République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire des mathématiques et applications des mathématiques (LMAM)

Thèse

Présentée par :

Mounira BOULOUH

pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Sur les solutions de quelques systèmes d'équations aux différences définies par des fonctions homogènes de degré zéro et des fonctions rationnelles de type puissance

---

Soutenue le 02.07.2024 à 17 : 00 à la bibliothèque centrale devant le jury composé de

Président :	**Mr.** T. ZERZAIHI	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	**Mr.** N. TOUAFEK	Prof.	Univ. Jijel
Examinateurs :	**Mr.** A. BOUCHAIR	Prof.	Univ. Jijel
	Mr. A. GASMI	Prof.	Univ. M'sila
	Mr. M. HAIOUR	Prof.	Univ. Annaba
	Mr. A. MERAD	Prof.	Univ. Oum El-Bouaghi

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Allah le tout Puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, monsieur **Nouressadat Touafek**. Je le remercie de m'avoir orienté, aidé et conseillé, je le remercie pour sa patience, sa disponibilité et j'espère pouvoir contribuer à échanger avec lui dans le futur et continuer à bénificier de ses conseils avisés.

Je tiens à remercie messieurs **Tahar Zerzaihi**, **Abderrahmane Bouchair**, **Abdelkader Gasmi**, **Mohamed Haiour** et **Ahcen Merad** d'avoir accepter de faire partie de mon jury.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amies et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours là pour moi. Je remercie tous les membres de ma famille.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de quelques systèmes d'équations aux différences.
Dans un premier lieu, on s'intéresse à deux systèmes définis par la somme et le produit de deux fonctions homogènes de degré zéro. Pour ces deux systèmes, nous étudions la stabilité globale des points d'équilibre, l'existence des solutions périodiques et oscillatoires.
En deuxième lieu, nous nous intéressons à la résolution explicite d'un système rationnel d'ordre supérieur. En utilisant les formules explicites de ses solutions, nous étudions le comportement asymptotique des solutions et on donne aussi des conditions pour l'existence des solutions périodiques.

Mots clés : Systèmes d'équations aux différences, fonctions homogènes, stabilité locale et globale, comportement asymptotique des solutions, solutions périodiques, solutions oscillatoires.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested in the study of some systems of difference equations.
Firstly, we are interested in two systems defined by the sum and the product of two homogeneous functions of degree zero. For these two systems, we study the global stability of the equilibrium points, the existence of periodic and oscillatory solutions.
Secondly, we are interested in solving explicitly a higher order rational system. Using the obtained formulas, we study the asymptotic behavior of the solutions and we give conditions for the existence of periodic solutions.

Key words : Systems of difference equations, homogeneous functions, local and global stability, asymptotic behavior of solutions, periodic solutions, oscillatory solutions.

ملخص

نهتم في هذه الرسالة بدراسة بعض جمل معادلات الفروق.
أولاً ندرس جملتي معادلات فرقية معرفتين بمجموع وحاصل ضرب دالتين متجانستين من الدرجة صفر. بالنسبة لهاتين الجملتين، قمنا بدراسة الاستقرار الكلي لنقاط التوازن، وكذا دراسة وجود الحلول الدورية والمتذبذبة.
ثانيًا، قمنا بإعطاء الحلول بشكل صريح لجملة معادلات فرقية من رتبة عليا معرفة بدوال كسرية. وباستخدام الصيغ الصريحة المحصل عليها، درسنا السلوك اللانهائي للحلول، واعطينا كذلك شروط لوجود الحلول الدورية.

الكلمات المفتاحية : جمل معادلات الفروق، الدوال المتجانسة، الاستقرار المحلي والكلي، السلوك اللانهائي للحلول، الحلول الدورية، الحلول التذبذبية.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le domaine de recherche sur les équations aux différences ne cesse d'attirer, l'attention des chercheurs depuis plusieurs décennies. Cela peut être expliqué par le fait que ce type d'équations est utilisé dans la modélisation de plusieurs phénomènes réels dans différents domaines de notre vie. En effet, un très grand nombre d'œuvres (articles, livres) est dédié à cet axe de recherche, voir par exemple, les références [1,7,11,16,26,27,29,31,32,37,44]. Notre thèse est une contribution à cet axe de recherche.

En particulier, un grand intérêt est accordé au comportement global des solutions d'équations et systèmes d'équations aux différences définis par des fonctions homogènes. Par exemple, dans [19], [38] et respectivement [39], les auteurs ont étudié l'équation aux différences

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, ..., \tag{1}$$

où

$$f : \ ]0, +\infty[^2 \longrightarrow \ ]0, +\infty[$$

est la fonction rationnelle homogène partiulière de degré zéro donnée par

$$f(x, y) = \frac{ax^k + b\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + cy^k}{Ax^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k},$$

$$f(x, y) = \frac{ax^3 + bxy^2 + cx^2y + dy^3}{Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dy^3}$$

et respectivement

$$f(x, y) = \frac{ax^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ey^4}{Ax^4 + Bxy^3 + Cx^2y^2 + Dx^3y + Ey^4}.$$

Dans ces références, les auteurs ont établi des résultats sur la stabilité de l'unique point d'équilibre $\overline{x} = f(1,1)$ de (1) dans chaque cas, d'autres résultats sur la (non)-existence des solutions périodiques, ont été aussi démontré. Dans [30], Moaaz et al., ont étudié l'équation aux différences (1), avec f est une fonction continue et homogène de degré zéro quelconque. Comme généralisation de ce travail, Touafek dans [41], a été intéressé au comportement global du système de second ordre défini par

$$x_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

où $f, g : \ ]0, +\infty[^2 \longrightarrow \ ]0, +\infty[$ sont des fonctions continues et homogènes de degré zéro. Ensuite, Touafek et al. ont étudié le cas tridimensionnelle du système (2) dans [42].
On peut trouver, par exemple, d'autres modèles d'équations aux différences définies par des fonctions homogènes de degré zéro, dans les références [3, 8–10, 13, 25] et [33].

Motivé et inespéré par ces travaux, on s'intéresse dans le deuxième chapitre de cette thèse à l'étude des deux systèmes d'équations aux différences définis par la somme et le produit des fonctions continues et homogènes de degré zéro suivants, voir [5, 6],

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}) + f_2(y_n, y_{n-1}), \; y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}) + g_2(y_n, y_{n-1}), \; n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}).f_2(y_n, y_{n-1}), \; y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}).g_2(y_n, y_{n-1}), \; n \in \mathbb{N}$$

où f_1, f_2, g_1, g_2 : $]0, +\infty[^2 \longrightarrow \ ]0, +\infty[$. Pour ces deux systèmes, on étudie la stabilité globale de l'unique point d'équilibre correspondant, i.e.,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1))$$

et

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (f_1(1,1).f_2(1,1), g_1(1,1).g_2(1,1)).$$

En outre, des conditions garantissant l'existence des solutions périodiques et oscillatoires ont été établi.
Notons que pour assurer l'attractivité globale de nos points d'équilibre, des théorèmes de convergence ont été démontré dans le premier chapitre, qui contient aussi quelques notions et résultats de base nécessaires pour la réalisation de notre thèse.

Dans une autre direction, les chercheurs s'intéressent aussi à trouver la forme explicite des solutions des équations aux différences, en général cela est une tâche difficile, car on a pas une procédure systématique à suivre. L'intérêt pour cette direction, s'explique par le fait que s'est on connait la forme explicite des solutions, alors on peut déduire facilement le comportement du phénomène modélisé par l'équation aux différences correspondante : comportement asymptotique, périodicité et l'oscillation. Pour des modèles concrets, on pourra consulter les références suivantes : [2, 14, 17, 20–23, 28, 35, 36, 40, 43, 45, 46]. Dans le dernier chapitre, on va résoudre le système d'équations aux différences de type rationnel (non linéaire) avec puissances donné par

$$x_{n+1} = x_{n-k}^{p} \frac{\alpha y_n + \beta y_{n-k-1}^{q}}{\gamma y_n + \delta y_{n-k-1}^{q}},\ y_{n+1} = y_{n-k}^{q} \frac{a x_n + b x_{n-k-1}^{p}}{c x_n + d x_{n-k-1}^{p}},\ n \in \mathbb{N},\ k, p, q > 0, \tag{3}$$

où les paramètres $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et les valeurs initiales $\{x_i\}_{i=-(k+1)}^{0}$, $\{y_i\}_{i=-(k+1)}^{0}$ sont des nombres réels strictement positifs.

Dans la réalisation de cette partie de la thèse, nous étions motivés par les références suivantes : [18, 34]. Notons aussi que l'idée est de ramener le système non linéaire via des changements sur les variables à un système linéaire, puis déduire les solutions du système d'origine à partir des solutions du système linéaire correspondant.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES THÉORÈMES DE CONVERGENCE

Dans ce chapitre, nous présentons, dans sa première partie, quelques définitions et résultats connus qui seront utilisés dans les chapitres de cette thèse. La deuxième partie est consacrée à quelques théorèmes de convergence pour deux systèmes, le premier est défini par la somme de deux fonctions homogènes de degré zéro, cependant l'autre est défini par le produit de deux fonctions homogènes de degré zéro. Pour plus de détails, vous pouvez consulter [12, 15, 24].

1.1 Préliminaires

Concidérons le système d'équations aux différences suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \cdots, x_{n-k}, y_n, \cdots, y_{n-k}), \\ y_{n+1} = g(x_n, \cdots, x_{n-k}, y_n, \cdots, y_{n-k}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

où $f, g : I^{2(k+1)} \to I$ sont des fonctions continues, $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0, \cdots, x_{-k}, y_0, \cdots, y_{-k} \in I$ sont les valeurs initiales.

Définition 1.1.1 *Un point $(\overline{x}, \overline{y}) \in I^2$ est dit point d'équilibre du système* (1.1) *si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) \text{ et } \overline{y} = g(\overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{y})$$

Définition 1.1.2 *Soit $(x_n, y_n)_{n\geq -k}$ une solution du système* (1.1)*. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq -k}$ $\Big($resp. $(y_n)_{n\geq -k}\Big)$ oscille autour de $\overline{x}$ $\Big($resp. $\overline{y}\Big)$ si*

$$(x_n - \overline{x})(x_{n+1} - \overline{x}) < 0 \;\; \Big(\textit{resp. } (y_n - \overline{y})(y_{n+1} - \overline{y}) < 0\Big).$$

On dit que $(x_n, y_n)_{n\geq -k}$ est oscillatoire autour de $(\overline{x}, \overline{y})$ si $(x_n)_{n\geq -k}$ oscille autour de $\overline{x}$ ou $(y_n)_{n\geq -k}$ oscille autour de $\overline{y}$.

Définition 1.1.3 *Une solution $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ du système* (1.1)*, est dite éventuelement périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$, s'il existe un entier $n_0 \geq -k$ tel que*

$$x_{n+p} = x_n, \;\; y_{n+p} = y_n, \;\; \forall n \geq n_0.$$

Si $n_0 = -k$, la solution est dite périodique.

En prenant $k = 1$ dans le système (1.1) et $I =]0, +\infty[$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

avec $f, g \, : \,]0, +\infty[^4 \,\to\,]0, +\infty[$ sont des fonctions continues et $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} \in \,]0, +\infty[$ sont les valeurs initiales.
Le système (1.2) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante

$$X_{n+1} = F(X_n), \;\; n = 0, 1, \ldots, \tag{1.3}$$

avec $X_0 = (x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}),\ X_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) \in \,]0, +\infty[^4$ et

$$F :]0, +\infty[^4 \longrightarrow]0, +\infty[^4$$

est une fonction continue définie par

$$F(X_n) = \Big(f(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), x_n, g(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), y_n\Big).$$

On a

$(\overline{x}, \overline{y})$ est un point d'équilibre de (1.2) $\Leftrightarrow \overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y})$ est un point d'équilibre de (1.3).

Définition 1.1.4 *Soit* $\overline{X}$ *un point d'équilibre du système* (1.3) *et* $\|.\|$ *une norme.*

1. *Le point d'équilibre* $\overline{X}$ *est dit stable (localement stable) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall X_0 \in \left]0,+\infty\right[^4 : \|X_0 - \overline{X}\| < \delta \Longrightarrow \|X_n - \overline{X}\| < \epsilon,$$

sinon, $\overline{X}$ *est dit instable.*

2. $\overline{X}$ *est dit asymptotiquement stable s'il est stable et*

$$\exists \gamma > 0, \forall X_0 \in \left]0,+\infty\right[^4 : \|X_0 - \overline{X}\| < \gamma \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = \overline{X}.$$

3. *Le point d'équilibre* $\overline{X}$ *est dit globalement attractif si*

$$\forall X_0 \in \left]0,+\infty\right[^4 : \lim_{n\to+\infty} X_n = \overline{X}.$$

4. *Le point d'équilibre* $\overline{X}$ *est dit globalement (asymptotiquement) stable s'il est stable et globalement attractif.*

Définition 1.1.5 *Supposons que* $F \in C^1(\left]0,+\infty\right[^4)$. *Le système défini par*

$$Y_{n+1} = J_F(\overline{X})Y_n,\ n \in \mathbb{N},$$

avec $Y_n = X_n - \overline{X}$ *et* J_F *est la matrice Jacobienne de* F *en* $\overline{X}$, *est appelé système linéaire associé à* (1.3) *autour du point d'équilibre* $\overline{X}$.

Théorème 1.1.1

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne* J_F *sont de module strictement inférieur à* 1, *alors le point d'équilibre* $\overline{X}$ *est asymptotiquement stable.*
2. *Si, une des valeurs propres de la matrice Jacobienne* J_F, *est de module supérieur à* 1, *alors le point d'équilibre* $\overline{X}$ *est instable.*

Définition 1.1.6 *Une fonction* $f : \left]0,+\infty\right[^2 \to \left]0,+\infty\right[$, *est dite homogène de degré* $m \in \mathbb{R}$ *si*

$$\forall (u,v) \in \left]0,+\infty\right[^2,\ \forall \lambda > 0 :\ f(\lambda u, \lambda v) = \lambda^m f(u,v).$$

Théorème 1.1.2 ***(Théorème d'Euler)*** *[4]*

1. *Soit* $f : \left]0,+\infty\right[^2 \to \left]0,+\infty\right[$ *une fonction de classe* C^1. *Alors,* f *est homogène de degré* m *si et seulement si*

$$u\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + v\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = mf(u,v),\ (u,v) \in \left]0,+\infty\right[^2.$$

2. *Soit* $f :]0, +\infty[^2 \to]0, +\infty[$ *une fonction de classe* C^1. *Alors, si* f *est homogène de degré* m, *alors* $\frac{\partial f}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial v}$ *sont homogènes de degré* $m - 1$.

Maintenant, considérons les deux systèmes suivants

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}) + f_2(y_n, y_{n-1}),\ y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}) + g_2(y_n, y_{n-1}),\ n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

et

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}) f_2(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}) g_2(y_n, y_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, $y_0 \in]0, +\infty[$ et les fonctions $f_1, f_2, g_1, g_2 :]0, +\infty[^2 \longrightarrow]0, +\infty[$ sont continues et homogènes de degré zéro.
Afin d'obtenir les résultats sur l'attractivité globale des points d'équilibre des deux systèmes (1.4) et (1.5), on présente les théorèmes de convergence généraux suivants.

1.2 Quelques théorèmes de convergence

Cette partie est consacrée à des théorèmes de convergence pour deux systèmes d'équations aux différences, le premier est défini par la somme tandis que le deuxième est défini par le produit de deux fonctions homogènes de degré zéro. Ces théorèmes seront utiles dans la démonstration de l'attractivité globale des points d'équilibre des systèmes (1.4) et (1.5).

1.2.1 Théorèmes de convergence pour le système (1.4)

Considérons le système (1.4) et soient $h_1,\ h_2 :]0, +\infty[^4 \longrightarrow]0, +\infty[$ les fonctions définies par

$$h_1(u, v, t, w) = f_1(u, v) + f_2(w, t) \tag{1.6}$$

et

$$h_2(u, v, t, w) = g_1(u, v) + g_2(w, t). \tag{1.7}$$

où $f_1,\ f_2,\ g_1$ et g_2 sont les fonctions définies dans (1.4).
Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in]0, +\infty[^2$ un point d'équilibre pour le système (1.4). On a

$$\overline{x} = h_1(\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}) = f_1(\overline{x}, \overline{x}) + f_2(\overline{y}, \overline{y})$$

et

$$\overline{y} = h_2(\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}) = g_1(\overline{x}, \overline{x}) + g_2(\overline{y}, \overline{y}).$$

Comme les fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 sont homogènes de degré zéro, alors

$$\begin{aligned} \overline{x} &= f_1(1,1) + f_2(1,1) = h_1(1,1,1,1), \\ \overline{y} &= g_1(1,1) + g_2(1,1) = h_2(1,1,1,1), \end{aligned}$$

d'où,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)). \tag{1.8}$$

est l'unique point d'équilibre du système (1.4).

Théorème 1.2.1 *Considérons le système* (1.4). *Supposons que les hypothèses suivantes sont vraies :*

1. (H_1) : *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \quad \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4.$$

2. (H_2) : h_1 *et* h_2 *sont croissantes en* u *et* w *pour tous* v *et* t *et décroissantes en* v *et* t *pour tous* u *et* w.

3. (H_3) : *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ M_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ m_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1)). \end{aligned}$$

Démonstration. Posons

$$m_1^0 := a,\ M_1^0 := b,\ m_2^0 := \alpha,\ M_2^0 := \beta$$

et pour chaque $i = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} m_1^{i+1} &: = h_1(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_1^{i+1} := h_1(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i), \\ m_2^{i+1} &: = h_2(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_2^{i+1} := h_2(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i). \end{aligned}$$

Nous avons

$$a \leq h_1(a, b, \alpha, \beta) \leq h_1(b, a, \beta, \alpha) \leq b$$

et

$$\alpha \leq h_2(a, b, \alpha, \beta) \leq h_2(b, a, \beta, \alpha) \leq \beta,$$

alors,

$$\begin{aligned} m_1^0 &= a \leq h_1(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) = m_1^1 \leq h_1(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_1^1 \leq b = M_1^0, \\ m_2^0 &= \alpha \leq h_2(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) = m_2^1 \leq h_2(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_2^1 \leq \beta = M_2^0, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que h_1 et h_2 sont croissantes en u et w pour tous v et t et décroissantes en v et t pour tous u et w, on obtient

$$h_1(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_1(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_1(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) \leq h_1(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0)$$

et

$$h_2(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_2(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_2(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) \leq h_2(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0)$$

cela signifie que

$$m_1^0 \leq m_1^1 \leq m_1^2 \leq M_1^2 \leq M_1^1 \leq M_1^0$$

et

$$m_2^0 \leq m_2^1 \leq m_2^2 \leq M_2^2 \leq M_2^1 \leq M_2^0.$$

Par récurrence, on trouve que, pour tout $i = 0, 1, \ldots,$

$$a = m_1^0 \leq m_1^1 \leq \cdots \leq m_1^{i-1} \leq m_1^i \leq M_1^i \leq M_1^{i-1} \leq \cdots \leq M_1^1 \leq M_1^0 = b$$

et

$$\alpha = m_2^0 \leq m_2^1 \leq \cdots \leq m_2^{i-1} \leq m_2^i \leq M_2^i \leq M_2^{i-1} \leq \cdots \leq M_2^1 \leq M_2^0 = \beta.$$

Par conséquent, les suites $(m_1^i)_i$ et $(m_2^i)_i$ (resp. $(M_1^i)_i$ et $(M_2^i)_i$) sont croissantes (resp. décroissantes) et aussi bornées, donc elles sont convergentes.

Maintenant, on pose

$$m_1 = \lim_{i\to+\infty} m_1^i,\ M_1 = \lim_{i\to+\infty} M_1^i,\ m_2 = \lim_{i\to+\infty} m_2^i,\ M_2 = \lim_{i\to+\infty} M_2^i.$$

Alors,

$$a \leq m_1 \leq M_1 \leq b,\ \alpha \leq m_2 \leq M_2 \leq \beta.$$

En prenant les limites dans les égalités suivantes

$$\begin{aligned} m_1^{i+1} &= h_1(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_1^{i+1} = h_1(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i),\\ m_2^{i+1} &= h_2(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_2^{i+1} = h_2(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i), \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que h_1 et h_2 sont continues, on trouve

$$\begin{aligned} m_1 &= h_1(m_1, M_1, m_2, M_2),\ M_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2),\\ m_2 &= h_2(m_1, M_1, m_2, M_2),\ M_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \end{aligned}$$

donc, de (H_3), on trouve $m_1 = M_1$ et $m_2 = M_2$.

