

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département de d'Electrotechnique

N° :...../2024

## **MEMOIRE DE MASTER**

**DOMAINE:** Sciences et Technologies

**FILIERE:** Electrotechnique

**SPECIALITE:** Machines électriques

### **Thème**

## **Modèles pour la modélisation dynamique des dispositifs à aimants permanents**

**Présenté Par :**

*Marouf Sid Ahmed*

*Laissaoui Amir*

**Encadré Par :**

*M<sup>me</sup>. Boulassel\_Belli Zoubida*

**Promotion : 2023 /2024**

**Date de soutenance :30 juin 2024**

### **Jury de Soutenance**

**Président : AMIOUR Dounia**

**Grade MCA**

**UnivMSB jijel**

**Encadreur : BELLI Zoubida**

**Grade Professeur**

**Univ MSB jijel**

**Examineur : BOURAHILA khiereddine** **Grade MCB**

**Univ MSB jijel**

# Remerciements

*Nous tenons tout d'abord à remercier le Dieu tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.*

*En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mme : **Boulassel\_Belli Zoubida**, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.*

*Nos vifs remerciements également aux membres du jury pour leurs attentions et intérêts portés envers notre travail. Merci de nous avoir honorés de votre présence.*

*Nous tenons à exprimer nos remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné.*

*Sans oublier de présenter nos sincères remerciements à nos parents qui ont été toujours de nous encourager durant notre parcours de nos études, ainsi que pour leurs aides, leurs compréhensions et leurs soutiens.*

*Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire...*

*Merci à tous et à toutes*

*Merci* 

**Je dédie ce travail :**

*À mes parents, pour leur amour inconditionnel, leur soutien et leurs encouragements constants. Vous avez toujours cru en moi et m'avez donné la force de poursuivre mes rêves.*

*À mes chères sœurs*

*À mon cher frère*

*À toute ma famille*

*À tous mes amis et mes collègues.*

*À Tous ceux qui j'aime et ceux qui m'aiment.*

*Sid ahmed*

*Je dédie ce travail*

*A l'âme pure de ma chère mère qui nous a quittés*

*(Que Dieu ait pitié d'elle)*

*A mon très cher père*

*Qu'il a toujours été là pour moi, et qui m'a*

*Donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.*

*J'espère qu'il trouve dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon Amour.*

*Et pour ma très chère sœur*

*A toute ma famille*

*A tous mes amis et mes collègues.*

*Amir*

## **Table de matières**

|  |    |
|--|----|
| <i>Introduction générale</i> .....   | 1  |
| <i>I. Chapitre I: Modélisation des systèmes électrotechniques par le calcul du champ électromagnétique</i> ..... | 4  |
| I.1 Introduction .....   | 5  |
| I.2 Equations du champ électromagnétique .....   | 5  |
| I.2.1 Equations de Maxwell .....   | 5  |
| I.2.2 Relations constitutives des milieux .....  | 6  |
| I.2.3 Relations de continuité entre deux milieux différents .....  | 8  |
| I.3 Hypothèses simplificatrices liées aux dispositifs électrotechniques .....                                    | 9  |
| I.4 Formulation du champ électromagnétique .....   | 10 |
| I.4.1 Modèle électrostatique .....   | 10 |
| I.4.2 Modèle électrocinétique .....  | 11 |
| I.4.3 Modèle magnétostatique .....   | 11 |
| I.4.4 Modèle magnétodynamique .....  | 12 |
| I.5 Conditions aux limites .....   | 13 |
| I.6 Méthodes de résolution des EDP .....   | 13 |
| I.6.1 Méthodes numériques .....  | 13 |
| I.6.2 Méthodes analytiques .....   | 15 |
| I.6.3 Méthodes semi-analytiques .....  | 16 |
| I.7 Conclusion .....   | 16 |
| <i>II. Chapitre II: Modélisation des pertes par courants induits dans les conducteurs massifs</i> .....          | 17 |
| II.1 Introduction .....  | 18 |
| II.2 Equations électromagnétiques .....  | 18 |
| II.2.1 Modèle analytique pour le calcul des courants induits .....   | 20 |
| II.2.2 Modèle numérique pour le calcul des pertes par courants induits .....                                     | 26 |
| II.3 Conclusion .....  | 28 |
| <i>III. Chapitre III: Application et résultats</i> .....   | 29 |
| III.1 Introduction .....   | 30 |
| III.2 Description du dispositif étudié .....   | 30 |
| III.2.1 Modèle géométrique .....   | 31 |
| III.2.2 Caractéristiques physiques .....   | 32 |
| III.3 Modèle numérique par la MEF pour le calcul des pertes par courants induits .....                           | 33 |
| III.4 Modèle analytique pour le calcul des pertes par courants induits .....                                     | 36 |
| III.5 Conclusion .....   | 43 |
| <i>Conclusion générale et perspectives</i> .....   | 44 |
| Bibliographie .....  | 47 |

## *Liste des figures*

|  |    |
|--|----|
| Figure I.1. Interface entre deux milieux différents .....  | 9  |
| Figure I.2. Exemple du maillage EF .....   | 14 |
| Figure I.3. Éléments droits .....  | 14 |
| Figure I.4. Éléments triangulaires .....   | 15 |
| Figure I.5. Éléments carrés .....  | 15 |
| Figure II.1. Plaque fine soumise à un champ magnétique.....  | 21 |
| Figure II.2. Conditions aux limites.....   | 23 |
| Figure III.1. Dispositif expérimental.....   | 30 |
| Figure III.2. Modèle 2D du dispositif expérimental et sa représentation schématique .....  | 31 |
| Figure III.3. Configuration du dispositif avec ses paramètres géométriques. ....   | 32 |
| Figure III.4. Caractéristiques B(H).....   | 33 |
| Figure III.5. Caractéristiques B(H) de l'aimant.....   | 33 |
| Figure III.6. Domaine d'étude considéré.....   | 34 |
| Figure III.7. Maillage par éléments finis du domaine d'étude considéré.....  | 34 |
| Figure III.8. Lignes équipotentielles du potentiel vecteur magnétique A[T.m].....  | 34 |
| Figure III.9. Répartition de la densité du flux magnétique B[T].....   | 34 |
| Figure III.10. Variation de l'épaisseur de peau avec la fréquence.....   | 35 |
| Figure III.11. Répartition de la densité des courants induits [A/m <sup>2</sup> ] pour f=50Hz.....                                 | 35 |
| Figure III.12. Répartition de la densité des courants induits [A/m <sup>2</sup> ] pour f=20kHz.....                                | 35 |
| Figure III.13. Répartition de la densité des pertes [W/m <sup>3</sup> ] pour f=50Hz.....   | 36 |
| Figure III.14. Répartition de la densité des pertes [W/m <sup>3</sup> ] pour f=20kHz.....  | 36 |
| Figure III.15. Evolution des pertes par courants induits avec la fréquence.....  | 36 |
| Figure III.16. Courants de Foucault tridimensionnels dans un conducteur rectangulaire massif.....                                  | 37 |
| Figure III.17. Champ magnétique, H <sub>y</sub> , dans l'aimant pour une fréquence de 50Hz.....                                    | 38 |
| Figure III.18. Champ magnétique, H <sub>y</sub> , dans l'aimant pour une fréquence de 20kHz.....                                   | 38 |
| Figure III.19. Variation du champ magnétique H <sub>y</sub> suivant l'axe ox au milieu de l'aimant (z=0m) pour 50 Hz et 20kHz..... | 39 |
| Figure III.20. Variation du champ magnétique H <sub>y</sub> suivant z au milieu de l'aimant (x=0m) pour 50 Hz et 20kHz.....        | 39 |
| Figure III.21. Variation de la composante J <sub>x</sub> des courants induits dans l'aimant pour 50 Hz.....                        | 40 |
| Figure III.22. Variation de la composante J <sub>x</sub> des courants induits dans l'aimant pour 20 kHz.....                       | 40 |
| Figure III.23. Variation de la composante J <sub>z</sub> des courants induits dans l'aimant pour 50 Hz.....                        | 41 |

|   |    |
|---|----|
| Figure III.24. Variation de la composante $J_z$ des courants induits dans l'aimant pour 20 k Hz.....  | 41 |
| Figure III.25. Variation des pertes par courants induits avec la fréquence.....   | 42 |
| Figure III.26. Comparaison entre les variations des pertes par courants induits avec la fréquence pour les modèles analytique et numérique..... | 42 |

## *Liste des tableaux*

|  |    |
|--|----|
| Tableau 1.Caractéristiques géométriques du dispositif étudié. .... | 31 |
| Tableau 2.Matériaux de construction .....                          | 32 |
| Tableau 3.Caractéristiques physiques du dispositif.....            | 33 |

# *Nomenclature*

## **Chapitre I : Modélisation des systèmes électrotechniques par le calcul du champ électromagnétique**

B : Induction magnétique [Tesla].

D : Induction électrique [A.S/m<sup>2</sup>].

H : Champ magnétique [A/m].

E : Champ électrique [V/m].

$\rho$  : Densité de la charge d'espace [C/m<sup>3</sup>].

$\rho_s$  : Densité de charge électrique surfacique à l'interface [C/m<sup>2</sup>].

J : Densité de courant [A/m<sup>2</sup>].

$J_c$  : Densité de courant de conduction électrique [A/m<sup>2</sup>].

$J_s$  : Densité de courant imposée dans l'inducteur [A/m<sup>2</sup>].

$J_D$  : Densité de courant de déplacement [A/m<sup>2</sup>].

$J_{aim}$  : Densité de courant d'aimantation en [A/m<sup>2</sup>].

$J_{ind}$  : Densité du courant induit [A/m<sup>2</sup>].

$\mu$  : Perméabilité magnétique du matériau [H/m].

$\mu_r$  : perméabilité relative du milieu considéré.

$\mu_0$  : perméabilité du vide [H/m].

$\epsilon_0$  : Permittivité de l'air [F/m].

$\epsilon_r$  : Permittivité relative du milieu considéré.

$\sigma$  : Conductivité électrique en [S/m].

v : Vecteur de vitesse en [m/s].

$B_r$  : Induction rémanente [Tesla].

$\emptyset$  : Flux magnétique traversant la section (s).

$dl$  : Élément de longueur orienté.

$I_i$ : Courant contenu à l'intérieur du contour fermé.

$n$  : Vecteur normal à la surface de séparation entre les deux milieux.

$A$  : Potentiel vecteur magnétique.

MDF : Méthode des différences finies.

MEF : Méthode des éléments finis.

EDP : Equations aux dérivées partielles.

## **Chapitre II : Modélisation des pertes par courants induits dans les conducteurs massifs**

$\delta$  : Profondeur de pénétration ou épaisseur de peau.

$\mu$  : Perméabilité magnétique du matériau [H/m].

$\omega$  : Pulsation du champ d'induction [Rad/s].

$f$ : Fréquence en [Hz].

$B$  : Induction magnétique [Tesla].

$H$  : Champ magnétique [A/m].

$E$  : Champ électrique [V/m].

$J$  : Densité de courant [A/m<sup>2</sup>].

$\sigma$  : Conductivité électrique en [S/m].

$B_r$ : Induction rémanente [Tesla].

$L_x$  : Largeur suivant Ox [m].

$L_y$  : Longueur suivant Oy [m].

$e$  : Profondeur, épaisseur, suivant Oz.

## *Nomenclature*

---

$K_{\Gamma_m}$  ;  $L_{\Gamma_m}$  ;  $M_{\Gamma_m}$  ;  $N_{\Gamma_m}$  ;  $P_{C_n}$  ;  $Q_{C_n}$  ;  $R_{C_n}$  ;  $S_{C_n}$  : Constantes de séparation et coefficients à déterminer par les conditions aux limites.

$\psi$  : Flux totalisé à travers la bobine [Wb].

$\emptyset_p$  : Flux propre [Wb].

$\emptyset_f$  : Flux de fuite [Wb].

$N_{sp}$  : Nombre de spires.

$R_e$  : Reluctance du conducteur [ $\Omega$ ].

$s$  : Section de conducteur [ $m^2$ ].

$h_m$  : Epaisseur du conducteur [m].

$H_y$  : Champ magnétique suivant  $Oy$  [A/m].

$H_s$  : Champ magnétique dans lequel le conducteur est plongé [A/m].

$J_x$  : Densité de courant suivant  $Ox$  [ $A/m^2$ ].

$J_z$  : Densité de courant suivant  $Oz$  [ $A/m^2$ ].

$P$  : Puissance moyenne active [Watt].

$Q$  : Puissance moyenne réactive [VAR].

$W$  : Vecteur de Poynting.

$R_e$  : Reluctance du conducteur.

$n$  : Rang des harmoniques spatiales.

$v$  : Vecteur de vitesse en [m/s].

$A$  : Potentiel vecteur magnétique.

$R_{ext}$  : Résistance externe.

$L_M$  : Longueur de l'aimant de l'arbre.

$I_M$  : Courant total dans la surface en coupe de chaque surface magnétique.

$J_s$  : Densité de courant source ou d'excitation

$p_{tot}$ : Pertes instantanées totales

### **Chapitre III : Application et résultats**

$N$ : Nombre de spire totale

$I$ : Courant d'excitation

$HA$  : Epaisseur de l'aimant

$H_s$ : Champ magnétique imposé sur les frontières de l'aimant

---

---

# *Introduction générale*

---

---

## **Introduction générale**

Ces dernières décades les besoins et les développements industriels en matière d'énergie électrique et ses applications diverses sont devenues la préoccupation majeure des chercheurs et des ingénieurs spécialisés dans le domaine, où ils doivent faire face simultanément à plusieurs challenges, concernant la qualité et les performances des produits tout en répondant à des exigences techniques, économiques et environnementales. De ce fait, des dispositifs électrotechniques novateurs à base des matériaux de très hautes performances énergétiques tels que, les aimants permanents et les supraconducteurs, sont introduits dans différentes applications, à savoir le transport, la propulsion et aussi médicales. Dans la majorité de ces applications, et selon les vitesses nécessaires, dans le domaine du transport et la propulsion par exemple, ou selon les températures demandées, comme dans les dispositifs médicaux destinées aux traitements thermiques, des fréquences élevées sont requises, où la gamme de ces dernières peut aller de quelques Hertz à plusieurs kilo-Hertz. Cela engendre en régime variable l'apparition des courants induits, dits aussi courants de Foucault, en dépendance de l'application envisagée ces courants peuvent être nuisibles ou bénéfiques. Dans la première catégorie, ils représentent une source indésirable de pertes d'énergie et des échauffements thermiques qu'il faut minimiser.

