

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

M/AUT.TS  
2011/03



FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**MÉMOIRE**

Pour l'obtention du diplôme de Master en Automatique

Option : Automatique et Traitement du Signal

Présenté par :

*Mr. LOUNIS Nadjib*

02  
02  
جامعة جيجل  
مكتبة كلية العلوم والتكنولوجيا  
مجلد رقم 782



**Commande par backstepping adaptative  
avec et sans observateur des robots  
manipulateurs**

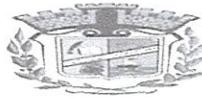
Soutenue publiquement le 02/07/2011 à l'amphi F devant le jury composé de :

Melle. OUAAR Mounia	Maître assistante A	Président
Mr. OUCIEF Nabil	Maître assistant A	Examineur
Mr. BOUAKRIF Fareh	Maître de conférences A	Rapporteur

Promotion 2010 /2011

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL



FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**MÉMOIRE**

Pour l'obtention du diplôme de Master en Automatique

Option : Automatique et Traitement du Signal

Présenté par :

*Mr. LOUNIS Nadjib*

**Commande par backstepping adaptative  
avec et sans observateur des robots  
manipulateurs**

Soutenue publiquement le 02/07/2011 à l'amphi F devant le jury composé de :

<b>Melle. OUAAR Mounia</b>	Maître assistante A	Président
<b>Mr. OUCIEF Nabil</b>	Maître assistant A	Examineur
<b>Mr. BOUAKRIF Fareh</b>	Maître de conférences A	Rapporteur

Promotion 2010 /2011

## *DEDICACE*

*JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL A :*

*MES PARENTS*

*MES FRERES*

*TOUS MES AMIS*

*LOUNIS  
NADJIB*

---

## *Remerciements*

*Nous remercions dieu notre créateur, de nous avoir donné la force  
d'accomplir ce travail.*

*je tient d'abord à remercier le chef département d'automatique  
MR BOUHALI OMAR. Je remercie aussi mon jury qui ma fait  
l'honneur de présider et d'examiner ce modeste travail, tous les  
enseignants d'AUTOMATIQUE qui nous ont enrichis de  
connaissances et de savoir.*

*J'exprime Toutes mes remerciements et mes gratitudes et les appréciations à  
mon encadreur MR FARAH BOUAKRIF pour ces conseils précieux Tout  
au long de ce travail.*

---

# Table des matières

<i>Introduction générale</i> .....	01
------------------------------------	----

## *Chapitre 1*

### *Notions générales sur la robotique*

1.1. Introduction.....	03
1.2. Constituants mécaniques des robots.....	05
1.2.1. Structure ouverte.....	05
1.2.2. Structure fermée.....	06
1.3. Morphologie du robot.....	07
1.3.1. Porteur.....	07
1.3.2. Poignet.....	07
1.4. Classification structurelle des robots manipulateurs.....	08
1.5. Définitions générales.....	08
1.5.1. Articulations.....	08
1.5.2. Degré de liberté.....	10
1.5.3. Espace articulaire.....	10
1.5.4. Espace opérationnel.....	10
1.6. Différentes modélisation d'un robot manipulateur.....	10
1.7. Modélisation dynamique des robots manipulateurs.....	11
1.8. Conclusion.....	12

## *Chapitre 2*

### *Commande par backstepping*

2.1. Introduction.....	13
2.2. Notions de bases.....	13
2.2.1. Systèmes non linéaire.....	14

---

2.2.2. Equilibre.....	14
2.2.3. Plan de phase .....	15
2.2.4. Stabilité.....	15
2.3. Méthode de Lyapunov.....	16
2.3.1. Première méthode de Lyapunov.....	17
2.3.2. Deuxième méthode de Lyapunov.....	17
2.4. Commande par backstepping.....	19
2.4.1. Introduction au backstepping.....	19
2.4.2. Synthèse d'une loi de commande par backstepping.....	20
2.4.2.1. Approche non adaptative.....	20
2.4.2.1.1. Exemple d'un système du deuxième ordre.....	20
2.4.2.1.2. Exemple d'un bras manipulateur à un degré de liberté.....	24
2.4.2.1.3. Résultats de simulation.....	27
2.4.2.2. Approche adaptative.....	29
2.4.2.2.1. Exemple d'un système du deuxième ordre.....	29
2.4.2.2.2. Exemple d'un bras manipulateur à un degré de liberté.....	32
2.4.2.2.3. Résultats de simulation .....	34
2.4.2.3. Cas des systèmes d'ordre $n$ .....	36
2.5. Commande par backstepping d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté.....	39
2.5.1. Modèle dynamique.....	39
2.5.2. Représentation d'état.....	39
2.5.3. Description de la méthode.....	41
2.5.3.1. Cas non adaptative.....	41
2.5.3.2. Cas adaptative.....	42
2.5.4. Résultats de simulation.....	44
2.5.4.1. Cas non adaptative.....	44
2.5.4.2. Cas adaptative.....	46
2.6. Conclusion.....	49

---

---

## Chapitre 3

### *Commande par backstepping adaptative avec observateur*

#### *appliquée sur un robot manipulateur*

3.1. Introduction.....	50
3.2. Commande par backstepping adaptative avec observateur.....	51
3.3. Observateur.....	53
3.4. Application de la commande par backstepping adaptative avec observateur sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté.....	54
3.4.1. Modèle et propriétés.....	54
3.4.2. Backstepping adaptative avec observateur.....	54
3.4.3. Etude de la stabilité.....	56
3.4.4. Résultats de simulation.....	57
3.4.4.1. Le modèle.....	57
3.4.4.2. Résultats de Simulation.....	58
3.5. Conclusion.....	63

## Chapitre 4

### *Commande par backstepping du robot PUMA 560*

4.1. Introduction.....	64
4.2. Présentation du robot PUMA 560.....	64
4.2.1. Modèle dynamique du robot PUMA 560.....	65
4.3. Commande par backstepping du robot PUMA560.....	68
4.3.1. Représentation d'état.....	68
4.3.2. Description de la méthode.....	69
4.3.3. Résultats de simulation.....	70
4.4. Conclusion.....	72
<i>Conclusion générale.....</i>	<i>73</i>

---

# Table des figures

## *Chapitre 1 : Notions générales sur la robotique*

Figure 1.1 : Le Robot 'ABB IRB6600'. Photo gracieuseté d'ABB.....	04
Figure 1.2 : structure ouverte simple.....	05
Figure 1.3 : structure arborescente.....	06
Figure 1.4 : structure fermée.....	06
Figure 1.5 : Structure fermée simple.....	06
Figure 1.6 : Robot parallèle.....	06
Figure 1.7 : Morphologie des robots manipulateurs.....	07
Figure 1.8 : Liaisons. Paires cinématiques.....	09

## *Chapitre 2 : Commande par backstepping*

Figure 2.1 : Trajectoire d'un système dans le plan de phase.....	15
Figure 2.2: Type de stabilité selon Lyapunov. ....	16
Figure 2.3: Contours à énergie constante dans le plan de phase.....	18
Figure 2.4 : Système non linéaire du deuxième ordre avec une seule fonction non linéaire...21	
Figure 2.5 : Stabilisation du premier sous-système.....	22
Figure 2.6 : Stabilisation du deuxième sous-système.....	23
Figure 2.7: Système articulé à un degré de liberté de masse localisée $m$ . Son mouvement est commandé par le couple $u$ .....	24
Figure 2.8 : Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur.....	27
Figure 2.9 : Résultat de l'erreur de vitesse et la commande d'entrée.....	28
Figure 2.10: Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur.....	28
Figure 2.11 : Résultat de l'erreur de vitesse et la commande d'entrée.....	29
Figure 2.12 : Système en boucle fermée.....	31
Figure 2.13 : Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur.....	34
Figure 2.14 : Résultat de l'erreur de la vitesse et la commande d'entrée.....	34
Figure 2.15 : Paramètre d'estimation $\hat{\theta}$ .....	35

Figure 2.16 : Paramètre d'estimation $\hat{\theta}$ pour le cas de la poursuite.....	35
Figure 2.17 : Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur.....	36
Figure 2.18 : Résultat de l'erreur de la vitesse et la commande d'entrée.....	36
Figure 2.19 : Procédure de la technique. Chaque étape génère l'erreur $z_i$ la fonction stabilisante $\alpha_i$ et une nouvelle estimation $\hat{\theta}_i$ du vecteur paramétrique.....	37
Figure.2.20 : Commande adaptative du système bouclé.....	44
Figure 2.21 : Trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations.....	45
Figure 2.22 : Erreurs de suivi de trajectoires désirées pour les deux articulations.....	45
Figure 2.23: Couples d'entrée pour les deux articulations.....	46
Figure 2.24 : Trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations.....	47
Figure 2.25 : Erreurs de suivi de trajectoires désirées pour les deux articulations.....	47
Figure 2.26: Couples d'entrée pour les deux articulations.....	48
Figure 2.27: Paramètres estimés.....	48
<i>Chapitre 3 : Commande par backstepping adaptative avec observateur appliquée sur un robot manipulateur</i>	
Figure 3.1 : Schéma de principe de l'observateur.....	51
Figure 3.2 : Schéma de principe de la commande par backstepping non adaptative avec observateur.....	51
Figure 3.3 : Schéma de principe de la commande par backstepping adaptative avec observateur.....	52
Figure 3.4 : Diagramme bloc de commande avec observateur.....	56
Figure 3.5 : Suivi de la trajectoire désirée pour les deux articulations.....	59
Figure 3.6 : Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour les deux articulations.....	59
Figure 3.7 : Trajectoire désirée et les erreurs pour les deux articulations.....	60
Figure 3.8 : Vecteur $x_1$ et $\hat{x}_1$ pour les deux articulations.....	60
Figure 3.9 : Vecteur $x_1$ et $\hat{x}_1$ pour les deux articulations pour le cas (b).....	61
Figure 3.10: Paramètres estimés $m_2$ .....	61
Figure 3.11 : Erreur entre le vecteur $x_1$ et $\hat{x}_1$ pour les deux articulations.....	62
Figure 3.12: Couple d'entrée pour les deux articulations.....	62



*Chapitre 4 : Commande par backstepping du robot PUMA 560*

Figure 4.1 : Présentation du robot PUMA 560.....	65
Figure 4.3 : Trajectoires réelles et désirées pour les trois articulations.....	70
Figure 4.2 : Erreurs de suivi de trajectoires désirées pour les trois articulations.....	71
Figure 4.4: Couples d'entrée pour les trois articulations.....	71

---

## Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Poids des différentes liaisons.....	66
Tableau 4.2 : Paramètres d'inertie.....	67

# Introduction générale

L'élaboration d'une loi de commande pour un procédé physique nécessite la prise en compte de certains objectifs tels que le suivi de la consigne, le rejet des perturbations, une marge de robustesse vis-à-vis de certains paramètres de procédé à piloter,...etc. Dans la littérature, on trouve plusieurs structures de commande. Chacune d'elle possède son application et également des propriétés (cas linéaire, cas non linéaire, procédé stable, consigne d'un type donné,...etc.).

En effet, dans la conception des commandes des systèmes non linéaires incertains, la théorie de la stabilité joue un rôle important. D'où, il est crucial d'avoir un système stable, puisqu'un système de commande instable est inutile. Le critère de stabilité de Lyapunov est une procédure générale et utile pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires. La recherche d'une loi de commande garantissant la stabilité d'un système asservi peut se faire à l'aide des fonctions de Lyapunov.

Bien que, les théorèmes de Lyapunov sont des outils importants dans la théorie de commande non linéaire, leur utilisation a été entravée par les difficultés de trouver une fonction de Lyapunov pour un système donné. La méthode de trouver une telle fonction a été souvent laissée à l'imagination et à l'expérience du concepteur [1]. En outre, plus la dynamique non linéaire de système est plus compliquée, plus cette fonction sera difficile à élaborer.

Au cours des deux dernières décennies, beaucoup de techniques de commande ont été développées pour les systèmes non linéaires, telle que la commande par backstepping. Cette méthode est une procédure récursive utilisant la théorie de Lyapunov dans la recherche de la loi de commande et dans l'étude de la stabilité. Dans la technique du backstepping, il s'agit de choisir une fonction de l'état comme étant l'entrée d'un sous système et de procéder de la même manière récursivement jusqu'à obtenir la commande à appliquer au système global. Cette procédure de conception comme son nom l'indique en anglais "backstepping", veut dire marche arrière ou étape arrière, puisque la procédure commence à la sortie du système et fait des pas en arrière à travers des intégrateurs du système en sélectionnant les valeurs désirées des composantes de l'état jusqu'à ce que l'entrée actuelle de la commande soit atteinte.

Dans la technique du backstepping, il s'agit de trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en montrant la stabilité.

Parmi les problèmes rencontrés dans le backstepping, la difficulté de déterminer les matrices de régression et le nombre des paramètres inconnus augmente avec chaque étape du processus de développement de la méthode du backstepping.

Dans ce travail, cette technique de commande par backstepping est appliquée à un robot manipulateur à deux degrés de liberté. De plus, lorsque le robot possède des paramètres variant dans le temps, cette approche est applicable à ce genre de robots. Mais cette fois ci dans la loi de commande on trouve une loi d'adaptation, et on obtient la commande par backstepping adaptative. Lorsque le robot ne possède pas des tachymètres (pour mesurer les vitesses articulaires), il est important d'ajouter un observateur de vitesse avec la loi de commande par backstepping pour commander ce type de robots. Ce qui est fait dans une partie de ce travail.

L'application de commande par backstepping est faite au robot PUMA 560 dans la dernière partie de ce travail.

Outre l'introduction et la conclusion générales, ce mémoire est organisé en quatre chapitres répartis comme suit :

- Le premier chapitre est dédié aux quelques notions générales sur la robotique et le modèle utilisé pour décrire le mouvement des articulations d'un bras manipulateur.

- Le deuxième chapitre est consacré à la présentation théorique de la méthode du backstepping et présente une approche générale pour la conception d'une commande par backstepping adaptative pour un robot manipulateur à deux degrés de liberté en utilisant la technique du backstepping non adaptative et adaptative.

- Le troisième chapitre portera sur la description de la commande par backstepping adaptative avec observateur appliquée aussi sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté.

- Le quatrième chapitre est consacré à l'application de la commande par backstepping au robot PUMA 560.

# Chapitre 1

## Notions générales sur la robotique

### 1.1. Introduction

La robotique est un domaine relativement jeune de la technologie moderne qui transcende les frontières de l'ingénierie traditionnelle. Comprendre la complexité des robots et leurs applications nécessite des connaissances en génie électrique, génie mécanique, systèmes et génie industriel, informatique, économie, et en mathématiques. De nouvelles disciplines de l'ingénierie, tels que l'ingénierie de fabrication, l'ingénierie d'applications et d'ingénierie des connaissances ont vu le jour pour faire face à la complexité du domaine de la robotique et l'automatisation industrielle.

Le terme 'robot' a été introduit par le dramaturge tchèque 'Karel Capek' en 1920 dans son jeu « Rossum's Universal Robots », le mot 'robota' étant le mot tchèque pour le travail. Depuis ce temps le terme a été appliqué à une grande variété de dispositifs mécaniques, tels que les téléopérateurs, véhicules sous-marins, Land Rover autonomes,.....etc. Pratiquement tout ce qui fonctionne avec un certain degré d'autonomie, le plus souvent sous contrôle informatique a été à un certain point appelle un robot. Dans ce texte, le terme robot se traduira par un ordinateur contrôlé manipulateur industriel du type représenté à la figure (1.1).



**Figure 1.1 :** *Le Robot 'ABB IRB6600'. Photo gracieuseté d'ABB.*

Ce type de robot est essentiellement un bras mécanique d'exploitation sous contrôle informatique. Ces dispositifs, bien que loin des robots de science-fiction, sont néanmoins extrêmement complexe des systèmes électromécaniques dont la description analytique exige des méthodes de pointe, présentant de nombreux problèmes de recherche stimulant et intéressant.

Un robot est un assemblage de pièces mécaniques et de composants électroniques. C'est un manipulateur reprogrammable multifonctionnel inventer par l'homme, conçu pour déplacer des matériaux, pièces, outils ou des dispositifs spécialisés grâce au variable mouvements programmés pour l'exécution d'une variété des tâches.

Les robots sont en train de révolutionner l'industrie moderne. Ils s'avèrent particulièrement précieux dans de nombreuses applications industrielles, en particulier la manutention, la peinture, la soudure, le contrôle et l'assemblage mécanique. Les robots manipulateurs possèdent différentes propriétés qui font que leur commande pose un problème difficile à résoudre. La plupart de ces robots sont caractérisées par un comportement hautement non linéaire qui ne permet pas une utilisation fiable par les méthodes classiques d'analyses et de mise en œuvre des asservissements [2].

Dans ce chapitre nous présentons la morphologie du robot, constituants mécaniques et différentes modélisations d'un robot manipulateur.

## 1.2. Constituants mécaniques des robots

Un robot manipulateur est constitué par deux sous-ensemble distincts, un (ou plusieurs) organes terminaux et une structure mécanique articulée :

Sous le terme organe terminale, on regroupe tout dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs de peinture.....). Il s'agit donc d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, c'est-à-dire qui est équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes. Il peut aussi être monofonctionnel, mais interchangeables.

Le rôle de la structure mécanique articulée est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps généralement rigides, assemblés par des articulations.

Les chaînes cinématiques peuvent être classées en deux catégories :

- ✓ Des structures ouvertes.
- ✓ Des structures fermées.

### 1.2.1 Structure ouverte

- Structure ouverte simple contiennent une seule chaîne cinématique, les robots manipulateurs à chaîne ouverte simple sont les plus nombreux.

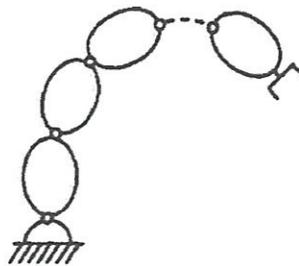


Figure 1.2 : structure ouverte simple

- Structure arborescentes c'est une structure contient plusieurs chaînes cinématiques non bouclé, et chaque chaîne portant un organe terminal différent.

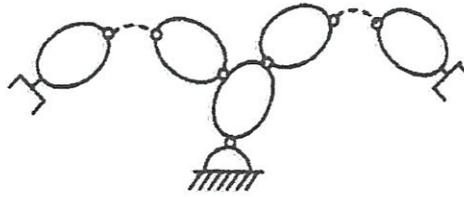


Figure 1.3 : *structure arborescente*

### 1.2.2 Structure fermée

Les structures fermées contenant des boucles cinématiques ont pour avantage d'augmenter la rigidité, ainsi que la précision, en outre, elles permettent d'avoir un meilleur équilibrage statique. En générale, on distingue deux classes de boucles fermées

- Les chaînes cinématiques composées ou complexes, dont au moins l'un des corps a plus de deux articulations.
- Les chaînes cinématiques élémentaires ou simples, dont tous les corps ont plus de deux articulations.

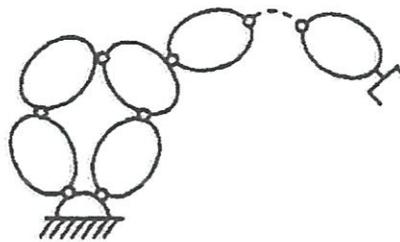


Figure 1.4 : *structure fermée*

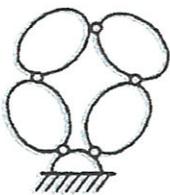


Figure 1.5 : *Structure fermée simple*

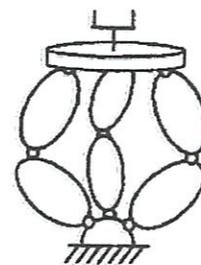


Figure 1.6 : *Robot parallèle*

La figure (1.6) montre une génération différente de robot (les robots parallèles), dans lesquels l'organe terminal est relié à la base du mécanisme par plusieurs chaînes parallèles.

Cette structure, assure une plus grande rigidité et donc plus grande précision [3].

### 1.3. Morphologie du robot

Les robots manipulateurs sont composés de deux blocs, le premier appelé porteur et le deuxième appelé poignet.

#### 1.3.1. Porteur

Il est constitué de trois degrés de liberté à partir du bâti, si  $P$  est un point et  $R_0$  un repère lié au bâti, le rôle du porteur est de fixer la position de  $P$  dans  $R_0$ .

#### 1.3.2. Poignet

Le poignet est destiné à l'orientation de la pince ou de l'outil porté par le robot. La structure la plus courante, est constituée de trois articulations pivot en série et à axes concourants et orthogonaux deux à deux. L'ensemble est équivalent à une liaison sphérique, elle permet donc bien d'obtenir une orientation quelconque de la pince, sur quelques robots, les axes des trois liaisons pivot ne sont pas concourants.

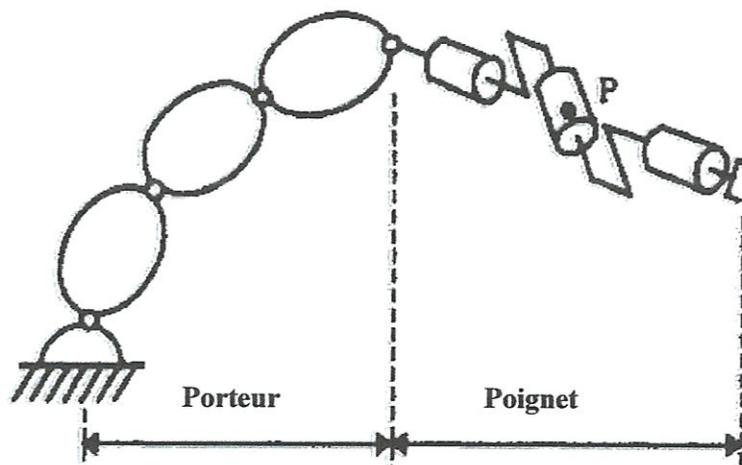


Figure 1.7 : Morphologie des robots manipulateurs

## 1.4. Classification structurelle des robots manipulateurs

Il y a différentes façons de classifier les robots. On peut, par exemple. Différencier les robots leur source d'énergie. On parlera de robots hydrauliques versus électrique ou encore pneumatiques. D'autre fois, on distinguera des robots fixes versus des robots mobiles.

Mais souvent, on classe structurellement les robots en fonction des systèmes de coordonnées dans lesquels ils travaillent :

**Cartésien** : trois axes de translation.

**Cylindrique** : deux axes de translation, un axe de rotation.

**Sphérique** : un axe de translation, deux axes de rotations.

**Articulé** : trois axes de rotations.

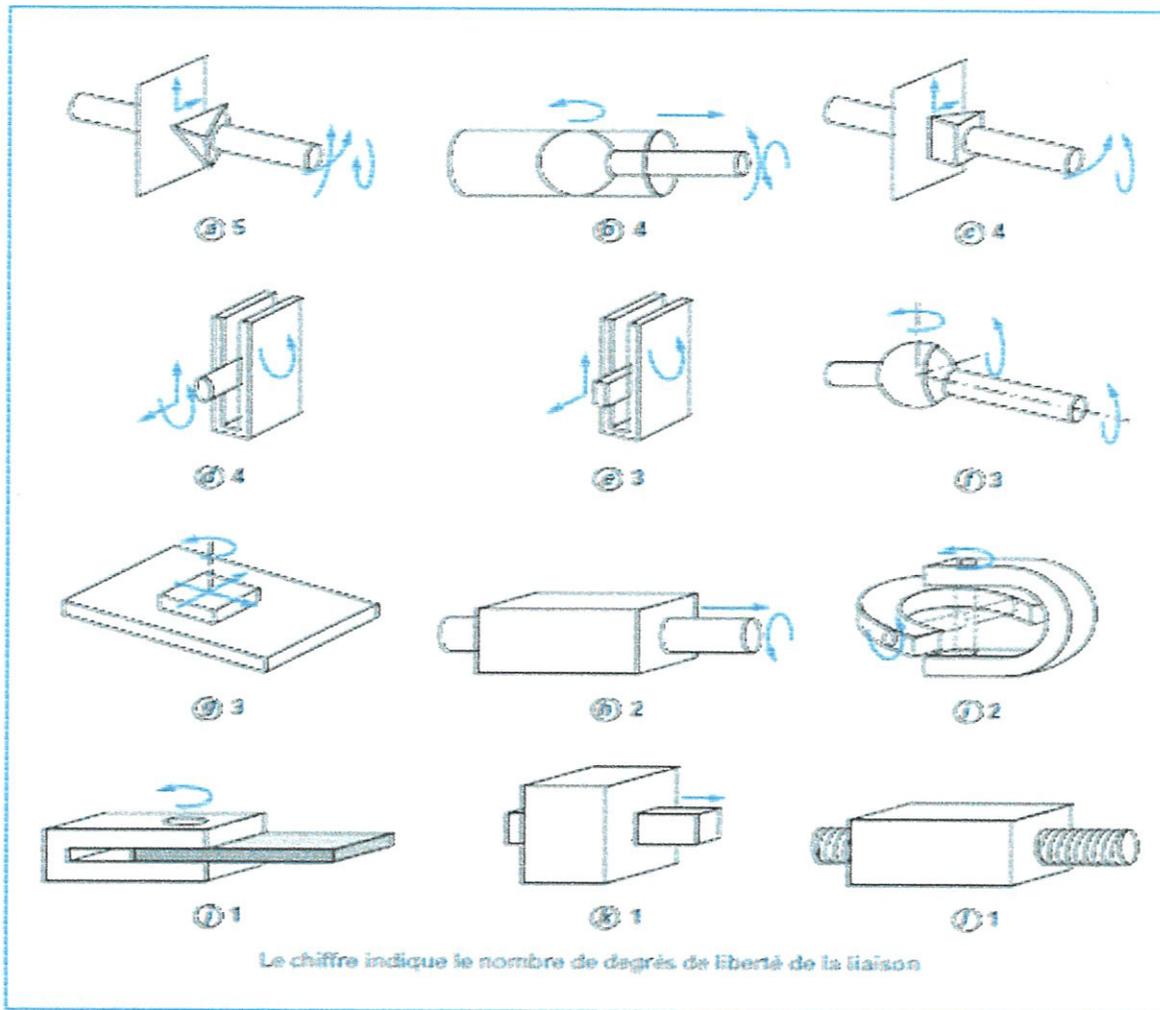
Le système de coordonnées dans lequel il faut travailler dépend souvent de l'application à mettre en œuvre. C'est ainsi qu'un robot cylindrique convient bien à une pièce d'estampage, tandis qu'un robot articulé pourra effectuer des soudures à divers endroits invisible depuis la base du robot.