De (H_1), on a

$$m_1^0 = a \leq x_n \leq b = M_1^0,\ m_2^0 = \alpha \leq y_n \leq \beta = M_2^0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Pour $n = 2, 3, \ldots$, on a

$$\begin{aligned} m_1^1 &= h_1(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = x_{n+1} \leq h_1(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_1^1,\\ m_2^1 &= h_2(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = y_{n+1} \leq h_2(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_2^1, \end{aligned}$$

i.e.,

$$m_1^1 \leq x_n \leq M_1^1,\ m_2^1 \leq y_n \leq M_2^1,\ n = 3, 4, \ldots.$$

Maintenant, pour $n = 4, 5, \ldots$, on a

$$\begin{aligned} m_1^2 &= h_1(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = x_{n+1} \leq h_1(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) = M_1^2,\\ m_2^2 &= h_2(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = y_{n+1} \leq h_2(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) = M_2^2, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$m_1^2 \leq x_n \leq M_1^2,\ m_2^2 \leq y_n \leq M_2^2,\ n = 5, 6, \ldots.$$

Pour $n = 6, 7, \dots$, on a

$$m_1^3 = h_1(m_1^2, M_1^2, m_2^2, M_2^2) \leq h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = x_{n+1} \leq h_1(M_1^2, m_1^2, M_2^2, m_2^2) = M_1^3$$

et

$$m_2^3 = h_2(m_1^2, M_1^2, m_2^2, M_2^2) \leq h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = y_{n+1} \leq h_2(M_1^2, m_1^2, M_2^2, m_2^2) = M_2^3$$

c'est à dire

$$m_1^3 \leq x_n \leq M_1^3, \; m_2^3 \leq y_n \leq M_2^3, \; n = 7, 8, \dots.$$

Par récurrence, on trouve

$$m_1^i \leq x_n \leq M_1^i, \; m_2^i \leq y_n \leq M_2^i, \; n \geq 2i+1, \; i = 0, 1, \dots$$

En utilisant le fait que $i \to +\infty$ implique que $n \to +\infty$ et $m_1 = M_1$ et $m_2 = M_2$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = M_1, \; \lim_{n\to+\infty} y_n = M_2.$$

En utilisant (1.4) et comme f_1, f_2, g_1 et g_2 sont continues et homogènes de degré zéro, alors

$$M_1 = h_1(M_1, M_1, M_2, M_2) = f_1(1,1) + f_2(1,1)$$

et

$$M_2 = h_2(M_1, M_1, M_2, M_2) = g_1(1,1) + g_2(1,1).$$

■

Les théorèmes suivants se démontre de la même manière.

Théorème 1.2.2 *Considérons le système* (1.4)*. On suppose que les hypothèses suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \; \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \quad \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4.$$

2. *h_1 et h_2 sont décroissantes en u et w pour tous v et t et croissantes en v et t pour tous u et w.*

3. *Si $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \; m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned}(\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1)).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 *Considérons le système* (1.4) *et supposons que les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ tels que*

$$a \leq h_1(u,v,w,t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u,v,w,t) \leq \beta, \ \forall (u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4 .$$

2. *h_1 est croissante en u et w pour tous v et t et décroissante en v et t pour tous u et w, cependant h_2 est décroissante en u et w pour tous v et t et croissante en v et t pour tous u et w.*

3. *Si $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a,b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ M_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2), \end{cases}$$

   alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned}(\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1)).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.4 *Considérons le système* (1.4). *Supposons que les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ tels que*

$$a \leq h_1(u,v,w,t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u,v,w,t) \leq \beta, \quad \forall (u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4 .$$

2. *h_1 est décroissante en u et w pour tous v et t et croissante en v et t pour tous u et w, cependant h_2 est croissantes en u et w pour tous v et t et décroissante en v et t pour tous u et w.*

3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1, (M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.5 *Considérons le système* (1.4)*. Supposons que les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4 .$$

2. h_1 *et* h_2 *sont croissantes en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et décroissantes en* v *et* w *pour tous* u *et* t.
3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.6 *Considérons le système* (1.4)*. On suppose que les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *vérifient*
$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4.$$
2. h_1 *et* h_2 *sont décroissantes en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et croissantes en* v *et* w *pour tous* u *et* t.
3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système suivant*
$$\begin{cases} m_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \end{cases}$$
alors
$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*
$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1) + f_2(1,1), g_1(1,1) + g_2(1,1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.7 *Considérons le système* (1.4)*. Supposons que les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*
$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4.$$
2. h_1 *est croissante en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et décroissante en* v *et* w *pour tous* u *et* t*, cependant* h_2 *est décroissante en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et croissante en* v *et* w *pour tous* u *et* t*,*
3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système suivant*
$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \end{cases}$$
alors
$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned}(\overline{x},\overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1),h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1)+f_2(1,1),g_1(1,1)+g_2(1,1)).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.8 *Considérons le système* (1.4). *Supposons que les hypotèses suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent $a,b,\alpha,\beta \in]0,+\infty[$ tels que*

$$a \leq h_1(u,v,w,t) \leq b,\ \alpha \leq h_2(u,v,w,t) \leq \beta,\ \forall (u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4.$$

2. *h_1 est décroissante en u et t pour tous v et w et croissante en v et w pour tous u et t, cependant h_2 est croissante en u et t pour tous v et w et décroissante en v et w pour tous u et t,*

3. *Si $(m_1,M_1,m_2,M_2) \in [a,b]^2 \times [\alpha,\beta]^2$ est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(M_1,m_1,m_2,M_2), \\ M_1 = h_1(m_1,M_1,M_2,m_2), \\ m_2 = h_2(m_1,M_1,M_2,m_2), \\ M_2 = h_2(M_1,m_1,m_2,M_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1,\ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned}(\overline{x},\overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1),h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1)+f_2(1,1),g_1(1,1)+g_2(1,1)).\end{aligned}$$

1.2.2 Théorèmes de convergence pour le système (1.5)

Considérons le système d'équations (1.5) et soient $h_1,\ h_2 :]0,+\infty[^4 \longrightarrow]0,+\infty[$ les deux fonctions définies par

$$h_1(u,v,w,t) = f_1(u,v)f_2(w,t) \tag{1.9}$$

et

$$h_2(u,v,w,t) = g_1(u,v)g_2(w,t), \tag{1.10}$$

où $f_1,\ f_2,\ g_1$ et g_2 sont les fonctions définies dans (1.5). Nous avons

$$\overline{x} = h_1(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) = f_1(\overline{x},\overline{x})f_2(\overline{y},\overline{y}) \tag{1.11}$$

et

$$\overline{y} = h_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) = g_1(\overline{x},\overline{x})g_2(\overline{y},\overline{y}). \tag{1.12}$$

Comme les fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 sont homogènes de degré zéro, (1.11) et (1.12) deviennent respectivement

$$\overline{x} = f_1(1,1)f_2(1,1) = h_1(1,1,1,1)$$

et

$$\overline{y} = g_1(1,1)g_2(1,1) = h_2(1,1,1,1).$$

D'où, l'unique point d'équilibre de (1.5) est

$$(\overline{x},\overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)). \tag{1.13}$$

Théorème 1.2.9 *Considérons le système* (1.5). *Supposons que les assertions suivantes sont vraies :*

1. (H_1) : *Ils existent $a, b, \alpha, \beta \in\,]0,+\infty[$ tels que*

$$a \le h_1(u,v,w,t) \le b,\ \ \alpha \le h_2(u,v,w,t) \le \beta, \quad \forall (u,v,w,t) \in\,]0,+\infty[^4.$$

2. (H_2) : *h_1 et h_2 sont croissantes en u et w pour tous v et t et décroissantes en v et t pour tous u et w.*

3. (H_3) : *Si $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a,b]^2 \times [\alpha,\beta]^2$ est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2),\\ M_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2),\\ m_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2),\\ M_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2),\end{cases}$$

Alors

$$m_1 = M_1,\ \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned}(\overline{x},\overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))\\ &= (f_1(1,1)f_2(1,1), g_1(1,1)g_2(1,1)).\end{aligned}$$

Démonstration. Posons

$$m_1^0 := a,\ M_1^0 := b,\ m_2^0 := \alpha,\ M_2^0 := \beta$$

et pour chaque $i = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} m_1^{i+1} &: = h_1(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_1^{i+1} := h_1(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i), \\ m_2^{i+1} &: = h_2(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_2^{i+1} := h_2(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} a &\leq h_1(a, b, \alpha, \beta) \leq h_1(b, a, \beta, \alpha) \leq b, \\ \alpha &\leq h_2(a, b, \alpha, \beta) \leq h_2(b, a, \beta, \alpha) \leq \beta, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} m_1^0 &= a \leq h_1(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) = m_1^1 \leq h_1(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_1^1 \leq b = M_1^0, \\ m_2^0 &= \alpha \leq h_2(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) = m_2^1 \leq h_2(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_2^1 \leq \beta = M_2^0. \end{aligned}$$

en utilisant le fait que h_1 et h_2 sont croissantes en u et w pour tous v et t et décroissantes en v et t pour tous u et w, on obtient $h_1(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_1(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_1(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) \leq h_1(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0)$

et

$h_2(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_2(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_2(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) \leq h_2(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0)$

et cela signifie que

$$m_1^0 \leq m_1^1 \leq m_1^2 \leq M_1^2 \leq M_1^1 \leq M_1^0$$

et

$$m_2^0 \leq m_2^1 \leq m_2^2 \leq M_2^2 \leq M_2^1 \leq M_2^0.$$

Par récurrence, on obtient

$$a = m_1^0 \leq m_1^1 \leq \cdots \leq m_1^{i-1} \leq m_1^i \leq M_1^i \leq M_1^{i-1} \leq \cdots \leq M_1^1 \leq M_1^0 = b$$

et

$$\alpha = m_2^0 \leq m_2^1 \leq \cdots \leq m_2^{i-1} \leq m_2^i \leq M_2^i \leq M_2^{i-1} \leq \cdots \leq M_2^1 \leq M_2^0 = \beta,$$

pour $i = 0, 1, \ldots$ Par conséquant, les suites $(m_1^i)_i$ et $(m_2^i)_i$ (resp. $(M_1^i)_i$ et $(M_2^i)_i$) sont croissantes (resp. décroissantes) et aussi bornées, donc elles sont convergentes.

Maintenant, Posons

$$m_1 = \lim_{i\to+\infty} m_1^i,\ M_1 = \lim_{i\to+\infty} M_1^i,\ m_2 = \lim_{i\to+\infty} m_2^i,\ M_2 = \lim_{i\to+\infty} M_2^i.$$

Alors

$$a \leq m_1 \leq M_1 \leq b,\ \ \alpha \leq m_2 \leq M_2 \leq \beta.$$

En passant aux limites dans les égalités suivantes

$$\begin{aligned} m_1^{i+1} &= h_1(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_1^{i+1} = h_1(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i), \\ m_2^{i+1} &= h_2(m_1^i, M_1^i, m_2^i, M_2^i),\ M_2^{i+1} = h_2(M_1^i, m_1^i, M_2^i, m_2^i), \end{aligned}$$

et comme h_1 et h_2 sont continues, alors

$$\begin{aligned} m_1 &= h_1(m_1, M_1, m_2, M_2),\ M_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ m_2 &= h_2(m_1, M_1, m_2, M_2),\ M_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2) \end{aligned}$$

donc, de (H_3) on a $m_1 = M_1$ et $m_2 = M_2$.

De (H_1), on a

$$m_1^0 = a \leq x_n \leq b = M_1^0,\ m_2^0 = \alpha \leq y_n \leq \beta = M_2^0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Pour $n = 2, 3, \ldots$, on a

$$\begin{aligned} m_1^1 &= h_1(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = x_{n+1} \leq h_1(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_1^1, \\ m_2^1 &= h_2(m_1^0, M_1^0, m_2^0, M_2^0) \leq h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = y_{n+1} \leq h_2(M_1^0, m_1^0, M_2^0, m_2^0) = M_2^1, \end{aligned}$$

i.e.,

$$m_1^1 \leq x_n \leq M_1^1,\ m_2^1 \leq y_n \leq M_2^1,\ n = 3, 4, \ldots.$$

Pour $n = 4, 5, \ldots$,

$$\begin{aligned} m_1^2 &= h_1(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = x_{n+1} \leq h_1(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) = M_1^2, \\ m_2^2 &= h_2(m_1^1, M_1^1, m_2^1, M_2^1) \leq h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = y_{n+1} \leq h_2(M_1^1, m_1^1, M_2^1, m_2^1) = M_2^2, \end{aligned}$$

i.e.,

$$m_1^2 \leq x_n \leq M_1^2,\ m_2^2 \leq y_n \leq M_2^2,\ n = 5, 6, \ldots.$$

Ensuite, pour $n = 6, 7, \ldots,$ on a

$$m_1^3 = h_1(m_1^2, M_1^2, m_2^2, M_2^2) \leq h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = x_{n+1} \leq h_1(M_1^2, m_1^2, M_2^2, m_2^2) = M_1^3$$

et

$$m_2^3 = h_2(m_1^2, M_1^2, m_2^2, M_2^2) \leq h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = y_{n+1} \leq h_2(M_1^2, m_1^2, M_2^2, m_2^2) = M_2^3$$

i.e.,

$$m_1^3 \leq x_n \leq M_1^3,\ m_2^3 \leq y_n \leq M_2^3,\ n = 7, 8, \ldots.$$

Par récurrence on trouve, pour $i = 0, 1, \ldots,$

$$m_1^i \leq x_n \leq M_1^i,\ m_2^i \leq y_n \leq M_2^i,\ n \geq 2i + 1.$$

On a $i \to +\infty$ implique que $n \to +\infty$ et $m_1 = M_1$ *et* $m_2 = M_2$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = M_1,\ \lim_{n\to+\infty} y_n = M_2.$$

Utilisons (1.5) et le fait que f_1, f_2, g_1 et g_2 sont continues et homogènes de degré zéro, on obtient

$$M_1 = h_1(M_1, M_1, M_2, M_2) = f_1(1, 1) + f_2(1, 1)$$

et

$$M_2 = h_2(M_1, M_1, M_2, M_2) = g_1(1, 1) + g_2(1, 1).$$

■

Les théorèmes suivants se démontre de la même manière.

Théorème 1.2.10 *Considérons le système* (1.5). *Supposons que les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b,\ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \quad \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4.$$

2. *h_1 et h_2 sont décroissantes en u et w pour tous v et t et croissantes en v et t pour tous u et w.*
3. *Si $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2), \end{cases}$$

Alors

$$m_1 = M_1,\ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{array}{rcl}(\overline{x},\overline{y}) & = & (h_1(1,1,1,1),h_2(1,1,1,1)) \\ & = & (f_1(1,1)f_2(1,1),g_1(1,1)g_2(1,1)).\end{array}$$

Théorème 1.2.11 *Considérons le système* (1.5)*. On suppose que les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent* $a,b,\alpha,\beta \in]0,+\infty[$ *tels que*

$$a \le h_1(u,v,w,t) \le b,\ \alpha \le h_2(u,v,w,t) \le \beta,\ \forall (u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4.$$

2. h_1 *est croissante en* u *et* w *pour tous* v *et* t *et décroissante en* v *et* t *pour tous* u *et* w*, cependant* h_2 *est décroissante en* u *et* w *pour tous* v *et* t *et croissante en* v *et* t *pour tous* u *et* w*.*
3. *Si* $(m_1,M_1,m_2,M_2) \in [a,b]^2 \times [\alpha,\beta]^2$ *est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1,M_1,m_2,M_2), \\ M_1 = h_1(M_1,m_1,M_2,m_2), \\ m_2 = h_2(M_1,m_1,M_2,m_2), \\ M_2 = h_2(m_1,M_1,m_2,M_2), \end{cases}$$

Alors

$$m_1 = M_1,\ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{array}{rcl}(\overline{x},\overline{y}) & = & (h_1(1,1,1,1),h_2(1,1,1,1)) \\ & = & (f_1(1,1)f_2(1,1),g_1(1,1)g_2(1,1)).\end{array}$$

Théorème 1.2.12 *Considérons le système* (1.5)*. On suppose que les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Ils existent* $a,b,\alpha,\beta \in]0,+\infty[$ *tels que*

$$a \le h_1(u,v,w,t) \le b,\ \alpha \le h_2(u,v,w,t) \le \beta,\quad \forall (u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4.$$

2. h_1 *est décroissante en* u *et* w *pour tous* v *et* t *et croissante en* v *et* t *pour tous* u *et* w*, cependant* h_2 *est croissante en* u *et* w *pour tous* v *et* t *et décroissante en* v *et* t *pour tous* u *et* w*.*

3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a,b]^2 \times [\alpha,\beta]^2$*est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1,(M_1, m_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(m_1, M_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(M_1, m_1, M_2, m_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1)f_2(1,1), g_1(1,1)g_2(1,1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.13 *Considérons le système* (1.5). *Supposons que les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4.$$

2. h_1 *et* h_2 *sont croissantes en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et décroissantes en* v *et* w *pour tous* u *et* t.
3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a,b]^2 \times [\alpha,\beta]^2$ *est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \end{cases}$$

Alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1)f_2(1,1), g_1(1,1)g_2(1,1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.14 *Considérons le système* (1.5). *Supposons que les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4 .$$

2. h_1 *et* h_2 *sont décroissantes en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et croissantes en* v *et* w *pour tous* u *et* t.

3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1, 1, 1, 1), h_2(1, 1, 1, 1)) \\ &= (f_1(1, 1)f_2(1, 1), g_1(1, 1)g_2(1, 1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.15 *Considérons le système* (1.5). *Supposons que les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4 .$$

2. h_1 *est croissante en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et décroissante en* v *et* w *pour tous* u *et* t, *cependant* h_2 *est décroissante en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et croissante en* v *et* w *pour tous* u *et* t,

3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution of the système*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ m_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1, 1, 1, 1), h_2(1, 1, 1, 1)) \\ &= (f_1(1, 1)f_2(1, 1), g_1(1, 1)g_2(1, 1)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.16 *Considérons le système* (1.5). *On suppose que les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Ils existent* $a, b, \alpha, \beta \in]0, +\infty[$ *tels que*

$$a \leq h_1(u, v, w, t) \leq b, \ \alpha \leq h_2(u, v, w, t) \leq \beta, \ \forall (u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4 .$$

2. h_1 *est décroissante en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et croissante en* v *et* w *pour tous* u *et* t*, cependant* h_2 *est croissante en* u *et* t *pour tous* v *et* w *et décroissante en* v *et* w *pour tous* u *et* t*,*

3. *Si* $(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [a, b]^2 \times [\alpha, \beta]^2$ *est une solution du système suivant*

$$\begin{cases} m_1 = h_1(M_1, m_1, m_2, M_2), \\ M_1 = h_1(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ m_2 = h_2(m_1, M_1, M_2, m_2), \\ M_2 = h_2(M_1, m_1, m_2, M_2), \end{cases}$$

alors

$$m_1 = M_1, \ m_2 = M_2.$$

Donc, toute solution du système (1.4) *converge vers l'unique point d'équilibre*

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) \\ &= (f_1(1,1)f_2(1,1), g_1(1,1)g_2(1,1)). \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

STABILITÉ GLOBALE, PÉRIODICITÉ ET OSCILLATION DES SOLUTIONS DE DEUX SYSTÈMES DÉFINIS PAR DES FONCTIONS HOMOGÈNES

Ce chapitre est consacré à la stabilité globale des points d'équilibre, la périodicité et l'oscillation des solutions des deux systèmes (1.4) et (1.5).

2.1 Stabilité globale des points d'équilibre des systèmes (1.4) et (1.5)

Dans cette partie, nous donnons des résultats concernant la stabilité globale, plus précisement, on traite la stabilité locale des points d'équilibre des systèmes (1.4) et (1.5), car l'attractivité globale a été étudiée dans le premier chapitre.

