ses points on peut extraire une sous suite qui converge dans $E$.*

(2) *$S$ est compact si, et seulement si, de toute suite de ses points on peut extraire une sous suite qui converge dans $S$.*

**Définition 1.4.3 (Boule-compacité)**

*Soit $E$ un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $S$ de $E$ est boule-compact si son intersection avec toute boule fermée de $E$ est compacte, et $S$ est relativement boule-compact si son intersection avec toute boule fermée de $E$ est relativement compacte.*

**Remarque 1.4.4**

(1) *Tout ensemble $S$ boule-compact est fermé.*
*En effet, soit $(x_n)_n$ une suite de $S$ qui converge vers $x$. Elle est donc bornée, i.e., il existe $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in S \cap \overline{B}_H(0, r)$, qui est compact. On peut alors extraire de $(x_n)_n$ une sous suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers $y \in S \cap \overline{B}_H(0, r)$. Par l'unicité de la limite nous déduisons que, $y = x$ et donc $x \in S$.*

(2) *Si $E = \mathbb{R}^d$, alors tout ensemble fermé $S$ est boule-compact.*
*En effet, on sait que si $E = \mathbb{R}^d$, $\overline{B}(x_0, r)$ est compacte $(x_0 \in \mathbb{R}^d, r > 0)$ et comme $S$ est fermé, nous déduisons que $S \cap \overline{B}(x_0, r)$ est compact et donc $S$ est boule-compact.*

**Définition 1.4.5**

*Soit $E$ un espace vectoriel normé. On dit que $E$ est réflexif si $J(E) = E''$, c'est-à-dire $J$ est un isomorphisme de $E$ dans $E''$ , avec*

$$\begin{aligned} J : E &\to E'' \\ x &\mapsto J_x \end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned} J_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto J_x(f) = \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

*Ici $E''$ est le bidual de $E$, i.e., le dual de $E'$.*

**Exemples 1.4.6**

1. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*
2. *Les espaces $L^p(\mathbb{R})\,(1 < p < +\infty)$ sont réflexifs.*

**Remarque 1.4.7**

*En général, si $(\Omega, \Sigma, \mu)$ est un espace mesuré et si $E$ est un espace de Banach, alors pour $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega, E)$ est réflexif si, et seulement si, $E$ est réflexif.*
*En effet, $(L^p(\Omega, E))' = L^q(\Omega, E')$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*
*Donc,*

$$(L^p(\Omega, E))'' = (L^q(\Omega, E'))' = L^p(\Omega, E'') = L^p(\Omega, E).$$

*Pour $1 \leq p < +\infty$, $(L^p(\Omega, E))' = L^q(\Omega, E')$ et nous avons $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_\Omega \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x)$, qui est le produit de dualité entre $L^p(\Omega, E)$ et $L^q(\Omega, E')$.*

**Théorème 1.4.8**
*Soit $E$ un espace de Banach réflexif. Alors la boule unité fermée de $E$ est faiblement compacte ($\sigma(E,E')$-compacte). En particulier, si $(x_n)_n \subset E$ est une suite bornée, on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement, i.e., qui converge pour la topologie $\sigma(E,E')$.*

**Théorème 1.4.9 (Banach-Mazur)**
*Soit $E$ un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E$ convergeant faiblement vers $x$. Alors il existe une suite $(z_k)_k$ telle que chaque $z_k$ est une combinaison convexe des éléments $x_k, x_{k+1}, \ldots$, i.e., $z_k \in co\{x_n : \ n \geq k\}$ et tel que $(z_k)_k$ converge fortement vers $x$.*

**Théorème 1.4.10 (Théorème d'Arzelà-Ascoli)**

*Soient $(X,d)$ un espace métrique compact, $(Y,d')$ un espace métrique complet, et $K$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}(X,Y)$, muni de la distance de la convergence uniforme. Alors $K$ est relativement compact si et seulement si $K$ est équi-continu et $K(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$, avec*

$$K(x) = \Big\{f(x) : \quad f \in K\Big\}.$$

**Définition 1.4.11**
*Soit $K \subset L^1(I,H)$. On dit que $K$ est intégrablement borné si, il existe une fonction positive $\gamma \in L^1(I,\mathbb{R})$ tel que*

$$\|f(t)\| \leq \gamma(t) \quad p.p.\ t \in I, \quad \textit{pour tout } f(\cdot) \in K.$$

La proposition suivante est une conséquence du Théorème $IV.2.1$ et corollaire $IV.2.1$ dans [42]

**Proposition 1.4.12**

*Si $K \subset L^1(I,H)$ est intégrablement borné, alors $K$ est relativement faiblement compact dans $L^1(I,H)$, c'est-à-dire $\sigma(L^1(I,H), L^\infty(I,H))$-relativement compact.*

## 1.5 Quelques résulats de convergence

Consulter la référence [40] pour les résultats suivants.

**Théorème 1.5.1 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)**
*Soit $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré et $H$ un espace de Hilbert, soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p(\Omega, H)$. On suppose que*

1. *$(f_n)_n$ converge $\mu-$presque partout vers une fonction $f$ sur $\Omega$,*
2. *il existe une fonction positive $g(\cdot) \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(t)| \leq g(t) \;\; \mu - p.p \;\; t \in \Omega.$$

*Alors, $f(\cdot) \in L^p(\Omega, H)$ et la suite $(f_n)_n$ converge vers $f$ dans $L^p(\Omega, H)$.*

**Théorème 1.5.2 (Réciproque de la convergence de Lebesgue)**
*Soit $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré et soit $1 \leq p < +\infty$. Si $(f_n)_n$ converge vers $f$ dans $L^p(\Omega, H)$, alors il existe $(f_{n_k})_k$, une suite extraite de $(f_n)_n$, et une fonction positive $g(\cdot) \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ tel que*

1. *$f_{n_k} \longrightarrow f \;\; \mu - p.p$,*
2. *pour tout $k$, $\|f_{n_k}(t)\| \leq g(t) \;\; \mu - p.p$.*

**Théorème 1.5.3**
*Soit $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré. Soient $E, F$ deux espaces de Banach et $\Gamma : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Si $f : \Omega \longrightarrow E$ est $\mu$-intégrable alors, $\Gamma(f)$ est $\mu$-intégrable et*

$$\int_{\Omega} \Gamma(f(x)) d\mu(x) = \Gamma\bigg( \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \bigg).$$

**Définition 1.5.4 (Valeur d'adhérence)**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique et soit $(x_n)_n$ une suite de $X$. On dit que $x$ est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_n$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \subset \mathbb{N}, \;\; \forall n \in N_0 : \;\; d(x_n, x) < \varepsilon.$$

**Théorème 1.5.5**

*Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $X$. Posons*

$$S_n = \big\{ x_k : \; k \geq n \big\} = \big\{ x_n, x_{n+1}, \dots \big\}.$$

*Soit $S$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$. Alors $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{S}_n$, et donc $S$ est fermé.*

**Proposition 1.5.6**

*Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $X$. Si $(x_n)_n$ converge vers $x$, alors $x$ est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_n$.*

## 1.6 Projection

Pour plus de détails, consulter la référence [25].

**Définition 1.6.1**

*Soit $S$ un sous-ensemble non vide de $H$ et $x \in H$. On définit $Proj(x,S)$ la projection de $x$ sur $S$ (qui peut être vide) comme l'ensemble de tous les éléments $y \in S$ dont la distance à $x$ est minimale, c'est à dire,*

$$Proj(x,S) = \Big\{ y \in S : \|x-y\| = d(x,S) \Big\}.$$

**Remarque 1.6.2**
*Si $x \in S$, alors $proj(x,S) = x$ et $d(x,S) = 0$. En général $d(x,S) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{S}$.*

**Théorème 1.6.3 (Projection sur un ensemble convexe fermé)**

*Soit $S$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $H$. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $\overline{x} \in S$ tel que*

$$\|x-\overline{x}\| = \inf_{z\in S} \|x-z\| = d(x,S).$$

*De plus, $\overline{x}$ est caractérisé par la propriété*

$$\begin{cases} \overline{x} \in S, \\ \langle x-\overline{x}, z-\overline{x}\rangle \leq 0, \quad \forall z \in S. \end{cases}$$

*Dans ce cas, on note $\overline{x} = proj(x,S)$.*

**Remarque 1.6.4** *Si $S$ est relativement boule-compact, alors $Proj(x,S) \neq \emptyset$, pour tout $x \in H$.*
*En effet, si $x \in S$, $proj(x,S) = x$. Maintenant si $x \notin S$, on a $d(x,S) = \inf_{z\in S}\|x-z\| > 0$ (car $S$ est fermé).*
*D'après la caractérisation de la borne inférieure, on obtient*

$$\forall \epsilon > 0, \exists z_\epsilon \in S, d(x,S) \leq \|x-z_\epsilon\| < d(x,S) + \epsilon$$

*pour $\epsilon = \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, on trouve*

$$\forall k > 0, \exists z_k \in S, d(x,S) \leq \|x-z_k\| < d(x,S) + \frac{1}{k}. \tag{1.3}$$

*Donc*

$$\begin{aligned}\|z_k\| &< \|x\| + d(x,S) + \frac{1}{k}\\ &< \|x\| + d(x,S) + 1 =: M,\end{aligned}$$

*c'est à dire,* $(z_k)_k \subset S \cap M\overline{B}_H$. *Cet ensemble est relativement compact, donc d'après la propriété* (2) *du Théorème 1.4.2, il existe une sous suite* $(z_{\varphi(k)})_k$ *tel que* $z_{\varphi(k)} \longrightarrow z$ *lorsque* $k \longrightarrow \infty$. *Par la relation* (1.3)*, on a*

$$d(x,S) \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} \|x - z_{\varphi(k)}\| \leq d(x,S),$$

*et donc*

$$\|x - z\| = d(x,S), \;\; i.e., \;\; z \in Proj(x,S),$$

*et par suite* $Proj(x,S) \neq \emptyset$. ■

**Remarque 1.6.5**
*Par la deuxième partie de la Remarque 1.4.4, on voit bien que si* $S \subset \mathbb{R}^d$ *est fermé, alors* $Proj(x,S) \neq \emptyset$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

**Proposition 1.6.6**
*Soient* $S$ *un sous-ensemble fermé non vide de* $H$, $v \in H$ *et* $x \in S$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $x \in Proj(v,S)$
2. $\langle v - x, x' - x\rangle \leq \frac{1}{2}\|x' - x\|^2, \;\; \forall x' \in S.$

**Preuve**

$$\begin{aligned}
x \in Proj(v,S) &\Longleftrightarrow \|v-x\| = d(v,S) \\
&\Longleftrightarrow \|v-x\| \leq \|v-x'\| \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \|v-x\|^2 \leq \|v-x'\|^2 \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v-x, v-x\rangle + \langle v-x, x'-v\rangle \leq \langle v-x', v-x'\rangle + \langle v-x, x'-v\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v-x, v-x\rangle + \langle v-x, x'-v\rangle \leq \langle v-x', v-x'\rangle - \langle v-x, v-x'\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v-x, x'-x\rangle \leq \langle v-x', x-x'\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v-x, x'-x\rangle \leq \langle x'-v, x'-x\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v, x'-x\rangle - \langle x, x'-x\rangle \leq \langle x', x'-x\rangle - \langle v, x'-x\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow 2\langle v, x'-x\rangle - \langle x, x'-x\rangle \leq \langle x', x'-x\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v, x'-x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x'-x\rangle \leq \frac{1}{2}\langle x', x'-x\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v, x'-x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x'-x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x'-x\rangle \leq \frac{1}{2}\langle x', x'-x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x'-x\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v, x'-x\rangle - \langle x, x'-x\rangle \leq \frac{1}{2}\langle x'-x, x'-x\rangle \quad \forall x' \in S \\
&\Longleftrightarrow \langle v-x, x'-x\rangle \leq \frac{1}{2}\|x'-x\|^2 \quad \forall x' \in S.
\end{aligned}$$

■

## 1.7 Généralités sur les multi-applications

Cette section est consacrée à l'introduction d'une classe d'applications à valeurs ensemblistes. Elle joue un rôle important dans notre étude. Pour en plus de détails, on renvoie le lecteur aux références [9], [30] et [55].

**Définition 1.7.1**
*Soient $X$, $Y$ deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, c'est à dire une application de $X$ à valeurs dans $2^Y$.*

1. *On appelle **domaine** (effectif) de $F$, qu'on note $D(F)$, le sous ensemble de $X$ défini par*
$$D(F) = \Big\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$
2. *On appelle **image de** $F$, qu'on note $\mathrm{R}(F)$, le sous-ensemble de $Y$ défini par*
$$\mathrm{R}(F) = \Big\{y \in Y : \ \exists x \in D(F), \ y \in F(x)\Big\} = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

*Si $M$ est un sous-ensemble de $X$, alors $F(M) = \bigcup_{x\in M} F(x)$. Il est clair que $R(F) = F(X)$.*

3. *On appelle **graphe de** $F$, qu'on note $Gr(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$Gr(F) = \Big\{(x,y) \in D(F) \times Y :\ y \in F(x)\Big\}.$$
4. *Considérons la multi-application **inverse** $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*
$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$
*On a*
$$(F^{-1})^{-1} = F,\ \ D(F^{-1}) = R(F) \text{ et } R(F^{-1}) = D(F).$$
5. *On appelle **image réciproque large** de $V$, qu'on note par $F^{-1}(V)$, le sous-ensemble de $X$ défini par*
$$F^{-1}(V) = \Big\{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\Big\}.$$
6. *On appelle **image réciproque étroite** de $V$, qu'on note par $F_+^{-1}(V)$, le sous-ensemble de $X$ défini par*
$$F_+^{-1}(V) = \Big\{x \in X : F(x) \subset V\Big\}.$$

### 1.7.1 Distance de Hausdorff

Soit $(X, d)$ un espace métrique.

**Définition 1.7.2**

*Soient $M_1, M_2$ deux sous-ensembles de $X$, l'écart entre $M_1$ et $M_2$ est défini par*
$$e(M_1, M_2) = \sup_{a\in M_1} d(a, M_2),$$
*et la distance de Hausdorff entre $M_1$ et $M_2$ est définie par*
$$d_H(M_1, M_2) = \sup\big(e(M_1, M_2), e(M_2, M_1)\big).$$

**Proposition 1.7.3 (Propriétés élémentaires)**

*Soient $M_1, M_2, M_3$ des sous-ensembles de $X$. Nous avons les propriétés suivantes*

1. $d_H(M_1, M_2) = 0 \Longleftrightarrow \overline{M_1} = \overline{M_2}$,

2. $d_H(M_1, M_2) \leq d_H(M_1, M_3) + d_H(M_3, M_2)$,
3. $|d(x, M_1) - d(x, M_2)| \leq d_H(M_1, M_2), \forall x \in X$.

**Proposition 1.7.4**
*Soit $\mathcal{P}_f(X)$ la famille de tous les sous-ensembles fermés de $X$, i.e., $\mathcal{P}_f(X) = \{M \subset X : M \text{ fermé}\}$. Alors, $\big(\mathcal{P}_f(X), d_H\big)$ est un espace métrique.*

**Définition 1.7.5**
*Soit $M \in \mathcal{P}_f(X)$. On définit la boule de centre $M$ et de rayon $r > 0$ par :*

$$B(M, r) = \{x \in X : d(x, M) < r\}.$$

### 1.7.2 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris de la référence [30].

**Définition 1.7.6**
*Soient $X$, $Y$ deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que $F$ est s.c.s au point $x_0 \in X$ si, et seulement si, pour tout ouvert $U$ de $Y$ contenant $F(x_0)$ $(F(x_0) \subset U)$ il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $F(V) \subset U$, i.e., $F(z) \subset U$, $\forall z \in V$.*
2. *Si $F$ est s.c.s en tout point $x$ de $X$, on dit que $F$ est s.c.s sur $X$ ou tout simplement s.c.s.*

**Proposition 1.7.7**

*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$F$ est s.c.s sur $X$.*
2. *$F_+^{-1}(W)$ est un ouvert de $X$ pour tout ouvert $W$ de $Y$.*
3. *$F^{-1}(U)$ est un fermé de $X$ pour tout fermé $U$ de $Y$.*

**Exemple.**
Soit $F$ une multi-application définie comme suit :

$$F : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto F(t) = \begin{cases} \{1\} & si\ t \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \{0, 1\} & si\ t = \frac{1}{2} \\ \{0\} & si\ t \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On va montrer que $F$ est *s.c.s* sur $[0,1]$.
Par la Proposition 1.7.7, la multi-application $F$ est *s.c.s* sur $[0,1]$ si, et seulement si, pour tout ouvert $V$ de $\mathbb{R}$, $F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de $[0,1]$.
On a

$$F_+^{-1}(V) = \{t \in [0,1] : F(t) \subset V\}$$

alors

$$F_+^{-1}(V) = \left\{t \in [0, \frac{1}{2}[ : \{1\} \subset V\right\} \cup \left\{t = \frac{1}{2} : \{0,1\} \subset V\right\} \cup \left\{t \in ]\frac{1}{2}, 1] : \{0\} \subset V\right\}.$$

Si $\{0,1\} \subset V$, alors $F_+^{-1}(V) = [0, \frac{1}{2}[ \cup \{\frac{1}{2}\} \cup ]\frac{1}{2}, 1] = [0,1]$ qui est un ouvert de $[0,1]$.
Si $0 \in V$ et $1 \notin V$, alors $F_+^{-1}(V) = ]\frac{1}{2}, 1]$ qui est un ouvert de $[0,1]$.
Si $0 \notin V$ et $1 \in V$, alors $F_+^{-1}(V) = [0, \frac{1}{2}[$ qui est un ouvert de $[0,1]$.
Si $0 \notin V$ et $1 \notin V$ alors $F_+^{-1}(V) = \emptyset$ qui ouvert de $[0,1]$.
Par conséquent, $F$ est *s.c.s* sur $[0,1]$. ■

**Définition 1.7.8**
*Soient $(X,d), (Y,d')$ deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. On dit que $F$ est H.s.c.s (s.c.s par rapport à la distance de Hausdorff) au point $x_0$ si, et seulement si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, F(B(x_0, \delta)) \subset B(F(x_0), \epsilon).$$

**Proposition 1.7.9**
*Soient $(X,d), (Y,d')$ deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. Si $F$ est s.c.s au point $x_0$, alors $F$ est H.s.c.s au point $x_0$.*
*Si de plus $F(x_0)$ est compact, alors les deux notions sont équivalentes.*

**Théorème 1.7.10**
*Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Si $F$ est s.c.s alors son graphe est fermé.*

**Théorème 1.7.11**
*Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides et supposons que $Y$ est compact. Si $Gr(F)$ est fermé, alors $F$ est s.c.s*

### 1.7.3 Mesurabilité des multi-applications

Se référer à [30] pour les détails sur cette section.

**Définition 1.7.12**

*Soient* $(\Omega, \Sigma)$ *un espace mesurable,* $X$ *un espace métrique et* $F : \Omega \rightrightarrows X$*. On dit que* $F$ *est* $\Sigma$*-mesurable où simplement mesurable (s'il n'y-a pas d'ambiguïté), si pour tout ouvert* $V$ *de* $X$

$$F^{-1}(V) \in \Sigma.$$

**Théorème 1.7.13**

*Soient* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *un espace mesuré avec* $\Sigma$ *une tribu* $\mu-$*complète,* $E$ *un espace de Banach séparable,* $f : \Omega \longrightarrow E$ *une application* $\Sigma-$*mesurable et* $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ *une multi-application* $\Sigma-$*mesurable à valeurs non vides fermées. Alors la multi-application* $G : \Omega \rightrightarrows E$*, définie pour tout* $t \in \Omega$*, par*

$$G(t) = Proj\big(f(t), \Gamma(t)\big) = \big\{x \in \Gamma(t) : \|f(t) - x\| = d(f(t), \Gamma(t))\big\}$$

*est* $\Sigma-$*mesurable (où probablement à valeurs vides).*

**Définition 1.7.14**

*Soit* $(\Omega, \Sigma)$ *un espace mesurable et soit* $E$ *un espace vectoriel normé. Soit* $F : \Omega \rightrightarrows E$ *une multi-application. On dit que* $F$ *est scalairement mesurable si pour tout* $x' \in E'$*, l'application* $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ *est mesurable.*

**Proposition 1.7.15**

*Soient* $(\Omega, \Sigma)$ *un espace mesurable,* $E$ *un espace de Banach séparable. Si* $F : \Omega \rightrightarrows E$ *est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes. Alors,* $F(\cdot)$ *est mesurable si, et seulement si, elle est scalairement mesurable.*

**Définition 1.7.16**

*Soient* $X, Y$ *deux ensembles non vides et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle sélection de* $F$*, toute application* $f : X \to Y$ *tel que*

$$f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X.$$

*Si* $(\Omega, \Sigma)$ *est un espace mesurable et* $F : \Omega \rightrightarrows Y$*, on note par* $S_F$ *l'ensemble de toutes les sélections mesurables de* $F$*, i.e.,*

$$S_F = \big\{f : \Omega \to Y : f \text{ mesurable et } f(x) \in F(x) \ \ \forall x \in \Omega\big\}.$$

**Théorème 1.7.17**

*Soient* $(\Omega, \Sigma)$ *un espace mesurable,* $E$ *un espace de Banach séparable. Soit* $F : \Omega \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et* $u : \Omega \to E$ *une application mesurable. Alors la multi-application* $t \mapsto F(t, u(t))$ *est mesurable.*

# 1.8 Notions d'opérateurs maximaux monotones.

Les problèmes considérés dans notre contribution à travers cette thèse sont des problèmes d'évolution régis par des ops.m.m dans un espace de Hilbert. Ces derniers se caractérisent par des propriétés importantes et nécessaires à notre étude. Nous introduisons dans cette section leur définition et les propriétés qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails on peut se référer à [17], [18], [26] et [76].

**Définition 1.8.1**
*Soit $A : H \rightrightarrows H$ une multi-application, qu'on appelle aussi opérateur multivoque de $H$, avec $D(A), R(A)$ et $Gr(A)$ son domaine, rang et graphe, respectivement.*

- *L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des graphes, i.e., si $A : D(A) \rightrightarrows H$ et $B : D(B) \rightrightarrows H$ sont deux opérateurs, alors*

$$A \subset B \iff Gr(A) \subset Gr(B).$$

Dans la suite, la notation $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ sera souvent remplacée par : $A$ est un opérateur de $H$, ou bien $A : D(A) \to 2^H$.

## 1.8.1 Opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert

**Définition 1.8.2**
*Un opérateur $A$ de $H$ est dit monotone si pour tous $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \in Gr(A)$, on a*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

**Exemple 1.8.3**
*Soit $A$ un opérateur monotone de $H$ alors, $A^{-1}$, $\alpha A$ $(\alpha \geq 0)$ sont aussi des opérateurs monotones.*

**Définition 1.8.4**
*Soit $A$ un opérateur de $H$. On dit que $A$ est une contraction si pour tous $(x, x'), (y, y') \in Gr(A)$, on a*

$$\|y - y'\| \leq \|x - x'\|.$$

**Définition 1.8.5**
*Un opérateur monotone $A$ de $H$ est dit maximal monotone s'il est maximal parmi les opérateurs monotones, i.e., pour tout opérateur monotone $B$ de $H$ tel que $A \subset B$ alors $B = A$.*

La proposition suivante est une caractérisation d'un opérateur maximal monotone.

**Proposition 1.8.6**
*Un opérateur monotone $A$ de $H$ est dit maximal si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in H \times H$*

$$\big\langle y - y_0, x - x_0 \big\rangle \geq 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in Gr(A) \Longrightarrow (x, y) \in Gr(A). \tag{1.4}$$

**Proposition 1.8.7**
*Soit $A$ un opérateur de $H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *$A$ est maximal monotone.*
2. *$A$ est monotone et $R(I_H + A) = H$ (Théorème de Minty).*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_H + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur $H$.*

**Proposition 1.8.8**
*Soit $A$ un opérateur maximal monotone de $H$. Alors*

*i) $Gr(A)$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé dans $H \times H$, i.e.,*

$$\forall \left(x_n, y_n\right)_n \subset Gr(A) \ \text{ tel que } \ x_n \longrightarrow x \text{ et } y_n \rightharpoonup y, \ \text{ alors } (x, y) \in Gr(A).$$

*ii) $A^{-1}$ est maximal monotone.*

*iii) Pour tout $x \in D(A), Ax$ est un sous-ensemble fermé convexe de $H$.*

*iv) $\overline{D(A)}$ est un sous-ensemble convexe de $H$.*

**Remarque 1.8.9**
*D'après la propriété (iii) de la Proposition 1.8.8 et le Théorème 1.6.3, pour tout $x \in D(A)$ il existe un unique élément $\overline{x} \in Ax$ tel que*

$$\overline{x} = proj(0, Ax), \ \ i.e., \quad \|\overline{x}\| = \inf_{y \in Ax} \|y\| = d(0, Ax).$$

*Dans toute la suite, cet élément sera noté, $A^0(x)$, i.e., $A^0(x)$ est l'élément de norme minimale de $Ax$.*

**Théorème 1.8.10**
*Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ et $B : D(B) \subset H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones tel que l'une des propriétés suivantes soit vérifiée :*

- $D(B) = H$
- $D(A) \cap int(D(B)) \neq \emptyset$.
- $0 \in int(D(A) - D(B))$.

*Alors, $A + B$ est maximal monotone.*

**Définition 1.8.11**
*Soit $A$ un opérateur maximal monotone de $H$. On appelle section principale de $A$, tout opérateur univoque $A' \subset A$ avec $D(A) = D(A')$ et tel que pour tout $(x, y) \in \overline{D(A)} \times H$, l'inégalité*

$$\big\langle A'(\xi) - y, \xi - x \big\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A)$$

*implique que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$, i.e., $(x, y) \in Gr(A)$.*

**Définition 1.8.12**
*Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire borné. $A$ est semi-défini positif si :*

$$\langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

Voici quelques exemples d'ops.m.m. (voir [18], [58]).

**Exemple 1.8.13**
*Soit $A : H \to H$ un opérateur univoque monotone et continu. Alors, $A$ est maximal monotone.*

*Pour voir ceci, nous allons utiliser la Proposition 1.8.6.*
*En effet, soit $(x_1, u_1) \in H \times H$. Supposons que pour tout $x_2 \in H$,*

$$\langle x_1 - x_2, u_1 - Ax_2 \rangle \geq 0.$$

*En particulier pour*

$$x_2^\alpha = x_1 + \alpha(u_1 - Ax_1), \;\; \alpha > 0 \tag{1.5}$$

*on obtient*

$$\langle x_1 - x_2^\alpha, u_1 - Ax_2^\alpha \rangle \geq 0.$$

*Alors,*

$$\langle u_1 - Ax_1, u_1 - Ax_2^\alpha \rangle = -\alpha^{-1} \langle x_1 - x_2^\alpha, u_1 - Ax_2^\alpha \rangle \leq 0.$$

*i.e.,*

$$\langle u_1 - Ax_1, u_1 - Ax_2^\alpha \rangle \leq 0. \tag{1.6}$$

*Passant à la limite lorsque $\alpha \to 0$ dans (1.5), on aura $x_2^\alpha \to x_1$ et par la continuité de $A$, il vient que $Ax_2^\alpha \to Ax_1$ et donc par (1.6), $\|u_1 - Ax_1\|^2 \leq 0$.*
*D'où, $u_1 = Ax_1$, i.e., $(x_1, u_1) \in Gr(A)$. D'où $A$ est m.m.* ■
*Suite à cet exemple on voit bien que, si $A : H \to H$ est un opérateur linéaire borné et semi-défini positif, alors $A$ est maximal monotone.*

**Exemple 1.8.14**
*Soit $D$ une matrice semi-définie positive de $\mathbb{R}^d$. Soit $g : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application donnée.*
*Pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$, considérons l'opérateur multivoque, $A_{t,x}$, défini comme suit : pour $t \in I$, $C_t : \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un op.m.m., et pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$, soit*

$$\begin{aligned} B_{t,x} : \mathbb{R}^d &\rightrightarrows \mathbb{R}^d \\ y &\longmapsto B_{t,x}(y) = C_t(y + g(t, x)) \end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned} A_{t,x} : \mathbb{R}^d &\rightrightarrows \mathbb{R}^d \\ y &\longmapsto A_{t,x}(y) = (B_{t,x}^{-1} + D)(y). \end{aligned}$$

*Alors, $A_{t,x}$ est un op.m.m.*
*Montrons d'abord que $B_{t,x}$ est un opérateur maximal monotone.*
***Monotonie***
*Soient $y_i \in \mathbb{R}^d$, $y_i^* \in B_{t,x}(y_i) = C_t(y_i + g(t, x))$, $i = 1, 2$. Alors, par la monotonie de $C_t$ on obtient,*

$$\langle y_1^* - y_2^*, y_1 - y_2\rangle = \langle y_1^* - y_2^*, y_1 + g(t, x) - y_2 - g(t, x)\rangle \geq 0.$$

*D'où la monotonie de $B_{t,x}$.*
***Maximalité***
*En utilisant ii) de la Proposition 1.8.8, pour monter que $B_{t,x}$ est maximal, il suffit de monter que $B_{t,x}^{-1}$ est maximal. Pour cela on va utiliser la Proposition 1.8.6.*
*Soit $(y^*, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et supposons que*

$$\langle y^* - z^*, y - z\rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } (z^*, z) \in Gr(B_{t,x}^{-1}) \tag{1.7}$$

*i.e.,*

$$z \in B_{t,x}^{-1}(z^*) = C_t^{-1}(z^*) - g(t, x).$$

*On veut montrer que $y \in B_{t,x}^{-1}(y^*)$. En effet, par la relation (1.7)*

$$\langle y^* - z^*, y + g(t, x) - z - g(t, x)\rangle \geq 0.$$

*D'autre part,*

$$z \in C_t^{-1}(z^*) - g(t, x) \Leftrightarrow z + g(t, x) \in C_t^{-1}(z^*).$$

*Comme $C_t^{-1}$ est maximal monotone, on aura $y + g(t, x) \in C_t^{-1}(y^*)$, ce qui est équivalent à $y \in B_{t,x}^{-1}(y^*)$. Par conséquent, $B_{t,x}^{-1}$ est maximal monotone et donc $B_{t,x}$ l'est aussi. De l'exemple 1.8.13, la matrice semi-définie positive $D$ est maximale monotone. Par application du Théorème 1.8.10, il en résulte que $A_{t,x} = (B_{t,x}^{-1} + D)$ est un opérateur maximal monotone.* ■

Un troisième exemple pour montrer qu'un opérateur monotone n'est pas maximal.

