

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL



FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

M/AUT.TS

2011/13

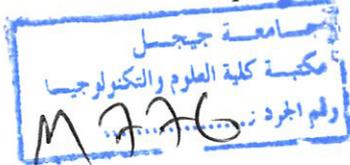
**MÉMOIRE**

Pour l'obtention du diplôme de Master en Automatique

Option : Automatique et Traitement du Signal

Présenté par :

**Fanit Ismail**



***Suivi de trajectoire d'un hélicoptère  
de type quadrirotor***

Soutenue publiquement le 03/07/2011 à l'amphi F devant le jury composé de :

Mr. Bouakrif Fareh	Maître de conférences A	Président
M <sup>me</sup> Saifia Dounia	Maître assistante A	Examineur
M <sup>ll</sup> Ouair Mounia	Maître assistante A	Rapporteur

Promotion 2010 /2011

# *Remerciement*

*Le plus grand Merci tout d'abord revient à « Dieu » qui, lui seul, m'a guidé dans le bon sens durant ma vie et qui m'a donné le courage, la volonté, et la force pour élaborer ce travail.*

*Mes remerciements les plus distingués s'adressent à mon promoteur Malle Ouarr Mounia enseignante à la faculté des sciences et de la technologie, département d'automatique ; qui a bien voulu accepter de participer à l'encadrement du présent mémoire et qui m'a conseillé sans ménagement, pour contribuer à l'aboutissement et la réussite de ce travail.*

*Mes remerciements vont aux membres du jury pour m'avoir honoré en acceptant de juger ce travail.*

*Je tiens à remercier aussi tous nos enseignants du département d'Automatique, qui ont assuré ma formation.*

*Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.*

*Les derniers remerciements vont à ma famille, mes amis et toutes personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce Travail.*



# DEDICACE



*Au nom de dieu Je dédie ce modeste mémoire à mes parents qui ont su me  
Soutenir tout au long de mes études, parfois me réconforter dans les moments  
Difficiles, et qui sans eux je n'aurai pas effectué ce travail.*

*Je dédie ce modeste travail*

*A celle qui m'a comblé d'amour et de tendresse,*

*Ma chère maman : **Razika.***

*A celui qui m'a donné le meilleur de lui-même, qui a sacrifié*

*Son bonheur pour moi, cher papa : **Ahcène.***

*A ma chère copine : **Rima.***

*A mes très chères sœurs : **Meriam, Khadidja, Roukia, Kenza.***

*A mes très chers frères : **Hamza, Youcef, Mouhamed lamine.***

*A mon oncle : **Abd el Hamid.***

*A mes amis : **Boualam, Abd allah, Omar, Fouwaz, Moussa, Azaddine,***

***Adel, Fares et Rédha.***

*Notre dédicace va également à ceux qui ont participé*

*De près ou de loin à l'aboutissement de nos efforts.*



*Fanit Ismail*



# Sommaire

Introduction générale .....	01
-----------------------------	----

## *Chapitre I : dynamique du quadrirotor*

I.1. Introduction.....	03
I.2. Les quadrirotors .....	03
I.3. Principe de fonctionnement.....	05
I.3.1. Les techniques de vols existantes pour un quadrirotor .....	06
I.3.1.1. Le mouvement vertical.....	06
I.3.1.2. Le mouvement de lacet .....	07
I.3.1.3. Le mouvement de translation.....	07
I.3.1.4. Le mouvement de roulis .....	08
I.3.1.5. Le mouvement de tangage.....	08
I.4. Le modèle dynamique du quadrirotor.....	09
I.4.1. Présentation du modèle du quadrirotor.....	10
I.4.2. Les angles d'Euler .....	12
I.4.3. Application du formalisme de Newton Euler .....	13
I.4.4. Equation de mouvement de translation.....	15
I.4.5. Equation de mouvement de rotation.....	15
I.4.6. La dynamique du rotor.....	17
I.4.7. La représentation d'état du système .....	18
I.5. Simulation en boucle ouverte.....	20
I.6. Commentaires sur les résultats .....	23
I.7. Conclusion .....	25

## *Chapitre II : commande par mode glissant*

II.1. Introduction .....	26
II.2. Généralités sur la commande par mode de glissement .....	27

II.3. Systèmes à structure variables .....	27
II.4. Principe de fonctionnement .....	27
II.5. Choix de la surface de glissement.....	31
II.6. Attractivité de la surface de glissement .....	32
II.7. Condition d'existence du glissement.....	33
II.8. Loi de commande.....	34
II.8.1. Expression analytique de la commande .....	34
II.8.2. Propriété de robustesse .....	34
II.8.3. Chattering : Broutement .....	35
II.9. Synthèse de la commande.....	36
II.10. Résultats de simulation .....	41
II.11. Interprétation des résultats .....	43
II.12. Conclusion .....	43

### *Chapitre III : Commande avec observateur*

III.1. Introduction.....	44
III.2. Rappels sur l'Observabilité.....	45
III.3. Commandes à base d'observateurs pour les systèmes linéaires .....	45
III.4. Commande à base d'observateurs d'état non linéaires des systèmes non linéaires .....	46
III.5. Observateurs non linéaires .....	47
III.6. Observateurs à modes glissants .....	48
III.6.1. Observabilité.....	51
III.6.2. Observabilité locale .....	51
III.6.3. Observabilité faible locale .....	52
III.7. Observateur glissant.....	52
III.8. Observateur classique par mode glissant .....	52
III.9. Principe de séparation.....	53
III.10. Synthèse d'observateur .....	55
III.11. Simulation.....	57

III.12. Résultats de simulation .....	58
III.13. Conclusion .....	61
Conclusion générale .....	62
Bibliographies .....	64

# Liste des figures

Figure I.1. Quadrirotor mini-hélicoptère .....	03
Figure I.2. Le quadrirotor $X_4$ .....	04
Figure I.3. Le mouvement vertical.....	06
Figure I.4. Le mouvement de lacet .....	07
Figure I.5. Le mouvement de roulis.....	08
Figure I.6. Le mouvement de tangage .....	09
Figure I.7. Modèle dynamique du quadrirotor.....	10
Figure I.8. Configuration du quadrirotor .....	11
Figure I.9. Schéma de simulation du quadrirotor en boucle ouverte sous simulink.....	21
Figure I.10. Les résultats de simulation en BO pour le 1 <sup>er</sup> test (mouvement verticale) .....	21
Figure I.11. Les résultats de simulation en BO pour le 2 <sup>ème</sup> test (mouvement lacet) .....	21
Figure I.12. Les résultats de simulation en BO pour le 3 <sup>ème</sup> test (mouvement tangage) .....	22
Figure I.13. Les résultats de simulation en BO pour le 4 <sup>ème</sup> test (mouvement roulis) .....	23
Figure II.1. Convergence de système glissant .....	28
Figure II.2. Trajectoires de $f^+$ et de $f^-$ pour le mode de glissement .....	29
Figure II.3. Commande appliquée aux systèmes à structure variable.....	29
Figure II.4. La valeur continue $u_{eq}$ prise par la commande lors de la commutation entre $u_{Max}$ et $u_{Min}$ .....	30
Figure II.5. Attractivité de la surface .....	33
Figure II.6. Phénomène de réticence.....	35
Figure II.7. Poursuite des trajectoires désirées selon le lacet $\psi$ et les axes (X, Y, Z) .....	41
Figure II.8. Les signaux de commande .....	41
Figure II.9. Erreurs de poursuite sur les trajectoires désirées selon le lacet $\psi$ et les axes (X, Y, Z). .....	42
Figure II.10. Trajectoire globale du quadrirotor en 3D .....	42

Figure III.1. Schéma de principe d'un observateur .....	45
Figure III.2. Bouclage de l'état observé.....	46
Figure III.3. Structure de commande avec observateur .....	58
Figure III.4. Résultats de poursuite sur les trajectoires désirées selon le lacet $\psi$ et les axes (X, Y, Z) .....	58
Figure III.5. Les signaux de commande.....	59
Figure III.6. Erreurs d'estimation sur les trajectoires désirées selon le lacet $\psi$ et les axes (X, Y, Z) .....	60
Figure III.7. Erreur de poursuite sur les trajectoires désirées selon le lacet $\psi$ et les axes (X, Y, Z) .....	60

# *Liste des tableaux*

Tableaux .I.1. Les valeurs des coefficients du modèle .....20

## *Introduction générale*

Le développement des plateformes robotiques volantes (drones) connaît un essor croissant depuis quelques années grâce aux avancements technologique des capteurs, ce qui a permis la réduction des coûts de fabrication des drones qui permettent l'exécution d'un grand nombre de tâches.

Le pilotage automatique d'avions et d'hélicoptères est né avec l'aviation moderne et a évolué au cours du temps pour satisfaire des besoins de plus en plus pénibles. Il peut être utilisé lorsque la tâche à réaliser est trop répétitive ou trop difficile pour le pilote.

La maîtrise de la commande automatique de l'évolution des drones miniatures contrôlés par radio ouvre la voie à des applications dans les domaines de la sécurité (surveillance de l'espace aérien, du trafic urbain et interurbain), de la gestion des risques naturels (surveillance de l'activité des volcans), de l'environnement (mesure de la pollution de l'air, surveillance des forêts), pour l'intervention dans des environnements hostiles (milieux radioactifs, déminage des terrains sans intervention humaine), la gestion des grandes infrastructures (barrages, lignes à haute tension, pipelines), l'agriculture (détection et traitement des cultures infestées) et la prise de vue aérienne dans la production de films. [1]

Il faut noter que contrairement, aux robots manipulateurs classiques, la plupart de ces systèmes mécaniques sont sous actionnés [1]. La nécessité de différencier ces deux catégories provient du fait que ces robots ne se commandent pas de la même façon. En effet, le manque d'actionneurs pour ces engins induit une grande difficulté dans la conception de la commande. Au début des années 90, la communauté automatique a montré un regain d'intérêt pour le problème de commande de ces systèmes. La dynamique d'un avion à décollage (et atterrissage) vertical (VTOL), par exemple, a fait l'objet d'une étude très approfondie, a constitué une source énorme de connaissances et a permis des développements supplémentaires à la théorie des systèmes plats et aux techniques de linéarisation entrées-sorties.