2.1.1 Cas du système (1.4)

Théorème 2.1.1 *Supposons que les fonctions f_i, g_i, $i = 1, 2$ sont C^1 sur $]0, +\infty[^2$ et que*

$$2\left(h_2\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\right| + h_1\left|\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + 2\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + 2\left|\frac{\partial h_1}{\partial w}\frac{\partial h_2}{\partial u}\right|\right)(1,1,1,1) < (h_1h_2)(1,1,1,1). \tag{2.1}$$

Alors, le point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$ *du système* (1.4) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Soit F la fonction définie par

$$\begin{aligned} F :]0, +\infty[^4 &\longrightarrow \quad]0, +\infty[^4 \\ W &\longmapsto \quad F(W) \end{aligned}$$

avec $F(W) = (h_1(W), u, h_2(W), w),\ W = (u, v, w, t)$.

Donc, le système (1.4) peut s'écrire comme suit

$$W_{n+1} = F(W_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

avec $W_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})^t$. Donc $(\overline{x}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$ est un point d'équilibre de (1.4) si et seulement si

$$\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$$

est un point d'équilibre de (2.2). Le système linéaire associé à (1.4) autour du point d'équilibre $\overline{W}$ est donné par

$$X_{n+1} = J_F X_n,\ n \in \mathbb{N},$$

où $X_n = W_n - \overline{W}$ $n \in \mathbb{N}$ et J_F est la matrice Jacobienne associé à la fonction F evaluée au point

$$\overline{W} = (h_1(1,1,1,1), h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$$

et elle est donnée par

$$\begin{aligned} J_F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_1}{\partial w}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_1}{\partial t}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial u}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_2}{\partial v}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_2}{\partial w}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_2}{\partial t}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'Euler et le fait que f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des fonctions homogènes de degré zéro, on obtient

$$\overline{x}\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x})+\overline{x}\frac{\partial f_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x})=0,$$

i.e.,

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x})=-\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}).$$

De même façon, on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) &= -\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}),\\
\frac{\partial g_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) &= -\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}),\\
\frac{\partial g_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) &= -\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous réecrivons la matrice Jacobienne J_F comme suit

$$J_F=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & -\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & -\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})\\
1 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & -\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & -\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda)=\lambda^4-\hat{h}_1(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})\lambda^3+\left(\hat{h}_1(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})+\hat{h}_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})\right)\lambda^2-2\hat{h}_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})\lambda+\hat{h}_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}),$$

où

$$\hat{h}_1=\frac{\partial f_1}{\partial u}+\frac{\partial g_2}{\partial w}\ \text{ et } \hat{h}_2=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial w}-\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial g_1}{\partial u}.$$

Maintenant, posons $\phi(\lambda)=\lambda^4$ et

$$\psi(\lambda)=-\hat{h}_1(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})\lambda^3+\left(\hat{h}_1(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})+\hat{h}_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})\right)\lambda^2-2\hat{h}_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y})\lambda+\hat{h}_2(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}).$$

Nous avons

$$\left|\psi(\lambda)\right|\leq 2\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x})\right|+2\left|\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})\right|+4\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})\right|+4\left|\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x})\right|,\ \lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda|=1. \tag{2.3}$$

En utilisant la partie 2. du Théorème 1.1.2 et le fait que le fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 sont homogènes de degré zéro, on conclut que les fonctions $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, $\frac{\partial f_2}{\partial w}$, $\frac{\partial g_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial g_2}{\partial w}$ sont homogènes de degré -1, et donc,

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x})=\frac{1}{\overline{x}}\frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1),\quad \frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})=\frac{1}{\overline{y}}\frac{\partial f_2}{\partial w}(1,1)$$

et
$$\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) = \frac{1}{\overline{x}}\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,1), \quad \frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) = \frac{1}{\overline{y}}\frac{\partial g_2}{\partial w}(1,1).$$
Ainsi, l'inégalité (2.3) devient
$$\left|\psi(\lambda)\right| \leq \frac{2}{\overline{x}}\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1)\right| + \frac{2}{\overline{y}}\left|\frac{\partial g_2}{\partial w}(1,1)\right| + \frac{4}{\overline{xy}}\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1)\frac{\partial g_2}{\partial w}(1,1)\right| + \frac{4}{\overline{xy}}\left|\frac{\partial f_2}{\partial w}(1,1)\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,1)\right|.$$
En utilisant les relations (1.6), (1.7) et (1.8), on obtient
$$\left|\psi(\lambda)\right| \leq \frac{2\left(h_2\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\right| + h_1\left|\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + 2\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + 2\left|\frac{\partial h_1}{\partial w}\frac{\partial h_2}{\partial u}\right|\right)(1,1,1,1)}{(h_1 h_2)(1,1,1,1)}.$$
Donc, en utilisant (2.1), on trouve
$$\left|\psi(\lambda)\right| < 1 = |\phi(\lambda)|, \ \forall\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1.$$
Ainsi, d'après le théorème de Rouché, $P(\lambda) = \psi(\lambda) + \Phi(\lambda)$ et $\phi(\lambda)$ ont le même nombre de racines, en comptant les multiplicités, dans l'intérieur du disque unité $|\lambda| < 1$.
D'où, le point d'équilibre
$$(\overline{x},\overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$$
du système (1.4) est asymptotiquement stable. ■

Maintenant, nous énonçons notre résultat sur la stabilité globale de l'unique point d'équilibre du système (1.4).

Théorème 2.1.2 *Sous les hypothèses du **Théorème 2.1.1** et celles du **Théorème 1.2.1** ou **Théorème 1.2.2** ou **Théorème 1.2.3** ou **Théorème 1.2.4** ou **Théorème 1.2.5** ou **Théorème 1.2.6** ou **Théorème 1.2.7** ou **Théorème 1.2.8**, le point d'équilibre*
$$(\overline{x},\overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$$
du système (1.4) *est globalement stable.*

2.1.2 Application

Afin de confirmer les résultats obtenus sur la stabilité globale du point d'équilibre du système (1.4), nous considérons le système d'équations aux différences défini comme suit
$$x_{n+1} = A_1 + \frac{B_1 x_n}{x_n + x_{n-1}} + \frac{C_1 y_n}{y_n + y_{n-1}}, \ y_{n+1} = A_2 + \frac{B_2 x_n}{x_n + x_{n-1}} + \frac{C_2 y_n}{y_n + y_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N} \qquad (2.4)$$

où les paramètres $A_i,\ B_i,\ C_i,\ (i=1,2)$, et les conditions initiales $x_{-i},\ y_{-i},\ (i=0,1)$, sont des réels positifs.

Le système (2.4) a un unique point d'équilibre qui est

$$(\overline{x},\overline{y}) = (A_1 + \frac{1}{2}(B_1 + C_1), A_2 + \frac{1}{2}(B_2 + C_2)).$$

Considérons les fonctions $h_1, h_2 :]0,+\infty[^4 \longrightarrow]0,+\infty[$ définies par

$$h_1(u,v,w,t) = A_1 + \frac{B_1 u}{u+v} + \frac{C_1 w}{w+t},\ h_2(u,v,w,t) = A_2 + \frac{B_2 u}{u+v} + \frac{C_2 w}{w+t}. \tag{2.5}$$

Alors, on peut écrire le système (2.4) sous la forme suivante

$$x_{n+1} = h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}),\ y_{n+1} = h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.1.1 *Supposons que*

$$B_1C_2 - 2A_1A_2 - A_1B_2 - A_2C_1 < 0. \tag{2.6}$$

Alors, le point d'équilibre

$$(A_1 + \frac{1}{2}(B_1 + C_1), A_2 + \frac{1}{2}(B_2 + C_2)$$

de (2.4) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Nous savons, d'après le **Théorème 1.2.1**, que $(\overline{x},\overline{y})$ est asymptotiquement stable si (2.1) est satisfaite. On a, de (2.5),

$$\begin{aligned}
h_1(1,1,1,1) &= A_1 + \frac{1}{2}(B_1 + C_1),\\
h_2(1,1,1,1) &= A_2 + \frac{1}{2}(B_2 + C_2),\\
\frac{\partial h_1}{\partial u}(1,1,1,1) &= \frac{B_1}{4}, \frac{\partial h_1}{\partial w}(1,1,1,1) = \frac{C_1}{4},\\
\frac{\partial h_2}{\partial u}(1,1,1,1) &= \frac{B_2}{4}, \frac{\partial h_2}{\partial w}(1,1,1,1) = \frac{C_2}{4}.
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans (2.1), nous obtenons l'inégalité (2.6). ■

Proposition 2.1.2 *Le point d'équilibre*

$$(\overline{x},\overline{y}) = (A_1 + \frac{1}{2}(B_1 + C_1), A_2 + \frac{1}{2}(B_2 + C_2))$$

du système (2.4) *est globalement attractif si*

$$(2A_1 + C_1)(2A_2 + B_2) - B_2C_1 \neq 0. \tag{2.7}$$

Démonstration. Les fonctions h_1 et h_2 sont la somme de deux fonctions et il clair que chacune d'elles est continue et homogène de degré zéro.

Nous avons

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} = \frac{B_1 v}{(u+v)^2} > 0, \ \frac{\partial h_1}{\partial v} = -\frac{B_1 u}{(u+v)^2} < 0, \ \frac{\partial h_1}{\partial w} = \frac{C_1 t}{(w+t)^2} > 0, \ \frac{\partial h_1}{\partial t} = -\frac{C_1 w}{(w+t)^2} < 0$$

et

$$\frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{B_2 v}{(u+v)^2} > 0, \ \frac{\partial h_2}{\partial v} = -\frac{B_2 u}{(u+v)^2} < 0, \ \frac{\partial h_2}{\partial w} = \frac{C_2 t}{(w+t)^2} > 0, \ \frac{\partial h_2}{\partial t} = -\frac{C_2 w}{(w+t)^2} < 0.$$

On remarque que h_1 et h_2 sont croissantes en u et w pour tous v et t et décroissantes en v et t pour tous u et w.

Aussi, il est clair que

$$A_1 \leq h_1(u,v,w,t) \leq A_1 + B_1 + C_1, \ A_2 \leq h_2(u,v,w,t) \leq A_2 + B_2 + C_2,$$

pour tous $(u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4$.

Maintenant, montrons que si nous avons

$$\begin{cases} m_1 = A_1 + \frac{B_1 m_1}{m_1+M_1} + \frac{C_1 m_2}{m_2+M_2}, & M_1 = A_1 + \frac{B_1 M_1}{M_1+m_1} + \frac{C_1 M_2}{M_2+m_2}, \\ m_2 = A_2 + \frac{B_2 m_1}{m_1+M_1} + \frac{C_2 m_2}{m_2+M_2}, & M_2 = A_2 + \frac{B_2 M_1}{M_1+m_1} + \frac{C_2 M_2}{M_1+m_1}, \end{cases} \tag{2.8}$$

où

$$(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [A_1, A_1 + B_1 + C_1]^2 \times [A_2, A_2 + B_2 + C_2]^2$$

alors, $m_1 = M_1$ et $m_2 = M_2$.

Nous avons, à partir de (2.8),

$$m_1 - M_1 = B_1 \frac{m_1 - M_1}{m_1 + M_1} + C_1 \frac{m_2 - M_2}{m_2 + M_2} \tag{2.9}$$

et

$$m_2 - M_2 = B_2 \frac{m_1 - M_1}{m_1 + M_1} + C_2 \frac{m_2 - M_2}{m_2 + M_2}. \tag{2.10}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} m_1 + M_1 &= 2A_1 + B_1 + C_1, \\ m_2 + M_2 &= 2A_2 + B_2 + C_2. \end{aligned}$$

En utilisant ces égalités dans (2.9) et (2.10), on obtient

$$(m_1 - M_1) \frac{2A_1 + C_1}{2A_1 + B_1 + C_1} = (m_2 - M_2) \frac{C_1}{2A_2 + B_2 + C_2} \tag{2.11}$$

et

$$(m_2 - M_2)\,\frac{2A_2 + B_2}{2A_2 + B_2 + C_2} = (m_1 - M_1)\,\frac{B_2}{2A_1 + B_1 + C_1}. \tag{2.12}$$

Ainsi, à partir de (2.11) et (2.12), on trouve

$$(m_1 - M_1)\,((2A_1 + C_1)\,(2A_2 + B_2) - B_2C_1) = 0$$

et

$$(m_2 - M_2)\,((2A_1 + C_1)\,(2A_2 + B_2) - B_2C_1) = 0.$$

Par conséquent, si (2.7) est satisfaite, alors $m_1 = M_1$ et $m_2 = M_2$, d'où les hypothèses du **Théorème 1.2.1** sont satisfaites, donc le point d'équilibre $(A_1 + \frac{1}{2}(B_1 + C_1), A_2 + \frac{1}{2}(B_2 + C_2)$ est globalement attractif. ■

Exemple 2.1.1 *Voici un exemple numérique confirmant le résultat de la stabilité globale du système* (2.4).

Pour les paramètres et les valeurs initiales présentés dans le tableau suivant, les conditions (2.6) *et* (2.7) *sont satisfaites et donc*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = (3.25, 1.45)$$

.

A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
2	0.5	2	1	0.6	0.3	0.3	0.1	2	0.4

Voir FIGURE 2.1.

2.1.3 Cas du système (1.5)

Théorème 2.1.3 *Supposons que les fonctions f_i, g_i, $i = 1, 2$ sont C^1 sur $]0, +\infty[^2$ et que*

$$\left(\frac{2}{h_1h_2}\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + \frac{2}{h_1h_2}\left|\frac{\partial h_1}{\partial w}\frac{\partial h_2}{\partial u}\right| + \frac{1}{h_2}\left|\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + \frac{1}{h_1}\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\right|\right)(1,1,1,1) < \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Alors, l'unique point d'équilibre

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$$

du système (1.5) *est asymptotiquement stable.*

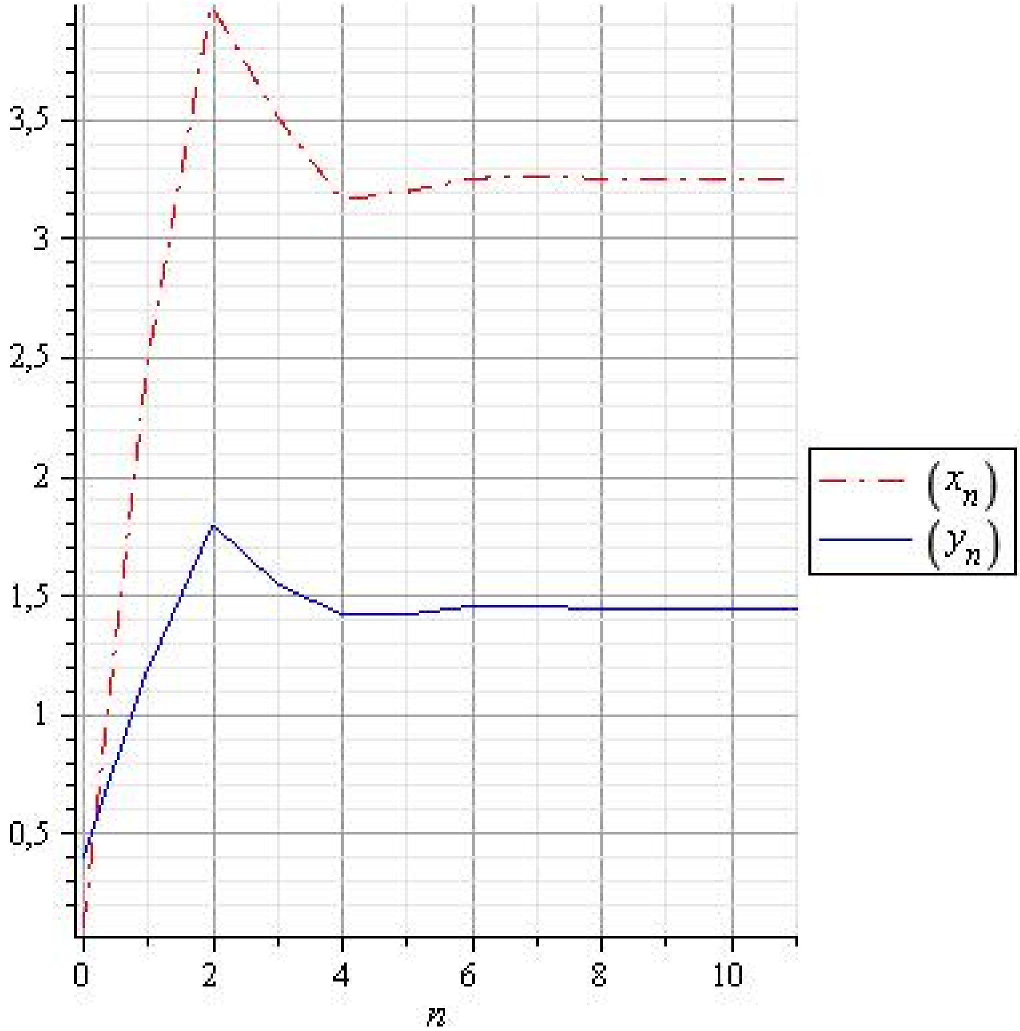

FIGURE 2.1 – Stabilité globale du point d'équilibre du système (1.4) (Figure réalilisée par Maple 13)

Démonstration. Soit $F :]0,+\infty[^4 \longrightarrow]0,+\infty[^4$ la fonction définie par

$$F(u,v,w,t) = \Big(h_1(u,v,w,t), u, h_2(u,v,w,t), w\Big), \quad (u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4 .$$

Alors, le système (1.5) peut s'écrire sous la forme

$$W_{n+1} = F(W_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.14}$$

où $W_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})$. Donc $(\overline{x}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$ est un point d'équilibre de (1.5) si et seulement si

$$\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1))$$

est un point d'équilibre de (2.14).

Le système linéaire associé à (1.5) autour du point d'équilibre $\overline{W}$ est donné par

$$Z_{n+1} = J_F Z_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où J_F est la matrice Jacobienne associée à la fonction F calculée au point

$$\overline{W} = (h_1(1,1,1,1), h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)),$$

et elle est donnée par

$$J_F\left(\overline{W}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_1}{\partial w}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_1}{\partial t}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial u}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_2}{\partial v}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_2}{\partial w}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) & \frac{\partial h_2}{\partial t}(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix}$$

i.e.,

$$J_F\left(\overline{W}\right) = \begin{pmatrix} f_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & f_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial f_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) & f_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & f_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial f_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & g_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial g_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) & g_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & g_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que f_1, f_2, g_1 et g_2 sont homogènes de degré zéro et la partie 1 du théorème d'Euler (**Theorem 1.1.2**), on obtient

$$\overline{x}\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) + \overline{x}\frac{\partial f_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) = 0,$$

et alors,

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) = -\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}).$$

De même, on a les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) &= -\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}), \\ \frac{\partial g_1}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) &= -\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}), \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(\overline{y},\overline{y}) &= -\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}). \end{aligned}$$

D'où, en remplaçant ces formules dans la relation de J_F, on obtient

$$J_F\left(\overline{W}\right) = \begin{pmatrix} f_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & -f_2(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & f_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & -f_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & -g_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) & g_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) & -g_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $J_F\left(\overline{W}\right)$ est le suivant

$$P(\lambda) = \lambda^4 - A\lambda^3 + (A+B)\lambda^2 - 2B\lambda + B,$$

où

$$\begin{aligned} A &= f_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) + g_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}), \\ B &= f_2(\overline{y},\overline{y})g_1(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x})\frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) - f_1(\overline{x},\overline{x})g_2(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y})\frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}). \end{aligned}$$

Considérons les fonctions polynômiales

$$\phi(\lambda) = \lambda^4$$

et

$$\psi(\lambda) = -A\lambda^3 + (A+B)\lambda^2 - 2B\lambda + B.$$

Nous avons

$$\left|\psi(\lambda)\right| \leq \left(4f_2g_1\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial w}\right| + 4f_1g_2\left|\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial g_1}{\partial u}\right| + 2f_2\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\right| + 2g_1\left|\frac{\partial g_2}{\partial w}\right|\right)(\overline{x},\overline{x},\overline{y},\overline{y}),\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1. \tag{2.15}$$

En utilisant la partie 2. du **Théorème 1.1.2** (Théorème d'Euler) et le fait que les fonctions $f_1,\ f_2,\ g_1$ et g_2 sont homogènes de degré zéro, on conclut que $\frac{\partial f_1}{\partial u},\ \frac{\partial f_2}{\partial w},\ \frac{\partial g_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial g_2}{\partial w}$ sont homogènes de degré -1, et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) &= \frac{1}{\overline{x}}\frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1), \\ \frac{\partial f_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) &= \frac{1}{\overline{y}}\frac{\partial f_2}{\partial w}(1,1), \\ \frac{\partial g_1}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) &= \frac{1}{\overline{x}}\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,1), \\ \frac{\partial g_2}{\partial w}(\overline{y},\overline{y}) &= \frac{1}{\overline{y}}\frac{\partial g_2}{\partial w}(1,1). \end{aligned}$$

Substituons ces relations dans (2.15), on obtient l'inégalité suivante

$$\Psi(\lambda) \le \left(\frac{4f_2g_1}{\overline{xy}}\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial w}\right| + \frac{4f_1g_2}{\overline{xy}}\left|\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial g_1}{\partial u}\right| + \frac{2f_2}{\overline{x}}\left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\right| + \frac{2g_1}{\overline{y}}\left|\frac{\partial g_2}{\partial w}\right|\right)(1,1,1,1)\,.$$

En utilisant les relations (1.9), (1.10) et (1.13), on trouve

$$\Psi(\lambda) \le 2\left(\frac{2}{h_1h_2}\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + \frac{2}{h_1h_2}\left|\frac{\partial h_1}{\partial w}\frac{\partial h_2}{\partial u}\right| + \frac{1}{h_2}\left|\frac{\partial h_2}{\partial w}\right| + \frac{1}{h_1}\left|\frac{\partial h_1}{\partial u}\right|\right)(1,1,1,1). \tag{2.16}$$

Donc, en utilisant (2.13), on obtient

$$|\Psi(\lambda)| < 1 = |\Phi(\lambda)|,\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1.$$

D'où, d'après le théorème de Rouché, on conclut que toutes les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ sont dans l'intérieur du disque unité. ■

Le résultat suivant montre la stabilité globale du point d'équilibre du système (1.5).