Les pertes dans les dispositifs électrotechniques représentent un enjeu majeur pour optimiser leur rendement et leurs performances. Elles peuvent être causées par la résistance des conducteurs, les courants de Foucault, les courants induits et l'hystérésis dans les supraconducteurs. Pour réduire ces pertes, on peut utiliser des matériaux à faible résistivité, optimiser la conception des circuits magnétiques et améliorer les performances des semi-conducteurs. Cependant, un problème crucial dans ces dispositifs est la désaimantation thermique, qui survient lorsque les aimants permanents sont exposés à des températures élevées, entraînant une perte totale ou partielle de leur magnétisme. Les facteurs clés de cette désaimantation incluent la température de Curie et la stabilité thermique [1], [2], [3], [4].

La première étape dans le processus de réduction de ces pertes indésirables consiste à établir des modèles fiables et à faible coût pour prédire et estimer leurs valeurs. En ce qui concerne les courants induits et les pertes qui y sont associées plusieurs approches ont été développées pour modéliser ce phénomène, telles que celles numériques, basées principalement sur la méthode des éléments finis, l'approche analytique et celle dite semi-analytique ou semi-numérique.

Notre travail de Master est versé dans cet axe de recherche, où il se focalise sur l'application de la méthode des éléments finis et la méthode analytique pour la prédiction des pertes par courants induits générées dans les matériaux conducteurs massifs, tels que les aimants permanents. Notre mémoire est divisé en trois chapitres, organisés de la manière suivante :

Dans le premier, la modélisation des dispositifs électrotechniques par le calcul du champ électromagnétique est présentée. Les approches, analytique et numérique, adoptées dans ce travail pour analyser les courants induits et les pertes qu'ils engendrent font l'objet du deuxième chapitre. Les résultats d'application de ces deux approches à un électro-aimant sont présentés dans le dernier chapitre.

Le mémoire est clôturé par une conclusion générale et des perspectives.

---

---

*I. Chapitre I: Modélisation des systèmes  
électrotechniques par le calcul du  
champ électromagnétique*

---

---

## **I.1 Introduction**

La modélisation du champ électromagnétique offre une vision détaillée des interactions électromagnétiques, permettant de distinguer les contributions des courants réels, des mouvements des électrons, des charges libres et de la polarisation des matériaux. En utilisant des équations de couplage électromagnétique, cette modélisation fournit une base robuste pour l'analyse des systèmes électrotechniques [5].

L'importance de la modélisation par le calcul du champ électromagnétique des systèmes électrotechniques réside dans sa capacité à examiner de manière approfondie les phénomènes électromagnétiques fondamentaux qui caractérisent ces systèmes. En exploitant des logiciels de simulation numérique pour résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles du champ électromagnétique, les ingénieurs peuvent évaluer divers aspects tels que les performances, la distribution des champs électromagnétiques, les courants induits, les forces électromagnétiques, les impacts des matériaux, et d'autres paramètres cruciaux. Cette approche permet une compréhension approfondie du comportement électromagnétique des composants et des dispositifs, facilitant ainsi l'optimisation de leur conception, l'amélioration de leurs performances, et l'assurance de leur fiabilité [5].

## **I.2 Equations du champ électromagnétique**

Les lois fondamentales de l'électromagnétisme, à savoir la loi d'Ampère, de Gauss, Faraday et Lenz, sont mises sous une forme condensée donnant naissance à un système de quatre équations permettant l'étude des phénomènes électromagnétiques dans tous systèmes électriques. Ces équations sont dites de Maxwell.

### **I.2.1 Equations de Maxwell**

Le calcul du champ électromagnétique repose principalement sur l'application des lois de l'électromagnétisme, qui servent de modèle au système décrit par les équations différentielles partielles de Maxwell. Les phénomènes électromagnétiques sont régis par ces équations, adaptées aux différents milieux là où elles règnent [6].

Ces quatre équations sont données en termes de quatre vecteurs qui déterminent le champ électromagnétique, variant dans l'espace et le temps : le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ d'induction électrique  $\mathbf{D}$ . C'est grâce aux travaux de Maxwell que nous pouvons aujourd'hui modéliser les phénomènes électromagnétiques en utilisant ces quatre équations fondamentales, sous leur forme la plus générale sont les suivantes [7], [8], [9] :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{Loi de Maxwell – Gauss} \quad (\text{I. 1})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0} \quad \text{Conservation du flux magnétique} \quad (\text{I. 2})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Loi de Maxwell – Faraday} \quad (\text{I. 3})$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_c + \vec{J}_D \vec{n} + \vec{J}_{aim} \quad \text{Loi de Maxwell – Ampère} \quad (\text{I. 4})$$

Avec :

$\vec{E}$  : Champ électrique [V/m].

$\vec{H}$  : Champ magnétique [A/m].

$\vec{D}$  : Induction électrique [A.S/m<sup>2</sup>].

$\vec{B}$  : Induction magnétique [T].

$\rho$  : Densité de la charge d'espace [C/m<sup>3</sup>].

$\vec{J}_{aim}$  : Densité de courant d'aimantation en [A/m<sup>2</sup>].

$\vec{J}_c$  : Densité de courant de conduction électrique, induit  $\vec{J}_{ind}$  et/ou inducteur  $\vec{J}_s$  donnée par :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s + \vec{J}_{ind} \quad (\text{I.5})$$

$\vec{J}_D$  : Densité de courant de déplacement dont l'expression est la suivante :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{en [A/m}^2\text{]} \quad (\text{I.6})$$

## **I.2.2 Relations constitutives des milieux**

Pour compléter les équations de Maxwell en prenant en considération les propriétés spécifiques des milieux où elles s'appliquent, il est essentiel d'intégrer des relations constitutives supplémentaires à ces équations.

### **a- Propriétés magnétiques**

Dans un milieu magnétique, l'induction magnétique est liée au champ magnétique par cette relation:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad \text{Relation magnétique} \quad (\text{I.7})$$

Où :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (\text{I.8})$$

Avec :

$\mu_r$  : Perméabilité relative du milieu considéré

$\mu_r = 1$  pour un milieu amagnétique.

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  : Perméabilité du vide (H/m)

### **b- Caractéristiques diélectriques**

- Induction du champ électrique est donnée par :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{I.9})$$

Où :  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

Avec :

$\epsilon_0$  : Permittivité de l'air en [F/m].

$\epsilon_r$  : Permittivité relative du milieu considéré.

Pour un matériau conducteur, la densité de courant est déterminée selon la loi d'Ohm généralisée

$$\vec{J}_C = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{I.10})$$

$\sigma$  : Conductivité électrique du milieu [ $\Omega/m$ ]<sup>-1</sup>

En présence des conducteurs en mouvement, une partie des courants induits est due à la variation spatiale du flux magnétique, de manière générale la loi d'Ohm s'écrit sous cette forme :

$$\vec{j}_{ind} = \sigma [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}] \quad (\text{I.11})$$

Où :

$v$  : le vecteur de vitesse en [m/s].

Le terme  $\sigma \vec{E}$  exprime le courant résultant du champ électrique  $\vec{E}$ .

Le terme  $\sigma(\vec{v} \wedge \vec{B})$  exprime le courant résultant du mouvement [12] [11].

### **c- Forme intégrale des équations de Maxwell**

La première équation de Maxwell traduit le théorème du Gauss à savoir

$$\iint \vec{D} \cdot \vec{d}_s = \iiint \rho \cdot dV \quad (\text{I.12})$$

$\vec{d}_s$ : Élément de surface

Ou encore :

$$\iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dV = \iiint \rho \cdot dV \quad (\text{I.13})$$

$dV$  : Élément de volume

L'équation de Maxwell-Faraday est donnée sous forme intégrale par :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{\partial}{\partial t} (\iint \vec{B} \cdot \vec{ds}) \quad (\text{I.14})$$

Avec :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (\text{I.15})$$

$\phi$  : Flux magnétique traversant la section (s).

$\vec{dl}$  : Élément de longueur orienté.

La troisième équation de Maxwell exprime la conservation du flux magnétique

$$\iint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (\text{I.16})$$

La quatrième équation de Maxwell appelée aussi loi de Maxwell-Ampère est donnée par :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_i I_i \quad (\text{I.17})$$

$I_i$ : Courant contenu à l'intérieur du contour fermé.

### **I.2.3 Relations de continuité entre deux milieux différents**

Si le système comprend deux milieux distincts, les champs électriques et magnétiques de ces milieux sont reliés à l'interface de séparation par des relations de continuité. Ces relations servent à connecter deux milieux ayant des propriétés électromagnétiques différentes. Considérons deux milieux, M1 et M2, où  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{H}_1, \vec{D}_1)$  représentent les champs de M1 et  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2, \vec{H}_2, \vec{D}_2)$  représentent ceux de M2 [10].

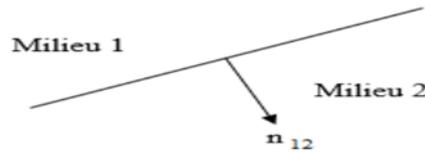


Figure I.1. Interface entre deux milieux différents [13]

Les conditions qui s'appliquent à une interface de séparation entre deux milieux distincts, désignés par 1 et 2 avec le vecteur normal  $\vec{n}$  dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 (Figure I.1), sont dérivées directement des équations de Maxwell et sont exprimées par :

- Conservation de la composante normale du vecteur induction magnétique  $\vec{B}$ .

$$n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{I.18})$$

- Conservation de la composante tangentielle du vecteur champ électrique  $\vec{E}$ .

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{I.19})$$

- La composante tangentielle du vecteur champ magnétique  $\vec{H}$  est discontinue lorsque la conductivité du milieu est infinie (l'existence des courants surfaciques).

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (\text{I.20})$$

- La composante normale du vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  n'est pas continue en présence de charges superficielles  $\rho_s$ .

$$n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (\text{I.21})$$

$n$  : vecteur normal à la surface de séparation entre les deux milieux.

$J_s$  : Densité des courants surfaciques

$\rho_s$  : Densité des charges surfaciques [13].

### **I.3 Hypothèses simplificatrices liées aux dispositifs électrotechniques [16]**

Dans la réalité, on utilise souvent une approche quasi-stationnaire pour simplifier les équations de Maxwell précédentes en se basant sur les conditions de travail liées aux fréquences utilisées et aux dimensions des dispositifs électrotechniques (approche quasi-stationnaire) [16]

L'une des simplifications les plus significatives consiste à ignorer la densité du courant de déplacement dans le matériau conducteur, car leur densité est très faible par rapport à celle des courants de conduction.

Donc, la loi d'Ampère s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (I.22)$$

Une autre manière de simplifier est de ne pas prendre en compte la charge d'espace dans les matériaux conducteurs.

$$(\rho = 0)$$

Donc, l'écriture de la loi de Gauss est donnée par :

$$div \vec{D} = 0 \quad (I.23)$$

Dans ce cas, la condition pour maintenir la densité des courants induits dans un conducteur (conservation de la densité du courant) est définie par :

$$div \vec{j} = 0 \quad (I.24)$$

#### **I.4 Formulation du champ électromagnétique [14]**

Les équations de Maxwell fournissent une description générale de tous les phénomènes électromagnétiques. Cependant, selon les dispositifs étudiés, plusieurs modèles peuvent être utilisés donnant naissance à des équations différentielles aux dérivées partielles, EDP, en termes de plusieurs variables d'état de type champ électrique/magnétique ou de type potentiel scalaire/vecteur, électrique/magnétique [14].

##### **I.4.1 Modèle électrostatique**

Dans ce modèle, le champ  $\vec{E}$  est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en termes de répartition. Ce modèle est régi par les équations suivantes :

$$rot \vec{E} = 0 \quad (I.25)$$

$$div(\vec{D}) = \rho \quad (I.26)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (I.27)$$

La relation :  $rot \vec{E} = 0$  Permet de définir une fonction auxiliaire  $U$  appelée potentiel scalaire électrique, tel que :

$$\vec{E} = -grad U \quad (I.28)$$

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante :

$$div(\varepsilon grad U) + \rho = 0 \quad (I.29)$$

## **I.4.2 Modèle électrocinétique**

Ce modèle est utilisé dans l'étude de la répartition du courant électrique de conduction dans des conducteurs isolés soumis à des différences de potentiel continues.

Il est régi par les équations :

$$\text{rot}(\vec{E}) = 0 \quad (\text{I.30})$$

$$\text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (\text{I.31})$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.32})$$

La relation :  $\text{rot}(\vec{E}) = 0$  montre qu'il existe encore un potentiel électrique scalaire  $U$ , tel que :

$$\vec{E} = -\text{grad}U$$

Le modèle se ramène alors à :

$$\text{div}(\sigma \text{grad}U) = 0 \quad (\text{I.33})$$

## **I.4.3 Modèle magnétostatique**

Dans ce modèle, le terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  de l'équation de Maxwell-Faraday (I.3) est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps.

Dans le cas de ce modèle, on peut avoir deux types de formulations :

### **I.4.3.1 Modèle magnétostatique scalaire total**

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. On obtient alors les relations :

$$\text{rot}\vec{H} = 0 \quad (\text{I.34})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{I.35})$$

Avec la loi milieu,  $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$\vec{H}$  Dérive d'un potentiel scalaire magnétique  $U$ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :  $\vec{H} = -\text{grad}U$

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$\text{div}(-\mu \text{grad}U) = 0 \quad (\text{I.36})$$

### **I.4.3.2 Modèle magnétostatique vectoriel**

Dans le modèle magnétostatique vectoriel, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (\text{I.37})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{I.38})$$

Avec la loi du milieu :  $\vec{B} = \mu\vec{H}$

La relation (I.37), permet de définir une fonction vectoriel  $\vec{A}$  appelée potentiel vecteur magnétique, tel que :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (\text{I.39})$$

D'où l'EDP suivante:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) = \vec{J} + \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}r\right) \quad (\text{I.40})$$

Pour assurer l'unicité de la solution en tous points du domaine d'étude, une condition de jauge est imposée, la condition de jauge de Coulomb [14] :

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (\text{I.41})$$

### **I.4.4 Modèle magnétodynamique**

Dans ce cas, les sources de courant sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électrique et magnétique seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de Foucault). Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  joue un rôle primordial, car la connaissance de  $\vec{A}$  implique la connaissance de toutes les autres grandeurs physiques :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (\text{I.42})$$

En termes d'équations, nous avons :

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Tenant compte aussi de la relation magnétique, on arrive à déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques.

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électrique, des transformateurs,...etc.

## **I.5 Conditions aux limites**

Pour caractériser pleinement le problème différentiel décrit par les équations précédentes, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites sur les frontières du domaine d'étude. De manière générale, on distingue deux types de conditions aux limites : les conditions de Dirichlet et les conditions de Neumann.