**Exemple 1.8.15**
*Posons :*
$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 0 \ et \, x_2 \geq 0\},$$
*et*
$$\mathbb{R}^2_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \leq 0 \ et \, x_2 \leq 0\}.$$
*On a aussi pour tout* $X = (x_1, x_2), \ Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$$\langle X, Y\rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$
*Soit* $A_1 : D(A_1) \subset \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *défini par* $D(A_1) = \mathbb{R}^2_- \cup \mathbb{R}^2_+$ *et pour tout* $X \in D(A_1)$
$$A_1(X) = \begin{cases} \{Y \in \mathbb{R}^2 : \ Y \in \mathbb{R}^2_+ \ et \, \langle Y, X\rangle = 0\}, \ si \, X \in \mathbb{R}^2_- \\ \{Y \in \mathbb{R}^2 : \ Y \in \mathbb{R}^2_- \ et \, \langle Y, X\rangle = 0\}, \ si \, X \in \mathbb{R}^2_+ \end{cases}$$
*et soit* $A_2 : D(A_2) \subset \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *défini par* $D(A_2) = \mathbb{R}^2_-$ *et pour tout* $X \in D(A_2)$
$$A_2(X) = \Big\{ Y \in \mathbb{R}^2 : \ Y \in \mathbb{R}^2_+ \ et \, \langle Y, X\rangle = 0\}, \ si \, X \in \mathbb{R}^2_-.$$
*Montrons la monotonie de l'opérateur* $A_1$.
*Soient* $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2_- \cup \mathbb{R}^2_+$ *et* $Y_1 \in A_1(X_1), \ Y_2 \in A_1(X_2)$. *Si* $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2_-$, *on a*
$$Y_1 \in A_1(X_1) \Longleftrightarrow Y_1 \in \mathbb{R}^2_+ \ et \, \langle Y_1, X_1\rangle = 0$$
*et*
$$Y_2 \in A_1(X_2) \Longleftrightarrow Y_2 \in \mathbb{R}^2_+ \ et \, \langle Y_2, X_2\rangle = 0.$$
*Par conséquent ,*
$$\langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2\rangle = \langle Y_1, X_1\rangle - \langle Y_1, X_2\rangle - \langle Y_2, X_1\rangle + \langle Y_2, X_2\rangle \geq 0.$$
*Si* $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2_+$, *on a*
$$Y_1 \in A_1(X_1) \Longleftrightarrow Y_1 \in \mathbb{R}^2_- \ et \, \langle Y_1, X_1\rangle = 0$$
*et*
$$Y_2 \in A_1(X_2) \Longleftrightarrow Y_2 \in \mathbb{R}^2_- \ et \, \langle Y_2, X_2\rangle = 0.$$
*Par conséquent,*
$$\langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2\rangle = \langle Y_1, X_1\rangle - \langle Y_1, X_2\rangle - \langle Y_2, X_1\rangle + \langle Y_2, X_2\rangle \geq 0.$$

*D'où la monotonie de* $A_1$.
*Si* $X_1 \in \mathbb{R}^2_-$ *et* $X_2 \in \mathbb{R}^2_+$, *on a*

$$\langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2 \rangle = 0.$$

*Montrons maintenant la monotonie de l'opérateur* $A_2$.
*Soit* $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2_-$ *et* $Y_1 \in A_2(X_1)$, $Y_2 \in A_2(X_2)$ *alors,*

$$Y_1 \in A_2(X_1) \Longleftrightarrow Y_1 \in \mathbb{R}^2_+ \ et \ \langle Y_1, X_1 \rangle = 0$$

*et*

$$Y_2 \in A_2(X_2) \Longleftrightarrow Y_2 \in \mathbb{R}^2_+ \ et \ \langle Y_2, X_2 \rangle = 0.$$

*Par conséquent*

$$\langle Y_1 - Y_2, X_1 - X_2 \rangle = \langle Y_1, X_1 \rangle - \langle Y_1, X_2 \rangle - \langle Y_2, X_1 \rangle + \langle Y_2, X_2 \rangle \geq 0.$$

*Montrons que l'opérateur* $A_2$ *n'est pas maximal.*
*Comme* $A_1$ *et* $A_2$ *sont deux opérateurs monotones, pour montrer que* $A_2$ *n'est pas maximal on va de montrer que* $Gr(A_2) \subset Gr(A_1)$.

$$\begin{aligned}
Gr(A_1) &= \{(X, Y) \in D(A_1) \times \mathbb{R}^2 : \ Y \in A_1(X)\} \\
&= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2 : \ Y \in \mathbb{R}^2_+ \ et \ \langle X, Y \rangle = 0\} \\
&\cup \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2 : \ Y \in \mathbb{R}^2_- \ et \ \langle X, Y \rangle = 0\} \\
&= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_+ : \ \langle X, Y \rangle = 0\} \cup \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_- : \ \langle X, Y \rangle = 0\} \\
&= M_1 \cup M_2.
\end{aligned}$$

*tel que*

$$M_1 =: \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_+ : \ \langle X, Y \rangle = 0\}.$$

*et*

$$M_2 =: \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_- : \ \langle X, Y \rangle = 0\}.$$

*Remarquons que,*

$$\begin{aligned}
Gr(A_2) &= \{(X, Y) \in D(A_2) \times \mathbb{R}^2 : \ Y \in A_2(X)\} \\
&= \{(X, Y) \in D(A_2) \times \mathbb{R}^2 : \ \langle X, Y \rangle = 0\} \\
&= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2 : \ Y \in \mathbb{R}^2_+ \ et \ \langle X, Y \rangle = 0\} \\
&= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_+ : \ \langle X, Y \rangle = 0\} = M_1.
\end{aligned}$$

*Il en résulte que* $Gr(A_2) = M_1 \subset Gr(A_1) = M_1 \cup M_2$. *On conclut que l'opérateur monotone* $A_2$ *n'est pas maximal.* ■

**Proposition 1.8.16** *([73], Proposition 2.1) Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un opérateur maximal monotone tel que, pour une certaine constante $c > 0$, $\|A^0(t)x\| \leq c(1 + \|x\|)$ pour $t \in I$, $x \in D(A(t))$. Alors, l'ensemble $D(A(t))$, $t \in I$ est fermé et convexe.*

**Preuve**
Soit $t \in I$. Par $iv)$ de la Proposition 1.8.8, on sait que $\overline{D(A(t))}$ est convexe.
Soit $u \in \overline{D(A(t))}$. Alors, il existe une suite $(u_n)_n \subset D(A(t))$ qui converge vers $u$ dans $H$, et donc elle est bornée. De plus, par hypothèse, on a $\|A^0(t)u_n\| \leq c(1 + \|u_n\|)$. Alors, la suite $(v_n)_n := (A^0(t)u_n)_n$ est bornée dans $H$ et est donc relativement faiblement compacte. Ainsi, il existe une sous-suite $(v_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge faiblement vers un élément $v \in H$. Puisque $v_{n_k} \in A(t)(u_{n_k})$, par la propriété $i)$ dans la Proposition 1.8.8, il s'en-suit que $u \in D(A(t))$ et $v \in A(t)u$. On conclut que $\overline{D(A(t))} = D(A(t))$, c'est-à-dire $D(A(t))$ est un convexe fermé de $H$. ■

### 1.8.2 Résolvante d'un opérateur maximal monotone

**Définition 1.8.17**
*Soit $A$ un opérateur maximal monotone de $H$. Pour tout $\lambda > 0$, la résolvante de $A$ est définie par :*

$$J_\lambda^A := \left(I_H + \lambda A\right)^{-1}.$$

**Proposition 1.8.18**
*La résolvante $J_\lambda^A$ d'un opérateur maximal monotone $A$ de $H$ est un opérateur univoque défini sur tout $H$. De plus, c'est une contraction de $H$, i.e., pour tous $x, y \in H$*

$$\|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(y)\| \leq \|x - y\|. \tag{1.8}$$

**Proposition 1.8.19**
*Soit $A$ un opérateur maximal monotone de $H$. Alors, Pour tout $x \in H$, on a*

$$J_\lambda^A(x) \in D(A).$$

### 1.8.3 Pseudo-distance de Vladimirov

Les opérateurs considérés à travers cette recherche sont des opérateurs qui dépendent du temps, cette dépendance est contrôlée à l'aide d'une pseudo-distance introduite par Vladimirov dans [75]. Nous donnons dans la suite sa définition et les propriétés que nous utiliserons dans les preuves de nos théorèmes. Pour plus de détails, on fait référence à [19], [56] et [75].

**Définition 1.8.20**

*Soit $A$ et $B$ deux opérateurs maximaux monotones de $H$. On définit la pseudo-distance de Vladimirov entre $A$ et $B$, qu'on note* $\mathrm{dis}(A,B)$*, par :*

$$\mathrm{dis}(A,B) := \sup\left\{ \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{\|y_1\| + \|y_2\| + 1}, \quad (x_1, y_1) \in Gr(A),\ (x_2, y_2) \in Gr(B) \right\}. \tag{1.9}$$

**Remarque 1.8.21**

• *La pseudo-distance* $\mathrm{dis}(\cdot,\cdot)$ *peut prendre la valeur* $+\infty$.

• *La pseudo-distance* $\mathrm{dis}(\cdot,\cdot)$ *n'est pas une métrique, car, en général l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.*

**Lemme 1.8.22**

*Soit $A$ et $B$ deux opérateurs maximaux monotones de $H$. Alors*

$$d_H(D(A), D(B)) \leq \mathrm{dis}(A,B).$$

**Lemme 1.8.23**

*Soit $A$ un opérateur maximal monotone de $H$. Alors l'opérateur $A^0$ est une section principale de $A$, i.e., si $x \in \overline{D(A)}$, $y \in H$ sont tels que*

$$\left\langle A^0(z) - y, z - x \right\rangle \geq 0 \ \ \forall z \in D(A),$$

*alors $x \in D(A)$ et $y \in A(x)$.*

**Lemme 1.8.24**

*Soit $A$ et $B$ deux opérateurs maximaux monotones de $H$. Alors, pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$, on a*

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|A^0(x)\| + \mathrm{dis}(A,B) + \sqrt{\lambda\big(1 + \|A^0(x)\|\big)\,\mathrm{dis}(A,B)}.$$

**Lemme 1.8.25**

*Soient $A_n (n \in \mathbb{N})$ et $A$ des opérateurs maximaux monotones de $H$ tel que* $\mathrm{dis}(A_n, A) \to 0$. *Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \longrightarrow x$ et que $y_n \in A_n x_n$ avec $y_n \rightharpoonup y$ pour $x, y \in H$. Alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

**Lemme 1.8.26**

*Soient $A_n (n \in \mathbb{N})$ et $A$ des opérateurs maximaux monotones de $H$ tel que $dis(A_n, A) \to 0$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\|A_n^0 x\| \leq c(1 + \|x\|).$$

*Alors, pour tout $\eta \in D(A)$, il existe une suite $(\xi_n)_n$ tel que*

$$\xi_n \in D(A_n),\ \xi_n \to \eta \ \text{et}\ A_n^0 \xi_n \to A^0 \eta. \tag{1.10}$$

# 1.9 Sous-différentiels et cônes normaux

Se référer à [23], [36], [53] et [2] pour ces concepts.

## 1.9.1 Sous-différentiels

**Définition 1.9.1**

*Soient $H$ un espace de Hilbert, $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x_0 \in dom(f)$. On appelle sous-différentiel de $f$ au point $x_0$ (au sens de l'analyse convexe) noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \Big\{ x' \in H : \; f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle \; \forall x \in H \Big\}.$$

*Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous-gradient à $f$ au point $x_0$. On dit que $f$ est sous-différentiable au point $x_0$ si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*

**Exemple.**
Soit $E$ un espace vectoriel normé et $E'$ sont dual topologique. Soit

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \|x\|. \end{aligned}$$

Montrons que $f$ est sous différentiable au point $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
\partial f(0) &= \Big\{ x' \in E' : f(x) \geq f(0) + \langle x', x - 0 \rangle, \; \forall x \in E \Big\} \\
&= \Big\{ x' \in E' : \|x\| \geq \langle x', x \rangle, \; \forall x \in E \Big\} \\
&= \Big\{ x' \in E' : \|x\| \geq \langle x', x \rangle, \; \forall x \in E \setminus \{0\} \} \cap \{ x' \in E' : \|x\| \geq \langle x', x \rangle, \; x = 0 \Big\} \\
&= \Big\{ x' \in E' : \frac{\langle x', x \rangle}{\|x\|} \leq 1, \; \forall x \in E \setminus \{0\} \} \cap \{ x' \in E' : 0 \geq 0 \Big\} \\
&= \Big\{ x' \in E' : \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|\langle x', x \rangle|}{\|x\|} \leq 1 \Big\} \cap E' \\
&= \Big\{ x' \in E' : \|x'\| \leq 1 \Big\} = \overline{B}_{E'}(0,1) \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

■

**Définition 1.9.2 (Dérivée directionnelle)**

*Soit* $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre s.c.i. La dérivée directionnelle généralisée de* $f$ *est donnée par*

$$f^{\uparrow}(x,h) = \limsup_{\substack{x' \longrightarrow_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{h' \longrightarrow h} \frac{f(x'+th') - f(x')}{t}.$$

*La notation* $x' \longrightarrow^f x$, *veut dire que* $x' \longrightarrow x$ *et* $f(x') \longrightarrow f(x)$.

**Définition 1.9.3 (Sous-différentiel proximal)**

*Soit* $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *une fonction propre s.c.i et* $x \in dom(f)$. *Un vecteur* $\xi \in H$ *est dit sous-gradient proximal à* $f$ *au point* $x$, *s'il existe* $\rho \geq 0$ *et* $\sigma > 0$ *tel que*

$$f(y) - f(x) + \sigma\|y - x\|^2 \geq \langle \xi, y - x \rangle, \quad \forall y \in B(x, \rho). \tag{1.11}$$

*L'ensemble des sous-gradients proximaux à* $f$ *au point* $x$ *est noté* $\partial_P f(x)$, *et est dit sous-différentiel proximal de* $f$ *au point* $x$.

**Définition 1.9.4 (Sous-différentiel limite)**

*Soit* $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *une fonction propre s.c.i et* $x \in dom(f)$. *Un vecteur* $\xi \in H$ *est dit sous-gradient limite à* $f$ *au point* $x$, *s'il existe* $(x_k)_k, (\xi_k)_k \subset H$ *tel que*

$$x_k \to^f x, \; \xi_k \in \partial_P f(x_k), \; \xi_k \rightharpoonup \xi.$$

*L'ensemble des sous-gradients limites à* $f$ *au point* $x$ *est noté* $\partial_L f(x)$, *et est dit sous-différentiel limite de* $f$ *au point* $x$.

**Définition 1.9.5**

*Soit* $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné* $x \in H$, *et soit* $h$ *un vecteur dans* $H$. *La dérivée directionnelle généralisée au sens de Clarke de f au point* $x$ *dans la direction* $h$, *notée* $f^0(x;h)$, *est définie par*

$$f^0(x;h) = \limsup_{\substack{x' \longrightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x'+th) - f(x')}{t}.$$

**Définition 1.9.6 (Sous-différentiel de Clarke)**

*Soit* $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de* $x \in H$. *Alors, le sous-différentiel de Clarke de* $f$ *au point* $x$ *est défini par*

$$\partial^C f(x) = \left\{ \xi \in H : \; \langle \xi, h \rangle \leq f^0(x,h) \;\; \forall h \in H \right\}.$$

A titre de comparaison, rappelons que la formule, dite de représentation, détermine le sous-différentiel de Clarke d'une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ localement Lipschitzienne au voisinage de $x$ comme suit :

$$\partial^C f(x) = co\{\partial_L f(x)\}. \tag{1.12}$$

**Proposition 1.9.7**

*Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $f$ une fonction convexe localement Lipschitzienne au voisinage de $x$, alors $\partial^C f(x)$ coincïde avec $\partial f(x)$.*

### 1.9.2 Cônes normaux

**Définition 1.9.8 (Cône)**

*Soit $K$ un sous-ensemble de $H$. On dit que $K$ est un cône si pour tout $x \in K$ et $\lambda > 0$, $\lambda x \in K$, c'est à dire,*

$$\forall \lambda > 0, \ \lambda K \subset K.$$

**Remarque 1.9.9**

*Un cône est donc une réunion de demi-droites issues de l'origine.*

**Définition 1.9.10 (Cône normal au sens de l'analyse convexe)**

*Soit $K$ un sous-ensemble non vide de $H$. On appelle cône normal à $K$ au point $x \in K$, l'ensemble défini par*

$$N_K(x) = \Big\{ x' \in H : \ \langle x', y - x \rangle \leq 0, \quad \forall\, y \in K \Big\},$$

*et si $x \notin K$, $N_K(x) = \emptyset$. Il est bien clair que $0 \in N_K(x)$, $\forall x \in K$.*

**Proposition 1.9.11**

*Soit $K$ un sous-ensemble non vide de $H$. Les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Si $x \in int(K)$, alors $N_K(x) = \{0\}$.*
2. *Si $int(K) \neq \emptyset$ et si $x \in Fr(K)$, alors $N_K(x) \neq \{0\}$.*

**Proposition 1.9.12**

*Pour tout sous-ensemble $K$ de $H$ et tout $x \in K$, le cône normal à $K$ au sens de l'analyse convexe, est égal au sous différentiel de la fonction indicatrice de $K$, i.e.,*

$$N_K(x) = \partial \delta_K(x).$$

**Preuve**
Soit $x \in K$, alors $\delta_K(x) = 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\partial\delta_K(x) &= \Big\{x' \in H :\ \delta_K(y) \geq \delta_K(x) + \langle x', y - x\rangle \ \ \forall y \in H\Big\} \\
&= \Big\{x' \in H :\ \delta_K(y) \geq \langle x', y - x\rangle \ \ \forall y \in K\Big\} \bigcap \\
&\quad \Big\{x' \in H :\ \delta_K(y) \geq \langle x', y - x\rangle \ \ \forall y \in H \backslash K\Big\} \\
&= \Big\{x' \in H :\ \delta_K(y) \geq \langle x', y - x\rangle \ \ \forall y \in K\Big\} \bigcap H \\
&= \Big\{x' \in H :\ \langle x', y - x\rangle \leq 0 \ \ \forall y \in K\Big\} = N_K(x).
\end{aligned}$$

■

**Proposition 1.9.13**

*Le cône normal associé à un ensemble convexe fermé non vide $K$ est un opérateur maximal monotone. De plus,*

$$D(N_K(\cdot)) = \Big\{x \in H :\ N_K(x) \neq \emptyset\Big\} = K.$$

**Définition 1.9.14 (Cône polaire)**

*Dans l'espace de Banach E, le cône polaire d'un sous-ensemble $K$ est défini par*

$$K^0 = \Big\{x' \in E' :\ \langle x', v\rangle \leq 0, \forall v \in K\Big\}.$$

*Il est clair que $K^0$ est un cône convexe fermé contenant 0.*

**Définition 1.9.15 (Cône tangent de Clarke)**

*Soit $E$ un espace de Banach et $K$ un sous-ensemble fermé non vide de $E$ et $x \in K$. On note par $T_K(x)$ le cône tangent de Clarke défini comme suit : un vecteur $v \in T_K(x)$ si pour toute suite $(x_n)_n$ dans $K$ convergeant vers $x$ et pour toute suite de nombres positifs $(t_n)_n$ convergeant vers 0, il existe une suite $(v_n)_n \subset E$ qui converge vers $v$ tel que $x_n + t_n v_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Définition 1.9.16 (Cône tangent de Bouligand)**

*Un vecteur $v$ est dit tangent à l'ensemble $S$ en un point $x$ si :*

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{d(x + tv, S)}{t} = 0.$$

*L'ensemble de ces vecteurs qu'on note* $T_S^B(x)$ *est un cône appelé le cône tangent de Bouligand.*
*Autrement dit, un vecteur* $v \in T_S^B(x)$ *si, et seulement s'il existe deux suite* $t_n \downarrow 0$ *et* $v_n \to v$ *tel que* $x + t_n v_n \in S$.
*Ce qui équivalent à*

$$T_S^B(x) := \Big\{ \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x}{t_n} : \ (x_n)_n \subset S, \ x_n \to x, \ t_n \downarrow 0 \quad n \to +\infty \Big\}. \tag{1.13}$$

**Proposition 1.9.17**
*Soient* $H$ *un espace de Hilbert,* $K$ *un sous-ensemble convexe fermé de* $H$, *et soit* $y \in H$ *et* $proj(y, K)$ *la projection de* $y$ *sur* $K$, *alors*

$$x = proj(y, K) \iff y - x \in N_K(x). \tag{1.14}$$

**Définition 1.9.18 (Cône normal proximal)**
*Soient* $S$ *un sous-ensemble non vide et fermé de* $H$, $x \in S$.

$$N_S^P(x) = \big\{ v \in H : \exists t > 0, \quad x \in Proj(x + tv, S) \big\}.$$

**Remarque 1.9.19**
*Soient* $S, D$ *deux sous-ensembles fermés de* $H$ *tel que* $S \subset D$, *alors pour tout* $x \in S$ *on a* $N_D^P(x) \subset N_S^P(x)$.
*En effet, soit* $v \in N_D^P(x)$ *alors,* $\exists t > 0$ *tel que* $x \in Proj(x + tv, D)$. *Donc,*

$$x \in Proj(x + tv, D) \Longleftrightarrow \|x + tv - x\| = d_D(x + tv) \Longleftrightarrow t\|v\| = d_D(x + tv).$$

*Comme* $S \subset D$, *il vient que* $t\|v\| = d_D(x + tv) \leq d_S(x + tv)$, *i.e.,* $t\|v\| \leq d_S(x + tv)$. *De plus,* $d_S(x+tv) \leq \|x+tv-z\|$ *pour tout* $z \in S$, *donc en particulier pour* $x = z$, *on obtient* $d_S(x + tv) \leq t\|v\|$, *c'est-à-dire* $t\|v\| = d_S(x + tv)$ *et donc* $v \in N_S^P(x)$.

**Théorème 1.9.20**
*Soit* $S$ *un sous-ensemble fermé de* $H$. *Supposons* $x \notin S$ *et* $\xi \in \partial_P d_S(x)$. *Alors, il existe un point* $\overline{s} \in S$ *tel que les assertions suivantes sont vérifiées :*

(a) *toute suite minimisante* $(s_i)_i \subset S$ *de* $\inf_{s\in S} \|s - x\|$ *converge vers* $\overline{s}$.

(b) $Proj_S(x)$ *est un singleton,* $proj(x, S) = \overline{s}$.

(c)
$$\{\xi\} = \partial_p d_S(x) = \Big\{ \frac{x - \overline{s}}{\|x - \overline{s}\|} \Big\} = \Big\{ \frac{x - \overline{s}}{d_S(x)} \Big\}.$$

(d) $\xi \in N_S^P(\overline{s})$.

**Proposition 1.9.21**

*Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $H$. Supposons que $x \in S$, alors*

$$N_S^P(x) = \{\gamma\xi : \gamma \geq 0,\ \xi \in \partial_P d_S(x)\}.$$

**Proposition 1.9.22**

*Soient $S$ un ensemble fermé non vide de $H, x \in H$ et $v \in H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

**i)** $v \in N_S^P(x)$.

**ii)** *Il existe $\sigma \geq 0$ tel que pour tout $z \in S$,*

$$\langle v, z - x\rangle \leq \sigma\|z - x\|^2.$$

Nous pouvons relier le cône tangent de Bouligand au cône polaire du cône proximal

$$(N_S^P(x))^0 = \{\xi : \langle \xi, p\rangle \leq 0, \quad \forall p \in N_S^P(x)\}.$$

**Proposition 1.9.23**

*Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $H$. Pour tout $x \in S$,*

$$T_S^B(x) \subset (N_S^P(x))^0.$$

**Preuve**

Soit $x \in S$ et $v \in T_S^B(x)$ $(v \neq 0)$ Par Définition 1.9.16, il vient que

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{d_S(x + tv)}{t} = 0.$$

Alors, il existe une suite $(t_k)_k \downarrow 0$ lorsque $k \to \infty$ tel que

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{d_S(x + t_k v)}{t_k} = 0.$$

En appliquant la Proposition 1.1.10, il existe une suite $(t_{\phi(k)})_k \downarrow 0$ tel que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{d_S(x + t_{\phi(k)} v)}{t_{\phi(k)}} = 0. \tag{1.15}$$

Soit $\xi \in N_S^P(x)$. Par Proposition 1.9.21, $\exists \gamma \geq 0, \exists z \in \partial_P d(x, S)$ tel que $\xi = \gamma z$. Par Définition 1.9.3, il existe $\rho > 0$ et $\sigma > 0$ tel que

$$d(y, S) - d(x, S) + \sigma\|y - x\|^2 \geq \langle z, y - x\rangle, \quad \forall y \in B(x, \rho)$$

c'est-à-dire (comme $x \in S$)

$$d(y,S) + \sigma\|y-x\|^2 \geq \langle z, y-x\rangle, \quad \forall y \in B(x,\rho). \tag{1.16}$$

Soit $y_k = x + t_{\phi(k)}v$. Comme $(t_{\phi(k)})_k \downarrow 0$ alors, $\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, t_{\phi(k)} < \epsilon$. Pour $k$ assez grand, en prenant $\epsilon = \dfrac{\rho}{\|v\|}$, nous avons

$$\|y_k - x\| < \rho, \ i.e., y_k \in B(x,\rho).$$

Alors, par (1.16), on obtient

$$d(x + t_{\phi(k)}v, S) + \sigma t_{\phi(k)}^2\|v\|^2 \geq \langle z, t_{\phi(k)}v\rangle.$$

Il en résulte que

$$\langle z, v\rangle \leq \frac{d(x + t_{\phi(k)}v, S)}{t_{\phi(k)}} + \sigma t_{\phi(k)}\|v\|^2$$

par passage à la limite lorsque $k \to \infty$, on obtient

$$\langle z, v\rangle \leq \lim_{k\to\infty} \frac{d(x + t_{\phi(k)}v, S)}{t_{\phi(k)}} + \sigma\|v\|^2 \lim_{k\to\infty} t_{\phi(k)}$$

par (1.15), il vient que

$$\langle z, v\rangle \leq 0,$$

alors

$$\langle \gamma z, v\rangle \leq 0,$$

Par conséquent

$$\langle \xi, v\rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^P(x),$$

i.e., $v \in (N_S^P(x))^0$ et donc $T_S(x) \subset (N_S^P(x))^0$. ■

**Remarque 1.9.24**

*Une autre propriété importante est la suivante : si $x \in Proj(v,S)$, alors*

$$v - x \in N_S^P(x). \tag{1.17}$$

En effet, soit $x \in Proj(v,S)$, d'après la Proposition 1.6.6, pour tout $z \in S$,

$$\langle v-x, z-x\rangle \leq \frac{1}{2}\|z-x\|^2.$$

En vertu de la Proposition 1.9.22, on déduit que $v - x \in N_S^P(x)$. ■

**Lemme 1.9.25**

*Soient $C_1, C_2$ deux sous-ensembles fermés, convexes de $H$. Si $A_i = N_{C_i}$, avec $i = 1,2$, alors*

$$d_H(C_1, C_2) = dis(A_1, A_2).$$

## 1.10 Lemmes de Grönwall

Pour monter nos résultats principaux, nous aurons besoin de ces deux lemmes qui sont des formes discrètes du Lemme de Gronwall.

**Lemme 1.10.1** *[52]*

*Soit $\alpha > 0$ et soient $(\gamma_i)_i$, $(a_i)_i$ des suites de nombres réels positifs, tel que*

$$a_{i+1} \leq \alpha + \sum_{k=0}^{i} \gamma_k a_k \quad \forall i \geq 0.$$

*Alors*

$$a_{i+1} \leq \alpha \exp\Big(\sum_{k=0}^{i} \gamma_k\Big) \quad \forall i \geq 0.$$

**Lemme 1.10.2** *[56]*

*Soient $(\alpha_i)_i, (\beta_i)_i, (\gamma_i)_i$ et $(a_i)_i$, $i \geq 0$, des suites de nombre réels positifs, tel que*

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + a_1 + \cdots + a_{i-1}) + (1+\gamma_i)a_i.$$

*Alors,*

$$a_j \leq \Big(a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k\Big) \exp\Big(\sum_{k=0}^{j-1}(k\beta_k + \gamma_k)\Big) \ \textit{pour} \ j \geq 1.$$

On termine cette section par deux formes intégrales du Lemme de Gronwall, aussi utiles pour notre travail.

**Lemme 1.10.3**

*Soient $a$ un réel positif, $f, g, h$ des fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, tel que*

$$f(t) \leq a + \int_0^t f(s)h(s)ds + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in I.$$

*Alors,*

$$f(t) \leq a \exp\Big(\int_0^t h(s)ds\Big) + \int_0^t g(s) \exp\Big(\int_s^t h(\tau)d\tau\Big)ds \quad \forall t \in I.$$

**Lemme 1.10.4**

*Soit $T > 0$. Soient $f, g$ deux fonctions continues sur $[0, T]$ et soit $h$ une fonction différentiable sur $[t_0, T]$. On suppose que pour tout $t \in [t_0, T]$*

$$h'(t) \leq f(t)h(t) + g(t).$$

*Alors,*

$$h(t) \leq h(t_0)\exp(\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau) + \int_{t_0}^t \exp(\int_s^t f(\tau)d\tau)g(s)ds.$$

Chapitre 2

# Existence de solutions pour un système de deux inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones

## 2.1 INTRODUCTION

L'étude des inclusion différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones a été généralisée aux systèmes d'un processus de la rafle (resp. inclusion différentielle régie par un opérateur maximal monotone) couplé avec une équation différentielle ordinaire [1], [27] (resp. [22]), avec des applications à l'optimisation, en théorie du contrôle, et d'un processus de la rafle couplé avec une inclusion différentielle régie par un opérateur maximal monotone général ([13], [20]). Inspirées par les travaux cités ci-dessus, notre objectif dans ce chapitre, qui est divisé en trois sections, est le suivant : dans la première, nous donnons un résultat d'existence de solutions absolument continues du système d'évolution suivant :

$$(\mathcal{S}_{F,G})\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A\big(t, v(t)\big)u(t) + F\big(t, u(t), v(t)\big) & p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D\big(A(t, v(t))\big) & \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in B\big(t, u(t)\big)v(t) + G\big(t, u(t), v(t)\big) & p.p.\ t \in I \\ v(t) \in D\big(B(t, u(t))\big) & \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D\big(A(0, v_0)\big), v(0) = v_0 \in D\big(B(0, u_0)\big) \end{cases}$$

régi par les opérateurs maximaux monotones $A(t, x)$ et $B(t, x)$ dépendant du temps et de l'état, $D(A(t, x))$ (resp.$D(B(t, x))$) est le domaine de $A(t, x)$ (resp. $B(t, x)$), et où $F, G$ sont des multi-applications semi-continues supérieurement à valeurs non vides, fermées et convexes.

La deuxième section contient une application à un problème de minimisation, qui consiste à minimiser la fonction coût :

$$\int_0^t L(t, u_\xi(t), v_\xi(t), \dot{u}_\xi(t), \dot{v}_\xi(t))dt$$

où, $(u_\xi, v_\xi)$ est l'unique solution du problème contrôlé

$$(\mathcal{P}_\xi) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A\big(t, \xi(t)\big)u(t) + f\big(t, u(t), v(t)\big) \quad p.p. \ t \in I \\ u(t) \in D\big(A(t, \xi(t))\big) \quad \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in B\big(t, \xi(t)\big)v(t) + g\big(t, u(t), v(t)\big) \quad p.p. \ t \in I \\ v(t) \in D\big(B(t, \xi(t)(t))\big) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D\big(A(0, v_0)\big), v(0) = v_0 \in D(B(0, u_0)), \end{cases}$$

et $\xi(\cdot)$ est la fonction de contrôle.
La troisième section est consacrée à une application à un problème de Skorohod, en dimension finie, pour un système dynamique de deux inclusions différentielles toutes les deux régies par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état, de la forme suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} X(t) = \displaystyle\int_0^t K\big(s, X(s)\big)ds + Y(t) \quad \forall t \in I \\ Y(t) \in D\big(A(t, Z(t))\big) \quad \forall t \in I \\ -\dot{Y}(t) \in A\big(t, Z(t)\big)Y(t) + \displaystyle\int_0^t K\big(s, X(s)\big)ds \quad p.p. \ t \in I \\ -\dot{Z}(t) \in B\big(t, Y(t)\big)Z(t) + g\big(t, Y(t), Z(t)\big) \quad p.p. \ t \in I \\ Z(t) \in D\big(B(t, Y(t))\big) \quad \forall t \in I \\ X(0) = Y(0) = d_0 \in D\big(A(0, k_0)\big) \\ Z(0) = k_0 \in D\big(B(0, d_0)\big). \end{cases}$$

## 2.2 Résultat d'existence.

Nos résultats sont établis sous les hypothèses suivantes :

**Hypothèses (1)**

Soit pour tout $(t,x) \in I \times H$, $A(t,x) : D(A(t,x)) \subset H \rightrightarrows H$ (resp. $B(t,x) : D(B(t,x)) \subset H \rightrightarrows H$) un opérateur maximal monotone satisfaisant :

$(H_A^1)$ Il existe une constante réelle strictement positive $\lambda$ et une fonction positive et croissante $\beta \in W^{1.1}(I,\mathbb{R})$ tel que

$$dis(A(t,x), A(s,y)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda\|x-y\|, \quad \forall t,s \in I, \forall x,y \in H. \tag{2.1}$$

$(H_A^2)$ Il existe une constante réelle positive $c$ tel que

$$\|A^0(t,x)y\| \leq c\big(1 + \|x\| + \|y\|\big), \quad \forall (t,x,y) \in I \times H \times D(A(t,x)). \tag{2.2}$$

$(H_A^3)$ Pour tout sous-ensemble borné $K \subset H$, l'ensemble $D\big(A(I \times K)\big)$ est relativement boule-compact.

$(H_B^1)$ Il existe une constante réelle positive $\alpha$ satisfait $\alpha\lambda < 1$ et une fonction strictement positive et croissante $\eta \in W^{1.1}(I,\mathbb{R})$ tel que

$$dis(B(t,x), B(s,y)) \leq |\eta(t) - \eta(s)| + \alpha\|x-y\|, \quad \forall t,s \in I, \forall x,y \in H. \tag{2.3}$$

$(H_B^2)$ Il existe une constante réelle positive $d$ tel que

$$\|B^0(t,x)y\| \leq d(1 + \|x\| + \|y\|), \quad \forall (t,x,y) \in I \times H \times D(B(t,x)). \tag{2.4}$$

$(H_B^3)$ Pour tout sous-ensemble borné $K \subset H$, l'ensemble $D\big(B(I \times K)\big)$ est relativement boule-compact.

Soit $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ (resp. $G : I \times H \times H \rightrightarrows H$) une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées vérifiant :

$(H_1(F))$ (resp.$(H_1(G))$) $F$ (resp. $G$) est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$- mesurable.

$(H_2(F))$ (resp.$(H_2(G))$) Pour tout $t \in I$, $F(t,\cdot,\cdot)$ (resp. $G(t,\cdot,\cdot)$) est scalairement semi-continue supérieurement, i.e., pour tout $e \in H$, la fonction d'appui $\delta^*(e, F(t,\cdot,\cdot))$ est semi-continue supérieurement.

$(H_3(F))$ (resp.$(H_3(G))$) Il existe une constante réelle positive $M_F$ (resp. $M_G$) tel que

$$\|F^0(t,x,y)\| \leq M_F(1 + \|x\| + \|y\|), \quad \forall (t,x,y) \in I \times H \times H. \tag{2.5}$$

$$\|G^0(t,x,y)\| \leq M_G(1 + \|x\| + \|y\|), \quad \forall (t,x,y) \in I \times H \times H. \tag{2.6}$$

Rappelons que $(u, v) : I \to H \times H$ est une solution du problème $(\mathcal{S}_{F,G})$ si :

$(i)$ $u, v$ sont des applications absolument continues, i.e., $u, v \in W^{1.1}(I, H)$ ;

$(ii)$ $u(0) = u_0, v(0) = v_0$ ;

$(iii)$ il existe $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to H$ des applications mesurables tel que

$$-\dot{u}(t) \in A(t, v(t))u(t) + \tilde{f}(t),\ p.p.\ t \in I$$

et

$$-\dot{u}(t) \in B(t, u(t))v(t) + \tilde{g}(t),\ p.p.\ t \in I;$$

avec

$$\tilde{f}(t) \in F(t, u(t, v(t))) \quad et \quad \tilde{g}(t) \in G(t, u(t, v(t))) \quad p.p.\ t \in I.$$

Nous sommes maintenant en mesure de procurer et prouver le théorème principal de cette section.