Théorème 2.1.4 *L'unique point d'équilibre*

$$(\overline{x},\overline{y}) = (h_1(1,1,1,1), h_2(1,1,1,1)) = (f_1(1,1)f_2(1,1), g_1(1,1)g_2(1,1))$$

du système (1.5) *est globalement stable sous les hypothèses du **Théorème 2.1.3** et celles du **Théorème 1.2.9** ou **Théorème 1.2.10** ou **Théorème 1.2.11** ou **Théorème 1.2.12** ou **Théorème 1.2.13** ou **Théorème 1.2.14** ou **Théorème 1.2.15** ou **Théorème 1.2.16**.*

2.1.4 Application

Maintenant, pour illustrer notre résultat obtenu sur la stabilité globale du point d'équilibre du système (1.5), considérons le système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = (A_1 + \frac{x_n}{x_n + x_{n-1}})(B_1 + \frac{y_n}{y_n + y_{n-1}}), \quad y_{n+1} = (A_2 + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-1}})(B_2 + \frac{y_{n-1}}{y_n + y_{n-1}}),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

où les paramètres A_1, B_1, A_2, B_2 et les valeurs initiales $x_{-i},\ y_{-i},\ (i = 0, 1)$, sont des nombres réels positifs.

Le système (2.17) a l'unique point d'équilibre

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\left(A_1 + \frac{1}{2}\right)\left(B_1 + \frac{1}{2}\right), \left(A_2 + \frac{1}{2}\right)\left(B_2 + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Soient $h_1, h_2 :]0,+\infty[^4 \longrightarrow]0,+\infty[$ les fonctions définies par

$$h_1(u,v,w,t) = \left(A_1 + \frac{u}{u+v}\right)\left(B_1 + \frac{w}{w+t}\right), \quad h_2(u,v,w,t) = \left(A_2 + \frac{v}{u+v}\right)\left(B_2 + \frac{t}{w+t}\right). \tag{2.18}$$

Le système (2.17) peut s'écrire comme suit

$$x_{n+1} = h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}).$$

Proposition 2.1.3 *Supposons que*

$$\Big(A_1 + \frac{1}{2}\Big)\Big(B_2 + \frac{1}{2}\Big) < (4A_1B_2 - 2)\Big(A_2 + \frac{1}{2}\Big)\Big(B_1 + \frac{1}{2}\Big). \tag{2.19}$$

Alors, le point d'équilibre

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\left(A_1 + \frac{1}{2}\right)\left(B_1 + \frac{1}{2}\right), \left(A_2 + \frac{1}{2}\right)\left(B_2 + \frac{1}{2}\right)\right)$$

du système (2.17) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Nous avons, du **Théorème 2.1.3**, $(\overline{x}, \overline{y})$ est asymptotiquement stable si (2.13) est vraie. On a les valeurs suivantes

$$h_1(1,1,1,1) = \left(A_1 + \frac{1}{2}\right)\left(B_1 + \frac{1}{2}\right), \quad h_2(1,1,1,1) = \left(A_2 + \frac{1}{2}\right)\left(B_2 + \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial u}(1,1,1,1) = \frac{1}{4}(B_1 + \frac{1}{2}), \quad \frac{\partial h_1}{\partial w}(1,1,1,1) = \frac{1}{4}(A_1 + \frac{1}{2}),$$
$$\frac{\partial h_2}{\partial u}(1,1,1,1) = -\frac{1}{4}(B_2 + \frac{1}{2}), \quad \frac{\partial h_2}{\partial w}(1,1,1,1) = -\frac{1}{4}(A_2 + \frac{1}{2}).$$

En remplaçant ces valeurs dans (2.13), on obtient l'inégalité (2.19). ■

Proposition 2.1.4 *On suppose que*

$$4A_1A_2B_1B_2 > (2B_1 + 1)(B_2 + 1)(A_2 + 1). \tag{2.20}$$

Alors, le point d'équilibre

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\left(A_1 + \frac{1}{2}\right)\left(B_1 + \frac{1}{2}\right), \left(A_2 + \frac{1}{2}\right)\left(B_2 + \frac{1}{2}\right)\right),$$

du système (2.17) *est globalement attractif.*

Démonstration. Les fonctions h_1 et h_2 sont les produits de deux fonctions et il est clair que chaque fonction est continue et homogène de degré zéro.

Nous avons,

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} = \frac{v}{(u+v)^2}(B_1 + \frac{w}{w+t}) > 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial v} = -\frac{u}{(u+v)^2}(B_1 + \frac{w}{w+t}) < 0,$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial w} = \frac{t}{(w+t)^2}(A_1 + \frac{u}{u+v}) > 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial t} = -\frac{w}{(w+t)^2}(A_1 + \frac{u}{u+v}) < 0$$

et

$$\frac{\partial h_2}{\partial u} = -\frac{v}{(u+v)^2}(B_2 + \frac{t}{w+t}) < 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial v} = \frac{u}{(u+v)^2}(B_2 + \frac{t}{w+t}) > 0,$$
$$\frac{\partial h_2}{\partial w} = -\frac{t}{(w+t)^2}(A_2 + \frac{v}{u+v}) < 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{w}{(w+t)^2}(A_2 + \frac{v}{u+v}) > 0,$$

ce qui signifie que h_1 est croissante en u et w pour tous v et t et décroissante en v et t pour tous u et w cependant h_2 est décroissante en u et w pour tous v et t et croissante en v et t pour tous u et w.
Nous avons aussi

$$\begin{aligned} A_1B_1 &\leq h_1(u,v,w,t) \leq (A_1+1)(B_1+1), \\ A_2B_2 &\leq h_2(u,v,w,t) \leq (A_2+1)(B_2+1), \end{aligned}$$

pour tout $(u,v,w,t) \in]0,+\infty[^4$.
Maintenant, supposons que

$$(m_1, M_1, m_2, M_2) \in [A_1B_1, (A_1+1)(B_1+1)]^2 \times [A_2B_2, (A_2+1)(B_2+1)]^2$$

est une solution du système suivant

$$\begin{cases} m_1 = (A_1 + \frac{m_1}{m_1+M_1})(B_1 + \frac{m_2}{m_2+M_2}), \quad M_1 = (A_1 + \frac{M_1}{m_1+M_1})(B_1 + \frac{M_2}{m_2+M_2}), \\ \\ m_2 = (A_2 + \frac{M_1}{m_1+M_1})(B_2 + \frac{M_2}{m_2+M_2}), \quad M_2 = (A_2 + \frac{m_1}{m_1+M_1})(B_2 + \frac{m_2}{m_2+M_2}). \end{cases} \tag{2.21}$$

De (2.21), on a

$$m_1 - M_1 = (m_2 - M_2)\frac{A_1(m_1+M_1) + m_1}{(m_1+M_1)(m_2+M_2) - B_1(m_2+M_2) - M_2} \tag{2.22}$$

et

$$m_2 - M_2 = (m_1 - M_1)\frac{-B_2(m_2+M_2) - m_2}{(m_1+M_1)(m_2+M_2) + A_2(m_1+M_1) + M_1}, \tag{2.23}$$

d'où, en utilisant (2.22) et (2.23), on trouve

$$(m_1 - M_1)\left(1 + H_1(m_1, M_1, m_2, M_2) H_2(m_1, M_1, m_2, M_2)\right) = 0,$$

et

$$(m_2 - M_2)\left(1 + H_1(m_1, M_1, m_2, M_2) H_2(m_1, M_1, m_2, M_2)\right) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} H_1(m_1, M_1, m_2, M_2) &= \frac{A_1(m_1+M_1)+m_1}{(m_1+M_1)(m_2+M_2)-B_1(m_2+M_2)-M_2}, \\ H_2(m_1, M_1, m_2, M_2) &= \frac{B_2(m_2+M_2)+m_2}{(m_1+M_1)(m_2+M_2)+A_2(m_1+M_1)+M_1}, \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$m_1 - M_1 = 0 \text{ et } m_2 - M_2 = 0$$

ou

$$H_1(m_1, M_1, m_2, M_2)H_2(m_1, M_1, m_2, M_2) = -1.$$

On va montrer que

$$H_1(m_1, M_1, m_2, M_2)H_2(m_1, M_1, m_2, M_2) \neq -1.$$

Il est clair que $H_2(m_1, M_1, m_2, M_2) > 0$. D'autre part, nous avons

$$(m_1+M_1)(m_2+M_2) - B_1(m_2+M_2) - M_2 \geq 4A_1A_2B_1B_2 - (2B_1+1)(B_2+1)(A_2+1).$$

Par conséquent, si la condition (2.20) est satisfaite, on conclut que

$$(m_1+M_1)(m_2+M_2) - B_1(m_2+M_2) - M_2 > 0$$

d'où

$$H_1(m_1, M_1, m_2, M_2) > 0$$

et donc

$$H_1(m_1, M_1, m_2, M_2)H_2(m_1, M_1, m_2, M_2) > 0,$$

c'est à dire

$$H_1(m_1, M_1, m_2, M_2)H_2(m_1, M_1, m_2, M_2) \neq -1,$$

ainsi

$$m_1 = M_1 \text{ et } m_2 = M_2.$$

D'où, les conditions du **Théorème 1.2.11** sont satisfaites, donc le point d'équilibre

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\left(A_1 + \frac{1}{2}\right)\left(B_1 + \frac{1}{2}\right), \left(A_2 + \frac{1}{2}\right)\left(B_2 + \frac{1}{2}\right)\right)$$

est globalement attractif. ■

Maintenant, on présente une application numérique de ce qui précède.

Exemple 2.1.2 *Pour les paramètres et les valeurs initiales présentés dans le tableau suivant, les conditions* (2.19) *et* (2.20) *sont satisfaites et on a*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = (4.5, 2.55).$$

A_1	B_1	A_2	B_2	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
4	0.5	1	1.2	0.5	1	1.5	0.3

Voir FIGURE 2.2.

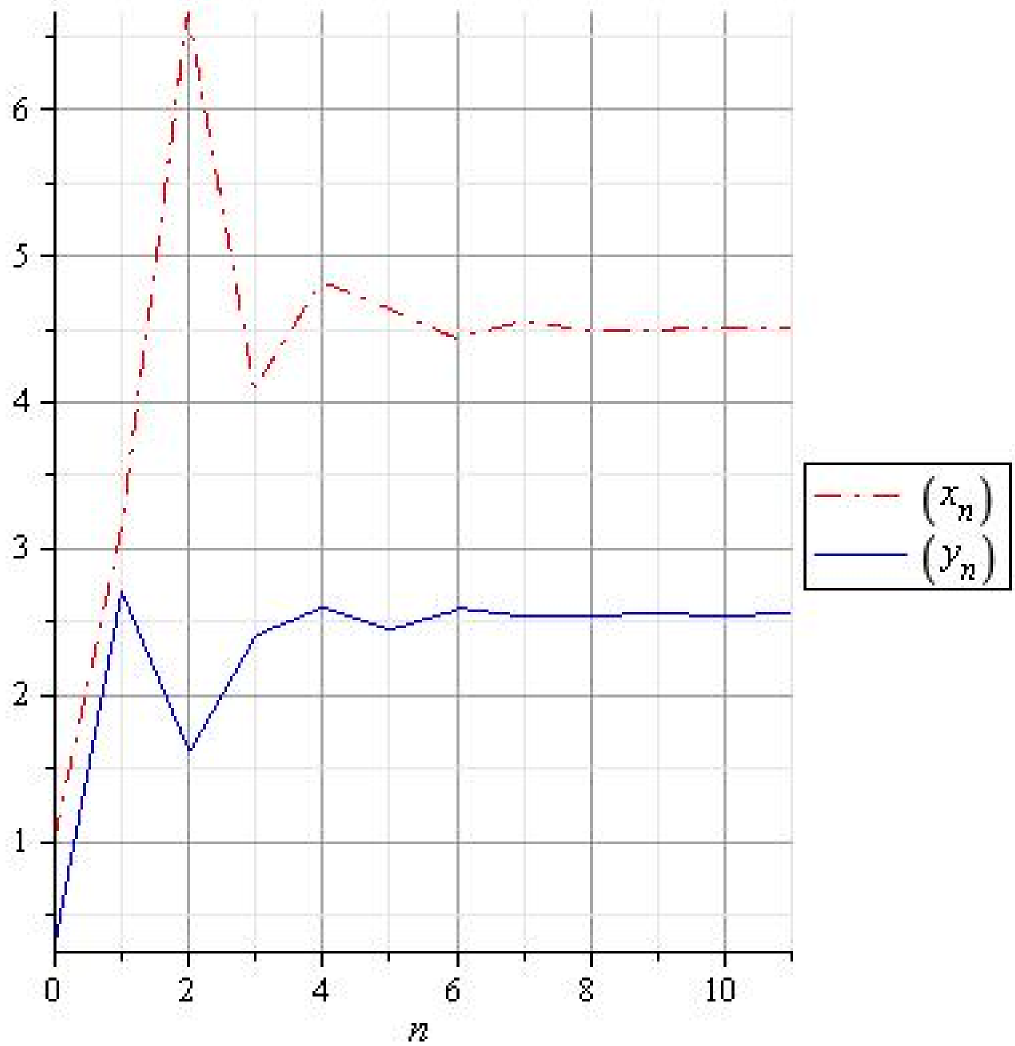

FIGURE 2.2 – Stabilité globale du point d'équilibre du systhème (1.5) (Figure réalilisée par Maple 13)

2.2 Existence des solutions périodiques

Dans cette section, on étudie l'existence des solutions périodiques pour les deux systèmes (1.4) et (1.5).

2.2.1 Cas du système (1.4)

Théorème 2.2.1 *Le système* (1.4) *admet une solution périodique, de période deux, de la forme*

$$\ldots, (\alpha p, \beta q), (p, q), (\alpha p, \beta q), (p, q), \ldots,$$

où

$$p = h_1(\alpha, 1, \beta, 1),\ q = h_2(\alpha, 1, \beta, 1) \ \ et\ (\alpha - 1)(\beta - 1) \neq 0,$$

si et seulement si

$$h_1(1, \alpha, 1, \beta) = \alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1),\ h_2(1, \alpha, 1, \beta) = \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1).$$

Démonstration. Soient α et β deux nombres réels positifs et considérons

$$\ldots, (\alpha p, \beta q), (p, q), (\alpha p, \beta q), (p, q), \ldots$$

une solution du système (1.4). Alors, on a

$$\begin{aligned}
\alpha p &= h_1(p, \alpha p, q, \beta q) \\
&= f_1(p, \alpha p) + f_2(q, \beta q) \\
p &= h_1(\alpha p, p, \beta q, q) \\
&= f_1(\alpha p, p) + f_2(\beta q, q) \\
\beta q &= h_2(p, \alpha p, q, \beta q) \\
&= g_1(p, \alpha p) + g_2(q, \beta q) \\
q &= h_2(\alpha p, p, \beta q, q) \\
&= g_1(\alpha p, p) + g_2(\beta q, q).
\end{aligned}$$

En utilisant ces valeurs et le fait que les fonctions f_i, g_i, $(i = 1, 2)$, sont homogènes de degré zéro, on obtient

$$\alpha p = h_1(1, \alpha, 1, \beta), \tag{2.24}$$

$$p = h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \beta q &= h_2(1,\alpha,1,\beta), && (2.26) \\ q &= h_2(\alpha,1,\beta,1). && (2.27) \end{aligned}$$

De (2.24) et (2.25), on trouve

$$h_1(1,\alpha,1,\beta) = \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1).$$

Aussi, de (2.26) et (2.27), on trouve

$$h_2(1,\alpha,1,\beta) = \beta h_2(\alpha,1,\beta,1).$$

Inversement, supposons que

$$h_1(1,\alpha,1,\beta) = \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),\ h_2(1,\alpha,1,\beta) = \beta h_2(\alpha,1,\beta,1)$$

et

$$x_{-1} = h_1(1,\alpha,1,\beta),\ x_0 = h_1(\alpha,1,\beta,1),\ y_{-1} = h_2(1,\alpha,1,\beta),\ y_0 = h_2(\alpha,1,\beta,1).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(x_0,x_{-1},y_0,y_{-1}) \\ &= h_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_1(1,\alpha,1,\beta),h_2(\alpha,1,\beta,1),h_2(1,\alpha,1,\beta)) \\ &= h_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\ &= f_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1)) + f_2(h_2(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)), \end{aligned}$$

et comme les fonctions f_1, f_2 sont homogènes de degré zéro, il en résulte que

$$x_1 = f_1(1,\alpha) + f_2(1,\beta) = h_1(1,\alpha,1,\beta) = x_{-1}.$$

De même,

$$\begin{aligned} y_1 &= h_2(x_0,x_{-1},y_0,y_{-1}) \\ &= h_2(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_1(1,\alpha,1,\beta),h_2(\alpha,1,\beta,1),h_2(1,\alpha,1,\beta)) \\ &= h_2(h_1(\alpha,1,\beta,1),\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\ &= g_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1)) + g_2(h_2(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)), \end{aligned}$$

et comme les fonctions g_1, g_2 sont homogènes de degré zéro, on obtient que

$$y_1 = g_1(1,\alpha) + g_2(1,\beta) = h_2(1,\alpha,1,\beta) = y_{-1}.$$

De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & h_1(x_1, x_0, y_1, y_0) \\ & = & h_1(h_1((1, \alpha, 1, \beta), h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(1, \alpha, 1, \beta), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)) \\ & = & h_1(\alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)) \\ & = & f_1(\alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_1(\alpha, 1, \beta, 1)) + f_2(\beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)) \\ & = & f_1(\alpha, 1) + f_2(\beta, 1) \\ & = & h_1(\alpha, 1, \beta, 1) \\ & = & x_0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} y_2 & = & h_2(x_1, x_0, y_1, y_0) \\ & = & h_1(h_1((1, \alpha, 1, \beta), h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(1, \alpha, 1, \beta), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)) \\ & = & h_1(\alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)) \\ & = & g_1(\alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_1(\alpha, 1, \beta, 1)) + g_2(\beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)) \\ & = & g_1(\alpha, 1) + g_2(\beta, 1) \\ & = & h_2(\alpha, 1, \beta, 1) \\ & = & y_0. \end{array}$$

Par récurrence, on trouve

$$x_{2n-1} = x_{-1},\ x_{2n} = x_0,\ y_{2n-1} = y_{-1},\ y_{2n} = y_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

■

2.2.2 Application

Ici, comme une application du résultat précédent concernant la périodicité des solutions du système (1.4), on considère le système suivant

$$x_{n+1} = a_1 \frac{x_n}{x_{n-1}} + b_1 \frac{x_{n-1}}{x_n} + c_1 \frac{y_n}{y_{n-1}} + d_1 \frac{y_{n-1}}{y_n},\ y_{n+1} = a_2 \frac{x_n}{x_{n-1}} + b_2 \frac{x_{n-1}}{x_n} + c_2 \frac{y_n}{y_{n-1}} + d_2 \frac{y_{n-1}}{y_n},\ n \in \mathbb{N}, \quad (2.28)$$

où les valeurs initiales $x_{-i},\ y_{-i},\ (i = 0, 1)$ et les paramètres $a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i\ \ (i = 1, 2)$ sont des nombres réels positifs.