Les conditions de Dirichlet sont rencontrées lorsque le vecteur potentiel magnétique ( $\mathbf{A}$ ) reste constant le long de la frontière, ce qui implique que l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  est parallèle à cette frontière et crée ainsi une ligne équipotentielle. Cette situation se présente lorsque toute ou partie de la frontière se trouve à une distance suffisamment éloignée des sources d'excitation, permettant ainsi d'ignorer les variations du vecteur potentiel magnétique le long de cette partie de la frontière par rapport aux variations à l'intérieur du domaine (c'est-à-dire lorsque  $A = 0$ ). Cette condition est désignée comme la condition de Dirichlet.

En revanche, dans le cas où la dérivée du vecteur potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  par rapport à la normale n'est pas nulle, on parle de condition aux limites de Neumann. Ainsi, on spécifie les dérivées des valeurs que la solution doit vérifier le long des frontières ou limites du domaine [10].

## **I.6 Méthodes de résolution des EDP**

Il existe plusieurs méthodes qui peuvent être utilisées pour la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles du champ électromagnétique. Elles sont classées en trois grands groupes à savoir : méthodes numériques, méthodes analytiques et les méthodes semi-analytiques ou semi-numériques.

### **I.6.1 Méthodes numériques**

Dans cette classe, on trouve les méthodes des éléments finis, des volumes finis et celle des différences finies. Toutes connues par leur robustesse, mais la méthode des éléments finis reste la plus utilisée par rapport aux deux autres.

#### **I.6.1.1 Méthode des éléments finis (MEF)**

La méthode des éléments finis est une approche privilégiée pour traiter les géométries complexes et les matériaux non linéaires. Elle divise le domaine d'étude en petits éléments appelés éléments finis, ce qui est illustré dans la figure suivante pour les éléments mono et bidimensionnels. Chaque élément a une inconnue qui est décrite par des fonctions d'interpolation simples, basées sur les valeurs de l'inconnue aux sommets de l'élément. Cette

méthode tient compte des conditions de continuité à l'interface lors du passage entre les différents milieux.

L'adaptabilité aux géométries complexes et la capacité à traiter les non-linéarités ont conduit à une large utilisation de la méthode des éléments finis en électromagnétisme, même si sa mise en œuvre peut être complexe en raison de ses exigences en mémoire et en temps de calcul.

La méthode des éléments finis en 2D, basée sur l'approche des résidus pondérés qui ne prend pas en compte l'aspect énergétique du problème, consiste à découper le domaine d'étude en éléments finis et à approximer la variable inconnue sur chaque élément par des fonctions d'interpolation. Ces fonctions sont généralement des polynômes de Lagrange du premier ou du deuxième degré. L'interpolation dans chaque élément est réalisée en fonction des valeurs nodales, ce qui assure la continuité de l'inconnue sur les interfaces des éléments.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis est de transformer l'équation aux dérivées partielles (EDP) gouvernant le problème en un système d'équations algébriques. La résolution de ce système permet de déterminer l'inconnue sur un ensemble de points (nœuds) de la discrétisation [10].

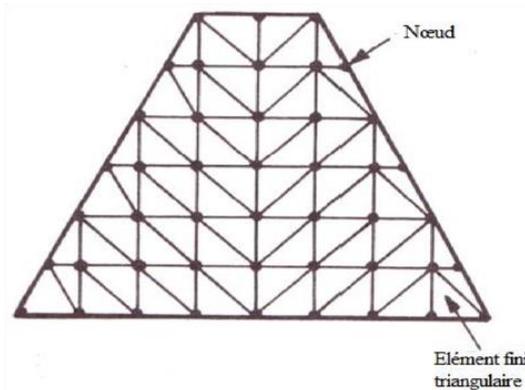


Figure I.2.Exemple du maillage EF [13]

### Éléments monodimensionnels :

#### 1-Éléments droits :

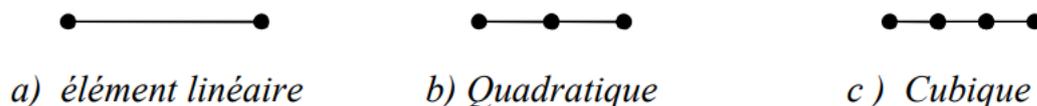


Figure I.3. Éléments droits [15]

Eléments à deux dimensions :

1-Eléments triangulaires [13]

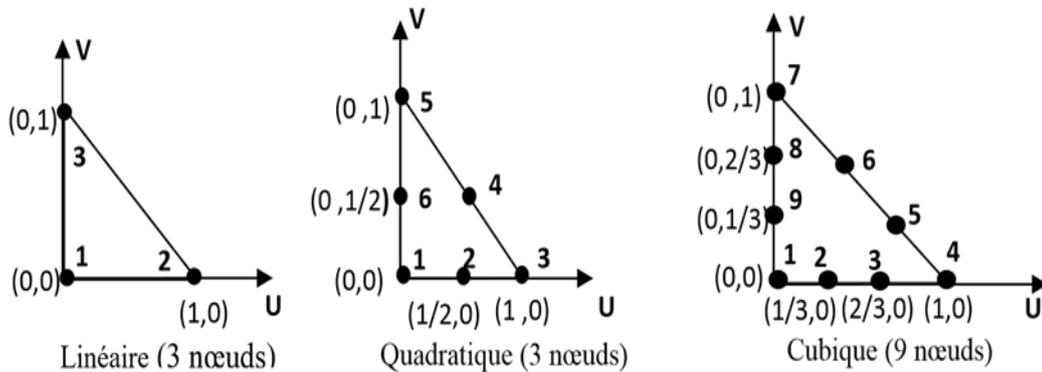


Figure I.4. Éléments triangulaires [13]

2-Eléments carrés [13]

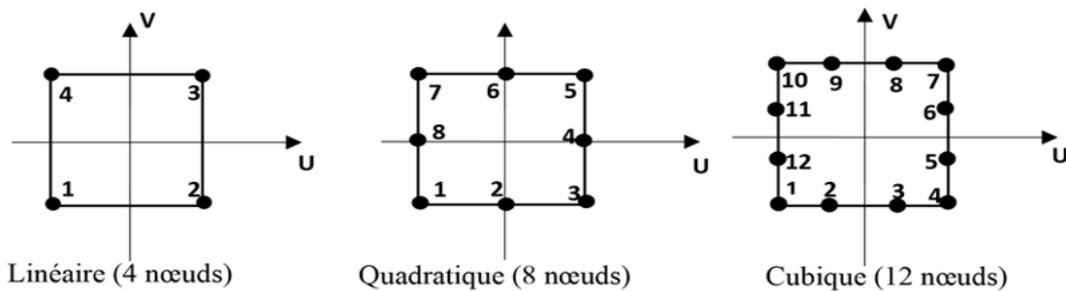


Figure I.5. Éléments carrés [13].

I.6.2 Méthodes analytiques

À la différence des méthodes numériques, les méthodes analytiques sont basées sur une formulation explicite des grandeurs qui caractérisent le système. Les équations établissent un lien entre les performances du système, également connues sous le nom de performances, et les grandeurs descriptives.

Il est possible d'écrire différemment ces équations physiques du système en faisant de nombreuses hypothèses simplificatrices concernant ces grandeurs descriptives. Elles ont été créées dans le domaine du génie électrique et s'appliquent à une variété de systèmes électromagnétiques. Ces méthodes d'analyse ont été utilisées depuis longtemps, bien avant l'apparition des premiers ordinateurs.

La mise en relation explicite des grandeurs permet au concepteur d'interpréter, à l'aide de son modèle, le fonctionnement du système. Cela s'applique d'autant plus à la modélisation

des phénomènes associés. Malgré la capacité des modèles analytiques à retranscrire de manière adéquate le comportement d'un système, cela se fait souvent au détriment d'hypothèses solides. [10]

### **I.6.3 Méthodes semi-analytiques**

Regroupent les caractéristiques des deux modèles précédents en ce qui concerne le processus d'obtention de la solution, c'est-à-dire : la division du domaine d'étude, ou d'une partie de ce dernier, en sous-domaines et l'expression analytique précise de la variable inconnue.

Les méthodes semi-analytiques reposent principalement sur un ensemble de conditions simplificatrices, physiques et géométriques. Les méthodes intégrales, les circuits électriques couplés et les réseaux de reluctances sont parmi celles-ci. Dans le secteur des machines électriques, la méthode la plus appropriée pour l'analyse du circuit magnétique en régime saturé est la dernière. [10]

## **I.7 Conclusion**

Dans ce chapitre on a présenté les différentes équations et relations qui régissent le phénomène électromagnétique, spécifiquement en électrotechnique, où les différentes équations différentielles aux dérivées partielles en termes de plusieurs variables de type champ ou potentiel, vecteur ou scalaire ont fait également partie de ce chapitre. A la fin, une présentation sommaire des méthodes dédiées à la résolution des équations du champ électromagnétique été faite.

---

---

*II. Chapitre II: Modélisation des pertes  
par courants induits dans les  
conducteurs massifs*

---

---

## II.1 Introduction

Les courants induits, également appelés courants de Foucault, bien qu'ils soient utilisés dans diverses applications industrielles comme le frein à courants de Foucault, le chauffage par induction, le détecteur de métaux... etc., peuvent également causer des problèmes d'échauffement excessif dans les machines électriques, ce qui peut entraîner leur détérioration, leur vieillissement prématuré, voire même leur détérioration totale [17].

En ayant une connaissance approfondie des paramètres et des pertes dans le dispositif (pertes de fer, pertes de cuivre), il est possible d'analyser de manière distincte les pertes dans les pièces massives introduites dans le système. Les pertes magnétiques causées par les courants induits dans un matériau conducteur sont connues comme des phénomènes inductifs associés à la variation de  $B$  [18].

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des deux modèles, analytique et numérique, pour évaluer ces courants et les pertes qu'ils causent dans un conducteur électrique. Tout d'abord, les lois générales des courants de Foucault sont établies, puis l'équation différentielle aux dérivées partielles du champ électromagnétique dans le conducteur est résolue, soit par un modèle analytique ou par un autre numérique, tel que la méthode des éléments finis. A partir de la connaissance du champ électromagnétique on déduit les densités du courant induit et les pertes qui y sont associées.

## II.2 Equations électromagnétiques

Dans cette partie, les équations de base nécessaires pour décrire le phénomène des courants induits dans un matériau conducteur massif sont présentées [17].

L'un des aspects fondamentaux à prendre en compte lors de l'analyse des moteurs et des appareils est l'évaluation des pertes causées par les courants de Foucault. Ces pertes se produisent parce que les matériaux conducteurs induisent des courants en réponse aux changements du flux magnétique ou de l'induction qui les traverse conformément aux lois de Faraday et Lenz.

Les courants de Foucault provoquent une répartition inégale de la densité du courant sur une portion donnée d'un matériau conducteur, entraînant une augmentation des pertes Joule [17] et [19]. Il est à noter que la densité de ces courants est bien plus élevée à la périphérie du conducteur qu'au centre. Cette différence est causée par la répartition du courant induit à la surface du conducteur, affectée par la profondeur de pénétration (également appelée épaisseur de peau  $\delta$ ), selon la loi suivante

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$\mu$  : Perméabilité magnétique du matériau.

$\omega$  : Pulsation du champ d'induction donnée par :  $\omega = 2\pi f$

Où  $f$  est la fréquence en [Hz]

Cet effet est appelé effet de peau et s'accroît avec la fréquence. Pour modéliser les problèmes liés à l'effet de peau ou aux courants de Foucault, nous partons des équations de Maxwell sous les hypothèses de l'approche quasi-stationnaire. En négligeant le courant de déplacement et la charge d'espace dans les matériaux conducteurs, les équations de base du champ sont les suivantes :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Dans ces équations,  $\mathbf{B}$  représente l'induction magnétique,  $\mathbf{H}$  représente le champ magnétique,  $\mathbf{E}$  représente le champ électrique et  $\mathbf{J}$  représente la densité du courant.

Dans un conducteur, le champ électrique  $\mathbf{E}$  est lié à la densité du courant  $\mathbf{J}$  selon la loi d'Ohm.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$\sigma$  : est la conductivité électrique du matériau.

Les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont liés par la relation suivante :  $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r$

$\mathbf{B}_r$  représente l'induction rémanente, qui est non nulle pour les aimants et nulle pour d'autres matériaux tels que le fer, l'aluminium, le cuivre, etc.

Dans le contexte des équations précédentes et en l'absence de charge d'espace libre, une autre contrainte s'applique : la divergence de  $\mathbf{J}$  doit être nulle.

$$\text{div} \vec{J} = 0$$

Ceci reflète la loi de conservation de la densité du courant dans un conducteur.

### II.2.1 Modèle analytique pour le calcul des courants induits [18], [19], [20], [21]

En intégrant les équations différentielles précédentes avec les lois d'Ohm et des milieux magnétiques, on obtient l'équation aux dérivées partielles, EDP, exprimée en termes du champ magnétique  $\mathbf{H}$  :

$$\Delta \vec{H} = \mu * \sigma * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

Avec  $\Delta \vec{H}$  : Laplacien du champ  $\mathbf{H}$ , ce qui revient à résoudre dans le système des coordonnées cartésiennes les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_x}{\partial z^2} &= \mu * \sigma * \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_y}{\partial z^2} &= \mu * \sigma * \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial z^2} &= \mu * \sigma * \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Soit le problème électromagnétique considéré dans la figure II.1, Il s'agit d'un conducteur massif ayant une profondeur  $e$ , la troisième dimension, négligeable devant les deux autres dimensions.

$L_x$  est la largeur suivant Ox

$L_y$  est la longueur suivant Oy

$e$  est la profondeur, épaisseur, suivant Oz.

Le matériau est exposé à un champ qui présente une composante significative uniquement le long de l'axe Oy, étant donné que les dimensions  $L_x$  et  $L_y$  sont bien supérieures à la profondeur  $e$ . Cela implique que le pavé est très mince, et que malgré l'amplitude réduite des courants induits, ceux-ci n'ont pas d'incidence sur l'induction extérieure qui les génère. Ceci conduit au système suivant :

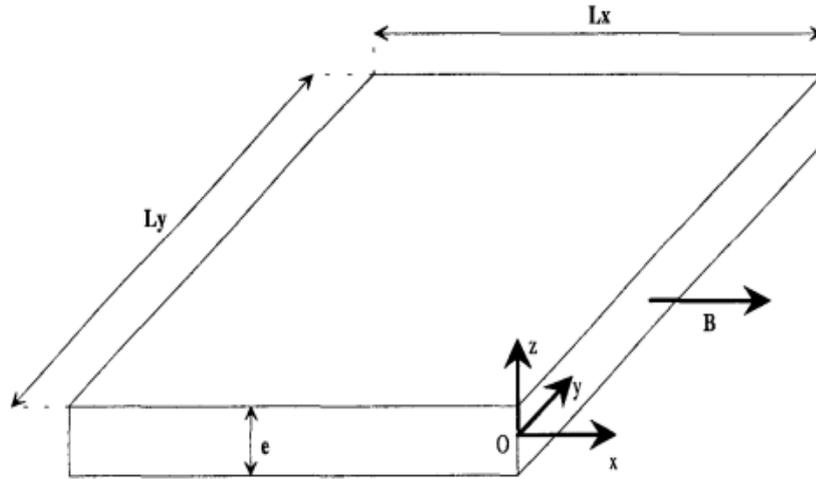


Figure II.1. Plaque fine soumise à un champ magnétique [17]

$$H_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu * \sigma * \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

$$H_z = 0$$

En régime magnétodynamique harmonique, source d'excitation sinusoïdale, l'équation (II.7) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = j\omega\mu\sigma H_y \quad (\text{II.8})$$

En partant de l'équation (II.8) et après avoir posé  $\alpha^2 = j\omega\mu\sigma$ , on étudie alors :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \alpha^2 \underline{H}_y e^{j\omega t} \quad (\text{II.9})$$

Où  $\underline{H}_y$  est la notation complexe de  $H_y$

C'est une équation connue, dite de Helmholtz, dont la solution est de la forme :

$$H_y(x) = H_1 e^{k*x} + H_2 e^{-k*x} \quad (\text{II.10})$$

Les constantes  $H_1$  et  $H_2$  d'intégration sont calculées en fonction de la symétrie observée aux bords du matériau, conditions aux limites, [18].