On rencontre dans la littérature anglo-saxonne une notation abrégée pour décrire le type et le nombre d'articulation d'un robot, en désignant une translation (sliding) par la lettre S et une rotation par la lettre R, un robot articulé se désignerait sous le signe « RRR », tandis qu'un cylindre pourrait répondre à l'appellation « SSR » [3] [4].

## 1.5. Définitions générales

### 1.5.1. Articulations

On admettra qu'un corps solide rigide isolé dans l'espace à trois dimensions possède Six degrés de liberté, trois composantes d'un vecteur de position et trois composantes d'orientation. Les divers formalismes pratiques utilisés pour quantifier ces degrés de liberté sont précisés au paragraphe (1.5.2). Quand on relie un tel corps à un autre, au moyen de « Liaisons » mécaniques, il perd de sa mobilité par rapport au second. On peut imaginer diverses combinaisons de translations et de rotations, dont quelques-unes sont représentées sur la figure (1.8).



**Figure 1.8 :** Liaisons. Paires cinématiques

Dans l'assemblage des robots manipulateurs, les liaisons (articulations) les plus courantes sont :

◆ **Articulation rotationnelle (R)**

Il s'agit d'une articulation de type pivot réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui est commun entre eux. La simulation relative entre deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe (voire la figure (1.8-j)).

◆ **Articulation prismatique (P)**

Il s'agit d'une articulation de glissière réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe (voire la figure (1.8-k)) [5].

### 1.5.2. Degré de liberté

Le degré de liberté d'un robot manipulateur est la somme des degrés de liberté de ses articulations. D'où le degré de liberté d'une articulation est le nombre de mouvement du corps qui est en aval par rapport au corps qui est en amont.

### 1.5.3. Espace articulaire

L'espace articulaire d'un robot est celui dans lequel est représentée la situation de tous ses corps. La solution la plus simple consiste à utiliser les variables ou coordonnées articulaires.

Sa dimension  $N$  est égale au nombre des variables articulaires indépendantes et correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique.

### 1.5.4. Espace opérationnel

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (on considère donc autant d'espace opérationnel qu'il y a des organes terminaux). Sa dimension est égale au nombre des paramètres indépendants nécessaire pour décrire la situation de l'organe terminal dans l'espace. Dans l'espace tridimensionnel ce nombre est de six (trois point pour placer un point du corps en un point quelconque de cet espace et trois pour orienter ce corps de façon quelconque) [3] [5]

## 1.6. Différentes modélisations d'un robot manipulateur

Un robot manipulateur, quelque soit la fonction qui lui attribuée, doit positionner et orienter son organe terminal dans l'espace opérationnel, car le concepteur perçoit de façon naturelle, par la vision, la tâche à accomplir dans l'espace. La difficulté de la commande provient de fait que les actionneurs, dont est doté le robot manipulateur, n'agissent pas directement sur la situation de l'organe terminal, mais agissent sur la configuration du robot manipulateur. D'où la nécessité de définir les passages entre l'espace opérationnel et généralisé (articulaire).

Ainsi nous pouvons distinguer les modèles suivants

- Le modèle géométrique direct, qui consiste à calculer les coordonnées opérationnelles  $X$ , en fonction des coordonnées généralisées  $q$ , ce modèle est noté :

$$X = f(q)$$

- Le modèle géométrique inverse, qui consiste à calculer les coordonnées généralisées  $q$  en fonction des coordonnées opérationnelles  $X$ , ce modèle est noté :

$$q = g(X)$$

- Le modèle cinématique direct, qui consiste à calculer les vitesses des coordonnées opérationnelles  $\dot{X}$  en fonction des vitesses des coordonnées généralisées  $\dot{q}$ , ce modèle est noté :  $\dot{X} = J \cdot \dot{q}$  ( $J$  est la matrice Jacobienne du robot manipulateur).
- Le modèle cinématique inverse, qui consiste à calculer les vitesses des coordonnées généralisées  $\dot{q}$ , en fonction des vitesses des coordonnées opérationnelles  $\dot{X}$ , ce modèle est noté :  $\dot{X} = J^{-1} \cdot \dot{q}$  ( $J^{-1}$  la matrice jacobienne inverse du robot manipulateur).
- Les modèles dynamiques directes et inverses, qui relient les coordonnées, les vitesses et les accélérations généralisées aux efforts généralisés (ces efforts généralisés sont les forces appliquées au niveau des liaisons prismatiques ou les couples au niveau des liaisons rotationnelles). Ces modèles tiennent compte des efforts extérieurs appliqués sur l'organe terminal [6].

### 1.7. Modèle dynamique des robots manipulateurs

Toute étude de commande appliquée à un robot manipulateur doit être basée sur le modèle dynamique de ce dernier. Donc une connaissance a priori de ce modèle est nécessaire pour l'application de n'importe quel type de commande. Mais tout d'abord qu'est ce qu'un robot manipulateur ?

Un robot manipulateur est généralement modélisé comme un ensemble de  $n$  corps rigides connectés en série par des articulations avec une extrémité au sol et l'autre libre. Cet ensemble doit être caractérisé par les équations de mouvement, qui tiennent compte des termes de Coriolis et de centrifuge, ainsi que des paramètres d'inertie [7].

Une méthode d'obtenir l'équation décrivant les dynamiques d'un tel système est via les équations de mouvements d'Euler-Lagrange.

En l'absence des frottements et d'autres perturbations, l'équation dynamique générale d'un robot manipulateur est donnée par [8]

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

$\tau(n \times 1)$  : Vecteur des couples.

$q(n \times 1)$  : Vecteur des variables articulaires.

$\dot{q}(n \times 1)$  : Vecteur des vitesses articulaires.

$\ddot{q}(n \times 1)$  : Vecteur des accélérations.

$M(q)$  : Matrice d'inertie de dimension  $(n \times n)$  symétrique définie positive.

$G(q)$  : Vecteur  $(n \times 1)$  exprimant l'effet des forces gravitationnelles.

$C(q, \dot{q})\dot{q}$  : Vecteur  $(n \times 1)$  exprimant l'effet de Coriolis et de centrifuge.

### 1.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les notions nécessaires concernant le domaine de la robotique. La structure mécanique des robots manipulateurs a été étudiée, à la base du quel, nous avons présenté la morphologie, les différentes parties constituant les robots manipulateurs, et le modèle dynamique qu'ont va l'utiliser dans les chapitres suivants.

## Chapitre 2

# Commande par backstepping

### 2.1. Introduction

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non-linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non-linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et/ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Ce chapitre présente, dans un premier temps, une brève introduction des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte, et dans un deuxième temps, il introduit la méthode du backstepping.

### 2.2. Notions de bases

Cette section présente quelques notions de bases nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie du backstepping. La majorité de ces notions sont tirées de la référence [9].

### 2.2.1. Systèmes non linéaires

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficient constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué.

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes. Par exemple, ils peuvent converger, en permanent, à différents points d'équilibre, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'en possèdent qu'un seul. Cependant, bien d'autres phénomènes caractérisent les systèmes non linéaires [9]. Quelques différences vont être introduites dans les sous sections suivantes.

### 2.2.2. Equilibre

Physiquement, un système est en équilibre lorsqu'il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée  $\dot{x}$  de son vecteur d'état est nulle. Pour un système

$$\dot{x} = \varphi(x) \quad (2.1)$$

L'état (ou les états) d'équilibre  $x_e$  est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique

$$\varphi(x) = 0 \quad (2.2)$$

Pour les systèmes linéaires, on a  $\varphi(x) = Ax$  ce qui implique que  $x=0$  est un point d'équilibre pour les systèmes linéaires. Deux cas différent peuvent survenir :

- Si  $A$  est régulière, alors l'origine est le seul point d'équilibre.
- Si  $A$  est singulière, ce qui définit un sous-espace où  $Ax = 0$ , alors il existe une région d'équilibre.

Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidente l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibre peuvent être constituées de domaines continus ou de points isolés et/ou la combinaison des deux.

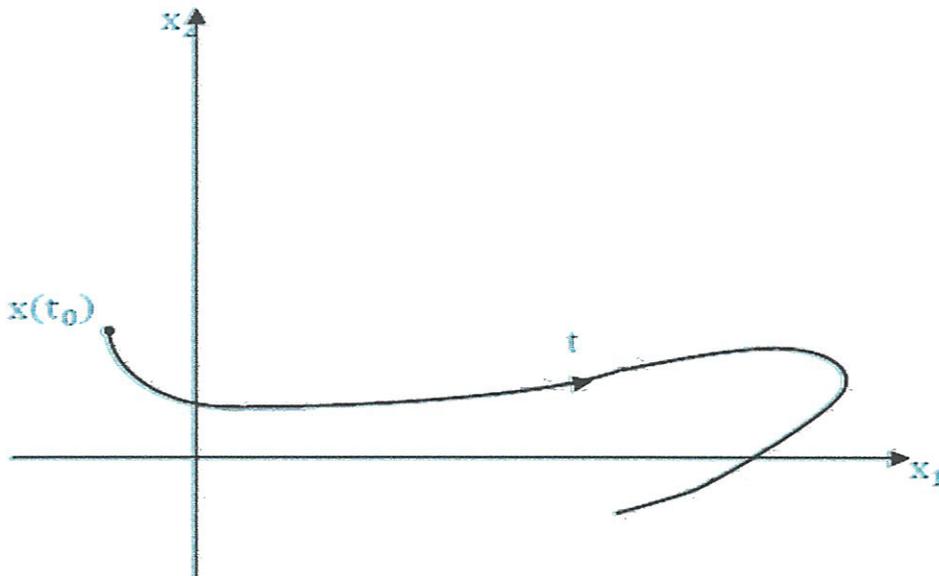


Figure 2.1 : Trajectoire d'un système dans le plan de phase

### 2.2.3. Plan de phase

Pour bien comprendre le comportement d'un système non linéaire, on fait appel à une représentation de ses trajectoires dans l'espace de phase (figure 2.1). Ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps. Cette représentation doit toutefois passer par la résolution de l'équation différentielle, ce qui n'est pas toujours facile. Cependant, les techniques basées sur la deuxième méthode de Lyapunov contournent ce problème. Cette méthode sera montrée plus loin dans ce chapitre.

### 2.2.4. Stabilité

De façon générale, on dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir, et instable s'il tend à s'en écarter davantage. Lyapunov fournit une explication un peu plus mathématique de la stabilité. Prenons comme exemple un système dont l'état est défini par le vecteur  $x$  qui possède la position d'équilibre  $x_e$ .

Ecarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même au temps  $t = t_0$  avec les conditions initiales  $x(t_0)$ , le système aura comme état  $x(t)$ . La position d'équilibre du système est stable (figure 2.2) si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\sigma > 0$  tel que

$$\|x(t_0) - x_e\|^2 < \sigma$$

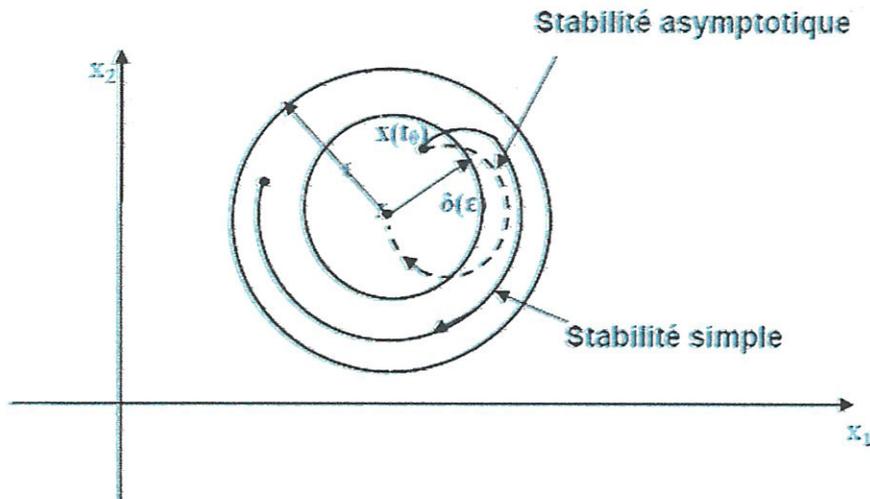


Figure 2.2: Type de stabilité selon Lyapunov

Et qu'après un certain temps  $t$ , et pour toutes les valeurs  $t > t_0$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\|x(t) - x_e\|^2 < \varepsilon$$

Dans le cas contraire l'équilibre est instable. Il n'est nécessaire que l'état  $x(t)$  tende vers  $x_e$  lorsque  $t$  augmente indéfiniment, pour que le système soit stable. Si l'état tend effectivement vers  $x_e$  mais qu'ils restent à l'intérieur d'un certain seuil  $\varepsilon$  alors le système a une stabilité simple (figure 2.2).

### 2.3. Méthode de Lyapunov

Les faibles non-linéarités dans un système à commander sont la plupart du temps, traitées comme des perturbations affectant un modèle linéaire du système. Toutes les théories, qui ont été développées depuis plusieurs années et qui sont bien connues des systèmes linéaires sont utilisées. Malheureusement, ces non-linéarités ne peuvent pas toujours être de côté et il faut alors utiliser d'autres méthodes.

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une fonction de commande de Lyapunov garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. De telles fonctions peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique du backstepping qui permet de réduire cette complexité. Cette technique sera développée plus en détail à la section (2.4). Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites. Une attention particulière sera portée sur la deuxième méthode de Lyapunov qui fournit un outil très puissant pour tester et trouver des conditions suffisantes à la stabilité des systèmes dynamiques, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles les décrivant.

### 2.3.1. Première méthode de Lyapunov

Le théorème de stabilité local de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte une validité théorique à la technique de la linéarisation. Elle mentionne que si le système linéarisé est asymptotiquement stable, alors il y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéaire est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la stabilité. Ce théorème est d'une importance limitée, car il ne permet d'étudier que la stabilité locale [9].

### 2.3.2. Deuxième méthode de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante ; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas, le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable.

L'idée de cette méthode est d'analyser la stabilité du système, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles non linéaires le régissant. Il suffit simplement d'étudier les variations (signe de la dérivée) de l'énergie (ou une fonction qui lui est équivalente) le long de la trajectoire du système (figure 2.3). Les théorèmes suivants, qui permettent de se prononcer sur la stabilité (ou instabilité) d'un système, sont fournis par Lyapunov (Lyapunov 1966). Ceux-ci sont tirés de la thèse de la référence [9].

### Théorème 3.1 (Stabilité asymptotique)

S'il est possible de trouver une fonction  $V(x)$  de signe défini (avec  $V(0) = 0$ ), dans un domaine  $D$  comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale par rapport au temps  $\dot{V}$  soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.

### Théorème 3.2 (Instabilité)

S'il est possible de trouver une fonction  $V$  dont la dérivée est de signe défini dans un domaine  $D$  comprenant l'origine et que  $V$  soit

- ✓ définie de même signe que  $\dot{V}$ , ou
- ✓ indéfinie en signe l'équilibre est instable.

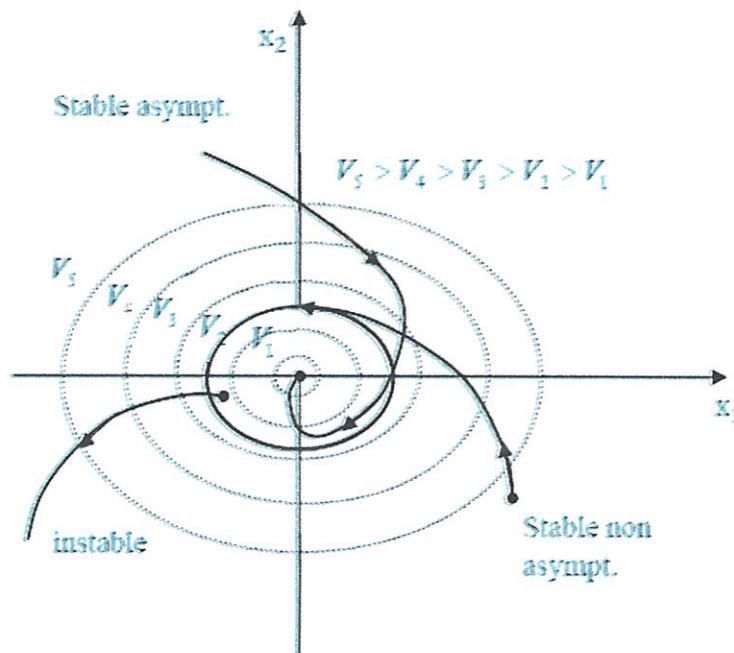


Figure 2.3: Contours à énergie constante dans le plan de phase

### Théorème 2.3 (Stabilité simple)

S'il est possible de trouver une fonction  $V$  de signe défini dans un domaine  $D$  et dont la dérivée totale  $\dot{V}$  soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine (c'est-à-dire stable non asymptotiquement, (figure 2.3).

Contrairement à la première méthode, la deuxième méthode donne plus d'informations au niveau de la stabilité. Elle a l'avantage de ne pas se limiter à la prédiction des points d'équilibre, mais bien d'une région d'attraction autour de ces points d'équilibre. Ces théorèmes présentent une condition suffisante à la stabilité. Pour l'étude de la stabilité d'un système caractérisé par un vecteur d'état  $x$ , la méthode directe de Lyapunov consiste alors, à chercher une fonction  $V(x)$  (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment. Il n'y a aucune méthode qui permet de trouver directement une fonction de Lyapunov pour un système donné. Néanmoins, il existe des approches qui conduisent, en général, à des résultats acceptables [9]. Voici quelques exemples de fonction de Lyapunov :

- Fonction quadratique

$$V(x) = x^T P x \quad (2.3)$$

Où  $P$  est une matrice symétrique définie positive

- Fonction quadratique plus intégrale (Lur'e)

$$V(x) = x^T P x + \int_0^2 \varphi(u) du \quad (2.4)$$

avec  $\varphi$  assujettie à certaines contraintes.

## 2.4. Commande par backstepping

La section suivante présente dans un premier temps un bref historique du backstepping. Dans un deuxième temps, deux exemple sera fait à partir d'un modèle non linéaire de deuxième ordre et un autre modèle du pendule simple afin de se familiariser avec la technique. Finalement, quelques observations et simulations seront faites.

### 2.4.1. Introduction au backstepping

La méthode de la commande par backstepping consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant.

Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. À chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Contrairement à la plupart des autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non-linéarité. Cependant, le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \theta + \psi_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta + \psi_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{R-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})^T \theta + \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \theta + \psi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Où  $\theta$  est le vecteur de paramètres constants. Les  $\psi_i$  et les  $\varphi_i$  sont des fonctions non linéaires connues, avec  $\varphi(0) = 0$  et  $\psi_n(x) \neq 0, \forall x \in R^n$ . De plus, le backstepping permet de garder les non- linéarités utiles [9].

## 2.4.2. Synthèse d'une loi de commande par backstepping

### 2.4.2.1. Approche non adaptative

L'idée principale du « backstepping » non adaptatif peut être démontrée par les exemples donnés.

#### 2.4.2.1.1. Exemple d'un système du deuxième ordre

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}_1 = \psi(x_1) + x_2 \tag{2.6a}$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1 \tag{2.6b}$$

Où  $x_1, x_2, y$  et  $u \in R$  ; la seconde équation représente un intégrateur pur. ( Voir la figure 2.4).

Le but de la commande du système non linéaire (2.6) est la régulation de  $y(t) \rightarrow 0$

quand  $t \rightarrow \infty$ , le seul point d'équilibre avec  $y = 0$  est  $(x_1, x_2) = (0, -f(0))$ .

L'objectif de la conception est de rendre le point d'équilibre globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable GAS (GES). Puisque le système non linéaire (2.6) est constitué de deux états  $x_1$  et  $x_2$ , alors il y aura une méthode de conception récursive à deux étapes. On traite donc (2.6a) et (2.6b) comme deux sous-systèmes en cascade; chacun avec une seule entrée et une seule sortie. On commence la conception avec le système  $x_1$  et on continue avec  $x_2$ .

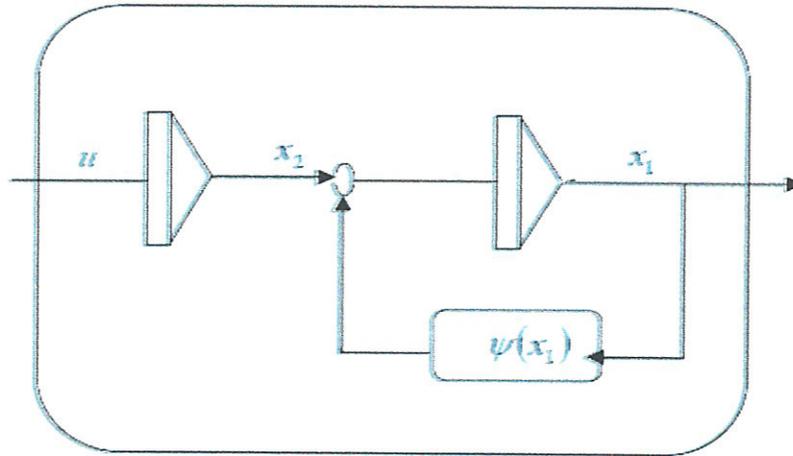


Figure 2.4 : Système non linéaire du deuxième ordre avec une seule fonction non linéaire.

### Description de la procédure

#### ➤ Etape 1

Pour le sous-système (2.6a), on choisit  $x_2$  comme une entrée de commande virtuelle ou fictive, rappelons que l'objectif de la commande est de réguler la sortie  $y = x_1$  à 0. D'où la première variable du backstepping est choisie comme :

$$z_1 = x_1 \quad (2.7)$$

La commande virtuelle est alors définie comme :

$$x_2 = z_2 + \alpha_1 \quad (2.8)$$

$\alpha_1$  : est la fonction stabilisante.

$z_2$  : est la nouvelle variable d'état.

D'où le sous-système

$$\dot{x}_1 = \psi(x_1) + x_2$$

Devient

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \psi_1 \quad (2.9)$$

La nouvelle variable d'état  $z_2$  ne serait pas utilisée dans la première étape, mais sa présence est nécessaire puisqu'on a besoin de  $z_2$  pour lier le nouveau sous-système en  $z_1$  au prochain sous-système ou sous-système en  $z_2$  qui serait considéré dans l'étape suivante. En plus, les coordonnées de conception ont changé de  $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$ .