**Théorème 2.2.1**
*Soit pour tout $(t, x) \in I \times H$, $A(t, x) : D(A(t, x)) \subset H \rightrightarrows H$ (resp. $B(t, x) : D(B(t, x)) \subset H \rightrightarrows H$) un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H_A^1)$, $(H_A^2)$ et $(H_A^3)$ (resp. $(H_B^1)$, $(H_B^2)$ et $(H_B^3)$). Soit $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ (resp. $G : I \times H \times H \rightrightarrows H$) une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées vérifiant $(H_1(F)), (H_2(F))$ et $(H_3(F))$ (resp. $(H_1(G)), (H_2(G))$ et $(H_3(G))$). Alors, pour tout $(u_0, v_0) \in D(A(0, v_0)) \times D(B(0, u_0))$, il existe $(u, v) : I \to H \times H$ une solution absolument continue du problème $(\mathcal{S}_{F,G})$. De plus, cette solution satisfait l'estimation suivante :*

$$\max(\|\dot{u}(t)\|, \|\dot{v}(t)\|) \leq b\dot{a}(t) \quad p.p.\ t \in I,$$

*où $b$ est une constante positive qui dépend des données $\|u_0\|, \|v_0\|, \beta, \eta, c, d, M_F, M_G$, $T$ et*

$$a(t) := t + \beta(t) + \eta(t), \quad \forall t \in I. \tag{2.7}$$

**Preuve**
Dans l'objectif d'assurer la clarté de la démonstration, nous la subdivisons en cinq étapes explicites.
**Etape 1. Construction des suites discrètes** $\{u_i^n, i = 1, ..., n\}$ et $\{v_i^n, i = 1, ..., n\}$.
Soit pour $n \geq 1$, $\{t_i^n : i = 0, 1, ..., n\}$ une partition de l'intervalle $I$, i.e., $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$. Pour $n \geq 1$ et $i = 0, ..., n-1$, on définit

$$\delta_{i+1}^n := |t_{i+1}^n - t_i^n|,\ \beta_{i+1}^n := |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)|,\ \eta_{i+1}^n := |\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)|, \tag{2.8}$$

et on suppose sans perte de généralité, que $\beta(0) = \eta(0) = 0$ et

$$\delta_i^n \leq \delta_{i+1}^n,\ \beta_i^n \leq \beta_{i+1}^n,\ \eta_i^n \leq \eta_{i+1}^n. \tag{2.9}$$

On pose pour tout $t \in I$, $a(t) = t + \beta(t) + \eta(t)$. Puisque $\beta$ et $\eta$ sont absolument continues, on peut choisir la partition $\{t_i^n : i = 0, 1, ..., n\}$ de telle sorte que pour tout $i = 0, ..., n-1$ et $n \geq 1$,

$$k_{i+1}^n := \delta_{i+1}^n + \beta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \frac{1}{n} a(T) =: \varepsilon_n. \tag{2.10}$$

Comme $F$ et $G$ sont à valeurs non vides convexes et fermées, par le Théorème 1.6.3, il existe un unique élément $f(t,x,y) := proj_{F(t,x,y)}(0) = F^0(t,x,y)$ et un unique élément $g(t,x,y) := proj_{G(t,x,y)}(0) = G^0(t,x,y)$, pour tout $(t,x,y) \in I \times H \times H$. Alors, par l'hypothèse $(H_3(F))$ (resp. $(H_3(G))$),

$$\|f(t,x,y)\| \leq M_F(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \forall (t,x,y) \in I \times H \times H \tag{2.11}$$

et

$$\|g(t,x,y)\| \leq M_G(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \forall (t,x,y) \in I \times H \times H. \tag{2.12}$$

De plus, par l'hypothèse $(H_1(F))$ (resp. $(H_1(G))$) et en vertu du Théorème 1.7.13, pour tout $(x,y) \in H \times H$ fixé, les applications $t \mapsto f(t,x,y)$ et $t \mapsto g(t,x,y)$ sont Lebesgue-mesurables. Via les relations (2.11) et (2.12), $f$ et $g$ sont Lebesgue-intégrables.
Maintenant, on définit des suites discrètes $(u_i^n)$ et $(v_i^n)$, $i = 0, ..., n$, par $u_{-1}^n = u_0^n = u_0$, $v_{-1}^n = v_0^n = v_0$ et à partir des résolvantes, on construit les points

$$u_1^n = J_{\delta_1^n}^{A(t_1^n, v_1^n)}\left(u_0 - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f(s, u_0^n, v_0^n)ds\right),\ v_1^n = J_{\delta_1^n}^{B(t_1^n, u_0^n)}\left(v_0 - \int_{t_0^n}^{t_1^n} g(s, u_0^n, v_0^n)ds\right)$$

$$u_2^n = J_{\delta_2^n}^{A(t_2^n, v_2^n)}(u_1^n - \int_{t_1^n}^{t_2^n} f(s, u_1^n, v_1^n)ds),\ v_2^n = J_{\delta_2^n}^{B(t_2^n, u_1^n)}(v_1^n - \int_{t_1^n}^{t_2^n} g(s, u_1^n, v_1^n)ds)$$

ainsi de suite, pour $i = 0, \cdots, n-1$,

$$u_{i+1}^n = J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right),\ v_{i+1}^n = J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n, u_i^n)}\left(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n)ds\right). \tag{2.13}$$

Il vient de (2.13) (voir Proposition 1.8.19), les relations suivantes

$$u_{i+1}^n \in D(A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)) \tag{2.14}$$

$$v_{i+1}^n \in D(B(t_{i+1}^n, u_i^n)) \tag{2.15}$$

De plus, par la définition de la résolvante :

$$u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds \in u_{i+1}^n + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n) u_{i+1}^n.$$

D'une façons équivalente, on a

$$-\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) \in A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{2.16}$$

De même

$$-\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\big(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) \in B(t_{i+1}^n, u_i^n)v_{i+1}^n. \tag{2.17}$$

**Etape 02. Estimations**

Puisque $\alpha\lambda < 1$, on peut trouver $r > 0$ tel que $(1+r)^2\alpha\lambda < 1$. Remarquons aussi que pour les réels positifs $a, b$ on a $\sqrt{2a_1b_1} \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2} \leq \sqrt{(a_1+b_1)^2} = a_1+b_1$. Posons alors $x = \delta_{i+1}^n\big(1+\|B^0(t_i^n,u_{i-1}^n)v_i^n\|\big)$, $y = dis\,\big(B(t_{i+1}^n,u_i^n), B(t_i^n,u_{i-1}^n)\big)$, on obtient

$$\sqrt{x.y} = \sqrt{2\big(\frac{1}{2r}x.r.y\big)} \leq \frac{1}{2r}x + ry$$

Par suite, par le Lemme 1.8.24 et la Proposition 1.8.18, les hypothèses $(H_B^1)$, $(H_B^2)$ et les relations (2.8), (2.10), (2.12) et (2.13), il vient que pour tout $n \geq 1$ et pour $i = 0,1,...,n-1$,

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &= \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) - v_i^n\Big\| \\
&= \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) - J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}(v_i^n) + J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}(v_i^n) - v_i^n\Big\| \\
&\leq \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) - J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}(v_i^n)\Big\| + \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{B(t_{i+1}^n,u_i^n)}(v_i^n) - v_i^n\Big\| \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s,u_i^n,v_i^n)ds\| + \delta_{i+1}^n\|B^0(t_i^n,u_{i-1}^n)v_i^n\| + dis\big(B(t_{i+1}^n,u_i^n), B(t_i^n,u_{i-1}^n)\big) \\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n\big(1+\|B^0(t_i^n,u_{i-1}^n)v_i^n\|\big)dis\big(B(t_{i+1}^n,u_i^n), B(t_i^n,u_{i-1}^n)\big)} \\
&\leq \delta_{i+1}^n M_G\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + \delta_{i+1}^n d\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) + \|\eta(t_{i+1}^n)-\eta(t_i^n)\| \\
&+ \alpha\|u_i^n - u_{i-1}^n\| + \frac{\delta_{i+1}^n}{2r}\big(1+\|B^0(t_i^n,u_{i-1}^n)v_i^n\|\big) + r dis\big(B(t_{i+1}^n,u_i^n), B(t_i^n,u_{i-1}^n)\big) \\
&\leq k_{i+1}^n M_G\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n d\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n + \alpha\|u_i^n - u_{i-1}^n\| \\
&+ \frac{k_{i+1}^n}{2r}\big(1+d\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\big) + r\big(k_{i+1}^n + \alpha\|u_i^n - u_{i-1}^n\|\big) \\
&\leq k_{i+1}^n M_G\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + \frac{k_{i+1}^n}{2r}\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) \\
&+ r\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big)k_{i+1}^n + k_{i+1}^n d\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) + \frac{k_{i+1}^n}{2r}d\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) \\
&+ \alpha(1+r)\|u_i^n - u_{i-1}^n\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \le{}& k_{i+1}^n\big(M_G + 1 + \frac{1}{2r} + r\big)\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n\big(1 + \frac{1}{2r}\big)d\big(1 + \|u_{i-1}^n\| + \|v_i^n\|\big)\\ &+ \alpha(1+r)\|u_i^n - u_{i-1}^n\|.\end{aligned}$$

Pour $M_1 := M_G + 1 + \frac{1}{2r} + r$ et $M_2 = \big(1 + \frac{1}{2r}\big)d$, on aura

$$\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \le k_{i+1}^n M_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n M_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) + \alpha(1+r)\|u_i^n - u_{i-1}^n\|. \tag{2.18}$$

De même, en utilisant (2.8), (2.10), (2.11), (2.13) et Lemme 1.8.24, Proposition 1.8.18 et les hypothèses $(H_A^1)$ et $(H_A^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| ={}& \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}\big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) - u_i^n\Big\|\\
={}& \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}\big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) - J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(u_i^n) + J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(u_i^n) - u_i^n\Big\|\\
\le{}& \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}\big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n,v_i^n)ds\big) - J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(u_i^n)\Big\| + \Big\|J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)}(u_i^n) - u_i^n\Big\|\\
\le{}& \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s,u_i^n,v_i^n)ds\| + \delta_{i+1}^n\|A^0(t_i^n,v_i^n)u_i^n\| + dis\big(A(t_{i+1}^n,v_{i+1}^n),A(t_i^n,v_i^n)\big)\\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n\big(1+\|A^0(t_i^n,v_i^n)u_i^n\|\big)dis\big(A(t_{i+1}^n,v_{i+1}^n),A(t_i^n,v_i^n)\big)}\\
\le{}& M_F\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big)\delta_{i+1}^n + \delta_{i+1}^n c\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)|\\
&+ \lambda\|v_{i+1}^n - v_i^n\| + \frac{\delta_{i+1}^n}{2r}\big(1+\|A^0(t_i^n,v_i^n)u_i^n\|\big) + r\,dis\big(A(t_{i+1}^n,v_{i+1}^n),A(t_i^n,v_i^n)\big)\\
\le{}& M_F\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big)k_{i+1}^n + k_{i+1}^n c\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n + \lambda\|v_{i+1}^n - v_i^n\|\\
&+ \frac{k_{i+1}}{2r}\big(1 + c(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + r\big(k_{i+1}^n + \lambda\|v_{i+1}^n - v_i^n\|\big)\big)\\
\le{}& k_{i+1}^n\big(M_F + c(1+\frac{1}{2r}) + 1 + \frac{1}{2r} + r\big)\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + \lambda(1+r)\|v_{i+1}^n - v_i^n\|.\end{aligned}$$

Posons $M_3 := M_F + c + 1 + \frac{1}{2r} + \frac{c}{2r} + r$, on obtient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \le k_{i+1}^n M_3\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + \lambda(1+r)\|v_{i+1}^n - v_i^n\|.$$

Via la relation (2.18), on aura

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \le{}& k_{i+1}^n M_3\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + \lambda(1+r)\big(k_{i+1}^n M_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big)\\
&+ k_{i+1}^n M_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) + \alpha(1+r)\|u_i^n - u_{i-1}^n\|\big)\\
\le{}& k_{i+1}^n\big(M_3 + \lambda(1+r)M_1\big)\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n\lambda(1+r)M_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\\
&+ \lambda\alpha(1+r)^2\|u_i^n - u_{i-1}^n\|.\end{aligned}$$

Soient $L_1 := (M_3 + \lambda(1+r)M_1)$, $L_2 := \lambda(1+r)M_2$ et $R = \lambda\alpha(1+r)^2$, il s'en suit que

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big) + R\|u_i^n - u_{i-1}^n\|. \quad (2.19)$$

Utilisant le fait que $k_i^n \leq k_{i+1}^n$ et l'estimation (2.19), on trouve

$$\|u_i^n - u_{i-1}^n\| \leq k_{i+1}^n L_1(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_{i-1}^n\|) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + R\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\|. \quad (2.20)$$

Il vient que

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\\ &+ R\big(k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + R\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\|\big)\\ &= k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\\ &+ Rk_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + Rk_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + R^2\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\|.\end{aligned}$$

De (2.19), on obtient aussi

$$\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| \leq k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-3}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + R\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\| \quad (2.21)$$

on aura alors

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\\ &+ Rk_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + Rk_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big)\\ &+ R^2\big(k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-3}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + R\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\|\big)\\ &= k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\\ &+ Rk_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + Rk_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big)\\ &+ R^2k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + R^2k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-3}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + R^3\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\|.\end{aligned}$$

Par récurrence, il en résulte de la relation (2.19),

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_i^n\|\big)\\ &+ Rk_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-1}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big) + Rk_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-1}^n\|\big)\\ &+ R^2k_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_{i-2}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big) + R^2k_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{i-3}^n\|+\|v_{i-2}^n\|\big)\\ &+ \cdots + R^ik_{i+1}^n L_1\big(1+\|u_0^n\|+\|v_0^n\|\big) + R^ik_{i+1}^n L_2\big(1+\|u_{-1}^n\|+\|v_0^n\|\big) + R^{i+1}\|u_0^n - u_{-1}^n\|.\end{aligned}$$

Sachant que $u_{-1}^n = u_0$, on obtient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq k_{i+1}^n L_1 \sum_{j=0}^{i} R^j\big(1+\|u_{i-j}^n\|+\|v_{i-j}^n\|\big) + k_{i+1}^n L_2 \sum_{j=0}^{i} R^j\big(1+\|u_{i-j-1}^n\|+\|v_{i-j}^n\|\big). \quad (2.22)$$

Remarquons qu'on a

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) \leq \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).$$

En effet, procédons par récurrence sur $j$. Nous avons pour $j=0$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) = \|u_0^n\| + \|v_0^n\|$$

pour $j=1$,

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) = \big(\|u_1^n\| + \|v_1^n\|\big) + R\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big).$$

pour $j=2$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) = \big(\|u_2^n\| + \|v_2^n\|\big) + R\big(\|u_1^n\| + \|v_1^n\|\big) + R^2\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big).$$

Supposons qu'elle est vraie pour $j$ et montrons pour $j+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) &= \big(\|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) + R\big(\|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|\big) + R^2\big(\|u_{i-2}^n\| + \|v_{i-2}^n\|\big)\\ &\quad + \cdots + R^i\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big).\end{aligned}$$

Alors,

$\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) = \big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big) + R\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big) + ... + R^i\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big)$

$+\big(\|u_1^n\| + \|v_1^n\|\big) + R\big(\|u_1^n\| + \|v_1^n\|\big) + \cdots + R^{i-1}\big(\|u_1^n\| + \|v_1^n\|\big)$

$+\big(\|u_2^n\| + \|v_2^n\|\big) + R\big(\|u_2^n\| + \|v_2^n\|\big) + ... + R^{i-2}\big(\|u_2^n\| + \|v_2^n\|\big)$

.

.

.

$+\big(\|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|\big) + R\big(\|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|\big) + \big(\|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)$

$\displaystyle\leq \sum_{l=0}^{i} R^l\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\| + \|u_1^n\| + \|v_1^n\| + ... + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big).$

On déduit que,

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) \leq \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.23}$$

Par la même méthode, en interchangeant $u_i^n$ et $v_i^n$, on trouve aussi

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) \leq \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_{j-1}^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.24}$$

Moyennant les relations (2.22), (2.23), (2.10) et (2.24),
puisque $\|u_{i+1}^n - u_0^n\| \leq \sum_{j=0}^{i}\|u_{j+1}^n - u_j^n\|$, on aura par utilisation des inégalités précédentes et de la relations (2.10)

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_0\| + \sum_{j=0}^{i}\|u_{j+1}^n - u_j^n\| \\
&\leq \|u_0\| + \sum_{j=0}^{i}\big(k_{j+1}^n L_1 \sum_{l=0}^{j} R^l(1 + \|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|) + k_{j+1}^n L_2 \sum_{l=0}^{j} R^l\big(1 + \|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big)\big) \\
&\leq \|u_0\| + L_1\varepsilon_n\big(\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l(1 + \|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|)\big) + L_2\varepsilon_n\big(\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(1 + \|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big)\big) \\
&= \|u_0\| + L_1\varepsilon_n\big(\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l + \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|)\big) \\
&+ L_2\varepsilon_n\big(\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l + \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big)\big) \\
&\leq \|u_0\| + L_1\varepsilon_n\big(\frac{i+1}{1-R} + \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big)\big) \\
&+ L_2\varepsilon_n\big(\frac{i+1}{1-R} + \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big)\big) \\
&\leq \|u_0\| + L_1\varepsilon_n\big(\frac{i+1}{1-R} + \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big)\big) \\
&+ L_2\varepsilon_n\big(\frac{i+1}{1-R} + \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_{j-1}^n\| + \|v_j^n\|\big)\big) \\
&\leq \|u_0\| + \frac{L_1 a(T)}{1-R} + \frac{L_1\varepsilon_n}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + \frac{L_2 a(T)}{1-R} + \frac{L_2\varepsilon_n}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_{j-1}^n\| + \|v_j^n\|\big)
\end{aligned}$$

Pour $c_1 := \|u_0\| + \dfrac{L_1 a(T)}{1-R} + \dfrac{L_2 a(T)}{1-R}$, $c_2 := \dfrac{L_1}{1-R}$ et $c_3 := \dfrac{L_2}{1-R}$, il en résulte

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + c_3\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_{j-1}^n\| + \|v_j^n\|\big) \\
&\leq c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + c_3\varepsilon_n \big(\|u_{-1}^n\| + \|v_0^n\| + \|u_0^n\| + \|v_1^n\| + \|u_1^n\| + \|v_2^n\| \\
&+ \cdots + \|u_{i-1}^n\| + \|v_i^n\|\big) \\
&= c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + c_3\varepsilon_n \big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\| + \|u_1^n\| + \|v_1^n\| \\
&+ \cdots + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\| + \|v_i^n\| + \|u_0^n\|\big) \\
&\leq c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + c_3\varepsilon_n \big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\| + \|u_1^n\| + \|v_1^n\| \\
&+ \cdots + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\| + \|u_i^n\| + \|v_i^n\| + \|u_0^n\|\big) \\
&= c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + c_3\varepsilon_n \big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\| + \|u_1^n\| + \|v_1^n\| \\
&+ \cdots + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\| + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) + c_3\varepsilon_n \|u_0\| \\
&= \big(c_1 + c_3 a(T)\|u_0\|\big) + (c_2 + c_3)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u_{i+1}^n\| \leq a_1 + a_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) \tag{2.25}$$

tel que $a_1 := c_1 + c_3 a(T)\|u_0\|$ et $a_2 := c_2 + c_3$.
De l'autre côté, par (2.18), (2.22) et en utilisant le fait que $k_i^n \leq k_{i+1}^n$, on aura

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq k_{i+1}^n M_1\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) + k_{i+1}^n M_2\big(1 + \|u_{i-1}^n\| + \|v_i^n\|\big) \\
+ \alpha(1+r)k_{i+1}^n L_1 \sum_{j=0}^{i-1} R^j \big(1 + \|u_{i-j-1}^n\| + \|v_{i-j-1}^n\|\big) \\
+ \alpha(1+r)k_{i+1}^n L_2 \sum_{j=0}^{i-1} R^j \big(1 + \|u_{i-j-2}^n\| + \|v_{i-j-1}^n\|\big).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Puisque $\|v_{i+1}^n - v_0^n\| \le \sum_{j=0}^{i} \|v_{j+1}^n - v_j^n\|$, on obtient de la relation (2.10),

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| &\le \|v_0\| + \sum_{j=0}^{i} \|v_{j+1}^n - v_j^n\| \qquad (2.27)\\
&\le \|v_0\| + M_1 \sum_{j=0}^{i} k_{j+1}^n \big(1 + \|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + M_2 \sum_{j=0}^{i} k_{j+1}^n \big(1 + \|u_{j-1}^n\| + \|v_j^n\|\big)\\
&+ L_1\alpha(1+r) \sum_{j=0}^{i} k_{j+1}^n \sum_{l=0}^{j-1} R^l \big(1 + \|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big)\\
&+ L_2\alpha(1+r) \sum_{j=0}^{i} k_{j+1}^n \sum_{l=0}^{j-1} R^l \big(1 + \|u_{j-l-2}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big)\\
&\le \|v_0\| + M_1(i+1)\varepsilon_n + M_1\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + M_2(i+1)\varepsilon_n + M_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_{j-1}^n\| + \|v_j^n\|\big)\\
&+ L_1\alpha(1+r)\frac{i+1}{1-R}\varepsilon_n + L_1\alpha(1+r)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big)\\
&+ L_2\alpha(1+r)\frac{i+1}{1-R}\varepsilon_n + L_2\alpha(1+r)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-l-2}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big)
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big) \le \frac{1}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big)$$

En effet, nous avons pour $j = 0$,

$$\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big) = \|u_{-1}^n\| + \|v_{-1}^n\|$$

pour $j = 1$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big) = \big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big) + R\big(\|u_{-1}^n\| + \|v_{-1}^n\|\big)$$

pour $j = 2$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-l-1}^n\| + \|v_{j-l-1}^n\|\big) = \big(\|u_1^n\| + \|v_1^n\|\big) + R\big(\|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big) + R^2\big(\|u_{-1}^n\| + \|v_{-1}^n\|\big)$$

Pour $j = i$

$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-1}\|+\|v^n_{j-l-1}\|\big) = \|u^n_{i-1}\|+\|v^n_{i-1}\|+R\big(\|u^n_{i-2}\|+\|v^n_{i-2}\|\big)+R^2\big(\|u^n_{i-3}\|+\|v^n_{i-3}\|\big)+ \cdots + R^i\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$

Alors,

$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-1}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big)$
$= \big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_{-1}\|\big) + R\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_{-1}\|\big) + ... + R^i\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$
$+\|u_0\| + \|v_0\| + R\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + ... + R^{i-1}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big)$
$+\|u_1\| + \|v_1\| + R\big(\|u_1\| + \|v_1\|\big) + ... + R^{i-2}\big(\|u_1\| + \|v_1\|\big)$
.
.
.
$+\|u^n_{i-2}\| + \|v^n_{i-2}\| + R\big(\|u^n_{i-2}\| + \|v^n_{i-2}\|\big)$
$+\|u^n_{i-1}\| + \|v^n_{i-1}\|$
$\leq \sum_{l=0}^{i} R^l\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_{-1}\| + \|u_0\| + \|v_0\| + ... + \|u^n_{i-1}\| + \|v^n_{i-1}\|\big).$

Sachant que $u^n_{-1} = u_0$, $v^n_{-1} = v_0$, on aura

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-1}\|+\|v^n_{j-l-1}\|\big) \leq \frac{1}{1-R}\big(\|u_0\|+\|v_0\|\big)+\frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u^n_j\|+\|v^n_j\|\big). \quad (2.28)$$

De plus,

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\|+\|v^n_{j-l-1}\|\big) \leq \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\|+\|v_0\|\big)+\frac{1}{1-R}\|u_0\|+\frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u^n_j\|+\|v^n_j\|\big).$$

En effet, pour $j = 0$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big) = \|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|$$

pour $j = 1$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big) = \|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\| + R\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$$

pour $j = 2$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big) = \|u^n_0\| + \|v^n_1\| + R\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\|\big) + R^2\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$$

Pour $j = 3$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big) = \|u^n_1\| + \|v^n_2\| + R\big(\|u^n_0\| + \|v^n_1\|\big) + R^2\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\|\big)$$
$$+ R^3\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$$

Pour $j = i$

$$\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-1}\|+\|v^n_{j-l-1}\|\big) = \|u^n_{i-2}\|+\|v^n_{i-1}\|+R\big(\|u^n_{i-3}\|+\|v^n_{i-2}\|\big)+R^2\big(\|u^n_{i-4}\|+\|v^n_{i-3}\|\big)+$$
$$\cdots + R^i\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$$

Alors,

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big)$$
$$= \big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big) + R\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big)$$
$$+ \cdots + R^i\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\|\big) + \|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\| + R\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\|\big)$$
$$+ \cdots + R^{i-1}\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\|\big)$$
$$+\|u^n_0\| + \|v^n_1\| + R\big(\|u^n_0\| + \|v^n_1\|\big) + \cdots + R^{i-2}\big(\|u^n_0\| + \|v^n_1\|\big)$$

.

.

.

$$+\|u^n_{i-3}\| + \|v^n_{i-2}\| + R\big(\|u^n_{i-3}\| + \|v^n_{i-2}\|\big)$$
$$+\|u^n_{i-2}\| + \|v^n_{i-1}\|$$
$$\leq \sum_{l=0}^{i} R^l\big(\|u^n_{-2}\| + \|v^n_{-1}\| + \|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\| + ... + \|u^n_{i-2}\| + \|v^n_{i-1}\|\big).$$

Comme $u^n_{-1} = u_0$ et $v^n_{-1} = v_0$, on aura

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u^n_{j-l-2}\| + \|v^n_{j-l-1}\|\big)$$
$$\leq \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i-1}\big(\|u^n_{j-1}\| + \|v^n_j\|\big)$$
$$\leq \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\big(\|u^n_{-1}\| + \|v^n_0\| + \|u^n_0\| + \|v^n_1\|\|\|$$
$$+\|u^n_1\| + \|v^n_2\| + \cdots + \|u^n_{i-1}\| + \|v^n_i\|\big)$$
$$= \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\big(\|u^n_0\| + \|v^n_0\| + \|u^n_1\| + \|v^n_1\|$$
$$+ \cdots + \|u^n_{i-1}\| + \|v^n_{i-1}\| + \|v^n_i\| + \|u^n_0\|\big)$$
$$\leq \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\big(\|u^n_0\| + \|v^n_0\| + \|u^n_1\| + \|v^n_1\|$$
$$+ \cdots + \|u^n_{i-1}\| + \|v^n_{i-1}\| + \|u^n_i\| + \|v^n_i\| + \|u^n_0\|\big)$$
$$= \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\big(\|u^n_0\| + \|v^n_0\| + \|u^n_1\| + \|v^n_1\|$$
$$+ \cdots + \|u^n_{i-1}\| + \|v^n_{i-1}\| + \|u^n_i\| + \|v^n_i\|\big) + \frac{1}{1-R}\|u_0\|$$

$$= \frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\|u_0\| + \sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big)$$
$$\leq \frac{3}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).$$

En remplaçant dans (2.27), on obtient en utilisant (2.10)

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| &\leq \|v_0\| + M_1 a(T) + M_1\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + M_2 a(T) + M_2 a(T)\|u_0\| \\
&+ M_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) + L_1\alpha(1+r)\frac{a(T)}{1-R} \\
&+ L_1\alpha(1+r)\varepsilon_n\Big(\frac{1}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big)\Big) + L_2\alpha(1+r)\frac{a(T)}{1-R} \\
&+ L_2\alpha(1+r)\varepsilon_n\Big(\frac{2}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \frac{\|u_0\|}{1-R} + \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big)\Big) \\
&\leq \|v_0\| + (M_1+M_2)a(T) + \alpha(1+r)\frac{a(T)}{1-R}(L_1+L_2) + \Big(\frac{1}{1-R} + M_2 a(T)\Big)\|u_0\| \\
&+ \Big(\alpha(1+r)\frac{a(T)}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big)\Big)(L_1+2L_2) \\
&+ \Big(M_1 + M_2 + \alpha(1+r)\frac{1}{1-R}(L_1+L_2)\Big)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).
\end{aligned}$$

Pour $d_1 := \|v_0\| + (M_1+M_2)a(T) + \alpha(1+r)\frac{a(T)}{1-R}(L_1+L_2) + \Big(\frac{1}{1-R} + M_2 a(T)\Big)\|u_0\|$ $+ \Big(\alpha(1+r)\frac{a(T)}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big)\Big)(L_1+2L_2)$ et $d_2 := M_1 + M_2 + \alpha(1+r)\frac{1}{1-R}(L_1+L_2)$, il en résulte

$$\|v_{i+1}^n\| \leq d_1 + d_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|). \tag{2.29}$$

En sommant (2.25) et (2.29), on aura

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq q_1 + q_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|), \tag{2.30}$$

tel que $q_1 = a_1 + d_1$ et $q_2 = a_2 + d_2$.
Faisant référence au Lemme 1.10.1, on obtient pour $n \geq 0$ et $i = 0, ..., n-1$

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq q_1 \exp\big(q_2 \sum_{j=0}^{i}\varepsilon_n\big) \leq q_1 \exp q_2 b(T) =: K_1$$

Alors, pour $n \geq 0$ et $i = 0, ..., n-1$,

$$\|u_{i+1}^n\| \leq K_1, \ et \ \|v_{i+1}^n\| \leq K_1.$$

En remplaçant dans (2.22) et dans (2.26) on obtient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq q_3 k_{i+1}^n$$

tel que $q_3 = \big(\frac{1}{1-R}(1+K_1)\big)(L_1+L_2)$ et

$$\begin{aligned}\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &\leq k_{i+1}^n M_1(1+2K_1) + k_{i+1}^n M_2(1+2K_1) + \frac{\alpha(1+r)}{1-R} L_1(1+2K_1)k_{i+1}^n \\ &+ \frac{\alpha(1+r)}{1-R} L_2(1+2K_1)k_{i+1}^n \\ &\leq q_4 k_{i+1}^n\end{aligned}$$

tel que $q_4 = \big((M_1+M_2) + \frac{\alpha(1+r)}{1-R}(L_1+L_2)\big)(1+2K_1)$.
Soit $l := \max\{K_1, q_3, q_4\}$.
On conclut que pour $0 \leq i \leq n$ (resp. $0 \leq i \leq n-1$)

$$\|u_i^n\| \leq l \ \left( resp. \ \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq l k_{i+1}^n = l\big(a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)\big) \right) \tag{2.31}$$

et

$$\|v_i^n\| \leq l \ \left( resp. \ \|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq l k_{i+1}^n = l\big(a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)\big) \right). \tag{2.32}$$

**Etape 3. Construction des suites approximatives $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.**
Pour tout $n \geq 1$, on définit les applications $u_n, v_n : I \to H$ comme suit :
pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $0 \leq i \leq n-1$

$$\begin{cases} u_n(t) = u_i^n + \dfrac{a(t) - a(t_i^n)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)} \left( u_{i+1}^n - u_i^n + \displaystyle\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - \displaystyle\int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \\ u_n(T) = u_n^n, \end{cases} \tag{2.33}$$

et

$$\begin{cases} v_n(t) = v_i^n + \dfrac{a(t) - a(t_i^n)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)} \left( v_{i+1}^n - v_i^n + \displaystyle\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - \displaystyle\int_{t_i^n}^{t} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \\ v_n(T) = v_n^n. \end{cases} \tag{2.34}$$

Il est clair que les applications $u_n$ et $v_n$ sont absolument continues avec $u_n(t_i^n) = u_i^n$ et $v_n(t_i^n) = v_i^n$. Pour tout $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n[$, on a

$$\dot{u}_n(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)} \left( u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - f(t, u_i^n, v_i^n) \tag{2.35}$$

et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)} \left( v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - g(t, u_i^n, v_i^n). \tag{2.36}$$

Soit pour tout $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$x_n(t) = \frac{1}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)} \left( u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) \tag{2.37}$$

et

$$y_n(t) = \frac{1}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)} \left( v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right). \tag{2.38}$$

et $x_n(t) = y_n(t) = 0$ ailleurs.
Alors, les relations (2.35) et (2.36), s'écrivent comme suit :

$$\dot{u}_n(t) = \dot{a}(t) x_n(t) - f(t, u_i^n, v_i^n) \tag{2.39}$$

et

$$\dot{v}_n(t) = \dot{a}(t) y_n(t) - g(t, u_i^n, v_i^n). \tag{2.40}$$

Maintenant, on définit des fonctions en escalier $\theta_n, \varphi_n, \alpha_n : I \to I$ par :

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \;\; \varphi_n(t) = t_i^n, \;\; \alpha_n(t) = \frac{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}$$

pour $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n]$ *et* $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = \alpha_n(0) = 0$. Observons que pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$, on a

$$|\theta_n(t) - t| = |t_{i+1}^n - t| \leq |t_{i+1}^n - t_i^n| = \delta_{i+1}^n \leq k_{i+1}^n \leq \varepsilon_n \to 0, \; lorsque \; n \to \infty, \tag{2.41}$$

de même,

$$|\varphi_n(t) - t| = |t_i^n - t| = |t - t_i^n| \leq |t_{i+1}^n - t_i^n| = \delta_{i+1}^n \leq k_{i+1}^n \leq \varepsilon_n \to 0, \; lorsque \; n \to \infty. \tag{2.42}$$

D'après les relations (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), (2.35), (2.36),(2.37), (2.38) et en utilisant les notations précédentes, il existe un sous-ensemble $J_n$ de mesure de Lebesgue nulle, tel que

$$u_n(\theta_n(t)) \in D\big(A\big(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big)\big) \; \forall t \in I. \tag{2.43}$$

$$-\alpha_n(t) x_n(t) \in A\big(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big) u_n(\theta_n(t)) \quad \forall t \in I \setminus J_n. \tag{2.44}$$

$$v_n(\theta_n(t)) \in D\big(B\big(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\big)\big) \; \forall t \in I. \tag{2.45}$$

$$-\alpha_n(t)y_n(t) \in B\big(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\big)v_n(\theta_n(t)) \quad \forall t \in I \setminus J_n. \tag{2.46}$$

Soit pour tout $t \in I$ et $n \geq 1$,

$$f_n(t) = f\big(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))\big) \text{ et } g_n(t) = g\big(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))\big).$$

Par (2.39) et (2.40), on a

$$\dot{u}_n(t) = \dot{a}(t)x_n(t) - f_n(t) \quad p.p.\ t \in I \tag{2.47}$$

aussi

$$\dot{v}_n(t) = \dot{a}(t)y_n(t) - g_n(t) \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.48}$$

Par le Théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème 1.1.16), il existe $N_a \subset I$, un sous-ensemble négligeable tel que tout $t \notin N_a$ est un point de Lebesgue de $a$. En particulier, en prenant (2.10) en considération, nous observons que si $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n[\setminus N_a$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{a}(t). \tag{2.49}$$

On conclut, qu'il existe un sous-ensemble négligeable $N' \subset I$ qui contient $N_a$, tous les sous-ensembles $J_n$ et tous les $t_i^n$, tel que pour tout $t \in I \setminus N'$ non seulement les relations (2.44) et (2.46) sont vérifiées, mais aussi il existe $\alpha_t < +\infty$, tel que

$$\forall n \geq 1, \quad |\alpha_n(t)| \leq \alpha_t. \tag{2.50}$$

De plus, pour tout $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n[$, évoquant les relations (2.10), (2.35), (2.31), (2.32) et (2.11), il en résulte que

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t)\| &\leq \frac{\dot{a}(t)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n, v_i^n)\|ds\right) + \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq \frac{\dot{a}(t)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)}\Big(l(a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)) + (t_{i+1}^n - t_i^n)M_F(1+2l)\Big) + M_F(1+2l) \\
&\leq \frac{\dot{a}(t)}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)}\Big(l(a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)) + (a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n))M_F(1+2l)\Big) + M_F(1+2l) \\
&\leq \dot{a}(t)\Big(l + M_F(1+2l)\Big) + M_F(1+2l) \\
&\leq l_1\dot{a}(t) + l_2,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

tel que $l_1 := c + M_F(1+2l)$ et $l_2 := M_F(1+2l)$. Ceci implique que pour tous $t, s \in I$ $(s \leq t)$,

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \left\|\int_s^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\right\| \leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \leq \int_s^t (l_1\dot{a}(\tau) + l_2)d\tau \\
&\leq l_1(a(t) - a(s)) + l_2(t-s) \\
&\leq (l_1 + l_2)(a(t) - a(s)) =: b_1(a(t) - a(s))
\end{aligned} \tag{2.52}$$

où $b_1 := l_1 + l_2$.
En utilisant les mêmes arguments et en vertu des relations (2.10), (2.36), (2.31), (2.32) et (2.12), il vient que

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n(t)\| &\leq \frac{\dot{a}(t)}{a(t^n_{i+1}) - a(t^n_i)}\left(\|v^n_{i+1} - v^n_i\| + \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|g(s, u^n_i, v^n_i)\|ds\right) + \|g(t, u^n_i, v^n_i)\| \\
&\leq \frac{\dot{a}(t)}{a(t^n_{i+1}) - a(t^n_i)}\left(l(a(t^n_{i+1}) - a(t^n_i)) + (t^n_{i+1} - t^n_i)M_G(1+2l)\right) + M_G(1+2l) \\
&\leq \frac{\dot{a}(t)}{a(t^n_{i+1}) - a(t^n_i)}\left(l(a(t^n_{i+1}) - a(t^n_i)) + (a(t^n_{i+1}) - a(t^n_i))M_G(1+2l)\right) + M_G(1+2l) \\
&\leq \dot{a}(t)(c + M_G(1+2l)) + M_G(1+2l) \\
&\leq l_3\dot{a}(t) + l_4 \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

tel que $l_3 := c + M_G(1+2l)$ et $l_4 := M_G(1+2l)$. D'où, pour tous $t, s \in I$ $(s \leq t)$,

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(s)\| = \left\|\int_s^t \dot{v}_n(\tau)d\tau\right\| &\leq \int_s^t \|\dot{v}_n(\tau)\|d\tau \leq \int_s^t (l_3\dot{a}(\tau) + l_4)d\tau \\
&\leq l_3(a(t) - a(s)) + l_4(t-s) \leq (l_3 + l_4)(a(t) - a(s)) =: b_2(a(t) - a(s)).
\end{aligned} \qquad (2.54)$$

où $b_2 := l_3 + l_4$.