L'EDP du champ magnétique obtenu est résolue de manière analytique en utilisant la méthode de séparation de variables. Ainsi, on propose :

$$H_y = X(x) * Z(z) \quad (\text{II.11})$$

L'équation (II.9) devient :

$$Z(z) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \alpha^2 * X(x) * Z(z) \quad (\text{II.12})$$

Où

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \alpha^2 \quad (\text{II.13})$$

Avec les solutions générales :

$$X^{\Gamma_m}(x) = K_{\Gamma_m} * \sin * (\Gamma_m x) + L_{\Gamma_m} * \cos * (\Gamma_m x) \quad (\text{II.14})$$

$$Z^{\Gamma_m}(z) = M_{\Gamma_m} * \sinh * \sqrt{\alpha^2 + \Gamma_m^2 z} + N_{\Gamma_m} * \cosh * \sqrt{\alpha^2 + \Gamma_m^2 z} \quad (\text{II.15})$$

Les solutions générales qui en découlent se présentent comme ci-après :

$$Z^{C_n}(z) = P_{C_n} * \sin(C_n z) + Q_{C_n} * \cos(C_n z) \quad (\text{II.16})$$

$$X^{C_n}(x) = R_{C_n} * \sinh * \sqrt{\alpha^2 + C_n^2 x} + S_{C_n} * \cosh * \sqrt{\alpha^2 + C_n^2 x} \quad (\text{II.17})$$

La forme générale de la solution de l'équation (II.10) est la somme des solutions pour les différentes valeurs de  $\Gamma_m$  et  $C_n$  soit :

$$\begin{aligned} \underline{H}_y(x, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ K_{\Gamma_m} * \sin(\Gamma_m x) + L_{\Gamma_m} * \cos(\Gamma_m x) \right\} * \left\{ M_{\Gamma_m} * \sinh * \sqrt{\alpha^2 + \Gamma_m^2 z} + N_{\Gamma_m} \right. \\ & \left. * \cosh * \sqrt{\alpha^2 + \Gamma_m^2 z} \right\} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ P_{C_n} * \sin(C_n z) + Q_{C_n} * \cos(C_n z) \right\} * \left\{ R_{C_n} * \sinh * \sqrt{\alpha^2 + C_n^2 x} + S_{C_n} \right. \\ & \left. * \cosh * \sqrt{\alpha^2 + C_n^2 x} \right\} \quad (\text{II.18}) \end{aligned}$$

Avec  $K_{\Gamma_m}$  ;  $L_{\Gamma_m}$  ;  $M_{\Gamma_m}$  ;  $N_{\Gamma_m}$  ;  $P_{C_n}$  ;  $Q_{C_n}$  ;  $R_{C_n}$  ;  $S_{C_n}$  : les constantes de séparation et coefficients à déterminer par les conditions aux limites.

### II.2.1.1 Conditions aux limites

Dans notre cas actuel, où  $H_y$  est la seule composante du champ magnétique, il est nécessaire de donner à la fois  $H_y$  et  $\partial H_y / \partial n$  aux limites, où  $n$  est la normale à la surface de ces limites. Comme notre problème concerne au moins deux régions interconnectées, il est essentiel

d'utiliser les conditions de continuité aux interfaces : Selon la première condition, la composante normale de la densité de flux,  $B_n$ , est constante, c'est-à-dire  $B_{n1} = B_{n2}$  ; tandis que la seconde condition stipule que la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique est égale à la densité surfacique du courant, c'est-à-dire  $H_{t2} - H_{t1} = \text{constante}$  [18].

Dans la Figure II.2, on suppose que le matériau conducteur est immergé dans un champ magnétique axial uniforme qui fluctue sinusoïdalement dans le temps, avec une amplitude maximale  $H_s$ . Les conditions aux limites sont appliquées au matériau de section  $2a \times 2b$ , avec  $a = (x_r - x_l) / 2$  et  $b = (z_t - z_l) / 2$ , symétriques en O. Il s'agit du champ généré dans un entrefer de largeur  $h_m$ , qui correspond à l'épaisseur du matériau qui sera inséré dans l'entrefer. Nous effectuons le calcul en supposant que la réaction magnétique d'induit ne sera pas prise en compte, ce qui entraînerait une modification du champ initial [17].

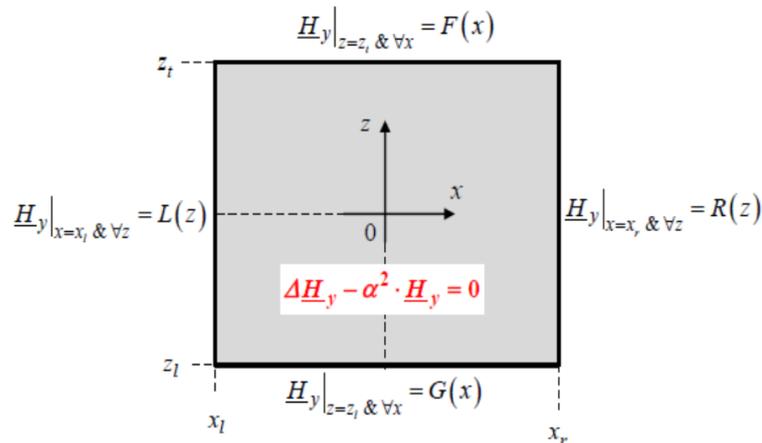


Figure II.2. Conditions aux limites [22]

Pour une bobine d'excitation on a :

$$u = ri + \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{II.19})$$

Où :  $u$  est la tension d'excitation ;  $r$  est la résistance de la bobine et  $\psi$  le flux totalisé à travers la bobine, donné par :

$$\psi = \phi_p + \phi_f \quad (\text{II.20})$$

Avec  $\phi_p$  est le flux propre ;  $\phi_f$  représente le flux de fuite.

En ignorant les pertes de tension ohmiques et le flux de fuite, l'équation (II.19) devient :

$$u = \frac{d\phi_p}{dt} \quad (\text{II.21})$$

En se basant sur la tension appliquée, nous pouvons ainsi calculer le flux et par conséquent le champ H.

En appliquant la loi d'Hopkinson et en supposant une perméabilité infinie du fer, On a :

$$R_e \phi_p = N_{sp} i \quad (\text{II.22})$$

Où :  $N_{sp}$  est le nombre de spires et  $R_e$  étant la reluctance de conducteur donnée par  $R_e = \frac{l_m}{\mu s}$

Avec  $s$  est sa section du conducteur ;  $s = 2ax2b$

Alors :

$$\phi_p = \frac{N_{sp} i \mu s}{h_m} \quad (\text{II.23})$$

Il en résulte que :

$$H_s = \frac{N_{sp}}{h_m} i = \text{réel}\{H_y e^{j\omega t}\} \quad (\text{II.24})$$

Sur la figure (II.2) les fonctions F(x), G(x), L(z) et R(z) sont considérées comme étant identiques dans ce cas précis sont prises égales à  $H_s$ , où  $x_l = -a$ ,  $x_r = a$ ,  $z_l = -b$  et  $z_t = b$ .

En raison de la symétrie, les termes en sinus et sinus-hyperbolique disparaissent. L'équation (II.18) peut s'écrire donc sous cette forme :

$$\underline{H}_y = H_s \left\{ \frac{ch(\alpha z)}{ch(\alpha b)} + \sum_{n=1,3,\dots}^n \bar{g}_n ch(\delta_n x) \cos(\lambda_n z) \right\} \quad (\text{II.25})$$

Avec

$$\bar{g}_n = \bar{e}_n \cdot \frac{\text{sinc}(\lambda_n b)}{ch(\delta_n a)} ; \quad \bar{e}_k = 2 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_n}{\delta_n} \right)^2 \right] ; \quad \lambda_n = n \frac{\pi}{b}$$

Exprimant la périodicité de  $H_y$  suivant l'axe z.

$$\text{Et : } \delta_n = \sqrt{\alpha^2 + \lambda_n^2}$$

n : exprime le rang des harmoniques spatiales (1, 3, 5...).

### II.2.1.2 Expressions analytiques des courants induits dans les conducteurs massifs

D'après l'équation du champ magnétique (II.25) et l'équation de Maxwell-Faraday (II.3), les expressions des deux composantes constitutives du courant induit sont  $J_x$  et  $J_z$ . Ces composantes sont données par :

$$\underline{J}_x(x, z) = -\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \quad (\text{II.26})$$

$$\underline{J}_z(x, z) = \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} \quad (\text{II.27})$$

On obtient donc :

$$\underline{J}_x(x, z) = -\alpha \frac{\sinh(\alpha z)}{\cosh(\alpha b)} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_n g_n \cosh(\delta_n x) \sin(\lambda_n z) \quad (\text{II.28})$$

$$\underline{J}_z(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_n g_k \sinh(\delta_n x) \cos(\lambda_n z) \quad (\text{II.29})$$

### II.2.1.3 Pertes par courants induits exprimées à l'aide du vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting  $\underline{S}$ , qui est le produit vectoriel des champs électrique et magnétique, est utilisé pour représenter la densité de puissance instantanée, de la manière suivante :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{II.30})$$

Où le signe  $\times$  exprime le produit vectoriel.

En régime sinusoïdal, le vecteur complexe de Poynting prend la forme suivante :

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \quad (\text{II.31})$$

Avec  $\underline{H}^*$  est le conjugué du champ  $\underline{H}$  et un facteur 1/2 comme quantité exprimée en pic (valeur maximale), on peut physiquement interpréter ce vecteur en prenant en compte un volume fermé contenant la charge.

Le calcul de la circulation du vecteur de Poynting à travers la surface qui entoure le volume peut nous fournir une vision du travail réalisé ou reçu par les charges engendrées par le champ. Dans le développement, la divergence de  $\underline{S}$  est exprimée par l'équation (II.32) :

$$\text{div} \frac{1}{2} [\underline{E} \times \underline{H}^*] = \frac{1}{2} [\underline{H}^* \text{rot} \underline{E} - \underline{E} \text{rot} \underline{H}^*] \quad (\text{II.32})$$

Pour obtenir la divergence du vecteur de Poynting sous forme globale, on applique le théorème de divergence. Le flux de puissance complexe,  $\underline{W}$ , à travers la surface  $s$  autour du volume  $V$  est illustré par la relation (II.33).

$$\underline{W} = - \oint \underline{S} ds = P + jQ \quad (\text{II.33})$$

Le signe négatif indique que la valeur du flux de puissance net dans le volume V est positive. La puissance réelle moyenne en Watts, P, est la partie réelle de  $\underline{W}$ . Elle est calculée de la manière suivante : P = La partie réelle (W). La partie fictive de l'énergie stockée dans le volume V par cycle est représentée par Q = La partie imaginaire (W), qui est exprimée en voltampères réactifs (VAR) [22].

Selon le théorème de Poynting, il est établi que toute énergie électromagnétique stockée et/ou le travail effectué par la charge générée par (ou fournie au) champ dans le volume V doivent être compatibles avec le flux d'énergie à travers la surface [22].

Pour évaluer les pertes dans un matériau, on utilise le vecteur de Poynting, qui représente la densité de courant énergétique. En se basant sur la loi d'Ohm locale, ce vecteur peut être exprimé comme suit :

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \sigma \underline{J} \times \underline{H}^* \quad (\text{II.34})$$

$$(\underline{J} \times \underline{H}^*) ds = -\underline{J}_z \underline{H}_y^* dydz + \underline{J}_x \underline{H}_y^* dx dy \quad (\text{II.35})$$

La puissance moyenne active est donnée par :

$$P = \frac{1}{2\sigma} \oint \text{réel} \left[ (-\underline{J}_z \cdot \underline{H}_y^* dydz + \underline{J}_x \cdot \underline{H}_y^* dx dy) \right] \quad (\text{II.36})$$

Aussi équivalente à :

$$P = \text{réel}(\underline{S}) = \text{réel} \left[ \frac{h \cdot H_s^2}{\sigma} \cdot \left\{ 2a\alpha \frac{sh(ab)}{ch(\alpha b)} + \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{2\delta_k}{2b} \cdot \left( \frac{e_n}{\lambda_n} \right)^2 \cdot \frac{sh(\delta_n a)}{ch(\delta_n \bar{a})} \right\} \right] \quad (\text{II.37})$$

Où

h : est l'épaisseur du conducteur.

## II.2.2 Modèle numérique pour le calcul des pertes par courants induits

La méthode des éléments finis, MEF, est la méthode numérique la plus puissante et la plus générale pour résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles du champ électromagnétique et permet l'obtention des résultats ayant une grande précision. Cependant, l'application de la MEF pour les problèmes tridimensionnels est caractérisée d'un coût de calcul très élevé. Cela, est dû principalement à la dimension des systèmes matriciels lorsque la variable d'état utilisée est de type vectoriel (champs ou potentiels). Par contre, pour les problèmes

bidimensionnels, le potentiel vecteur magnétique (en magnétostatique) ou le potentiel vecteur magnétique associé au potentiel scalaire électrique (en magnétodynamique) gagne le plus grand intérêt par rapport aux autres variables d'états pour formuler les équations différentielles du champ, car le potentiel vecteur magnétique dans tels cas ne possède qu'une seule composante perpendiculaire au plan d'étude, de plus la condition de jauge de Coulomb qui assure l'unicité de la solution est naturellement vérifiée.

La MEF est largement appliquée pour la résolution du problème épineux des courants induits dans les conducteurs électriques et l'évaluation des pertes qui y sont associées. Dans ce qui suit la procédure générale pour la résolution de ce type de problème par la MEF.