Il est bien clair que le point important qui ressort de ces projets est le sous actionnement des systèmes étudiés. Les robots volants sont généralement de cette nature puisque le mécanisme de contrôle ne fournit qu'une ou deux entrées de commande pour la dynamique de translation et deux ou trois entrées de commande pour la dynamique de rotation.

Toutefois, malgré l'importance des résultats réalisés jusqu'à ce jour dans le domaine des systèmes sous actionnés, ceux-ci ne restent applicables que sur des systèmes simples et possédant une structure particulière. Par exemple, les techniques de linéarisation entrées-sorties explicite de ces effets aérodynamiques, par conséquent, les lois de commande proposées ne sont pas robustes vis-à-vis du changement des paramètres de vol.

Notre objectif principal entrée sur la modélisation dynamique et la synthèse de lois de commande stabilisantes pour un mini drone de type *QUADRIROTOR*.

### **Chapitre 1 :**

Dans ce chapitre la modélisation du quadrirotor à été largement détaillé afin de comprendre l'influence de chaque entrée sur la dynamique de système. Au début nous avons présenté le principe de fonctionnement du quadrirotor et les différents de mode vol existant (roulis, tangage ...), ensuite la modélisation de sa dynamique sera obtenu en utilisant le formalisme de Newton-Euler le mode obtenu nous offre en général sur la comportement du système ensuite la conception des lois de commande ainsi la simulation de ce système, une étude par simulation en boucle ouvert est effectuée pour mieux comprendre son comportement dynamique.

### **Chapitre 2 :**

Dans ce chapitre, on consiste à synthétiser une loi de commande pour les systèmes non linéaires. Cette nouvelle loi de commande est présentée en détail afin de comprendre son principe, si la commande à structure variable. Cette technique est utilisée pour la stabilité des trois angles de rotation du quadrirotor en utilisant seulement l'erreur de commande et leurs dérivés.

### **Chapitre 3 :**

Ce chapitre représente l'objet de notre étude, car l'intérêt de ce travail est d'appliquer les commandes calculées dans le chapitre à base des observateurs pour pouvoir estimer les états non mesurable et relever à la complication des erreurs de détermination la synthèse d'un observateur par mode glissant non linéaires et une conclusion générale viendra clôturer le présent mémoire.

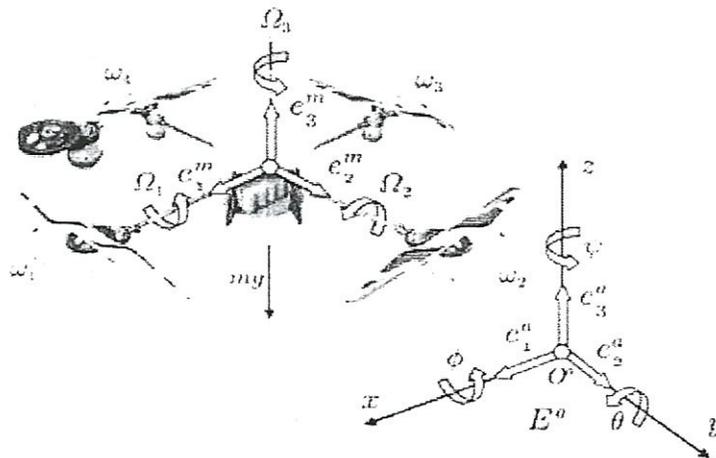
## Dynamique du quadrirotor

### I.1. Introduction

L'hélicoptère est utilisé de plus en plus dans des applications civiles telles que la surveillance de trafic, les véhicules d'identification et de surveillance, la recherche et les opérations de sauvetage. Il y a plusieurs types de ces machines. Le classique est par convention équipé d'un rotor principal et du rotor de queue.

D'autres types existent, y compris le rotor jumeau ou l'hélicoptère tandem et l'hélicoptère coaxial de rotor.

L'hélicoptère de quadrirotor, comme celui représenté sur la Figure (I.1), a quelques avantages par rapport aux hélicoptères conventionnels. Il a quatre rotors qui tournent aux vitesses angulaires  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_4$ . Deux paires des rotors (1.3) et (2.4) du tour dans la direction opposée.



Figure(I.1) : Quadrirotor mini-hélicoptère

### I.2. Les Quadrirotor

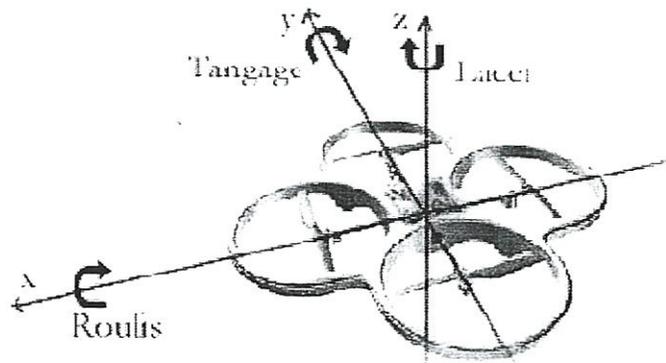
Un Quadrirotor est un UAV à voilures tournantes et à quatre rotors. Il a été l'objet de plusieurs projets récents de recherches. Les Quadrirotors de petites dimensions ont beaucoup de missions potentielles et passionnantes comprenant le vol à l'intérieur et dans le secteur urbain.

Un quadrirotor peut être très manœuvrable, Il a le potentiel de planer et décoller, voler et atterrir dans des limites et peut avoir des mécanismes simples de commande [4] [5].

Les quatre moteurs sont localisés au niveau de l'extrémité de chaque bras comme les rotors avant et arrière tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre tandis que les rotors de gauche et de droite tournent dans le sens horaire pour équilibrer le moment du couple aérodynamique que créent les rotors en rotation.

Un quadrirotor peut également voler sans crainte plus prêt d'un obstacle ainsi comparé aux autres configurations conventionnelles d'hélicoptère qui disposent d'un grand rotor [8] [5]. La dynamique de l'engin est bonne notamment en ce qui concerne l'agilité. Cependant, la modélisation dynamique du quadrirotor peut s'avérer être une tâche délicate surtout lorsqu'il s'agit de prendre en compte tous ses composants.

Le quadrirotor est un engin volant doté de quatre rotors placés aux extrémités d'une croix. Ce sont ces quatre rotors qui fournissent la force verticale (portance) qui permet à l'appareil de s'élever. En vol, le quadrirotor peut évoluer suivant ses axes de lacet, tangage et roulis. Afin de contrer l'effet de lacet naturel d'un tel engin, le moyen le plus commun est de faire tourner deux hélices opposées dans un sens, et deux autres dans le sens inverse. Cela ne suffit pas pour stabiliser l'appareil, il faut mettre au point un système qui pilote la puissance des moteurs individuellement pour contrer l'inclinaison sur les différents axes.



*Figure(L2) : Le quadrirotor  $X_4$*

L'électronique de contrôle (carte micro-pilote, batteries, récepteur, gyrocompas) est habituellement placée au centre de la croix. Afin d'éviter à l'appareil de tourner sur lui-même, il est nécessaire que deux hélices tournent dans un sens et les deux autres dans l'autre sens.

Pour pouvoir diriger l'appareil, il est nécessaire que chaque couple d'hélice tournant dans le même sens soit placé aux extrémités opposées d'une branche de la croix.

Contrairement aux hélicoptères ordinaires, les hélices utilisées sont à pas fixe car l'existence de quatre moteurs électriques procure toute la puissance souhaitée pour la portance. En plus, les pâles du quadrirotor sont petites et légères ce qui assure une meilleure réactivité (conception optimale).

Il existe aussi une version de X4 dans laquelle tous les rotors tournent dans le même sens. Dans ce dernier, 2 rotors sont inclinés par rapport à l'horizontal de manière à créer un couple de lacet. L'inclinaison peut être fixe ou variable et permet de commander le mouvement de lacet.

Etant donné que les quadrirotors sont commandés par différence de vitesse de rotation des rotors, il est important que l'on puisse varier rapidement la vitesse de rotation des moteurs. Pour cela il convient d'utiliser des pales très légères et des rapports de réduction relativement grands. Les quadrirotors ont des couples de commande de grande amplitude. Les couples de tangage, roulis et lacet sont pratiquement découplés entre eux. La mécanique et l'entretien des quadrirotors sont relativement simples.

### **I.3. Principe de fonctionnement**

Le fonctionnement du quadrirotor est un peu particulier, On le pilote en commandant la puissance de chacun de ses 4 moteurs. En faisant varier astucieusement la puissance des moteurs, il est possible de le faire monter/descendre, de l'incliner à gauche/droite (roulis) ou en avant/arrière (tangage) ou encore de le faire pivoter sur lui-même (lacet).

Ainsi, pour contrôler le roulis du drone, il suffit d'agir sur les vitesses de rotations des moteurs  $M_2$  et  $M_4$ . De la même manière, le tangage du drone est contrôlable en agissant sur les vitesses du moteur  $M_1$  et  $M_3$ .

Le mouvement de rotation des hélices va produire une force de poussée verticale par rapport au plan des moteurs, c'est cette force qui assure la sustentation de l'appareil.