**Étape. 4 convergence des suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(\dot{u}_n)_n$ et $(\dot{v}_n)_n$.**

On commence par la convergence uniforme de la suite $(u_n)_n$ et la convergence faible de la suite des dérivées $(\dot{u}_n)_n$ dans $L^1(I, H)$. Pour cela, on va utiliser le Théorème d'Ascoli-Arzélà (Théorème 1.4.10) pour montrer la convergence uniforme de $(u_n)_n$.
Montrons d'abord que pour tout $t \in I$, l'ensemble $\{u_n(t),\ n \geq 1\}$ est relativement compact.
De (2.32), nous avons $(v_n(\theta_n(t)))_n \subset l\overline{B}_H$, alors

$$(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))_n \subset (I \times l\overline{B}_H).$$

Par (2.31), on a $(u_n(\theta_n(t)))_n \subset l\overline{B}_H$. Donc, il résulte de la relation (2.43) que

$$(u_n(\theta_n(t)))_n \subset D\big(A(I \times l\overline{B}_H)\big) \cap l\overline{B}_H.$$

D'après l'hypothèse $(H^3_A)$ le sous-ensemble $D\big(A(I \times l\overline{B}_H)\big) \cap l\overline{B}_H$ est relativement compact. Par conséquent, la suite $(u_n(\theta_n(t)))_n$ l'est aussi. Par (2.52), (2.41) et (2.42) (en prenant en compte que $a(\cdot)$ est absolument continue), on aura

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \leq b_1(a(\theta_n(t)) - a(t)) \to 0 \text{ et } \|u_n(\varphi_n(t)) - u_n(t)\| \to 0,\ n \to \infty. \qquad (2.55)$$

Il s'en suit que pour tout $t \in I$, $\{u_n(t) :\ n \geq 1\}$ est aussi relativement compact dans $H$.
De l'autre côté, par (2.52), la suite $(u_n)_n$ est équi-continue du fait que $a(\cdot)$ est absolument

continue. En appliquant le Théorème d'Ascoli-Arzélà, on déduit que $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $C(I, H)$, alors on peut lui en extraire une sous suite (qu'on ne va pas renommer) qui converge uniformément vers une application continue $u$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_C = 0. \tag{2.56}$$

De plus, pour tout $t \in I$, on a

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|$$

passant à la limite lorsque $n \to \infty$, en utilisant (2.55) et (2.56), on obtient,

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \to 0. \tag{2.57}$$

De même, en utilisant (2.55) et (2.56)

$$\|u_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| \to 0. \tag{2.58}$$

De plus, par (2.52) et (2.56), on obtient

$$\|u(t) - u(s)\| \leq b_1(a(t) - a(s)). \tag{2.59}$$

Maintenant, on va montrer que $(\dot{u}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^1(I, H)$.
Il est clair par la relation (2.51), que la suite des dérivées $(\dot{u}_n)_n$ est intégrablement bornée alors, par la Proposition 1.4.12 elle est $\sigma(L^1, L^\infty)$- relativement compacte, donc on peut lui en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers une application $y \in L^1(I, H)$. Reste à montrer que $y \equiv \dot{u}$.
En utilisant le Théorème 1.5.3 sur l'application

$$\begin{aligned} \Gamma_z : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Gamma_z(x) = \langle z, x \rangle, \end{aligned} \tag{2.60}$$

et sur $f = \dot{u}$ et la Remarque 1.4.7, on a pour tout $\xi \in L^\infty(I, H)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \xi, \dot{u}_n \rangle = \langle \xi, y \rangle$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \xi(\tau), \dot{u}_n(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle \xi(\tau), y(\tau) \rangle d\tau.$$

En particulier, si on prend pour tout $t \in [0, T]$ et pour $z \in H$, $\xi(\cdot) = z 1_{[0,t]}(\cdot)$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle z 1_{[0,t]}(\tau), \dot{u}_n(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle z 1_{[0,t]}(\tau), y(\tau) \rangle d\tau$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle z, \dot{u}_n(\tau)\rangle d\tau = \int_0^t \langle z, y(\tau)\rangle d\tau$$

c'est-à-dire, par (2.60)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \Gamma_z(\dot{u}_n(\tau))d\tau = \int_0^t \Gamma_z(y(\tau))d\tau$$

on obtient,

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_z\Big(\int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\Big) = \Gamma_z\Big(\int_0^t y(\tau)d\tau\Big)$$

par (2.60) une deuxième fois, ceci est équivalent à

$$\lim_{n\to\infty}\langle z, \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\rangle = \langle z, \int_0^t y(\tau)d\tau\rangle. \tag{2.61}$$

En vertu de (2.61), il vient que

$$\begin{aligned}\langle z, u(t)-u(0)\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle z, u_n(t)-u_n(0)\rangle = \lim_{n\to\infty}\Big\langle z, \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\Big\rangle\\ &= \langle z, \int_0^t y(\tau)d\tau\rangle\end{aligned}$$

il en résulte que

$$u(t)-u(0) = \int_0^t y(\tau)d\tau.$$

Par le Théorème 1.1.14 on conclut que $u$ est absolument continue et $\dot{u} = y$ $p.p.$ sur $I$.
Passant maintenant à la convergence uniforme de la suite $(v_n)_n$. On va utiliser les mêmes arguments utilisés dans la preuve de la convergence uniforme de $(u_n)_n$.
D'abord, on montre que pour tout $t \in I$, l'ensemble $\{v_n(t),\ n \geq 1\}$ est relativement compact.
Nous avons par la relation (2.31) que $(u_n(\varphi_n(t)))_n \subset l\overline{B}_H$, alors

$$(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))_n \subset (I \times l\overline{B}_H).$$

De plus, de (2.32) on a $(v_n(\theta_n(t)))_n \subset l\overline{B}_H$. On déduit par la relation (2.45) que

$$(v_n(\theta_n(t)))_n \subset D(A(I \times l\overline{B}_H)) \cap l\overline{B}_H.$$

Le sous-ensemble $D(B(I\times l\overline{B}_H))\cap l\overline{B}_H$ est relativement compact par $(H_B^3)$. Par conséquent la suite $(v_n(\theta_n(t)))_n$ l'est aussi. En vertu des relations (2.41), (2.42) et (2.54) et tenant en compte que $a(\cdot)$ est absolument continue, on aura

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \leq b_2\|a(\theta_n(t)) - a(t)\| \to 0,\ n\to\infty \tag{2.62}$$

et

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| \to 0,\ n \to \infty. \tag{2.63}$$

Ceci entraine que, $\{v_n(t) : n \geq 1\}$ est relativement compact.
Par la relation (2.54), la suite $(v_n)_n$ est équi-continue grâce au fait que $a(\cdot)$ est absolument continue. En appliquant le théorème d'Ascoli-Arzélà, on déduit que $(v_n)_n$ est relativement compacte dans $C(I, H)$, alors il existe une sous suite extraite, qu'on note aussi $(v_n)_n$, qui converge uniformément vers une application continue $v$ i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_C = 0. \tag{2.64}$$

Nous avons, pour tout $t \in I$

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \leq \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v(t)\|.$$

Passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient, en utilisant (2.62) et (2.64)

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \to 0. \tag{2.65}$$

Similairement, en utilisant (2.63) et (2.64),

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v(t)\| \to 0. \tag{2.66}$$

De plus, par (2.54) et (2.64), on obtient

$$\|v(t) - v(s)\| \leq b_2(a(t) - a(s)). \tag{2.67}$$

Montrons à présent que $(\dot{v}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{v}$ dans $L^1(I, H)$.
On a par la relation (2.51), $(\dot{v}_n)_n$ est intégrablement bornée. Alors on peut lui en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers une application $w \in L^1(I, H)$.
Par le même procédé (pour $(\dot{u}_n)_n$), on déduit que $v$ est absolument continue et $\dot{v} \equiv w$ *p.p.*
Montrons la convergence faible des suites $(y_n)_n$ et $(x_n)_n$ dans $L^1(I, H)$.
En utilisant les relations (2.37), (2.38), (2.31) et (2.32), on obtient pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\|x_n(t)\| &\leq \frac{1}{a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n, v_i^n)\| ds\right) \\
&\leq l + M_F(1 + 2l) =: M_1,
\end{aligned} \tag{2.68}$$

i.e., la suite $(x_n)_n$ est intégrablement bornée alors, par la Proposition 1.4.12 elle est $\sigma(L^1, L^\infty)$-relativement compacte, donc on peut lui en extraire une sous suite qui converge

faiblement dans $L^1(I,H)$ vers une application $x \in L^1(I,H)$.
De plus,

$$\begin{aligned}\|y_n(t)\| &\leq \frac{1}{a(t_{i+1}^n)-a(t_i^n)}\left(\|v_{i+1}^n - v_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\|g(s,u_i^n,v_i^n)\|ds\right)\\ &\leq l + M_G(1+2l) =: M_2, \qquad (2.69)\end{aligned}$$

c'est-à-dire, la suite $(y_n)_n$ est intégrablement bornée alors, par la Proposition 1.4.12 elle est $\sigma(L^1,L^\infty)$-relativement compacte, donc, on peut lui en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $L^1(I,H)$ vers une application $y \in L^1(I,H)$.

**Etape 5. Existence d'une solution.**

Dans cette dernière étape, on va prouver que $(u,v)$ est une solution du problème $(\mathcal{S}_{F,G})$. Premièrement, on commence par montrer que pour tout $t \in I$,

$$u(t) \in D(A(t,v(t))) \; et \; v(t) \in D(B(t,u(t))).$$

Nous avons par $(H_A^1)$, (2.65), (2.9) et (2.10)

$$\begin{aligned}dis(A(\theta_n(t),v_n(\theta_n(t))),A(t,v(t))) &\leq |\beta(\theta_n(t))-\beta(t)| + \lambda\|v(\theta_n(t))-v(t)\|\\ &\leq \varepsilon_n + \lambda\|v_n(\theta_n(t))-v(t)\| \to 0,\; n\to\infty. \qquad (2.70)\end{aligned}$$

De plus, par $(H_A^2)$, (2.32) et (2.31), on a

$$\|A^0(\theta_n(t),v_n(\theta_n(t)))u_n(\theta_n(t))\| \leq c(1+\|u_n(\theta_n(t))\|+\|v_n(\theta_n(t))\|) \leq c(1+2l),$$

c'est-à-dire que la suite $(X_n)_n := \big(A^0(\theta_n(t),v_n(\theta_n(t)))u_n(\theta_n(t))\big)_n$ est bornée dans $H$ et comme la boule unité de $H$ est faiblement compacte par le Théorème 1.4.8, on déduit que la suite $(X_n)_n$ est faiblement relativement compacte dans $H$, alors on peut lui en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $H$. Par les relations (2.43), (2.57) et en appliquant le Lemme 1.8.25, il en résulte que $u(t) \in D(A(t,v(t)))$, pour tout $t \in I$.
De l'autre côté, par $(H_B^1)$, (2.58), (2.9) et (2.10), on a

$$\begin{aligned}dis(B(\theta_n(t),u_n(\varphi_n(t))),B(t,u(t)) &\leq |\eta(\varphi_n(t)-\eta(t)| + \alpha\|u(\varphi_n(t))-u(t)\| \qquad (2.71)\\ &\leq \varepsilon_n + \alpha\|u_n(\varphi_n(t))-u(t)\| \to 0,\; n\to\infty.\end{aligned}$$

Or $(H_B^2)$, (2.32) et (2.31), nous donnent

$$\|B^0(\theta_n(t),u_n(\varphi_n(t)))v_n(\theta_n(t))\| \leq d(1+\|u_n(\varphi_n(t))\|+\|v_n(\theta_n(t)\|) \leq d(1+2l)$$

c'est-à-dire, la suite $(\overline{X}_n)_n := \big(B^0(\theta_n(t),u_n(\varphi_n(t)))v_n(\theta_n(t))\big)_n$ est bornée dans $H$, par le Théorème 1.4.8, il existe une sous suite extraite de $(\overline{X}_n)_n$ qui converge faiblement dans $H$. Il résulte des relations (2.45), (2.65) et du Lemme 1.8.25 que $v(t) \in D(B(t,u(t)))$ pour

tout $t \in I$.
Dans la suite, on va montrer que $(u, v)$ vérifie les inclusions dans le problème $(\mathcal{S}_{F,G})$.
On a montré que la suite $(x_n)_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers une application $x \in L^1(I, H)$ et par $(H_3(F))$, (2.31) et (2.32) la suite $(f_n)_n$ est intégrablement bornée et donc $(f_n)_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\tilde{f} \in L^1(I, H)$ (voir Proposition 1.4.12). En appliquant le Théorème de Mazur (Théorème 1.4.9), on peut assurer l'existence d'une suite $(z_n)_n$ de combinaisons convexes de $(x_n)$, i.e., $z_n \in co\{x_k,\ k \geq n\}$ qui converge fortement vers $x$ dans $L^1(I, H)$. Aussi, il existe une suite $(b_n)_n$ de combinaisons convexes de $(f_n)_n$ i.e., $b_n \in co\{f_k,\ k \geq n\}$ qui converge fortement vers $\tilde{f} \in L^1(I, H)$. Alors, par le Théorème 1.5.2, il existe $N_1$ un sous-ensemble négligeable et une sous suite $(j_n)$ de $\mathbb{N}$ tel que $\forall t \in I \setminus N_1$, $(z_{j_n}(t))_n$ converge vers $x(t)$. Cette dernière convergence et la relation (2.49) impliquent que pour tout $t \in (I \setminus N_1 \cup N')$

$$\alpha_{j_n}(t) z_{j_n}(t) \to \dot{a}(t) x(t), \tag{2.72}$$

de sorte que, pour $t \in (I \setminus N_1 \cup N')$, $\dot{a}(t)x(t)$ est un point d'adhérence de $(\alpha_{j_n}(t) z_{j_n}(t))_n$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \dot{a}(t)x(t) \in \overline{(\alpha_{j_n}(t) z_{j_n}(t))_{n\in\mathbb{N}}} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{(\alpha_{j_n}(t) z_{j_n}(t))} \\ &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co\big\{\alpha_k(t) x_k(t), k \geq n\big\}} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{\alpha_k(t) x_k(t), k \geq n\big\}, \end{aligned}$$

ce qui implique, par le Théorème 1.2.9, que pour $t \in (I \setminus N_1 \cup N')$ et pour chaque $\zeta \in H$,

$$\begin{aligned} \big\langle \zeta, \dot{a}(t)x(t) \big\rangle &\leq \delta^*\big(\zeta, \{\alpha_k(t) x_k(t), k \geq n\}\big) \\ &= \sup_{k\geq n} \big\langle \zeta, \alpha_k(t) x_k(t) \big\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \big\langle \zeta, \alpha_k(t) x_k(t) \big\rangle, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\big\langle \zeta, \dot{a}(t)x(t) \big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \big\langle \zeta, \alpha_n(t) x_n(t) \big\rangle. \tag{2.73}$$

De la même manière, on aura l'existence de $N_2$ un sous-ensemble négligeable et une sous suite $(q_n)$ de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in I \setminus N_2$, on a $b_{q_n}(t) \to \tilde{f}(t)$, Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) \in \overline{(b_{q_n}(t))_{n\in\mathbb{N}}} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{(b_{q_n}(t)(t))} \\ &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co\big\{f_k(t), k \geq n\big\}} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{f_k(t), k \geq n\big\}. \end{aligned}$$

Donc par le Théorème 1.2.9, on a pour $t \in I \setminus N_2$ et pour chaque $\zeta \in H$,

$$\langle \zeta, \tilde{f}(t) \rangle \quad \leq \quad \limsup_{n\to\infty} \langle \zeta, f_n(t) \rangle. \tag{2.74}$$

Notons que $(\dot{u}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^1(I, H)$. Il vient par la relation (2.47) que pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) = \dot{a}(t)x(t) - \tilde{f}(t). \tag{2.75}$$

D'autre part, via la définition de $f_n$, on a pour presque tout $t \in I$,

$$f_n(t) \in F(t, u_n(\phi_n(t)), v_n(\phi_n(t))). \tag{2.76}$$

On obtient par (2.74), (2.76), pour tout $\zeta \in H$ et $t \in (I \setminus N_2)$

$$\langle \zeta, \tilde{f}(t) \rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\big(\zeta, F(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t)))\big). \tag{2.77}$$

Donc en vertu des relations (2.58), (2.66), (2.77), l'hypothèse $(H_2(F))$ et par utilisation de la proposition 1.1.12, il vient que

$$\langle \zeta, \tilde{f}(t) \rangle \leq \delta^*\big(\zeta, F(t, u(t), v(t))\big) \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.78}$$

Comme $F$ est à valeurs convexes fermées, on conclut de (2.78), en utilisant le Théorème 1.2.9

$$\tilde{f}(t) \in F(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.79}$$

Montrons maintenant que $-\dot{a}(t)x(t) \in A(t, v(t))u(t)$ $p.p.$ $t \in I$.
Comme $u(t) \in D(A(t, v(t)) \subset \overline{D(A(t, v(t))}$, alors par Lemme 1.8.23, il suffit de montrer que pour presque tout $t \in I$

$$\langle A^0(t, v(t))\zeta, \zeta - u(t) \rangle \geq \langle \dot{a}(t)x(t), u(t) - \zeta \rangle,\ \forall \zeta \in D(A(t, v(t)).$$

D'après $(H_A^2)$ et en utilisant (2.70), (2.43), on peut appliquer le Lemme 1.8.26 sur les opérateurs maximaux monotones $A_n = A\big(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big)$ et $A = A(t, v(t))$, pour assurer l'existence d'une suite $(\zeta_n)_n$ qui vérifie :

$$\xi_n \in D(A_n(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))),\quad \zeta_n \to \zeta \ \ et \ \ A^0(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))\zeta_n \to A^0(t, v(t))\zeta. \tag{2.80}$$

Pour $n \geq 1$, soit $I \backslash N_n$ l'ensemble sur lequel (2.44) est vérifiée. Par la monotonie de $A_n$, il vient

$$\langle A^0\big(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big)\zeta_n, \zeta_n - u_n(\theta_n(t)) \rangle \geq \langle \alpha_n(t)x_n(t), u_n(\theta_n(t)) - \zeta_n \rangle. \tag{2.81}$$

De plus, en évoquant (2.50), (2.47), (2.81) et (2.68) on aura pour tout $t \in I \setminus (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} N_n \cup N')$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_n(t)x_n(t), u(t)-\zeta\rangle &= \langle \alpha_n(t)x_n(t), u(t)+u_n(\theta_n(t))-u_n(\theta_n(t))+\zeta_n-\zeta_n-\zeta\rangle \\
&= \langle \alpha_n(t)x_n(t), u_n(\theta_n(t))-\zeta_n\rangle \\
&+ \langle \alpha_n(t)x_n(t), (u(t)-u_n(\theta_n(t)))-(\zeta-\zeta_n)\rangle \\
&\leq \langle A^0(\theta_n(t)), v_n(\theta_n(t))\zeta_n, \zeta_n-u_n(\theta_n(t))\rangle \\
&+ \|\alpha_n(t)x_n(t)\|(\|u(t)-u_n(\theta_n(t))\|+\|\zeta-\zeta_n\|) \\
&\leq \langle A^0(\theta_n(t)), v_n(\theta_n(t))\zeta_n, \zeta_n-u_n(\theta_n(t))\rangle \\
&+ M_1\alpha_t(\|u(t)-u_n(\theta_n(t))\|+\|\zeta-\zeta_n\|).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite supérieure et en utilisant (2.57) et (2.80), il s'en suit que

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \alpha_n(t)x_n(t), u(t)-\zeta\rangle \leq \langle A^0(t,v(t))\zeta, \zeta-u(t)\rangle.$$

On obtient par (2.73) que

$$\langle \dot{a}(t)x(t), u(t)-\zeta\rangle \leq \langle A^0(t,v(t))\zeta, \zeta-u(t)\rangle \tag{2.82}$$

on déduit que pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{a}(t)x(t) \in A(t,v(t))u(t).$$

Par conséquent, (via (2.75))

$$-\dot{u}(t) \in A(t,v(t))u(t)+\tilde{f}(t) \quad p.p.\ t\in I$$

et par (2.79), il en résulte

$$-\dot{u}(t) \in A(t,v(t))u(t)+F(t,u(t),v(t)) \quad p.p.\ t\in I.$$

Nous prouvons de la même manière la deuxième inclusion, en utilisant la convergence faible de $(y_n)_n$ dans $L^1(I,H)$ vers $y \in L^1(I,H)$ et la convergence faible de $(g_n)_n$ dans $L^1(I,H)$ vers $\tilde{g} \in L^1(I,H)$, par application du Théorème de Mazur 1.4.9, il existe $N_3$ un sous-ensemble négligeable tel que pour tout $t \in I \setminus (N_3 \cup N')$ et pour chaque $\zeta \in H$, on obtient par le Théorème 1.2.9

$$\big\langle \zeta, \dot{a}(t)y(t)\big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\big\langle \zeta, \alpha_n(t)y_n(t)\big\rangle. \tag{2.83}$$

Aussi, il existe $N_4$ un sous-ensemble négligeable tel que pour tout $t \in I \setminus N_4$, pour chaque $\zeta \in H$,

$$\big\langle \zeta, \tilde{g}(t)\big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\big\langle \zeta, g_n(t)\big\rangle. \tag{2.84}$$

Observons que $(\dot{v}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{v}$ dans $L^1(I, H)$, par la relation (2.48), il vient que

$$\dot{v}(t) = \dot{a}(t)y(t) - \tilde{g}(t) \quad p.p.t \in I. \tag{2.85}$$

D'autre part, par la définition de $g_n$, on a

$$g_n(t) \in G(t, u_n(\phi_n(t)), v_n(\phi_n(t))) \quad \forall t \in I. \tag{2.86}$$

Par (2.84), (2.86), (2.58), (2.63), $(H_2(G))$ et comme $G$ est à valeurs convexes fermées, on conclut que

$$\tilde{g}(t) \in G(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.87}$$

Montrons maintenant que $-\dot{a}(t)y(t) \in B(t, u(t))v(t),\ p.p.\ t \in I$.
Comme $v(t) \in D(B(t, u(t)) \subset \overline{D(B(t, u(t))}$, alors par Lemme 1.8.23, il suffit de montrer que

$$\langle B^0(t, u(t))\zeta, \zeta - v(t)\rangle \geq \langle \dot{a}(t)y(t), v(t) - \zeta\rangle \quad p.p.\ t \in I,\ \forall \zeta \in D(B(t, u(t)).$$

D'après $(H_B^2)$ et en utilisant (2.71), (2.58), on peut appliquer le Lemme 1.8.26 aux opérateurs maximaux monotones $B_n(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))$ et $B = B(t, u(t))$, pour assurer l'existence d'une suite $(\zeta_n)_n$ qui vérifie :

$$\zeta_n \to \zeta \ \ et \ \ B^0(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))\zeta_n \to B^0(t, u(t))\zeta. \tag{2.88}$$

Pour $n \geq 1$, soit $I \backslash N_n$ l'ensemble sur lequel (2.46) est vérifiée. Par la monotonie de $B_n$, (2.50) et (2.69) on aura pour tout $t \in I \backslash (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} N_n \cup N')$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_n(t)y_n(t), v(t) - \zeta\rangle \leq \langle B^0(\theta_n(t)), u_n(\varphi_n(t))\zeta_n, \zeta_n - v_n(\theta_n(t))\rangle \\ + M_2\alpha_t(\|v(t) - v_n(\theta_n(t))\| + \|\zeta - \zeta_n\|)\end{aligned}$$

Par passage à la limite supérieure et en utilisant (2.65), (2.88) et par (2.83), il en résulte

$$\langle \dot{a}(t)y(t), v(t) - \zeta\rangle \leq \langle B^0(t, u(t))\zeta, \zeta - v(t)\rangle \tag{2.89}$$

on déduit que

$$-\dot{a}(t)y(t) \in B(t, u(t))v(t),\ p.p.\ t \in I.$$

Ce qui est équivalent à

$$-\dot{v}(t) \in B(t, u(t))v(t) + \tilde{g}(t) \quad p.p.\ t \in I$$

et de (2.87), il vient que

$$-\dot{v}(t) \in B(t, u(t))v(t) + G(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

Par (2.59) et (2.67), cette solution satisfait

$$\|\dot{u}(t)\| \leq b\dot{a}(t), \quad \|\dot{v}(t)\| \leq b\dot{a}(t) \quad p.p.\ t \in I, \tag{2.90}$$

avec $b := \max\{b_1, b_2\}$. ■

Quelques remarques concernant notre premier Théorème d'existence s'imposent.

**Remarque 2.2.2**
*Dans la preuve du Théorème 2.2.1, l'hypothèse $\alpha\lambda < 1$ dans $(H_1(B))$ était nécessaire pour obtenir $R < 1$, et par suite conclure les estimations dans les relations (2.31) et (2.32). Cette inégalité ne peut être étendue. En effet, dans le cas d'une seule inclusion différentielle régie par l'opérateur maximal monotone particulier $N_{C(t,x)}$, le cône normal à un ensemble convexe fermé et non vide $C(t,x)$, qui dépend du temps et de l'état et satisfait l'hypothèse :*

$$d_H\big(C(t,x), C(s,y)\big) \leq |\psi(t) - \psi(s)| + \rho\|x - y\| \quad \forall (t,x),(s,y) \in I \times H,$$

*où $\psi$ est une fonction réelle absolument continue et $\rho$ une constante strictement positive, les auteurs dans [57] ont montré, par des exemples concrets, que ce problème peut ne pas avoir de solution lorsque $\rho \geq 1$.*

**Remarque 2.2.3**
*Comme il a été souligné dans l'introduction, le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble non vide, fermé et convexe $C(t,x) \subset H$ au point $y \in H$ est un opérateur maximal monotone. De plus, pour tous $t, s \in I$ et $x, y \in H$,*

$$dis(N_{C(t,x)}(\cdot), N_{C(s,y)}(\cdot)) = d_H\big(C(t,x), C(s,y)\big).$$

*Nous pouvons donc dériver le corollaire suivant, si nous prenons dans le Théorème 2.2.1, $B(t,x) = N_{C(t,x)}$, où $C : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées, satisfaisant les hypothèses suivantes :*

$(H_C^1)$ *Il existe une constante réelle strictement positive $\alpha$ et une fonction positive et strictement croissante $\eta \in W^{1.1}(I, \mathbb{R})$ tel que*

$$|d(z, C(t,x) - d(z, C(s,y))| \leq |\eta(t) - \eta(s)| + \alpha\|x - y\|, \forall t, s \in I, \forall x, y \in H. \tag{2.91}$$

$(H_C^2)$ *Pour tout sous ensemble borné $K \subset H$, l'ensemble $C(I \times K)$ est relativement boule-compact.*

*Le résultat de ce corollaire a été établi dans [20] avec $\beta, \eta \in W^{1,2}(I, H)$, et dans [13], le même résultat a été obtenu en affaiblissant ces hypothèses, dans la mesure où les auteurs ont considéré $\beta, \eta$ comme des applications absolument continues, c'est-à-dire $\beta, \eta \in W^{1,1}(I, H)$, mais avec l'hypothèse supplémentaire que les domaines des opérateurs $A(t, x)$ sont fixes $\big((D(A(t, x)) = D\big)$, pour tout $(t, x) \in I \times H$. Notre résultat couvre les résultats dans [20, 13] puisque nous considérons des opérateurs dépendant du temps et de l'état avec des domaines dépendant du temps et de l'état et $\beta, \eta \in W^{1,1}(I, H)$.*

**Corollaire 2.2.4** *Soit pour tout $(t, x) \in I \times H$, $A(t, x) : D(A(t, x)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H_A^1)$, $(H_A^2)$ et $(H_A^3)$. Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées vérifiant $(H_C^1), (H_C^2)$. Soit $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ (resp. $G : I \times H \times H \rightrightarrows H$) une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées vérifiant $(H_1(F)), (H_2(F))$ et $(H_3(F))$ (resp. $(H_1(G)), (H_2(G))$ et $(H_3(G))$). Alors, pour tout $(u_0, v_0) \in D(A(0, v_0)) \times C(0, u_0)$, il existe $(u, v) : I \to H \times H$, solution absolument continue du problème suivant :*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, v(t))u(t) + F(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D(A(t, v(t)), \ \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + G(t, u(t), v(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ v(t) \in C(t, u(t)), \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.92}$$

*De plus, cette solution satisfait l'estimation suivante :*

$$\max(\|\dot{u}(t)\|, \|\dot{v}(t)\|) \leq b(1 + \dot{\eta}(t) + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.\ t \in I, \tag{2.93}$$

*pour une certaine constante positive $b$.*

**Remarque 2.2.5**
*Remarquons que dans le cas où $H$ est un espace de dimension finie, i.e., $H = \mathbb{R}^d (d \geq 1)$, l'hypothèse de boule-compacité sur les domaines des opérateurs $A(t, x)$ et $B(t, x)$ n'est plus nécessaire car elle est obtenue directement par la structure de l'espace (voir le point 2) Remarque 1.4.4).*

## 2.3 Application à un problème de minimisation.

Pour traiter ce problème on a besoin que notre solution soit unique. Pour cela, on commence par considérer des opérateurs dépendant uniquement du temps, ainsi que des perturbations univoques, c'est-à-dire que pour tout $t \in I, A(t) : D(A(t)) \rightrightarrows H$ (resp. $B(t) : D(B(t)) \rightrightarrows H$) est un opérateur maximal monotone, et soient $f, g : I \times H \times H \to H$ deux applications mesurables sur $I$. Supposons les hypothèses suivantes :

**Hypothèses (2)**

$(H_1(A))$ Il existe une fonction positive et strictement croissante $\beta \in W^{1.1}(I, \mathbb{R})$ tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| \quad \forall t, s \in I. \tag{2.94}$$

$(H_2(A))$ Il existe une constante réelle positive $c$ tel que

$$\|A^0(t)y\| \leq c(1 + \|y\|) \quad \forall (t, y) \in I \times D(A(t)). \tag{2.95}$$

$(H_3(A))$ Pour tout $t \in I$, l'ensemble $D(A(t))$ est relativement boule-compact.

$(H_1(B))$ Il existe une fonction positive et strictement croissante $\eta \in W^{1.1}(I, \mathbb{R})$ tel que

$$dis(B(t), B(s)) \leq |\eta(t) - \eta(s)| \quad \forall t, s \in I. \tag{2.96}$$

$(H_2(B))$ Il existe une constante réelle positive $d$ tel que

$$\|B^0(t)y\| \leq d(1 + \|y\|) \quad \forall (t, y) \in I \times D(B(t)). \tag{2.97}$$

$(H_3(B))$ Pour tout $t \in I$, l'ensemble $D(B(t))$ est relativement boule-compact.