Proposition 2.2.1 *Supposons que* $(\alpha-1)(\beta-1)\neq 0$. *Si*

$$-a_1\alpha^3\beta+(b_1\beta-d_1)\alpha^2+(d_1-c_1\alpha)\alpha\beta^2+(a_1-b_1\alpha)\beta+c_1\alpha=0 \tag{2.29}$$

et

$$-c_2\alpha\beta^3+(d_2\alpha-b_2)\beta^2+(b_2-a_2\beta)\alpha^2\beta+(c_2-d_2\beta)\alpha+a_2\beta=0, \tag{2.30}$$

alors

$$\begin{gathered}\ldots,(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1)),\\(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1)),\ldots\end{gathered}$$

est une solution périodique de période deux du système (2.28).

Démonstration. On peut réécrire le système (2.28) comme suit

$$x_{n+1}=h_1(x_n,x_{n-1},y_n,y_{n-1}),\ x_{n+1}=h_2(x_n,x_{n-1},y_n,y_{n-1}),$$

où

$$h_1(u,v,w,t)=a_1\frac{u}{v}+b_1\frac{v}{u}+c_1\frac{w}{t}+d_1\frac{t}{w}$$

et

$$h_2(u,v,w,t)=a_2\frac{u}{v}+b_2\frac{v}{u}+c_2\frac{w}{t}+d_2\frac{t}{w}.$$

D'après le **Théorème 2.2.1**, nous avons

$$\begin{gathered}\ldots,(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1)),\\(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1)),\ldots\end{gathered}$$

est une solution périodique de période deux de système (2.28) si et seulement si

$$h_1(1,\alpha,1,\beta)=\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1) \text{ et } h_2(1,\alpha,1,\beta)=\beta h_2(\alpha,1,\beta,1).$$

i.e.,

$$\frac{a_1}{\alpha}+b_1\alpha+\frac{c_1}{\beta}+d_1\beta=a_1\alpha^2+b_1+c_1\alpha\beta+\frac{\alpha d_1}{\beta}$$

et

$$\frac{a_2}{\alpha}+b_2\alpha+\frac{c_2}{\beta}+d_2\beta=a_2\alpha\beta+\frac{b_2\beta}{\alpha}+c_2\beta^2+d_2$$

qui sont (2.29) et (2.30). ■

Exemple 2.2.1 *Pour* $\alpha = 0.5,\ \beta = 2,$ *les conditions* (2.29) *et* (2.30) *deviennent*

$$\frac{7}{4}a_1 - \frac{1}{2}b_1 - 0.5c_1 + \frac{7}{4}d_1 = 0,\ a_2 - \frac{7}{2}b_2 - \frac{7}{2}c_2 + d_2 = 0.$$

Ces conditions sont satisfaites pour

$$a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 3, c_1 = 4, d_1 = \frac{3}{2}, a_2 = 2, b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{3}{2}.$$

D'où,

$$\begin{array}{rcl} x_{2n-1} & = & x_{-1} = \alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1) = \frac{15}{2}, \\ x_{2n} & = & x_0 = h_1(\alpha, 1, \beta, 1) = 15, \\ y_{2n-1} & = & y_{-1} = \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1) = \frac{15}{2}, \\ y_{2n} & = & y_0 = h_2(\alpha, 1, \beta, 1) = \frac{15}{4}, \end{array}$$

et donc

$$(x_n, y_n)_{n\geq -1} = \left\{\left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right), \left(15, \frac{15}{4}\right), \left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right), \left(15, \frac{15}{4}\right), \ldots\right\}.$$

2.2.3 Cas du système (1.5)

Théorème 2.2.2 *Le système d'équations aux différences* (1.5) *admet la solution périodique de période deux suivante*

$$\ldots, (\alpha p, \beta q), (p, q), (\alpha p, \beta q), (p, q), \ldots,$$

avec

$$p = h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \quad q = h_2(\alpha, 1, \beta, 1), \quad \alpha,\ \beta > 0$$

et

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) \neq 0,$$

si et seulement si

$$h_1(1, \alpha, 1, \beta) = \alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \quad h_2(1, \alpha, 1, \beta) = \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1).$$

Démonstration. Soient α et β deux nombres réels positifs et supposons que

$$\ldots,\ (\alpha p, \beta q),\ (p, q),\ (\alpha p, \beta q),\ (p, q),\ \ldots$$

est une solution du système (1.5). Alors, on a

$$\begin{aligned}
\alpha p &= h_1(p,\alpha p,q,\beta q) = f_1(p,\alpha p)f_2(q,\beta q),\\
p &= h_1(\alpha p,p,\beta q,q) = f_1(\alpha p,p)f_2(\beta q,q),\\
\beta q &= h_2(p,\alpha p,q,\beta q) = g_1(p,\alpha p)g_2(q,\beta q),\\
q &= h_2(\alpha p,p,\beta q,q) = g_1(\alpha p,p)g_2(\beta q,q).
\end{aligned}$$

Comme les fonctions $f_i,\ g_i,\ i=1,2$ sont homogènes de degré zéro, alors

$$\alpha p = h_1(1,\alpha,1,\beta), \tag{2.31}$$
$$p = h_1(\alpha,1,\beta,1), \tag{2.32}$$
$$\beta q = h_2(1,\alpha,1,\beta), \tag{2.33}$$
$$q = h_2(\alpha,1,\beta,1). \tag{2.34}$$

De (2.31) et (2.32), on trouve

$$\alpha = \frac{h_1(1,\alpha,1,\beta)}{h_1(\alpha,1,\beta,1)} \Longleftrightarrow h_1(1,\alpha,1,\beta) = \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1).$$

De même, de (2.33) et (2.34), on trouve

$$\beta = \frac{h_2(1,\alpha,1,\beta)}{h_2(\alpha,1,\beta,1)} \Longleftrightarrow h_2(1,\alpha,1,\beta) = \beta h_2(\alpha,1,\beta,1).$$

Inversement, supposons que

$$h_1(1,\alpha,1,\beta) = \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), \quad h_2(1,\alpha,1,\beta) = \beta h_2(\alpha,1,\beta,1)$$

et

$$x_{-1} = h_1(1,\alpha,1,\beta), \quad x_0 = h_1(\alpha,1,\beta,1), \quad y_{-1} = h_2(1,\alpha,1,\beta), \quad y_0 = h_2(\alpha,1,\beta,1).$$

On a

$$\begin{aligned}
x_1 &= h_1(x_0,x_{-1},y_0,y_{-1})\\
&= h_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),h_1(1,\alpha,1,\beta),h_2(\alpha,1,\beta,1),h_2(1,\alpha,1,\beta))\\
&= h_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),h_2(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1))\\
&= f_1(h_1(\alpha,1,\beta,1),\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1))f_2(h_2(\alpha,1,\beta,1),\beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),
\end{aligned}$$

Comme les fonctions $f_1,\ f_2$ sont homogènes de degré zéro, il en résulte que

$$x_1 = f_1(1,\alpha)f_2(1,\beta) = h_1(1,\alpha,1,\beta) = x_{-1}.$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
y_1 &= h_2(x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}) \\
&= h_2(h_1(\alpha,1,\beta,1), h_1(1,\alpha,1,\beta), h_2(\alpha,1,\beta,1), h_2(1,\alpha,1,\beta)) \\
&= h_2(h_1(\alpha,1,\beta,1), \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1), \beta h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\
&= g_1(h_1(\alpha,1,\beta,1), \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1)) g_2(h_2(\alpha,1,\beta,1), \beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),
\end{aligned}$$

mais les fonctions g_1 et g_2 sont homogènes de degré zéro, alors

$$y_1 = g_1(1,\alpha) g_2(1,\beta) = h_2(1,\alpha,1,\beta) = y_{-1}.$$

Nous avons également

$$\begin{aligned}
x_2 &= h_1(x_1, x_0, y_1, y_0) \\
&= h_1(h_1((1,\alpha,1,\beta), h_1(\alpha,1,\beta,1), h_2(1,\alpha,1,\beta), h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\
&= h_1(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), h_1(\alpha,1,\beta,1), \beta h_2(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\
&= f_1(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), h_1(\alpha,1,\beta,1)) f_2(\beta h_2(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1)),
\end{aligned}$$

et comme f_1 et f_2 sont des fonctions homogènes de degré zéro, nous obtenons

$$x_2 = f_1(\alpha,1) f_2(\beta,1) = h_1(\alpha,1,\beta,1) = x_0$$

et

$$\begin{aligned}
y_2 &= h_2(x_1, x_0, y_1, y_0) \\
&= h_1(h_1((1,\alpha,1,\beta), h_1(\alpha,1,\beta,1), h_2(1,\alpha,1,\beta), h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\
&= h_1(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), h_1(\alpha,1,\beta,1), \beta h_2(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1)) \\
&= g_1(\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), h_1(\alpha,1,\beta,1)) g_2(\beta h_2(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1)),
\end{aligned}$$

mais les fonctions g_1 et g_2 sont homogènes de degré zéro, donc

$$y_2 = g_1(\alpha,1) g_2(\beta,1) = h_1(\alpha,1,\beta,1) = y_0.$$

Par induction, nous trouvons

$$x_{2n-1} = x_{-1},\ x_{2n} = x_0,\ y_{2n-1} = y_{-1},\ y_{2n} = y_0,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

■

Remarque 2.2.1 *Si* $\alpha = 1,\ \beta = 1$, *alors nous avons la solution*

$$x_n = \overline{x} = h_1(1,1,1,1), \quad y_n = \overline{y} = h_2(1,1,1,1),$$

pour tout $n = -1, 0, \ldots$

2.2.4 Application

Maintenant, comme une application du résultat précédent sur l'existence des solutions périodiques, considérons le système suivant.

$$x_{n+1} = (a_1 + \frac{x_n}{x_{n-1}})(b_1 + \frac{y_n}{y_{n-1}}), \quad y_{n+1} = (a_2 + \frac{x_n}{x_{n-1}})(b_2 + \frac{y_n}{y_{n-1}}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.35}$$

où les valeurs initiales $x_{-i},\ y_{-i},\ (i = 0, 1)$, et les paramètres $a_j,\ b_j,\ (j = 1, 2)$, sont des nombres réels positifs .

Proposition 2.2.2 *Supposons que* $(\alpha - 1)(\beta - 1) \neq 0$. *Si*

$$(b_1 + \beta)(a_1 + \alpha)\alpha^2\beta - (a_1\alpha + 1)(b_1\beta + 1) = 0 \tag{2.36}$$

et

$$(a_2 + \alpha)(b_2 + \beta)\alpha\beta^2 - (b_2\beta + 1)(a_2\alpha + 1) = 0, \tag{2.37}$$

alors,

$\ldots,\ (\alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1),\ \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1)), (h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)),\ (\alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1)),$ $(h_1(\alpha, 1, \beta, 1), h_2(\alpha, 1, \beta, 1)),\ \ldots$ *est une solution périodique de période deux du système* (2.35).

Démonstration. Soient

$$h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = f_1(x_n, x_{n-1})f_2(y_n, y_{n-1}) = (a_1 + \frac{x_n}{x_{n-1}})(b_1 + \frac{y_n}{y_{n-1}}),$$

et

$$h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = g_1(x_n, x_{n-1})g_2(y_n, y_{n-1}) = (a_2 + \frac{x_n}{x_{n-1}})(b_2 + \frac{y_n}{y_{n-1}}).$$

Alors, le système (2.35) peut s'écrire comme suit

$$x_{n+1} = h_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = h_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}).$$

Du **Théorème 2.2.2**, nous avons

$$h_1(1, \alpha, 1, \beta) = \alpha h_1(\alpha, 1, \beta, 1), \quad h_2(1, \alpha, 1, \beta) = \beta h_2(\alpha, 1, \beta, 1),$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que

$\ldots,\ (\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1),\ \beta h_2(\alpha,1,\beta,1)), (h_1(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1)),\ (\alpha h_1(\alpha,1,\beta,1), \beta h_2(\alpha,1,\beta,1)),$ $(h_1(\alpha,1,\beta,1), h_2(\alpha,1,\beta,1)),\ \ldots$ soit une solution 2-périodique du système (2.35), i.e.,

$$a_1b_1 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{b_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = a_1b_1\alpha - a_1\alpha\beta - b_1\alpha^2 - \alpha^2\beta$$

et

$$a_2b_2 + \frac{a_2}{\beta} + \frac{b_2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = a_2b_2\beta + a_2\beta^2 - b_2\alpha\beta + \alpha\beta^2,$$

qui sont (2.36) et (2.37). ■

Maintenant, nous donnons un exemple numérique représentant la périodicité des solutions.

Exemple 2.2.2 *Pour $\alpha = 3$ et $\beta = \frac{1}{5}$, les conditions* (2.36) *et* (2.37) *deviennent*

$$\begin{aligned} \frac{9}{5}(a_1+3)(b_1+\frac{1}{5}) &= (3a_1+1)(\frac{1}{5}b_1+1), \\ \frac{3}{25}(a_2+3)(b_2+\frac{1}{5}) &= (\frac{1}{5}b_2+1)(3a_2+1). \end{aligned}$$

Ces conditions sont satisfaites pour

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \frac{2}{5}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad b_2 = \frac{119}{5}.$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} x_{2n-1} = x_{-1} = \alpha h_1(\alpha,1,\beta,1) &= \frac{12}{5}, \\ x_{2n} = x_0 = h_1(\alpha,1,\beta,1) &= \frac{36}{5}, \\ y_{2n-1} = y_{-1} = \beta h_2(\alpha,1,\beta,1) &= \frac{384}{5} \\ y_{2n} = y_0 = h_2(\alpha,1,\beta,1) &= \frac{384}{25}, \end{aligned}$$

alors, la solution 2*-périodique est*

$$(x_n, y_n)_{n\geq -1} = \left\{\left(\frac{12}{5}, \frac{384}{5}\right), \left(\frac{36}{5}, \frac{384}{25}\right), \left(\frac{12}{5}, \frac{384}{5}\right), \left(\frac{36}{5}, \frac{384}{25}\right), \ldots\right\}.$$

2.3 Oscillation des solutions des systèmes (1.4) et (1.5)

Dans cette section on s'intérèsse à l'existence des solutions oscillatoires pour les systèmes (1.4) et (1.5).

2.3.1 Cas du système (1.4)

Théorème 2.3.1 *Soit* (x_n, y_n) *une solution du système* (1.4). *Supposons que* $f_1(u,v)$, $f_2(u,v)$, $g_1(u,v)$ *et* $g_2(u,v)$ *sont décroissantes en* u *pour tout* v *et croissantes en* v *pour tout* u.

1. *Si*
$$x_{-1} < \overline{x} < x_0, \; y_{-1} < \overline{y} < y_0, \tag{2.38}$$
alors $(x_n)_{n\geq -1}$ *et* $(y_n)_{n\geq -1}$ *sont oscillatoires autour de* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *respectivement.*

2. *Si*
$$x_0 < \overline{x} < x_{-1}, \; y_0 < \overline{y} < y_{-1}, \tag{2.39}$$
alors $(x_n)_{n\geq -1}$ *et* $(y_n)_{n\geq -1}$ *sont oscillatoires autour de* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *respectivement.*

Démonstration.

1. Supposons que (2.38) est vérifiée. Alors, nous avons
$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x_0, x_{-1}) + f_2(y_0, y_{-1}) < f_1(\overline{x}, \overline{x}) + f_2(\overline{y}, \overline{y}) = f_1(1,1) + f_2(1,1) = \overline{x},\\
y_1 &= g_1(x_0, x_{-1}) + g_2(y_0, y_{-1}) < g_1(\overline{x}, \overline{x}) + g_2(\overline{y}, \overline{y}) = g_1(1,1) + g_2(1,1) = \overline{y},\\
x_2 &= f_1(x_1, x_0) + f_2(y_1, y_0) > f_1(\overline{x}, \overline{x}) + f_2(\overline{y}, \overline{y}) = f_1(1,1) + f_2(1,1) = \overline{x},\\
y_2 &= g_1(x_1, x_0) + g_2(y_1, y_0) > g_1(\overline{x}, \overline{x}) + g_2(\overline{y}, \overline{y}) = g_1(1,1) + g_2(1,1) = \overline{y}.
\end{aligned}$$
Par induction, on obtient
$$x_{2n-1} < \overline{x}, \; x_{2n} > \overline{x}, \; y_{2n-1} < \overline{y}, \; y_{2n} > \overline{y}, \; n \geq 0.$$

2. Supposons que (2.39) est vérifiée. Alors, nous avons
$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x_0, x_{-1}) + f_2(y_0, y_{-1}) > f_1(\overline{x}, \overline{x}) + f_2(\overline{y}, \overline{y}) = f_1(1,1) + f_2(1,1) = \overline{x},\\
y_1 &= g_1(x_0, x_{-1}) + g_2(y_0, y_{-1}) > g_1(\overline{x}, \overline{x}) + g_2(\overline{y}, \overline{y}) = g_1(1,1) + g_2(1,1) = \overline{y},\\
x_2 &= f_1(x_1, x_0) + f_2(y_1, y_0) < f_1(\overline{x}, \overline{x}) + f_2(\overline{y}, \overline{y}) = f_1(1,1) + f_2(1,1) = \overline{x},\\
y_2 &= g_1(x_1, x_0) + g_2(y_1, y_0) < g_1(\overline{x}, \overline{x}) + g_2(\overline{y}, \overline{y}) = g_1(1,1) + g_2(1,1) = \overline{y}.
\end{aligned}$$
Par induction, on obtient
$$x_{2n-1} > \overline{x}, \; x_{2n} < \overline{x}, \; y_{2n-1} > \overline{y}, \; y_{2n} < \overline{y}, \; n \geq 0.$$

■

2.3.2 Application

Dans cette partie, considérons l'exemple suivant pour confirmer le résultat précédent.

Exemple 2.3.1 *Soit le système*

$$x_{n+1} = a_1\frac{x_{n-1}}{x_n} + b_1\frac{y_{n-1}}{y_n},\ y_{n+1} = a_2\frac{x_{n-1}}{x_n} + b_2\frac{y_{n-1}}{y_n}, \tag{2.40}$$

où $a_i,\ b_i$ $(i = 1, 2)$, $x_{-i},\ y_{-i}$ $(i = 0, 1)$, *sont des nombres réels positifs.*
Considérons les fonctions $f_1, f_2, g_1, g_2 :]0, +\infty[^2 \longrightarrow]0, +\infty[$ *définies par*

$$f_1(u, v) = a_1\frac{v}{u},\ f_2(u, v) = b_1\frac{v}{u},\ g_1(u, v) = a_2\frac{v}{u},\ g_2(u, v) = b_2\frac{v}{u},\ u, v \in]0, +\infty[\,.$$

Nous avons

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -\frac{a_1 v}{u^2} < 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{a_1}{u} > 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{b_1 v}{u^2} < 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{b_1}{u} > 0,$$

et

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = -\frac{a_2 v}{u^2} < 0,\ \frac{\partial g_1}{\partial v} = \frac{a_2}{u} > 0,\ \frac{\partial g_2}{\partial u} = -\frac{b_2 v}{u^2} < 0,\ \frac{\partial g_2}{\partial v} = \frac{b_2}{u} > 0,$$

c'est à dire les fonctions $f_i(u, v),\ g_i(u, v),\ i = 1, 2$ *sont décroissantes en* u *pour tout* v *et croissantes en* v *pour tout* u.
L'unique point d'équilibre du système (2.40) *est*

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Proposition 2.3.1 *Soit* $(x_n, y_n)_{n\geq -1}$ *une solution du système* (2.40). *Alors, nous avons*

1. *La suite* $(x_n)_{n\geq-1}$ *(resp.* $(y_n)_{n\geq-1}$ *oscille autour* $\overline{x}$ *(resp. autour* $\overline{y}$*) si les inégalités dans* (2.38) *sont satisfaites.*
2. *La suite* $(x_n)_{n\geq-1}$ *(resp.* $(y_n)_{n\geq-1}$ *oscille autour* $\overline{x}$ *(resp. autour* $\overline{y}$*) si les inégalités dans* (2.39) *sont satisfaites.*

Démonstration.