### II.2.2.1 Analyse des pertes par courants induits par la MEF [23], [24]

Le phénomène électromagnétique lié au problème des courants induits est formulé par les équations de Maxwell et les relations des milieux en régime magnétodynamique, dit aussi le modèle magnétodynamique. Les courants et les champs induits sont régis par la loi d'induction de Faraday et la loi de Lenz. En bidimensionnel et pour les conducteurs électriques massifs, la formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ , associé au besoin au potentiel scalaire électrique  $V$  est la plus utilisée pour étudier le comportement du champ électromagnétique dans le conducteur. Cette formulation, et comme on l'a déjà présentée dans le chapitre précédent, est donnée par :

$$\text{Rot}(v \text{Rot } A_z) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \text{grad } V = J_s + \text{Rot}(v B_r) \quad (\text{II.38})$$

$$\text{Div}[\sigma (-\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } V)] = 0 \quad (\text{II.39})$$

Où :

$J_s$  est la densité du courant source ou d'excitation,  $v$ ,  $\sigma$  et  $B_r$  sont la réductivité magnétique, la conductivité électrique et l'aimantation rémanente de l'aimant, respectivement.

Les boucles des courants induits se referment à l'intérieur du conducteur. Les équations (II.38) et (II.39) sont résolues simultanément en utilisant la méthode des éléments finis. L'obtention des valeurs aux nœuds du maillage éléments finis des deux variables  $A$  et  $V$ , permet de déduire les densités du courant induits et des pertes qui y sont associées.

La valeur de la densité des courants de Foucault par élément fini ( $J_e$ ) peut être calculée en utilisant l'expression suivante :

$$J_e = -\sigma \left( \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\Delta V}{L_M} \right) \quad (\text{II.40})$$

Où  $L_M$  est la longueur axiale du conducteur.

Les pertes instantanées totales correspondantes sont données par :

$$P_{tot}(t) = 2p \sum_{e=1}^{ne} (J_e(t))^2 \frac{V_e}{\sigma_e} \quad (\text{II.41})$$

$p$ ,  $ne$  et  $V_e$  sont respectivement, le nombre de paires de pôles, cas de la machine électrique, le nombre d'éléments dans le maillage éléments finis magnétique et  $v_e$  est le volume de l'élément fini correspondant. Pour le régime magnétodynamique harmonique, cas où les sources d'excitation sont sinusoïdales, les équations (II.40) et (II.41) s'écrivent comme suit :

$$J_e = -\sigma \left( j\omega A + \frac{\Delta V}{L_M} \right) \quad (\text{II.42})$$

$$P_{tot} = \sum_{e=1}^{ne} 2p \frac{\bar{J}_e \bar{J}_e^*}{2\sigma} V_e \quad (\text{II.43})$$

$\bar{J}_e$  et  $\bar{J}_e^*$  sont les densités du courant induit et son conjugué en notation complexe, respectivement.

### II.3 Conclusion

Les formulations mathématiques du phénomène électromagnétique lié aux courants induits, analytique ainsi que numérique ont été présentées dans ce chapitre.

L'application des deux modèles pour calculer les courants induits et les pertes qu'ils génèrent dans les conducteurs massifs feront l'objet du prochain chapitre.

---

---

### *III. Chapitre III: Application et résultat*

---

---

### III.1 Introduction

Dans ce chapitre, la modélisation analytique et numérique par la MEF des pertes par courant induits dans les conducteurs massifs présentée dans le chapitre précédent, est appliquée à un électroaimant afin d'estimer les courants induits et les pertes qui y sont associées dans les aimants permanents, considérés comme des bons conducteurs. Les résultats obtenus par les deux modèles sont évalués et analysés.

### III.2 Description du dispositif étudié

On s'intéresse à la modélisation d'un dispositif expérimental simple, à savoir un électroaimant, utilisé pour étudier expérimentalement les pertes par courants de Foucault dans des prismes en aimants permanents ou en aluminium, afin de vérifier la validité de différents modèles numériques et (semi-)analytiques. Dans cette section, on présente le détail du dispositif expérimental considéré, tel est présenté dans la figure.III.1 [25].

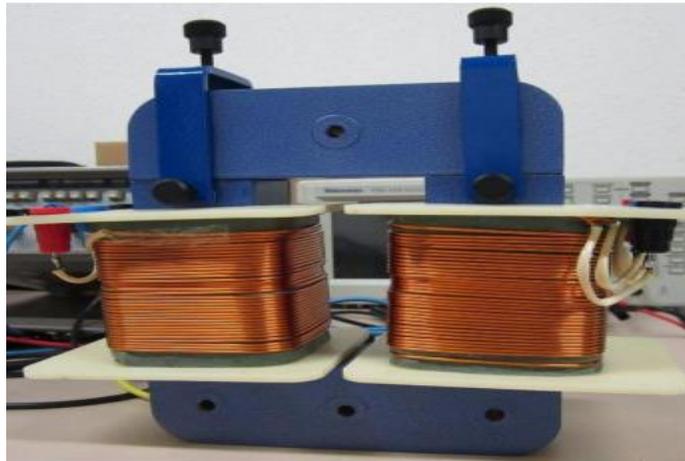


Figure III.1.Le dispositif expérimental [25].

C'est un électroaimant en forme de U avec une armature plate qui renferme deux matériaux, soit des aimants permanents ou de l'aluminium, Le modèle bidimensionnel, 2D, est illustré dans la figure.III.2.

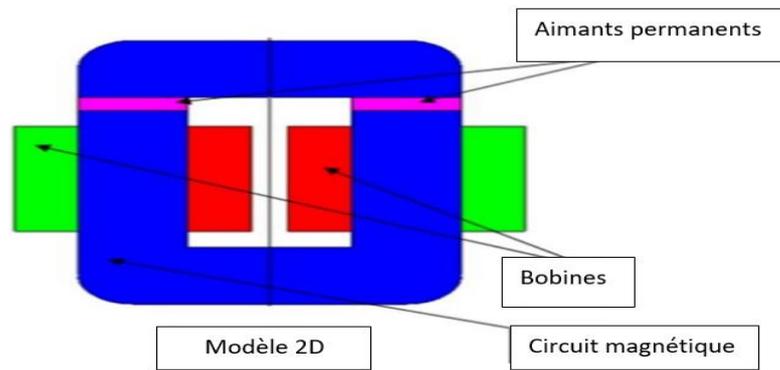


Figure III.2. Modèle 2D du dispositif expérimental et sa représentation schématique [6].

L'électroaimant est constitué de deux bobines couplées en parallèle et alimentées en courant sinusoïdal de fréquence fixe ou variable, afin de faire varier le flux magnétique dans les aimants permanents.

### III.2.1 Modèle géométrique

Les dimensions principales du dispositif considéré sont rassemblées dans le tableau (III.1)

| Symbole | Paramètre                 | Valeur               |
|---------|---------------------------|----------------------|
| L       | Longueur                  | 190 mm               |
| L       | largeur                   | 150 mm               |
| D       | Epaisseur armature        | 43 mm                |
| HA      | Epaisseur AP/aluminium    | 2 mm                 |
| A       | Surface aimants permanent | 2x43 mm <sup>2</sup> |
| K       | Largeur aimants           | 43 mm                |
| N       | Nombre de spires          | 500 spires           |

Tableau 1. Caractéristiques géométriques du dispositif étudié.

Le dispositif expérimental est composé d'un circuit magnétique feuilleté fabriqué à partir de tôles d'acier d'une épaisseur de 0,5 mm, avec une section A. Ce circuit est exposé à un champ variable généré par deux bobines d'excitation identiques, chacune comprenant 500 spires et connectées en parallèle pour augmenter le flux magnétique. Cette configuration permet de modifier l'entrefer et donc de régler le point de fonctionnement de notre AP ou du matériau conducteur, tel que l'aluminium, si nécessaire. De plus, elle offre la possibilité d'étudier les

variations de fréquence et de densité de flux. Ce dispositif se distingue par sa simplicité par rapport à une machine électrique rotative [6].

Les différents paramètres géométriques du dispositif sont présentés dans la figure suivante :

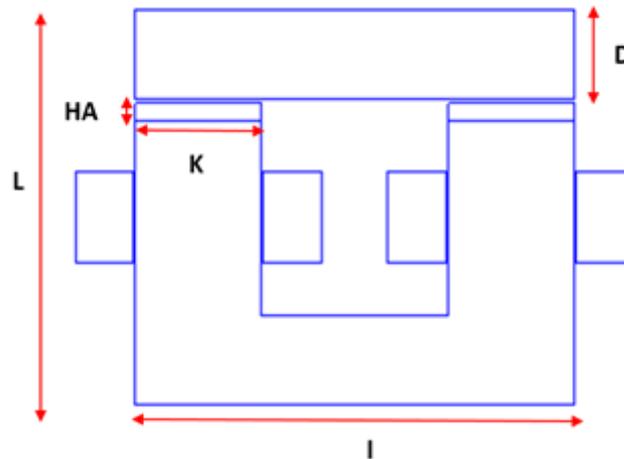


Figure III.3. Configuration du dispositif avec ses paramètres géométriques.

### III.2.2 Caractéristiques physiques

Les matériaux utilisés dans le dispositif considéré sont regroupés dans le tableau (III.2).

| Matériaux           | Types  |
|---------------------|--------|
| Aimant              | NdFeB  |
| Bobine d'excitation | Cuivre |
| Ferromagnétique     | Fer    |

Tableau 2. Matériaux de construction

Le circuit magnétique est réalisé avec un matériau homogène non conducteur avec une caractéristique  $B(H)$  présentée dans la figure III.4.

L'aimant permanent utilisé est de type NdFeB, est traité comme un milieu linéaire conducteur sans aimantation résiduelle, tout comme l'aluminium. La courbe  $B(H)$  de ce matériau est illustrée dans la figure III.5 [26].

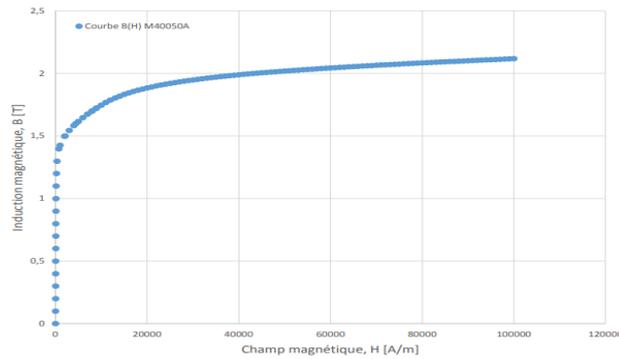


Figure III.4. Caractéristiques B(H) [27].

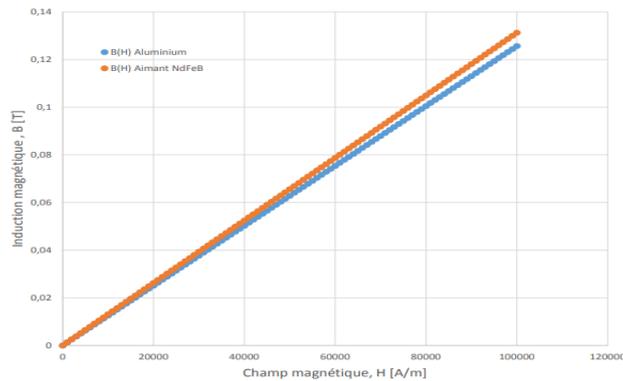


Figure III.5. Caractéristiques B(H) de l'aimant [27].

Les caractéristiques physiques du dispositif sont regroupées dans le tableau (III.3)

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| Densité de courant ( $J_s$ ) [ $A/m^2$ ]  | $4,5 \cdot 10^5$            |
| Perméabilité magnétique du vide ( $\mu_0$ )   | $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ |
| Conductivité électrique des aimants ( $\sigma$ ) [ $\Omega \cdot m$ ] <sup>-1</sup> | 625                         |
| Perméabilité relative des aimants ( $\mu_r$ )                                       | 1.0466                      |
| Perméabilité absolue du matériau ferromagnétique                                    | 4775                        |

Tableau 3. Caractéristiques physiques du dispositif étudié.

### III.3 Modèle numérique par la MEF pour le calcul des pertes par courants induits

L'électroaimant considéré dans cette étude présente une symétrie (physique ainsi que géométrique) par rapport à l'axe  $oy$ . Par conséquent et dans le souci de réduire le temps de résolution par la MEF, uniquement la moitié du dispositif est modélisée, telle est montrée dans la figure III.6. Sur l'axe de symétrie,  $oy$ , une condition de type Newman homogène est imposée sur la dérivée normale du potentiel vecteur magnétique. Par contre, des conditions de type

Dirichlet homogènes sont associées aux autres frontières, valeurs nulles du potentiel vecteur magnétique.

Les figures III.7, III.8 et III.9 présentent respectivement : le maillage éléments finis associé au découpage du domaine, maillage automatique du logiciel MATLAB, les lignes équipotentielles du potentiel vecteur magnétique et la répartition de la densité du flux magnétique, pour une fréquence de 50Hz.

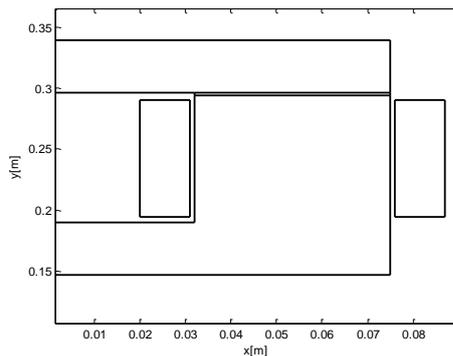


Figure III.6. Domaine d'étude considéré.

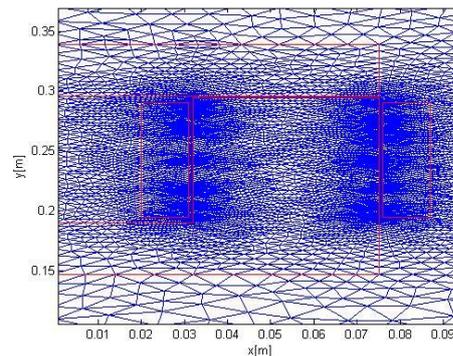


Figure III.7. Maillage par éléments finis du domaine d'étude considéré.

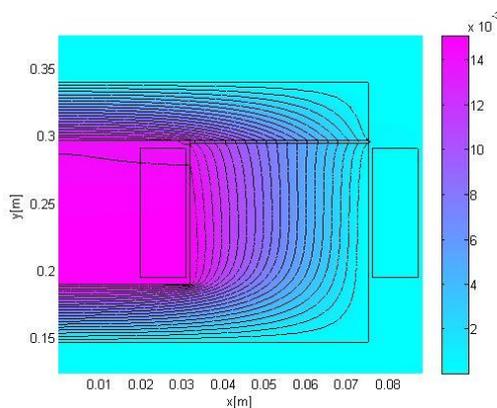


Figure III.8. Lignes équipotentielles du potentiel vecteur magnétique  $A[T.m]$ .