$(H_f^1)$ Il existe une constante réelle strictement positive $L_f$ tel que

$$\|f(t, x, y)\| \leq L_f(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \forall (t, x, y) \in I \times H \times H. \tag{2.98}$$

$(H_f^2)$ Il existe une fonction positive $\omega_f \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\|f(t, x, y) - f(t, x', y')\| \leq \omega_f(t)(\|x - x'\| + \|y - y'\|) \quad \forall (t, x, y), (t, x', y') \in I \times H \times H. \tag{2.99}$$

$(H_g^1)$ Il existe une constante réelle strictement positive $L_g$ tel que

$$\|g(t, x, y)\| \leq L_g(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \forall (t, x, y) \in I \times H \times H. \tag{2.100}$$

$(H_g^2)$ Il existe une fonction positive $\omega_g \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\|g(t, x, y) - g(t, x', y')\| \leq \omega_g(t)(\|x - x'\| + \|y - y'\|) \quad \forall (t, x, y), (t, x', y') \in I \times H \times H. \tag{2.101}$$

**Proposition 2.3.1**

*Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ (resp. $B(t) : D(B(t)) \subset H \rightrightarrows H$) un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H_1(A))$, $(H_2(A))$ et $(H_3(A))$ (resp. $(H_1(B))$, $(H_2(B))$ et $(H_3(B))$). Soit $f : I \times H \times H \to H$ (resp. $g : I \times H \times H \to H$) mesurable sur $I$, satisfaisant $(H_f^1)$ et $(H_f^2)$ (resp. $(H_g^1)$ et $(H_g^2)$).*

*Alors, pour tout $(u_0, v_0) \in D(A(0)) \times D(B(0))$, il existe une unique solution $(u,v) : I \to H \times H$, absolument continue, du problème suivant*

$$(\mathcal{S}_{f,g}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t),v(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \ \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in B(t)v(t) + g(t,u(t),v(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ v(t) \in D(B(t)) \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0. \end{cases}$$

*De plus, nous avons l'estimation*

$$\max(\|\dot{u}(t)\|, \|\dot{v}(t)\|) \leq b(1 + \dot{\eta}(t) + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.\ t \in I, \tag{2.102}$$

*où $b$ est une constante positive.*

**Preuve**

La preuve de l'existence est une adaptation simple de la preuve du Théorème 2.2.1. Montrons alors l'unicité. Soient $(u_i, v_i)$ $(i = 1,2)$, deux solutions du problème $(\mathcal{S}_{f,g})$. Par la monotonie de $A(t)$, on obtient pour presque tout $t \in I$,

$$\langle -\dot{u}_1(t) - f(t,u_1(t),v_1(t)) + \dot{u}_2(t) + f(t,u_2(t),v_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq \langle f(t,u_2(t),v_2(t)) - f(t,u_1(t),v_1(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle.$$

Sachant que

$$\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle u_1(t) - u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 2\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle,$$

en utilisant $(H_f^2)$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 &\leq \|f(t,u_2(t),v_2(t)) - f(t,u_1(t),v_1(t))\|\|u_1(t) - u_2(t)\| \qquad (2.103)\\ &\leq \omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|\big(\|u_1(t) - u_2(t)\| + \|v_1(t) - v_2(t)\|\big) \\ &= \omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|\|v_1(t) - v_2(t)\| \\ &\leq \omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \frac{1}{2}\omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \frac{1}{2}\omega_f(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 \\ &= \frac{3}{2}\omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \frac{1}{2}\omega_f(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2. \qquad (2.104) \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant la monotonie de $B(t)$, on obtient pour presque tout $t \in I$

$$\langle -\dot{v}_1(t) - g(t, u_1(t), v_1(t)) + \dot{v}_2(t) + v(t, u_2(t), v_2(t)), v_1(t) - v_2(t)\rangle \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\langle \dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t), v_1(t) - v_2(t)\rangle \leq \langle g(t, u_2(t), v_2(t)) - g(t, u_1(t), v_1(t)), v_1(t) - v_2(t)\rangle.$$

En utilisant $(H_g^2)$, il vient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 &\leq \omega_g(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|\big(\|u_1(t) - u_2(t)\| + \|v_1(t) - v_2(t)\|\big)\\ &= \omega_g(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \omega_g(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|\|v_1(t) - v_2(t)\|\\ &\leq \omega_g(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \frac{1}{2}\omega_g(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \frac{1}{2}\omega_g(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2\\ &= \frac{3}{2}\omega_g(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \frac{1}{2}\omega_g(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2. \qquad (2.105)\end{aligned}$$

Sommant les inégalités (2.103) et (2.105), en posant $\omega(t) = \max\{3\omega_f(t) + \omega_g(t), 3\omega_g(t) + \omega_f(t)\}$, on trouve que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|v_1(t) - v_2(t)\|^2\Big) &\leq 3\omega_f(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \omega_f(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2\\ &+ 3\omega_g(t)\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \omega_g(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2\\ &\leq (3\omega_f(t) + \omega_g(t))\|u_1(t) - u_2(t)\|^2\\ &+ (3\omega_g(t) + \omega_f(t))\|v_1(t) - v_2(t)\|^2\\ &\leq \omega(t)(\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|v_1(t) - v_2(t)\|^2).\end{aligned}$$

On obtient, en intégrant sur $[0, t]$, en tenant en compte le fait que $\|u_2(0) - u_1(0)\| = \|v_2(0) - v_1(0)\| = 0$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|v_1(t) - v_2(t)\|^2 \leq \int_0^t \omega(s)(\|u_1(s) - u_2(s)\|^2 + \|v_1(s) - v_2(s)\|^2)ds.$$

Par application du Lemme de Gronwall 1.10.3, on aura

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq 0 \text{ et } \|v_1(t) - v_2(t)\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in I.$$

i.e., $u_1 \equiv u_2$ et $v_1 \equiv v_2$.
D'où, l'unicité de la solution. ■

Dans la suite, fixons $\xi_0 \in H$, et considérons l'ensemble $\mathcal{E} \subset W^{1.1}(I, H)$ défini par :

$$\mathcal{E} = \{\xi \in C(I, H) : \xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \dot{\xi}(s)ds \ \forall t \in I, \dot{\xi}(t) \in \triangle \ p.p.t \in I\},$$

où $\triangle$ est un sous-ensemble convexe compact de $H$ et sans perte de généralité on peut prendre $0 \in \triangle$. Alors, $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble convexe compact de $C(I, H)$.
En effet, $\triangle$ étant un compact de $H$ alors, il existe une constante positive $\rho > 0$ tel que

$$\triangle \subset \rho \overline{B}_H. \tag{2.106}$$

Soient $w_1, w_2 \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in [0,1]$, donc pour tout $t \in I$, $w_1(t) = \xi_0 + \int_0^t \dot{w}_1(s)ds$ et $w_2(t) = \xi_0 + \int_0^t \dot{w}_2(s)ds$ , avec $\dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t) \in \triangle$ *p.p.* $t \in I$. Puisque $\triangle$ est convexe, il vient que $\lambda\dot{w}_1(t) + (1-\lambda)\dot{w}_2(t) \in \triangle$ *p.p.*, de plus

$$\begin{aligned}\lambda w_1(t) + (1-\lambda)w_2(t) &= \lambda(\xi_0 + \int_0^t \dot{w}_1(s)ds) + (1-\lambda)(\xi_0 + \int_0^t \dot{w}_2(s)ds) \\ &= \xi_0 + \int_0^t \lambda\dot{w}_1(s) + (1-\lambda)\dot{w}_2(s)ds\end{aligned}$$

d'où, la convexité de $\mathcal{E}$. Soit $v \in \mathcal{E}$, pour tous $t, s \in I$ $(s \leq t)$, on a

$$\begin{aligned}\|v(t) - v(s)\| &= \|\xi_0 + \int_0^t \dot{v}(\tau)d\tau - (\xi_0 + \int_0^s \dot{v}(\tau)d\tau)\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{v}(\tau)\|d\tau \leq \int_s^t \rho d\tau \leq \rho(t-s)\end{aligned}$$

ceci montre l'équi-continuité de $\mathcal{E}$.
Montrons que pour tout $t \in I$, $\mathcal{E}(t) = \{\xi(t),\ \xi \in \mathcal{E}\}$ est relativement compact.
Soit $t \in ]0,T]$ et soit $\xi(t) \in \mathcal{E}(t)$ alors, $\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \dot{\xi}(s)ds$, avec $\dot{\xi}(s) \in \triangle$ *p.p.* $s \in I$. Donc, il existe un sous-ensemble $N \subset [0,t]$ de mesure de Lebesgue nulle, tel que

$$\dot{\xi}(s) \in \triangle\ \forall s \in [0,t] \setminus N,\ i.e.,\ \dot{\xi}([0,t] \setminus N) \subset \triangle.$$

Par application du Théorème 1.2.10, on obtient

$$\frac{1}{\lambda([0,t] \setminus N)} \int_{[0,t]\setminus N} \dot{\xi}(s)ds \in \overline{co}(\triangle) = \triangle$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{t}\int_0^t \dot{\xi}(s)ds \in \triangle$$

ceci implique que,

$$\int_0^t \dot{\xi}(s)ds \in t\triangle \subset T\triangle, \tag{2.107}$$

où la dernière inclusion découle du fait que $\triangle$ est convexe et contient 0. En effet, soit $x \in t\triangle$ alors, $x = tx'$, avec $x' \in \triangle$ donc, $\frac{x}{t} \in \triangle$ et comme $0 \in \triangle$ par la convexité de $\triangle$, on aura

$$\frac{t}{T}.\frac{x}{t} + (1 - \frac{t}{T})0 \in \triangle,$$

par conséquent,

$$\frac{x}{T} \in \triangle, \ i.e., \ x \in T\triangle.$$

D'où, $t\triangle \subset T\triangle$.
De (2.107), il vient que

$$\xi_0 + \int_0^t \dot{\xi}(s)ds \in \xi_0 + T\triangle := \triangle'.$$

On déduit que $\mathcal{E}(t) = \{\xi(t), \ \xi \in \mathcal{E}\}$ est inclus dans l'ensemble convexe compact $\triangle'$, donc il est relativement compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà 1.4.10, $\mathcal{E}$ est relativement compact. Il reste à montrer qu'il est fermé.
Soit $(w_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}$, qui converge uniformément vers une application $w \in C(I, H)$, i.e., pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in I$

$$w_n(t) = \xi_0 + \int_0^t \dot{w}_n(s)ds, \ \ avec \ \ \dot{w}_n(t) \in \triangle, \ p.p. \ t \in I.$$

Comme $\|\dot{w}_n(t)\| \leq \rho$, elle est intégrablement bornée, alors on peut supposer que $(\dot{w}_n)_n$ converge faiblement vers $z \in L^1(I, H)$. Par suite, pour tout $\xi \in L^\infty(I, H)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{w}_n, \xi\rangle = \langle z, \xi\rangle$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle \dot{w}_n(s), \xi(s)\big\rangle ds = \int_0^T \big\langle z(s), \xi(s)\big\rangle ds.$$

En particulier, si on prend pour $t \in [0, T]$ et pour $(e_j)_j$ une base de $H$, $\xi(\cdot) = 1_{[0,t]}(\cdot)e_j$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{w}_n(s), 1_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds = \int_0^T \Big\langle z(s), 1_{[0,t]}(s)e_j \Big\rangle ds$$

il s'en suit

$$\lim_{n\to\infty} \Big\langle \int_0^t \dot{w}_n(s), e_j \Big\rangle ds = \Big\langle \int_0^t z(s), e_j \Big\rangle ds$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{w}_n(s)ds = \int_0^t z(s)ds. \tag{2.108}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(t) = \xi_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{w}_n(s)ds$$

d'où

$$w(t) = \xi_0 + \int_0^t z(s)ds.$$

Par le Théorème 1.1.14, $w$ est absolument continue et $\dot{w} = z \ p.p. \ t \in I$. De plus, comme $(\dot{w}_n)_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{w} \in L^1(I, H)$ alors, par application du

Théorème de Mazur, il existe une suite $(b_n)_n$ de combinaisons convexes de $(\dot{w}_n)_n$, i.e., $b_n \in \overline{co}\{\dot{w}_k,\ k \geq n\}$, qui converge fortement vers $\dot{w}$. Alors, par le Théorème 1.5.2, il existe $N_1$ un sous-ensemble négligeable et une sous suite $(p_n)_n$ de $\mathbb{N}$ tel que $\forall t \in I \setminus N_1$, $(b_{p_n}(t))_n$ converge vers $\dot{w}(t)$. Par compacité de $\triangle$, il en résulte que $\dot{w}(t) \in \triangle$ *p.p.* $t \in I$.
On conclut que $\mathcal{E}$ est fermé. D'où la compacité de $\mathcal{E}$ dans $C(I, H)$. ■

De la Proposition 2.3.1, nous pouvons déduire le résultat utile suivant, qui peut être appliqué à un problème d'optimisation en théorie du contrôle.

**Proposition 2.3.2** *Soit pour tout $t \in I$, $A(t,x) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ (resp. $B(t,x) : D(B(t)) \subset H \rightrightarrows H$) un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H_A^1)$, $(H_A^2)$ et $(H_A^3)$ (resp. $(H_B^1)$, $(H_B^2)$ et $(H_B^3)$). Soit $f : I \times H \times H \to H$ (resp. $g : I \times H \times H \to H$) une application mesurable sur $I$ et satisfaisant $(H_f^1)$ et $(H_f^2)$ (resp. $(H_g^1)$ et $(H_g^2)$).*
*Alors, pour tout $\xi \in \mathcal{E}$ et $(u_0, v_0) \in D(A(0,\xi_0)) \times D(B(0,\xi_0))$, il existe une unique solution $(u_\xi, v_\xi) : I \to H \times H$ absolument continue du problème suivant*

$$(\mathcal{P}_\xi) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,\xi(t))u(t) + f(t,u(t),v(t)), \ p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D(A(t,\xi(t))), \ \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in B(t,\xi(t))v(t) + g(t,u(t),v(t)), \ p.p.\ t \in I \\ v(t) \in D(B(t,\xi(t))), \ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0. \end{cases}$$

*avec*

$$\max(\|\dot{u}_\xi(t)\|, \|\dot{v}_\xi(t)\|) \leq b(1 + \dot{\eta}(t) + \dot{\beta}(t)) =: \psi(t) \quad p.p., t \in I, \tag{2.109}$$

*où $b$ est une constante positive qui ne dépend pas de $\xi$.*

**Preuve**
Nous appliquons la Proposition 2.3.1 aux opérateurs dépendant du temps $A_\xi(t) = A(t,\xi(t))$ et $B_\xi(t) = B(t,\xi(t))$, pour obtenir une solution unique absolument continue du problème $(\mathcal{P}_\xi)$.
On commence par prouver que pour tout $\xi \in \mathcal{E}$ et tout $t \in I$, $A_\xi(t) = A(t,\xi(t))$ vérifie les hypothèses $(H_1(A))$, $(H_2(A))$ et $(H_3(A))$. Pour tous $t, s \in I$ $(s < t)$, on a

$$\begin{aligned} dis\big(A_\xi(t), A_\xi(s)\big) &= dis\big(A(t,\xi(t)), A(s,\xi(s))\big) \\ &\leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda\|\xi(t) - \xi(s)\| \\ &\leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda \int_s^t \dot{\xi}(\tau)d\tau \\ &\leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda\rho(t-s) =: |\gamma(t) - \gamma(s)| \end{aligned}$$

avec, $\gamma(t) = \beta(t) + \lambda\rho t$ et $\gamma \in W^{1.1}(I, \mathbb{R})$.
De même, pour tous $t, s \in I$ $(s < t)$, on a

$$\begin{aligned} dis\big(B_\xi(t), B_\xi(s)\big) &= dis\big(B(t, \xi(t)), B(s, \xi(s))\big) \\ &\leq |\eta(t) - \eta(s)| + \alpha\rho(t-s) =: |\overline{\gamma}(t) - \overline{\gamma}(s)|. \end{aligned}$$

avec, $\overline{\gamma}(t) = \eta(t) + \alpha\rho t$ et $\overline{\gamma} \in W^{1.1}(I, \mathbb{R})$.
Aussi, nous avons pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|A^0_\xi(t)x\| = \|A^0(t, \xi(t))x\| &\leq c(1 + \|\xi(t)\| + \|x\|) \\ &\leq c(1 + \|\xi_0\| + \rho T + \|x\|) \\ &\leq c'(1 + \|x\|) \end{aligned}$$

avec $c' := c(1 + \|\xi_0\| + \rho T)$.
De la même manière, nous avons pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|B^0_\xi(t)x\| = \|B^0(t, \xi(t))x\| &\leq d(1 + \|\xi(t)\| + \|x\|) \\ &\leq d'(1 + \|x\|) \end{aligned}$$

avec $d' := d(1 + \|\xi_0\| + \rho T)$.
Donc, il nous reste à montrer que $A_\xi(t)$ vérifie l'hypothèse $(H_3(A))$. On a $D(A_\xi(t)) = D(A(t, \xi(t)))$ et

$$\|\xi(t)\| \leq \|\xi_0\| + \rho T =: M$$

i.e., $\xi(t) \in M\overline{B}$ ce qui implique que $D(A(t, \xi(t))) \subset D(I \times M\overline{B})$, et par $(H^3_A)$ est relativement boule-compact, d'où $D(A_\xi(t))$ l'est aussi.
Similairement, on montre aisément que pour tout $\xi \in \mathcal{E}$ et tout $t \in I$, $B_\xi(t) = B(t, \xi(t))$ vérifie l'hypothèse $(H_3(B))$. On conclut par l'application de la Proposition 2.3.1, que le problème $(\mathcal{P}_\xi)$ admet une solution unique absolument continue. De plus, on a l'estimation (2.109). En se référant au Théorème 2.2.1, $b$ dépend des données : $\|u_0\|, \|v_0\|, \gamma, \overline{\gamma}, L_f, L_g, c', d'$ et $T$, et comme $c', d', \gamma, \overline{\gamma}$ sont indépendant de $\xi(\cdot)$ alors, $b$ dépend seulement de $\|u_0\|, \|v_0\|, \beta, \eta$, $L_f, L_g, \rho, c, d$ et $T$. ■

Le résultat suivant est un outil important dans notre preuve.

**Théorème 2.3.3** *(Théorème 8.1.6 dans [31])*
*Soient $(\Omega, S, P)$ un espace de probabilité, $E$ un espace de Banach réflexif séparable et $X$ un espace métrique. Soient $L : \Omega \times X \times E \to [0, +\infty[$ une application mesurable et semi-continue inférieurement, $(u_n)_n$ une suite d'applications mesurables de $\Omega$ vers $X$ qui converge en mesure vers une certaine application $u_\infty$ et soit $(v_n)_n$ une suite dans*

$L^1(\Omega, E)$ *qui,* $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$*-converge vers une application* $v_\infty \in L^1(\Omega, E)$*. Supposons que* $\big(L(t, u_n(t), v_n(t))\big)_n$ *est uniformément intégrable et que* $L(t, u_\infty(t), \cdot)$ *est convexe sur* $E$*. Alors*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega L(t, u_n(t), v_n(t))dP(t) \geq \int_\Omega L(t, u_\infty(t), v_\infty(t))dP(t). \tag{2.110}$$

Maintenant, nous sommes en mesure de présenter une application des résultats ci-dessus à un problème de minimisation.

**Théorème 2.3.4** *Soit pour tout* $(t, x) \in I \times H$, $A(t, x) : D(A(t, x)) \subset H \rightrightarrows H$ *(resp.* $B(t, x) : D(B(t, x)) \subset H \rightrightarrows H$*) un opérateur maximal monotone satisfaisant* $(H^1_A)$, $(H^2_A)$ *et* $(H^3_A)$ *(resp.* $(H^1_B)$, $(H^2_B)$ *et* $(H^3_B)$*). Soit* $f : I \times H \times H \to H$ *(resp.* $g : I \times H \times H \to H$*) satisfaisant* $(H^1_f)$ *et* $(H^2_f)$ *(resp.* $(H^1_g)$ *et* $(H^2_g)$*).*
*Soit* $L : I \times H \times H \times H \times H \to [0, \infty[$ *une application semi-continue inférieurement, tel que* $L(t, x, y, \cdot, \cdot)$ *est convexe sur* $H \times H$*, pour tout* $(t, x, y) \in I \times H \times H$*. Alors, pour* $(u_0, v_0) \in D(A(0, \xi_0)) \times D(B(0, \xi_0))$*, le problème de minimisation de la fonction coût*

$$\int_0^T L(t, u_\xi(t), v_\xi(t), \dot{u}_\xi(t), \dot{v}_\xi(t))dt$$

*admet une solution optimale, où* $(u_\xi, v_\xi)$ *est la solution absolument continue unique du problème* $(\mathcal{P}_\xi)$ *associée au contrôle* $\xi \in \mathcal{E}$*. Autrement dit, il existe une solution optimal du problème de minimisation*

$$\inf_{\xi\in\mathcal{E}} \int_0^T L(t, u_\xi(t), v_\xi(t), \dot{u}_\xi(t), \dot{v}_\xi(t))dt$$

*où* $(u_\xi, v_\xi)$ *est la solution unique du problème* $(\mathcal{P}_\xi)$*.*

**Preuve**
Soit $(\xi_n)_n \subset \mathcal{E}$ une suite minimisante, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T L(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t), \dot{u}_{\xi_n}(t), \dot{v}_{\xi_n}(t))dt = \inf_{\xi\in\mathcal{E}} \int_0^T L(t, u_\xi(t), v_\xi(t), \dot{u}_\xi(t), \dot{v}_\xi(t))dt. \tag{2.111}$$

En effet, posons

$$m := \inf_{\xi\in\mathcal{E}} \int_0^T L(t, u_\xi(t), v_\xi(t), \dot{u}_\xi(t), \dot{v}_\xi(t))dt.$$

Par la caractérisation de la borne inférieure, $\forall n > 0, \exists \xi_n \in \mathcal{E}$ tel que :

$$m \leq \int_0^T L(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t), \dot{u}_{\xi_n}(t), \dot{v}_{\xi_n}(t))dt < m + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^T L(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t), \dot{u}_{\xi_n}(t), \dot{v}_{\xi_n}(t))dt = m.$$

i.e., $(\xi_n)_n$ est une suite minimisante.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, (u_{\xi_n}, v_{\xi_n})$ est une solution absolument continue et unique du problème $(\mathcal{P}_{\xi_n})$, il en résulte que

$$-\dot{u}_{\xi_n}(t) \in A(t, \xi_n(t))u_{\xi_n}(t) + f(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t)) \; p.p. \; t \in I \tag{2.112}$$

$$u_{\xi_n}(t) \in D(A(t, \xi_n(t))) \; \forall ;t \in I, \; u_{\xi_n}(0) = u_0$$

et

$$-\dot{v}_{\xi_n}(t) \in B(t, \xi_n(t))v_{\xi_n}(t) + g(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t)) \; p.p. \; t \in I \tag{2.113}$$

$$v_{\xi_n}(t) \in D(B(t, \xi_n(t))) \; \forall \; t \in I, \; v_{\xi_n}(0) = v_0.$$

De plus, $\dot{\xi}_n(t) \in \triangle \subset \rho\overline{B}_H$. Alors $\|\xi_n(t)\| \leq \xi_0 + \rho T =: M$ pour tout $t \in I$. Ceci implique que $(u_{\xi_n}(t))_n \subset D(A(I \times M\overline{B}))$ et $(v_{\xi_n}(t))_n \subset D(B(I \times M\overline{B}))$, avec

$$\|\dot{u}_{\xi_n}(t)\| \leq \psi(t), \qquad \|\dot{v}_{\xi_n}(t)\| \leq \psi(t) \quad p.p. \; t \in I \tag{2.114}$$

où $\psi \in L^1(I, \mathbb{R})$. Alors, par le Théorème d'Ascoli-Arzélà 1.4.10, on aura

(1) $(u_{\xi_n})_n$ converge uniformément vers une application $\overline{u} \in C(I, H)$.

(2) $(\dot{u}_{\xi_n})_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{\overline{u}}$.

(3) $(v_{\xi_n})_n$ converge uniformément vers une application $\overline{v} \in C(I, H)$.

(4) $(\dot{v}_{\xi_n})_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{\overline{v}}$.

De l'autre coté, comme $\mathcal{E}$ est compact dans $C(I, H)$, on peut extraire de $(\xi_n)_n$ une sous suite notée aussi $(\xi_n)_n$ et qui converge uniformément vers une application $\overline{\xi} \in \mathcal{E}$.
Maintenant, on applique le Théorème 2.3.3 qui concerne la semi-continuité inférieure de la fonction intégrable $L$, nous obtenons

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T L(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t), \dot{u}_{\xi_n}(t), \dot{v}_{\xi_n}(t))dt \geq \int_0^T L(t, \overline{u}(t), \overline{v}(t), \dot{\overline{u}}(t), \dot{\overline{v}}(t))dt. \tag{2.115}$$

Il nous reste à montrer que $(\overline{u}, \overline{v}) = (u_{\overline{\xi}}, v_{\overline{\xi}})$, i.e.

$$\overline{u}(t) \in D\big(A(t, \overline{\xi}(t))\big) \; \forall t \in I, \; \overline{u}(0) = u_0.$$

$$-\dot{\overline{u}}(t) \in A\big(t, \overline{\xi}(t)\big)\overline{u}(t) + f(t, \overline{u}(t), \overline{v}(t)) \; p.p. \; t \in I$$

$$\overline{v}(t) \in D\big(B(t, \overline{\xi}(t))\big) \; \forall t \in I, \; \overline{v}(0) = v_0.$$

$$-\dot{\overline{v}}(t) \in B\big(t, \overline{\xi}(t)\big)\overline{v}(t) + g(t, \overline{u}(t), \overline{v}(t)) \; p.p. \; t \in I.$$

En effet, il est clair, en utilisant (1) et (3) que

$$\lim_{n\to\infty} u_{\xi_n}(0) = \overline{u}(0) = u_0 \;\text{ et }\; \lim_{n\to\infty} v_{\xi_n}(0) = \overline{v}(0) = v_0.$$

Maintenant, en utilisant $(H_f^2)$, $(H_g^2)$ et les propriétés (1), (3), on obtient pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} f(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t)) = f(t, \overline{u}(t), \overline{v}(t))$$

et

$$\lim_{n\to\infty} g(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t)) = g(t, \overline{u}(t), \overline{v}(t)).$$

De plus, par (2.114), on a

$$\|u_{\xi_n}(t)\| \leq \|u_0\| + \|\psi(\cdot)\|_{L^1} \quad \forall t \in I$$

et

$$\|v_{\xi_n}(t)\| \leq \|v_0\| + \|\psi(\cdot)\|_{L^1} \quad \forall t \in I.$$

Moyennant les hypothèses $(H_f^1)$ et $(H_g^1)$, on trouve

$$\begin{aligned}\|f(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t))\| &\leq L_f(1 + \|u_{\xi_n}(t)\| + \|v_{\xi_n}(t)\|)\\ &\leq L_f(1 + \|u_0\| + \|v_0\| + 2\|\psi\|_{L^1})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|g(t, u_{\xi_n}(t), v_{\xi_n}(t))\| &\leq L_g(1 + \|u_{\xi_n}(t)\| + \|v_{\xi_n}(t)\|)\\ &\leq L_g(1 + \|u_0\| + \|v_0\| + 2\|\psi\|_{L^1}).\end{aligned}$$

Le Théorème 1.5.1 assure que $(f(\cdot, u_{\xi_n}(\cdot), v_{\xi_n}(\cdot)))_n$ converge fortement dans $L^1(I, H)$ vers $f(\cdot, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$ et donc converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers la même limite. En utilisant la propriété (2), on aura $(\dot{u}_{\xi_n}(\cdot) + f(\cdot, u_{\xi_n}(\cdot), v_{\xi_n}(\cdot)))_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{\overline{u}}(\cdot) + f(\cdot, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$.
De même, le Théorème 1.5.1 assure que $(g(\cdot, u_{\xi_n}(\cdot), v_{\xi_n}(\cdot)))_n$ converge fortement dans $L^1(I, H)$ vers $g(\cdot, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$ et donc converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers la même limite. En utilisant la propriété (4), on aura $(\dot{v}_{\xi_n}(\cdot) + g(\cdot, u_{\xi_n}(\cdot), v_{\xi_n}(\cdot)))_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{\overline{v}}(\cdot) + g(\cdot, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$.
Observons aussi que par les hypothèses $(H_1^A)$ et $(H_1^B)$, on a pour tout $t \in I$

$$dis(A(t, \xi_n(t)), A(t, \overline{\xi}(t))) \leq \lambda\|\xi_n(t) - \overline{\xi}(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

$$dis(B(t, \xi_n(t)), B(t, \overline{\xi}(t))) \leq \alpha\|\xi_n(t) - \overline{\xi}(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

aussi, par $(H_2^A)$ et $(H_2^B)$, nous avons

$$\begin{aligned}\|A^0(t, \xi_n(t))u_{\xi_n}(t)\| &\leq c(1 + \|\xi_n(t)\| + \|u_{\xi_n}(t)\|)\\ &\leq c(1 + \|\xi_0\| + T\rho + \|u_0\| + \|\psi\|_{L^1})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|B^0(t,\xi_n(t))v_{\xi_n}(t)\| &\le d(1+\|\xi_n(t)\|+\|v_{\xi_n}(t)\|)\\ &\le d(1+\|\xi_0\|+T\rho+\|v_0\|+\|\psi\|_{L^1}).\end{aligned}$$

Nous répéterons alors le même raisonnement de l'étape 5 dans la preuve du Théorème 2.2.1 pour les opérateurs maximaux monotones $A_n(t)=A(t,\xi_n(t))$ et $A(t)=A(t,\xi(t))$, $B_n(t)=B(t,\xi_n(t))$ et $B(t)=B(t,\xi(t))$, et à $f_n(t)=f(t,u_{\xi_n}(t),v_{\xi_n}(t))$ et $g_n(t)=g(t,u_{\xi_n}(t),v_{\xi_n}(t))$, pour conclure les inclusions souhaitées, et par l'unicité de la solution, il vient que $(\overline{u},\overline{v})=(u_{\overline{\xi}},v_{\overline{\xi}})$.
Alors, de (2.111) et (2.115), on a bien

$$\inf_{\xi\in\mathcal{E}}\int_0^T L(t,u_\xi(t),v_\xi(t),\dot{u}_\xi(t),\dot{v}_\xi(t))dt=\int_0^T L(t,u_{\overline{\xi}}(t),v_{\overline{\xi}}(t),\dot{u}_{\overline{\xi}}(t),\dot{v}_{\overline{\xi}}(t))dt.$$

Ce qui signifie que $\overline{\xi}$ est une solution optimale du problème de minimisation considéré. ■

## 2.4 Application à un problème de Skorohod.

On présente dans cette section une application à un problème de type Skorohod.

Le corollaire suivant est une conséquence du Théorème 2.2.1. Il découle en prenant, pour tout $(t,x,y)\in I\times H\times H$, $F(t,x,y)=\{f(t,x,y)\}$ et $G(t,x,y)=\{g(t,x,y)\}$.

**Corollaire 2.4.1** *Soit $H=\mathbb{R}^d$. Soit pour tout $(t,x)\in I\times H$, $A(t,x):D(A(t,x))\subset H\rightrightarrows H$ (resp.$B(t,x):D(B(t,x))\subset H\rightrightarrows H$) un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H_A^1)$, $(H_A^2)$ (resp. $(H_B^1)$, $(H_B^2)$). Soit $f:I\times H\times H\rightrightarrows H$ (resp. $g:I\times H\times H\rightrightarrows H$) une application de Carathéodory, i.e., mesurable sur $I$ et continue sur $H\times H$, vérifiant $(H_f^1)$ (resp. $(H_g^1)$). Alors, pour tout $(u_0,v_0)\in D(A(0,v_0))\times D(B(0,u_0))$, il existe $(u,v):I\to H\times H$, une solution absolument continue, du problème d'évolution suivant :*

$$(\mathcal{P}_{f,g})\begin{cases}-\dot{u}(t)\in A(t,v(t))u(t)+f(t,u(t),v(t)) & p.p.\ t\in I\\ u(t)\in D(A(t,v(t))\ \forall t\in I\\ -\dot{v}(t)\in B(t,u(t))v(t)+g(t,u(t),v(t)) & p.p.\ t\in I\\ v(t)\in D(B(t,u(t)))\ \forall t\in I\\ u(0)=u_0,v(0)=v_0.\end{cases}\tag{2.116}$$

*De plus, nous avons*

$$\max(\|\dot{u}(t)\|, \|\dot{v}(t)\|) \leq b\dot{a}(t) \quad p.p.\ t \in I \tag{2.117}$$

*où $b$ est une constante positive dépendant des données $\|u_0\|, \|v_0\|, \eta, \beta, L_f, L_g, T, c, d$ et*

$$a(t) := t + \beta(t) + \eta(t), \quad \forall t \in I.$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat.