### I.3.1. Les techniques de vols existantes pour un quadrirotor

En générale, On distingue cinq mouvements possibles pour le vol d'un quadrirotor:

- ❖ Le vol vertical
- ❖ Le vol de lacet
- ❖ Le vol de translation
- ❖ Le vol de roulis
- ❖ Le vol de tangage

Dans cette section, nous avons présentés une petite description de ces mouvements.

#### I.3.1.1. Le mouvement vertical

Le mouvement vertical est tout simplement la montée/descente du quadrirotor. Il est obtenu par la variation des vitesses de rotation des moteurs (par conséquence la force de poussée produite).

La montée est obtenue en augmentant la vitesse des 4 moteurs. La descente qu'elle est plus difficile à doser s'obtient par la réduction de la vitesse des moteurs. C.-à-d. qu'il existe 2 positions de la force de portance globale par rapport au poids de l'appareil, si elle est inférieure l'appareil descend, si elle est supérieure l'appareil monte. Les mouvements montée/descente sont illustrés par la figure (I.3).

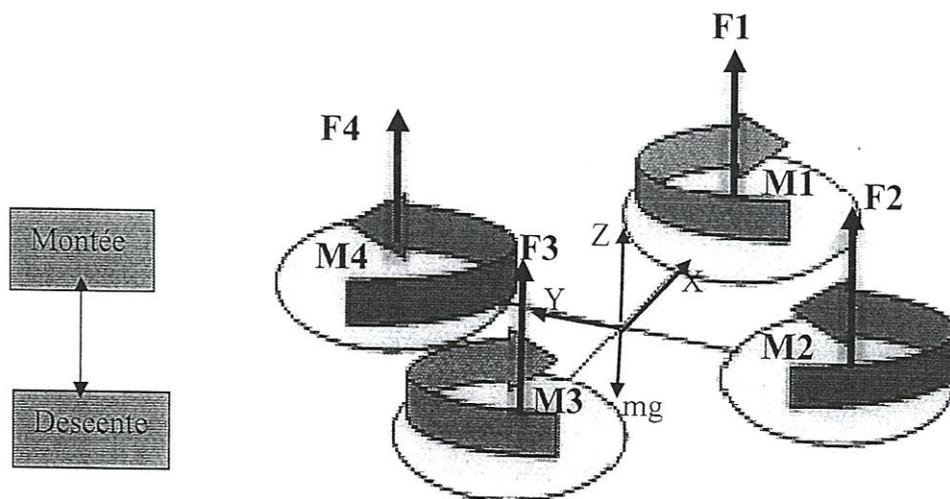
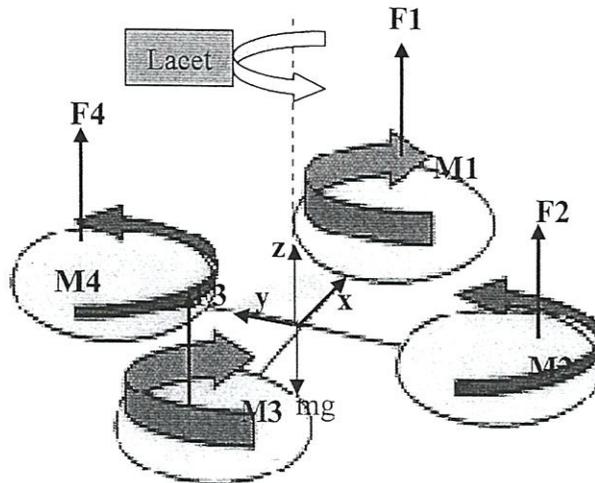


Figure (I.3) : Le mouvement vertical

### I.3.1.2. Le mouvement de lacet

Le mouvement de lacet sert à faire tourner le quadrirotor sur lui-même. Il est obtenu en augmentant la vitesse des rotors (1, 3), et en diminuant proportionnellement la vitesse des rotors (2,4), mais il faut bien noter que l'augmentation de la portance dans une paire de rotor doit être égale à la diminution de l'autre afin d'assurer que la force de poussée reste la même et par conséquent, le quadrirotor reste sur la même altitude (reste immobile selon l'axe Z).

Ce mouvement est montré sur la figure(I.4).



Figure(I.4) : Le mouvement de lacet

### I.3.1.3. Le mouvement de translation

Pour que le quadrirotor soit en mouvement de translation, il faut appliquer une force à composante horizontale. Si on augmente la portance des pales lorsqu'elles passent derrière le rotor, leur plan de rotation s'incline vers l'avant, grâce à une articulation en battement reliant chaque pale à l'axe de rotation, et l'inclinaison de la portance produit la composante horizontale nécessaire. Il reste toutefois une composante verticale principale qui s'oppose au poids permettant le maintien en l'air, et la composante horizontale motrice engendre le mouvement d'avancement, donc accélération jusqu'à une vitesse où la traînée globale s'équilibrera avec la composante motrice.

Ou tout simplement, on peut dire que le mouvement de translation s'agit de pencher le quadrirotor sur un axe. Pour cela, il faut accélérer un moteur et ralentir le moteur opposé de la même valeur.

Selon l'axe de mouvement de l'avancement, on peut différencier deux types de mouvement :

- ❖ Le mouvement de roulis (sur l'axe X)
- ❖ Le mouvement de tangage (sur l'axe Y)

#### I.3.1.4. Le mouvement de roulis

Ce mouvement est obtenu en appliquant une différence de poussée entre le moteur droit et le moteur gauche, c.-à-d. entre le rotor 2 et le rotor 4 (rotation autour de l'axe X). Ce mouvement donne naissance à un mouvement de translation selon l'axe Y. Ce mouvement est montré sur la figure (I.5).

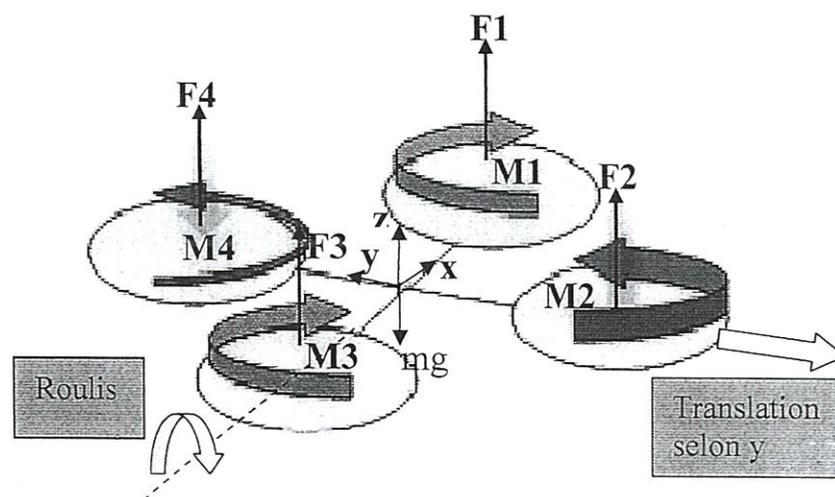


Figure (I.5) : Le mouvement de roulis

#### I.3.1.5. Le mouvement de tangage

Dans ce cas, on applique un couple autre de l'axe y, c'est-à-dire en appliquant une différence de poussée entre le rotor 1 et le rotor 3. Ce mouvement (rotation autre de l'axe y) est couplé avec un mouvement de translation de l'axe x.

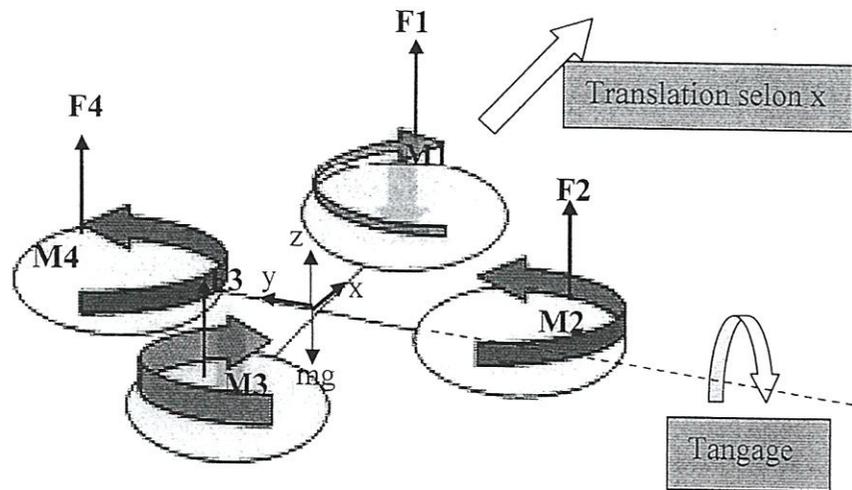


Figure (I.6) : Le mouvement de tangage

#### 1.4. Le modèle dynamique du quadrirotor

La modélisation dynamique des engins volants autonomes connaît ces dernières décennies un essor important du fait de l'intérêt que ceux-ci offrent dans les domaines militaire ou civil. Ce concept, rentre dans un cadre pluridisciplinaire de recherche et développement axé entre autre, sur la mécanique analytique, l'aérodynamique et l'aéroélasticité des véhicules volants. Partant des formes simples aux plus complexes que peuvent avoir ces appareils, plusieurs modèles ont été conçus et développés en industrie pour des missions qui peuvent s'avérer délicates et difficiles à réaliser. Devant la complexité et les risques de perte en vies humaines pour certaines missions spécifiques, les appareils volants autonomes ou télécommandés ont trouvé leur domaine de prédilection ; nous citerons par exemple, les avions et hélicoptères à tailles réduites appelés encore drones.