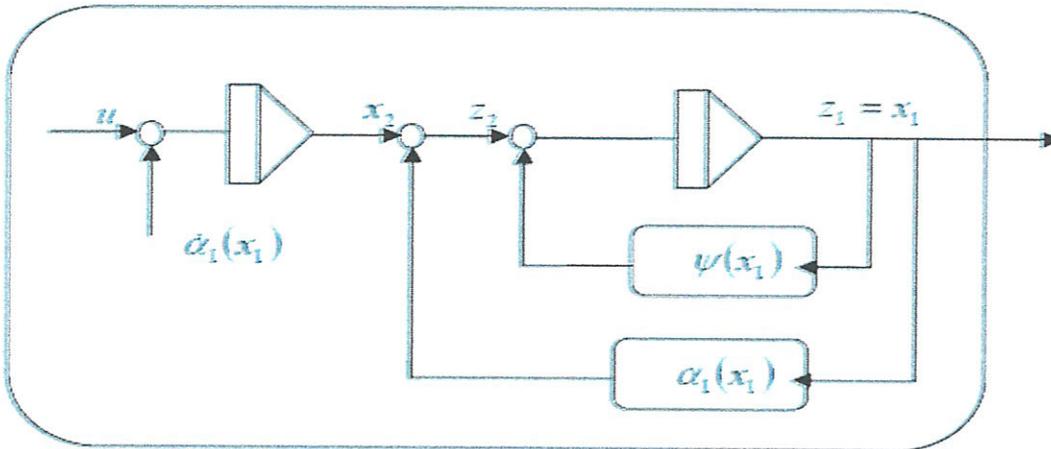


Figure 2.5 : Stabilisation du premier sous-système

Maintenant, l'attention est tournée vers la fonction stabilisante  $\alpha_1$  qui produira la contre réaction nécessaire pour le nouveau sous-système. Prenons la fonction stabilisante  $\alpha_1$  comme :

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \psi(x_1), \quad \alpha_1 = \alpha_1(x_1) \quad (2.10)$$

Celle-ci donne

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 \quad (2.11)$$

La fonction de Lyapunov choisie pour le premier sous-système est :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (2.12)$$

Alors

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (2.13)$$

Où  $k_1 > 0$ , est le gain de la contre réaction. D'où le nouveau sous-système est stabilisé notons que  $\alpha_1$  a été choisie de manière à éliminer la non linéarité  $\psi$  et d'avoir  $\dot{V}_1 < 0$ , le terme  $z_1 z_2$  de  $\dot{V}_1$  sera éliminé dans l'étape suivante. Maintenant, on passe au deuxième sous-système.

### ➤ Etape 2

Les dynamiques du nouveau sous-système sont calculées en permet la dérivée de l'équation (2.8)

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \quad (2.14)$$

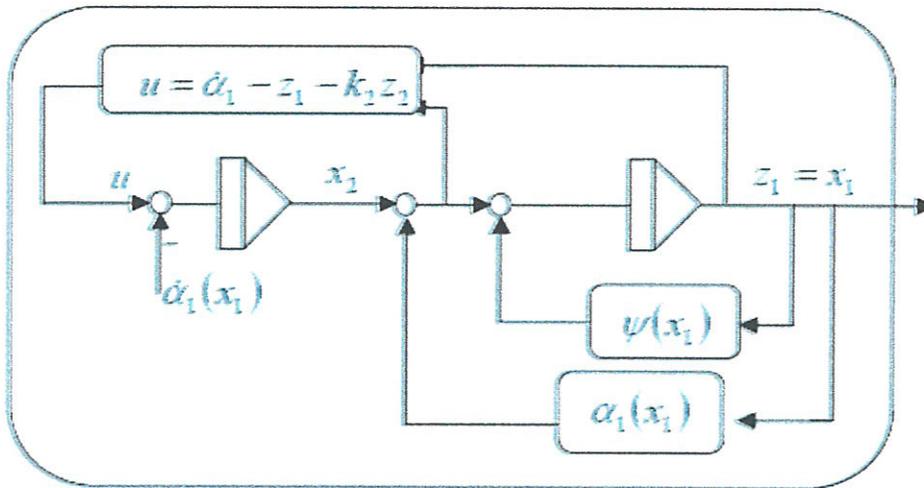


Figure 2.6 : Stabilisation du deuxième sous-système

Prenons la fonction de Lyapunov du deuxième sous-système come :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (2.15)$$

alors

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2 (u - \dot{\alpha}_1 + z_1) \quad (2.16)$$

Puisque le système original est décrit par ceux états seulement, l'entrée de commande apparait dans la deuxième étape. D'où le choix de la commande

$$u = \dot{\alpha}_1 - z_1 - k_2 z_2 \quad (2.17)$$

avec  $k_2 > 0$ , donne

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 < 0, \forall z_1 \neq 0, \forall z_2 \neq 0 \quad (2.18)$$

Ce qui signifie que l'équilibre  $z = 0$  est GAS.

En réalisant la loi de commande (2.17), il est important d'éviter les expressions contenant les dérivées des états. Pour cet exemple, on a seulement  $\dot{\alpha}_1$  qui doit être évaluée.

Il est important d'observer que la dérivée par rapport au temps de  $\alpha_1$  sera implantée analytiquement sans différentielle ; c'est la première caractéristique du « backstepping »

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1 - k_1 \dot{x}_1 = -\left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} + k_1\right) (f(x_1) + x_2) \quad (2.19)$$

D'où l'expression finale de la loi de commande est

$$u = -\left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} + k_1\right)(f(x_1) + x_2) - x_1 - k_2(x_2 + f(x_1) + k_1 x_1) \quad (2.20)$$

La transformation des coordonnées via « backstepping » est donnée par la forme

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - f(x_1) - k_1 x_1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La transformation inverse est

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 + f(z_1) + k_1 z_1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Le système en boucle fermée est donnée par

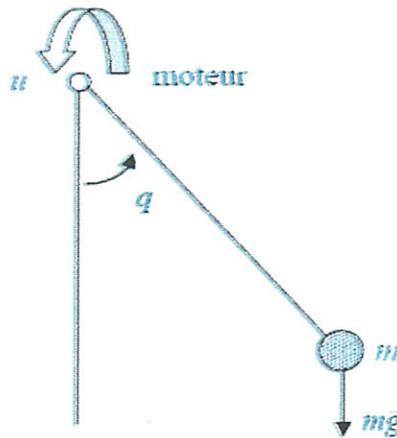
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

On remarque que la matrice d'état du système peut être décomposée en deux matrices ; matrice diagonale et matrice antisymétrique.

#### 2.4.2.1.2. Exemple d'un bras manipulateur à un degré de liberté

On peut simuler un bras manipulateur à un pendule simple comme le montre la figure (2.7). Pour cette application, on va montrer comment le problème de la commande non adaptative d'un robot manipulateur à un degré de liberté va être résolu en utilisant la technique de backstepping en supposant que tous les paramètres du système sont connus et prédéfinis.

Tout d'abord, on va décrire le comportement du bras manipulateur sous forme d'un modèle de connaissance, et pour cela on introduit le Lagrangien suivant :



**Figure 2.7:** Système articulé à un degré de liberté de masse localisée  $m$ .  
Son mouvement est commandé par le couple  $u$

$$L = E_C - E_P$$

$$E_C = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 \quad (2.24)$$

$$E_P = mgl(1 - \cos q)$$

Tel que :

$E_C$  : L'énergie cinématique

$E_P$  : L'énergie potentielle

$l$  : La longueur du bras manipulateur

$q$  : Position angulaire

On aura, donc :

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 - mgl(1 - \cos q) \quad (2.25)$$

Soit l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i \quad (2.26)$$

avec :  $N = 1$  : pour un degré de liberté.

$\Gamma = u$  : Commande à l'entrée du système.

Les équations différentielles sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= ml^2 \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= ml^2 \ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= -mgl \sin q \end{aligned} \quad (2.27)$$

D'après l'expression de Lagrange, on exprime l'équation du système comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = u \Rightarrow ml^2 \ddot{q} + mgl \sin q = u \quad (2.28)$$

L'équation du système peut être encore s'écrire :

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q + \frac{1}{ml^2} u \quad (2.29)$$

Maintenant, introduisons la notion d'état en posant :

$x_1 = q$  : représente la position angulaire.

$x_2 = \dot{q}$  : représente la vitesse angulaire.

Le modèle résultant peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Prenons par exemple les paramètres suivants :

$$\theta = -\frac{g}{l} ; \quad \beta = \frac{1}{ml^2}$$

On considère que ces paramètres soit connus.

Ce qui permet d'avoir la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1) \theta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Avec :  $\psi(x_1) = \sin x_1$  fonction non linéaire lisse ;  $\psi(0) = \sin(0) = 0$ .

Puisque les conditions d'implantation sont satisfaites, on procède alors à l'application de la technique du backstepping :

La conception du « backstepping » est récursive, alors on adopte le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_{1d} \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1, x_{1d}) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Notons  $x_{1d}$  indique la position désirée atteinte par le bras manipulateur.

La fonction stabilisante  $\alpha_1(x_1, x_{1d})$  est donnée par :

$$\alpha(x_1, x_{1d}) = -c_1 z_1 \quad (2.33)$$

La dynamique des erreurs sera :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} = c_1 z_1 + z_2 \quad (2.34)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{x}_{1d} = \beta \cdot u + \psi(x_1)\theta + c_1 \dot{z}_1 - \ddot{x}_{1d} = \beta \cdot u + \psi(x_1)\theta + c_1 z_2 - c_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} \quad (2.35)$$

### ➤ Fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est définie par l'expression suivante :

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (2.36)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= z_1(-c_1 z_1 + z_2) + z_2(\beta \cdot u + \psi(x_1)\theta + c_1 x_2 - c_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d}) \\ &= -c_1 z_1^2 + z_2(z_1 + \beta \cdot u + \psi(x_1)\theta + c_1 x_2 - c_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d})\end{aligned}\quad (2.37)$$

Pour atteindre une stabilité globale asymptotique du bras manipulateur [9], on explicitera la loi de commande  $u$  de telle manière qu'on obtient :  $\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ , alors :

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\beta}[-z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1)\theta - c_1 x_2 + c_1 \dot{x}_{1d} + \ddot{x}_{1d}] \\ &= ml^2 \left[ -z_1 - c_2 z_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 - c_1 x_2 + c_1 \dot{x}_{1d} + \ddot{x}_{1d} \right]\end{aligned}\quad (2.38)$$

Enfin, on dit que le système sera équilibré et stable une fois que cette loi de commande est appliquée à l'entrée de l'élément moteur du bras manipulateur.

### 2.4.2.1.3. Résultats de simulation

#### Régulation

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

$l = 1$  m ;  $m = 10$  kg ;  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> ;  $c_1 = 10$  ;  $c_2 = 10$  ;  $q_d = 3$  rad ;  $x_1(0) = 1$  ;  $x_2(0) = 3.5$  ;  
 $t = 6$  sec.

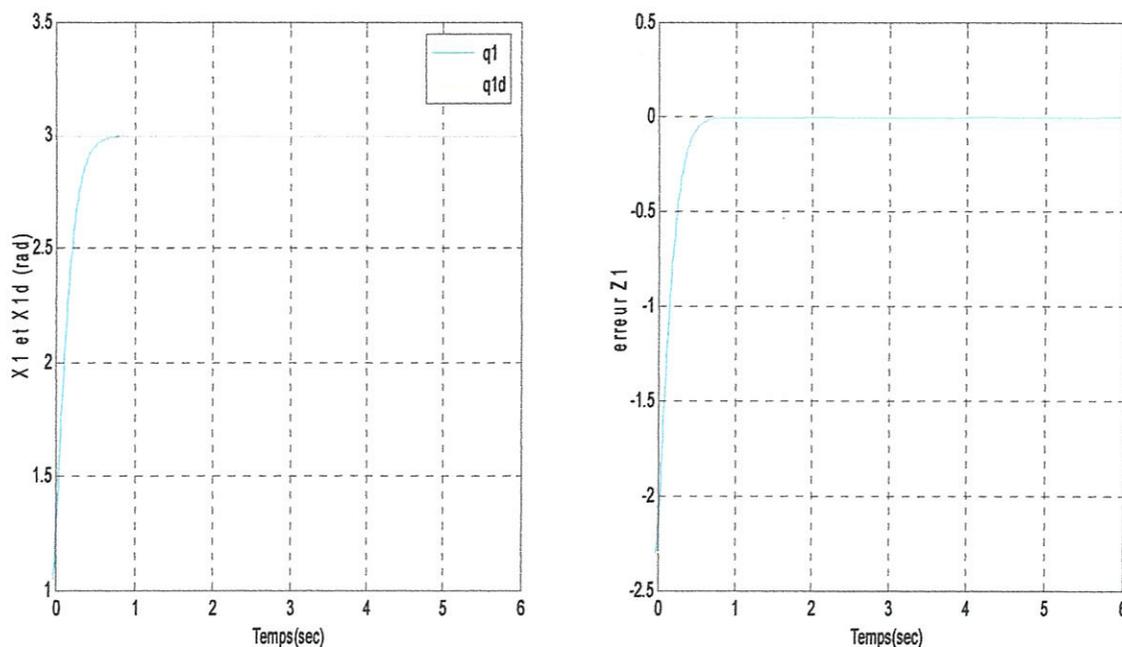


Figure 2.8 : Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur

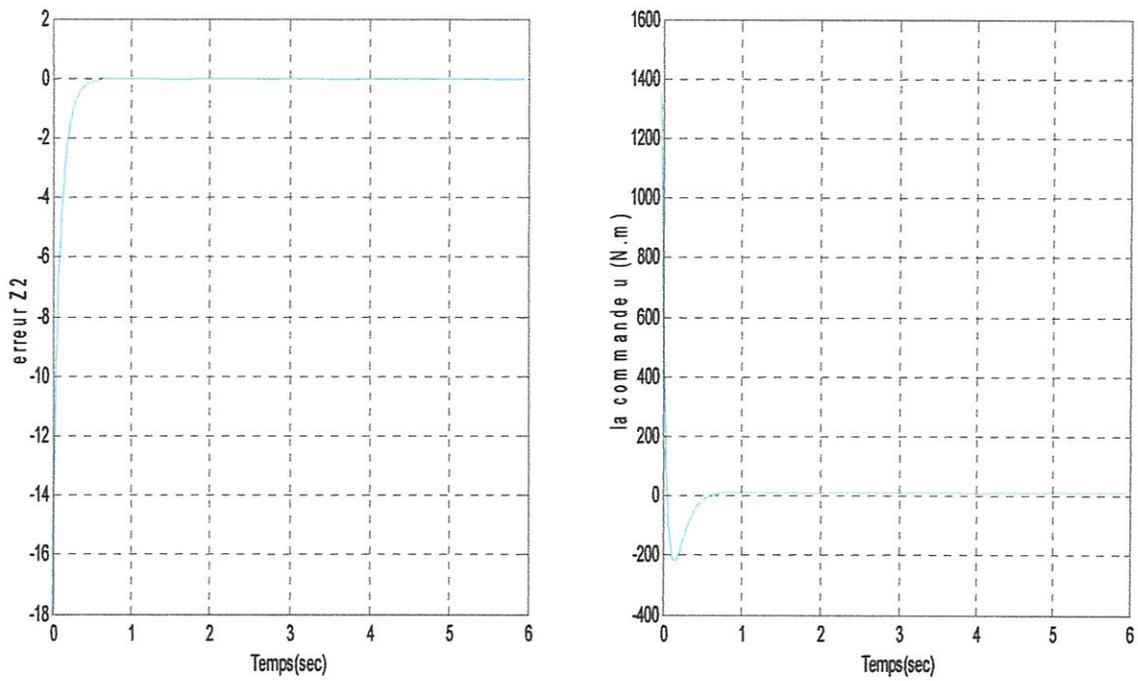


Figure 2.9 : Résultat de l'erreur de vitesse et la commande d'entrée

**Poursuite**

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris  $l = 1 \text{ m}$  ;  $m = 10 \text{ kg}$  ;  
 $g = 10 \text{ m/s}^2$  ;  $c_1 = 10$  ;  $c_2 = 10$  ;  $q_d = \sin(2\pi \cdot t) \text{ rad}$  ;  $x_1(0) = 0.7$  ;  $x_2(0) = 2$  ;  $t = 6 \text{ sec}$  ;

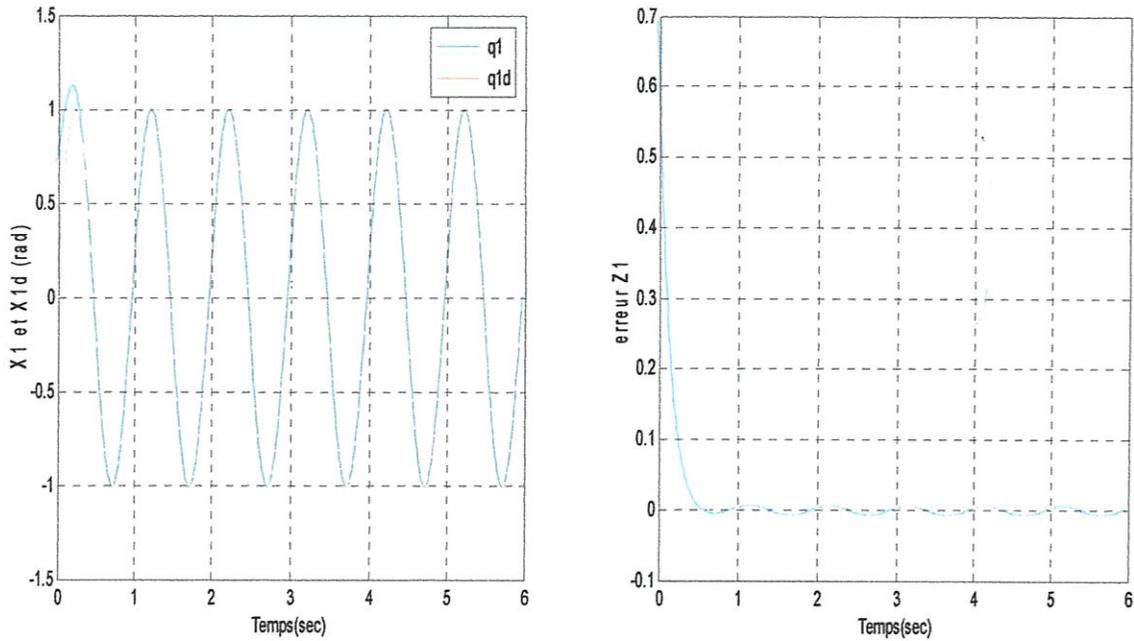


Figure 2.10: Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur

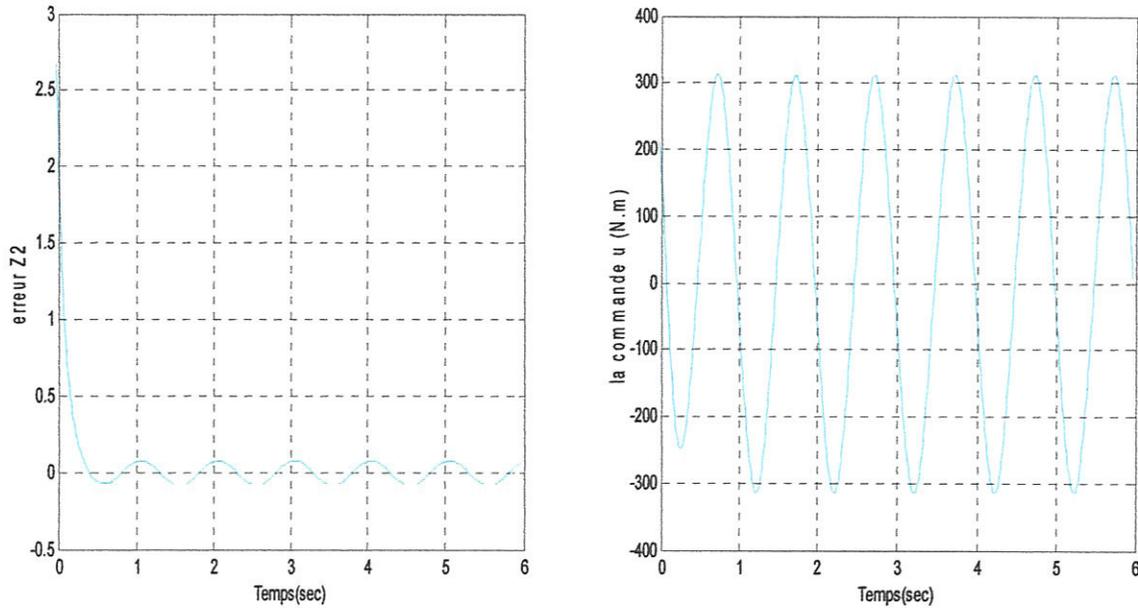


Figure 2.11 : Résultat de l'erreur de vitesse et la commande d'entrée

### 2.4.2.2. Approche adaptative

#### 2.4.2.2.1. Exemple d'un système du deuxième ordre

Soit le système non linéaire régi par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta \psi(x_1)^T \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \psi(0) = 0 \quad (2.39)$$

Tel que :

$\theta$  : Vecteur paramétrique inconnu.

$\psi(x_1)^T$  : Fonction non linéaire lisse.

La conception par la méthode du « backstepping » est exécutée en deux étapes. Rappelons que l'objectif de la commande dans ce cas, est de stabiliser le système non linéaire (2.39).

#### ➤ Etape 1

On choisie l'état  $x_2$  comme une entrée virtuelle ou fictive de commande au premier sous-système. D'où la première variable du « backstepping » est choisie comme

$$z_1 = x_1 \quad (2.40)$$

et l'erreur des paramètres inconnus

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \quad (2.41)$$

avec  $\hat{\theta}$  est l'estimation du paramètre inconnu  $\theta$  du système.

La commande virtuelle est alors définie comme

$$x_2 = z_2 + \alpha_1 \quad (2.42)$$

où  $\alpha_1$  est la fonction stabilisante du premier sous-système,  $z_2$  est une nouvelle variable.

D'où le premier sous-système

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 + \tilde{\theta} \psi(x_1)^T \quad (2.43)$$

Prenons la fonction stabilisante  $\alpha_1$  comme

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \hat{\theta} \psi(x_1)^T \quad (2.44)$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(x_1, \hat{\theta}) \quad (2.45)$$

La première fonction de Lyapunov est choisie comme

$$V_1(z_1, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2\Gamma} \tilde{\theta}^2 \quad (2.46)$$

La dérivée de  $V_1$  est

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - k_1 z_1^2 + \tilde{\theta} \left( \psi(x_1)^T z_1 - \frac{1}{\Gamma} \dot{\hat{\theta}} \right) \quad (2.47)$$

où  $k_1 > 0$  est le gain de la contre réaction. D'où, le nouveau sous-système est stabilisé.

Notons que  $\alpha_1$  a été choisie de manière à éliminer la non linéarité  $\psi(x_1)$  et d'avoir  $\dot{V}_1 < 0$ , le terme  $z_1 z_2$  de  $\dot{V}_1$  sera éliminé dans l'étape suivante. Maintenant on passe au deuxième sous-système.

### ➤ Etape 2

Les dynamiques du nouveau sous-système sont calculées en prenant la dérivée de l'équation (2.42) pour avoir

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi - \tilde{\theta} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (2.48)$$

Pour la conception de la commande  $u$ , on considère la fonction de Lyapunov augmentée

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2\Gamma} \tilde{\theta}^2 \quad (2.49)$$

La dérivée de  $V_2$  est

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + \tilde{\theta} \left[ \psi z_1 - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi - \frac{1}{\Gamma} \dot{\hat{\theta}} \right] + z_2 \left[ z_1 + u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right] \quad (2.50)$$

Dans la dernière équation, tous les termes contenant  $\tilde{\theta}$  doivent être groupés ensemble, pour les éliminer, la loi d'adaptation est choisie comme

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \left( \psi z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi z_2 \right) \tag{2.51}$$

où  $\Gamma$  et le gain d'adaptation.

d'où

$$u = -z_1 - k_2 z_2^2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{\hat{\theta}} \tag{2.52}$$

Où pour  $\dot{\hat{\theta}}$  on utilise l'expression analytique de la loi de mise à jour (2.51). En substituant les expressions (2.51) et (2.52) dans (2.50) on obtient

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \leq 0 \tag{2.53}$$

Avec  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$ .