**Théorème 2.4.2** *Soit $H = \mathbb{R}^d$ et $I = [0,1]$. Soit pour tout $(t,x) \in I \times H$, $A(t,x) : D(A(t,x)) \subset H \rightrightarrows H$ (resp. $B(t,x) : D(B(t,x)) \subset H \rightrightarrows H$) un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H_A^1)$, $(H_A^2)$ (resp. $(H_B^1)$, $(H_B^2)$). Soit $g : I \times H \times H \to H$ une application de Carathéodory, vérifiant $(H_g^1)$. Soit $K : I \times H \to H$ une application de Carathéodory, tel que pour tout $(t,x) \in I \times H$, pour une certaine constante positive $M$,*

$$\|K(t,x)\| \leq M. \tag{2.118}$$

*Alors, pour tout $(d_0, k_0) \in D(A(0,k_0)) \times D(B(0,d_0))$, il existe $X, Y, Z : I \to H$ des applications absolument continues vérifiant*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} X(t) = \int_0^t K(s, X(s))ds + Y(t) \quad \forall t \in I \\ -\dot{Y}(t) \in A(t, Z(t))Y(t) + \int_0^t K(s, X(s))ds \quad p.p.\ t \in I \\ Y(t) \in D(A(t, Z(t))) \quad \forall t \in I \\ -\dot{Z}(t) \in B(t, Y(t))Z(t) + g(t, Y(t), Z(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ Z(t) \in D(B(t, Y(t))) \quad \forall t \in I \\ X(0) = Y(0) = d_0 \in D(A(0, k_0)) \\ Z(0) = k_0 \in D(B(0, d_0)). \end{cases}$$

**Preuve**

Soit pour tout $t \in I$,

$$X^0(t) := d_0, \quad h^1(t) := \int_0^t K(s, d_0)ds = \int_0^t K(s, X^0(s))ds.$$

Alors, $h^1$ est continue et bornée i.e.,

$$\|h^1(t)\| \leq M \quad \forall\, t \in I.$$

Par application du Corollaire 2.4.1, il existe $Y^1, Z^1 : I \to H$ des applications absolument continues, tel que

$$\begin{cases} -\dot{Y}^1(t) \in A(t, Z^1(t))Y^1(t) + h^1(t) \quad p.p.\ t \in I \\ Y^1(t) \in D(A(t, Z^1(t))) \quad \forall t \in I \\ -\dot{Z}^1(t) \in B(t, Y^1(t))Z^1(t) + g(t, Y^1(t), Z^1(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ Z^1(t) \in D(B(t, Y^1(t))) \quad \forall t \in I \\ Y^1(0) = d_0 \\ Z^1(0) = k_0. \end{cases}$$

De plus,

$$\max\{\|\dot{Y}^1(t)\|, \|\dot{Z}^1(t)\|\} \leq b\dot{a}(t)\ p.p.t \in I,$$

avec $\dot{a} \in L^1(I, H)$.
Maintenant, soit pour tout $t \in I$,

$$X^1(t) = h^1(t) + Y^1(t) = \int_0^t K(s, X^0(s))ds + Y^1(t).$$

Donc, $X^1$ est absolument continue. Nous allons procéder par récurrence. Pour tout $t \in I$ et pour tout $n > 1$, on pose

$$h^n(t) := \int_0^t K(s, X^{n-1}(s))ds.$$

Il est clair que $h^n$ est continue et bornée, i.e.,

$$\|h^n(t)\| \leq M \quad \forall t \in I. \tag{2.119}$$

De plus, par (2.118)

$$\|\dot{h}^n(t)\| = \|K(t, X^{n-1}(t))\| \leq M \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.120}$$

Par le Corollaire 2.4.1, il existe $Y^n, Z^n : I \to H$ des applications absolument continues vérifiant :

$$\begin{cases} -\dot{Y}^n(t) \in A(t, Z^n(t))Y^n(t) + h^n(t) \quad p.p.\ t \in I \\ Y^n(t) \in D(A(t, Z^n(t))) \quad \forall t \in I \\ -\dot{Z}^n(t) \in B(t, Y^n(t))Z^n(t) + g(t, Y^n(t), Z^n(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ Z^n(t) \in D(B(t, Y^n(t))) \quad \forall t \in I \\ Y^n(0) = d_0 \\ Z^n(0) = k_0. \end{cases}$$

De plus,

$$\max\{\|\dot{Y}^n(t)\|, \|\dot{Z}^n(t)\|\} \leq b\dot{a}(t) \ p.p.\ t \in I. \tag{2.121}$$

Alors, pour tout $t \in I$, on définit

$$X^n(t) := h^n(t) + Y^n(t) = \int_0^t K(s, X^{n-1}(s))ds + Y^n(t).$$

Observons que $X^n$ est absolument continue et

$$-\dot{Y}^n(t) \in A(t, Z^n(t))Y^n(t) + \int_0^t K(s, X^{n-1}(s))ds \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.122}$$

On a pour tout $t \in I$, en utilisant la relation (2.121),

$$\|Y^n(t)\| \leq \|Y(0)\| + \int_0^t \|\dot{Y}^n(s)\|ds \leq \|d_0\| + \int_0^t b\dot{a}(s)ds \leq \|d_0\| + ba(1), \tag{2.123}$$

et

$$\|Z^n(t)\| \leq \|Z(0)\| + \int_0^t \|\dot{Z}^n(s)\|ds \leq \|k_0\| + \int_0^t b\dot{a}(s)ds \leq \|k_0\| + ba(1). \tag{2.124}$$

Donc, par (2.123), il vient que $(Y^n(t))_n$ est relativement compacte et par (2.124), $(Z^n(t))_n$ est relativement compacte. De plus, $(Y^n)_n$ est équicontinue, car pour tous $t, s \in I$ avec $(s < t)$

$$\|Y^n(t) - Y^n(s)\| \leq b \int_s^t \dot{a}(\tau)d\tau = b(a(t) - a(s)).$$

De même, $(Z^n)_n$ est équicontinue, car pour tous $t, s \in I$ avec $(s < t)$

$$\|Z^n(t) - Z^n(s)\| \leq b \int_s^t \dot{a}(\tau)d\tau = b(a(t) - a(s)).$$

Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà 1.4.10, on peut extraire de $(Y^n)_n$ une sous suite, que l'on note aussi $(Y^n)_n$, qui converge uniformément vers une application continue $Y \in C(I, H)$. Par les mêmes arguments, on peut extraire de $(Z^n)_n$ une sous suite notée aussi $(Z^n)_n$ et qui converge uniformément vers une application continue $Z \in C(I, H)$.
De l'autre côté, par (2.121) on voit bien que $(\dot{Y}^n)_n$ est intégrablement bornée, donc on peut supposer (par extraction d'une sous suite) qu'elle converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{Y}$.
En utilisant (2.120), on obtient pour tous $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\|h^n(t) - h^n(s)\| &= \|\int_s^t \dot{h}^n(\tau)d\tau\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{h}^n(\tau)\|d\tau \leq M(t-s)\end{aligned}$$

i.e., $(h_n)_n$ est équi-continue et par (2.119), $(h_n)_n$ est bornée. Du Théorème d' Ascoli-Arzelà 1.4.10, on trouve que $(h^n)_n$ converge uniformément vers une application continue $h : I \to H$. Par conséquent, $(X^n)_n$ converge uniformément vers $X$, avec

$$X(t) := h(t) + Y(t), \ \forall t \in I.$$

Comme $K(s, \cdot)$ est continue, on conclut que pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} K(t, X^{n-1}(t)) = K(t, X(t)) \ \forall t \in I.$$

D'où, via le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue 1.5.1, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t K(s, X^{n-1}(s)) = \int_0^t K(s, X(s))ds,$$

i.e., $(h^n)_n$ converge vers $h$ dans $L^1(I, H)$ et $h(t) = \lim_{n\to\infty} h_n(s) = \int_0^t K(s, X(s))ds$. D'une manière équivalente, on a pour tout $t \in I$

$$X(t) = \int_0^t K(s, X(s))ds + Y(t) \quad \forall t \in I.$$

Observons aussi que pour tout $t \in I$,

$$dis\big(A(t, Z^n(t)), A(t, Z(t))\big) \le \lambda\|Z^n(t) - Z(t)\| \to 0 \ \ lorsque \ \ n \longrightarrow \infty, \tag{2.125}$$

et

$$dis\big(B(t, Y^n(t)), B(t, Y(t))\big) \le \alpha\|Y^n(t) - Y(t)\| \to 0 \ \ lorsque \ \ n \to \infty. \tag{2.126}$$

Et par $(H_A^2)$, $(H_B^2)$, (2.123) et (2.124),

$$\begin{aligned}\|A^0(t, Z^n(t))Y^n(t)\| &\le c(1 + \|Z^n(t)\| + \|Y^n(t)\|)\\ &\le c(1 + \|k_0\| + \|d_0\| + 2ba(1)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|B^0(t, Y^n(t))Z^n(t)\| &\le d(1 + \|Y^n(t)\| + \|Z^n(t)\|)\\ &\le d(1 + \|d_0\| + \|k_0\| + 2ba(1))).\end{aligned}$$

D'où, la suite $(v_n)_n := (A^0(t, Z^n(t))Y^n(t))_n$ est bornée et donc relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$. Par conséquent, du Lemme 1.8.25 appliqué à $Y^n(t) \to Y(t)$ et à une sous suite de $(v_n)_n$, on conclut que $Y(t) \in D(A(t, Z(t)))$ pour tout $t \in I$. De même $Z(t) \in D(B(t, Y(t)))$ pour tout $t \in I$.

Puisque $(h^n)_n$ converge vers $h$ dans $L^1(I, H)$, alors elle converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $h$, et $(\dot{Y}^n)_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{Y}$, il en résulte que $(\dot{Y}^n + h^n)_n$

converge faiblement dans $L^1(I,H)$ vers $\dot{Y}+h$. Par le Théorème de Mazur 1.4.9, il existe une suite $(w_j)_j$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$w_j \in co\{\dot{Y}^k + h^k : \; k \geq j\}$$

et $(w_j)_j$ converge fortement vers $\dot{Y}+h$ dans $L^1(I,H)$. Donc, par le Théorème1.5.2, on peut extraire de $(w_j)_j$ une sous suite qui converge presque partout vers $\dot{Y}(\cdot)+h(\cdot)$, c'est-à-dire, il existe $N$, un sous-ensemble négligeable de $I$, et une sous suite $(j_p)$ de $\mathbb{N}$, tel que pour tout $t \in (I \backslash N)$, $w_{j_p}(t) \longrightarrow \dot{Y}(t)+h(t)$. Alors, pour $t \in I \setminus N$

$$\dot{Y}(t)+h(t) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{\dot{Y}^k(t)+h^k(t), k \geq j_p\big\}.$$

Ce qui implique que pour tout $t \in I \setminus N$ et $\xi \in H$

$$\langle \dot{Y}(t)+h(t), \xi\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \big\langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), \xi\big\rangle. \tag{2.127}$$

Comme on a pour tout $t \in I$, $Y(t) \in D\big(A(t,Z(t))\big)$. Alors, par l'utilisation du Lemme 1.8.23, pour montrer que

$$-\dot{Y}(t)-h(t) \in A(t,Z)Y(t) \; p.p.,$$

il suffit montrer que, pour tout $\eta \in D(A(t,Z(t)))$,

$$\langle \dot{Y}(t)+h(t), Y(t)-\eta\rangle \leq \langle A^0(t,Z(t))\eta, \eta - Y(t)\rangle \; p.p., t \in I.$$

Par $(H_2^A)$, on peut appliquer le Lemme 1.8.26 aux opérateurs maximaux monotones $A(t,Z^n(t))$ et $A(t,Z(t))$, pour assurer l'existence d'une suite $(\xi_n)_n$ tel que

$$\xi_n \in D(A(t,Z^n(t))), \quad \xi_n \to \eta \quad \text{et} \quad A^0(t,Z^n(t))\xi_n \to A^0(t,Z(t))\eta. \tag{2.128}$$

Pour $n \geq 1$, soit $N_n$ l'ensemble pour lequel la relation (2.122) est vérifiée sur $I \setminus N_n$. Puisque $A(t,Z(t))$ est monotone pour tout $t \in I$, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$, nous obtenons

$$\big\langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), Y^n(t)-\xi_n\big\rangle \leq \big\langle A^0(t,Z^n(t))\xi_n, \xi_n - Y^n(t)\big\rangle. \tag{2.129}$$

d'où, par (2.10) et pour tout $t \in I \setminus \big((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n) \cup N\big)$, il vient que

$$\begin{aligned}
\langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), Y(t)-\eta\rangle &= \langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), Y(t)-Y^n(t)+Y^n(t)-\xi_n+\xi_n-\eta\rangle \\
&= \langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), (Y(t)-Y^n(t))-(\eta-\xi_n)\rangle \\
&+ \langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), Y^n(t)-\xi_n\rangle \\
&\leq \langle A^0(t,Z^n(t))\xi_n, \xi_n - Y^n(t)\rangle \\
&+ (\|\dot{Y}^n(t)\| + \|h^n(t)\|)(\|Y^n(t)-Y(t)\| + \|\xi_n - \eta\|) \\
&\leq \langle A^0(t,Z^n(t))\xi_n, \xi_n - Y^n(t)\rangle \\
&+ (b\dot{a}(t)+M)(\|Y^n(t)-Y(t)\| + \|\xi_n-\eta\|)
\end{aligned} \tag{2.130}$$

donc, par (2.14) et la convergence uniforme de $(Y^n)_n$ vers $Y$, on aura

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), Y(t)-\eta\rangle \leq \langle A^0(t,z(t))\eta, \eta - Y(t)\rangle. \tag{2.131}$$

Alors, par (2.127)

$$\begin{aligned}\langle \dot{Y}(t)+h(t), Y(t)-\eta\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty}\langle \dot{Y}^n(t)+h^n(t), Y(t)-\eta\rangle \\ &\leq \langle A^0(t,Z(t))\eta, \eta - Y(t)\rangle. \end{aligned}\tag{2.132}$$

Par conséquent

$$-\dot{Y}(t)-h(t)\in A(t)Y(t) \quad p.p.\ t\in I.$$

De l'autre coté, on peut supposer que $(\dot{Z}^n)_n$ converge faiblement dans $L^1(I,H)$ vers $\dot{Z}$. De plus, la suite $(g(t,Y^n(t)Z^n(t)))_n$ converge ponctuellement sur $I$ vers $g(t,Y(t),Z(t))$ et comme

$$\begin{aligned}\|g(t,Y^n(t),Z^n(t))\| &\leq L_g\big(1+\|Y^n(t)\|+\|Z^n(t)\|\big)\\ &\leq L_g(1+\|d_0\|+\|k_0\|+2ba(1)).\end{aligned}$$

On conclut que $g(\cdot,Y^n(\cdot),Z^n(\cdot))$ converge fortement et donc faiblement dans $L^1(I,H)$ vers $g(\cdot,Y(\cdot),Z(\cdot))$.
Nous répétons le même raisonnement pour les opérateurs maximaux monotones $B(t,Y^n(t))$, $B(t,Y(t))$ et pour $g_n(t)=g(t,Y^n(t),Z^n(t))$, pour obtenir

$$-\dot{Z}(t)-g(t,Y(t),Z(t))\in B(t,Y(t))Z(t) \quad p.p.\ t\in I.$$

On conclusion, $X,Y,Z$ satisfont le problème $(\mathcal{P})$. Ceci termine la preuve. ■

Chapitre 3

# Invariance faible et forte des ensembles fermés par rapport à une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone dépendant du temps

## 3.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour la propriété de l'invariance faible et forte d'un ensemble fermé $S \subset \mathbb{R}^d$, par rapport à l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + G(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

régie par l'op.m.m. $A(t)$ dépendant du temps ainsi que son domaine et $G$ une multi-application non-autonome de type Cusco.

Nous passons rapidement en revue les principaux concepts appliqués dans ce chapitre.

Les Hamiltoniens inférieur et supérieur associés à $F : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ jouent un rôle crucial dans notre analyse, ils sont définis respectivement par :

$$h_F(t, x; \xi) := \inf\{\langle v, \xi \rangle : v \in F(t, x)\}.$$
$$H_F(t, x; \xi) := \sup\{\langle v, \xi \rangle : v \in F(t, x)\}.$$

**Définition 3.1.1 (Invariance faible)**
*Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ un sous ensemble non vide fermé. On dit que $S$ est faiblement invariant par rapport au problème (3.1) (ce qu'on appelle "viable") si, et seulement si, pour chaque point initial $u_0 \in S$, il existe une solution $u(\cdot)$ de (3.1) satisfaisant $u(t) \in S$, pour tout $t \in I$.*

**Définition 3.1.2 (Invariance forte)**
*Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ un sous ensemble non vide fermé. On dit que $S$ est fortement invariant par rapport au problème (3.1) si, et seulement si, pour chaque point initial $u_0 \in S$, toute solution $u(\cdot)$ de (3.1) satisfait $u(t) \in S$, pour tout $t \in I$.*

Dans notre étude, les caractérisations de l'invariance faible et forte par rapport au problème (3.1), sont formulées en termes des Hamiltoniens inférieur et supérieur associés.

## 3.2 Résultats auxiliaires

Nous commençons cette section par quelques résultats nécessaires pour nos preuves.

**Lemme 3.2.1** *([4], Lemme A.1) Soit $S \subset H$ fermé. Alors, pour tout $x \in H \setminus S$, nous avons*

$$\partial^C d_S(\cdot)(x) \subset co\Big\{\frac{x - Proj_S(x)}{d_S(x)}\Big\}.$$

**Preuve**

Soit $x \in H \setminus S$ et $\xi \in \partial_L d_S(\cdot)(x)$. Alors, il existe des suites $(x_k)_k, (\xi_k)_k \subset H$ tel que $(x_k)_k$ converge vers $x$, $d_S(x_k) \to d_S(x)$, $\xi_k \in \partial_P d_S(\cdot)(x_k)$, pour tout $k$ et $\xi_k \rightharpoonup \xi$ (voir définition 1.9.4). En particulier pour un certain $k$, on peut supposer que $x_k \notin S$ et alors $proj_S(x_k)$ est un singleton et $\xi_k = \dfrac{x_k - proj_S(x_k)}{d_S(x_k)}$ (voir Théorème 1.9.20). De plus, comme

$$\|x_k - proj_S(x_k)\| = d_S(x_k) \leq \|x_k - x\| + d_S(x),$$

ceci implique que

$$\|proj_S(x_k)\| \leq \|x_k - x\| + d_S(x) + \|x_k\|.$$

Comme $(x_k)_k$ est convergente, donc elle est bornée, et donc la suite $(proj_S(x_k))_k$ est bornée dans $H$, on peut alors lui extraire une sous suite qui converge faiblement vers un élément $\overline{x} \in S$. D'où, en utilisant le point 2) de la Proposition 1.3.3,

$$\|x - \overline{x}\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k - proj_S(x_k)\| = \lim_{k\to\infty} d_S(x_k) = d_S(x).$$

Il vient que, $\overline{x} \in Proj_S(x)$ et donc

$$\xi_k = \frac{x_k - proj_S(x_k)}{d_S(x_k)} \rightharpoonup \frac{x - \overline{x}}{d_S(x)} \in \frac{x - proj_S(x)}{d_S(x)}.$$

Alors, comme $\xi_k \rightharpoonup \xi$, on obtient $\xi = \dfrac{x - \overline{x}}{d_S(x)}$, i.e., $\xi \in \dfrac{x - Proj_S(x)}{d_S(x)}$. Par conséquent,

$$\partial_L d_S(\cdot)(x) \subset \frac{x - Proj_S(x)}{d_S(x)}.$$

Comme par (1.12), on a $\partial^C d_S(\cdot)(x) = co\{\partial_L d_S(\cdot)(x)\}$, il en résulte que

$$\partial^C d_S(\cdot)(x) \subset co\Big\{\frac{x - Proj_S(x)}{d_S(x)}\Big\}.$$

■

**Lemme 3.2.2** *([2], Lemme 4) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de rapport $l > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$f(x+v) \leq f(x) + f^0(x;v) + o(\|v\|) \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

**Preuve**

On procède par contradiction. On suppose que pour $\alpha > 0$ et une suite $(v_n)_n \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ qui converge vers 0 on a, pour tout $n \geq 1$

$$f(x+v_n) - f(x) > f^0(x;v_n) + \alpha\|v_n\| \quad \textit{pour tout } n \geq 1. \tag{3.2}$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\dfrac{v_n}{\|v_n\|} \to v \neq 0$. Alors, en utilisant le fait que $f$ est Lipschitzienne de rapport $l$,

$$\begin{aligned} f(x+v_n) - f(x) &= f(x+v_n) - f(x+v_n - \|v_n\|v) + f(x+v_n-\|v_n\|v) - f(x) \\ &\leq f(x+v_n) - f(x+v_n-\|v_n\|v) + l\|v_n - \|v_n\|v\|. \end{aligned}$$

De (3.2), on aura

$$\frac{f(x+v_n) - f(x+v_n-\|v_n\|v)}{\|v_n\|} + l\Big\|\frac{v_n}{\|v_n\|} - v\Big\| \geq f^0\big(x;\frac{v_n}{\|v_n\|}\big) + \alpha.$$

Passant à la limite supérieure lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\frac{f(x+v_n) - f(x+v_n-\|v_n\|v)}{\|v_n\|} + l\Big\|\frac{v_n}{\|v_n\|} - v\Big\|\Big) \geq \limsup_{n\to\infty} f^0\big(x;\frac{v_n}{\|v_n\|}\big) + \alpha. \tag{3.3}$$

Comme $\dfrac{v_n}{\|v_n\|} \to v$ et en utilisant (3.3), il vient que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f(x+v_n) - f(x+v_n-\|v_n\|v)}{\|v_n\|} \geq f^0(x;v) + \alpha. \tag{3.4}$$

Posons $t = \|v_n\|$ et $x' = x + v_n - tv$. Alors lorsque $n \to \infty$, il vient que $t \downarrow 0$ et $x' \longrightarrow x$. Par conséquent,

$$\limsup_{\substack{x' \longrightarrow x \\ t\downarrow 0}}\frac{f(x'+tv) - f(x')}{t} \geq f^0(x,v) + \alpha.$$

Par Définition 1.9.5 on obtient, $f^0(x,v) \geq f^0(x,v) + \alpha > f^0(x,v)$ ce qui est absurde. D'où le résultat. ■

**Théorème 3.2.3** *(Théorème A dans [5])*
*Soit $X$ un espace métrique et soit $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application Lipschitzienne à valeurs non vides, convexes et compactes. Soit $X' \subset X$ et $f : X' \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une sélection Lipschitzienne de $F$ sur $X'$. Alors, il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une extension de $f$, avec $g(x') = f(x')$ pour $x' \in X'$, tel que $g$ est une sélection Lipschitzienne de $F$ sur $X$.*

Le corollaire suivant assure l'existence de sélections lipschitziennes pour les multi-applications Lipschitziennes et est une généralisation du Théorème A dans [5].

**Corollaire 3.2.4**
*Soit $G : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application Lipschitzienne de rapport $l > 0$ à valeurs non vides, convexes et compactes et soit $(\bar{t}, \bar{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $\bar{v} \in G(\bar{t}, \bar{x})$. Alors, il existe une sélection lipschitzienne $g$ de $G$ tel que $g(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{v}$.*

**Preuve**
Soit $F$ la multi-application définie comme suit :

$$F : \mathbb{R}^{1+d} \rightrightarrows \mathbb{R}^{1+d}$$
$$(t,x) \longmapsto F(t,x) = \begin{cases} \{t\} \times G(t,x) & si\ t \in [0,T] \\ \{t\} \times G(0,x) & si\ t \in ]-\infty, 0] \\ \{t\} \times G(T,x) & si\ t \in [T, +\infty[. \end{cases}$$

Comme $G$ est à valeurs non vides, convexes et compactes, il vient que $F$ l'est aussi. De plus $F$ est Lipschitzienne de rapport $L := l + 1$. En effet, pour tous $t, s \in [0,T]$

$$\begin{aligned} d_H(F(t,x), F(s,y)) &= d_H(\{t\} \times G(t,x), \{s\} \times G(s,y)) \\ &\leq |t-s| + d_H(G(t,x), G(s,y)) \\ &\leq |t-s| + l(|t-s| + \|x-y\|) \\ &\leq (l+1)(|t-s| + \|x-y\|). \end{aligned}$$

Pour tous $t, s \in ]-\infty, 0]$, on a

$$\begin{aligned} d_H(F(t,x), F(s,y)) &= d_H(\{t\} \times G(0,x), \{s\} \times G(0,y)) \\ &\leq |t-s| + d_H(G(0,x), G(0,y)) \\ &\leq |t-s| + l\|x-y\| \\ &\leq (l+1)(|t-s| + \|x-y\|). \end{aligned}$$

Pour tous $t, s \in [T, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} d_H(F(t,x), F(s,y)) &= d_H(\{t\} \times G(T,x), \{s\} \times G(T,y)) \\ &\leq |t-s| + d_H(G(T,x), G(T,y)) \\ &\leq |t-s| + l\|x-y\| \\ &\leq (l+1)(|t-s| + \|x-y\|). \end{aligned}$$

Pour $t \in [0,T], s \in ]-\infty, 0]$, on a comme $s \leq 0$

$$\begin{aligned} d_H(F(t,x), F(s,y)) &= d_H(\{t\} \times G(t,x), \{s\} \times G(0,y)) \\ &\leq |t-s| + d_H(G(t,x), G(0,y)) \\ &\leq |t-s| + l(|t-0| + \|x-y\|) \\ &\leq (l+1)(|t-s| + \|x-y\|). \end{aligned}$$

Pour $t \in [0,T], s \in [T, +\infty[$, on a comme $s \geq T$

$$\begin{aligned} d_H(F(t,x), F(s,y)) &= d_H(\{t\} \times G(t,x), \{s\} \times G(T,y)) \\ &\leq |t-s| + l(|t-T| + \|x-y\|) \\ &\leq |t-s| + l((T-t) + \|x-y\|) \\ &\leq |t-s| + l((s-t) + \|x-y\|) \\ &\leq (l+1)(|t-s| + \|x-y\|). \end{aligned}$$

Pour $t \in ]-\infty, 0], s \in [T, +\infty[$, on a comme $t \leq 0$ et $s \geq T$

$$\begin{aligned} d_H(F(t,x), F(s,y)) &= d_H(\{t\} \times G(0,x), \{s\} \times G(T,y)) \\ &\leq |t-s| + l(|0-T| + \|x-y\|) \\ &\leq |t-s| + l(T + \|x-y\|) \\ &\leq |t-s| + l((s-t) + \|x-y\|) \\ &\leq (l+1)(|t-s| + \|x-y\|). \end{aligned}$$

De sorte que, on peut appliquer le Théorème 3.2.3, pour $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ et $u = (t,v) \in F(t,x)$, il existe une sélection Lipschitzienne $f$ de $F$ de rapport $L_f$ telle que $f(t,x) = u$. En particulier, pour $(\bar{t}, \bar{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, et $\bar{u} = (\bar{t}, \bar{v}) \in F(\bar{t}, \bar{x})$, i.e., $f(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{u} = (\bar{t}, \bar{v})$. Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $f(t,x) \in F(t,x) = \{t\} \times G(t,x)$ ce qui signifie que, $f(t,x) = (t, g(t,x))$ tel que $g(t,x) \in G(t,x)$. Il est clair que $g(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{v}$. Il reste à montrer que $g$ est Lipschitzienne. En effet, pour $s, t \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$, nous avons

$$|t-s| + \|g(t,x) - g(s,y)\| = \|(t, g(t,x)) - (s, g(s,y))\| = \|f(t,x) - f(s,y)\| \leq L_f(|t-s| + \|x-y\|)$$

ce qui implique que

$$\|g(t,x) - g(s,y)\| \leq L_f(|t-s| + \|x-y\|).$$

■

Dans la suite, nous donnons un résultat concernant l'existence de solutions Lipschitziennes du problème suivant :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + G(t,u(t)) \quad p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases} \tag{3.5}$$

Puis, à l'aide d'un schéma de discrétisation, nous montrons que toute solution de ce problème est la limite uniforme d'une suite d'applications Lipschitziennes. Cette approche sera utilisée en vigueur pour prouver nos théorèmes d'invariance.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un opérateur maximal monotone, et $G : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées.
Considérons les hypothèses suivantes :
**Hypothèses (3)**

$(\mathcal{H}_A^1)$ Il existe une constante réelle positive $\alpha$ tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq \alpha|t-s| \quad \forall\, t,s \in I.$$

$(\mathcal{H}_A^2)$ Il existe une constante réelle positive $c$ tel que

$$\|A^0(t)x\| \leq c(1 + \|x\|) \quad \forall\, t \in I,\ x \in D(A(t)).$$

$(\mathcal{H}_G^1)$ $G(\cdot,\cdot)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^d$.

$(\mathcal{H}_G^2)$ Il existe une constante réelle positive $M$ tel que

$$\|G(t,x)\| := \sup\big\{\|z\| :\ z \in G(t,x)\big\} \leq M.$$

$(\mathcal{H}_G^3)$ $G$ est Lipschitzienne de rapport $L_G > 0$, i.e.,

$$d_H(G(t,x), G(s,y)) \leq L_G(|t-s| + \|x-y\|) \quad \forall t,s \in I,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Le résultat suivant est une conséquence du Théorème 3.2 et de la Proposition 3.7 dans [11].

**Théorème 3.2.5** *Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(\mathcal{H}_A^1)$ et $(\mathcal{H}_A^2)$. Soit $G : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées satisfaisant $(\mathcal{H}_G^1)$ et $(\mathcal{H}_G^2)$. Alors, pour $u_0 \in D(A(0))$, le problème (3.5) admet une solution lipschitzienne $u$. De plus*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K \quad p.p.\ t \in I, \tag{3.6}$$

*avec $K$ dépend de $\|u_0\|, c, M, \alpha$ et $T$.*

Nous montrons dans la suite que toute solution du problème (3.5) est Lipschitzienne et est une limite uniforme d'une suite d'applications Lipschitziennes.

**Proposition 3.2.6**
*Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.5 sont satisfaites. Alors toute solution du problème (3.5) est la limite uniforme d'une suite d'applications Lipschitziennes.*

**Preuve**
Soit $u : I \to \mathbb{R}^d$ une solution du problème d'évolution (3.5). Alors, il existe une application mesurable $g : I \to \mathbb{R}^d$ tel que $g(t) \in G(t, u(t))$ $p.p.\ t \in I$, et

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + g(t) \quad p.p.\ t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

**Étape 1. Construction d'une suite d'applications Lipschitziennes via une suite discrète.**
On choisit une suite quelconque $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset ]0,1]$ qui décroit vers 0 lorsque $n \to +\infty$ et pour tout $n$, une suite de partitions $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = T$ de $[0,T]$ tel que pour $i = 0, \ldots, n$,

$$\delta_{i+1}^n := |t_{i+1}^n - t_i^n| \leq \xi_n \downarrow 0. \tag{3.8}$$

On définit la suite discrète $(v_i^n)_{0\geq i\leq n}$ par : $v_0^n = u_0$ et pour $i = 0, \ldots, n-1$,

$$v_{i+1}^n = J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds\big) =: J_{i+1}^n\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds\big). \tag{3.9}$$

Observons que par la définition de la résolvante, on a

$$v_{i+1}^n \in D\big(A(t_{i+1}^n)\big) \tag{3.10}$$

et

$$\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds - v_{i+1}^n\big) \in A(t_{i+1}^n)v_{i+1}^n. \tag{3.11}$$

On définit les applications absolument continues $v_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\big(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds\big) + v_i^n - \int_{t_i^n}^{t} g(s)ds \tag{3.12}$$

pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, \dots, n-1$ et $v_n(T) = v_n^n$. On remarque que $v_n(t_i^n) = v_i^n$ et pour tout $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n[, i = 0, \dots, n-1$,

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\big(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds\big) - g(t). \tag{3.13}$$

On définit aussi les fonctions $\theta_n, \phi_n : I \longrightarrow I$ par :

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \quad \phi_n(t) = t_i^n, \quad \forall t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n],\ i = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3.14}$$

et $\theta_n(0) = \phi_n(0) = 0$. Nous avons, pour tout $t \in I$

$$|\theta_n(t) - t| = |t_{i+1}^n - t| \le |t_{i+1}^n - t_i^n| \le \xi_n \to 0, \tag{3.15}$$

et de même

$$|\phi_n(t) - t| \le |t_{i+1}^n - t_i^n| \le \xi_n \to 0. \tag{3.16}$$

En utilisant (3.11) et (3.13), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N_n \subset I$, un sous ensemble négligeable, tel que

$$-\dot{v}_n(t) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)) + g(t) \quad \forall\, t \in I \setminus N_n. \tag{3.17}$$

**Étape 2. Estimations.**
Par (3.9), $(\mathcal{H}_A^1)$, $(\mathcal{H}_A^2)$, $(\mathcal{H}_G^2)$ et le Lemme 1.8.24, on a (en remarquant que $\sqrt{x} \le x$ pour tout réel $x \ge 1$)

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &\le \big\|J_{i+1}^n\big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds\big) - J_{i+1}^n(v_i^n)\big\| + \|J_{i+1}^n(v_i^n) - v_i^n\| \\
&\le \big\|v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s)ds - v_i^n\big\| + \delta_{i+1}^n\|A^0(t_i^n)v_i^n\| + dis\big(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)\big) \\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n\big(1 + \|A^0(t_i^n)v_i^n\|\big)dis\big(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)\big)} \\
&\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s)\|ds + \delta_{i+1}^n c(1 + \|v_i^n\|) + \alpha\delta_{i+1}^n + \sqrt{(\delta_{i+1}^n)^2\big(1 + c(1 + \|v_i^n\|)\big)\alpha} \\
&\le \delta_{i+1}^n M + \delta_{i+1}^n c(1 + \|v_i^n\|) + \alpha\delta_{i+1}^n + \delta_{i+1}^n\sqrt{\alpha}(1 + c(1 + \|v_i^n\|)) \\
&\le [M + c + \alpha + \sqrt{\alpha}(1 + c) + c(1 + \sqrt{\alpha})\|v_i^n\|]\delta_{i+1}^n =: (c_1 + c_2\|v_i^n\|)\delta_{i+1}^n
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où $c_1 := M + c + \alpha + \sqrt{\alpha}(1 + c)$ et $c_2 := c(1 + \sqrt{\alpha})$. Alors

$$\|v_{i+1}^n\| \le \|v_{i+1}^n - v_i^n\| + \|v_i^n\| \le c_1\delta_{i+1}^n + (1 + c_2\delta_{i+1}^n)\|v_i^n\|.$$

Par application du Lemme 1.10.2, on obtient

$$\begin{aligned}\|v_i^n\| &\leq \Big(\|u_0\|+c_1\Big)\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n \exp\Big(c_2\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n\Big)\\ &\leq \Big(\|u_0\|+c_1\Big)(t_i^n-t_0)\exp(c_2(t_i^n-t_0))\\ &\leq \Big(\|u_0\|+c_1\Big)T\exp(c_2T)=:\gamma. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Remplaçons cette dernière estimation dans (3.18), il vient que

$$\|v_{i+1}^n-v_i^n\|\leq (c_1+c_2\gamma)\delta_{i+1}^n=:K_1\delta_{i+1}^n. \tag{3.20}$$

Maintenant, par (3.20), $(\mathcal{H}_G^2)$ et pour tout $t\in I\setminus J_0$, avec $J_0$ un sous ensemble négligeable de $I$, on a

$$\begin{aligned}\|\dot v_n(t)\| &\leq \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\|v_{i+1}^n-v_i^n\|+\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\|g(s)\|ds+\|g(t)\|\\ &\leq K_1+2M=:K_2. \end{aligned}\tag{3.21}$$

**Etape 3. convergence des suites $(v_n)_n$, $(\dot v_n)_n$.**
Soit $K:=\max(K_1,K_2)$. De la relation (3.21), on aura pour tout $t\in I$

$$\|v_n(t)\|\leq \|u_0\|+\int_0^t\|\dot v_n(s)\|ds\leq \|u_0\|+KT.$$

Ceci implique que, pour tout $t\in I$, la suite $(v_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$. Moyennant encore la relation (3.21), pour $0\leq s\leq t\leq T$,

$$\|v_n(t)-v_n(s)\|\leq \int_s^t\|\dot v_n(\tau)\|d\tau\leq K(t-s), \tag{3.22}$$

i.e., $(v_n(\cdot))_n$ est équicontinue. Par application du Théorème d'Ascoli-Arzèla 1.4.10, on conclut que $(v_n)_n$ est relativement compacte dans $C(I,\mathbb{R}^d)$. Alors, on peut extraire de $(v_n)_n$ une sous suite notée aussi $(v_n)_n$, de sorte que $(v_n)_n$ converge uniformément vers une application $v\in C(I,\mathbb{R}^d)$, autrement dit

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|_C=0. \tag{3.23}$$

Observons, par la relation (3.22) que $v$ est une application Lipschitzienne de rapport $K$. De plus, par (3.22), (3.23) et (3.15), il en résulte que, pour $t\in I$

$$\|v_n(\theta_n(t))-v(t)\|\leq \|v_n(\theta_n(t))-v_n(t)\|+\|v_n(t)-v(t)\|\to 0 \text{ lorsque } n\to+\infty. \tag{3.24}$$

On constate par (3.21) que la suite $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$. Donc, on peut lui en extraire une sous suite, notée aussi $(\dot{v}_n(\cdot))_n$, qui converge faiblement vers une application $w \in L^2(I, \mathbb{R}^d)$. Montrons que $w \equiv \dot{v}$. Soit $\varepsilon \in H$ et soit $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon, v(t) - v(0)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \varepsilon, v_n(t) - v_n(0)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varepsilon, \int_0^t \dot{v}_n(\tau)d\tau\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \varepsilon 1_{]0,t[}(\tau), \dot{v}_n(\tau)\rangle d\tau = \int_0^T \langle \varepsilon 1_{]0,t[}(\tau), w(\tau)\rangle d\tau \\
&= \langle \varepsilon, \int_0^t w(\tau)d\tau\rangle
\end{aligned}$$

il en résulte que,

$$v(t) - v(0) = \int_0^t w(\tau)d\tau,$$

d'où $\dot{v}(t) = w(t)$, $p.p.$ $t \in I$, c'est-à-dire, $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $\dot{v}(\cdot)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$.