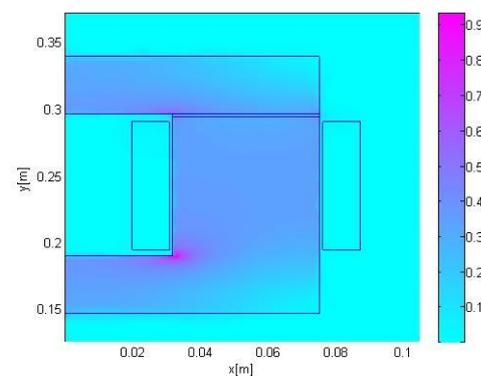


Figure III.9. Répartition de la densité du flux magnétique  $B[T]$ .

On a calculé les densités des courants induits, les densités de pertes et les pertes totales qui y sont associées pour différentes fréquences, allant de 50 à 20kHz. Afin de vérifier la validité du maillage éléments finis, dont la stabilité et la précision des résultats dépendent étroitement de la qualité du maillage, qui à son tour dépend de l'épaisseur de peau et de la fréquence, on a comparé les surfaces des éléments finis appartenant à la région de l'aimant

permanent avec cette épaisseur. La figure III.10, présente la variation de l'épaisseur de peau avec la fréquence. Cet effet devient plus prononcé avec l'augmentation de la fréquence, plus faible épaisseur de peau.

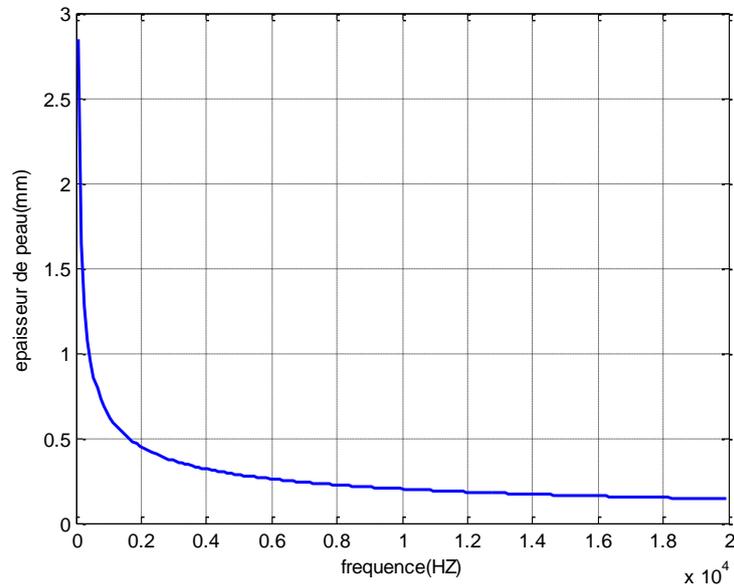


Figure III.10 Variation de l'épaisseur de peau avec la fréquence.

Les figures, III.11, III.12, III.13 et III.14 présentent, la répartition des densités des courants induits, les densités de pertes par courants induits dans l'aimant pour les fréquences de 50Hz et 20kHz, respectivement. Cependant, la figure III.14 montre la variation des pertes totales par courants induits en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus concordent avec l'aspect théorique relatif au phénomène des pertes par courants induits et leur dépendance de la fréquence, la dimension du conducteur et ses propriétés physiques.

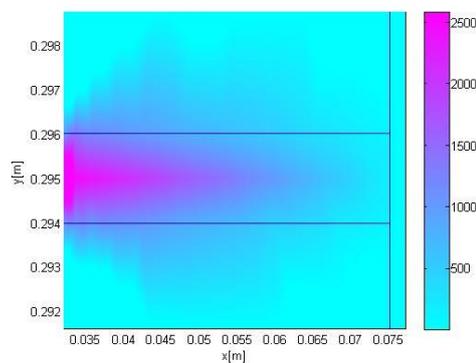


Figure III.11. Répartition de la densité des courants induits [A/m<sup>2</sup>] pour f=50Hz.

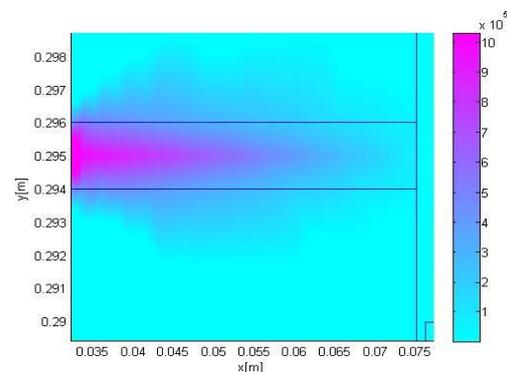


Figure III.12. Répartition de la densité des courants induits [A/m<sup>2</sup>] pour f=20kHz.

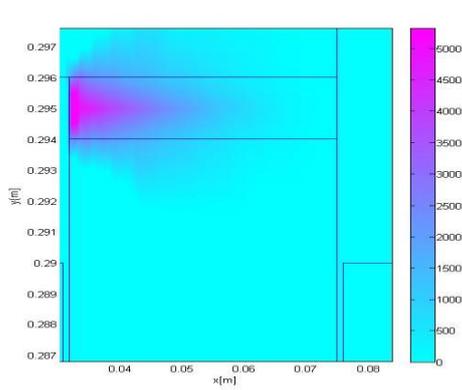


Figure III.13. Répartition de la densité des pertes [W/m<sup>3</sup>] pour f=50Hz.

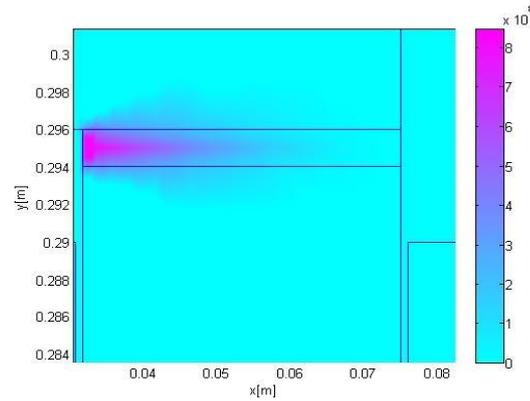


Figure III.14. Répartition de la densité des pertes [W/m<sup>3</sup>] pour f=20kHz.

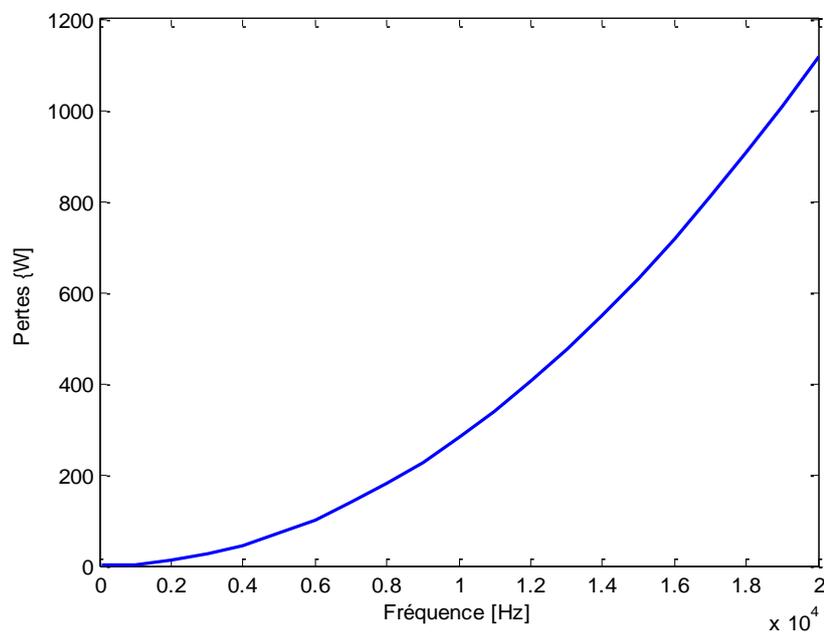


Figure III.15 Evolution des pertes par courants induits avec la fréquence.

### III.4 Modèle analytique pour le calcul des pertes par courants induits

Comme il a été présenté dans le chapitre précédent, on a appliqué le modèle analytique pour évaluer les pertes par courants induits dans l'aimant. L'épaisseur (hauteur) de ce dernier HA étant fixé à 2mm, le nombre total de spires, dans les deux bobines, N est égale à 2\*500 et le courant d'excitation I est égale à 0.95 Ampère, alors la valeur du champ magnétique  $H_s$  imposées sur les frontières de l'aimant est calculée selon la relation suivante [18] :

$$H_s = \frac{NI}{HA} \quad (\text{III.11})$$

Il en résulte une valeur de  $H_s$  égale à  $4.75 \cdot 10^5$  [A/M].

L'approche analytique adoptée, contrairement au modèle numérique bidimensionnel utilisé, permet le calcul tridimensionnel des densités de courants induits. La figure III.15 montre la boucle des courants induits tridimensionnels dans un conducteur massif rectangulaire, similaire au cas étudié.

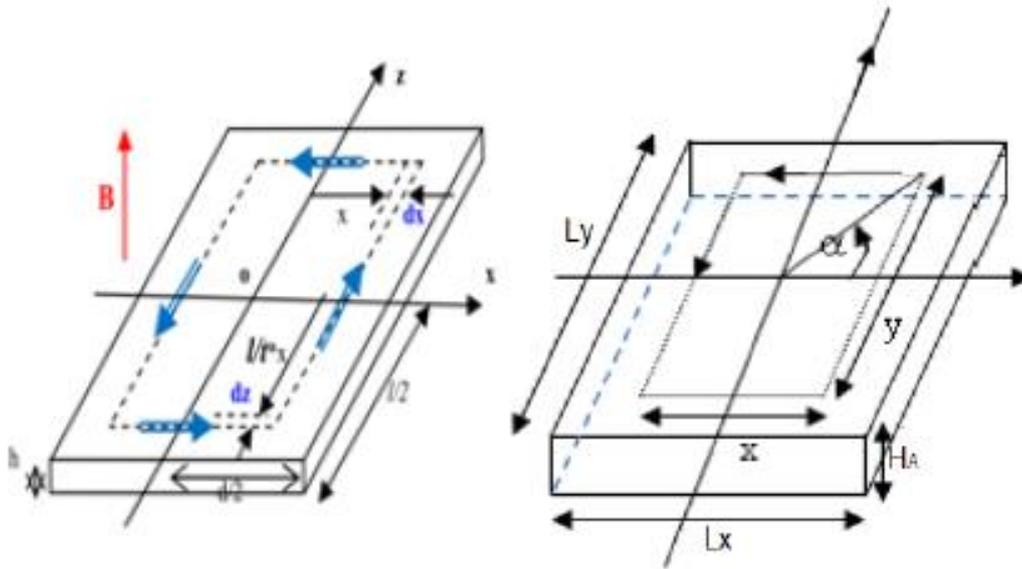


Figure III.16 Courants de Foucault tridimensionnels dans un conducteur rectangulaire massif [27], [18].

Les figures III.17 et III.18 présentent respectivement, la répartition du champ magnétique,  $H_y$ , sur la surface de l'aimant pour les fréquences de 50 Hz et 20kHz. Cependant, les figure III.19 et III.20 illustrent la variation du champ magnétique suivant l'axe  $ox$  et l'axe  $oz$ , au centre de l'aimant,  $z=0$  et  $x=0$ , pour les deux fréquences 50 Hz et 20kHz respectivement. L'effet de la fréquence sur la valeur du champ magnétique est net, où ce dernier tend à se concentrer aux extrémités du conducteur. Par contre, sa valeur est faible au centre.

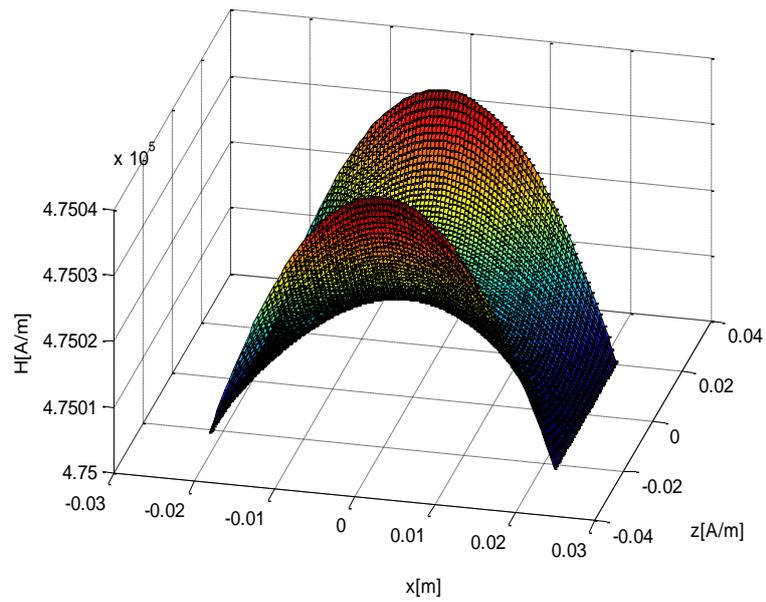


Figure III.17. Champ magnétique,  $H_y$ , dans l'aimant pour une fréquence de 50Hz.

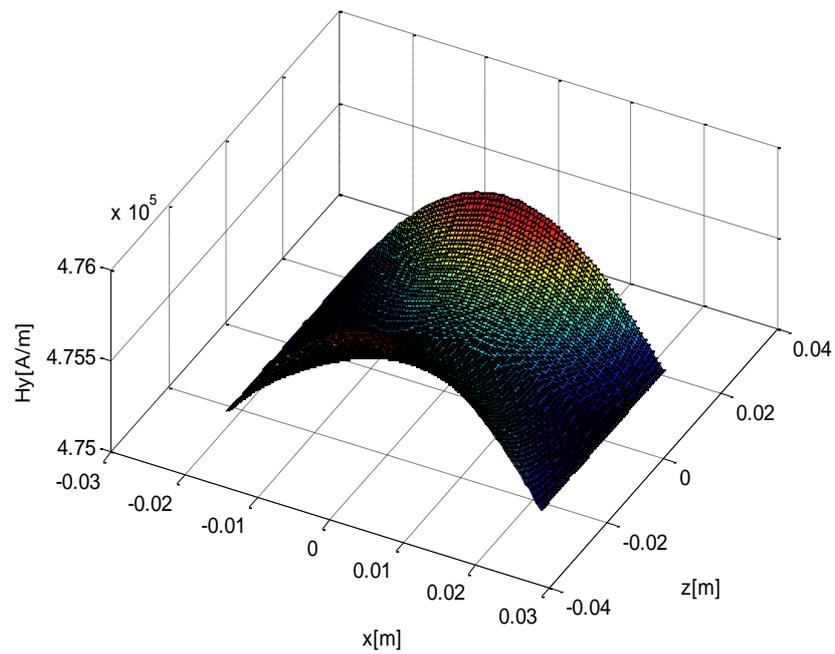


Figure III.18. Champ magnétique,  $H_y$ , dans l'aimant pour une fréquence de 20kHz.