En général, la modélisation dynamique d'un système mécanique, s'accompagne d'un certain nombre de difficultés liées à la topologie du système surtout lorsque celui-ci est considéré comme un système à chaînes polyarticulées [6].

### I.4.1. Présentation du modèle du Quadrirotor

Un premier modèle du Quadrirotor a été développé dans [7]. Dans ce modèle, le Quadrirotor est considéré comme un seul corps rigide en mouvement dans l'espace. Pour établir les équations de la dynamique de l'engin, l'auteur utilise une approche qui se base sur la description Eulérienne du mouvement d'un corps rigide dans l'espace. Les forces aérodynamiques et les effets gyroscopiques des rotors sont intégrés dans le modèle global. Le modèle obtenu comporte un nombre réduit de degrés de liberté à savoir trois degrés de liberté de translation et trois degrés de liberté de rotation qui sont les angles d'Euler. Il est donc très pratique pour les problèmes de commande, mais ne permet pas de rendre compte au mieux du comportement dynamique de chaque composant du Quadrirotor.

Pour une étude plus complète, il serait donc judicieux de considérer cet engin volant comme un système multicorps.

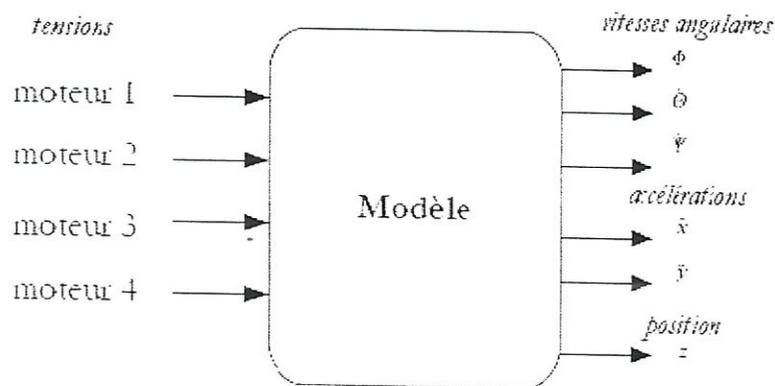


Figure (I.7) : Modèle dynamique du quadrirotor

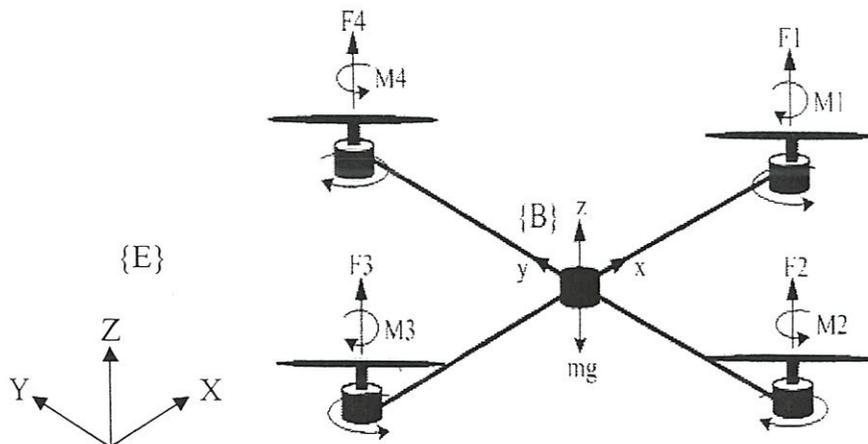
Afin de pouvoir comprendre au mieux le modèle dynamique développé ci-dessous, voila les différentes hypothèses du travail :

- La structure est supposée rigide,
- L'hélicoptère possède une structure parfaitement symétrique ce qui la matrice d'inertie sera supposé diagonale,
- La portance et la traînée de chaque moteur sont proportionnelles au carrée de la vitesse, Ce qui est approximation très proche du comportement aérodynamique [2].

Le modèle est régi par les équations de la mécanique qui le font évoluer sur 6 axes. Il subit des forces d'accélération de différents types :

- ❖ **La portance** : générée par les quatre rotors en rotation, elle permet à l'appareil de s'élever si elle compense au moins la trainée.
- ❖ **La trainée** : résultante des frottements de l'air sur le quadrirotor, elle est parallèle et opposée à la trajectoire.
- ❖ **L'effet gyroscopique** : lorsque le quadrirotor est en rotation sur deux axes, cette force apparaît sur le troisième axe et tend à résister au mouvement du quadrirotor

Sous ces hypothèses, il est possible de décrire la dynamique du fuselage comme celle d'un corps rigide dans l'espace à laquelle viennent s'ajouter les forces aérodynamiques provoquées par la rotation des rotors.



*Figure (I.8) : Configuration du quadrirotor*

Pour étudier le mouvement du quadrirotor, nous utilisons deux repères Figure (I.8) : le repère absolu ou Galiléen (ou fixe)  $E(X, Y, Z)$  et le repère  $B(x, y, z)$  lié au corps du quadrirotor.

Le passage entre les deux repères fixe et mobile est donné par la matrice de transformation  $T$  qui englobe le mouvement de rotation ainsi que celui de translation. Cette

matrice contiennent l'orientation et la position de repère mobile par rapport au repère fixe, elle est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} R & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

Avec :

- R : est la matrice de rotation
- $\zeta$  : est le vecteur de position, il est donné par :

$$\zeta = [x \quad y \quad z]^T \quad (I.2)$$

La détermination de la matrice de rotation sera effectuée en utilisant la méthode des angles d'Euler.

#### I.4. 2. Les angles d'Euler

Le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel fait intervenir six coordonnées, qui sont, les trois coordonnées décrivant la position de son centre de masse et trois angles, nommés les angles d'Euler.

Les angles d'Euler peuvent aussi servir à représenter l'orientation d'un solide par rapport à un repère, on peut les voir comme une généralisation des coordonnées sphériques.

$$R = Rot_z(\Psi) * Rot_y(\theta) * Rot_x(\varphi) \quad (I.3)$$

$$R = \begin{bmatrix} c\Psi & -s\Psi & 0 \\ s\Psi & c\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

$$R = \begin{bmatrix} c\Psi c\theta & s\varphi s\theta c\Psi - s\Psi c\varphi & c\varphi s\theta c\Psi + s\Psi s\varphi \\ s\Psi c\theta & s\varphi s\theta s\Psi + c\Psi c\theta & c\varphi s\theta s\Psi - s\varphi c\Psi \\ -s\theta & s\varphi c\theta & c\varphi c\theta \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Avec :

$$s = \sin ; c = \cos$$

Les angles d'Euler sont donc les paramètres nécessaires pour décrire l'orientation du vecteur de rotation d'un solide. Ils sont définis comme suit :

- ❖ L'angle  $\Psi$  : il caractérise la première rotation autour de l'axe (OZ). Cette rotation est appelée le lacet et également la précession.

- ❖ L'angle  $\theta$  : il caractérise la seconde rotation autour de l'axe (OY) nouvellement créé. Cette rotation est appelée le tangage ou bien la nutation.
- ❖ L'angle  $\varphi$  : il caractérise la dernière rotation autour de l'axe (OX) créé suite aux deux premières rotations. Cet angle représente la rotation propre du solide et est également appelée l'angle de roulis.

On s'intéresse seulement ici à la description du mouvement du quadrirotor en rotation autour du point O, qui est un point fixe dans le référentiel de référence  $O_{XYZ}$  ou le centre de masse.

### I.4.3. Application du formalisme de Newton-Euler

En utilisant le formalisme de Newton Euler, les équations de la dynamique s'écrivent sous la

$$\text{forme suivante : } \begin{cases} \dot{\xi} = v \\ m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g \\ \dot{R} = RS(\Omega) \\ J\dot{\Omega} = -\Omega \wedge J\Omega + \Gamma_f - \Gamma_a - \Gamma_g \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

- $\xi$  : représente la position du centre de masse du quadrirotor par rapport au repère inertiel (le repère lié à la terre).
- $m$ : est la masse totale du quadrirotor.
- $J$ : est une matrice de dimension (3x3), représente l'inertie du quadrirotor, elle est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

- $\Omega$  : est vecteur qui désigne la vitesse angulaire du quadrirotor exprimé dans le repère inertiel tel que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas où le quadrirotor réalise des mouvements angulaires de faibles amplitudes, le vecteur  $\Omega$  peut être assimilé à  $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$

- R: est la matrice de transformation homogène reliant le repère lié au solide au repère inertiel.
- $S(\Omega)$  : est la matrice antisymétrique. Pour un vecteur de vitesse donné

$\Omega = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$  : elle est définie comme suit :

$$S(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

- $F_f$ : est la résultante des forces de poussée générées par les quatre rotors, elle est donnée par :

$$F_f = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\psi \sin\theta + \sin\phi \sin\psi \\ \cos\phi \sin\psi \sin\theta - \sin\phi \cos\psi \\ \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i \quad F_i = K_p \omega_i^2 \quad (\text{I.10})$$

Où :

- $K_p$ : désigne le coefficient de portance.
- $\omega_i$  : La vitesse angulaire du rotor en question.
- $F_t$  : est la résultante des forces de traînée selon (X, Y, Z).

$$F_t = \begin{pmatrix} -K_{f_{tx}} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{f_{ty}} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{f_{tz}} \end{pmatrix} \xi \quad (\text{I.11})$$

$K_{f_{tx}}$ ,  $K_{f_{ty}}$  et  $K_{f_{tz}}$  : Sont les coefficients des forces de traînée selon les trois axes.

- $F_g$  : est la force qui regroupe les forces liées à la gravité, elle est donnée par :

$$F_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

$\Gamma_f$  : représente le vecteur résultant des moments appliqués sur la structure du quadrirotor.