Évoquant le Théorème de Mazur 1.4.9, on déduit qu'il existe une suite $(z_n(\cdot))_n$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n(\cdot) \in co\{\dot{v}_k(\cdot) : k \geq n\}$ et $(z_n(\cdot))_n$ converge fortement vers $\dot{v}$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$. Par conséquent, il existe un sous-ensemble négligeable $N \subset I$ et une sous suite $(n_p)$ de $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I \setminus N$, $\lim_{p\to+\infty} z_{n_p}(t) = \dot{v}(t)$. Ce qui implique que, pour tout $t \in I \setminus N$,

$$\dot{v}(t) \in \bigcap_p \overline{co}\{\dot{v}_k(t) : \ k \geq n_p\}.$$

En utilisant le Théorème 1.2.9, on aura pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle z, \dot{v}(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \langle z, \dot{v}_n(t)\rangle. \tag{3.25}$$

**Etape 4. la limite $v$ vérifie (3.7).**

Dans la suite, on va montrer que $v(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$.

En effet, Soit $t \in I$. De (3.10), on a, $v_n(\theta_n(t)) \in D(A(\theta_n(t)))$ pour tout $n \geq 1$. En utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_A^1)$ et (3.16), $dis(A(\theta_n(t)), A(t)) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, et par l'hypothèse $(\mathcal{H}_A^2)$ et (3.19), la suite $(w_n)_n =: \big(A^0(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t))\big)_n$ est bornée. On déduit que la suite $(w_n)_n$ est relativement compacte. Alors, on peut lui extraire une sous suite qui converge dans $\mathbb{R}^d$. Par application du Lemme 1.8.25 à $v_n(\theta_n(t)) \to v(t)$, et à la sous suite de $(w_n)_n$, on déduit que $v(t) \in D(A(t))$.

Notre objectif dans la suite est de montrer que

$$-\dot{v}(t) - g(t) \in A(t)v(t) \quad p.p. \, t \in I.$$

Comme $v(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$, par le Lemme 1.8.23, il suffit de prouver que, pour tout $\eta \in D(A(t))$,

$$\langle \dot{v}(t) + g(t), v(t) - \eta \rangle \leq \langle A^0(t)\eta, \eta - v(t) \rangle \quad p.p.\, t \in I. \tag{3.26}$$

En effet, soit $t \in I$ et soit $\eta \in D(A(t))$. On sait que, $dis(A(\theta_n(t)), A(t)) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. En utilisant $(H_A^2)$, on peut appliquer le Lemme 1.8.26 aux opérateurs maximaux monotones $A_n = A(\theta_n(t))$ et $A = A(t)$ pour assurer l'existence d'une suite $(\epsilon_n)_n$ tel que

$$\epsilon_n \in D(A(\theta_n(t))), \quad \epsilon_n \to \eta \quad \text{et} \quad A^0(\theta_n(t))\epsilon_n \to A^0(t)\eta. \tag{3.27}$$

Puisque $A(t)$ est monotone pour tout $t \in I$, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$, en utilisant l'inclusion (3.17), on obtient

$$\big\langle \dot{v}_n(t) + g(t), v_n(\theta_n(t)) - \epsilon_n \big\rangle \leq \big\langle A^0(\theta_n(t))\epsilon_n, \epsilon_n - v_n(\theta_n(t)) \big\rangle. \tag{3.28}$$

Donc, par (3.21), (3.28) et $(\mathcal{H}_G^2)$, pour tout $t \in I \setminus ((\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} N_n) \cup N \cup J_0)$, on aura

$$\begin{aligned}
&\big\langle \dot{v}_n(t) + g(t), v(t) - \eta \big\rangle = \big\langle \dot{v}_n(t) + g(t), v_n(\theta_n(t)) - \epsilon_n \big\rangle \\
&+ \big\langle \dot{v}_n(t) + g(t), (v(t) - v_n(\theta_n(t))) - (\eta - \epsilon_n) \big\rangle \\
&\leq \big\langle A^0(\theta_n(t))\epsilon_n, \epsilon_n - v_n(\theta_n(t)) \big\rangle + (\|\dot{v}_n(t)\| + \|g(t)\|)(\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| + \|\epsilon_n - \eta\|) \\
&\leq \big\langle A^0(\theta_n(t))\epsilon_n, \epsilon_n - v_n(\theta_n(t)) \big\rangle + (K + M)(\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| + \|\epsilon_n - \eta\|).
\end{aligned}$$

De (3.27) et (3.24), il en résulte que

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle \dot{v}_n(t), v(t) - \eta \rangle + \langle g(t), v(t) - \eta \rangle \leq \langle A^0(t)\eta, \eta - v(t) \rangle.$$

Alors, par (3.25) on aura (3.26). Ce qui implique que

$$-\dot{v}(t) \in A(t)v(t) + g(t) \quad p.p.\; t \in I.$$

Utilisant cette dernière inclusion et celle dans (3.7), de la monotonie de l'opérateur $A(t)$, il vient que pour presque tout $t \in I$,

$$\langle \dot{v}(t) - \dot{u}(t), v(t) - u(t) \rangle \leq 0.$$

Donc, sachant que $u(0) = v(0) = u_0$ et que $\dfrac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 = \langle \dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t) \rangle$ on obtient par intégration que

$$\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2 = \int_0^t \langle \dot{v}(\tau) - \dot{u}(\tau), v(\tau) - u(\tau) \rangle d\tau \leq 0.$$

Par conséquent, $v = u$. Ceci montre que $u$ est Lipschitzienne et est la limite uniforme de la suite $(v_n)_n$ donnée par la relation (3.12). ■

Maintenant, on peut donner les caractérisations de l'invariance faible et forte d'un ensemble fermé $S \subset \mathbb{R}^d$, par rapport à l'inclusion (3.5).

## 3.3 Invariance faible.

**Théorème 3.3.1** *Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(\mathcal{H}_A^1)$ et $(\mathcal{H}_A^2)$. Soit $G : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées satisfaisant $(\mathcal{H}_G^1)$ et $(\mathcal{H}_G^2)$.*
*Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ tel que $D(A(t)) \cap S \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$. Soit $u_0 \in S \cap D(A(0))$. Si $S$ est faiblement invariant par rapport au problème (3.5), alors pour tout $t \in I$, on a*

$$\inf_{w \in A(t)x \cap m\overline{B}} \big( \inf_{v \in G(t,x)} \langle -w - v, p \rangle \big) \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t)) \cap S}(x), \;\; \forall x \in D(A(t)) \cap S, \tag{3.29}$$

*c'est-à-dire,*

$$\inf_{w \in A(t)x \cap m\overline{B}} \langle -w, p \rangle + \inf_{v \in G(t,x)} \langle -v, p \rangle \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t)) \cap S}(x), \;\; \forall x \in D(A(t)) \cap S,$$

*avec $m := \max\{K + M, c(1 + \|u_0\| + TK)\}$ et $K$ est la constante donnée dans la relation (3.6).*
*Si de plus, on suppose que*

$$Proj_S(x) \subset S \cap D(A(t)) \quad \forall x \in D(A(t))$$

*l'inverse est aussi vrai, i.e., la relation (3.29) implique que $S$ est faiblement invariant.*

***Remarque 3.3.2***
*Observons, qu'en posant $R(t,x) = A(t)x \cap m\overline{B}$, la relation (3.29) est équivalente à la suivante :*

$$h_R(t,x;-p) + h_G(t,x;-p) \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t)) \cap S}, \;\; \forall x \in D(A(t)) \cap S.$$

*$h_R, h_G$ étant les Hamiltoniens inférieurs de $R$ et $G$ respectivement.*

**Preuve**
Tout d'abord, observons que d'après la Proposition 1.8.16, l'ensemble $D(A(t)) \cap S$ est fermé pour tout $t \in I$.
**Condition nécessaire**.
Supposons que $S$ est faiblement invariant par rapport au problème (3.5). Donc, pour $u_0 \in S \cap D(A(0))$, le problème (3.5) admet au moins une solution lipschitzienne $u : I \to \mathbb{R}^d$ tel que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in S$, pour tout $t \in I$.
Soit $t_0 \in ]0, T]$. Il existe donc une suite $(t_n)$ tel que $t_n \downarrow t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u(t_0) - u(t_n)}{t_n - t_0} =: v \in \big(A(t_0)u(t_0) \cap m\overline{B}\big) + G\big(t_0, u(t_0)\big).$$

En effet, nous définissons la multi-application $Z : I \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ par :

$$Z(t) := (A(t)u(t) \cap m\overline{B}) + G(t, u(t)) \; \forall t \in I.$$

La multi-application $Z$ est à valeurs non vides, convexes et compactes avec un graphe fermé et est uniformément bornée. En particulier, $Z$ est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire, étant donné $s \in I$ (voir Définition 1.7.8 et Proposition 1.7.9)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \; Z(t) \subset Z(s) + \epsilon\overline{B} \quad pour \; |t - s| < \delta. \tag{3.30}$$

Pour vérifier que $Z$ est à valeurs non vides, remarquons qu' à partir de $(\mathcal{H}_A^2)$ et (3.6), on a pour tout $t \in I$,

$$\|A^0(t)u(t)\| \leq c(1 + \|u(t)\|) \leq c(1 + \|u_0\| + TK) \leq m.$$

D'autre part, nous avons $A^0(t)u(t) \in A(t)u(t)$, c'est-à-dire $A^0(t)u(t) \in A(t)u(t) \cap m\overline{B}$. Par conséquent (comme $G$ est à valeurs non vides),

$$Z(t) := (A(t)u(t) \cap m\overline{B}) + G(t, u(t)) \neq \emptyset.$$

Puisque pour tout $t \in I$ et $x \in D(A(t))$, $A(t)x$ est fermé et convexe (voir Proposition 1.8.8), alors $A(t)u(t) \cap m\overline{B}$ est convexe compact et comme $G(t, u(t))$ est, par définition et par $(\mathcal{H}_G^2)$, convexe compact, alors $Z(t)$ est convexe compact et par sa structure et $(\mathcal{H}_G^2)$, $Z$ est uniformément bornée par $m + M$, i.e., $Z : I \rightrightarrows (m + M)\overline{B}$.
Maintenant, nous allons vérifier la fermeture du graphe de $Z$.
Soit $(\bar{t}_n, y_n)_n \subset gph(Z)$ tel que $y_n \to y$ et $\bar{t}_n \to t$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n \in Z(\bar{t}_n) = (A(\bar{t}_n)u(\bar{t}_n) \cap m\overline{B}) + G(\bar{t}_n, u(\bar{t}_n)).$$

Nous avons alors, $y_n = x_n + z_n$ avec $x_n \in A(\bar{t}_n)u(\bar{t}_n) \cap m\overline{B}$ et $z_n \in G(\bar{t}_n, u(\bar{t}_n))$.
De $(\mathcal{H}_G^2)$, on a $(z_n)_n \subset M\overline{B}$. Donc, on peut extraire une sous suite (on la note aussi $(z_n)$), qui converge fortement vers un élément $z \in M\overline{B}$. Il s'en suit que, $x_n = y_n - z_n \to y - z =: x$.
Soit $B_n := A(\bar{t}_n)$, $B := A(t)$. Les opérateurs $B_n$ et $B$ sont maximaux monotones et de $(\mathcal{H}_A^1)$,

$$dis(B_n, B) = dis(A(\bar{t}_n), A(t)) \leq \alpha|\bar{t}_n - t| \to 0 \quad lorsque \; n \to \infty.$$

En utilisant le fait que $u$ est Lipschitzienne, il en résulte que $u(\bar{t}_n) \to u(t)$. Alors, en appliquant le Lemme 1.8.25 à $B_n$ et $B$, on obtient que $u(t) \in D(A(t))$ et $x = y - z \in A(t)u(t)$, et clairement $x \in m\overline{B}$. Puisque $z_n \in G(\bar{t}_n, u(\bar{t}_n))$ et $G(\cdot, \cdot)$ est semi-continue supérieurement, nous concluons par le Théorème 1.7.10 que $z \in G(t, u(t))$. D'où, $y = x + z \in A(t)u(t) \cap m\overline{B} + G(t, u(t)) =: Z(t)$.
Par conséquent, le graphe de $Z$ est fermé donc, par le Théorème 1.7.11, on obtient la

semicontinuité supérieure de $Z$ exprimée par la relation (3.30).
Maintenant, soit $(t_n) \subset ]t_0, T]$ tel que $t_n \downarrow t_0$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n := \frac{u(t_0) - u(t_n)}{t_n - t_0}.$$

Grâce à (3.6), on a $\| \int_{t_0}^{t_n} \dot{u}(s)ds\| \leq K(t_n - t_0)$, c'est-à-dire $\|u(t_n) - u(t_0)\| \leq K(t_n - t_0)$ et donc $\|v_n\| \leq \dfrac{K(t_n - t_0)}{t_n - t_0} = K$, i.e., $(v_n)_n$ est borné dans $\mathbb{R}^d$. D'où, il existe une sous suite notée aussi $(v_n)_n$ et qui converge fortement vers un certain élément $v \in \mathbb{R}^d$.
Puisque $u$ est une solution du problème (3.5), il s'en suit que

$$-\dot{u}(t) \in (A(t)u(t) \cap m\overline{B}) + G(t, u(t)) = Z(t) \quad p.p.\ t \in I.$$

Ainsi, en se référant à la relation (3.30), pour $\epsilon > 0$, on obtient que

$$-\dot{u}(s) \in Z(s) \subset Z(t_0) + \epsilon\overline{B} \quad p.p.\ s \in [t_0, t_n].$$

En appliquant le Lemme 1.2.10, on obtient (grâce à la fermeture et la convexité de $Z(t_0) + \epsilon\overline{B}$.)

$$v_n = \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} -\dot{u}(s)ds \in Z(t_0) + \epsilon\overline{B}.$$

D'où, $\lim_{n\to\infty} v_n = v \in Z(t_0) + \epsilon\overline{B}$. Puisque $\epsilon$ est arbitrairement choisi , nous concluons que

$$v \in Z(t_0) := (A(t_0)u(t_0) \cap m\overline{B}) + G(t_0, u(t_0)). \tag{3.31}$$

Autrement dit, il existe $w \in A(t_0)u(t_0) \cap m\overline{B}$ et $\bar{w} \in G(t_0, u(t_0))$ tel que $v = w + \bar{w}$.
D'autre part, on sait que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u(t_n) \in S \cap D(A(t_n))$. En utilisant le Lemme 1.8.22, on a

$$d(u(t_n), D(A(t_0)) \leq d_H\big(D(A(t_n)), D(A(t_0))\big) \leq dis(A(t_n), A(t_0)) \leq \alpha|t_n - t_0| \to 0.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 > 0$ tel que $u(t_n) \in D(A(t_0)) + \varepsilon\overline{B}$ pour tout $n \geq n_0$.
D'où,

$$(u(t_n))_{n\geq n_0} \subset S \cap \big(D(A(t_0)) + \varepsilon\overline{B}\big).$$

En conclusion on a : $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ et $v_n = \dfrac{u(t_0) - u(t_n)}{t_n - t_0}$, avec $u(t_n) \to u(t_0)$ et $t_n \downarrow t_0$.
Par la définition du cône tangent de Bouligand (voir relation (1.13)), on trouve que

$$v \in -T^B_{S\cap(D(A(t_0))+\varepsilon\overline{B})}(u(t_0)).$$

Puisque $\varepsilon$ est arbitraire, il en résulte que

$$v \in -T^B_{S\cap D(A(t_0))}(u(t_0)).$$

De cette dernière relation et (3.31), on obtient

$$v \in -T^B_{S\cap D(A(t_0))}(u(t_0)) \cap \big((A(t_0)u(t_0) \cap m\overline{B}) + G(t_0, u(t_0))\big).$$

En utilisant la Proposition 1.9.23, on obtient

$$\langle -v, p\rangle \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{S\cap D(A(t_0))}(u(t_0)),$$

ce qui est équivalent à

$$\langle -w - \bar{w}, p\rangle \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{S\cap D(A(t_0))}(u(t_0)).$$

On conclut que, pour chaque $t \in I$,

$$\inf_{w\in A(t)x\cap m\overline{B}} \big(\inf_{\bar{w}\in G(t,x)} \langle -w - \bar{w}, p\rangle\big) \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{S\cap D(A(t))}(x), \ \ \forall x \in S \cap D(A(t)).$$

D'où le résultat de la condition nécessaire. ■

**<u>Condition suffisante</u>**.

Dans cette partie de la preuve, nous supposons que pour tout $t \in I$,

$$Proj_S(x) \subset S \cap D(A(t)), \quad \textit{pour tout } x \in D(A(t)). \tag{3.32}$$

Supposons que (3.29) soit satisfaite. Nous allons prouver que pour $u_0 \in S \cap D(A(0))$, le problème (3.5) admet une solution Lipschitzienne $u : I \to \mathbb{R}^d$, tel que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in S$ pour tout $t \in I$.

Tout d'abord, pour $n \geq 1$, nous prenons une suite de partitions quelconque $0 = t^n_0 < t^n_1 < \cdots < t^n_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$, tel que pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et $n \geq 1$,

$$t^n_{i+1} - t^n_i = \frac{T}{n} =: \delta_n. \tag{3.33}$$

Comme $S \subset \mathbb{R}^d$, alors il est boule-compact et donc $Proj_S(x) \neq \emptyset$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (voir Remarque 1.6.4). Soit

$$u^n_0 = u_0 \ \text{ et } \ s^n_0 \in Proj_S(u^n_0) \subset S \cap D(A(t^n_0)),$$

la dernière inclusion est due à la relation (3.32). De (1.17),

$$u^n_0 - s^n_0 \in N^P_S(s^n_0),$$

et par la Remarque 1.9.19, il vient que

$$u^n_0 - s^n_0 \in N^P_{S\cap D(A(t^n_0))}(s^n_0).$$

Par l'hypothèse (3.29), il existe $w_0^n \in A(t_0^n)s_0^n \cap m\overline{B}$ et $v_0^n \in G(t_0^n, s_0^n)$, tel que

$$\langle -w_0^n - v_0^n, u_0^n - s_0^n \rangle \leq 0.$$

Soit

$$u_1^n \ := J_1^n(u_0^n - \delta_n v_0^n)$$

où $J_1^n(\cdot) := J_{\delta_n}^{A(t_1^n)}(\cdot) = (Id + \delta_n A(t_1^n))^{-1}(\cdot)$, ( la résolvante de $A(t_1^n)$ pour $\lambda = \delta_n$).
On a

$$u_1^n \in D(A(t_1^n))$$

et

$$u_0^n - u_1^n \in \delta_n(A(t_1^n)u_1^n + v_0^n).$$

Autrement dit, il existe $z_1^n \in A(t_1^n)u_1^n$, tel que

$$u_1^n - u_0^n = \delta_n(-z_1^n - v_0^n). \tag{3.34}$$

Maintenant, nous procédons comme ci-dessus. Pour $i = 1, \ldots, n$, on prend

$$s_i^n \in Proj_S(u_i^n) \subset S \cap D(A(t_i^n)). \tag{3.35}$$

Clairement, par (1.17) et Remarque 1.9.19

$$u_i^n - s_i^n \in N^P_{S\cap D(A(t_i^n))}(s_i^n).$$

Donc par (3.29), il existe $w_i^n \in A(t_i^n)s_i^n \cap m\overline{B}$ et $v_i^n \in G(t_i^n, s_i^n)$, tel que

$$\langle -w_i^n - v_i^n, u_i^n - s_i^n \rangle \leq 0. \tag{3.36}$$

Soit

$$u_{i+1}^n := J_{i+1}^n(u_i^n - \delta_n v_i^n) = J_{\delta_n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n - \delta_n v_i^n). \tag{3.37}$$

Il en découle

$$u_{i+1}^n \in D(A(t_{i+1}^n)) \tag{3.38}$$

et

$$\frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\delta_n} \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n + v_i^n. \tag{3.39}$$

Alors, il existe $z_{i+1}^n \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n$, tel que

$$u_{i+1}^n - u_i^n = \delta_n(-z_{i+1}^n - v_i^n). \tag{3.40}$$

De $(\mathcal{H}_A^1)$, $(\mathcal{H}_A^2)$, $(\mathcal{H}_G^2)$, (3.33), (3.37), (3.38) et Lemme 1.8.24, on a

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq \|J_{i+1}^n\big(u_i^n - \delta_n v_i^n\big) - J_{i+1}^n(u_i^n)\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \delta_n\|v_i^n\| + \delta_n\|A^0(t_i^n)u_i^n\| + dis\big(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)\big) \\
&+ \sqrt{\delta_n\big(1 + \|A^0(t_i^n)u_i^n\|\big)dis\big(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)\big)} \\
&\leq \delta_n M + \delta_n c(1 + \|u_i^n\|) + \alpha\delta_n + \sqrt{(\delta_n)^2(1 + c(1 + \|u_i^n\|))\alpha} \\
&\leq [M + c + \alpha + \sqrt{\alpha}(1 + c) + c(1 + \sqrt{\alpha})\|u_i^n\|]\delta_n =: (c_1 + c_2\|u_i^n\|)\delta_n. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \leq c_1\delta_n + (1 + c_2\delta_n)\|u_i^n\|.$$

En utilisant le Lemme 1.10.2 et (3.33), nous obtenons l'estimation suivante :

$$\|u_i^n\| \leq (\|u_0\| + c_1)\sum_{k=0}^{i-1}\delta_n \exp\big(c_2\sum_{k=0}^{i-1}\delta_n\big) \leq \big(\|u_0\| + c_1)T\exp(c_2T) =: c_3. \quad (3.42)$$

En remplaçant (3.42) dans l'inégalité (3.41), il en résulte que

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq (c_1 + c_2c_3)\delta_n =: K_1\delta_n. \quad (3.43)$$

A partir de cette dernière estimation, (3.40) et $(\mathcal{H}_G^2)$, on obtient

$$\|z_{i+1}^n\| \leq \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{\delta_n} + \|v_i^n\| \leq K_1 + M = \bar{m}. \quad (3.44)$$

Maintenant, en tenant compte du fait que pour $i = 0, \dots, n-1$, $w_i^n \in A(t_i^n)s_i^n$ et $z_{i+1}^n \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n$, en utilisant la définition de la pseudo distance de Vladimirov 1.8.20, et les relations (3.36) et (3.40) et le fait que $s_i^n \in S$, nous avons

$$\begin{aligned}
d_S^2(u_{i+1}^n) &\leq \|u_{i+1}^n - s_i^n\|^2 = \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 + \|u_i^n - s_i^n\|^2 + 2\big\langle u_{i+1}^n - u_i^n, u_i^n - s_i^n\big\rangle \\
&= \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 + \|u_i^n - s_i^n\|^2 + 2\delta_n\big\langle -z_{i+1}^n - v_i^n, u_i^n - s_i^n\big\rangle \\
&= \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 + \|u_i^n - s_i^n\|^2 + 2\delta_n\big\langle -z_{i+1}^n + w_i^n, u_i^n - s_i^n\big\rangle + 2\delta_n\big\langle -w_i^n - v_i^n, u_i^n - s_i^n\big\rangle \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 + \|u_i^n - s_i^n\|^2 + 2\delta_n\big\langle -z_{i+1}^n + w_i^n, u_i^n - u_{i+1}^n + u_{i+1}^n - s_i^n\big\rangle \\
&= \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 + \|u_i^n - s_i^n\|^2 + 2\delta_n\big\langle -z_{i+1}^n + w_i^n, u_i^n - u_{i+1}^n\big\rangle + 2\delta_n\big\langle -z_{i+1}^n + w_i^n, u_{i+1}^n - s_i^n\big\rangle \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 + d_S^2(u_i^n) + 2\delta_n(\|z_{i+1}^n\| + \|w_i^n\|)\|u_i^n - u_{i+1}^n\| \\
&+ 2\delta_n dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n))(1 + \|w_i^n\| + \|z_{i+1}^n\|).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
d_S^2(u_{i+1}^n) - d_S^2(u_i^n) \leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2 &+ 2\delta_n(\|w_i^n\| + \|z_{i+1}^n\|)\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&+ 2\delta_n dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n))(1 + \|w_i^n\ | + \|z_{i+1}^n\|).
\end{aligned}$$

De cette dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
d_S^2(u_i^n) - d_S^2(u_0) &= d_S^2(u_i^n) - d_S^2(u_{i-1}^n) + d_S^2(u_{i-1}^n) - d_S^2(u_{i-2}^n) + \cdots + d_S^2(u_1^n) - d_S^2(u_0) \\
&\leq \|u_i^n - u_{i-1}^n\|^2 + 2\delta_n(\|w_{i-1}^n\| + \|z_i^n\|)\|u_i^n - u_{i-1}^n\| \\
&+ 2\delta_n dis(A(t_i^n), A(t_{i-1}^n))(1 + \|w_{i-1}^n\| + \|z_i^n\|) \\
&+ \|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\|^2 + 2\delta_n(\|w_{i-2}^n\| + \|z_{i-1}^n\|)\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| \\
&+ 2\delta_n dis(A(t_{i-1}^n), A(t_{i-2}^n))(1 + \|w_{i-2}^n\| + \|z_{i-1}^n\|) \\
&+ \cdots + \|u_1^n - u_0\|^2 + 2\delta_n(\|w_0^n\| + \|z_1^n\|)\|u_1^n - u_0^n\| \\
&+ 2\delta_n dis(A(t_1^n), A(t_0^n))(1 + \|w_0^n\| + \|z_1^n\|).
\end{aligned}$$

En utilisant, le fait que $\|w_i^n\| \leq m$ et les relations (3.33), (3.44), (3.43) ainsi que l'hypothèse $(\mathcal{H}_A^1)$, il en résulte que pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
d_S^2(u_i^n) - d_S^2(u_0) &\leq \sum_{j=1}^{i} \Big( \|u_j^n - u_{j-1}^n\|^2 + 2\delta_n(\|w_{j-1}^n\| + \|z_j^n\|)\|u_j^n - u_{j-1}^n\| \\
&\quad + 2\delta_n dis(A(t_j^n), A(t_{j-1}^n))(1 + \|w_{j-1}^n\| + \|z_j^n\|)\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{i} \big((K_1\delta_n)^2 + 2K_1(\delta_n)^2(\|w_{j-1}^n\| + \|z_j^n\|) + 2\alpha(\delta_n)^2(1 + \|w_{j-1}^n\| + \|z_j^n\|)\big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{i} \big(K_1^2\frac{T^2}{n^2} + 2K_1\frac{T^2}{n^2}(m + \bar{m}) + 2\alpha\frac{T^2}{n^2}(1 + m + \bar{m})\big) \\
&= i\big(K_1^2\frac{T^2}{n^2} + 2K_1\frac{T^2}{n^2}(m + \bar{m}) + 2\alpha\frac{T^2}{n^2}(1 + m + \bar{m})\big) \\
&\leq n\big(K_1^2\frac{T^2}{n^2} + 2K_1\frac{T^2}{n^2}(m + \bar{m}) + 2\alpha\frac{T^2}{n^2}(1 + m + \bar{m})\big) \\
&\leq K_1^2\frac{T^2}{n} + 2K_1\frac{T^2}{n}(m + \bar{m}) + 2\alpha\frac{T^2}{n}(1 + m + \bar{m}) \\
&= \frac{1}{n}\big(K_1^2T^2 + 2K_1T^2(m + \bar{m}) + 2\alpha T^2(1 + m + \bar{m})\big) =: \frac{1}{n}\beta,
\end{aligned}$$

avec $\beta := K_1^2T^2 + 2K_1T^2(m + \bar{m}) + 2\alpha T^2(1 + m + \bar{m})$. Puisque $u_0 \in S$, i.e., $d_S(u_0) = 0$, on obtient pour $i = 1, \ldots, n$,

$$d_S^2(u_i^n) \leq \frac{1}{n}\beta. \tag{3.45}$$

Ensuite, pour tout $n \geq 1$, nous définissons les applications $v_n, s_n, y_n \ : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ comme suit : pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ i = 0, \ldots, n-1$,

$$v_n(t) = u_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\big(u_{i+1}^n - u_i^n\big), \quad s_n(t) = s_i^n, \quad y_n(t) = v_i^n. \tag{3.46}$$

Clairement, les applications $v_n$ sont absolument continues avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$, et pour $t \in ]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\delta_n}\big(u_{i+1}^n - u_i^n\big). \tag{3.47}$$

De (3.43), on a

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq K_1 \quad p.p. \ t \in I. \tag{3.48}$$

A l'aide des fonctions $\theta_n$ et $\phi_n$ données par la relation (3.14), l'inclusion (3.39) avec (3.47) et l'inégalité (3.45), peuvent être réécrites sous la forme continue suivante :

$$-\dot{v}_n(t) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)) + y_n(t) \quad p.p.t \in I, \tag{3.49}$$

avec

$$y_n(t) \in G(\phi_n(t), s_n(t)) \quad \forall t \in I, \tag{3.50}$$

et

$$d_S^2(v_n(\phi_n(t))) \leq \frac{1}{n}\beta. \tag{3.51}$$

Dans ce qui suit, nous montrons la convergence uniforme de la suite $(v_n)_n$.
Pour $t, s \in I$ $(s < t)$, nous avons

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leq \int_s^t \|\dot{v}_n(\tau)\| d\tau \leq K_1(t-s), \tag{3.52}$$

et

$$\|v_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{v}_n(s)\| ds \leq \|u_0\| + K_1 T =: K_2.$$

Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà 1.4.10, nous concluons que $(v_n)_n$ est relativement compacte. Ainsi, on peut lui extraire une sous suite, qui converge uniformément dans $C(I, \mathbb{R}^d)$ vers une application $u \in C(I, \mathbb{R}^d)$. Ce qui signifie que,

$$\|v_n - u\|_C \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to +\infty. \tag{3.53}$$

De plus, à partir de (3.52) et (3.15), (3.16), pour $t \in I$

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|v_n(\phi_n(t)) - v_n(t))\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty, \tag{3.54}$$

et (3.54), (3.53) impliquent que

$$\|v_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|v_n(\phi_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty. \tag{3.55}$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité (3.51), en utilisant (3.55) et la continuité de la fonction $d_S(\cdot)$, on obtient que $d_S^2(u(t)) \leq 0$, ce qui montre que

$$u(t) \in S \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{3.56}$$

D'autre part, en vertu de la relation (3.48), la suite $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$. D'où, on peut extraire une sous suite notée aussi $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ et qui converge faiblement dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.