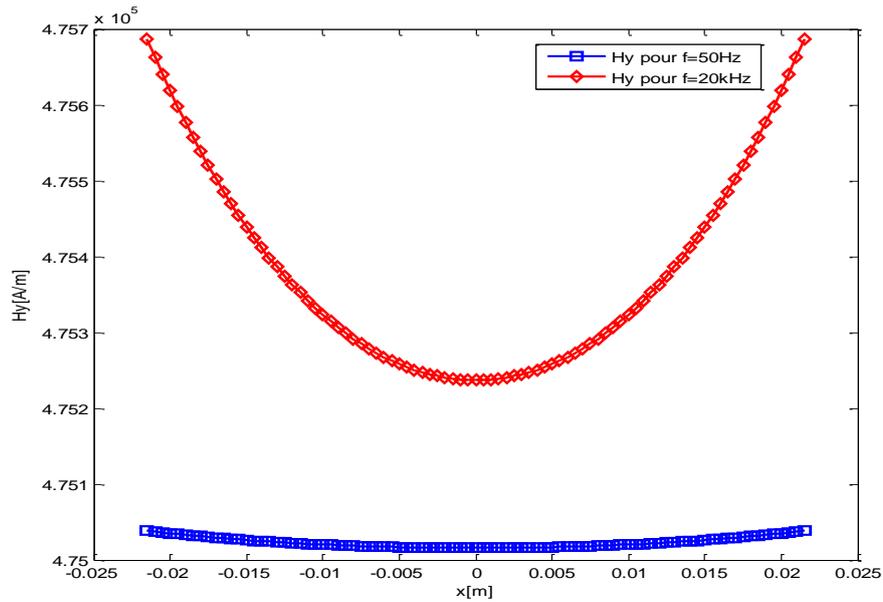


Figure III.19. Variation du champ magnétique  $H_y$  suivant l'axe ox au milieu de l'aimant ( $z=0$ m) pour 50 Hz et 20kHz.

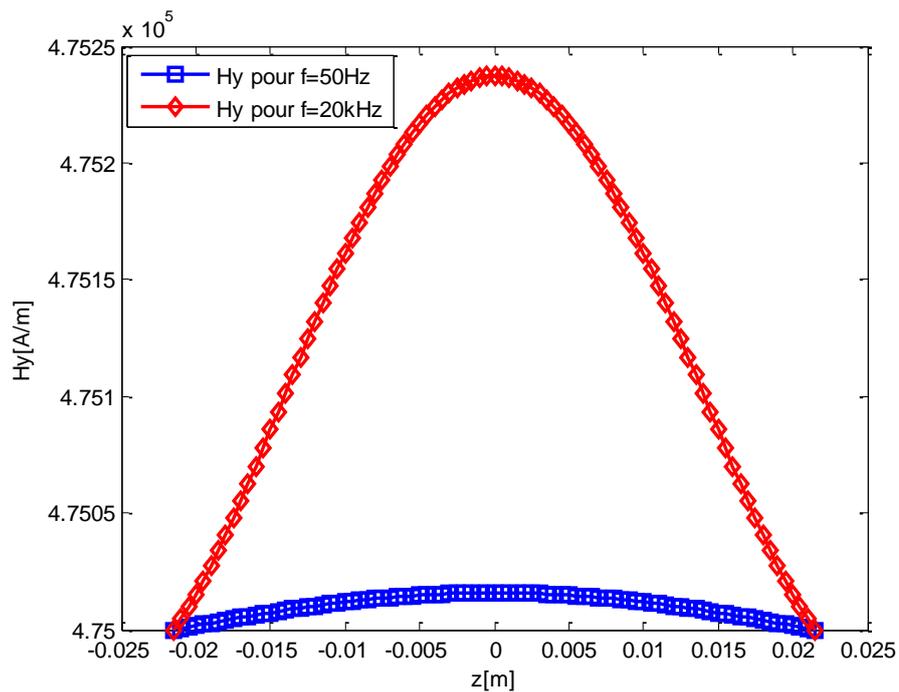


Figure III.20. Variation du champ magnétique  $H_y$  suivant  $z$  au milieu de l'aimant ( $x=0$ m) pour 50 Hz et 20kHz.

Les figures III.21, III.22, III.23 et III.24 présentent la variation des deux composantes des courants induits,  $J_x$  et  $J_z$ , dans l'aimant pour les fréquences de 50 Hz et 20 KHz, respectivement.

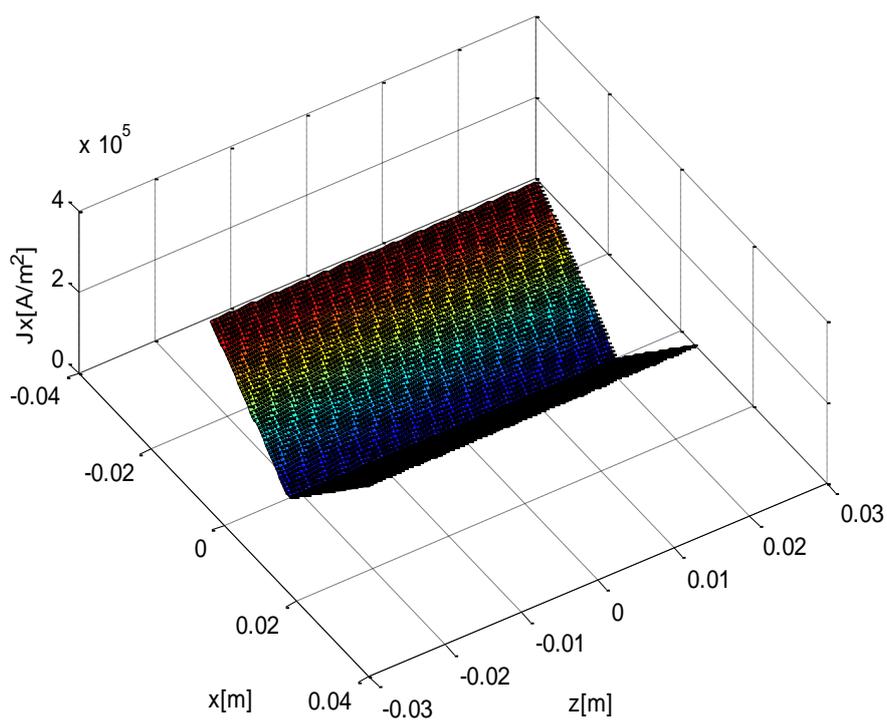


Figure III.21. Variation de la composante  $J_x$  des courants induits dans l'aimant pour 50 Hz.

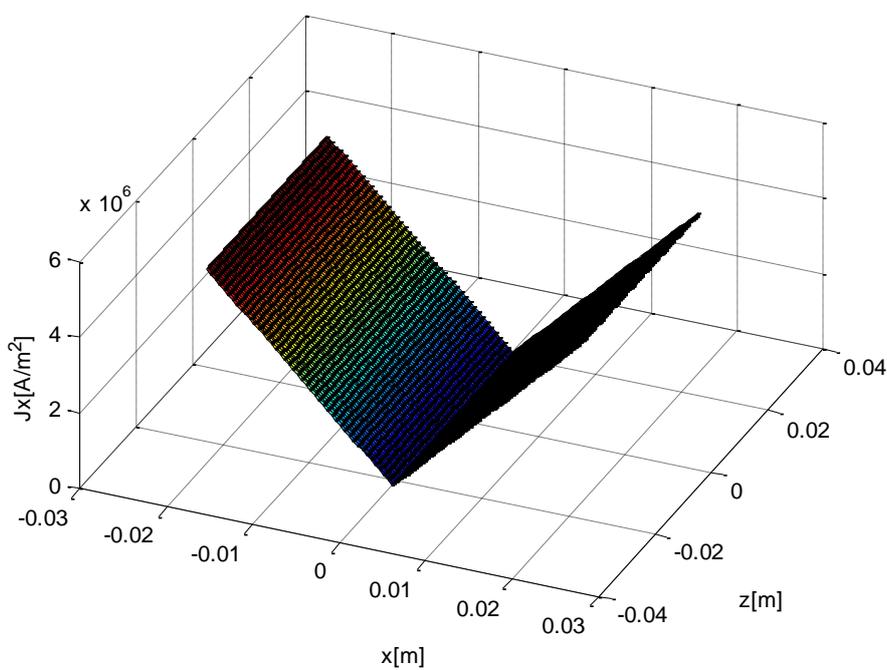


Figure III.22. Variation de la composante  $J_x$  des courants induits dans l'aimant pour 20 kHz.

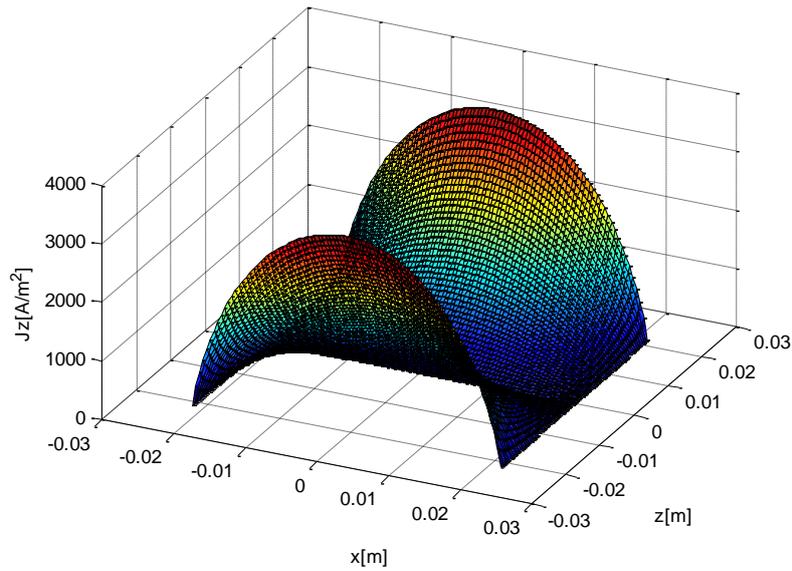


Figure III.23. Variation de la composante  $J_z$  des courants induits dans l'aimant pour 50 Hz.

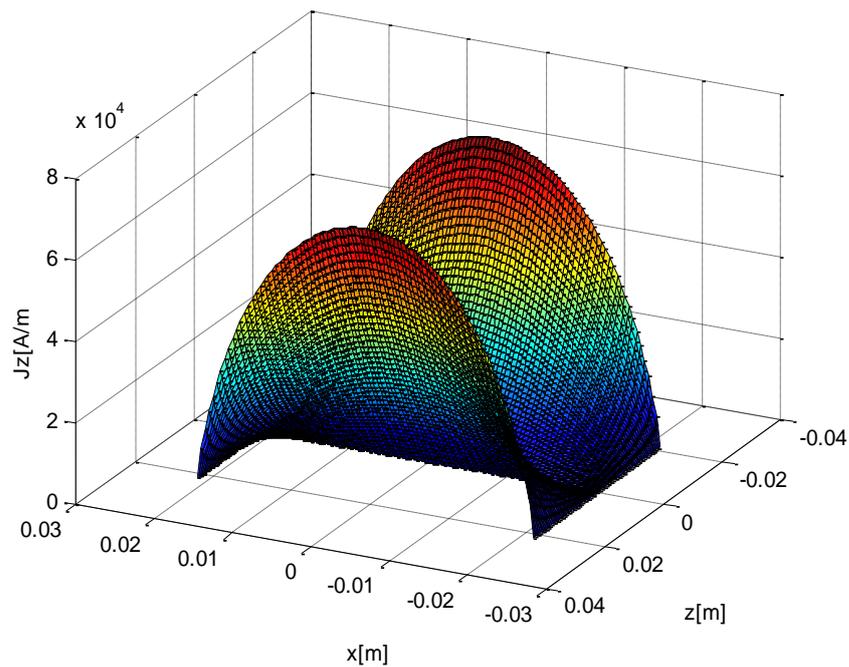


Figure III.24. Variation de la composante  $J_z$  des courants induits dans l'aimant pour 20 k Hz.

Les figures III.25 et III.26, montrent la variation des pertes totales dans l'aimant avec la fréquence du courant, obtenues par modèle analytique, et celles obtenues par les deux modèles analytique et numérique, respectivement.

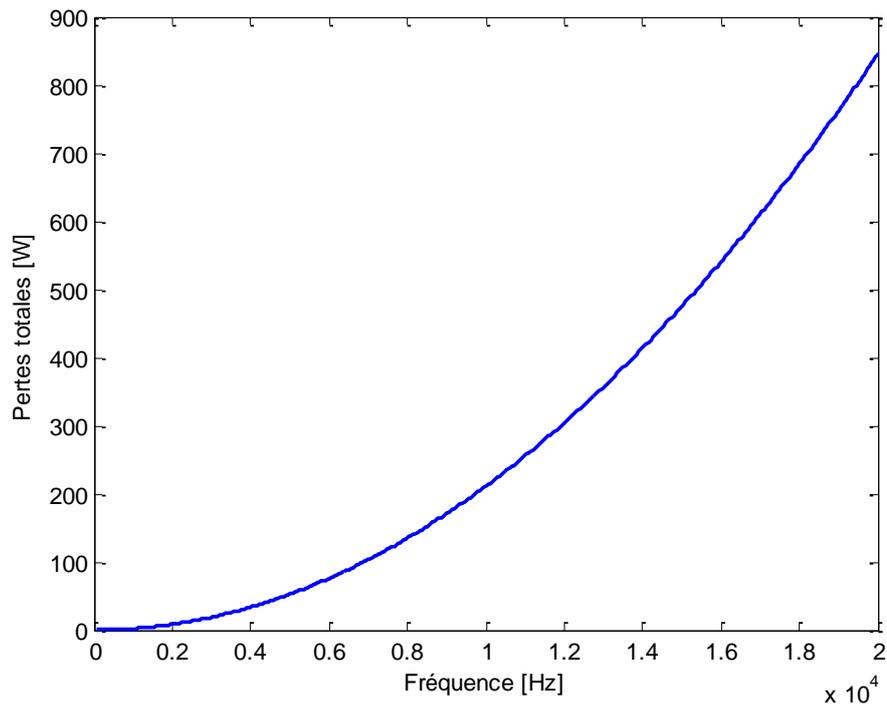


Figure III.25. Variation des pertes par courants induits avec la fréquence (Analytique).