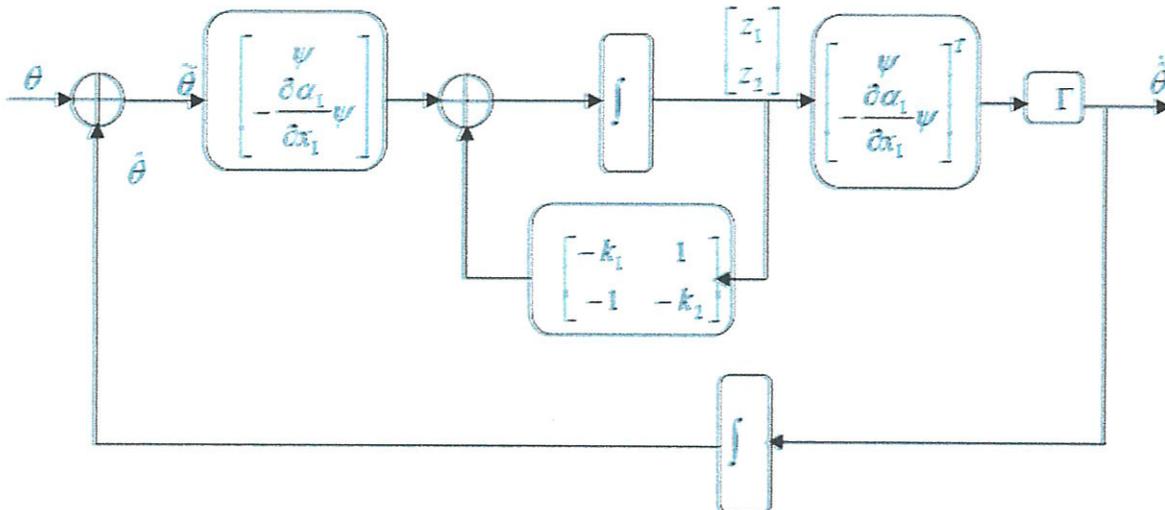


Figure 2.12 : Système en boucle fermée

Et l'erreur devient

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi \end{bmatrix} \tilde{\theta} \tag{2.54}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \begin{bmatrix} \psi & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

**Remarque**

1. La méthode du « backstepping » offre assez de flexibilité pour éviter l'annulation de la commande (voir l'expression du contrôleur).
2. La dérivée par rapport au temps de la fonction stabilisante est implémentée analytiquement sans différentielle (voir l'expression de  $\dot{\alpha}_1$ ).
3. La matrice d'état du système en boucle fermée peut être écrite comme la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice antisymétrique.

**2.4.2.2.2. Exemple d'un bras manipulateur à un degré de liberté**

Soit le modèle de pendule simple indiqué à l'équation (2.30) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.56)$$

On pose :  $\theta = -\frac{g}{l}, \beta = \frac{1}{ml^2}$

On considère que les paramètres du pendule sont inconnus, ce qui permet d'avoir la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1(x_1)^T \theta \\ \dot{x}_2 = \beta \cdot u + \psi_2(x_2)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.57)$$

avec  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi_1(x_1) = 0$  et  $\psi_2(x_1) = \sin(x_1)$

Pour concevoir une commande adaptative à ce pendule, on remplace le vecteur de paramètre réel  $\theta$  par son estimation  $\hat{\theta}$  dans la fonction de stabilisation (l'équation (2.32) et (2.33)), ce qui donne

$$z_1 = x_1 - x_{1d} \quad (2.58)$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta}) - \dot{x}_{1d} \quad (2.59)$$

$$\alpha_1(x_1, \hat{\theta}) = -c_1 z_1 - \psi_1^T \hat{\theta}, \quad c_1 \geq 0 \quad (2.60)$$

La dynamique des erreurs est définie telle que

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} = -c_1 z_1 + z_2 \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1(x_1, \hat{\theta}) - \ddot{x}_{1d} \\ &= \frac{1}{ml^2} u + \sin(x_1) \theta + c_1 x_2 - c_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (2.62)$$

➤ **Fonction de Lyapunov**

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (2.63)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov se traduit par :

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 + z_2 (u + z_1 + \sin(x_1) \hat{\theta} + c_1 x_2 - c_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d}) + \theta^T \Gamma^{-1} (\Gamma \sin(x_1) z_2 - \dot{\hat{\theta}}) \quad (2.64)$$

➤ **Loi d'adaptation**

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \sin(x_1) z_2 \quad (2.65)$$

Pour que le système soit globalement asymptotiquement stable ( $\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ ) il faut que :

$$\beta \cdot u + z_1 + \sin(x_1) \hat{\theta} + c_1 x_2 - c_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} = -c_2 z_2 \quad (2.66)$$

$$\beta = \frac{1}{ml^2}$$

Alors la loi de commande sera comme suit :

$$u = ml^2 (-z_1 - c_2 z_2 - \sin(x_1) \hat{\theta} - c_1 x_2 + c_1 \dot{x}_{1d} + \ddot{x}_{1d}) \quad (2.67)$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2$ , 'écrit [9] :

$$\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, x_{1d}, \dot{x}_{1d}) = -z_1 - c_2 z_2 - \sin(x_1) \hat{\theta} - c_1 x_2 + c_1 \dot{x}_{1d} \quad (2.68)$$

Puisque

$$u = \frac{1}{\beta} [\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, x_{1d}, \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d}]$$

Alors l'équation  $x_1 \rightarrow x_{1d}$  est globalement asymptotiquement stable  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \rightarrow x_{1d}(t)$

2.4.2.2.3. Résultats de simulation

Régulation

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

$l = 1 \text{ m} ; m = 10 \text{ kg} ; g = 10 \text{ m/s}^2 ; c_1 = 10 ; c_2 = 10 ; \Gamma = 0.44 ; q_d = 3 \text{ rad} ; x_1(0) = 1 ; x_2(0) = 3.5$   
 $t = 6 \text{ sec} ; \theta(0) = -9.5 ;$

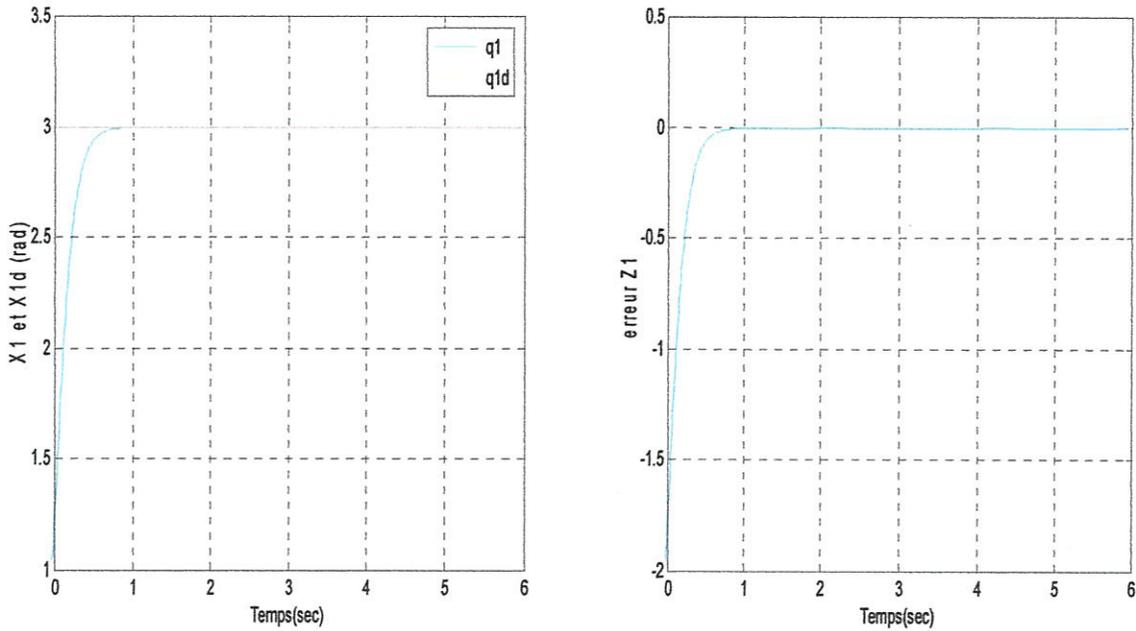


Figure 2.13 : Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur

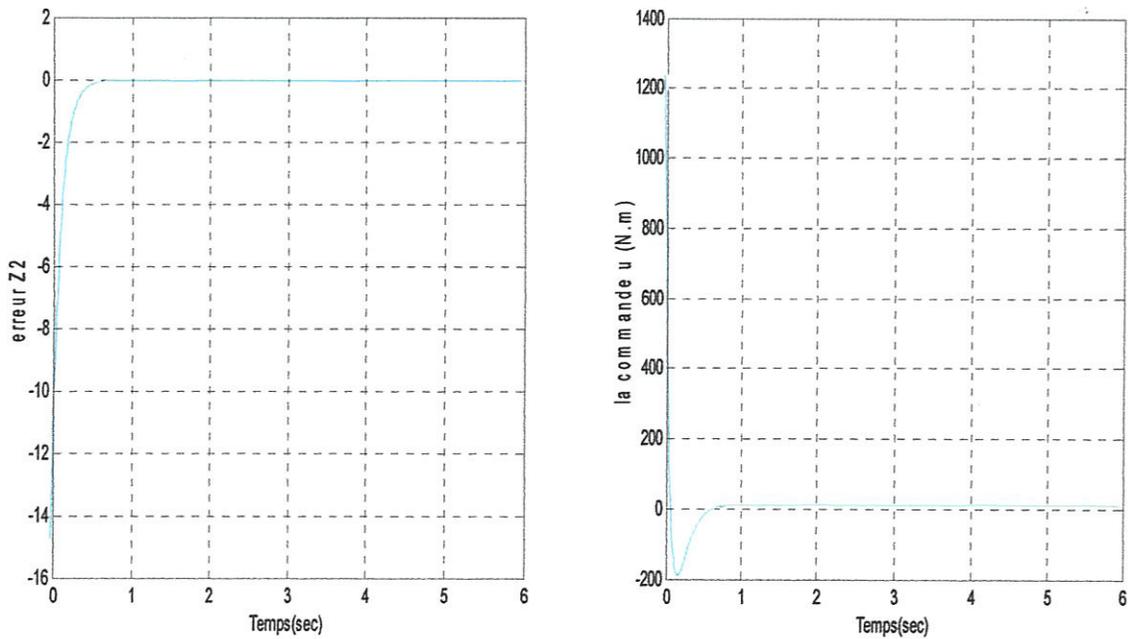


Figure 2.14 : Résultat de l'erreur de la vitesse et la commande d'entrée

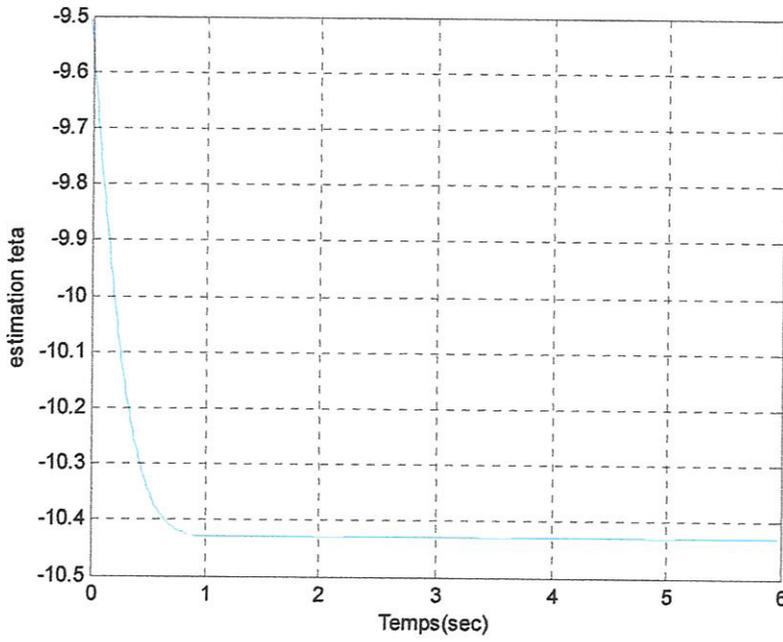


Figure 2.15 : Paramètre d'estimation  $\hat{\theta}$

**Poursuite**

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

$l = 1 \text{ m}$  ;  $m = 10 \text{ kg}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$  ;  $c_1 = 3$  ;  $c_2 = 3$  ;  $q_d = \sin(2\pi \cdot t) \text{ rad}$  ;  $\Gamma = 0.88$  ;  
 $x_1(0) = 0.7$  ;  $x_2(0) = 2$  ;  $\theta(0) = -9.5$  ;  $t = 6 \text{ sec}$ .

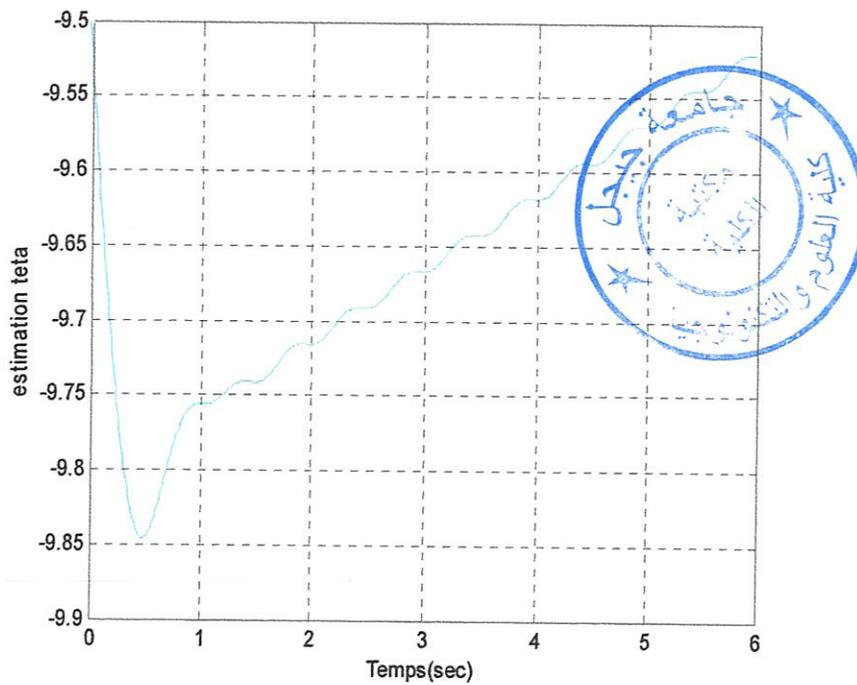


Figure 2.16 : Paramètre d'estimation  $\hat{\theta}$  pour le cas de la poursuite

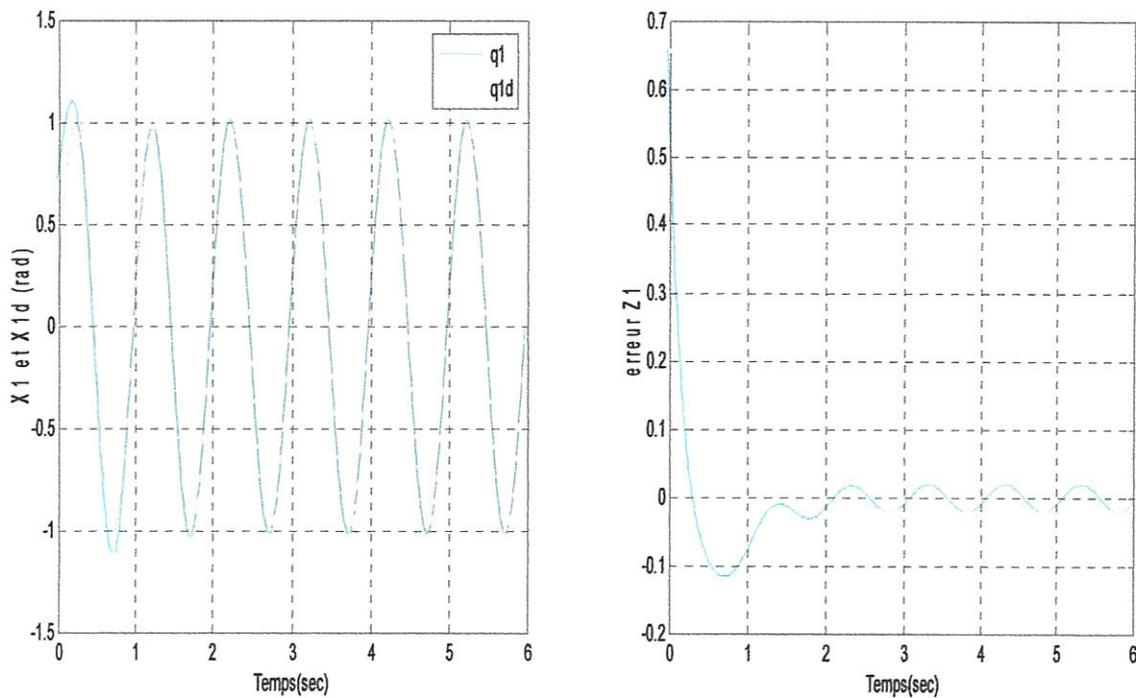


Figure 2.17 : Résultat de suivi de la trajectoire désirée et son erreur

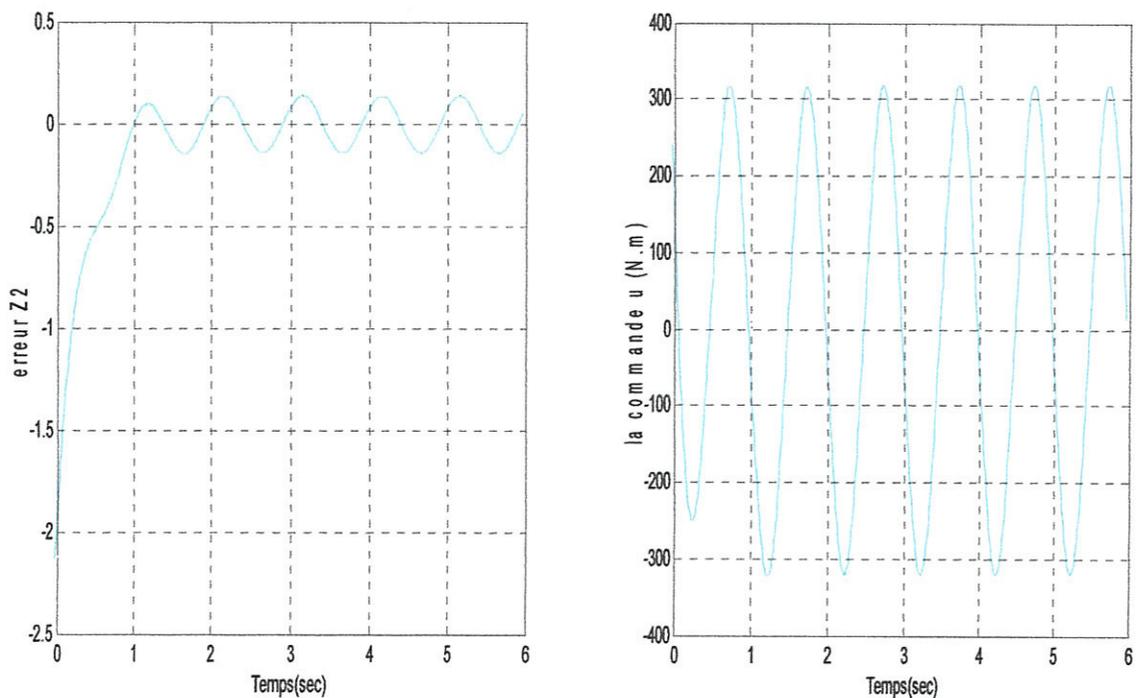


Figure 2.18 : Résultat de l'erreur de la vitesse et la commande d'entrée

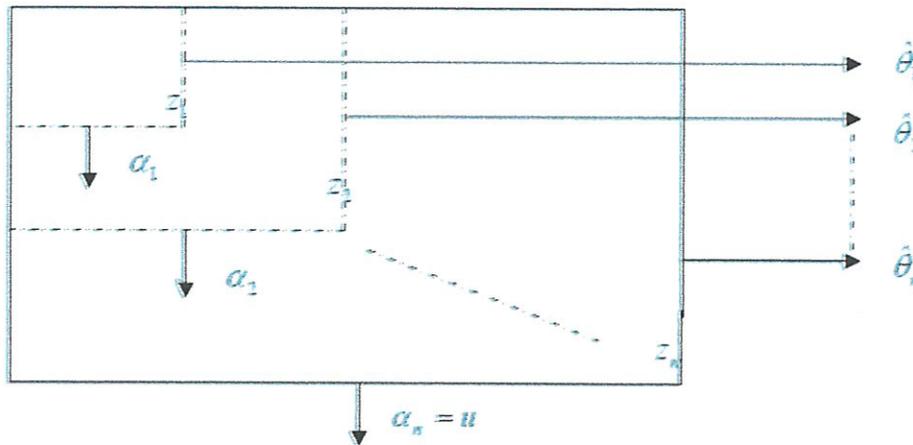
### 2.4.2.3. Cas des systèmes d'ordre n

A fin de donner l'algorithme de la commande adaptative « Backstepping » pour certaines classes de systèmes non linéaires, le schéma (2.19) représente la procédure globale de cette technique [10] :

La forme générale du système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1(x_1)^T \theta \\ \dot{x}_2 = x_3 + \psi_2(x_1, x_2)^T \theta \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})^T \theta \\ \dot{x}_n = \beta(x) \cdot u + \psi_n(x)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases}$$

Telles que  $\beta(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $F(x) = [\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2), \dots, \varphi_n(x)]$  vecteur de fonction non linéaire lisses.



**Figure 2.19 :** Procédure de la technique. Chaque étape génère l'erreur  $z_i$  la fonction stabilisante  $\alpha_i$  et une nouvelle estimation  $\hat{\theta}_i$  du vecteur paramétrique inconnu  $\theta$

**Algorithme de la procédure backstepping**

Par convention, on définit  $z_0 = 0, \alpha_0 = 0, \tau_0 = 0$

$$z_i = x_i - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}$$

$$\alpha_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{y}_r^{(i-1)}) = -z_{i-1} - c_i z_i - W_i^T \hat{\theta} + \sum_{k=1}^{i-1} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} \right) + v_i$$

$$v_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{y}_r^{(i-1)}) = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \Gamma \tau_i + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \Gamma W_i z_k$$

$$\tau_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{y}_r^{(i-1)}) = \tau_{i-1} + W_i z_i$$

$$W_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{y}_r^{(i-2)}) = \psi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \psi_k \right)$$

$i = 1, \dots, n$

$\bar{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ ,  $\bar{y}_r^{(i)} = (y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, \dots, y_r^{(i-1)})$  connues

La loi de commande par backstepping adaptative :

$$u = \frac{1}{\beta(x)} \left[ \alpha_n(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{y}_r^{(n-1)}) + y_r^{(n)} \right]$$

La loi d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{y}_r^{(n-1)}) = \Gamma W_z$$

Le système bouclé aura la forme :

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta}, t)z + W(z, \hat{\theta}, t)^T \tilde{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma W(z, \hat{\theta}, t)z$$

$$A_z(z, \hat{\theta}, t) = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -c_2 & 1 + \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ 0 & -1 - \sigma_{32} & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 + \sigma_{n-1,n} \\ 0 & -c_{2n} & \dots & -1 - \sigma_{n-1,n} & -c_n \end{bmatrix}$$

et

$$\sigma_{ij}(x, \hat{\theta}) = -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \Gamma W_k$$

La fonction de Lyapunov s'exprime par :

$$V_n = \frac{1}{2} Z^T Z + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$$

La condition de stabilisation est sous la forme :

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n C_k Z_k^2$$

L'équilibre du système s'exprime par :  $Z = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_r(t)] = 0$ .

## ✕ 2.5. Commande par backstepping d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté

Les robots manipulateurs sont des systèmes mécaniques avec la dynamique non-linéaire fortement couplée et l'incertitude des paramètres caractéristiques. Si les paramètres initiaux de robot sont bien connus, le couple calculé et les contrôleurs de découplage non-linéaires peuvent être employés pour réaliser le suivi satisfaisant d'une trajectoire [11].

Cependant, la connaissance des valeurs des paramètres initiaux est faible dans ce cas une commande adaptative est nécessaire.

Dans cette application on va utiliser la commande par backstepping pour traiter ces deux derniers cas.

### 2.5.1. Modèle dynamique

On considère un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté (2DDL) montré sur l'annexe dérivé par l'intermédiaire de l'équation d'Euler-Lagrange [11]

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (2.69)$$

Dans la suite, nous noterons aussi  $q_d (2 \times 1)$  vecteur de position articulaire désirée.