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} d(F_3 - F_1) \\ d(F_3 - F_1) \\ K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Où

- $d$  : est la distance entre le centre de masse du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor
- $K_d$  : est le coefficient de traînée.

#### I.4.4. Equation de mouvement de translation :

On obtient alors le modèle dynamique de translation, régit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \{ (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) U_1 - K_{fx} \dot{x} \} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \{ (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) U_1 - K_{fy} \dot{y} \} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \{ (\cos\phi \cos\theta) U_1 - K_{fz} \dot{z} \} - g \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

#### I.4.5. Equation de mouvement de rotation

Le modèle dynamique de rotation; régit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \{ \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) - J_r \overline{\Omega} \dot{\theta} + dU_2 \} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \{ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) - J_r \overline{\Omega} \dot{\phi} + dU_3 \} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \{ \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) + K_d U_4 \} \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

En conséquence, le modèle dynamique complet du quadrirotor est défini comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \{ \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) - J_r \bar{\Omega} \dot{\theta} + dU_2 \} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \{ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) - J_r \bar{\Omega} \dot{\phi} + dU_3 \} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \{ \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) + K_d U_4 \} \\ \ddot{x} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) U_1 - K_{f_{ix}} \dot{x} \} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) U_1 - K_{f_{iy}} \dot{y} \} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \cos \theta) U_1 - K_{f_{iz}} \dot{z} \} - g \end{array} \right. \quad (\text{I.16})$$

A signaler que  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  sont les entrées de commande du système et qui s'écrivent en fonction des vitesses angulaires des quatre rotors comme suit :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K_p & K_p & K_p & K_p \\ -K_p & 0 & K_p & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & K_p \\ K_d & -K_d & K_d & K_d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

et :

$$\bar{\Omega} = (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \quad (\text{I.18})$$

#### ❖ Les contraintes non holonomes

Le développement des contraintes non holonomes pour notre système est d'une importance majeure car elles permettent d'explicitier le couplage entre les différents états du système et imposent le respect des lois de la physique.

A partir des équations de la dynamique de translation on peut extraire les expressions des contraintes non holonomes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \theta = \frac{\left( \ddot{x} - \frac{K_{f_{tx}}}{m} \dot{x} \right) \cos \psi + \left( \ddot{y} - \frac{K_{f_{ty}}}{m} \dot{y} \right) \sin \psi}{\ddot{z} + g - \frac{K_{f_{tz}}}{m} \dot{z}} \\ \sin \phi = \frac{-\left( \ddot{x} - \frac{K_{f_{tx}}}{m} \dot{x} \right) \sin \psi + \left( \ddot{y} - \frac{K_{f_{ty}}}{m} \dot{y} \right) \cos \psi}{\sqrt{\left( \ddot{x} - \frac{K_{f_{tx}}}{m} \dot{x} \right)^2 + \left( \ddot{y} - \frac{K_{f_{ty}}}{m} \dot{y} \right)^2 + \left( \ddot{z} + g - \frac{K_{f_{tz}}}{m} \dot{z} \right)^2}} \end{array} \right. \quad (\text{I.19})$$

#### I.4.6. La dynamique du rotor

Le rotor est un ensemble constitué d'un moteur à courant continu entraînant une hélice via un réducteur ; le moteur à courant continu est régi par les équations dynamiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = ri + L \frac{di}{dt} + k_e \omega \\ K_m i = J_r \frac{d\omega}{dt} + k_r \omega^2 \end{array} \right. \quad (\text{I.20})$$

Les différents paramètres du moteur sont définis comme suit :

- $V$  : est la tension d'entrée du moteur.
- $\omega_i$  : est la vitesse angulaire du rotor.
- $k_e$   $k_m$  : représentent les constantes des couples électrique et mécanique respectivement.
- $k_r$  : Est la constante du couple de charge.
- $r$  : désigne la résistance du moteur.
- $J_r$  : désigne l'inertie du rotor.

### I.4.7. La représentation d'état du système

Pour un système physique, la représentation d'état n'est pas unique, il existe une multitude de représentations, pour se faire, il faut choisir des variables d'état. Les variables d'état du quadrirotor sont choisies afin de le stabiliser en rotation ainsi qu'en translation.

Partons du modèle développé précédemment, en considérant le vecteur d'état suivant :

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T \quad (\text{I.21})$$

$$= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T \quad (\text{I.22})$$

Nous obtenons les équations d'état sous forme canonique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = a_9 x_8 + \frac{1}{m} U_x U_1 \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = a_{10} x_{10} + \frac{1}{m} U_y U_1 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = a_{11} x_{12} + \frac{1}{m} U_z U_1 - g \end{array} \right. \quad (\text{I.23})$$

Ces équations peuvent être réécrites dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\dot{x} = F(x) + G(x, U) \quad (\text{I.24})$$

Avec :

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} \\ x_4 \\ a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} \\ x_6 \\ a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 \\ x_8 \\ a_9 x_8 \\ x_{10} \\ a_{10} x_{10} \\ x_{12} \\ a_{11} x_{12} - g \end{pmatrix}, \text{ et } G(x, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 U_2 \\ 0 \\ b_2 U_3 \\ 0 \\ b_3 U_4 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_x U_1 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_y U_1 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_z U_1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.25})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} U_x = \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5 + \sin x_1 \sin x_5 \\ U_y = \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5 - \sin x_1 \cos x_5 \\ U_z = \cos x_1 \cos x_3 \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{cases} a_1 = \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right), a_2 = \frac{-K_{fax}}{I_x}, a_3 = \frac{-J_r}{I_x} \\ a_4 = \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right), a_5 = \frac{-K_{fay}}{I_y}, a_6 = \frac{-J_r}{I_y} \\ a_7 = \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right), a_8 = \frac{-K_{faz}}{I_x}, a_9 = \frac{-K_{fzx}}{m} \\ a_{10} = \frac{-K_{fxy}}{m}, a_{11} = \frac{-K_{fyz}}{m} \\ b_1 = \frac{d}{I_x}, b_2 = \frac{d}{I_y}, b_3 = \frac{1}{I_z} \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

Afin de stabiliser le quadrirotor, il convient de mesurer ses vitesses angulaires ainsi que ses accélérations axiales à l'aide de capteurs ; accéléromètres et gyroscopes répondent parfaitement à ce besoin. De plus un altimètre se révèle utile afin de confirmer le déplacement sur l'axe vertical. C'est au contrôleur que revient le rôle de stabiliser le modèle.

L'ensemble du système peut ainsi être résumé de la sorte :

paramètre	valeur	Unités
$I_x$	$3.8278 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
$I_y$	$3.8288 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
$I_z$	$7.6566 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
$m$	$486 \times 10^{-3}$	Kg
$g$	9.806	m s <sup>-2</sup>
$l$	0.25	m
$b$	$2.9842 \times 10^{-5}$	Pas d'unité
$d$	$3.2320 \times 10^{-7}$	Pas d'unité
$J_r$	$2.8385 \times 10^{-5}$	Kg m <sup>2</sup>
$K$	$3.2 \times 10^{-7}$	Pas d'unité
$K_i$	$20 \times J_r$	Pas d'unité
$K_{fix}$	$5.5670 \times 10^{-4}$	Pas d'unité
$K_{fxy}$	$5.5670 \times 10^{-4}$	Pas d'unité
$K_{fyz}$	$6.3540 \times 10^{-4}$	Pas d'unité

Tableau (I.1) : Les valeurs des coefficients du modèle.

### I.5. Simulation en boucle ouverte

Dans cette partie on va faire une simulation en boucle ouverte sur le quadrirotor, en injectant directement aux entrées du système les vitesses de rotation.

Pour illustrer le comportement dynamique du système et l'effet des vitesses de rotations sur Les mouvements du quadrirotor, on prend les quatre cas suivants :

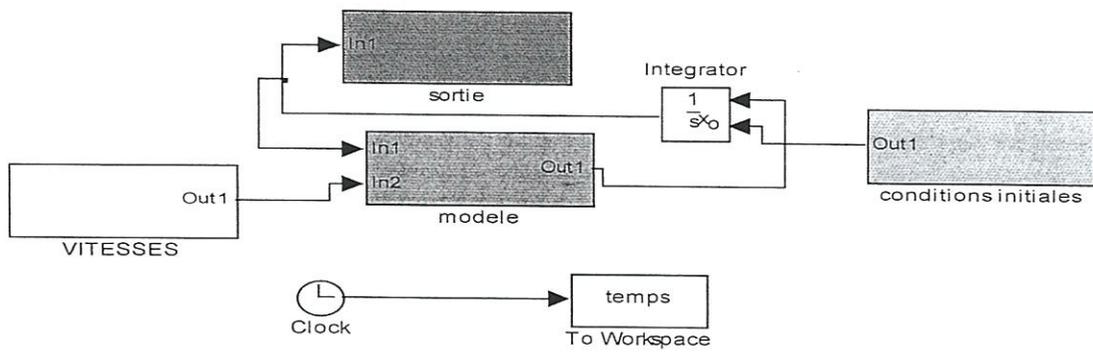
**1<sup>er</sup> test:** pour  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 200$  (rad/sec)

**2<sup>ème</sup> test:** pour  $\omega_1 = \omega_3 = 250$  (rad/sec), et  $\omega_2 = \omega_4 = 150$ (rad/sec)

**3<sup>ème</sup> test :** pour  $\omega_1 = 150$ (rad/sec), et  $\omega_3 = 250$ (rad/sec), et  $\omega_2 = \omega_4 = 200$ (rad/sec)

**4<sup>ème</sup> test :** pour  $\omega_2 = 150$ (rad/sec), et  $\omega_4 = 250$ (rad/sec), et  $\omega_1 = \omega_3 = 200$ (rad/sec)

❖ Pour se faire, on doit d'abord réaliser le programme **simulink** suivant :



Figure(I.9) : schéma de simulation du quadrirotor en boucle ouverte sous simulink

Les résultats obtenus par chaque test, donne une image claire sur un mode de vol précis.