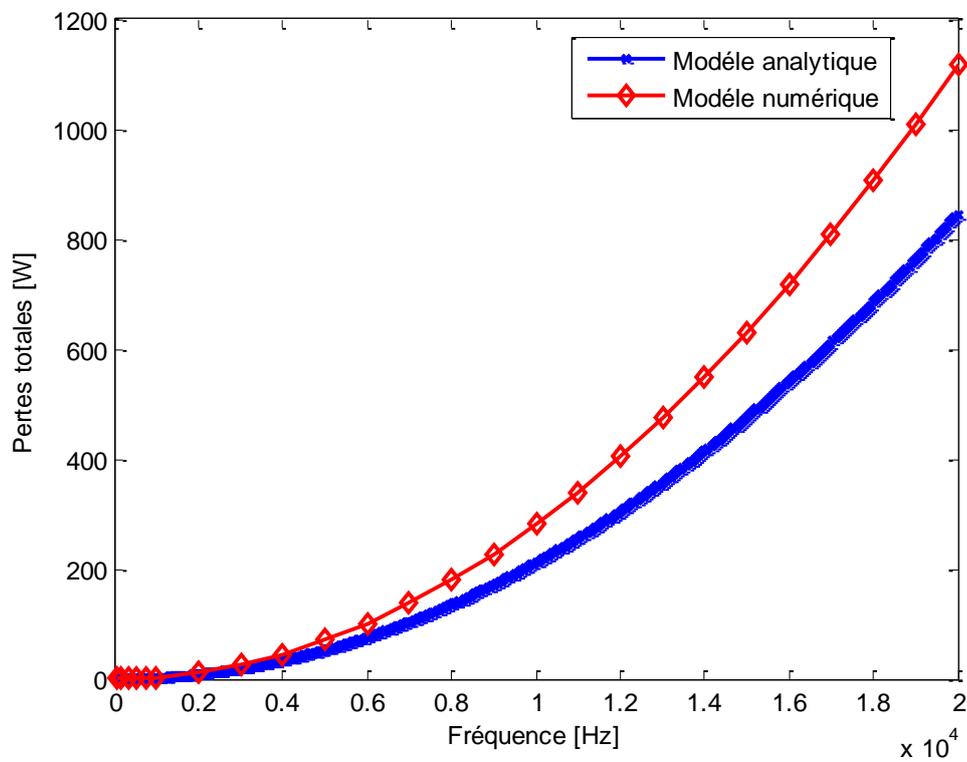


Figure III.26. Comparaison entre les variations des pertes par courants induits avec la fréquence pour les modèles analytique et numérique.

De la figure II.25, on remarque bien que les deux modèles donnent la même corrélation entre les pertes par courant induits et la fréquence. Les pertes induites augmentent avec l'augmentation de la fréquence. Concernant les valeurs des pertes induites totales, une différence entre les résultats numériques et ceux analytiques est proportionnelle à la fréquence, c'est dire que les deux modèles fournissent des résultats très proches en basses fréquences, par contre la divergence entre les deux résultats augmente avec la fréquence. Cette divergence peut être due à la valeur du champ  $H_s$  imposée sur les frontières du conducteur, dans le cas de la solution analytique, comme elle peut être due à la solution numérique par la méthode des éléments finis connue par sa grande sensibilité à la résolution de ce type du problème, où la précision et l'exactitude des résultats dépendent fortement du maillage, qui à son tour dépend de la fréquence et de l'épaisseur de peau.

Il est à noter aussi que le temps moyen nécessaire pour exécuter le calcul des pertes pour une gamme de fréquence allant de 50 Hz à 20kHz avec un pas de 50, par le modèle analytique est autour de 0.079486 seconds. Par contre, celui requis par la méthode des éléments finis bidimensionnelle est autour de 60 minutes.

### III.5 Conclusion

La présentation des résultats d'application des deux modèles, analytique tridimensionnel et numérique bidimensionnel, pour l'estimation des pertes par courants de Foucault dans les matériaux conducteurs massifs a fait l'objet de ce chapitre. Un électroaimant avec un aimant permanent de type Néodyme-Fer-Bore, ayant une conductivité électrique non-négligeable, inséré dans le circuit magnétique en forme de U a été pris comme prototype d'application dans ce travail.

Les résultats obtenus par les deux modèles sont en excellence conformité avec la théorie du phénomène étudié.

---

---

## *Conclusion générale et perspectives*

---

---

## **Conclusion générale et perspectives**

Notre travail de master s'est concentré sur l'un des phénomènes électromagnétiques liés au fonctionnement des dispositifs électrotechniques en régime variable, à savoir les courants induits ou courants de Foucault. Ces courants sont souvent considérés comme nuisibles car ils affectent le bon fonctionnement des dispositifs électrotechniques, réduisant leur rendement et leur durée de vie. L'objectif principal de notre travail était d'étudier et d'appliquer différents modèles permettant de prédire les pertes, associées aux courants induits, générées dans les matériaux conducteurs, tels que les aimants permanents, dans les dispositifs électrotechniques à aimants, lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique variable.

Nous avons concentré notre intérêt principalement sur la compréhension du phénomène considéré à travers l'établissement des différentes équations qui constituent le modèle mathématique du problème. Ensuite, nous nous sommes orientés vers les différentes approches dédiées à la résolution de ces équations, voir donc l'estimation des courants induits et des pertes qui y sont associées. Cela a fait l'objet de notre premier chapitre.

Un modèle numérique bidimensionnel basé sur la méthode des éléments finis et un autre analytique tridimensionnel, basé sur la résolution analytique de l'équation, dite de Helmholtz à coefficients homogènes, qui régit le comportement du champ électromagnétique dans les conducteurs massifs, sont adoptés dans ce travail pour résoudre l'EDP du champ en régime magnétodynamique et estimer les densités des courants et des pertes qu'ils engendrent dans les conducteurs. Le chapitre deux englobe la présentation de ces deux modèles.

Les deux modèles retenus ont été appliqués pour la modélisation dynamique d'un électroaimant, considéré comme dispositif test pour valider les nouvelles approches dédiées au calcul des courants induits, sur une gamme de fréquences allant de 50Hz à 20kHz. Au premier lieu, l'EDP du champ électromagnétique en terme du potentiel vecteur magnétique, a été résolue par la méthode des éléments finis bidimensionnelle. Cela a permis de connaître la valeur du champ en tous points du domaine et donc le calcul des courants induits et des pertes dans l'aimant permanent. Après, nous avons résolu analytiquement l'EDP du champ, d'où l'obtention des expressions du champ magnétique et celles des densités de courants, elles dépendent à la fois de l'épaisseur de peau et des dimensions du conducteur. Sur la base de ces expressions, l'application du principe du vecteur de Poynting nous a permis d'obtenir

l'expression des pertes par courants induits. La présentation détaillée de l'application et des résultats issus des deux modèles ont fait l'objet du troisième chapitre de ce mémoire.

Les résultats obtenus, tant analytiquement que numériquement, sont en bonne concordance avec les constats théoriques relatifs au phénomène étudié et confirment clairement que ces pertes augmentent de manière significative avec la fréquence.

Le modèle analytique de calcul des pertes par courant de Foucault adopté dans ce travail, fondé sur une analyse analytique du champ magnétique, des courants induits et des pertes résultantes, est simple à mettre en œuvre, ayant un faible coût de calcul, et permet de prendre en compte l'effet de peau lié à la fréquence avec grande souplesse et flexibilité. Cependant, et malgré les avantages de ce modèle, surtout en matière du temps de calcul, il reste moins robuste et moins général que la méthode des éléments finis dont l'inconvénient majeur réside dans le temps de calcul requis pour la simulation de ce genre de phénomènes.

Le travail réalisé peut être amélioré toute en combinant les deux méthodes de résolution, analytique et numérique, ce qui permettra d'une part, de surpasser les inconvénients de chacune et d'autre part, de gagner leurs avantages spécifiques.

# Bibliographie

- [1] **H.ALLAG**, « Modèles et calcul des systèmes de suspension magnétique passive-Développement et calculs analytiques en 2D et 3D des interactions entre les aimants permanents», Thèse de doctorat de l'université de Grenoble, 2010.
- [2] **PODLEJSKI, A. S, BUTTAY, C., BERGOGNE, D., MORAND, J., VOLLAIRE, C., & BREARD, A.** «Mesure précise des pertes dans un module d'électronique de puissance par une méthode calorimétrique». In Symposium de Génie Electrique (SGE'14) ,2014.
- [3] **M.LOUAKED**, «modélisation des défauts statoriques d'une machine synchrone a aimants permanents par la méthode des éléments finis », mémoire de master, université de Saad Dahlab de Blida, 2018.
- [4] **O. CHADEBEC**, «Modélisation du champ magnétique induit par des tôles-Identification de l'aimantation-Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique », thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG), 2001.
- [5] **R.OUBAID**, « contribution à la modélisation du champ électromagnétique dans les dispositifs basses fréquences par la méthode des moments », thèse de Doctorat, université de Toulouse, 2014.
- [6] **T. BECHERRAWY**, « Électromagnétisme : équations de Maxwell propagation et émission », UNIMARC | BibTeX | RIS2012.
- [7] **N. LEPROVOST**, « Influence Des Petites Echelles Sur La Dynamique à Grande Echelle En Turbulence Hydro et Magnétohydrodynamique», Thèse de Doctorat, Institut de physique des liquides, Université de Paris 6, 2004.
- [8] **H. GIE, J.P. SARMANT**, « Electromagnétisme 2», Lavoisier Paris ,1982.
- [9] **J. SABONADIÈRE, J.L COULOMB**, «Calcul Des Champs Electromagnétiques», Techniques de l'ingénieur, D 3020, 1987.
- [10] **M.Y. KERBOUCHE, ET D. BOUTAGHANE**, « Approche analytico-numérique pour la modélisation des régions conductrices en régime magnétodynamique », mémoire de Master, Université de Jijel, 2022.
- [11] **H. HOOL**, « Finite elements, Electromagnetic and Design», article, Elsevier, 1995.
- [12] **A. AYAD**, « Etude et modélisation d'un capteur à Courant de Foucault pour le contrôle non destructif », mémoire d'ingénieur, Université de sidi bel Abbes Algérie, 2009.
- [13] **H. MEHADDENE**, « Étude du contrôle et de l'évaluation non-destructifs dans les milieux magnétiques », Thèse de Doctorat, université mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2019.
- [14] **N.BERGOUG**, « Etude de l'influence des matériaux ferromagnétiques sur les performances d'une machine MHD par la modélisation numérique 2D», mémoire de magister, université de Batna, 2006.

- [15] **M. KHEBBAB**, « Etude et Modélisation de Capteur à Courant de Foucault pour le contrôle non destructif », mémoire de Magistère en Electrotechnique, Université Mentouri de Constantine, 2007.
- [16] **L. CHOUIKHI**, « Palier à lévitation magnétique : modélisation et optimisation », mémoire de Magistère, université de Constantine, 2017.
- [17] **N. BRACIKOWSKI**, « Modélisation multi-physique par modèles à constantes localisées ; Application à une machine synchrone à aimants permanents en vue de son dimensionnement », Thèse de Doctorat, école Centrale de Lille, 2012.
- [18] **P. K. CHETANGNY**, « Calcul des pertes magnétiques par courants de Foucault dans les aimants permanents des MSAP », Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté Génie Electrique, 2017.
- [19] **R. L. STOLL**, « The analysis of eddy currents », Clarendon Press, 1974.
- [20] **H. ROISSE**, « Contribution à la modélisation des Systèmes électrotechniques par La méthode des réseaux de Permeances couples. Application aux machines Synchrones à aimants permanents », Thèse de Doctorat, Université de Lille, 1998.
- [21] **Y. Benmessaoud , D. Ouamara ,F. Dubas , M. Hilairret**, « Investigation of Volumic Permanent-Magnet Eddy-Current Losses in Multi-Phase Synchronous Machines from Hybrid Multi-Layer Model », Mathematical and Computational Applications, 2020, <https://www.researchgate.net/publication/339687368>.
- [22] **M. HULIN**, « les Bases de l'électromagnétisme Broché », Techniques Ingénieur, 1991.
- [23] **Z. BELLI, M. R. MEKIDECHE**, « Investigation of magnet segmentation techniques for eddy current losses reduction in permanent magnets electrical machines », COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 34 No. 1, pp. 46-60. <https://doi.org/10.1108/COMPEL-11-2013-0374>, 2015.
- [24] **A. BENABOU**, « Permanent magnet modelling for dynamic applications », Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2008.
- [25] « **DIDALAB** : « EXP400050 : Etude du transformateur ( EXPERIENCES ELEC ) » ».
- [26] **CEDRAT**, « Guide d'utilisation Flux 11 Volume 3 », vol. 3, 2012.
- [27] **A. BETTAYEB**, « Analytical Calculation of Rotor Magnet Eddy-Current Losses for High Speed IPMSM », XIX International Conference on Electrical Machines - ICEM 2010, Rome, Italy, 2010.

## Résumé

Le travail réalisé au cours de ce projet de master se focalise sur la modélisation des phénomènes électromagnétiques relatifs aux courants de Foucault et les pertes de puissances qu'ils engendrent dans les conducteurs électriques. Pour l'estimation des valeurs de ces courants, deux modèles différents ont été adoptés. Le premier est bidimensionnel, purement numérique, basé sur la méthode des éléments finis. Tandis que le deuxième est tridimensionnel, basé sur la résolution analytique de l'équation de Helmholtz à coefficients homogènes dans les conducteurs massifs. Les deux modèles ont été appliqués pour l'estimation des pertes dans un aimant inclus dans un électro-aimant sur une gamme de fréquences allant de 50Hz à 20kHz.

## Abstract

This master's project focuses on simulating electromagnetic phenomena involving eddy currents and the power losses they create in electrical conductors. To estimate the values of these currents, two distinct models were used. The first is two-dimensional and purely numerical, using the finite element method. The second is three-dimensional, based on an analytical solution to the Helmholtz equation with homogenous coefficients in large conductors. The two models were used to predict losses in a magnet included in an electromagnet across a frequency range of 50 Hz to 20 kHz.

## ملخص

يركز مشروع الماجستير هذا على محاكاة الظواهر الكهرومغناطيسية التي تنطوي على تيارات الدوامة وفقدان الطاقة التي تخلقها في الموصلات الكهربائية. ولتقدير قيم هذه التيارات، تم استخدام نموذجين مختلفين. الأول ثنائي الأبعاد وعددي بحت، باستخدام طريقة العناصر المحدودة. والثاني ثلاثي الأبعاد، ويستند إلى حل تحليلي لمعادلة هيلمهولتز مع معاملات متجانسة في الموصلات الكبيرة. واستخدم النموذجان للتنبؤ بالخسائر في مغناطيس مضمن في مغناطيس كهربائي عبر نطاق تردد من 50 هرتز إلى 20 كيلو هرتز.