### 2.5.2. Représentation d'état

Les équations de la dynamique (2.69) peuvent s'écrire en utilisant le changement de variable ci-dessous

$$\begin{cases} q = x_1 \\ \dot{q} = x_2 \end{cases} \quad (2.70)$$

avec

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Alors, de (2.69) et (2.70) la représentation d'état suivante est obtenue

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{cases} \quad (2.71)$$

La représentation (2.71) et sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.72)$$

Avec

$$\beta = M(q)^{-1} ; \quad u = \tau ;$$

$$\psi(x_1, x_2)^T \theta = -M(q)^{-1}[C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)]$$

$$\psi(x_1, x_2)^T = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{bmatrix}$$

Prenant les éléments de  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  et  $G(q)$  données dans l'annexe, on trouve

$$\psi_1 = l_2^2 (2l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - l_2 g \cos(q_1 + q_2) - l_1 g \cos(q_1))$$

$$+ (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)) (l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2))$$

$$+ m_1 m_2 \left[ \psi_2 = -l_2^2 l_1 g \cos(q_1) \right]$$

$$m_2^2 \psi_3 = (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)) (-2l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2) + l_1 g \cos(q_1))$$

$$- (l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + l_1^2) (l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2))$$

$$+ m_1 m_2 \left[ \psi_4 = l_1 g \cos(q_1) \cdot (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)) - l_1^2 (l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2)) \right]$$

$$\theta = \frac{1}{\det M(q)} \begin{bmatrix} m_2^2 \\ m_1 m_2 \end{bmatrix}$$

### 2.5.3. Description de la méthode

Dans ce qui suit, on tient compte de  $\hat{\theta}$  qui est l'estimation du paramètre inconnu  $\theta$ . Le changement de variable adopté est décrit par les expressions suivantes :

$$z_1 = x_1 - q_d \quad (2.73)$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 - \dot{q}_d \quad (2.74)$$

Soit la fonction stabilisante  $\alpha_1$  :

$$\alpha_1(x_1) = -c_1 z_1 \quad (2.75)$$

avec :

$c_1$  : Constante réelle positive dite « gain de la contre réaction »

#### 2.5.3.1. Cas non adaptative

Alors le système peut être formulé en utilisant les nouvelles variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d \\ &= \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d \end{aligned}$$

et

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d$$

$$\dot{z}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (2.77)$$

Pour le système d'équation (2.76) et (2.77), on va concevoir une loi de commande  $u = \alpha_2(x_1, x_2)$ . Afin de rendre la dérivée de la fonction de Lyapunov définie négative. Cet objectif peut être complété par une simple fonction de Lyapunov définie positive :

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (2.78)$$

$$\dot{V} = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2$$

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 + z_2 \left( \underbrace{z_1 + \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d}_{-c_2 z_2} \right) \quad (2.79)$$

Pour atteindre la négativité de  $\dot{V}$ , le long de la trajectoire, on va choisir la commande  $u$  comme suit :

$$\begin{aligned} -c_2 z_2 &= z_1 + \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \\ u &= \frac{1}{\beta} \left[ -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \theta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \ddot{q}_d \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} = c_1 \end{cases}$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2(x_1, x_2)$  s'écrit comme suit :

$$\alpha_2(x_1, x_2) = -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \theta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d \quad (2.81)$$

alors :

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (2.82)$$

avec :

$c_2$  : Constante réelle positive

Ce qui signifie que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable. Alors le système en boucle fermé est linéaire stable. On décrit le système sous forme matricielle par :

$$\dot{Z} = AZ \quad (2.83)$$

$$A = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$$

### 2.5.3.2. Cas adaptative

La dynamique des erreurs sera donc

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (2.84)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (2.85)$$

$$\dot{z}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d \quad (2.86)$$

La fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (2.87)$$

Avec 
$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

On dénote par  $\Gamma$  le gain d'adaptation.

Alors la dérivée de  $\dot{V}$  est :

$$\dot{V} = z_1 \dot{z}_2 + z_2 \dot{z}_1 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \quad (2.88)$$

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ \underbrace{z_1 + \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d}_{-c_2 z_2} \right] + \tilde{\theta}^T \left[ \Gamma \psi z_2 - \dot{\hat{\theta}} \right]$$

### Loi d'adaptation

Deux hypothèses interviennent :

1. Si  $\tilde{\theta} = 0$ , le système devient alors asymptotiquement linéaire et stable.
2. Si  $\tilde{\theta} \neq 0$ , on doit choisir une loi d'adaptation pour éliminer l'erreur paramétrique  $\tilde{\theta}$ .

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}); \tau_2 = \psi \cdot z_2 \quad (2.89)$$

### Loi de commande par backstepping adaptative

Pour que le système soit globalement stable ( $\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ ) il faut que :

$$\beta \cdot u + z_1 + \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d = -c_2 z_2$$

avec :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Alors la loi de commande sera comme suit :

$$u = \frac{1}{\beta} \left[ -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \ddot{q}_d \right] \quad (2.90)$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2$  s'écrit :

$$\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, q_d, \dot{q}_d) = -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (2.91)$$

Puisque :

$$u = \frac{1}{\beta} [\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, q_d, \dot{q}_d) + \ddot{q}_d] \quad (2.92)$$

Donc l'équilibre  $x_1 \rightarrow q_d$  est globalement asymptotiquement stable (GAS) et  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \rightarrow q_d(t)$  ; le système en boucle fermée résultant est linéaire stable, comme l'indique sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^T \end{bmatrix} \tilde{\theta} \quad (2.93)$$

Ce qui nous permet d'avoir le diagramme fonctionnel suivant qui représente la commande adaptative du système en boucle fermée :

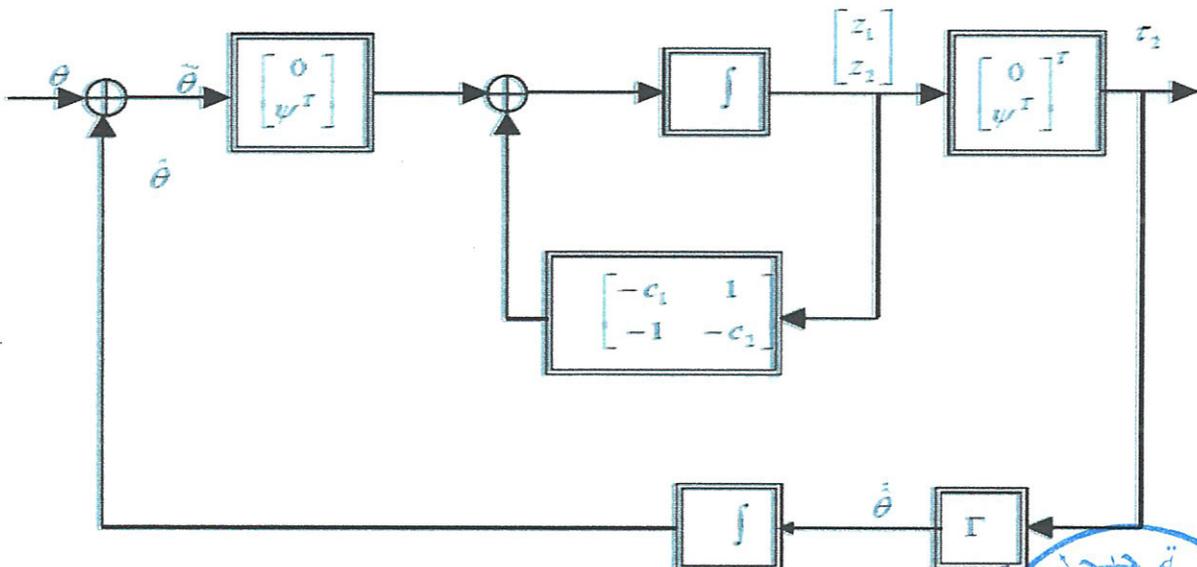


Figure.2.20 : Commande adaptative du système bouclé  $\tilde{x}$



### 2.5.4. Résultats de simulation

#### 2.5.4.1. Cas non adaptative

$l_1 = 0.432 \text{ m} ; l_2 = 0.432 \text{ m} ; m_1 = 15.5 \text{ kg} ; m_2 = 11.5 \text{ kg} ; g = 9.81 \text{ m/s}^2 ; c_1 = c_2 = 8 ;$

$q_1(0) = 0 ; q_2(0) = 0 ;$

$$q_{1d}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad} ; \quad 0 \leq t \leq 5 ; \quad q_{2d}(t) = 1 - 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}$$

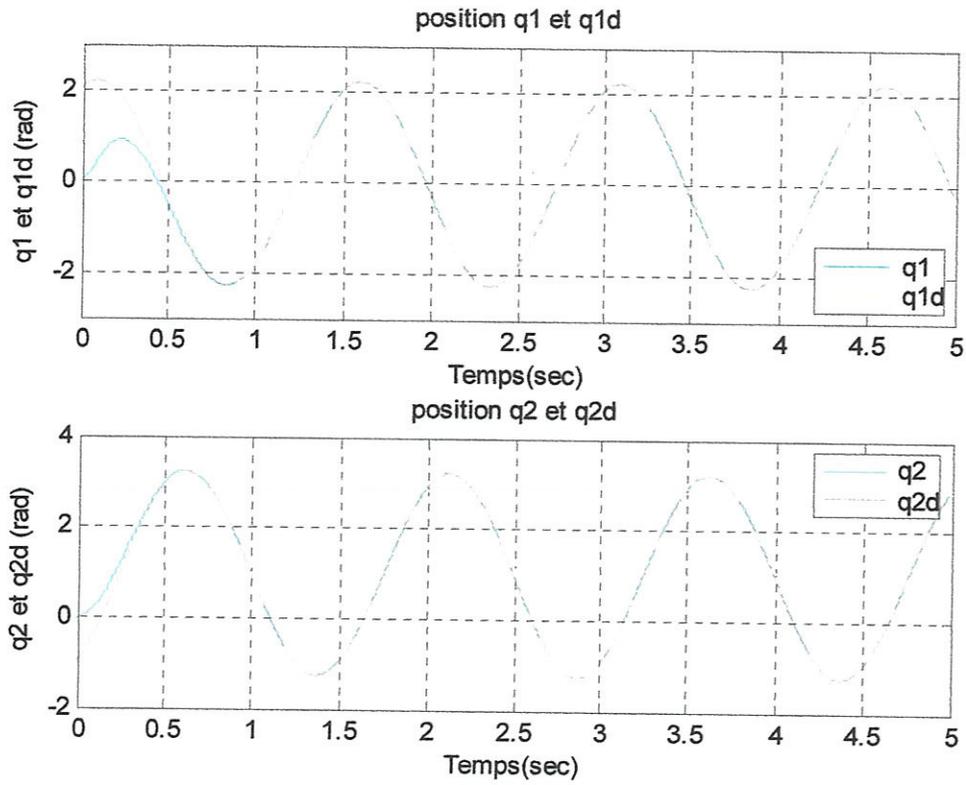


Figure 2.21 : Trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations

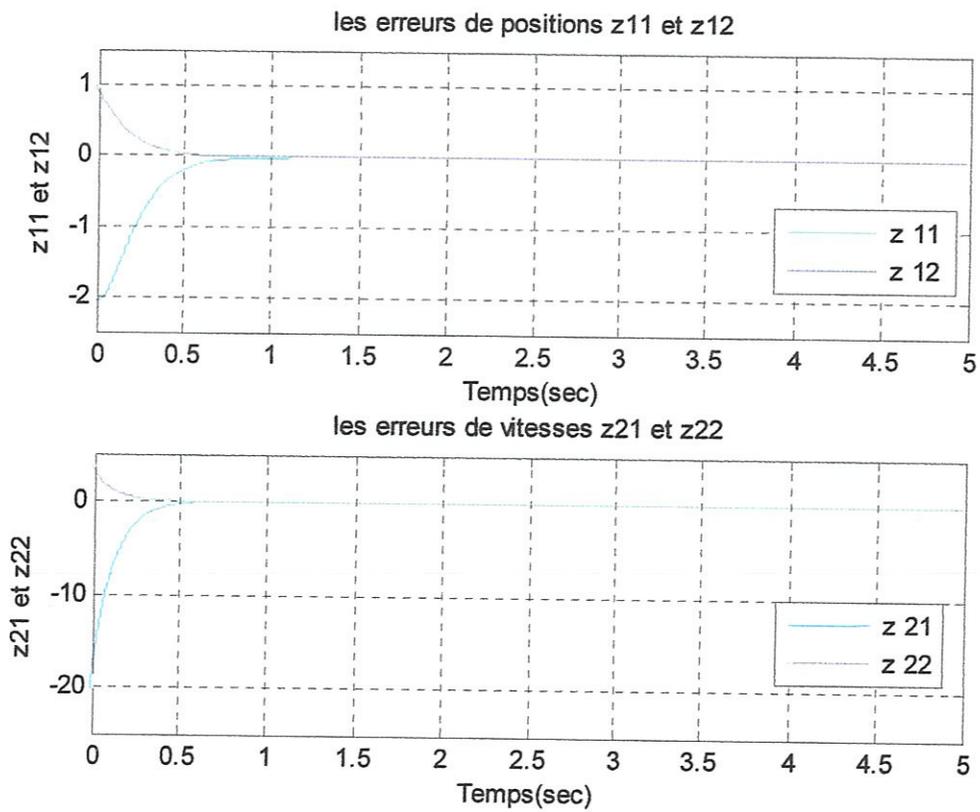
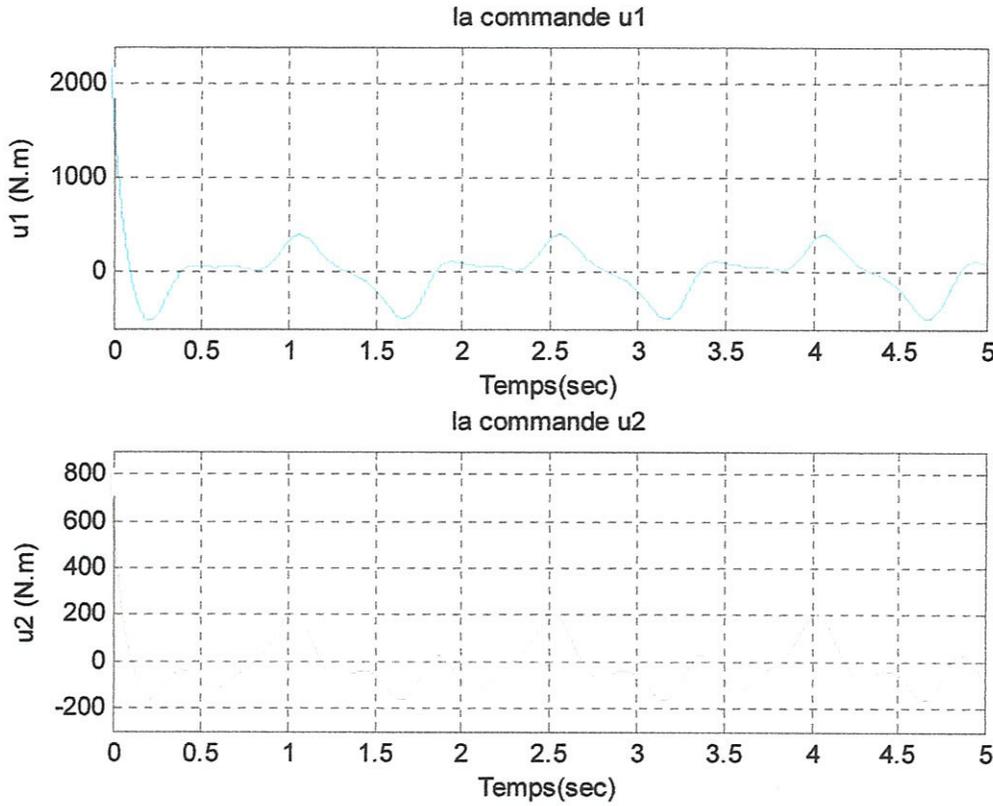


Figure 2.22 : Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations



**Figure 2.23:** Couples d'entrée pour les deux articulations

Les figures (2.21), (2.22) et (2.23) représentent le résultat de la commande par backstepping avec tous les paramètres bien connus.

Le suivi de la trajectoire désirée est réalisé après 0.5 seconde avec une erreur presque nulle après 1 seconde. Concernant le couple d'entrée, la valeur de la commande d'entrée est très satisfaisante. Malheureusement, cette commande est valable sauf pour les systèmes connus avec précision.

On suppose maintenant que les masses de notre robot ne sont pas connues, la commande par backstepping adaptative est appliquée pour résoudre ce problème là.

#### 2.5.4.2. Cas adaptative

$$l_1 = 0.432 \text{ m} ; l_2 = 0.432 \text{ m} ; m_{01} = 15 \text{ kg} ; m_{02} = 12 \text{ kg} ; g = 9.81 \text{ m/s}^2 ; c_1 = c_2 = 8 ;$$

$$q_1(0) = 0 ; q_2(0) = 0 ; \Gamma = 5 ;$$

$$q_{1d}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad} ; \quad 0 \leq t \leq 5 ; \quad q_{2d}(t) = 1 - 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}$$

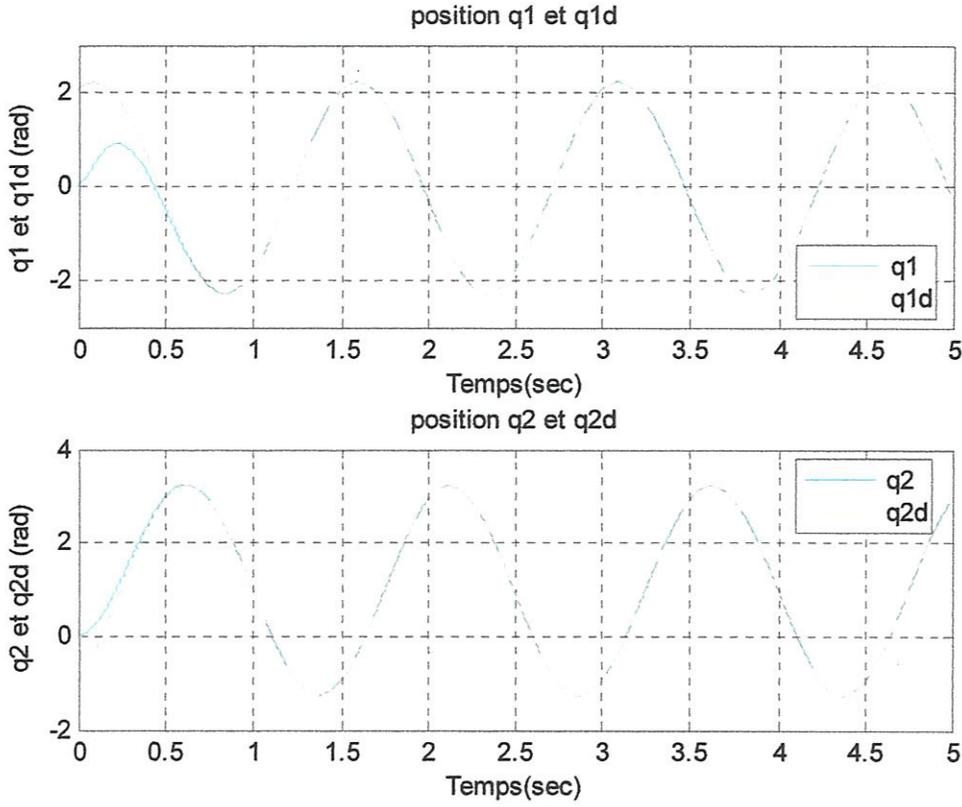


Figure 2.24 : Trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations

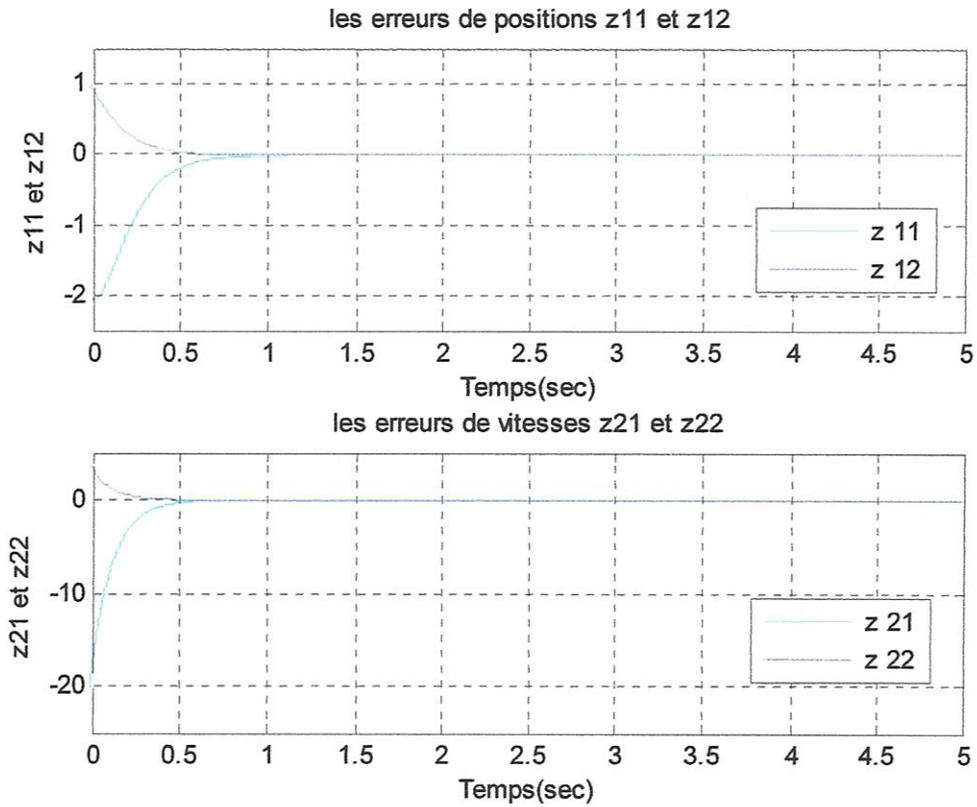
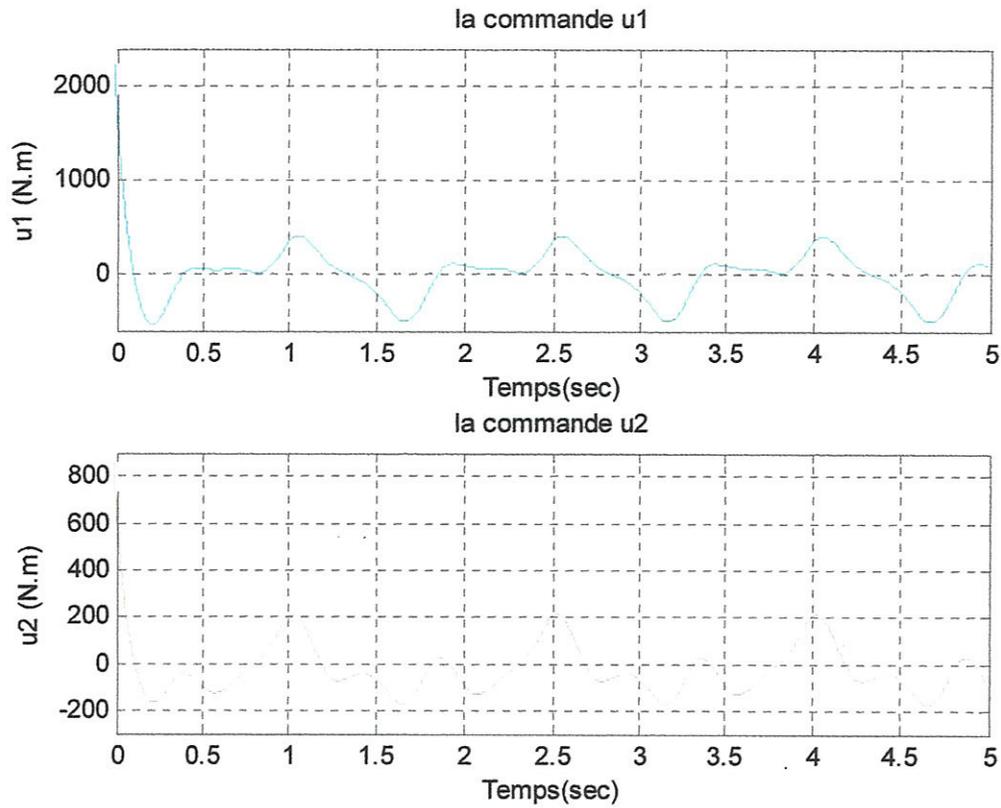
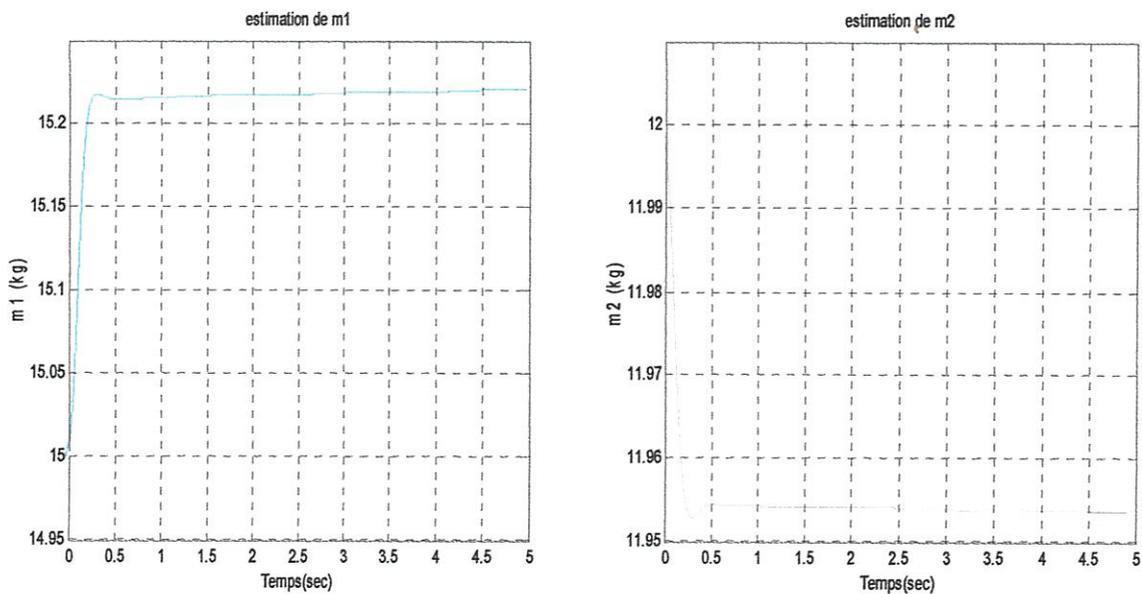


Figure 2.25 : Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations



**Figure 2.26:** Couples d'entrée pour les deux articulations



**Figure 2.27:** Paramètres estimés

Les trajectoires réelles et désirées des deux articulations sont données par la figure (2.24). Nous remarquons que la trajectoire réelle suit la trajectoire désirée pour les deux articulations. La figure (2.25) donne les erreurs de suivi de trajectoires désirées pour les deux articulations, il est clair que ces erreurs tendent vers zéro. Les estimations des valeurs inconnues des

masses sont données par la figure (2.27). Ces résultats prouvent clairement l'efficacité de cette loi de commande par backstepping adaptative.