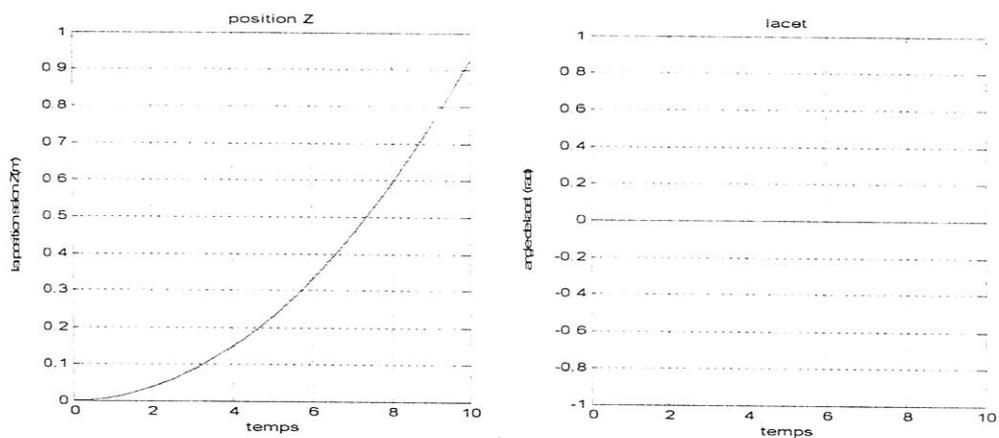
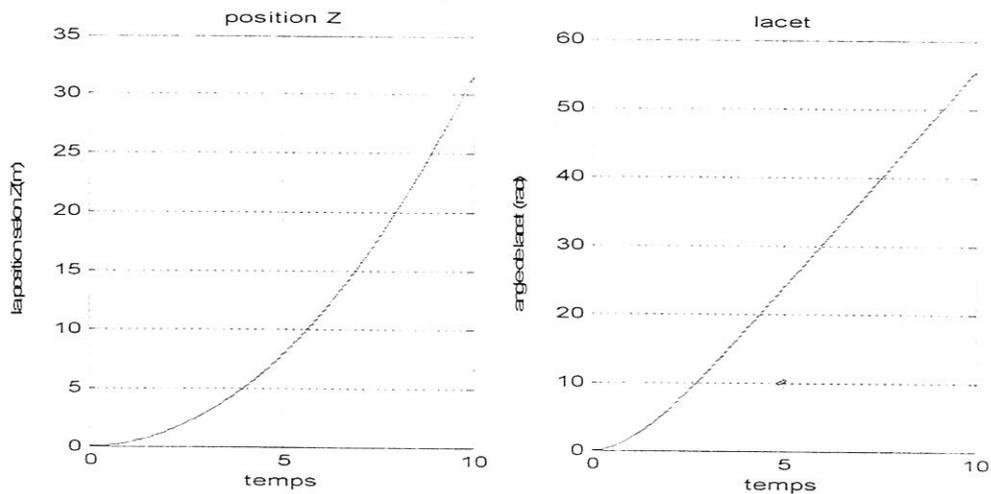
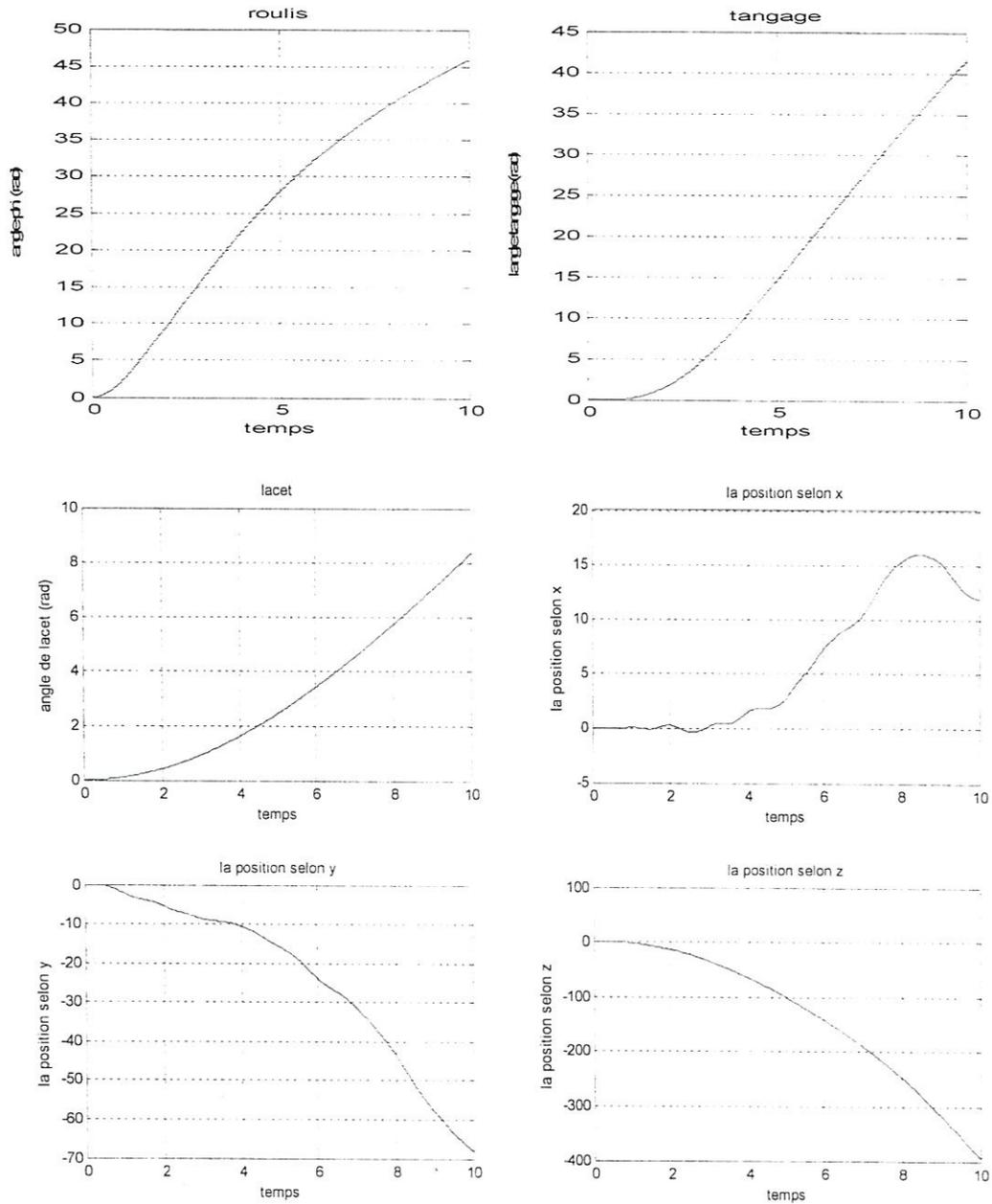


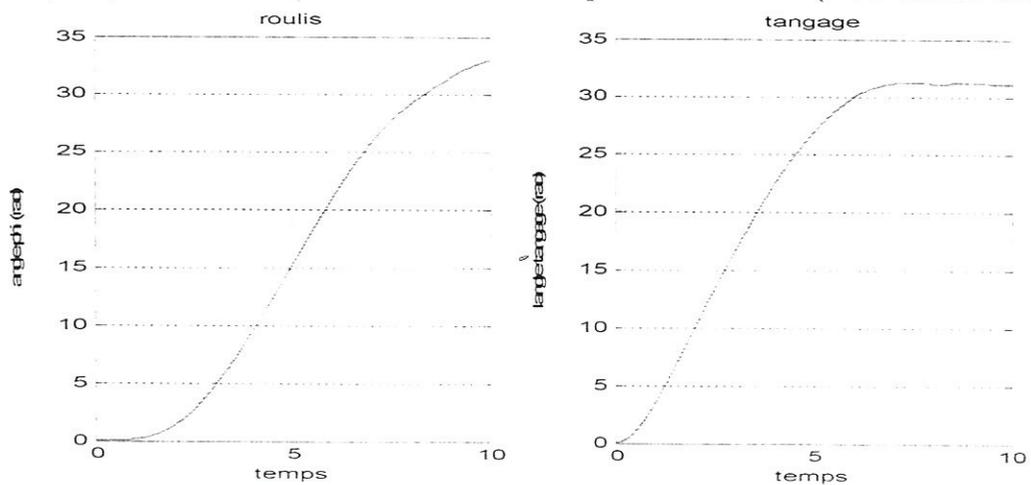
Figure (I.10) : les résultats de simulation en BO pour le 1<sup>er</sup> test (mouvement verticale)