Il nous reste à montrer que $u$ est une solution du problème (3.5).
Pour montrer que $u(t) \in D(A(t))$ *pour* $t \in I$, on procède comme dans la preuve du Théorème 3.2.5.
Maintenant, pour tout $t \in I$, on a (en prenant en compte le fait que $s_n(t) \in Proj_S\big(v_n(\phi_n(t))\big)$ (voir relation 3.35)

$$\begin{aligned}\|s_n(t) - u(t)\| &\leq \|s_n(t) - v_n(\phi_n(t))\| + \|v_n(\phi_n(t)) - u(t)\| \\ &= d_S(v_n(\phi_n(t))) + \|v_n(\phi_n(t)) - u(t)\|.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (3.56) et (3.55), il en résulte que pour tout $t \in I$,

$$\|s_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty. \tag{3.57}$$

D'autre part, la relation (3.50) et ($\mathcal{H}_G^2$) montrent que la suite $(y_n(\cdot))_n$ est bornée dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$, on peut alors lui extraire une sous suite notée aussi $(y_n(\cdot))_n$, qui converge faiblement vers une certaine application $y(\cdot) \in L^2(I, \mathbb{R}^d)$. Ensuite, d'après le Théorème de Mazur 1.4.9, il existe une suite $(\xi_n(\cdot))_n$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n(\cdot) \in co\{y_k : \ k \geq n\}$ et $\xi_n(\cdot) \to y(\cdot)$ fortement dans $L^2(I, \mathbb{R}^d)$. Par conséquent, nous pouvons extraire de $(\xi_n(\cdot))_n$ une sous suite qui converge presque partout vers $y(\cdot)$. Autrement dit, il existe un sous-ensemble $N' \subset [0, T]$ avec une mesure de Lebesgue nulle (négligeable) et une sous suite $(n_p)_p$ de $\mathbb{N}$ tel que $\forall\, t \in I \setminus N'$

$$\lim_{p\to\infty} \xi_{n_p}(t) = y(t).$$

Ainsi, pour $t \in I \setminus N'$, on a

$$y(t) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\{y_k(t) : \ k \geq n_p\} \subset \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\{G(\phi_k(t), s_k(t)) : \ k \geq n_p\}.$$

Puis, à partir de (3.57), pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \xi, y(t)\rangle \leq \delta^*(\xi, G(\phi_k(t), s_k(t)) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq n_p,$$

par conséquent, en utilisant ($\mathcal{H}_G^1$), (3.57) et (3.16), on obtient

$$\langle \xi, y(t)\rangle \leq \limsup_{k\to+\infty} \delta^*(\xi, G(\phi_k(t), s_k(t))) \leq \delta^*(\xi, G(t, u(t))). \tag{3.58}$$

De (3.58) et puisque $G$ est à valeurs convexes, fermées nous concluons par le Théorème 1.2.9 que

$$y(t) \in G(t, u(t)) \quad p.p.\, t \in I.$$

Pour terminer la preuve, nous vérifions, par l'utilisation de (3.49), que

$$-\dot{u}(t) - y(t) \in A(t)u(t) \quad p.p.t \in I.$$

La preuve de cette dernière inclusion est similaire à celle dans la preuve du théorème 3.2.5. Puisque $y(t) \in G(t, u(t))$ pour presque tout $t \in I$, il en résulte que

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + G(t, u(t)) \quad p.p.\, t \in I,$$

avec $u(0) = u_0$ et $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$. Cela montre que $u(\cdot)$ est une solution du problème (3.5), et puisque $u$ satisfait (3.56), nous concluons que $S$ est faiblement invariant pour (3.5). ■

## 3.4 INVARIANCE FORTE.

Le résultat suivant est utile dans la preuve de notre prochain Théorème.

**Théorème 3.4.1** *(Théorème 3.2 [12])*
*Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(\mathcal{H}_A^1)$ et $(\mathcal{H}_A^2)$. Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application mesurable sur $I$ vérifiant*

*(i) Pour tout $R > 0$, il existe une fonction positive $\alpha_R \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \alpha_R(t)\|x-y\| \quad \forall t \in I, \quad \forall x, y \in \overline{B}(0,R),$$

*(ii) il existe une constante positive $M$ tel que pour tout $t \in I$ et $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\|f(t,x)\| \leq M(1+\|x\|).$$

*Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème suivant :*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t)) & p.p. \, t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.59}$$

*admet une unique solution Lipschitzienne $u$. De plus, $\|\dot{u}(t)\| \leq K$ p.p. $t \in I$, où $K$ est une constante positive dépendant des données.*

**Théorème 3.4.2**
*Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(\mathcal{H}_A^1)$ et $(\mathcal{H}_A^2)$. Soit $G : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées satisfaisant $(\mathcal{H}_G^1)$, $(\mathcal{H}_G^2)$ et $(\mathcal{H}_G^3)$.*
*Soit $S$ un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$, tel que $S \cap D(A(t)) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$. Soit $u_0 \in S \cap D(A(0))$.*
*Si $S$ est fortement invariant pour (3.5), alors, pour tout $t \in I$, on a*

$$\sup_{v \in G(t,x)} \Big( \inf_{w \in A(t)x \cap m\overline{B}} \langle -w-v, p\rangle \Big) \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t))\cap S}(x), \ \forall x \in S \cap D(A(t)), \tag{3.60}$$

*c'est-à-dire,*

$$\sup_{v \in G(t,x)} \langle -v, p\rangle + \inf_{w \in A(t)x \cap m\overline{B}} \langle -w, p\rangle \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t))\cap S}(x), \ \forall x \in S \cap D(A(t)),$$

*avec $m := \max\{K+M, c(1+\|u_0\|+TK)\}$ et $K$ est une constante qui dépend de $\|u_0\|, c, M, \alpha$ et $T$. Si de plus, on suppose que $\forall t \in I, \forall x \in D(A(t)), \exists \epsilon > 0$ tel que*

$$Proj_S(y) \subset S \cap D(A(t)) \quad \forall y \in B(x,\epsilon),$$

*l'inverse est aussi vrai, i.e., la relation (3.60) implique que $S$ est fortement invariant.*

**Remarque 3.4.3**
*Observons, qu'en posant* $R(t,x) = A(t)x \cap m\overline{B}$, *la relation* (3.60) *s'écrit*

$$H_G(t,x;-p) + h_R(t,x;-p) \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t))\cap S}, \;\; \forall x \in D(A(t)) \cap S,$$

*avec* $H_G$ *est le Hamiltonien supérieur de* $G$ *et* $h_R$ *est le Hamiltonien inférieur de* $R$.

**Preuve**
**Condition nécessaire**.
Soit $\overline{t} \in I$. Fixons $\overline{x} \in D(A(\overline{t}))\cap S$ et $\overline{p} \in N^P_{D(A(\overline{t}))\cap S}(\overline{x})$. Comme $G$ est à valeurs compactes, il existe $\overline{v} \in G(\overline{t},\overline{x})$ tel que

$$\langle -\overline{v}, \overline{p}\rangle = \sup_{v \in G(\overline{t},\overline{x})} \langle -v, \overline{p}\rangle \tag{3.61}$$

(voir Théorème 1.1.4).
En appliquant le Corollaire 3.2.4, nous pouvons affirmer l'existence d'une sélection lipschitzienne de $G$, on la note $\phi$, tel que

$$\phi(\overline{t},\overline{x}) = \overline{v}. \tag{3.62}$$

Ensuite, nous obtenons une solution unique Lipschitzienne, $u : I \to \mathbb{R}^d$ du problème d'évolution suivant (voir Théorème 3.4.1)

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \phi(t,u(t)) & p.p.\, t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.63}$$

qui satisfait l'estimation suivante :

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K \quad p.p.\, t \in I.$$

avec $K$ dépend de $\|u_0\|, M, c, \alpha$ et $T$.
En utilisant l'invariance forte de $S$ par rapport à (3.5), on obtient l'invariance forte de $S$ par rapport à (3.63). Ce qui implique que $S$ est faiblement invariant par rapport à (3.63). Ainsi, en appliquant le Théorème 3.3.1, on obtient, pour tout $t \in I$,

$$\inf_{w \in A(t)x \cap m\overline{B}} \langle -w - \phi(t,x), p\rangle \leq 0 \quad \forall p \in N^P_{D(A(t))\cap S}(x), \; \forall x \in D(A(t)) \cap S.$$

En particulier, si on prend $t = \overline{t}$, $x = \overline{x}$ et $p = \overline{p}$, on obtient de (3.62),

$$\inf_{w \in A(\overline{t})\overline{x} \cap m\overline{B}} \langle -w - \overline{v}, \overline{p}\rangle \leq 0.$$

D'où, la relation (3.61) implique que

$$\sup_{v \in G(\bar{t},\bar{x})} \Big( \inf_{w \in A(\bar{t})\bar{x} \cap m\overline{B}} \langle -w - v, \bar{p} \rangle \Big) \leq 0.$$

Puisque $\bar{t}$, $\bar{x}$ et $\bar{p}$, ont été arbitrairement choisis, (3.60) découle immédiatement. ■

**<u>Condition suffisante.</u>**

Dans cette partie de la preuve nous supposons que : $\forall t \in I$, $\forall x \in D(A(t))$, $\exists \epsilon > 0$ tel que

$$Proj_S(y) \subset S \cap D(A(t)) \quad \forall y \in B(x, \epsilon). \tag{3.64}$$

Soit $u : I \to \mathbb{R}^d$ une solution du problème d'évolution (3.5). Alors, il existe une application mesurable $g(\cdot) : I \to \mathbb{R}^d$ tel que,

$$g(t) \in G(t, u(t)) \; p.p. \; t \in I$$

et

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + g(t) \quad p.p. \, t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.65}$$

De plus, on a déjà montré que $u$ est Lipschitzienne et est une limite uniforme de la suite $(v_n)_n$ définie par relation (3.12) (voir Proposition 3.2.6).

Maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la fonction $\eta_n : I \to \mathbb{R}$ par

$$\eta_n(t) := d_S^2(v_n(t)) \quad \forall t \in I.$$

Il est clair que la fonction $x \longmapsto d_S^2(x)$ est Lipschitzienne sur chaque ensemble borné de $\mathbb{R}^d$. En effet, soit $B$ un borné de $\mathbb{R}^d$ et soient $x, y \in B$, sachant que $u_0 \in S$

$$\begin{aligned} |d_S^2(x) - d_S^2(y)| &= |d_S(x) - d_S(y)||d_S(x) + d_S(y)| \\ &\leq \|x - y\|(|d_S(x)| + |d_S(y)|) \\ &\leq \|x - y\|(\|x - u_0\| + \|y - u_0\|) \\ &\leq \|x - y\|(2\|u_0\| + \|x\| + \|y\|) \leq \|x - y\|(2\|u_0\| + 2r) \end{aligned}$$

$r$ étant la borne de $B$. De plus, puisque $v_n(\cdot)$ est Lipschitzienne sur $I$, nous concluons que la fonction $\eta_n(\cdot)$ est également Lipschitzienne sur $I$. Donc, il existe $T_n \subset I$, un sous-ensemble négligeable, tel que la fonction $\eta_n(\cdot)$ est différentiable sur $I \setminus T_n$.

Soit $t \in (I \setminus \bigcup_n (T_n \cup N_n))$ ($N_n$ donné par la relation (3.17)). Sachant que :

$\dot{v}_n(t) = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{v_n(t+s) - v(t)}{s}$ où bien $s\dot{v}_n(t) = v_n(t+s) - v(t) + o(s)$, alors du Lemme 3.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} d_S^2(v_n(t+s)) = d_S^2(v_n(t) + \dot{v}_n(t)s + o(s)) &\leq d_S^2(v_n(t) + \dot{v}_n(t)s) + o(s^2) \\ &\leq (d_S(v_n(t)) + d_S^0(v_n(t); \dot{v}_n(t)s) + o(s))^2 + o(s^2) \\ &\leq d_S^2(v_n(t)) + 2d_S(v_n(t))d_S^0(v_n(t); \dot{v}_n(t)s) + o(s^2). \end{aligned} \tag{3.66}$$

D'autre part, par la définition (1.9.6) et le Lemme 3.2.1, on aura pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d_S(v_n(t))d_S^0(v_n(t); \dot{v}_n(t)) &\leq d_S(v_n(t)) \max_{\epsilon_n \in \partial_C d_S(v_n(t))} \langle \epsilon_n, \dot{v}_n(t) \rangle \\ &\leq \max_{z_n \in Proj_S(v_n(t))} \langle v_n(t) - z_n, \dot{v}_n(t) \rangle. \end{aligned} \tag{3.67}$$

En utilisant (3.17), on peut écrire $\dot{v}_n(t) = -g(t) - w_n(t)$, *p.p.* $t \in I$, tel que $w_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big)v_n\big(\theta_n(t)\big)$ *p.p.* $t \in I$ et de (3.21),

$$\|w_n(t)\| \leq \|\dot{v}_n(t)\| + \|g(t)\| \leq K + M \leq m$$

c'est-à-dire

$$w_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big)v_n\big(\theta_n(t)\big) \cap m\overline{B} \;\; p.p.\; t \in I. \tag{3.68}$$

Maintenant, puisque $v_n(\phi_n(t)) \in D(A(\phi_n(t)))$, de (3.64), il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in I$,

$$Proj_S(y) \subset S \cap D(A(\phi_n(t))) \quad \forall y \in B(v_n(\phi_n(t)), \epsilon).$$

Par conséquent, en observant que de (3.22), (3.16), pour $n$ assez grand, nous avons

$$\|v_n(\phi_n(t)) - v_n(t)\| \leq K\xi_n < \epsilon \quad \forall t \in I,$$

ce qui signifie que $v_n(t) \in B(v_n(\phi_n(t)), \epsilon)$, alors nous pouvons prendre $z_n \in Proj_S(v_n(t)) \subset S \cap D(A(\phi_n(t)))$. D'autre part, par $(\mathcal{H}_G^3)$, et comme $G$ est à valeurs compactes et $g(t) \in G(t, u(t))$ *p.p.* $t \in I$, on peut choisir $g_n(t) \in G(\phi_n(t), z_n)$ tel que

$$\|g(t) - g_n(t)\| \leq L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - z_n\|). \tag{3.69}$$

En effet, on a pour chaque $n \in \mathbb{N}$, fixé et pour tout $t \in I$, fixé

$$d(g(t), G(\phi_n(t), z_n)) = \inf_{x_n(t) \in G(\phi_n(t), z_n)} \|x_n(t) - g(t)\|$$

alors $\forall \epsilon > 0, \exists y_n^\epsilon(t) \in G(\phi_n(t), z_n)$ tel que

$$\begin{aligned} \|y_n^\epsilon(t) - g(t)\| &< d(g(t), G(\phi_n(t), z_n)) + \epsilon \\ &< L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - z_n\|) + \epsilon \end{aligned}$$

on prend $\epsilon = \dfrac{1}{m}$ $(m \geq 1)$ on aura l'existence d'une suite $(y_n^m(t))_m \subset G(\phi_n(t), z_n)$

$$\|y_n^m(t) - g(t)\| < L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - z_n\|) + \frac{1}{m}.$$

Comme $G$ est à valeurs compactes on peut extraire de $(y_n^m(t))_m$ une sous suite qui converge vers un élément $y_n(t) \in G(\phi_n(t), z_n)$, alors par passage à la limite lorsque $m \to \infty$, nous obtenons

$$\|y_n(t) - g(t)\| < L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - z_n\|).$$

Alors, en posant $y_n(t) = g_n(t) \in G(\phi_n(t), z_n)$, on a

$$\|g_n(t) - g(t)\| \leq L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - z_n\|).$$

Aussi, on sait que $v_n(t) - z_n \in N_S^P(z_n) \subset N^P_{S\cap D(A(\phi_n(t)))}(z_n)$ (voir Remarque 1.9.19), par la condition suffisante exprimée par (3.60), il existe $w_n'(t) \in A(\phi_n(t))z_n \cap m\overline{B}$ tel que

$$\langle v_n(t) - z_n, -g_n(t) - w_n'(t)\rangle \leq 0. \tag{3.70}$$

De plus, par la dernière inclusion, (3.68) et par l'utilisation de la définition de la pseudo-distance de Vladimirov (1.8.20) et $(\mathcal{H}_A^1)$, il en résulte

$$\begin{aligned}
\big\langle v_n(\theta_n(t)) - z_n, w_n'(t) - w_n(t)\big\rangle &\leq (1 + \|w_n(t)\| + \|w_n'(t)\|)dis\big(A(\theta_n(t)), A(\phi_n(t))\big)\\
&\leq \alpha(1 + \|w_n(t)\| + \|w_n'(t)\|)|\theta_n(t) - \phi_n(t)|
\end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de cette dernière inégalité, (3.69) et (3.70), on obtient pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
&\langle v_n(t) - z_n, \dot{v}_n(t)\rangle = \langle v_n(t) - z_n, -g(t) - w_n(t)\rangle\\
=\ & \langle v_n(t) - z_n, -g(t) + g_n(t)\rangle + \langle v_n(t) - z_n, -w_n(t) + w_n'(t)\rangle\\
+\ & \langle v_n(t) - z_n, -g_n(t) - w_n'(t)\rangle\\
\leq\ & \langle v_n(t) - z_n, -g(t) + g_n(t)\rangle + \langle v_n(t) - v_n(\theta_n(t)), -w_n(t) + w_n'(t)\rangle\\
+\ & \langle v_n(\theta_n(t)) - z_n, -w_n(t) + w_n'(t)\rangle\\
\leq\ & L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - z_n\|)\|v_n(t) - z_n\| + \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\ \|\|w_n(t) - w_n'(t)\|\\
+\ & \alpha(1 + \|w_n(t)\| + \|w_n'(t)\|)|\theta_n(t) - \phi_n(t)|\\
\leq\ & L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - v_n(t)\|)\|v_n(t) - z_n\| + L_G\|v_n(t) - z_n\|^2\\
+\ & \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\|(\|w_n(t)\| + \|w_n'(t)\|) + \alpha(1 + \|w_n(t)\ | + \|w_n'(t)\|)|\theta_n(t) - \phi_n(t)|\\
=\ & L_G(|t - \phi_n(t)| + \|u(t) - v_n(t)\|)d_S(v_n(t)) + L_G d_S^2(v_n(t))\\
+\ & \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\|(\|w_n(t)\| + \|w_n'(t)\|) + \alpha(1 + \|w_n(t)\ | + \|w_n'(t)\|)|\theta_n(t) - \phi_n(t)|\\
=\ & L_G d_S^2(v_n(t)) + \Delta_n(t),
\end{aligned} \tag{3.71}$$

avec,

$$\begin{aligned}\Delta_n(t) &:= L_G(|t-\phi_n(t)|+\|u(t)-v_n(t)\|)d_S(v_n(t))+\|v_n(\theta_n(t))-v_n(t)\|(\|w_n(t)\|+\|w'_n(t)\|)\\ &+ \alpha(1+\|w_n(t)\|+\|w'_n(t)\|)|\theta_n(t)-\phi_n(t)|.\end{aligned}$$

Comme $u_0 \in S$, à partir de (3.22) on a, $d_S(v_n(t)) \leq \|u_0 - v_n(t)\| \leq KT$. Alors, en utilisant (3.15), (3.16), (3.22), (3.24) et le fait que $\|w_n(t)\| \leq m$ et $\|w'_n(t)\| \leq m$, il est clair que

$$\Delta_n(t) \longrightarrow 0, \quad lorsque \;\; n \to +\infty.$$

De plus, $\Delta_n(\cdot)$ est intégrable. À partir de (3.66), (3.67) et (3.71), il vient que pour presque tout $t \in I$

$$\eta_n(t+s) \leq \eta_n(t) + 2L_G\eta_n(t)s + \Delta_n(t)s + o(s^2),$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\eta_n(t+s)-\eta_n(t)}{s} \leq 2L_G\eta_n(t) + \Delta_n(t) + o(s),$$

quand $s \to 0$, on obtient

$$\dot{\eta}_n(t) \leq 2L_G\eta_n(t) + \Delta_n(t) \quad p.p.\, t \in I.$$

Par application du Lemme de Grönwall 1.10.4, en tenant compte du fait que $\eta_n(0) = d_S^2(u_0) = 0$, il en résulte que

$$\eta_n(t) \leq e^{2TL_G}\int_0^t \Delta_n(s)ds \quad \forall t \in I.$$

Par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue 1.5.1, nous concluons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n(t) = 0$ pour tout $t \in I$, ce qui implique que

$$d_S^2(u(t)) = \lim_{n\to+\infty} d_S^2(v_n(t)) = \lim_{n\to+\infty} \eta_n(t) = 0.$$

Il en résulte que, $u(t) \in S$ pour tout $t \in I$. C'est-à-dire, $S$ est fortement invariant par rapport au problème (3.5).
Ceci termine notre preuve. ■

# Conclusion et perspectives

Dans la première partie de cette thèse, nous avons étudié l'existence de solutions absolument continue d'un système dynamique de deux inclusions différentielles, toutes les deux régies par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état et avec perturbations multivoques. Aussi, nous avons donné deux applications l'une à un problème de minimisation et l'autre à un problème de type Skorohod. Comme deuxième partie, nous avons donné, en dimension finie, des caractérisations à l'invariance faible et forte des ensembles fermés par rapport à une inclusion différentielle régie par un opérateur maximal monotone qui dépend du temps ainsi que son domaine, et avec perturbation multivoque.

Dans les perspectives proches, nous allons essayer d'étendre les résultats obtenus à la dimension infinie, et de donner des caractérisations à l'invariance faible et forte des ensembles fermés par rapport à un problème d'évolution plus général,i.e., quand l'opérateur dépend du temps et de l'état.

# Bibliographie


[1] **L. Adam and J. Outrata**, On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation. Discrete Contn. Dyn. Syst. Ser. B 19(9) (2014) : 2709-2738

[2] **S. Adly, A. Hantoute and B.T. Nguyen**, Lyapunov stability of differential inclusions with Lipschitz Cusco perturbations of maximal monotone operators. Set-Valued Var. Anal. 28 (2019) : 345-368.

[3] **S. Adly, A. Hantoute and B.T. Nguyen**, Invariant sets and Lyapunov pairs for differential inclusions with maximal monotone operator. J. Math. Anal. Appl. 457(2) (2018) : 1017-1037.

[4] **S. Adly, A. Hantoute and M. Théra**, Nonsmooth Lyapunov pairs for infinite-dimensional first order differential inclusions. Nonlinear Anal. 75(3) (2012) : 985-1008.

[5] **Z. Artstein**, Extensions of Lipschitz selections and an application to differential inclusion. Nonlinear Anal. 16(7-8) (1991) : 701-704.

[6] **D. Atherton**, Nonlinear control engineering. Van Nostrand, (1982).

[7] **H. Attouch, A. Cabot and M.O. Czarnecki**, Asymptotic behavior of nonautonomous monotone and subgradient evolution equations. Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018) : 755-790.

[8] **J.P. Aubin**, Viability Theory. Birkhäuser, Boston, (1991).

[9] **J.P. Aubin and A. Cellina**, Differential inclusions set-valued maps and viability theory. Springer-Verlag, Berlin (1984).

[10] **J.P. Aubin and H. Frankowska**, Set-Valued Analysis. Birkhäuser Boston, Inc., Boston (2009).

[11] **D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques**, Multi-valued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators. Evol. Equ. Control Theory. 9(1) (2020) : 219-254.

[12] **D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques**, Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications. J. Fixed Point Theory Appl. 21(2) (2019) : 40.

[13] **D. Azzam-Laouir and M. Benguessoum**, Multi-valued perturbations to a couple of differential inclusions governed by maximal monotone operators. Filomat. 35(13) (2021) : 4369-4380.

[14] **D. Azzam-Laouir and I. Boutana-Harid**, Mixed semicontinuous perturbation to an evolution problem with time-dependent maximal monotone operator. J. Nonlinear and Convex Analysis. 20(1) (2018) : 39-52.

[15] **D. Azzam-Laouir, C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques**, Perturbed evolution proplems with continuous bounded variation in time and applications. Set-Valued Var. Anal. 26(3) (2018) : 693-728.

[16] **D. Azzam-Laouir and K. Dib**, Invariant closed sets with respect to differential inclusions with time-dependent maximal monotone operators. Set-valued Var. Anal. 32(7) (2024). https ://doi.org/10.1007/s11228-024-00711-9.

[17] **V. Barbu**, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Noordhoff Int. Publ. Leyden (1976).

[18] **H.H. Bauschke and P.L. Combettes**, Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Springer (2011).

[19] **W. Belhoula**, Résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles gouvernéés par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps. Thèse de doctorat LMD. Université de Mohammed Seddik Benyahia (2019).

[20] **M. Benguessoum, D. Azzam-Laouir and C. Castaing**, On a time and state dependent maximal monotone operator coupled with a sweeping process with perturbations. Set-Valued Var. Anal. 29 (2021) : 191-219.

[21] **J.M. Bony**, Principe du maximun, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier Grenoble 19 (1969) : 277-304.

[22] **N. Bouhali, D. Azzam-Laouir and M.D.P. Monteiro Marques**, Optimal control of an evolution problem involving time-dpendent maximal monotone operators. J. Optim Theory Appl. 194 (2022) : 59-91.

[23] **M. Bounkhel**, Regularity concepts in nonsmooth analysis, Theory and Applications. Springer Science Business Media. LLC (2012).

[24] **H. Brézis**, On a characterization of flow-invariant sets. Commun. Pure Appl. Math. 23 (1970) : 261-263.

[25] **H. Brézis**, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[26] **H. Brézis**, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam (1973).

[27] **M. Brokate, P. Krejčí**, Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality. Discrete Contn. Dyn. Syst. Ser. B 18(2) (2012) : 331-348.

[28] **K. Camlibel, L. Ianelli and A. Tanwani**, Convergence of proximal solutions for evolution inclusions with time-dependent maximal monotone operators. Math. Programming, 194 (2022) : 1017-1059.

[29] **T.H. Cao and B.S. Mordukovich**, Optimal control of nonconvex perturbed sweeping process. J. Differ. Equ. 266 (2019) : 1003-1050.

[30] **C. Castaing and M. Valadier**, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 580 (1977).

[31] **C. Castaing, P. Raynaud de Fitte and M. Valadier**, Young measures on topological spaces. with applications in control theory and probability theory. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (2004).

[32] **E. Cépa**, Problème de Skorohod multivoque. The Annals of probability. 26 (1998) : 500-532.

[33] **I. Chalendar and E. Fricain**, Compléments en analyse, cours et exercices, (2010-2011). http ://math.univ-lyon1.fr/ chalenda/new-cours-complet.pdf.

[34] **F.H. Clarke**, Generalized gradients and applications. Trans. Am. Math. Soc. 205 (1975) : 247-262.

[35] **F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev and M.L. Radulescu**, Approximate invariance and differential inclusions in Hilbert spaces. J. Dynam. Control Systems 3(4) (1997) : 493-518.

[36] **F.H. Clarke, Y. Ledyaev, R.J. Stern and P.R. Wolenski**, Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer, New York (1998).

[37] **G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang and B.S. Mordukhovich**, Discrete approximations of a controlled sweeping process. Set-valued Var. Anal. 23 (2015) : 69-86.

[38] **G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang and B.S. Mordukhovich**, Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets. J. Differ. Equ. 260 (2016) : 3397-3447.

[39] **G. Colombo and M. Palladino**, The minimum time function for the controlled Moreau's sweeping process. SIAM J. Control Optim. 54(4) (2016) : 2036-2062.

[40] **R.D. Descombes**, Cours d'analyse. Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[41] **K. Dib and D. Azzam-Laouir**, Existence solutions for a couple of differential inclusions involving maximal monotone operators. Applicable Analysis. 102(9) (2023) : 2628-2650.

[42] **J. Diestel and J.J. Uhl**, Vector measures. Mathematical Surveys and Monographs. 5, AMS. (1977).

[43] **T. Donchev**, Functional differential inclusions with monotone right-hand side. Nonlinear Anal. 16 (1991) : 543-552.

[44] **T. Donchev, V. Rios and P. Wolenski**, Strong invariance and one-sided Lipschitz multifunctions. Nonlinear Anal. 60(5) (2005) : 849-862.

[45] **T. Donchev, V. Rios and P. Wolenski**, A characterization of strong invariance for perturbed dissipative systems. Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Heidelberg. (30)1 (2004) : 343-349.

[46] **T. Donchev, V. Rios and P. Wolenski**, Strong invariance for discontinuous Hilbert space differential inclusions. An. S tiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.) 51(2) (2006) : 265-279.

[47] **T. Donchev**, Properties of the reachable set of control systems. System Control Lett., 46 (2002) : 379-386.

[48] **H. Frankowska, S. Plaskacz and T. Rzezuchowski**, Measurable viability theorems and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. J. Differ. Equ. 116 (1995) : 265-305.

[49] **H. Frankowska and S. Plaskacz**, A measurable upper semicontinuous viability theorem for tubes. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. 26 (1996) : 565-582.

[50] **G. Haddad**, Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory. Isr. J. Math. 39 (1981) : 83-100.

[51] **C. Henry**, An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side. J. Math. Anal. Appl. 41 (1973) : 179-186.

[52] **J.M. Holte**, Discrete Gronwall Lemma and applications. http ://homepages.gac.edu/ holte/publications/GronwallLemma.pdf.

[53] **A.D. Ioffe**, Proximal analysis and approximate subdifferentials, J. London. Soc. 41 (2) (1990) : 175-192.

[54] **N. Kenmochi**, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications. Bull. Fac. Educ. Chiba Univ. 30 (1981) : 1-81.

[55] **M. Kisieliwicz**, Differential inclusion and optimal control. PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic publishers, Dortrecht, Boston, London (1991).

[56] **M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques**, BV solutions to evolution proplems with time-depentent domains. Set-Valued. Anal. 5 (1997) : 57-72.

[57] **M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques**, On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes. Top Methods Nonlinear Anal. 12 (1998) : 179-191.

[58] **B.K. Le**, Well-posedeness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions. Optimization 69(6) (2020) : 1187-1217.

[59] **R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland and B. Maschke**, Dissipative systems analysis and control. Springer London, CCE Series (2000).

[60] **L. Maticiuc, A. Rascanu, L. Slominski and M. Topolewski**, Cadlag Skorohod problem driven by maximal monotone operator. J. Math. Anal. Appl. 429(2) (2015) : 1305-1346.

[61] **B. Maury and J. Venel**, Un modèle de mouvement de foule. ESAIM Proc. 18 (2007) : 143-152.

[62] **B.S. Mordukovich**, Variational analysis and optimization of sweeping processes with controlled moving sets. Revista Investigation Operacional 39(3) (2018) : 283-302.

[63] **B.S. Mordukhovich and Y. Shao**, Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces,. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996) : 1235-1280.

[64] **J.J. Moreau**, Rafle par un convexe variable I. Travaux Sém. Anal. Convexe Montpellier Exposé. 15 (1971).

[65] **J.J. Moreau**, Rafle par un convexe variable II, Travaux Sém. Anal. Convexe Montpellier Exposé. 3 (1972).

[66] **J.J. Moreau**, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, J. Differ. Equ. 26 (1977) : 347-374.

[67] **M. Nagumo**, Uber die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen. Proc. Phys. Math. Soc. Japan 24 (1942) : 551-559.

[68] **A. Rascanu**, Deterministic and stochastic differential equations in Hilbert spaces involving multivalued maximal monotone operators. Panamer. Math. J. 6(3) (1996) : 83-119.

[69] **F. Selamnia, D. Azzam-Laouir and M.D.P. Monteiro Marques**, Evolution problems involving state-dependent maximal monotone operators. Appl Anal (2020).

[70] **A. Skorohod**, Stochastic equations for diffusions in a bounded region. Theory Probab. Appl. 6 (1961) : 264-274.

[71] **Y. Sonntag**, Topologie et Analyse fonctionnelle. Ellipses, édition marketing S.A, (1998).

[72] **A. Tanwani, B. Brogliato and C. Prieur**, Well-posedness and output regulation for implicit time-varying evolution variational inequalities. SIAM. J. Control Optim. 56 (2018) : 751-781.

[73] **A.A. Tolstonogov**, BV Continuous solutions of an evolution inclusion with maximal monotone operator and nonconvex-valued perturbation. Existence theorem. Set-Valued Var. Anal. 29 (2021) : 29-60.

[74] **V.M. Veliov**, Sufficient conditions for viability under imperfect measurement, Set-Valued Anal. 1 (1993) : 305-317.

[75] **A.A. Vladimirov**, Nonstationnary dissipative evolution equation in Hilbert space. Nonlinear Anal. 17 (1991) : 499-518.

[76] **I.I. Vrabie**, Compactness methods for Nonlinear evolution equations. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics. Longman Scientific and Technical, John Wiley and Sons, Inc. New York, 32 (1987).

## *ملخّص*

في هذه الأطروحة ندرس من ناحية، وجود حلول مستمرّة مطلقا لنظام ديناميكي مكوّن من إحتواءين تفاضليّين، كلاهما محكوم بمؤثّرات رتيبة قصوى متعلّقة بالزّمن والحالة ومضطربة بتوابع متعدّدة القيم. يتّم أيضا عرض تطبيقات على مشكلة التّحكم الأمثل ومشكلة سكورهود. من ناحية أخرى، فإنّنا ندرس في البعد المنتهي، خصائص الثّبات الضّعيف والقويّ للمجموعات المغلقة، فيما يتعلّق بإحتواء تّفاضلي محكوم بمؤثّرات رتيبة قصوى متعلّقة بالزّمن ومضطربة بتابع متعدّد القيم.

## *Abstract*

In this thesis we study, on the one hand, the existence of absolutely continuous solutions to a dynamical system composed of two differential inclusions, both of them governed by maximal monotone operators depending on the time and on the state, with multi-valued perturbations. Applications to an optimal control problem and Skorohod problem are also given. On the other hand, we give, in finite dimensional setting, the characterizations of weak and strong invariance of closed sets with respect to a differential inclusion governed by time-dependant maximal monotone operators with multi-valued perturbation.

## *Résumé*

Dans cette thèse nous étudions, d'une part, l'existence de solutions absolument continues d'un système dynamique composé de deux inclusions différentielles, toutes les deux gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état, avec perturbations multivoques. Des applications à un problème de contrôle optimal et à un problème de Skorohod sont aussi présentées. D'autre part, nous étudions, en dimension finie, des caractérisations de l'invariance faible et forte des ensembles fermés par rapport à une inclusion différentielle gouvernée par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps avec perturbation à valeurs multivoques.