La figure (2.26) donne les couples d'entrée pour les deux articulations. Ces couples restent acceptables.

## 2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un petit rappel sur les systèmes non linéaires ensuite la description de la technique du « backstepping » et aussi « backstepping adaptative » ont été présentées. Cette procédure permet d'obtenir de façons constructives une loi de commande qui assure la stabilité du système en boucle fermée via une fonction de Lyapunov. En appliquant cette technique de commande sur un robot à deux degrés de liberté, nous avons obtenu des bons résultats, ce qui prouve l'importance de la technique utilisée.

# Chapitre 3

## Commande par backstepping adaptative avec observateur appliquée sur un robot manipulateur

### 3.1. Introduction

Ce chapitre est dédié à la commande par backstepping adaptative basé sur la présence d'un observateur. Le problème d'observabilité a une importance pratique, car certaines variables internes sont quelques fois inaccessibles à la mesure ou «coûteuse» à mesurer. La plupart du temps, soit par l'impossibilité physique d'introduire un capteur, soit capteurs sont coûteux [10].

On va voir comment on peut, à partir des mesures faites sur l'entrée et la sortie du processus, reconstruire, le vecteur d'état  $x$ , noté  $\hat{x}$ . Le sous- système, qui réalise cette reconstruction, est appelé observateur.

L'observateur a comme entrée les entrées et les sorties du processus réel et comme sortie la valeur estimée (reconstruite) de l'état de processus (figure 3.1).

Le problème de l'observateur consiste donc à reconstruire, pour un processus donné, un système défini par ses équations d'état, dont la sortie donne une estimation de l'état réel du processus. Cette estimation comporte une erreur qui doit tendre vers zéro. Quand cette propriété est satisfaite, l'observateur est asymptotiquement stable.



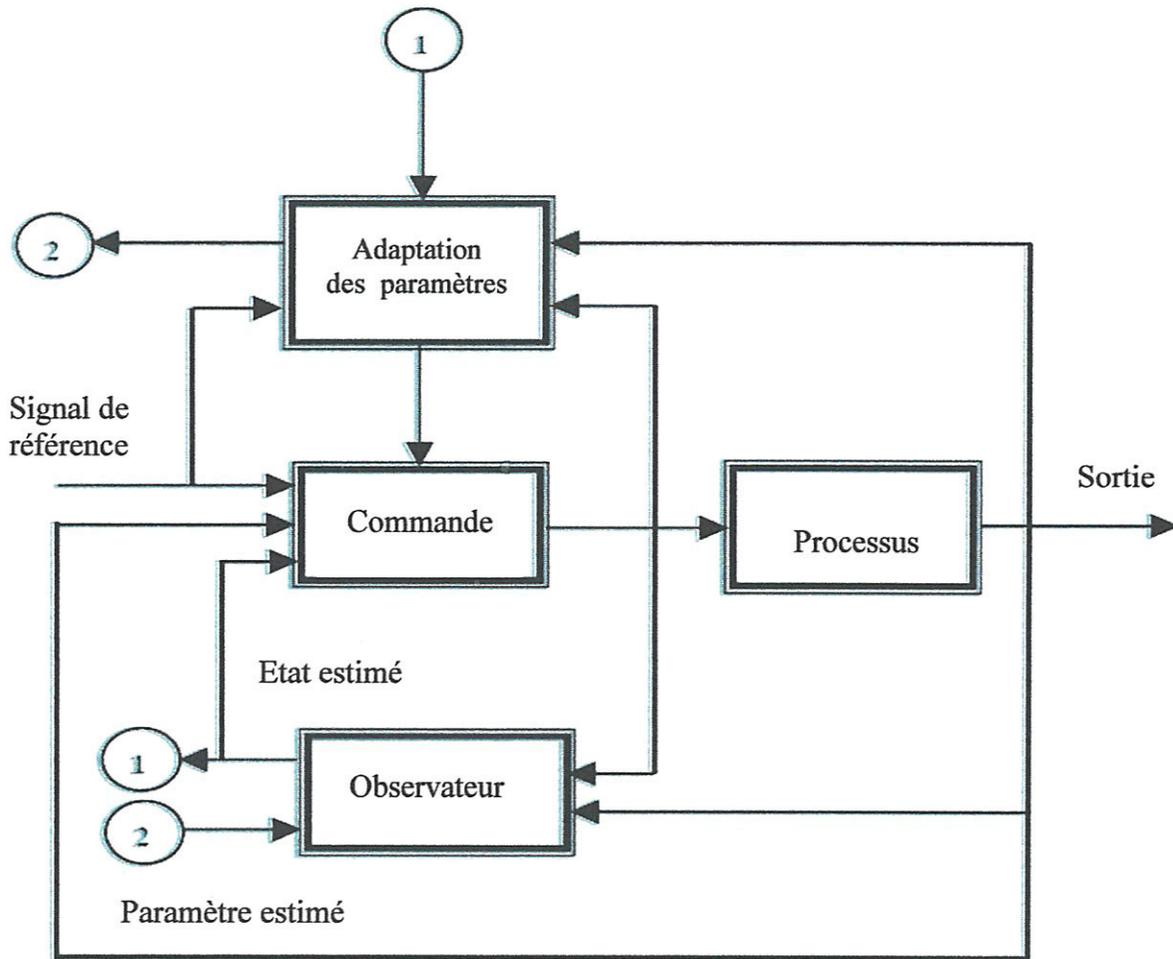


Figure 3.3 : Schéma de principe de la commande par backstepping adaptative avec observateur

Dans le but de faire la synthèse de la commande par backstepping adaptative avec observateur, les hypothèses suivantes sont supposées réalisées :

1. La plupart des états ne sont pas disponibles ;
2. La fonction de sortie  $y = h(x)$  doit être définie ;
3. Les non-linéarités du système sont fonctions de grandeurs mesurables.

Ces conditions supplémentaires permettent au système de prendre la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi_1(y)^T \theta \\ \dot{x}_2 = x_3 + \varphi_2(y)^T \theta \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \varphi_{n-1}(y)^T \theta \\ \dot{x}_n = \beta(x)u + \varphi_n(y)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que chaque  $\varphi_i : R \rightarrow R^p$  est un vecteur de fonctions non linéaires, et  $\theta \in R^p$  est un vecteur de paramètres constants.

Dans le but de concevoir un observateur, le système (3.1) peut être représenté par la somme :

1. d'une partie connue linéaire,
2. d'une partie non linéaire inconnue,
3. d'une fonction de commande.

$$\dot{x} = \underbrace{Ax}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\varphi(y)^T \theta}_{\text{Non linéaire inconnue}} + \underbrace{\beta \cdot g(y)u}_{\text{Commande}}$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \varphi(y) = [\varphi_1(y)^T \quad \varphi_2(y)^T \quad \dots \quad \dots \quad \varphi_i(y)^T \quad \dots \quad \varphi_n(y)^T]$$

$$\beta^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 1]; x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_n]^T; \theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_i \quad \dots \quad \theta_p]^T$$

### 3.3. Observateur

Si on note  $\hat{x}$  le vecteur d'état estimé et  $\tilde{x}$  l'erreur de l'observation alors [10]:

$$x = \hat{x} + \tilde{x}$$

un observateur est définie par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi^T(y)\theta + \beta \cdot g(y)u + K(y - \hat{y}) \\ y = C^T \hat{x} \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec  $K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad \dots \quad k_n]^T, k_i \geq 0, 0 \leq i \leq n$

On choisit  $K$  de façons que  $A_0 = A - KC^T$  est une matrice de Hurwitz,

En a l'erreur d'observateur  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  alors [12]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_0 \tilde{x} \\ \tilde{x}(0) &= x_0 \quad \text{et} \quad \tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

### 3.4. Application de la commande par backstepping adaptative avec observateur sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté

Pour cette application, on va montrer comment le problème de la commande adaptative d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté va être résolu en utilisant la technique du backstepping avec un observateur de vitesse en supposant que seules les positions des segments sont mesurables.

#### 3.4.1. Modèle et propriétés

##### ➤ Modèle

En appliquant le formalisme de Lagrange, le système peut être décrit par le modèle, suivant :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.4)$$

Le vecteur d'état peut être décrit par :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$$

La représentation d'état du système sans frottement peut s'écrire alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M^{-1}(x_2) [\tau - C(x_1, x_2)x_1 - G(x_2)] \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (3.5)$$

##### ➤ Propriétés

Ce type de robot possède les propriétés suivantes :

- Propriété 1 :  $M(q)$  est symétrique définie positive,  $\exists M_M \geq M_m > 0$  tel que

$$M_m I_n < \|M(q)\| < M_M I_n, \forall q \in R^n \text{ avec } I_n \text{ matrice d'identité } (2 \times 2).$$

- Propriété 2 :  $C(q, \dot{q}_1)\dot{q}_2 = C(q, \dot{q}_2)\dot{q}_1$ .

- Propriété 3 :  $\|C(q, \dot{q})\| < C_M \|\dot{q}\|$  avec  $C_M$  une constante positive.

- Propriété 4 :  $N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q, \dot{q}) - 2C(q, \dot{q})$  est antisymétrique, et

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}).$$

- Propriété 5 :  $M(q)\psi + C(q, \zeta)\zeta + G(q) = \varphi_0(q, \zeta, \psi) + \varphi(q, \zeta, \psi)\theta$  où  $\zeta \in R^p$  et  $\theta \in R^p$  vecteur de paramètres inconnus. [13]

#### 3.4.2. Backstepping adaptative avec observateur

On suppose que la vitesse du robot est limitée par une valeur constante  $\omega_{\max}$  tel que

$$\|\dot{q}\| < \omega_{\max} \quad \forall t \geq 0.$$

On considère l'erreur et sa dérivée suivantes :

$$\begin{cases} z_1 = q - q_d \\ \dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{q}_d \end{cases} \quad (3.6)$$

L'idée principale du backstepping est de choisir l'un des variables d'état comme étant la commande virtuelle.

$$\zeta_1 = \hat{x}_1 = z_2 + \alpha_1 \quad (3.7)$$

Tel que  $\zeta_1$  représente la somme de l'erreur  $z_2$  et la fonction stabilisante  $\alpha_1$ , alors on peut déduire à partir de l'équation (3.7) :

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 + \dot{\alpha}_1 + \tilde{x}_1 - \dot{q}_d \quad (3.8)$$

avec :

$$x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1$$

La fonction stabilisante est choisie de sorte que :

$$\alpha_1 = -C_1 z_1 - D_1 z_1 + \dot{q}_d \quad (3.9)$$

Avec  $C_1 \in R^{2 \times 2}$  matrice positive et toujours diagonale, et  $D_1 \in R^{2 \times 2}$  positive diagonal tel que :

$$\begin{cases} C_1 = \text{diag}[c_{11}, c_{12}] \\ D_1 = \text{diag}[d_{11}, d_{12}] \end{cases} \quad (3.10)$$

avec :

$$\begin{cases} c_{1i} > 0 \\ d_{1i} > 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

Sachant que le terme  $-D_1 z_1$  est rajouté pour compenser  $\tilde{x}_1$ , on peut écrire (3.8) sous forme :

$$\dot{z}_1 = -(C_1 + D_1)z_1 + z_2 + \tilde{x}_1 \quad (3.11)$$

L'étape suivante consiste à représenté la dynamique de  $z_2$  en utilisant l'équation (3.7), ce qui donne :

$$\dot{z}_2 = \dot{\zeta}_1 - \dot{\alpha}_1 = \dot{\hat{x}}_1 + (C_1 + D_1)\dot{z}_1 - \dot{q}_d \quad (3.12)$$

$$\dot{z}_2 = -(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)(z_2 + \tilde{x}_1) - \dot{q}_d + \hat{M}(q)^{-1} [\tau - \hat{C}(q, x_1)\dot{\hat{x}}_1 - \hat{G}(q)] + K \cdot \tilde{x}_1 \quad (3.13)$$

L'équation de l'observateur est donnée par l'équation (3.14) et explicitée par la figure (3.4)

$$\dot{\hat{x}}_1 = \psi(q, \hat{x}_1, \tau, \hat{\theta}) + K \cdot \tilde{x}_1 \quad (3.14)$$

$$\psi(q, \hat{x}_1, \tau, \hat{\theta}) = \hat{M}(q)^{-1} [\tau - \hat{C}(q, \hat{x}_1)\dot{\hat{x}}_1 - G(q)] \quad (3.15)$$

Tel que  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  est l'erreur d'observateur, et  $K > 0$  est la matrice diagonale de gain.

Le paramètre estimé utiliser en (3.14) et (3.15), est obtenu à partir de la loi d'adaptation :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \varphi^T(q, \hat{x}_1, \psi) \tilde{x}_1 \quad (3.16)$$

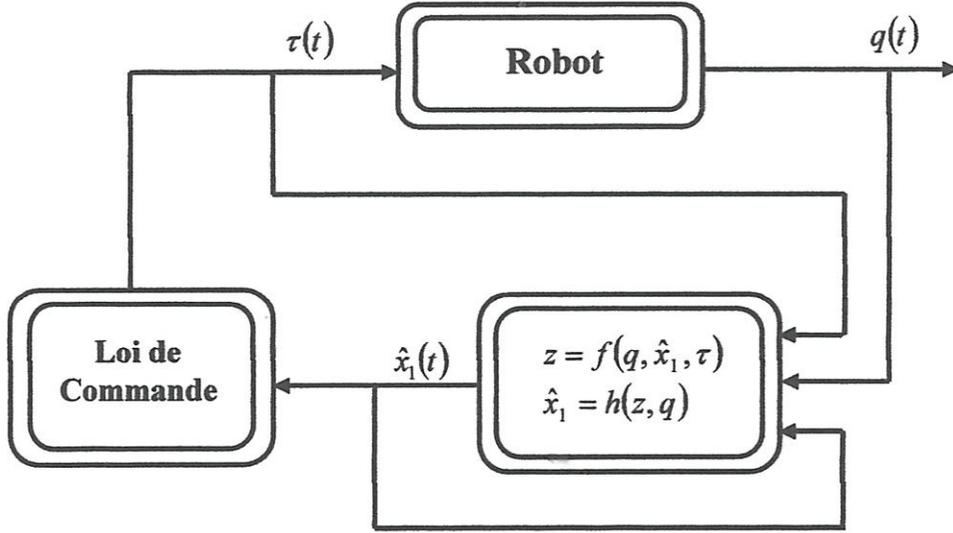


Figure 3.4 : Diagramme bloc de commande avec observateur

On choisit la loi de commande suivante :

$$u = \tau = -\hat{M}(q) \left[ -(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1) z_2 - \ddot{q}_d + C_2 z_2 + D_2 z_2 + z_1 \right] + \hat{C}(q, \hat{x}_1) \hat{x}_1 + \hat{G}(q) \quad (3.17)$$

avec  $C_2 \in R^{2 \times 2}$  matrice positive et diagonale. A partir des équations (3.16) et (3.17), on aura :

$$\dot{z}_2 = -C_2 z_2 - D_2 z_2 - z_1 + \Omega \cdot \tilde{x}_1 \quad (3.18)$$

Tel que :

$$\Omega = (C_1 + D_1) + K$$

$$D_2 \in R^{2 \times 2}, D_2 = \text{diag}[d_{21} \omega_1^T \omega_1, d_{22} \omega_2^T \omega_2]$$

$$\Omega^T = [\omega_1, \dots, \omega_n] \quad \text{et} \quad d_i > 0 \quad (i = n+1, \dots, 2n)$$

### 3.4.3. Etude de la stabilité

En tenant compte des équations (3.11) et (3.18), la dynamique de l'erreur peut s'écrire :

$$\dot{z} = -(C_z + D_z)z + W \cdot \tilde{x}_1 \quad (3.19)$$

$$M^{-1}(q) \dot{\tilde{x}}_1 = -C(q, x_1) x_1 + C(q, \hat{x}_1) \hat{x}_1 - M(q) K \cdot \tilde{x}_1 - \varphi(q, \hat{x}_1, \psi) \tilde{\theta} \quad (3.20)$$

avec :

$$z = [z_1 \quad z_2]^T, \quad C_z = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad W = [I \quad \Omega]^T$$

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} (z^T z + \tilde{x}_1 \cdot M(q) \tilde{x}_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}) \quad (3.21)$$

En utilisant les équations (3.19) et (3.20), la dérivée de  $V$  aura la structure suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T (M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1)) \hat{x}_1 \\ & + \tilde{x}_1^T \left( \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, x_1) \right) \tilde{x}_1 - \tilde{\theta}^T \left( \varphi^T(q, \tilde{x}_1, \psi) + \Gamma^{-1} \dot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec l'ajoute du terme nul  $\frac{1}{4}(\tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1)$  et l'utilisation de l'équation (3.17) et la propriété (4), on aura :

$$\dot{V} = -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^T \left( M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1) - \frac{1}{4} P \right) \cdot \tilde{x}_1 \quad (3.23)$$

On définit la matrice  $P$  par :

$$P = pI \quad (3.24)$$

avec :

$$p = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i} \quad (3.25)$$

Sachant que :

$$-z^T D_z z + z^T W \cdot \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \cdot \tilde{x}_1 \leq 0 \quad (3.26)$$

on peut déduire la dérivée de Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq -z^T C_z z - \tilde{x}_1^T \left( M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1) - \frac{1}{4} P \right) \tilde{x}_1 \\ & \leq -z^T C_z z - \left( M_M(q)K + C_M \omega_{\max} - C_M \|\tilde{x}_1\| - \frac{1}{4} P \right) \cdot \|\tilde{x}_1\|^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La condition qui satisfait la stabilité est telle que :

$$M_M K + C_M \omega_{\max} - C_M \|\tilde{x}_1\| - \frac{1}{4} P > 0$$

Ce qui permet d'écrire :  $\dot{V} \leq 0$ .

### 3.4.4. Résultats de simulation

#### 3.4.4.1. Le modèle

On considère un robot manipulateur à deux masses  $m_1, m_2$  (kg), de longueur  $l_1, l_2$  (m), d'angles  $q_1, q_2$  (rad), et couple  $\tau_1, \tau_2$  (N.m),  $m_2$  est le paramètre inconnu constant.[10]

Le modèle dynamique s'écrit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \text{ et } \theta = m_2$$

Où

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \text{ et } \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Avec  $M_{11}, M_{12}, M_{21}$  et  $M_{22}$ ,  $C_{11}, C_{12}, C_{21}$  et  $C_{22}$ ,  $g_1$  et  $g_2$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont motionnées sur l'annexe.

En utilisant les notations suivantes  $c_2 = \cos q_2$ ,  $s_2 = \sin q_2$  et  $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ , on peut déduire les fonctions représentatives suivantes :

$$\varphi^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + l_1^2)\ddot{q}_1 + (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_2 - (2l_1l_2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_2^2) + (l_2gc_{12} + l_1gc_1) \\ (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_1 + l_2^2\ddot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_1^2 + l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = (M(q(t)))^{-1} [\tau(t) - \hat{C}(q, \hat{x}_1)\hat{x}_1(t) - \hat{G}(q(t))]$$

$$\hat{M}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \cdot l_2^2 + 2\hat{\theta} \cdot l_1l_2c_2 + (m_1 + \hat{\theta})l_1^2 & \hat{\theta} \cdot l_2^2 + \hat{\theta} \cdot l_1l_2c_2 \\ \hat{\theta} \cdot l_2^2 + \hat{\theta} \cdot l_1l_2c_2 & \hat{\theta} \cdot l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}(q, \hat{x}_1) = \begin{bmatrix} -2\hat{\theta} \cdot l_1l_2s_2 \cdot \hat{x}_{12} & -\hat{\theta} \cdot l_1l_2s_2 \cdot \hat{x}_{12} \\ \hat{\theta} \cdot l_1l_2s_2 \cdot \hat{x}_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \cdot l_2gc_{12} + (m_1 + \hat{\theta})l_1gc_1 \\ \hat{\theta} \cdot l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = [x_{11} \quad x_{12}]^T = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T, \psi = [\psi_1 \quad \psi_2]^T$$

$$\varphi^T(q, \hat{x}_1, \psi) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + l_1^2) \cdot \psi_1 + (l_2^2 + l_1l_2c_2) \cdot \psi_2 - (2l_1l_2s_2 \cdot \hat{x}_{11} \cdot \hat{x}_{12} + l_1l_2s_2 \cdot \hat{x}_{12}^2) + (l_2gc_{12} + l_1gc_1) \\ (l_2^2 + l_1l_2c_2) \cdot \psi_1 + l_2^2 \cdot \psi_2 + l_1l_2s_2 \cdot \hat{x}_{11}^2 + l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