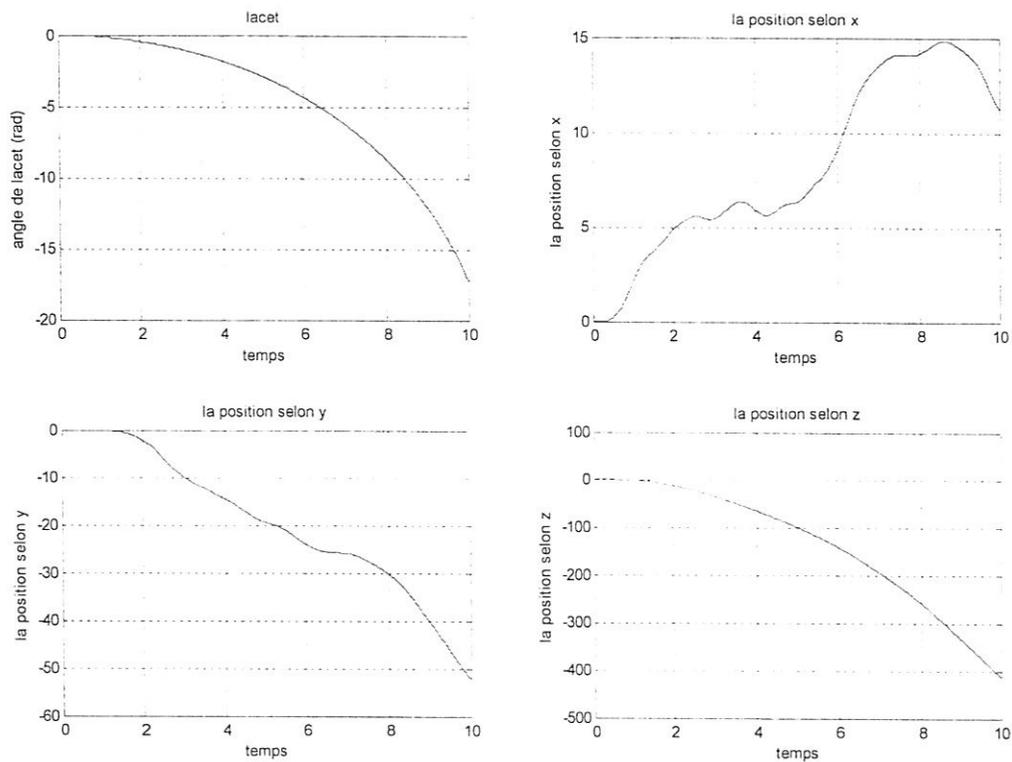


Figure(I.11) : les résultats de simulation en BO pour le 2<sup>ème</sup> test (mouvement lacet)



Figure(I.12) : les résultats de simulation en BO pour le 3<sup>ème</sup> test (mouvement tangage)





Figure(I.13): les résultats de simulation en BO pour le 4<sup>ème</sup> test (mouvement roulis)

### I.6. Commentaires sur les résultats

➤ **Pour le premier test : Mouvement vertical**

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 200 \text{ rad/s}$$

- Le seul mouvement existe est le mouvement vertical c à d la translation sur l'axe Z qui dû à la force de portance non nulle  $u_1$ .
- Les forces de portances  $u_2, u_3$  et  $u_4$  sont nulles, c à d il n'existe aucun mouvement de rotation sur les axes  $X, Y$  et  $Z$  ( $\varphi = \theta = \psi = 0^\circ$ ), ce qui n'implique aucun mouvement de translation sur les axes  $X, Y$ .

➤ **Pour le deuxième test : Mouvement de lacet**

$$w_1 = w_3 = 250 \text{ rad/s}, w_2 = w_4 = 150 \text{ rad/s}$$

- L'action  $u_4$  est non nulle explique le mouvement de rotation autour de l'axe Z.
- L'action  $u_1 \neq mg$ , alors on obtient toujours le mouvement de translation vertical.
- Les actions  $u_2$  et  $u_3$  sont nulles et malgré ça, il apparaît un mouvement de rotation autour des axes  $X$  et  $Y$ . Ceci est dû à :

- L'effet gyroscopique provoqué par le mouvement de rotation autour de l'axe  $Z$ .
- La différence entre les vitesses des moteurs et le mouvement de rotation de l'étape précédente.
- Le mouvement de rotation autour de  $Y$  ( $\theta$ ) a donné un mouvement de translation sur  $X$
- Le mouvement de rotation autour de  $X$  ( $\varphi$ ) a donné un mouvement de translation sur  $Y$

➤ **Pour le troisième test : *Mouvement de tangage***

$$w_1 = 150 \text{ rad/s}, w_2 = w_4 = 200 \text{ rad/s}, w_3 = 250 \text{ rad/s}$$

- L'action  $u_3 > 0$  ( $w_3 > w_1$ ) qui provoque un mouvement de rotation positif sur l'axe  $Y$  par un angle  $\theta$ , ce dernier crée un mouvement de translation selon l'axe  $X$  (mouvement de tangage)
- A cause du mouvement de rotation sur l'axe  $Y$ , on obtient un effet gyroscopique de roulis provoquant une rotation sur l'axe  $X$  malgré que l'action  $u_2$  ( $w_2 = w_4$ ) est nulle

➤ **Pour le quatrième test : *Mouvement de roulis***

$$w_2 = 150 \text{ rad/s}, w_1 = w_3 = 200 \text{ rad/s}, w_4 = 250 \text{ rad/s}$$

- L'action  $u_2 > 0$  ( $w_4 > w_2$ ) qui provoque un mouvement de rotation positif sur l'axe  $X$  par un angle  $\varphi$ .
- La rotation sur l'axe  $X$  crée le mouvement de translation selon l'axe  $Y$  (mouvement de roulis)
- Malgré que l'action  $u_3$  soit nulle, il existe un mouvement de rotation sur l'axe  $Y$  dû à l'effet de gyroscopique provoqué par le mouvement de rotation autour de l'axe  $X$
- L'action  $u_4$  est négative, on remarque un changement de la pente par rapport à l'étape précédente.
- L'action  $u_1$  est différente au poids du quadrirotor, ce dernier se déplace verticalement.

## I.7. Conclusion

Avec la croissance de l'intérêt des UAV, celui des avions à atterrissage et à décollage verticale (VTOL) et le besoin d'une instrumentation discrète et surtout légère, le quadrirotor a connu une grande popularité ces dernières années.

Le quadrirotor est un système complexe non linéaire, multi variables, instable notamment en mode de vol quasi-stationnaire et présente une dynamique fortement couplée. Le problème traité consiste à garantir en premier lieu la stabilité de ce dernier ainsi que la poursuite de trajectoire avec plus au moins des performances acceptables vis-à-vis le milieu de navigation. Nous pouvons conclure qu'un modèle dynamique universel pour le quadrirotor n'existe pas. Cela peut être justifié, d'une part, par la complexité du système en lui même (modèle non linéaire et sous actionné).

D'autre part, une représentation simple de la dynamique du comportement complet du quadrirotor, dans tous les modes de vol permettant la synthèse de loi de commande, n'existe pas. Ceci est du au fait que la dynamique résulte principalement de la nature différente des diverses forces aérodynamiques dans les différentes conditions de vol.

- ✓ Le quadrirotor peut faire quatre modes de vol possibles ; vol vertical, vol de roulis, vol de tangage et le vol de lacet. Ces vols sont provoqués par les changements des vitesses de rotation des quatre moteurs
- ✓ Le quadrirotor est modélisé par un modèle dynamique de 12 variables d'états, 4 entrées et 6 sortie, pour bien comprendre le fonctionnement de ce dernier il faut faire un teste en boucle ouvert

D'autre part, une représentation simple de la dynamique du comportement complet du quadrirotor, dans tous les modes de vol permettant la synthèse de loi de commande, n'existe pas. Ceci est du au fait que la dynamique résulte principalement de la nature différente des diverses forces aérodynamiques dans les différentes conditions de vol.

En fin, nous avons démontré à travers les résultats de simulation que le processus qu'on a entrain d'étudier est instable en boucle ouvert, ce qui nous a poussé à chercher de le stabiliser, et ca se qu'on le voir dans les chapitres suivants. Dans le chapitre qui suit, nous avons présenté la commande par mode de glissement.

## Commande par mode glissant

### II.1. Introduction

Les équations des systèmes physiques sont non linéaires et fortement couplés, de plus, ses paramètres dépendent de la charge qui est souvent inconnue. Ces problèmes deviennent de plus en plus difficiles à contourner par des algorithmes de commande classique (PID) en fait et à mesure que le robot devient plus léger, plus souple, et surtout lorsque les exigences des caractéristiques de la dynamique du système bouclé sont trop stricts, pour de telles raisons une solution réside dans l'application de nouvelle technique de commande insensible aux perturbations du système, au non linéarité et aux variations des paramètres à commander par le recours des algorithmes de commande robuste, cette technique de commande robuste est une classe particulière des systèmes de commande appelée : **Commande à régime glissant** basée sur la théorie des systèmes à structure variable.

Plusieurs auteurs depuis les années 60 ont développés des algorithmes de commande à structure variable, ex U.S notamment dans l'équipe de professeur EMILLIANOV, à partir des résultats d'étude théorique du mathématicien PHILIPOV sur des équations différentielles à second membre discontinue.

L'idée d'appliquer cette théorie dans le domaine de robotique revient à de nombreux chercheurs : R.K.YONG, V.UTRINE, J.J.F SLOTINE et F.HARASHIMA [10].

L'algorithme de commande par mode de glissement est classifié dans les systèmes à structure variable VSS (Variable Structure System dans la littérature anglo-saxonne). Cette technique est basée sur le principe qu'il est plus facile de commander un système de premier ordre de commander un système de nième ordre, qu'il soit linéaire ou non.

La commande par mode de glissement est une commande à structure variable et par nature une commande non linéaire. La caractéristique principale des systèmes à structure variable est que leurs lois de commande se modifient d'une manière discontinue. Elle ne nécessite pas une connaissance exacte du modèle du système car elle est robuste par rapport aux variations paramétriques et aux perturbations externes.

Mais malgré cela, elle pose des problèmes de broutement qui peuvent endommager le dispositif à cause des hautes fréquences résultants de la discontinuité de la commande.