1. *On suppose que les inégalités dans* (2.38) *sont satisfaites. Alors, nous avons*

$$x_1 = a_1\frac{x_{-1}}{x_0} + b_1\frac{y_{-1}}{y_0} < a_1\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_1\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_1 + b_1 = \overline{x}$$

et

$$y_1 = a_2\frac{x_{-1}}{x_0} + b_2\frac{y_{-1}}{y_0} < a_2\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_2\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_2 + b_2 = \overline{y}.$$

De plus, nous avons

$$x_2 = a_1\frac{x_0}{x_1} + b_1\frac{y_0}{y_1} > a_1\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_1\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_1 + b_1 = \overline{x}$$

et

$$y_2 = a_2\frac{x_0}{x_1} + b_2\frac{y_0}{y_1} > a_2\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_2\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_2 + b_2 = \overline{y}.$$

Par induction, on obtient

$$x_{2n-1} < \overline{x},\ x_{2n} > \overline{x},\ y_{2n-1} < \overline{y},\ y_{2n} > \overline{y},\ n \in \mathbb{N}.$$

Donc, la suite $(x_n)_{n\geq -1}$ *(resp.* $(y_n)_{n\geq -1}$*) oscille autour* $\overline{x}$ *(resp. autour* $\overline{y}$*).*

2. *On suppose que les inégalités dans* (2.39) *sont satisfaites. Alors, nous avons*

$$x_1 = a_1\frac{x_{-1}}{x_0} + b_1\frac{y_{-1}}{y_0} > a_1\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_1\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_1 + b_1 = \overline{x}$$

et

$$y_1 = a_2\frac{x_{-1}}{x_0} + b_2\frac{y_{-1}}{y_0} > a_2\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_2\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_2 + b_2 = \overline{y}.$$

De plus, nous avons

$$x_2 = a_1\frac{x_0}{x_1} + b_1\frac{y_0}{y_1} < a_1\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_1\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_1 + b_1 = \overline{x}$$

et

$$y_2 = a_2\frac{x_0}{x_1} + b_2\frac{y_0}{y_1} < a_2\frac{\overline{x}}{\overline{x}} + b_2\frac{\overline{y}}{\overline{y}} = a_2 + b_2 = \overline{y}.$$

Par induction, on obtient

$$x_{2n-1} > \overline{x},\ x_{2n} < \overline{x},\ y_{2n-1} > \overline{y},\ y_{2n} < \overline{y},\ n \in \mathbb{N}.$$

Donc, la suite $(x_n)_{n\geq -1}$ *(resp.* $(y_n)_{n\geq -1}$*) oscille autour* $\overline{x}$ *(resp. autour* $\overline{y}$*).*

■

2.3.3 Cas du système (1.5)

Théorème 2.3.2 *Soit* (x_n, y_n) *une solution du système* (1.5). *On suppose que* $f_1(u,v),\ f_2(u,v),\ g_1(u,v),\ g_2(u,v)$ *sont décroissantes en* u *pour tout* v *et croissantes en* v *pour tout* u.

1. *Si*

$$x_{-1} < \overline{x} < x_0,\ y_{-1} < \overline{y} < y_0, \tag{2.41}$$

alors $(x_n)_{n\geq -1}$ *et* $(y_n)_{n\geq -1}$ *sont oscillatoires autour de* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *respectivement.*

2. *Si*

$$x_0 < \overline{x} < x_{-1}, \;\; y_0 < \overline{y} < y_{-1}, \tag{2.42}$$

alors $(x_n)_{n\geq -1}$ *et* $(y_n)_{n\geq -1}$ *sont oscillatoires autour de* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *respectivement.*

Démonstration.

1. On suppose que (2.41) est satisfaite. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_0, x_{-1}) f_2(y_0, y_{-1}) \\ &< f_1(\overline{x}, \overline{x}) f_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= f_1(1,1) f_2(1,1) \\ &= \overline{x}, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_0, x_{-1}) g_2(y_0, y_{-1}) \\ &< g_1(\overline{x}, \overline{x}) g_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= g_1(1,1) g_2(1,1) \\ &= \overline{y}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} x_2 &= f_1(x_1, x_0) f_2(y_1, y_0) \\ &> f_1(\overline{x}, \overline{x}) f_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= f_1(1,1) f_2(1,1) \\ &= \overline{x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_2 &= g_1(x_1, x_0) g_2(y_1, y_0) \\ &> g_1(\overline{x}, \overline{x}) g_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= g_1(1,1) g_2(1,1) \\ &= \overline{y}. \end{aligned}$$

Par induction, on obtient

$$x_{2n-1} < \overline{x}, \quad x_{2n} > \overline{x}, \quad y_{2n-1} < \overline{y}, \quad x_{2n} > \overline{x}, \quad n \geq 0.$$

2. On suppose que (2.42) est satisfaite. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_0, x_{-1}) f_2(y_0, y_{-1}) \\ &> f_1(\overline{x}, \overline{x}) f_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= f_1(1,1) f_2(1,1) \\ &= \overline{x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_0, x_{-1}) g_2(y_0, y_{-1}) \\ &> g_1(\overline{x}, \overline{x}) g_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= g_1(1,1) g_2(1,1) \\ &= \overline{y}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} x_2 &= f_1(x_1, x_0) f_2(y_1, y_0) \\ &< f_1(\overline{x}, \overline{x}) f_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= f_1(1,1) f_2(1,1) \\ &= \overline{x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_2 &= g_1(x_1, x_0) g_2(y_1, y_0) \\ &< g_1(\overline{x}, \overline{x}) g_2(\overline{y}, \overline{y}) \\ &= g_1(1,1) g_2(1,1) \\ &= \overline{y}. \end{aligned}$$

Par induction, on obtient

$$x_{2n-1} > \overline{x}, \quad x_{2n} < \overline{x}, \quad y_{2n-1} > \overline{y}, \quad x_{2n} < \overline{x}, \quad n \geq 0.$$

■

2.3.4 Application

Dans cette partie, nous appliquons le résultat concernant les solutions oscillatoires du système (1.5) au système suivant

$$x_{n+1} = \left(a_1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)\left(b_1 + \frac{y_{n-1}}{y_n}\right), \quad y_{n+1} = \left(a_2 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)\left(b_2 + \frac{y_{n-1}}{y_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.43}$$

où les valeurs initiales x_{-i}, y_{-i} $(i = 0, 1)$ et les paramètres a_j, b_j $(j = 1, 2)$ sont des nombres réels positifs. Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 :]0, +\infty[^2 \longrightarrow]0, +\infty[$ les fonctions définies par

$$\begin{array}{rcl} f_1(u, v) & = & a_1 + \dfrac{v}{u},\ f_2(w, t) = b_1 + \dfrac{v}{u}, \\ g_2(u, v) & = & a_2 + \dfrac{v}{u},\ g_2(u, v) = b_2 + \dfrac{v}{u}, \end{array}$$

où $(u, v) \in]0, +\infty[^2$. Il est facile de voir que

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} > 0$$

et

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial v} > 0.$$

L'unique point d'équilibre du système (2.43) est

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \big((a_1 + 1)(b_1 + 1), (a_2 + 1)(b_2 + 1)\big).$$

Proposition 2.3.2 *Soit* $(x_n, y_n)_{n \geq -1}$ *une solution du système* (2.43). *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Si les inégalités dans* (2.41) *sont satisfaites, alors la suite* (x_n) *(resp.* (y_n)*) oscille autour de* $\overline{x}$ *(resp. autour de* $\overline{y}$*).*
2. *Si les inégalités dans* (2.42) *sont satisfaites, alors la suite* (x_n) *(resp.* (y_n)*) oscille autour de* $\overline{x}$ *(resp. autour de* $\overline{y}$*).*

Démonstration.

1. On suppose que les inégalités dans (2.41) sont satisfaites. Alors, nous avons

$$x_1 = (a_1 + \frac{x_{-1}}{x_0})(b_1 + \frac{y_{-1}}{y_0}) < (a_1 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_1 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_1 + 1)(b_1 + 1) = \overline{x}$$

et

$$y_1 = (a_2 + \frac{x_{-1}}{x_0})(b_2 + \frac{y_{-1}}{y_0}) < (a_2 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_2 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_2 + 1)(b_2 + 1) = \overline{y}.$$

De plus, nous avons

$$x_2 = (a_1 + \frac{x_0}{x_1})(b_1 + \frac{y_0}{y_1}) > (a_1 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_1 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_1 + 1)(b_1 + 1) = \overline{x},$$

et

$$y_2 = (a_2 + \frac{x_0}{x_1})(b_2 + \frac{y_0}{y_1}) > (a_2 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_2 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_2 + 1)(b_2 + 1) = \overline{y}.$$

Par induction, on trouve

$$x_{2n-1} < \overline{x}, \quad x_{2n} > \overline{x}, \quad y_{2n-1} < \overline{y}, \quad y_{2n} > \overline{y}, \quad n \geq 0.$$

Donc, la suite $(x_n)_{n\geq -1}$ (resp. $(y_n)_{n\geq -1}$) oscille autour de $\overline{x}$ (resp. autour de $\overline{y}$).

2. On suppose que les inégalités dans (2.42) sont satisfaites. Alors, nous avons

$$x_1 = (a_1 + \frac{x_{-1}}{x_0})(b_1 + \frac{y_{-1}}{y_0}) > (a_1 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_1 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_1 + 1)(b_1 + 1) = \overline{x}$$

et

$$y_1 = (a_2 + \frac{x_{-1}}{x_0})(b_2 + \frac{y_{-1}}{y_0}) > (a_2 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_2 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_2 + 1)(b_2 + 1) = \overline{y}.$$

De plus, nous avons

$$x_2 = (a_1 + \frac{x_0}{x_1})(b_1 + \frac{y_0}{y_1}) < (a_1 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_1 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_1 + 1)(b_1 + 1) = \overline{x},$$

et

$$y_2 = (a_2 + \frac{x_0}{x_1})(b_2 + \frac{y_0}{y_1}) < (a_2 + \frac{\overline{x}}{\overline{x}})(b_2 + \frac{\overline{y}}{\overline{y}}) = (a_2 + 1)(b_2 + 1) = \overline{y}.$$

Par induction, on trouve

$$x_{2n-1} > \overline{x}, \quad x_{2n} < \overline{x}, \quad y_{2n-1} > \overline{y}, \quad y_{2n} < \overline{y}, \quad n \geq 0.$$

Donc, la suite $(x_n)_{n\geq -1}$ (resp. $(y_n)_{n\geq -1}$) oscille autour de $\overline{x}$ (resp. autour de $\overline{y}$).

■

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES D'ORDRE SUPÉRIEUR

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au système d'équations aux différences d'ordre $k+2$ suivant

$$x_{n+1} = x_{n-k}^{p}\frac{\alpha y_n + \beta y_{n-k-1}^{q}}{\gamma y_n + \delta y_{n-k-1}^{q}},\ y_{n+1} = y_{n-k}^{q}\frac{a x_n + b x_{n-k-1}^{p}}{c x_n + d x_{n-k-1}^{p}},\ n \in \mathbb{N},\ k, p, q > 0, \tag{3.1}$$

où les paramètres $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et les valeurs initiales $\{x_i\}_{i=-(k+1)}^{0}$, $\{y_i\}_{i=-(k+1)}^{0}$ sont des nombres réels strictement positifs.

Pour résoudre ce système nous allons distinguer quatre cas.

Le premier cas : $ad = bc$ et $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, le deuxième cas : $ad \neq bc$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$, le troisième cas : $ad = bc$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$ et le quatrième cas (cas général) : $ad \neq bc$, $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, $a\gamma + c\delta \neq 0$ et $\alpha c + \gamma d \neq 0$.

Dans le cas général, nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *[34] Considérons le système d'équations aux différences suivant*

$$u_{n+1} = \frac{\alpha v_n + \beta}{\gamma v_n + \delta},\ \ v_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d},\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

où $ad \neq bc,\ a\gamma + c\delta \neq 0,\ \alpha c + \gamma d \neq 0,\ \alpha\delta \neq \beta\gamma$. *La solution de ce système est la suivante*

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{u_0(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + \beta c)u_0 + \alpha b + \beta d)s_n}{((a\gamma + c\delta)u_0 - a\alpha - \beta c)s_n + s_{n+1}} \\
u_{2n+1} &= \frac{(\alpha v_0 + \beta)(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + \beta c)(\alpha v_0 + \beta) + (\alpha b + \beta d)(\gamma v_0 + \delta))s_n}{((a\gamma + c\delta)(\alpha v_0 + \beta) - (a\alpha + \beta c)(\gamma v_0 + \delta))s_n + (\gamma v_0 + \delta)s_{n+1}} \\
v_{2n} &= \frac{v_0(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + b\gamma)v_0 + a\beta + b\delta)s_n}{((\alpha c + \gamma d)v_0 - a\alpha - b\gamma)s_n + s_{n+1}} \\
v_{2n+1} &= \frac{(au_0 + b)(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + b\gamma)(au_0 + b) + (a\beta + b\delta)(cu_0 + d))s_n}{((\alpha c + \gamma d)(au_0 + b) - (a\alpha + b\gamma)(cu_0 + d))s_n + (cu_0 + d)s_{n+1}},
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, *et où,* (s_n) *est la suite satisfaisant l'équation aux différences suivante*

$$s_{n+1} - (a\alpha + b\gamma + c\beta + d\delta)s_n + (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)s_{n-1} = 0,\ \ s_0 = 0,\ s_1 = 1.$$

Notre objectif est de résoudre explicitement le système (3.1), ensuite utiliser les formules obtenues pour établir des conditions pour la périodicité et la convergence des solutions. Dans toute la suite, nous nous intéressons aux solutions bien-définies du système (3.1), i.e., des solutions avec la condition suivante :

$$\left(\gamma y_n + \delta y^q_{n-k-1}\right)\left(cx_n + dx^p_{n-k-1}\right) \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

3.2 Premier cas : $ad = bc$ et $\alpha\delta \neq \beta\gamma$

On suppose que $ad = bc$ et $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. Dans ce cas, la deuxième équation du système (3.1) devient

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= \frac{b}{d} y^q_{n-k} \frac{\frac{a}{b}x_n + x^p_{n-k-1}}{\frac{c}{d}x_n + x^p_{n-k-1}} \\
&= \frac{b}{d} y^q_{n-k},\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la dernière formule, dans la première équation du système (3.1), on obtient

$$x_{n+2} = x^p_{n-k+1}\frac{\alpha b + \beta d}{\gamma b + \delta d},\ n \in \mathbb{N}.$$

Donc le système (3.1) est réduit aux équations

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax^p_{n-k}, & n \in \mathbb{N}^*, \\ y_{n+1} = \frac{b}{d} y^q_{n-k}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.3}$$

tels que $A = \frac{\alpha b + \beta d}{\gamma b + \delta d}$ et $\left(\alpha b + \beta d\right)\left(\gamma b + \delta d\right) \neq 0$.

3.2.1 Forme explicite des solutions du système (3.3)

Dans le résultat suivant, on donne la forme explicite des solutions de (3.3).

Théorème 3.2.1 *Les solutions des equations de* (3.3) *sont présentées par*

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{(k+1)n+l} = \begin{cases} A^{n+1} x_{l-(k+1)}, & p = 1, \\ \\ A^{\frac{1-p^{n+1}}{1-p}} x_{l-(k+1)}^{p^{n+1}}, & p \neq 1. \end{cases} , \ l = \overline{2, k+2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{(k+1)n+l} = \begin{cases} \left(\frac{b}{d}\right)^{n+1} y_{l-(k+1)}, & q = 1, \\ \\ \left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}} y_{l-(k+1)}^{q^{n+1}}, & q \neq 1. \end{cases} \quad l = \overline{1, k+1}.$$

Démonstration. Par (3.3), nous avons

$$\begin{aligned}
x_2 &= Ax_{-k+1}^p \\
x_3 &= Ax_{-k+2}^p \\
&\vdots \\
x_k &= Ax_{-1}^p \\
x_{k+1} &= Ax_0^p \\
x_{k+2} &= Ax_1^p \\
x_{k+3} = x_{k+1+2} = Ax_2^p &= A^{1+p} x_{-k+1}^{p^2} \\
&\vdots \\
x_{2k+1} = x_{(k+1)+k} = Ax_k^p &= A^{1+p} x_{-1}^{p^2} \\
x_{2k+2} = x_{k+1+k+1} = Ax_{k+1}^p &= A^{1+p} x_0^{p^2} \\
x_{2k+3} = x_{k+1+k+2} = Ax_{k+2}^p &= A^{1+p} x_1^{p^2} \\
x_{2k+4} = x_{2(k+1)+2} = Ax_{k+3}^p &= A^{1+p+p^2} x_{-k+1}^{p^3} \\
&\vdots \\
x_{3k+2} = x_{2(k+1)+k} = Ax_{2k+1}^p &= A^{1+p+p^2} x_{-1}^{p^3} \\
x_{3k+3} = x_{2(k+1)+k+1} = Ax_{2k+2}^p &= A^{1+p+p^2} x_0^{p^3} \\
x_{3k+4} = x_{2(k+1)+k+2} = Ax_{2k+3}^p &= A^{1+p+p^2} x_1^{p^3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Par induction, nous obtenons

$$x_{(k+1)n+l} = A^{1+p+p^2+\ldots+p^n} x_{l-(k+1)}^{p^{n+1}},\ l = \overline{2, k+2},\ n \in \mathbb{N}$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{(k+1)n+l} = A^{\frac{1-p^{n+1}}{1-p}} x_{l-(k+1)}^{p^{n+1}},\ l = \overline{2, k+2}, \tag{3.4}$$

si $p \neq 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{(k+1)n+l} = A^{n+1} x_{l-(k+1)},\ l = \overline{2, k+2} \tag{3.5}$$

si $p = 1$.

Par la même procédure, on obtient par (3.3),

$$\begin{array}{rcl}
y_1 & = & \frac{b}{d} y_{-k}^q \\
y_2 & = & \frac{b}{d} y_{-k+1}^q \\
& \vdots & \\
y_k & = & \frac{b}{d} y_{-1}^q \\
y_{k+1} & = & \frac{b}{d} y_0^q \\
y_{k+2} = y_{k+1+1} = \frac{b}{d} y_1^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q} y_{-k}^{q^2} \\
y_{k+3} = y_{k+1+2} = \frac{b}{d} y_2^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q} y_{-k+1}^{q^2} \\
& \vdots & \\
y_{2k+1} = y_{(k+1)+k} = \frac{b}{d} y_k^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q} y_{-1}^{q^2} \\
y_{2k+2} = y_{k+1+k+1} = \frac{b}{d} y_{k+1}^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q} y_0^{q^2} \\
y_{2k+3} = y_{2(k+1)+1} = \frac{b}{d} y_{k+2}^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q+q^2} y_{-k}^{q^3} \\
& \vdots & \\
y_{3k+2} = y_{2(k+1)+k} = \frac{b}{d} y_{2k+1}^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q+q^2} y_{-1}^{q^3} \\
y_{3k+3} = y_{2(k+1)+k+1} = \frac{b}{d} y_{2k+2}^q & = & \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q+q^2} y_0^{q^3} \\
& \vdots &
\end{array}$$

Alors, par induction nous obtenons

$$v_{(k+1)n+l} = \left(\frac{b}{d}\right)^{1+q+q^2+\ldots+q^n} v_{l-(k+1)}^{q^{n+1}},\ l = \overline{1, k+1},\ n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique,

$$y_{(k+1)n+l} = \left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}} y_{l-(k+1)}^{q^{n+1}}, \ l = \overline{1, k+1}, \ n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

si $q \neq 1$ et

$$y_{(k+1)n+l} = \left(\frac{b}{d}\right)^{n+1} y_{l-(k+1)}, \ l = \overline{1, k+1}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

si $q = 1$, et cela termine la preuve. ∎

3.2.2 Périodicité des solutions du système (3.3) dans le cas $p = q = 1$

Considérons (3.3) avec $p = q = 1$. Dans ce cas, on a les équations suivantes

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{\alpha b+\beta d}{\gamma b+\delta d} x_{n-k}, & n \in \mathbb{N}^*, \\ y_{n+1} = \frac{b}{d} y_{n-k}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.8}$$

Dans le théorème suivant, nous donnerons des conditions rendant les solutions de (3.8) périodiques.