#### 3.4.4.2. Résultats

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris

$$l_1 = 0.432 \text{ m} ; l_2 = 0.432 \text{ m} ; m_1 = 15.91 \text{ kg} ; g = 9.81 \text{ m/s}^2 ;$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix} ; C_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} ; D_1 = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} ; D_2 = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} ; K = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} ;$$

$$m_2(0) = 8 \text{ kg} ; \Gamma = 0.1 ; q_1(0) = 0 ; q_2(0) = 0 ; \hat{x}_{11}(0) = 0 ; \hat{x}_{12}(0) = 0 ;$$

$$q_{1d}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad} ; q_{2d}(t) = 1 - 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad} ;$$

$$(a): 0 \leq t \leq 3 \quad ; \quad (b): 0 \leq t \leq 0.4$$

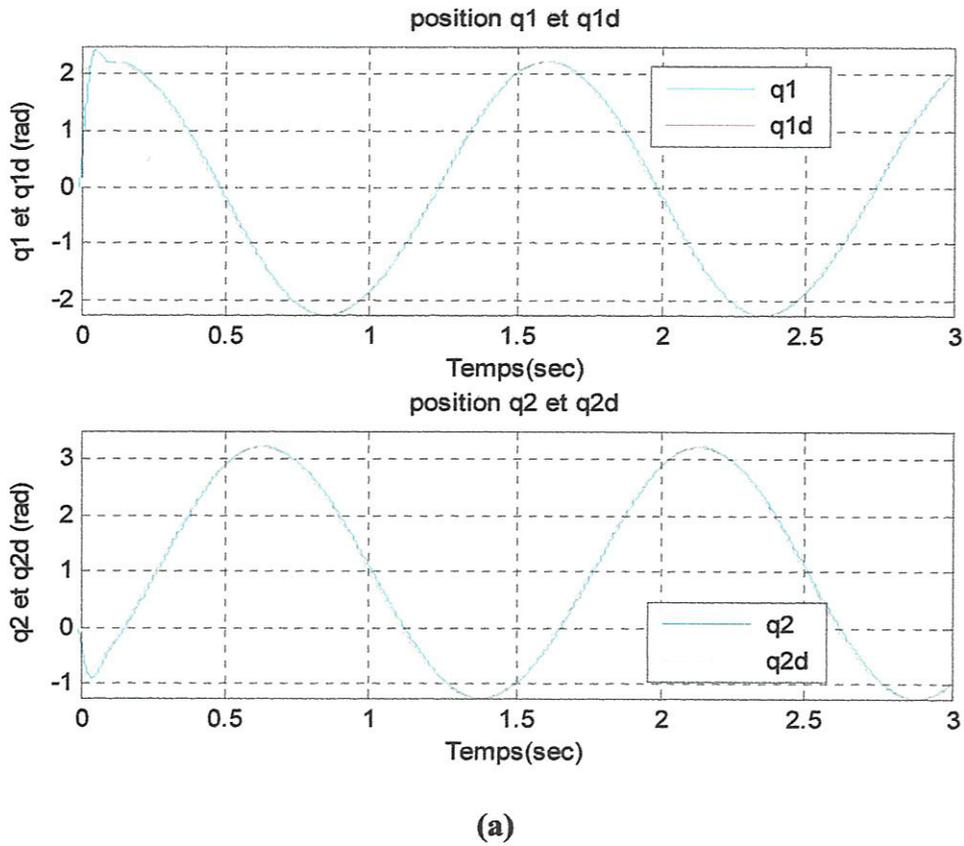


Figure 3.5 : Trajectoires réelles et désirées pour les deux articulations

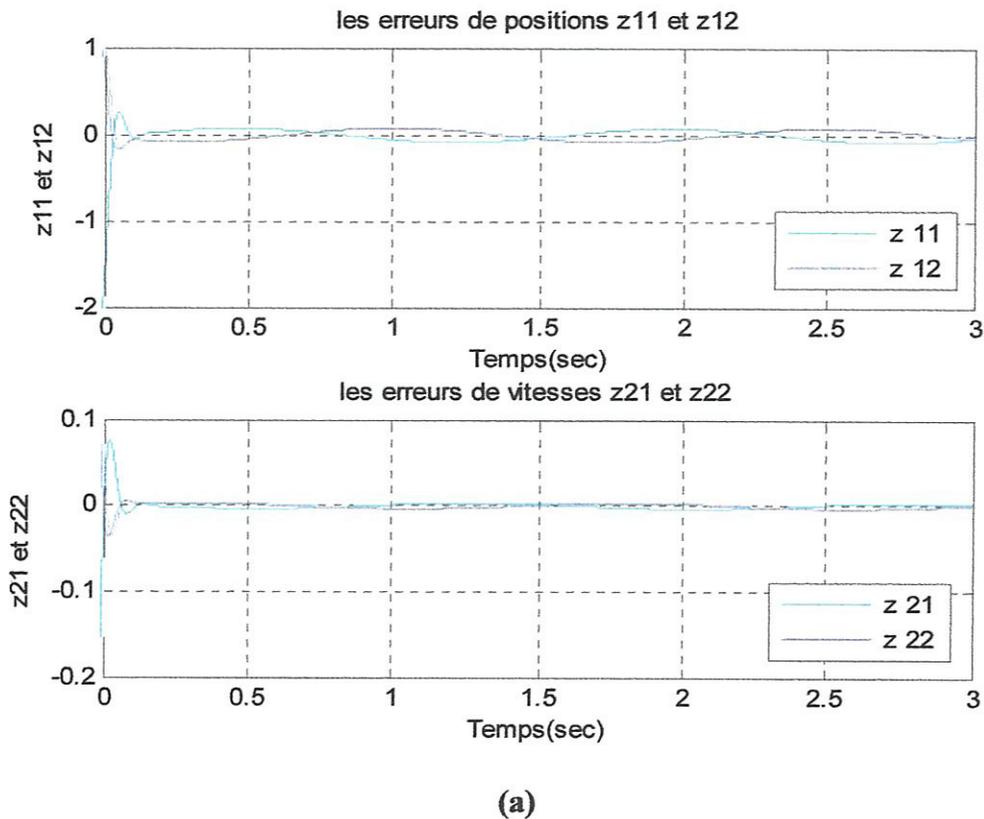


Figure 3.6 : Erreurs de positions et de vitesses pour les deux articulations

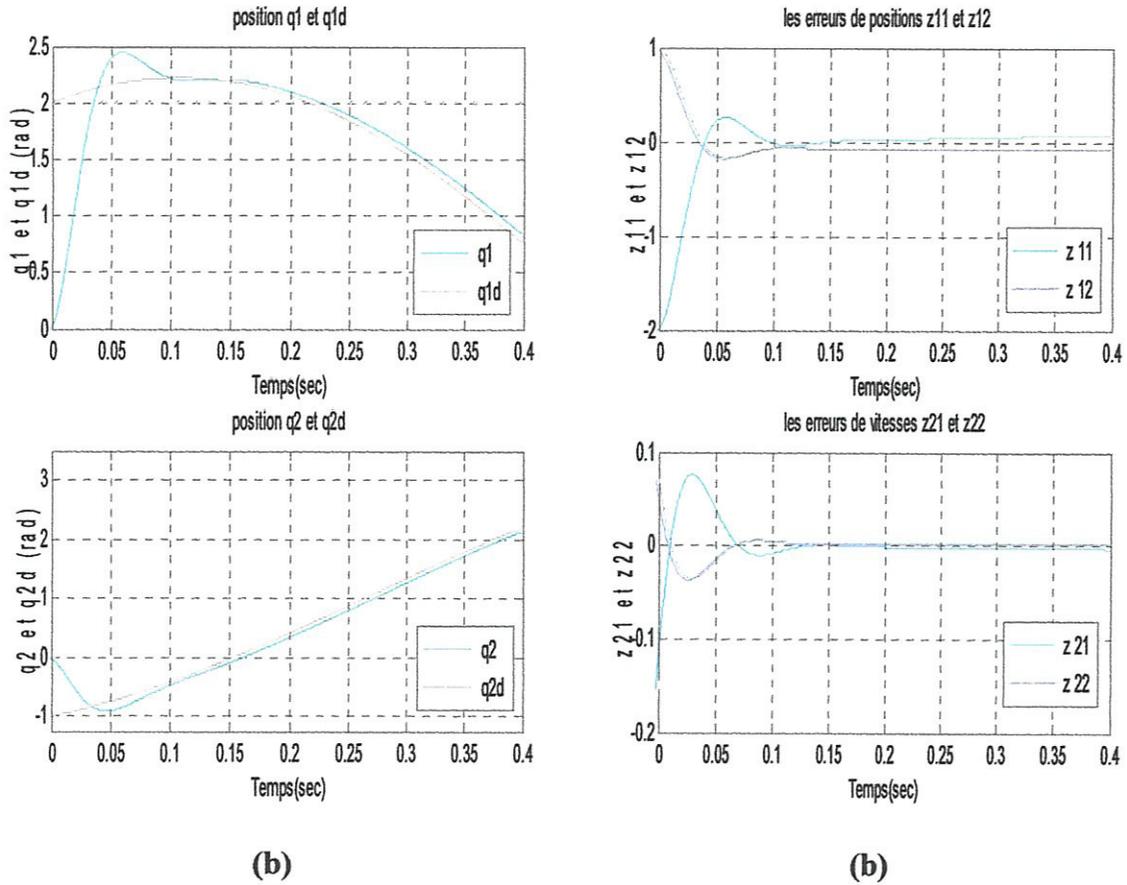


Figure 3.7 : Trajectoire désirée et les erreurs pour les deux articulations

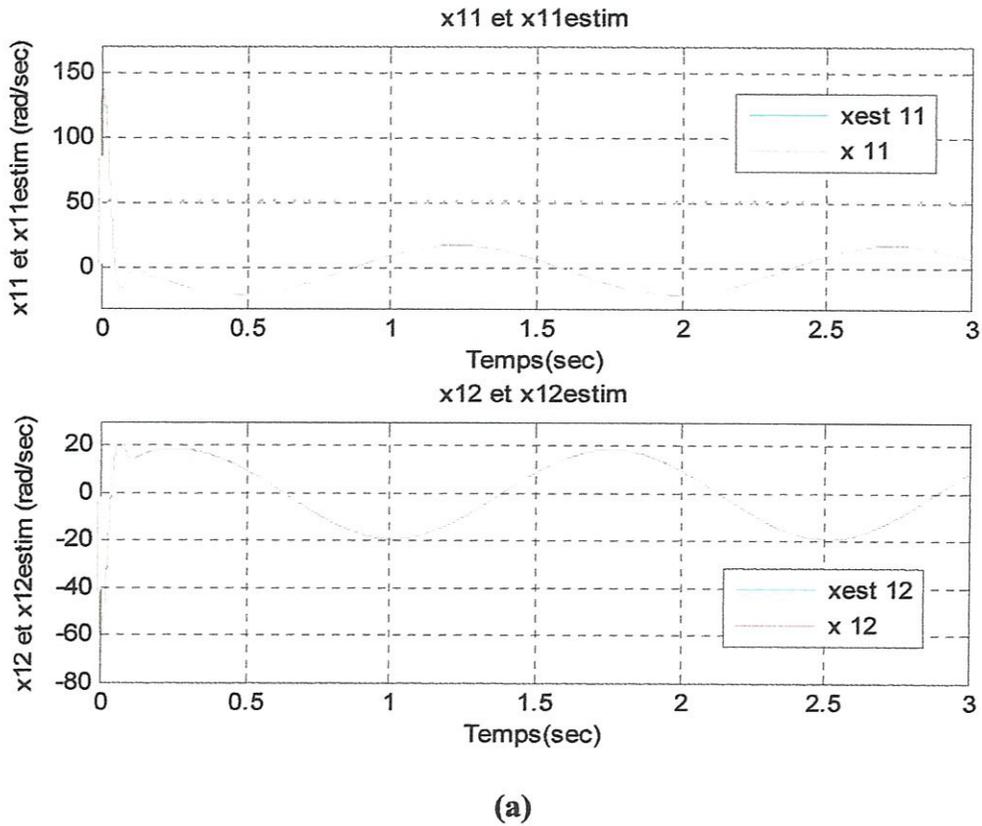


Figure 3.8 : Vecteur  $x_1$  et  $\hat{x}_1$  pour les deux articulations

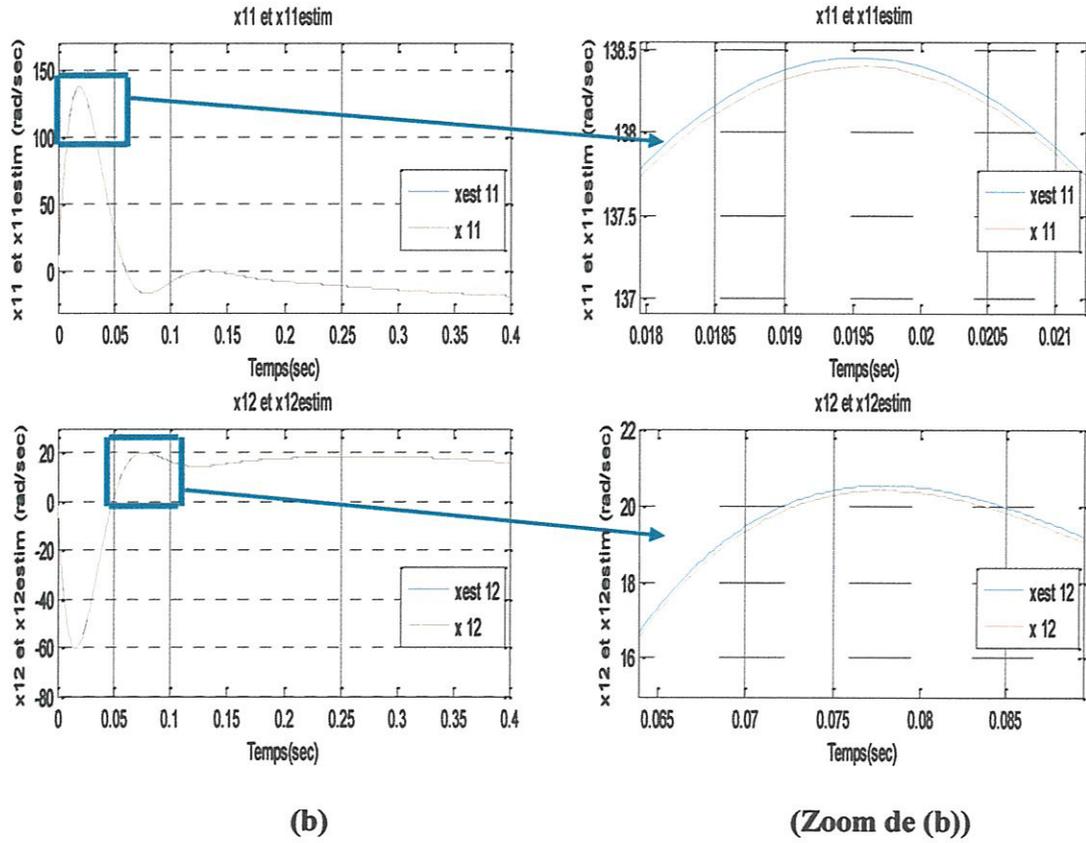


Figure 3.9 : Vecteur  $x_1$  et  $\hat{x}_1$  pour les deux articulations pour le cas (b)

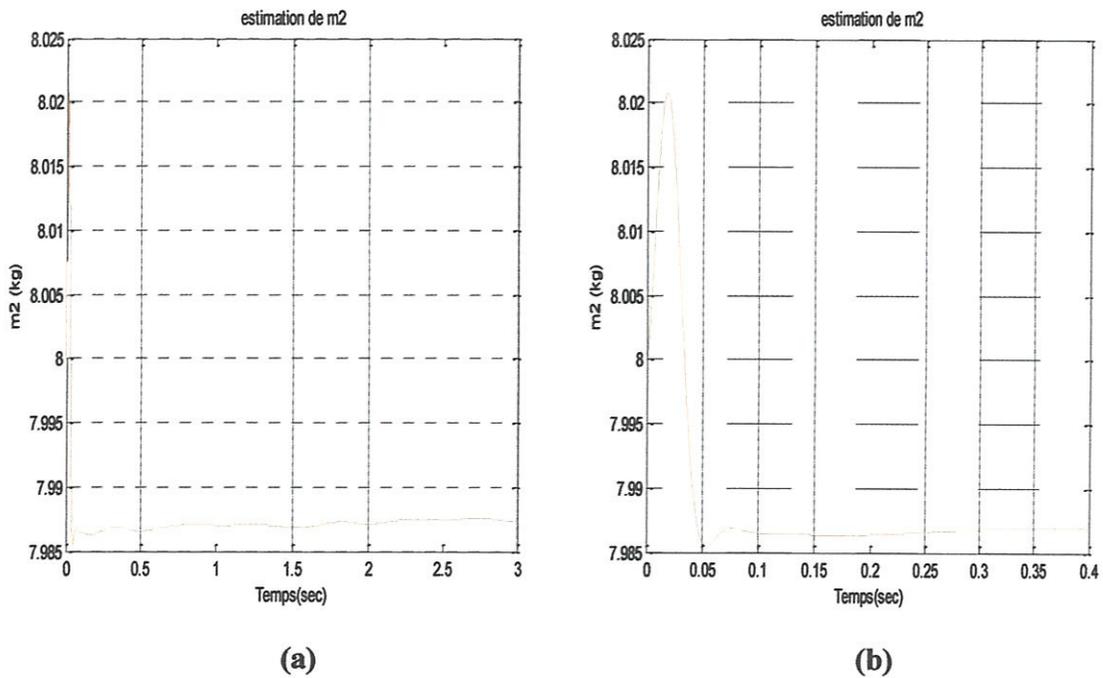


Figure 3.10: Paramètres estimés  $m_2$

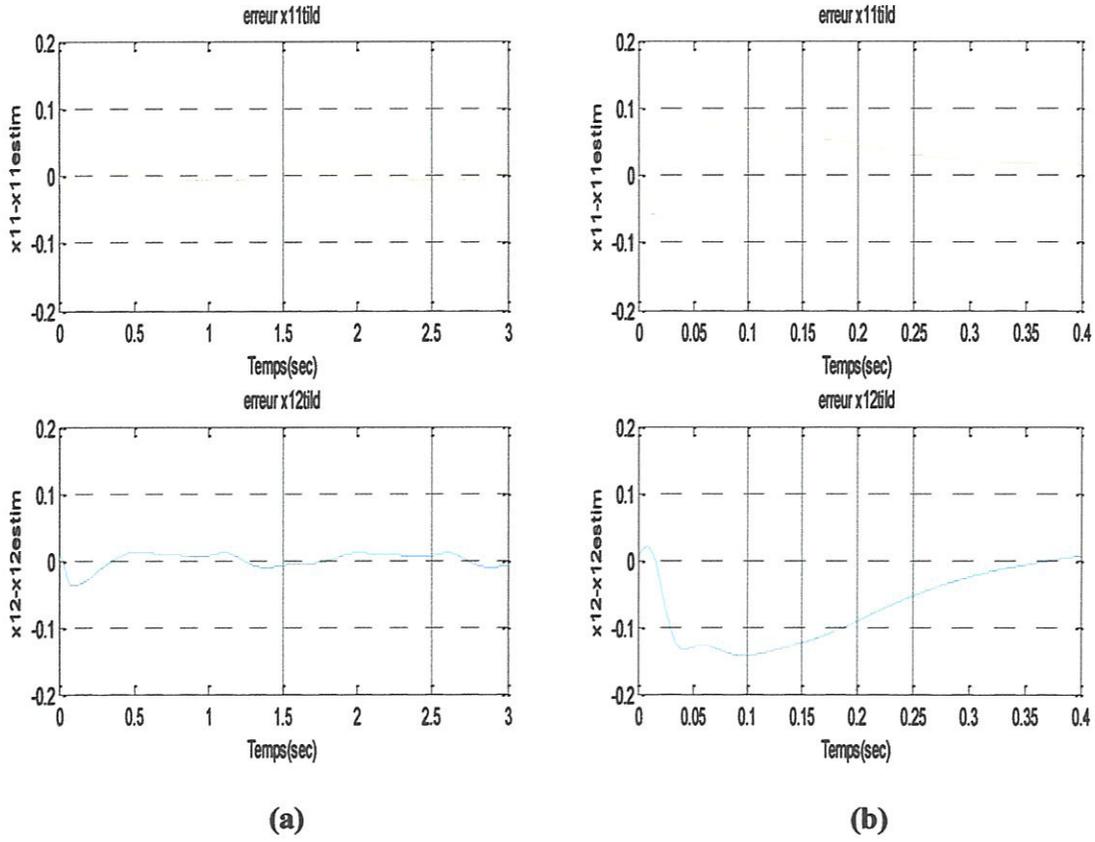


Figure 3.11 : Erreur entre le vecteur  $x_1$  et  $\hat{x}_1$  pour les deux articulations

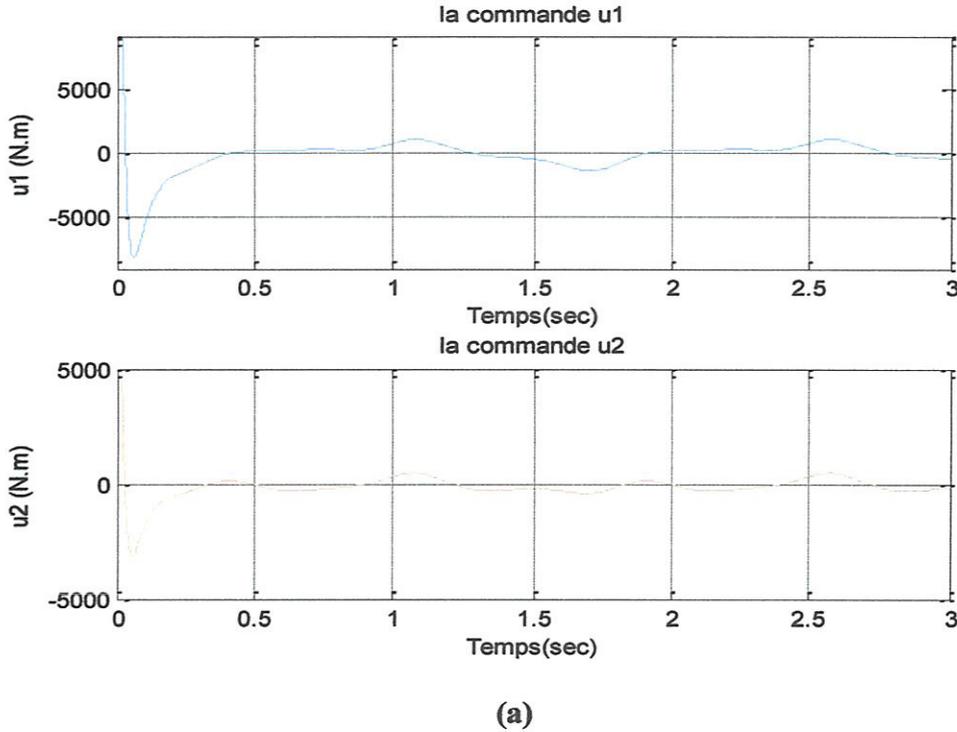


Figure 3.12: Couple d'entrée pour les deux articulations

Les figures de (3.5) jusqu'à (3.12) montrent l'efficacité de la commande par backstepping adaptative avec observateur sur le robot manipulateur a deux degrés de liberté.

Le suivie de la trajectoire est réalisé avec une erreur entre 0.08 et -0.08 et une estimation de la valeur inconnue de masse acceptable.

L'erreur entre le vecteur de vitesse  $x_1$  et le vecteur d'estimation de vitesses  $\hat{x}_1$  est bonne, et elle est entre la valeur 0.02 et -0.02.

Le couple d'entrée est un peu élevé au démarrage mais après 0.5 seconde la commande se stabilise.

### 3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie de la commande par backstepping adaptative avec observateur de vitesse des robots manipulateurs. Parmi les problèmes que nous avons rencontrés au cour de l'application de cette technique, l'adaptation de la méthode d'intégration de l'observateur et l'augmentation de l'ordre des équations dynamiques du robot manipulateur. Concernant l'adaptation, il est difficile de trouver la forme triangulaire qui sépare les paramètres à estimer des non linéarités. Par conséquent, on peut dire qu'il sera difficile de trouver une méthode générique de la commande par backstepping adaptative avec observateur qui s'applique à tous les types des systèmes non linéaires. Les résultats de simulation, obtenus de l'application de cette approche de commande à un robot à deux degrés de liberté, prouvent l'intérêt de cette technique combinée avec un observateur de vitesse.

## Chapitre 4

# Commande par backstepping du robot PUMA 560

### 4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application de la commande par backstepping sur le robot manipulateur de type PUMA 560. Dans la première partie de ce chapitre, on présente le modèle dynamique du robot PUMA 560. Dans la deuxième partie, on applique la commande par backstepping sur ce robot, en donnant une démonstration théorique et les résultats de simulation.

### 4.2. Présentation du robot PUMA 560

Dans cette étude, nous avons utilisé un robot de type PUMA 560. On a considéré uniquement les trois premières articulations rotationnelles  $q_1, q_2$  et  $q_3$  présentées sur la figure (4.1), et les trois dernières articulations sont supposées bloquées.

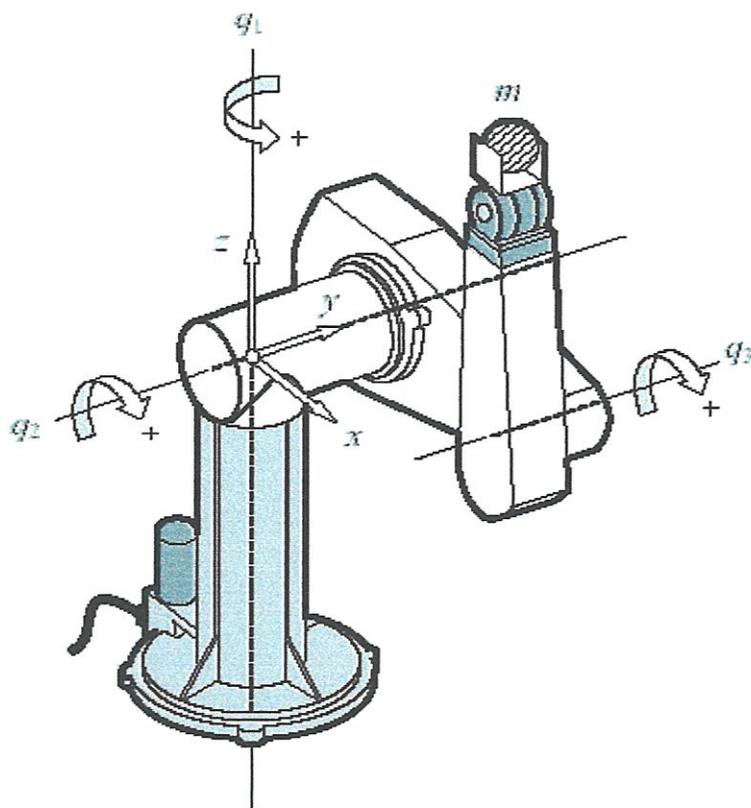


Figure 4.1 : Présentation du robot PUMA 560

#### 4.2.1. Modèle dynamique du robot PUMA 560

Le modèle dynamique de ce robot est donné par l'équation suivante [14] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_2^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_9 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23}))\dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23})\dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ + (I_6 c_2 + I_5 c_{23})\dot{q}_2^2 + 2I_5 c_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + I_5 c_{23} \dot{q}_3^2 \\ (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23}))\dot{q}_1^2 - I_4 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - 0.5 I_4 s_3 \dot{q}_3^2 \\ (I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 I_4 c_2 s_{23})\dot{q}_1^2 + 0.5 I_4 s_3 \dot{q}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_2 + 0.5 m_2 l_2) g c_2 - 0.5 m_3 l_3 g c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 g c_{23} \end{bmatrix}$$

Avec les notations suivantes:

$$I_1 = I_{YY1} + I_{XX2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3} + I_{xxt} + m_t d_2^2 + I_{M1}$$

$$I_2 = I_{YY3} - I_{XX3} + I_{yyt} - I_{xxt} + m_t l_3^2$$

$$I_3 = I_{YY2} - I_{XX2} + m_3 l_2^2 + m_t l_2^2$$

$$I_4 = m_3 l_2 l_3 + 2m_t l_2 l_3$$

$$I_5 = 0.5m_3 l_3 d_2 + m_t l_3 d_2$$

$$I_6 = 0.5m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2 + m_t d_2 l_2$$

$$I_7 = I_{ZZ2} + I_{ZZ3} + m_3 l_2^2 + I_{zzt} + m_t (l_2^2 + l_3^2) + I_{M2}$$

$$I_8 = I_{ZZ3} + I_{zzt} + m_t l_3^2$$

$$I_9 = I_8 + I_{M3}$$

### Paramètres réels du robot PUMA 560

Parties	Poids(kg)
Liaison 1	
Liaison 2	17.40
Liaison 3	4.80
Liaison 4*	0.82
Liaison 5*	0.34
Liaison 6*	0.09
Poignet	1.24

\* valeurs avec tolérance (kilogrammes  $\pm$  25%).

➤  $m_t = m_4 + m_5 + m_6$

**Tableau 4.1 :** Poids des différentes liaisons (kilogrammes :  $\pm$  0.01=1%).

### Paramètres géométriques :

➤  $d_2 = 194.09mm$

➤  $l_2 = 431.8mm$

➤  $l_3 = 433.07mm$

**Paramètres d'inertie :**

Parties	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$i_{zz}$	$I_{moteur}$
Liaison 1	-	-	0.35	1.14( $\pm 0.27$ )
Liaison 2	0.130 ( $\pm 3\%$ )	0.524 ( $\pm 5\%$ )	0.539 ( $\pm 3\%$ )	4.71 ( $\pm 0.54$ )
Liaison 3 avec poignet	0.192 ( $\pm 4\%$ )	0.0154 ( $\pm 5\%$ )	0.212 ( $\pm 4\%$ )	-
Liaison 4*	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	0.200 ( $\pm 0.016$ )
Liaison 5*	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	0.179 ( $\pm 0.014$ )
Liaison 6*	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.04 \cdot 10^{-3}$	0.193 ( $\pm 0.015$ )

\* Valeur avec tolérance :  $\pm 50\%$ .

**Tableau 4.2 : Paramètres d'inertie (  $kg \cdot m^2$  )**

La notation simplificatrice  $I_{xx}$  ,  $I_{yy}$  et  $I_{zz}$  signifie respectivement le moment d'inertie suivant l'axe x, y et z relative à chaque articulation, et la notation  $I_{moteur}$  le moment d'inertie du moteur.

Les expressions des éléments de  $M(q)$  ,  $C(q, \dot{q})$  et  $G(q)$  sont les suivants [14] :

➤ Les éléments de la matrice d'inertie  $M(q)$  :

$$\begin{aligned}
 m_{11} &\approx 2.57 + 1.38c_2^2 + 0.30s_2s_3 + 7.44 \times 10^{-1} c_2s_{23} \\
 m_{12} = m_{21} &\approx 6.90 \times 10^{-1} s_2 - 1.34 \times 10^{-1} c_{23} + 2.38 \times 10^{-2} c_2 \\
 m_{13} = m_{31} &\approx -1.34 \times 10^{-1} c_{23} - 3.97 \times 10^{-3} s_{23} \\
 m_{22} &\approx 6.79 + 7.44 \times 10^{-1} s_3 \\
 m_{23} = m_{32} &\approx 0.333 + 3.72 \times 10^{-1} s_3 - 1.10 \times 10^{-2} c_3 \\
 m_{33} &\approx 1.16
 \end{aligned}$$

➤ Les éléments de  $C(q, \dot{q})$  :

$$\begin{aligned}
 c_{11} &\approx (-2.76s_2c_2 + 7.44 \times 10^{-1} c_{223} + 0.60s_2c_3 \\
 &\quad - 2.13 \times 10^{-2} (1 - 2s_2s_3)) \dot{q}_2 \\
 c_{12} &\approx (6.90 \times 10^{-1} c_2 + 1.34 \times 10^{-1} s_{23} - 2.38 \times 10^{-2} s_2) \dot{q}_2 \\
 &\quad + (2.67 \times 10^{-1} s_{23} - 7.58 \times 10^{-3} c_{23}) \dot{q}_3 \\
 c_{13} &\approx (7.44 \times 10^{-1} c_2c_{23} + 0.60s_2c_3 + 2.20 \times 10^{-2} c_2s_{23} \\
 &\quad - 2.13 \times 10^{-2} (1 - 2s_2s_3)) \dot{q}_1 \\
 c_{21} &\approx -0.5(-2.76s_2c_2 + 7.44 \times 10^{-1} c_{223} + 0.60s_2c_3 \\
 &\quad - 2.13 \times 10^{-2} (1 - 2s_2s_3)) \dot{q}_1 \\
 c_{22} &\approx (2.20 \times 10^{-2} s_3 + 7.44 \times 10^{-1} c_3) \dot{q}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{23} &\approx 0.5(2.20 \times 10^{-2} s_3 + 7.44 \times 10^{-1} c_3) \dot{q}_3 \\
 c_{31} &\approx -0.5(7.44 \times 10^{-1} c_2 c_{23} + 0.60 s_2 c_3 \\
 &\quad + 2.20 \times 10^{-2} c_2 s_{23} - 2.13 \times 10^{-2} (1 - 2s_2 s_3)) \dot{q}_1 \\
 c_{32} &\approx -0.5(2.20 \times 10^{-2} s_3 + 7.44 \times 10^{-1} c_3) \dot{q}_3 \\
 c_{33} &= 0
 \end{aligned}$$

➤ Les éléments de  $G(q)$  :

$$\begin{aligned}
 g_1 &= 0 \\
 g_2 &\approx -37.2c_2 - 8.4s_{23} + 1.02s_2 \\
 g_3 &\approx -8.4s_{23} + 0.25c_{23}
 \end{aligned}$$

### 4.3. Commande par backstepping du robot PUMA560

#### 4.3.1. Représentation d'état

La seule différence entre le modèle dynamique de deux degrés de liberté et le modèle du robot PUMA560, est le nombre de degrés de liberté, dans ce cas le nombre d'articulation est 03 articulations

$$\begin{cases} q = x_1 \\ \dot{q} = x_2 \end{cases}$$

Avec

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état suivante est obtenue

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{cases} \quad (4.1)$$

La représentation (4.1) et sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec

$$\beta = M(q)^{-1} ; u = \tau ;$$

$$\psi(x_1, x_2)^T \theta = -M(q)^{-1} [C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)]$$

### 4.3.2. Description de la méthode

Le changement de variable adopté est décrit par les expressions suivantes :

$$z_1 = x_1 - q_d \quad (4.3)$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 - \dot{q}_d \quad (4.4)$$

Soit la fonction stabilisante  $\alpha_1$  :

$$\alpha_1(x_1) = -c_1 z_1 \quad (4.5)$$

avec :

$c_1$  : Constante réelle positive dite « gain de la contre réaction »

Le système peut être formulé en utilisant les nouvelles variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d \\ &= \beta u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \dot{\alpha}_1 - \ddot{q}_d \end{aligned} \quad (4.7)$$

et

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d \quad (4.8)$$

$$\dot{z}_2 = \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (4.9)$$

A partir des équations (4.6) et (4.9), il est clair que la forme obtenue ressemble au système d'un bras manipulateur de deux degrés de liberté étudié en chapitre 2, et l'étude de la stabilité reste la même. D'où la fonction de Lyapunov du chapitre 2 est utilisée. En effet, pour que  $\dot{V}$  soit négative,  $u$  est choisie comme suit :

$$-c_2 z_2 = z_1 + \beta \cdot u + \psi(x_1, x_2)^T \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (4.10)$$

D'où

$$u = \frac{1}{\beta} \left[ -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \theta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \ddot{q}_d \right] \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 \quad ; \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} = c_1$$

### 4.3.3. Résultats de simulation

$$q_1(0) = 0 \ ; \ q_2(0) = 0 \ ; \ q_3(0) = 0 \ ; \ \dot{q}_1(0) = 0 \ ; \ \dot{q}_2(0) = 0 \ ; \ \dot{q}_3(0) = 0 \ ; \ c_1 = c_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \ ;$$

$$q_{1d}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad} \ ;$$

$$q_{2d}(t) = 1 - 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad};$$

$$q_{3d}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3} + \pi\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3} + \pi\right) \text{ rad} \ ;$$

Pour  $0 \leq t \leq 5$

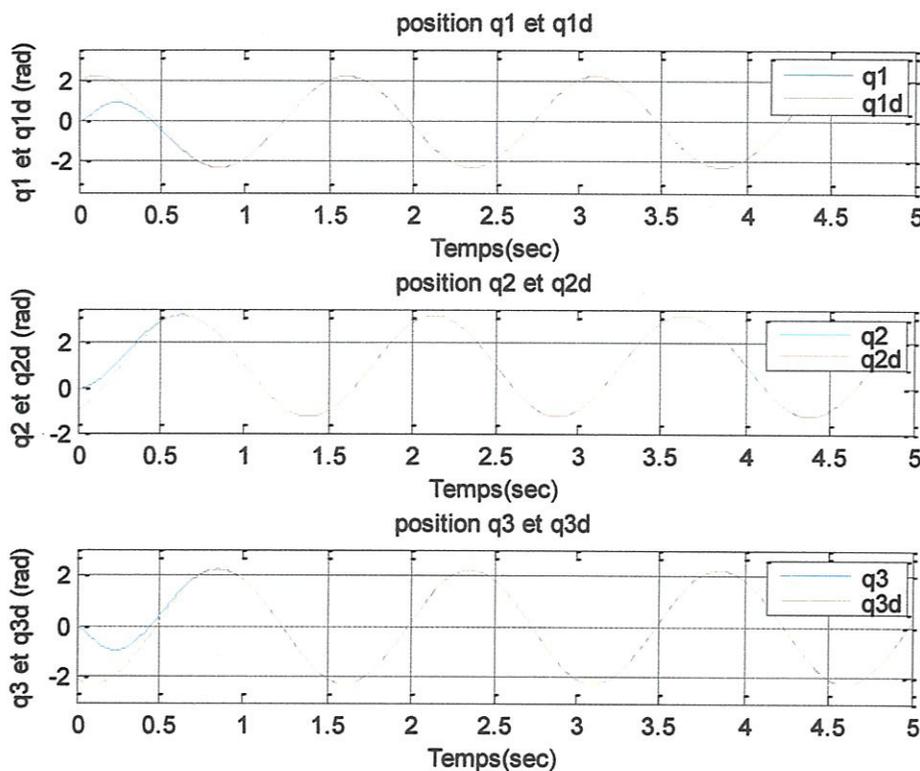


Figure 4.2 : Trajectoires réelles et désirées pour les trois articulations

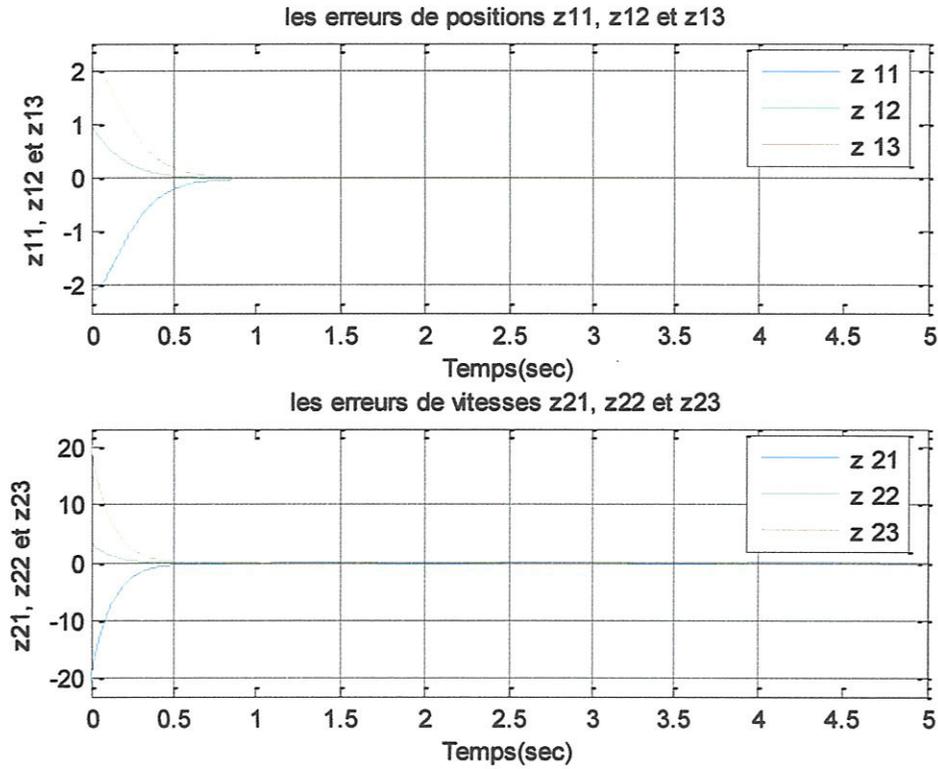


Figure 4.3 : Erreurs de suivi de trajectoires désirées pour les trois articulations

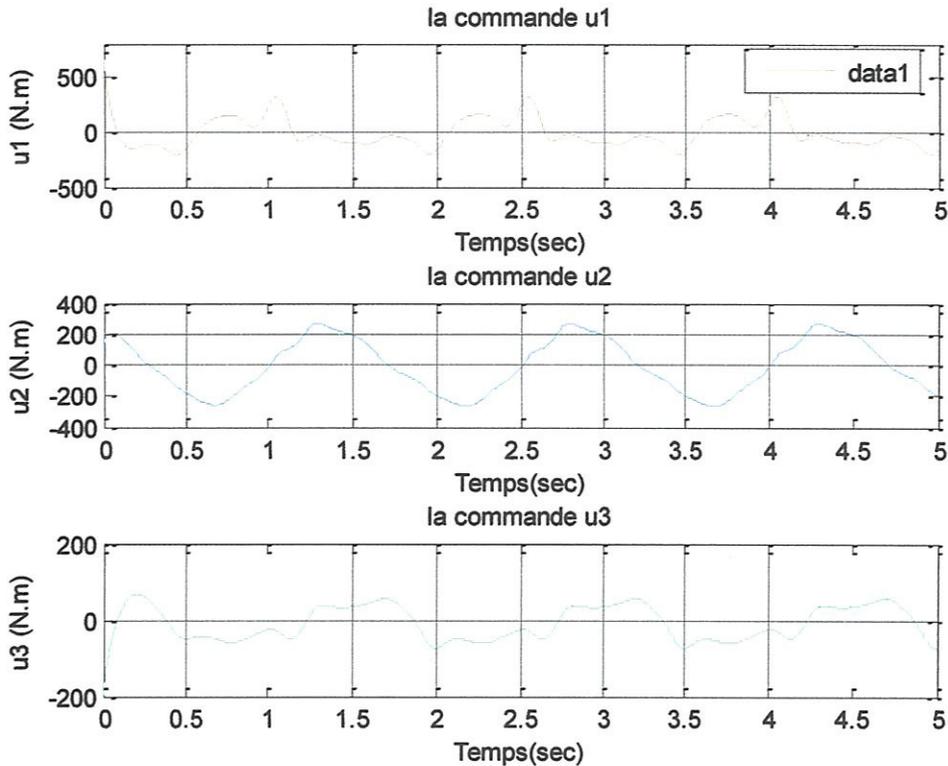


Figure 4.4: Couples d'entrée pour les trois articulations

Les figures (4.2), (4.3) et (4.4) représentent les résultats de la commande par backstepping appliquée au robot PUMA 560, avec tous les paramètres sont bien connus.

Le suivi de la trajectoire désirée est réalisé après 0.5 seconde avec une erreur presque nulle après 1 secondes et avec les erreurs qui tendent vers zéro. Les valeurs des couples d'entrées sont acceptables.

#### **4.4. Conclusion**

On a vu dans ce chapitre une commande par backstepping non adaptative appliquée sur le robot PUMA560, on a identifié les matrices et les vecteurs du modèle dynamique en tenant compte uniquement les trois premières articulations, donc on a obtenu un robot de trois degrés de liberté. L'application de la commande par backstepping sur ce robot donne des bons résultats, ce qui prouve que cette commande est applicable aux robots qui possèdent un degré de liberté supérieur à deux, mais la complexité des calculs augmente avec l'augmentation du degré de liberté.

## Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la commande par backstepping. Nous nous sommes intéressés particulièrement à la synthèse de cette technique pour la commande en poursuite de trajectoire des robots manipulateurs. Cette méthode de commande se base sur une approche analytique.

Pour donner une idée sur les robots, nous avons donné des notions générales et des différentes définitions de la robotique, l'équation dynamique non linéaire des robots manipulateurs utilisant le formalisme de Lagrange Euler, avec certaines propriétés structurelles de ce système mécanique articulé non linéaire.

Après, la première étape du travail a porté sur l'application d'une approche générale pour la conception d'une commande par backstepping des robots manipulateurs. Après, nous avons supposé que le robot possède des paramètres qui varient dans le temps (les masses des segments). D'où la nécessité d'ajouter une loi d'adaptation dans le schéma de commande, et nous obtenons une loi de commande par backstepping adaptative. Il est à noter que l'adaptation des paramètres est effectuée par une méthode adaptative directe.

Pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs qui ne possèdent pas des tachymètres pour mesurer les vitesses articulaires, un observateur de vitesse basé sur la commande par backstepping est présenté dans une partie de ce travail. De plus, les robots qui ont des paramètres variant dans le temps d'un côté, et ne possèdent pas des tachymètres d'autre côté sont étudiés dans ce travail. Dans ce cas, une loi de commande par backstepping adaptative à base d'observateur de vitesse est présentée. La stabilité du système en boucle fermé est démontrée dans tous les cas en utilisant la théorie de Lyapunov.

Dans la dernière partie de ce travail, la commande par backstepping est appliquée au robot PUMA 560, mais en prenant uniquement les trois premières articulations (en supposant que les trois dernières sont bloquées).

A l'issue de ce travail, ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives de recherche, parmi lesquelles nous citons :

- Développement de lois de commande par backstepping adaptative du PUMA 560
- Développement de lois de commande par backstepping et backstepping adaptative du PUMA 560, en tenant comptes toutes les articulations de ce robot (6 articulations).
- Développement de lois de commande par backstepping et backstepping adaptative pour d'autres systèmes physiques.

---

# Bibliographie

- [1] A. Lotfazar, M. Eghtesad, "*Application of Passivity Based and Integrator Backstepping Control Methods on a 5 DOF Robot Manipulator Incorporating Actuator Dynamics*", Proc. of the International Conference on Control and Cybernetics, pp 147-154, New York, 2007.
- [2] M. Spong and Hutchinson, and M.Vidiayagar, « *Robot Modeling and Control* », John Wiley & Sons, Inc.
- [3] W. Khalil et E. Dombre, « *Modélisation, identification et commande des robots* » 2<sup>e</sup> édition, Hermes Science publication, Paris, 1999.
- [4] J-P-L. Allemand et S. Zeghloul, « *robotique aspects fondamentaux* ».
- [5] A. Liegois, « *Modélisation et commande des manipulateur* » Technique de l'ingénieur article S7730.
- [6] M. Spong and M.Vidiayagar, « *Robots dynamics and control* », Quinn Woodbine, USA, 1981.
- [7] B.D'andrea-novel, « *Commande non linéaire des robots* », Hermes, Paris, 1988.
- [8] J.J.E. Slontine et W.Li, « *Adaptative manipulator control : a case study* », IEEE. Transcation on automatic control, Vol 33, Novembre 1988.
- [9] L. N. Paquin, « *Application du Backstepping à une Colonne de Flottation* », Mémoire pour l'obtention du grade de Maître des Sciences (M.Sc), Université de Laval, Faculté des études supérieurs, Juillet 2000.
- [10] M. Mokhtari, « *Commande Adaptative des Systèmes Non-Linéaires : "Backstepping"* », thèse de magister, Département d'électronique, Université de Batna, 2003.
- [11] M. H. Yu, L.D. Seneviratne, S.W.E. Earles, « *Adaptive Control of Robot Manipulators* », Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp 293-298, July 7-10,1992.
- [12] I. Boulkaibet, « *Une étude de simulation de stratégies de commande non linéaire* », thèse de magister, « option : controle des systèmes », Département d'électronique, Université de mentouri-constantine, 2007.
-

[13] F. Calugi, Q. Robertsson and R. Johansson , « *Output Feedback Adaptive Control of Robot Manipulators Using Observer Backstepping* », Proc. of the 2002 IEEE/RSJ, Conference on intelligent robots and Systems, pp 2091-2096, 2002.

[14] D. Boukhetala, F. Boudjema, T. Madani, M. S. Boucherit and N. K. M'Sirdi, "A new decentralized variable structure control for robot manipulators", Int. J. of Robotics and Automation, Vol. 18, no. 1, 203, pp. 28-40.

---

## Annexe

### Modèle dynamique d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté

Le robot manipulateur à deux degrés de liberté utilisé dans ce mémoire est schématisé par la figure suivante:

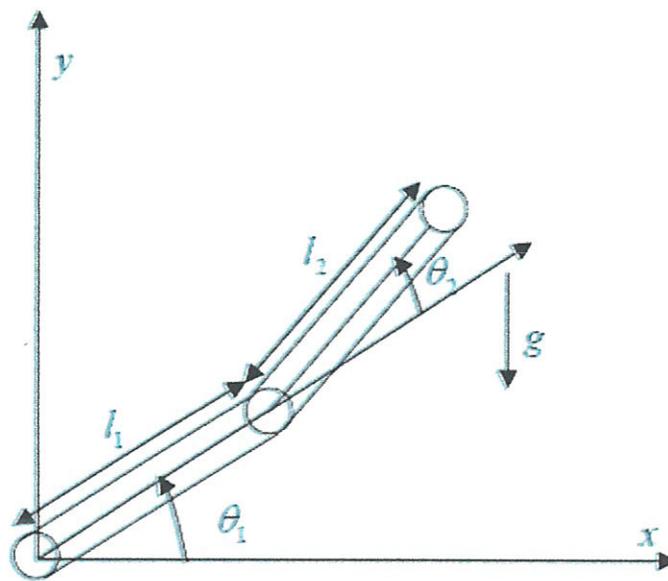


Figure A.1: Structure d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté

Le modèle dynamique de ce robot est donné par l'équation matricielle suivante [14]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Où :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \text{ Vecteur de la variable articulaire généralisée}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \text{ vecteur des couples généralisés}$$

Matrice d'inertie

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2 (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de Coriolis et de centrifuge

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur des forces de gravité

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

Avec la notation  $c_1 = \cos(q_1)$ ,  $c_2 = \cos(q_2)$ ,  $s_2 = \sin(q_2)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ , etc. les paramètres du modèle sont  $m_1 = 15.91$  kg,  $m_2 = 13.36$  kg,  $l_1 = 0.432$  m,  $l_2 = 0.432$  m.