Théorème 3.2.2 *$\alpha + \beta = \gamma + \delta$, $b = d$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de* (3.8) *soient périodiques de période* $k + 1$.

Démonstration. On suppose que la solution $(x_n)_{n\geq -k+1}$ et $(y_n)_{n\geq -k}$ du (3.8) est périodique de période $k + 1$, i.e.

$$x_n = x_{n-(k+1)}, \ n = 2, 3, ...$$

et

$$y_n = y_{n-(k+1)}, \ n = 1, 2, ...$$

alors,

$$x_2 = x_{-k+1}, \ y_1 = y_{-k}.$$

En utilisant ce fait et les équations dans (3.8), on obtient

$$x_2 = x_{-k+1} = \frac{\alpha b + \beta d}{\gamma b + \delta d} x_{-k+1}$$

et

$$y_1 = y_{-k} = \frac{b}{d} y_{-k}.$$

D'où, on obtient

$$\frac{\alpha b + \beta d}{\gamma b + \delta d} = \frac{b}{d} = 1 \text{ ou } \alpha + \beta = \gamma + \delta \text{ and } b = d.$$

Maintenant, on suppose que $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ et $b = d$.

Par conséquent, de (3.8), nous avons

$$x_2 = \frac{\alpha b + \beta d}{\gamma b + \delta d} x_{1-k} = x_{1-k}, \quad y_1 = \frac{b}{d} y_{-k} = y_{-k}.$$

Alors, en prenons $n = 2$ dans (3.8), on obtient

$$x_3 = \frac{\alpha b + \beta d}{\gamma b + \delta d} x_{-k+2} = x_{-k+2}, \quad y_2 = \frac{b}{d} y_{-k+1} = y_{-k+1}.$$

En continuant la procédure, on obtient, par induction, le résultat. ■

Le résultat suivant concerne le comportement des solutions de (3.3), qui découle directement du **Théorème 3.2.1**.

Théorème 3.2.3 *Pour toute solution* $(x_n)_{n\geq 1-k}$ *et* $(y_n)_{n\geq -k}$ *du système* (3.3)*, nous avons*

1. *Si* $p = q = 1$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & |A| < 1 \\ \\ \infty, & |A| > 1 \end{cases} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & |b| < |d|, \\ \\ \infty, & |b| > |d|. \end{cases}$$

2. *Si* $p \neq 1$ *et* $q \neq 1$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & |A| < 1, \ \max\limits_{l=\overline{2,k+2}} |x_{l-(k+1)}| < 1, \\ \infty, & |A| > 1, \ \min\limits_{l=\overline{2,k+2}} |x_{l-(k+1)}| > 1, \end{cases}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & |b| < |d|, \ \max\limits_{l=\overline{1,k+1}} |y_{l-(k+1)}| < 1, \\ \infty, & |b| > |d|, \ \min\limits_{l=\overline{1,k+1}} |y_{l-(k+1)}| > 1. \end{cases}$$

3.3 Deuxième cas : $ad \neq bc$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$

Dans cette partie, on suppose que $ad \neq bc$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$. Alors le système (3.1) devient

$$x_{n+1} = \frac{\beta}{\delta} x_{n-k}^p, \ n \in \mathbb{N}, \ y_{n+1} = B y_{n-k}^p, \ n \in \mathbb{N}^*, \tag{3.9}$$

avec $B = \frac{a\beta+b\delta}{c\beta+d\delta}$, et $(a\beta + b\delta)(c\beta + d\delta) \neq 0$.

Dans les trois résultats suivants, on va donner la forme des solutions de (3.9), des conditions qui rendent les solutions du système (3.9), dans le cas $p = q = 1$, périodiques et le comportement des solutions du système (3.9). Leurs démonstrations peuvent être obtenues par les mêmes étapes que celles des théorèmes de la partie précédente.

Théorème 3.3.1 *Pour toute solution* $(x_n)_{n\geq 1-k}$ *et* $(y_n)_{n\geq -k}$ *du système* (3.9), *nous avons pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{(k+1)n+l} = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{n+1} x_{l-(k+1)}, & p = 1, \\ \\ \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\frac{1-p^{n+1}}{1-p}} x_{l-(k+1)}^{p^{n+1}}, & p \neq 1. \end{cases} \qquad l = \overline{1, k+1}.$$

$$y_{(k+1)n+l} = \begin{cases} B^{n+1} y_{l-(k+1)}, & q = 1, \\ \\ B^{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}} y_{l-(k+1)}^{q^{n+1}}, & q \neq 1, \end{cases} \qquad l = \overline{2, k+2}.$$

En prenant $p = q = 1$ dans (3.3), on obtient les équations suivantes

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{\beta}{\delta} x_{n-k}, \ n \in \mathbb{N}, \\ y_{n+1} = \frac{a\beta+b\delta}{c\beta+d\delta} y_{n-k}, \ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.10}$$

Théorème 3.3.2 $\beta = \delta$ *et* $a+b = c+d$ *est une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de* (3.10) *soient périodiques de période* $k+1$.

Théorème 3.3.3 *Pour toute solution* $(x_n)_{n\geq 1-k}$ *et* $(y_n)_{n\geq -k}$ *du système* (3.9), *nous avons*

1. *Si* $p = q = 1$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & |\beta| < |\delta|, \\ \\ \infty, & |\beta| > |\delta|, \end{cases} \quad et \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & |B| < 1, \\ \\ \infty, & |B| > 1. \end{cases}$$

2. *Si* $p \neq 1$ *et* $q \neq 1$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & |\beta| < |\delta|, \ \max_{l=\overline{1,k+1}} |x_{l-(k+1)}| < 1, \\ \infty, & |\beta| > |\delta|, \ \min_{l=\overline{1,k+1}} |x_{l-(k+1)}| > 1, \end{cases}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & |B| < 1 \ et \ \max\limits_{l=\overline{2,k+2}} |y_{l-(k+1)}| < 1, \\ \\ \infty, & |B| > 1 \ et \ \min\limits_{l=\overline{2,k+2}} |y_{l-(k+1)}| > 1. \end{cases}$$

3.4 Troisième cas : $ad = bc$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$

Supposons que $ad = bc$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$, alors le système (3.1) sera réduit au système suivant

$$x_{n+1} = \frac{\beta}{\delta} x_{n-k}^{p}, \ y_{n+1} = \frac{b}{d} y_{n-k}^{q}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Pour les solutions de ce système, on a les résultats suivants qui sont des conséquences directes des deux sections précédentes.

Théorème 3.4.1 *Pour toute solution* $(x_n, y_n)_{n\geq -k}$ *du système* (3.11)*, nous avons pour* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$x_{(k+1)n+l} = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{n+1} x_{l-(k+1)}, & p = 1, \\ \\ \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\frac{1-p^n}{1-p}} x_{l-(k+1)}^{p^{n+1}}, & p \neq 1, \end{cases} \qquad l = \overline{1, k+1}.$$

$$y_{(k+1)n+l} = \begin{cases} \left(\frac{b}{d}\right)^{n+1} y_{l-(k+1)}, & q = 1, \\ \\ \left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{1-q^n}{1-q}} y_{l-(k+1)}^{q^{n+1}}, & q \neq 1, \end{cases} \qquad l = \overline{1, k+1}.$$

Maintenant, en prenant $p = q = 1$ dans (3.3), on obtient

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{\beta}{\delta} x_{n-k}, \\ \\ y_{n+1} = \frac{b}{d} y_{n-k}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

.

Théorème 3.4.2 *Chaque solution de* (3.12) *est périodique de période* $k+1$ *si et seulement si*

$$b = d \ et \ \beta = \delta.$$

Théorème 3.4.3 *Pour toute solution* $(x_n, y_n)_{n\geq -k}$ *du système* (3.11)*, nous avons*

1. *Si* $p = q = 1$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & |\beta| < |\delta|, \\ \\ \infty, & |\beta| > |\delta|, \end{cases} \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & |b| < |d|, \\ \\ \infty, & |b| > |d|. \end{cases}$$

2. *Si $p \neq 1$ et $q \neq 1$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & |\beta| < |\delta|, \quad \max\limits_{l=\overline{1,k+1}} |x_{l-(k+1)}| < 1, \\ \infty, & |\beta| > |\delta|, \quad \min\limits_{l=\overline{1,k+1}} |x_{l-(k+1)}| > 1, \end{cases}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & |b| < |d| \ et \ \max\limits_{l=\overline{1,k+1}} |y_{l-(k+1)}| < 1, \\ \pm\infty, & |b| > |d| \ et \ \min\limits_{l=\overline{1,k+1}} |y_{l-(k+1)}| > 1. \end{cases}$$

3.5 Cas général du système (3.1)

Dans cette section, nous résolvons le système (3.1) dans le cas général, et c'est le cas où $ad \neq bc$, $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, $a\gamma + c\delta \neq 0$ et $\alpha c + \gamma d \neq 0$.

Théorème 3.5.1 *Pour toute solution $(x_n, y_n)_{n\geq -(k+1)}$ du système* (3.1)*, nous avons pour $n \in \mathbb{N}$,*

(i) <u>*Si k est impair : $k = 2k' + 1$, $k' \in \mathbb{N}$*</u>*, alors*

$$\forall l = \overline{0,k'},: \begin{cases} x_{2[(k'+1)n+l]+j} = x_{2(l-k'-1)+j}^{p^{n+1}} \prod\limits_{i=0}^{n} u_{2[(k'+1)i+l]+j'}^{p^{n-i}} \\ y_{2[(k'+1)n+l]+j} = y_{2(l-k'-1)+j}^{q^{n+1}} \prod\limits_{i=0}^{n} v_{2[(k'+1)i+l]+j'}^{q^{n-i}} \end{cases} \quad j \in \{0,1\}.$$

(ii) *Si k est pair : $k = 2k'$, $k' \in \mathbb{N}$, alors*

$$
\begin{aligned}
x_{2[(2k'+1)n+k'+l+1]} &= x_{2(l-k')}^{p^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]+1}^{p^{2(n-i)+1}} u_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{p^{2(n-i)}}, \ l = \overline{0, k'-1} \\
x_{2[(2k'+1)n+l]+1} &= x_{2(l-k')}^{p^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]+1}^{p^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \ l = \overline{0, k'-1} \\
x_{2[(2k'+1)n+k'+l]+1} &= x_{2(l-k')-1}^{p^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]}^{p^{2(n-i)}} u_{2((2k'+1)i+k'+l)+1}^{p^{2(n-i)}}, \ l = \overline{0, k'} \\
x_{2[(2k'+1)n+l]} &= x_{2(l-k')-1}^{p^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]}^{p^{2(n-i)+1}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2[(2k'+1)i+k'+l]+1}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \ l = \overline{0, k'} \\
y_{2[(2k'+1)n+k'+l+1]} &= y_{2(l-k')}^{q^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} v_{2((2k'+1)i+l)+1}^{q^{2(n-i)+1}} v_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{q^{2(n-i)}}, \ l = \overline{0, k'-1} \\
y_{2[(2k'+1)n+l]+1} &= y_{2(l-k')}^{q^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} v_{2[(2k'+1)i+l]+1}^{q^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \ l = \overline{0, k'-1} \\
y_{2[(2k'+1)n+k'+l]+1} &= y_{2(l-k')-1}^{q^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} v_{2[(2k'+1)i+l]}^{q^{2(n-i)}} v_{2[(2k'+1)i+k'+l]+1}^{q^{2(n-i)}}, \ l = \overline{0, k'} \\
y_{2[(2k'+1)n+l]} &= y_{2(l-k')-1}^{q^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} v_{2[(2k'+1)i+l]}^{q^{2(n-i)+1}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2[(2k'+1)i+k'+l]+1}^{q^{2(n-i)-1}} \Big), \ l = \overline{0, k'},
\end{aligned}
$$

tels que $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ sont donnés par

$$
\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{u_0(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + \beta c)u_0 + \alpha b + \beta d)s_n}{((a\gamma + c\delta)u_0 - a\alpha - \beta c)s_n + s_{n+1}} \\
u_{2n+1} &= \frac{(\alpha v_0 + \beta)(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + \beta c)(\alpha v_0 + \beta) + (\alpha b + \beta d)(\gamma v_0 + \delta))s_n}{((a\gamma + c\delta)(\alpha v_0 + \beta) - (a\alpha + \beta c)(\gamma v_0 + \delta))s_n + (\gamma v_0 + \delta)s_{n+1}} \\
v_{2n} &= \frac{v_0(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + b\gamma)v_0 + a\beta + b\delta)s_n}{((\alpha c + \gamma d)v_0 - a\alpha - b\gamma)s_n + s_{n+1}} \\
v_{2n+1} &= \frac{(au_0 + b)(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + b\gamma)(au_0 + b) + (a\beta + b\delta)(cu_0 + d))s_n}{((\alpha c + \gamma d)(au_0 + b) - (a\alpha + b\gamma)(cu_0 + d))s_n + (cu_0 + d)s_{n+1}},
\end{aligned}
$$

*avec $u_0 = \frac{x_0}{x_{-k-1}^p}$ et $v_0 = \frac{y_0}{y_{-k-1}^q}$ et la suite $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ est comme dans le **Théorème 3.1.1**.*

Démonstration. Nous écrivons le système (3.1) comme suit

$$
\frac{x_{n+1}}{x_{n-k}^p} = \frac{\alpha \frac{y_n}{y_{n-k-1}^q} + \beta}{\gamma \frac{y_n}{y_{n-k-1}^q} + \delta}, \quad \frac{y_{n+1}}{y_{n-k}^q} = \frac{a \frac{x_n}{x_{n-k-1}^p} + b}{c \frac{x_n}{x_{n-k-1}^p} + d}. \tag{3.13}
$$

et en posant

$$
u_n := \frac{x_n}{x_{n-k-1}^p}, \quad v_n := \frac{y_n}{y_{n-k-1}^q}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.14}
$$

on obtient le système suivant

$$u_{n+1} = \frac{\alpha v_n + \beta}{\gamma v_n + \delta}, \quad v_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}. \tag{3.15}$$

Il est clair que le système (3.15) a la même forme que celle du système (3.2), donc par le **Théorème 3.1.1**, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{u_0(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + \beta c)u_0 + \alpha b + \beta d)s_n}{((a\gamma + c\delta)u_0 - a\alpha - \beta c)s_n + s_{n+1}}\\
u_{2n+1} &= \frac{(\alpha v_0 + \beta)(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + \beta c)(\alpha v_0 + \beta) + (\alpha b + \beta d)(\gamma v_0 + \delta))s_n}{((a\gamma + c\delta)(\alpha v_0 + \beta) - (a\alpha + \beta c)(\gamma v_0 + \delta))s_n + (\gamma v_0 + \delta)s_{n+1}}\\
v_{2n} &= \frac{v_0(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + b\gamma)v_0 + a\beta + b\delta)s_n}{((\alpha c + \gamma d)v_0 - a\alpha - b\gamma)s_n + s_{n+1}}\\
v_{2n+1} &= \frac{(au_0 + b)(\beta\gamma - \alpha\delta)(ad - bc)s_{n-1} + ((a\alpha + b\gamma)(au_0 + b) + (a\beta + b\delta)(cu_0 + d))s_n}{((\alpha c + \gamma d)(au_0 + b) - (a\alpha + b\gamma)(cu_0 + d))s_n + (cu_0 + d)s_{n+1}},
\end{aligned}$$

avec $u_0 = \frac{x_0}{x^p_{-k-1}}$ et $v_0 = \frac{y_0}{y^q_{-k-1}}$.

Maintenant, en utilisant les relations (3.14), on obtient

$$\begin{aligned}
x_0 &= u_0 x^p_{-(k+1)}\\
x_1 &= u_1 x^p_{-k}\\
&\vdots\\
x_k &= u_k x^p_{-1}\\
x_{k+1} &= u_{k+1} u_0^p x^{p^2}_{-(k+1)}\\
x_{k+2} = x_{(k+1)+1} = u_{k+2} x_1^p &= u_{(k+1)+1} u_1^p x^{p^2}_{-k}\\
&\vdots\\
x_{2k} = x_{(k+1)+k-1} = u_{2k} x^p_{k-1} &= u_{(k+1)+k-1} u^p_{k-1} x^{p^2}_{-2}\\
x_{2k+1} = x_{(k+1)+k} = u_{2k+1} x^p_k &= u_{2k+1} u^p_k x^{p^2}_{-1}\\
x_{2k+2} = x_{2(k+1)} = u_{2(k+1)} x^p_{k+1} &= u_{2(k+1)} u^p_{k+1} u_0^{p^2} x^{p^3}_{-(k+1)}\\
&\vdots\\
x_{3k+2} = x_{2(k+1)+k} = u_{2(k+1)+k} x^p_{2k+1} &= u_{2(k+1)+k} u^p_{2k+1} u_k^{p^2} x^{p^3}_{-1}\\
x_{3k+3} = x_{3(k+1)} = u_{3(k+1)} x^p_{2(k+1)} &= u_{3(k+1)} u^p_{2(k+1)} u^{p^2}_{k+1} u_0^{p^3} x^{p^4}_{-(k+1)}\\
&\vdots\\
x_{4k+3} = x_{3(k+1)+k} = u_{3(k+1)+k} x^p_{3k+2} &= u_{3(k+1)+k} u^p_{2(k+1)+k} u^{p^2}_{2k+1} u_k^{p^3} x^{p^4}_{-1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_0 &= v_0 y^{q}_{-(k+1)} \\
y_1 &= v_1 y^{q}_{-k} \\
&\vdots \\
y_k &= v_k y^{q}_{-1} \\
y_{k+1} &= v_{k+1} v_0^{q} y^{q^2}_{-(k+1)} \\
y_{k+2} = y_{(k+1)+1} = v_{k+2} y_1^{q} &= v_{(k+1)+1} v_1^{q} y^{q^2}_{-k} \\
&\vdots \\
y_{2k} = y_{(k+1)+k-1} = v_{2k} y^{q}_{k-1} &= v_{(k+1)+k-1} v^{q}_{k-1} y^{q^2}_{-2} \\
y_{2k+1} = y_{(k+1)+k} = v_{2k+1} y^{q}_{k} &= v_{2k+1} v^{q}_{k} y^{q^2}_{-1} \\
y_{2k+2} = y_{2(k+1)} = v_{2(k+1)} y^{q}_{k+1} &= v_{2(k+1)} v^{q}_{k+1} v^{q^2}_{0} y^{q^3}_{-(k+1)} \\
&\vdots \\
y_{3k+2} = y_{2(k+1)+k} = v_{2(k+1)+k} y^{q}_{2k+1} &= v_{2(k+1)+k} v^{q}_{2k+1} v^{q^2}_{k} y^{q^3}_{-1} \\
y_{3k+3} = y_{3(k+1)} = v_{3(k+1)} y^{q}_{2(k+1)} &= v_{3(k+1)} v^{q}_{2(k+1)} v^{q^2}_{k+1} v^{q^3}_{0} y^{q^4}_{-(k+1)} \\
&\vdots \\
y_{4k+3} = y_{3(k+1)+k} = v_{3(k+1)+k} y^{q}_{3k+2} &= v_{3(k+1)+k} v^{q}_{2(k+1)+k} v^{q^2}_{2k+1} v^{q^3}_{k} y^{q^4}_{-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Donc, par induction on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{(k+1)n+l} &= x^{p^{n+1}}_{l-k-1} \prod_{i=0}^{n} u^{p^{n-i}}_{(k+1)i+l}, \\ y_{(k+1)n+l} &= y^{q^{n+1}}_{l-k-1} \prod_{i=0}^{n} v^{q^{n-i}}_{(k+1)i+l}, \end{cases} \quad l = \overline{0,k}. \tag{3.16}$$

Ici, nous distinguons deux cas :

(i) k impair : $k = 2k' + 1$, $k' \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\forall l = \overline{0,k'} \text{ et } j = 0,1 : \begin{cases} x_{2[(k'+1)n+l]+j} = x^{p^{n+1}}_{2(l-k'-1)+j} \prod_{i=0}^{n} u^{p^{n-i}}_{2[(k'+1)i+l]+j}, \\ y_{2[(k'+1)n+l]+j} = y^{q^{n+1}}_{2(l-k'-1)+j} \prod_{i=0}^{n} v^{q^{n-i}}_{2[(k'+1)i+l]+j}, \end{cases}$$

(ii) k pair : $k = 2k'$, $k' \in \mathbb{N}$. Ici nous avons deux sous-cas :

Si n est impair : on trouve

$$x_{(2k'+1)(2n+1)+l} = x_{l-2k'-1}^{p^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} u_{2(2k'+1)i+l}^{p^{2(n-i)+1}} u_{(2k'+1)(2i+1)+l}^{p^{2(n-i)}}, \; l = \overline{0,2k'}, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.17}$$

et

$$y_{(2k'+1)(2n+1)+l} = y_{l-2k'-1}^{q^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} v_{2(2k'+1)i+l}^{q^{2(n-i)+1}} v_{(2k'+1)(2i+1)+l}^{q^{2(n-i)}}, \; l = \overline{0,2k'}, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$

Si n est pair : on trouve

$$x_{(2k'+1)(2n)+l} = x_{l-2k'-1}^{p^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} u_{2(2k'+1)i+l}^{p^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} u_{(2k'+1)(2i+1)+l}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \; l = \overline{0,2k'}, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.19}$$

et

$$y_{(2k'+1)(2n)+l} = y_{l-2k'-1}^{q^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} v_{2(2k'+1)i+l}^{q^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} v_{(2k'+1)(2i+1)+l}^{q^{2(n-i)-1}} \Big), \; l = \overline{0,2k'}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Maintenant, par rapport à la parité du paramètre l, nous avons

(a) l est impair : Par (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{2[(2k'+1)n+k'+l+1]} = x_{2(l-k')}^{p^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]+1}^{p^{2(n-i)+1}} u_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{p^{2(n-i)}}, \; l = \overline{0,k'-1}$$

$$x_{2[(2k'+1)n+l]+1} = x_{2(l-k')}^{p^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]+1}^{p^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \; l = \overline{0,k'-1}$$

$$y_{2[(2k'+1)n+k'+l+1]} = y_{2(l-k')}^{q^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} v_{2((2k'+1)i+l)+1}^{q^{2(n-i)+1}} v_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{q^{2(n-i)}}, \; l = \overline{0,k'-1}$$

$$y_{2[(2k'+1)n+l]+1} = y_{2(l-k')}^{q^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} v_{2[(2k'+1)i+l]+1}^{q^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2[(2k'+1)i+k'+l+1]}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \; l = \overline{0,k'-1}$$

(b) l est pair : on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{2[(2k'+1)n+k'+l]+1} = x_{2(l-k')-1}^{p^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]}^{p^{2(n-i)+1}} u_{2((2k'+1)i+k'+l)+1}^{p^{2(n-i)}}, \; l = \overline{0,k'}$$

$$x_{2[(2k'+1)n+l]} = x_{2(l-k')-1}^{p^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} u_{2[(2k'+1)i+l]}^{p^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2[(2k'+1)i+k'+l]+1}^{p^{2(n-i)-1}} \Big), \; l = \overline{0,k'}$$

$$y_{2[(2k'+1)n+k'+l]+1} = y_{2(l-k')-1}^{q^{2(n+1)}} \prod_{i=0}^{n} v_{2[(2k'+1)i+l]}^{q^{2(n-i)+1}} v_{2[(2k'+1)i+k'+l]+1}^{q^{2(n-i)}}, \; l = \overline{0,k'}$$

$$y_{2[(2k'+1)n+l]} = y_{2(l-k')-1}^{q^{2n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n} v_{2[(2k'+1)i+l]}^{q^{2(n-i)}} \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2[(2k'+1)i+k'+l]+1}^{q^{2(n-i)-1}} \Big), \; l = \overline{0,k'}.$$

■

3.6 Le cas $p = q = 1$

Cette section est consacrée au système (3.1) dans le cas $p = q = 1$, i.e., le système suivant

$$x_{n+1} = x_{n-k}\frac{\alpha y_n + \beta y_{n-k-1}}{\gamma y_n + \delta y_{n-k-1}},\ y_{n+1} = y_{n-k}\frac{a x_n + b x_{n-k-1}}{c x_n + d x_{n-k-1}},\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.21}$$

avec x_{-i}, y_{-i} , $i = 0, ..., k+1$ et a, b, c, d, α, β, γ, δ sont positifs. Où nous étudions le comportement et la périodicité de ses solutions.

Le résultat suivant montre le comportement des solutions positives du système (3.21).

Théorème 3.6.1 *Pour toute solution positive* $(x_n, y_n)_{n\geq -k-1}$ *du système* (3.21)*, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right) < 1, \\ \\ +\infty, & \min\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right) > 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & \max\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) < 1, \\ \\ +\infty, & \min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) > 1. \end{cases}$$

Démonstration. Soient $(x_n, y_n)_{n\geq -k-1}$ une solution positive du système (3.21). Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - \frac{\alpha}{\gamma}x_{n-k} = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)y_{n-k-1}}{\gamma(\gamma y_n + \delta y_{n-k-1})}x_{n-k},$$
$$x_{n+1} - \frac{\beta}{\delta}x_{n-k} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)y_n}{\delta(\gamma y_n + \delta y_{n-k-1})}x_{n-k},$$
$$y_{n+1} - \frac{a}{c}y_{n-k} = \frac{(bc - ad)x_{n-k-1}}{c(c x_n + d x_{n-k-1})}y_{n-k}$$

et

$$y_{n+1} - \frac{b}{d}y_{n-k} = \frac{(ad - bc)x_n}{d(c x_n + d x_{n-k-1})}y_{n-k}.$$

Alors, il s'en suit que

$$\min\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)x_{n-k} < x_{n+1} < \max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)x_{n-k},\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.22}$$

$$\min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)y_{n-k} < y_{n+1} < \max\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)y_{n-k},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Soient

$$\theta := \max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right),\ \sigma := \min\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right),\ \rho := \max\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right),\ \tau := \min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right).$$

Maintenant, par les inégalités (3.22) et (3.23), on obtient pour tout $m = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}$,

$$x_{-k}(\sigma)^m < x_{(k+1)m-k} < x_{-k}(\theta)^m,$$

$$x_{-k+1}(\sigma)^m < x_{(k+1)m-(k-1)} < x_{-k+1}(\theta)^m,$$

$$\vdots$$

$$x_{-1}(\sigma)^m < x_{(k+1)m-1} < x_{-1}(\theta)^m,$$

$$x_0(\sigma)^m < x_{(k+1)m} < x_0(\theta)^m,$$

$$y_{-k}(\tau)^m < y_{(k+1)m-k} < y_{-k}(\rho)^m,$$

$$y_{-k+1}(\tau)^m < y_{(k+1)m-(k-1)} < y_{-k+1}(\rho)^m,$$

$$\vdots$$

$$y_{-1}(\tau)^m < y_{(k+1)m-1} < y_{-1}(\rho)^m,$$

$$y_0(\tau)^m < y_{(k+1)m} < y_0(\rho)^m.$$

Donc, pour $m = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\min_{i=\overline{0,k}}\left(x_{-i}\right)\min_m(\sigma)^m < x_n < \max_{i=\overline{0,k}}\left(x_{-i}\right)\max_m(\theta)^m,$$

$$\min_{i=\overline{0,k}}\left(y_{-i}\right)\min_m(\tau)^m < y_n < \max_{i=\overline{0,k}}\left(y_{-i}\right)\max_m(\rho)^m.$$

Ce qui est équivaut à,

$$\min_{i=\overline{0,k}}\left(x_{-i}\right)\min_m\left(\min\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)\right)^m < x_n < \max_{i=\overline{0,k}}\left(x_{-i}\right)\max_m\left(\max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)\right)^m,$$

$$\min_{i=\overline{0,k}}\left(y_{-i}\right)\min_m\left(\min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)\right)^m < v_n < \max_{i=\overline{0,k}}\left(y_{-i}\right)\max_m\left(\max\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)\right)^m.$$

On obtient le résultat désiré par passage à la limite dans ces inégalités. ■

Dans le théorème suivant, nous donnons des conditions qui rendent les solutions du système (3.21) périodiques de période $k + 1$.

Théorème 3.6.2 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution* $(x_n, y_n)_{n\geq-(k+1)}$ *de* (3.21) *soit péridique de période* $k + 1$ *est*

$$(x_0, y_0) = (x_{-(k+1)}, y_{-(k+1)}),\ a + b = c + d \text{ et } \alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Démonstration. Soit $(x_n, y_n)_{n\geq -(k+1)}$ une solution périodique de période $k+1$ du système (3.21). Alors nous avons

$$(x_0, y_0) = (x_{-(k+1)} y_{-(k+1)}),\ x_1 = x_{-k} = x_{-k}\frac{\alpha y_0 + \beta y_{-(k+1)}}{\gamma y_0 + \delta y_{-(k+1)}} \text{ et } y_1 = y_{-k}\frac{a x_0 + b x_{-(k+1)}}{c x_0 + d x_{-(k+1)}}.$$

D'où, on trouve

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = 1 \text{ et } \frac{a+b}{c+d} = 1.$$

Maintenant, on suppose que

$$(x_0, y_0) = (x_{-(k+1)}, y_{-(k+1)}),\ a + b = c + d \text{ et } \alpha + \beta = \gamma + \delta,$$

donc,

$$x_1 = x_{-k}\frac{\alpha y_0 + \beta y_{-(k+1)}}{\gamma y_0 + \delta y_{-(k+1)}} \text{ et } y_1 = y_{-k}\frac{a x_0 + b x_{-(k+1)}}{c x_0 + d x_{-(k+1)}},$$

alors, on obtient $(x_1, y_1) = (x_{-k}, y_{-k})$.

En suivant la procédure, nous obtenons

$$x_2 = x_{1-k}\frac{\alpha y_1 + \beta y_{-k}}{\gamma y_1 + \delta y_{-k}} \text{ et } y_2 = y_{1-k}\frac{a x_1 + b x_{-k}}{c x_1 + d x_{-k}},$$

donc, $x_2 = x_{-k+1}$ et $y_2 = y_{-k+1}$.

Par induction on conclut que la solution $(x_n, y_n)_{n\geq -(k+1)}$ est périodique de période $k+1$. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons étudié trois systèmes d'équations aux différences. Dans le premier chapitre, nous avons montré quelques théorèmes de convergence pour deux systèmes définies par des fonctions homogènes de degré zéro.

Cependant le deuxième chapitre est consacré au comportement global des solutions des deux systèmes mentionnés dans le chapitre précédent.

Enfin, dans le dernier chapitre, on détermine la forme explicite des solutions d'un système d'équations aux différences d'ordre $k + 2$.

Comme perspective nous essaierons de poursuivre les travaux menés dans cette thèse. Nous proposerons des systèmes qui sont des généralisations des sysèmes (1.4), (1.5) et (3.1), nous étudierons le comportement global des solutions et chercherons les formes explicites des solutions lorsqu'il est possible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. E. ABDELRAHMAN, *On the difference equation* $z_{m+1} = f(z_m, z_{m-1}, ..., z_{m-k})$, *J. Taibah Univ. Sci.*, **13(1)**, (2019), 1014-1021.

[2] Y. AKROUR, M. KARA, N. TOUAFEK AND YAZLIK, Y., *Solutions formulas for some general systems of difference equations*, Miskolc Math. Notes, **22(2)**, (2021), 529-555.

[3] A. M. AMLEH, E. A. GROVE, G. LADAS AND D. A. GEORGIOU, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, *J. Math. Anal. Appl.*, **233**, (1999), 790-798.

[4] K. C. BORDER,*Euler's Theorem for Homogeneous Functions*. `https://mathproblems123.files.wordpress.com/2011/02/eulerhomogeneity.pdf`

[5] M. BOULOUH, N. TOUAFEK AND D. T. TOLLU, *On the behavior of the solutions of an abstract system of difference equations*, J. Appl. Math. Comput., **68**, (2022), 2937-2969. https ://doi.org/10.1007/s12190-021-01641-7.

[6] M. BOULOUH, N. TOUAFEK AND D. T. TOLLU, *On a system of difference equations defined by the product of separable homogeneous functions*, Math. Slovaca, **73**, (2023), No. 5, 1243-1260.

[7] I. DEKKAR, N. TOUAFEK AND Y. YAZLIK, *Global stability of a third-order nonlinear system of difference equations with period-two coefficients*, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, **111**, (2017), 325-347.

[8] R. DEVAULT AND S. W. SCULTZ, *On the dynamics of* $x_{n+1} = \frac{ax_n+bx_{n-1}}{cx_n+dx_{n-2}}$, *Commun. Appl. Nonlinear Anal.*, **12**, (2005), 35-40.

[9] E. M. ELABBASY AND E. M. ELSAYED, *On the global attractivity of difference equation of higher order*, Carpat. J. Math., **24(2)**, (2008), 45-53.

[10] E. M. ELABBASY, H. EL-METWALLY AND E. M. ELSAYED, *On the difference equation* $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-l}+\beta x_{n-k}}{Ax_{n-l}+Bx_{n-k}}$, Acta. Math. Vietnam., **33(1)**, (2008), 85-94.

[11] E. M. ELABBASY AND E. M. ELSAYED, *Dynamics of a rational difference equation*, Chin. Ann. Math. Ser. B, **30(2)**, (2009), 187-198.

[12] S. ELAYDI, *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3rd edition, Springer, New York, 2005.

[13] H. M. EL-OWAIDY, A. M. AHMED AND M. S. MOUSA, *On asymptotic behaviour of the difference equation* $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$, *Appl. Math. Comput.*, **147**(1), (2004), 163-167.

[14] E. M. ELSAYED, *New method to obtain periodic solutions of period two and three of a rational difference equation*, *Nonlinear Dyn.*, **79**, (2015), 241-250.

[15] E. A. GROVE AND G. LADAS, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Advances in Discrete Mathematics and Applications Volume 4, Chapman and Hall/Crc, Boca Raton, 2005.

[16] M. GÜMÜŞ, *The global asymptotic stability of a system of difference equations*, *J. Dif. Equ. Appl.*, **24(2)**, (2018), 1-16.

[17] M. GÜMÜŞ AND R. ABO-ZEID, *An explicit formula and forbidden set for a higher order difference equation*, J. Appl. Math. Comput., **63**, (2020), 133-142.

[18] N. HADDAD, N. TOUAFEK AND . F. T. RABAGO, *Solution form of a higher-order system of difference equations and dynamical behavior of its special case*, *Math. Methods Appl. Sci.*, **40(10)**, (2017), 3599-3607.

[19] Y. HALIM, N. TOUAFEK AND Y. YAZLIK, *Dynamic behavior of a second-order nonlinearrational difference equation*, Turk. J. Math., **39**, (2015), 1004-1018.

[20] T. F. IBRAHIM AND N. TOUAFEK, *On a third order rational difference equation with variable coeffitients*, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, **20**, (2013), 251-264.

[21] M. KARA, Y. YAZLIK AND D. T. TOLLU, *Solvability of a system of higher order nonlinear difference equations*, Hacet. J. Math. Stat., **49(5)**, (2020),1566-1593.

[22] M. KARA AND Y. YAZLIK, *Solvable three-dimensional system of higher-order nonlinear difference equations*, Filomat, 25 , **36(10)**, (2022), 3449-3469.

[23] M. KARA AND Y. YAZLIK, *On the solutions of three-dimensional system of difference equations via recursive relations of order two and applications*, J. Appl. Anal. Comput., **12(2)**, (2022), 736-753.

[24] V. L. KOCIC AND G. LADAS, *Global Behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publisher, Vol. 256, Dordrecht, (1993).

[25] M. R. S. KULNOVIĆ, G. LADAS AND W. S. SIZER, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n+\beta x_{n-1}}{\gamma x_n+\delta x_{n-1}}$, Math. Sci. Res. Hot-Line. **2(5)**, (1998), 1-16.

[26] M. R. S. KULENOVIĆ AND G. LADAS, *Dynamics of second order rational difference equations*, Chapman & Hall/Crc, 2001.

[27] A. S. KURBANLI, C. CINAR AND I. YALCINKAYA, *On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations* $x_{n+1} = x_{n-1}/(y_n x_{n+1} + 1)$, $y_{n+1} = y_{n-1}/(x_n y_{n+1} + 1)$, *Math. Comput. Modelling*, **53**, (2011), 1261-1267.

[28] L. C. MCGRATH AND C. TEIXEIRA, *Existence and behavior of solutions of the rational equation* $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}+bx_n}{cx_{n-1}+dx_n}x_n$, Rocky Mountain J. Math., **36**, (2006), 649-674.

[29] O. MOAAZ, *Comment on new method to obtain periodic solutions of period two and three of a rational difference equation* [Nonlinear Dyn 79 :241-250], *Nonlinear Dyn.*, **88**, (2017), 1043-1049.

[30] O. MOAAZ, D. CHALISHAJAR AND O. BAZIGHIFAN, *Some qualitative behavior of solutions of general class of difference equations*, *Mathematics*, **7**, (2019), Article 585, 12 pages.

[31] O. OZKAN AND A. S. KURBANLI, *On a system of difference equations*, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, **2013**, (2013), Article ID 970316, 7 pages.

[32] G. PAPASCHINOPOULOS, C. J. SCHINAS AND G. STEFANIDOU, *On the nonautonomous difference equation* $x_{n+1} = A_n + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}$, *Appl. Math. Comput.*, **217**(12), (2011), 5573-5580.

[33] M. SALEH AND S. ABU-BAHA, *Dynamics of a higher order rational difference equation*, *Appl. Math. Comput.*, **181**(1), (2006), 84-102.

[34] S. STEVIĆ, *Representation of solutions of bilinear difference equations in terms of generalized Fibonacci sequences*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **67**, (2014), 1-15.

[35] N. TASKARA, D. T. TOLLU, N. TOUAFEK AND Y. YAZLIK, *A solvable system of difference equations*, *Commun. Korean Math. Soc.*, **35(1)**, (2020), 301-319.

[36] D. T. TOLLU, Y. YAZLIK AND N. TASKARA, *On a solvable nonlinear difference equation of higher order*, Turk. J. Math., **42**, (2018), 1765-1778.

[37] D. T. TOLLU AND I. YALCINKAYA, *Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order three*, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Ser. A1, Math. Stat.*, **68(1)**, (2019), 1-16.

[38] N. TOUAFEK, *On a second order rational difference equation*, *Hacet. J. Math. Stat.*, **41**, (2012), 867-874.

[39] N. TOUAFEK AND Y. HALIM, *Global attractivity of a rational difference equation*, Math. Sci. Lett., **2(3)**, (2013), 161-165.

[40] N. TOUAFEK AND E. M. ELSAYED , *On a third order rational system of difference equations*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza. Iasi. Mat., **61(2)**, (2015), 36766380.

[41] N. TOUAFEK, *On a general system of difference equations defined by homogeneous functions*, *Math. Slovaca*, **71(3)**, (2021), 697-720.

[42] N. TOUAFEK, D. T. TOLLU AND Y. AKROUR, *On a general homogeneous three-dimensional system of difference equations*, Electron. Res. Arch., **29(5)**, (2021), 2841-2876.

[43] C. WANG, X. JING, X. HU AND R. LI, *On the periodicity of a max-type rational difference equation*, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **10(9)**, (2017), 4648-4661.

[44] I. YALCINKAYA , C. CINAR AND D. SIMSEK, *Global asymptotic stability of a system of difference equations*, *Appl. Anal.*, **87(6)**, (2008), 677-687.

[45] Y. YAZLIK AND M. KARA, *On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients*, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1. Math. Stat.*, **68**, (2019), 1675-1693.

[46] Y. YAZLIK, D. T. TOLLU AND N. TASKARA, *On the solutions of a three-dimensional system of difference equations*, *Kuwait J. Sci.*, **43(1)**, (2016), 95-111.