## II.2. Généralités sur la commande par mode de glissement

Le réglage par mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier de la théorie des systèmes à structure variable.

### ◆ Théories des Modes glissants

Les systèmes à structure variable sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation appropriée. Ce choix assure à tout instant la commutation entre ces structures. La combinaison des propriétés de chacune de ces structures permet d'imposer le comportement désiré au système global [9].

## II.3. Systèmes à structure variables

Un système à structure variable (VSS) est un système dont la structure change pendant son fonctionnement, il est caractérisé par le choix d'une structure et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à l'autre à tout instant. De plus un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure [12].

Les systèmes à structure variable sont des systèmes dans lesquels les paramètres de régulation peuvent prendre deux valeurs différentes ; la commutation d'une valeur à l'autre se fait suivant le signe d'une fonction définie dans l'espace d'état du système.

$$U = \begin{cases} u^+ & s(x,t) > 0 \\ u^- & s(x,t) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

## II.4. Principe de fonctionnement:

L'idée de base de la commande par mode glissant est premièrement d'attirer les états du système vers une surface de glissement convenablement choisie, puis de concevoir une loi de commande stabilisante qui pourra maintenir le système sur cette surface. En résumé, une commande par mode glissant est divisée en deux parties :

- ✓ Détermination d'une surface de glissement.
- ✓ Définition d'une loi de commande stabilisante qui pourra contraindre le système à avoir le comportement désiré.

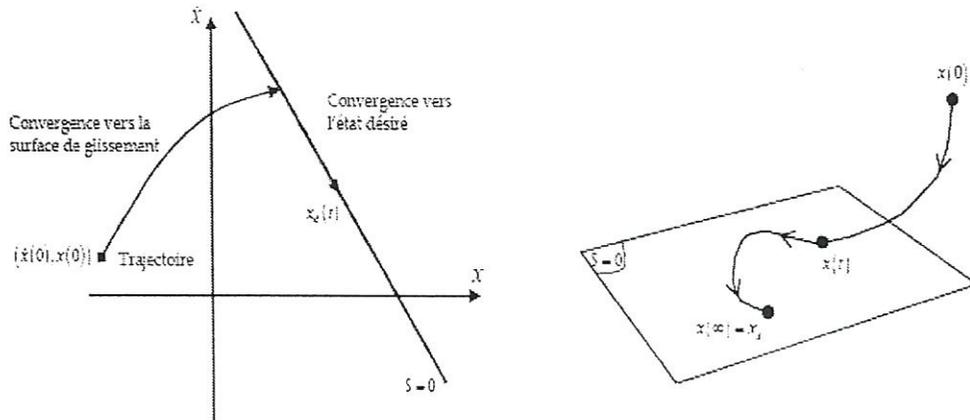


Figure (II.1): Convergence du système glissant

La surface de commutation  $S_0$  est définie comme suite :

$$S_0 = \{x(t) \ / \ S(x, t) = 0\}$$

$S(x, t)$  : est la fonction de commutation (surface).

Ici, on a choisi une surface de glissement sur laquelle le système commute; c'est la surface sur laquelle le système suit l'évolution désirée. En général, la variété de commutation est de dimension égale à «n » moins le nombre de fonction de commutation disponible (i.e. dans le cas de la commande, c'est le nombre de sorties à stabiliser).

Les trajectoires associées à la fonction  $f$  se résument en trois configurations où sont décrites les évolutions temporelles :

- La première configuration représente des trajectoires de  $f^+$  et  $f^-$  qui mettent en évidence un phénomène de répulsion de celles-ci vis-à-vis de la surface de commutation  $S_0$ .
- La deuxième configuration représente des trajectoires où il existe des phénomènes d'attraction pour  $f^+$  (respectivement pour  $f^-$ ) et de répulsion pour  $f^-$  (respectivement pour  $f^+$ ).

- La troisième configuration représente des trajectoires de  $f^+$  et  $f^-$  qui convergent vers la surface de commutation  $S_0$ , et qui ont la particularité de glisser sur celle-ci. Ce phénomène est appelé «mode de glissement»

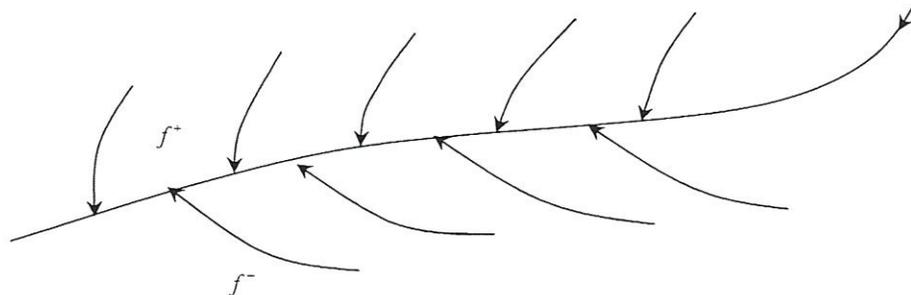


Figure (II.2): Trajectoires de  $f^+$  et de  $f^-$  pour le mode de glissement.

#### ❖ Calcul de la commande

Une fois la surface de glissement est choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant la condition d'existence des modes glissants.

Une des hypothèses essentielles dans la conception des systèmes à structure variable contrôlés par les modes glissants, est que la commande doit commuter entre  $u_{Max}$  et  $u_{Min}$  instantanément (fréquence infinie), en fonction du signe de la surface de glissement.

Dans ce cas, des oscillations de très haute fréquence appelées «broutement» ou «Chattering» apparaissent dans le mode de glissement.

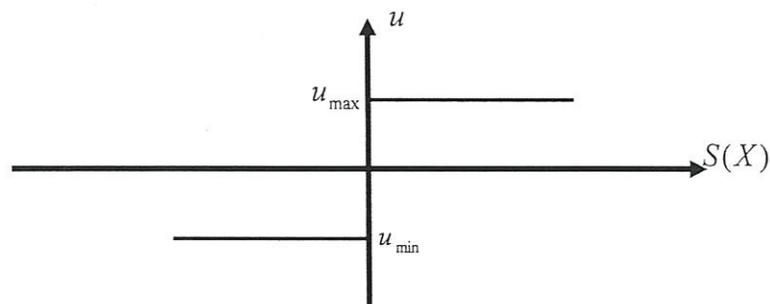


Figure (II.3) : Commande appliquée aux systèmes à structure variable.

Les deux composants de la commande sont :

$$U = U_{equivalente} + U_{attractive} \tag{II.2}$$

$U_{eq}$  : correspond au régime glissant s'effectue sur la surface d'équation :  $S(x,t)=0$  avec la condition  $\dot{S}(x,t) = 0$ .

La commande équivalente a un sens physique : elle représente la valeur moyenne de commande lors de la commande rapide entre  $U_{max}$  et  $U_{min}$ , qui maintient l'état du système sur la surface de glissement  $S(x,t) = 0$  définit comme suit :

$$\begin{aligned} U_{min} &= \text{Min}\{u^+(x,t), u^-(x,t)\} \\ U_{max} &= \text{Max}\{u^+(x,t), u^-(x,t)\} \\ U_{min} &< U_{equivalente} < U_{max} \end{aligned} \tag{II.3}$$

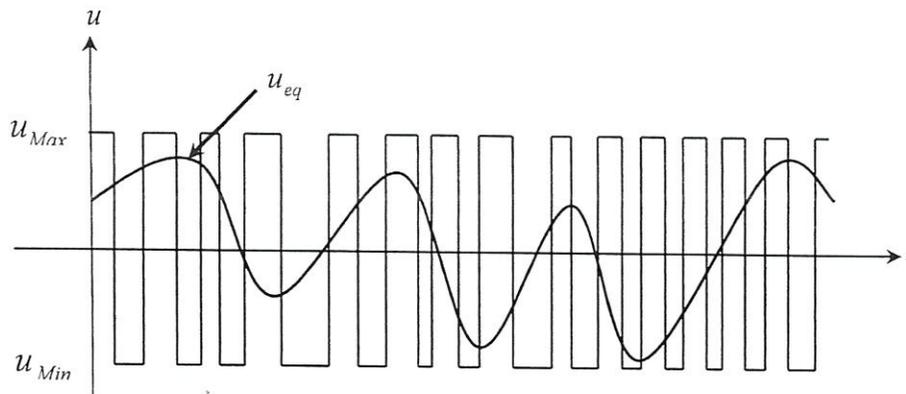


Figure (II.4) : La valeur continue  $u_{eq}$  prise par la commande lors de la commutation entre  $u_{Max}$  et  $u_{Min}$ .

$U_{attractive}$  : Le glissement est utile pour compenser les incertitudes du modèle, il est constitué de la fonction "sign" de la surface de glissement, multipliée par une constante K. La surface de glissement est définie dans l'espace d'état d'erreurs afin de garantir la convergence des états du système.

Considérons le système dynamique suivant :

$$x^{(n)} = f(x) + g(x)u \tag{II.4}$$

$$X = [x \quad \dot{x} \quad \ddot{x} \quad \dots \quad x^{(n-1)}]^T : \text{Vecteur d'état.}$$

Dans l'équation précédent  $f(x)$  n'est pas connue exactement, cette imprécision du modèle est supposée bornée par une fonction continue  $\Delta f(x)$  donc :

$$\begin{aligned}x^{(n)} &= f(x) + \Delta f(x) + [g(x) + \Delta g(x)]u \\x^{(n)} &= f(x) + g(x)u + \Delta(x)\end{aligned}\quad (\text{II.5})$$

Avec :

$\Delta(x)$ : Les incertitudes sur le système supposé borner par une constante connue

$$\bar{\Delta} : |\Delta(x)| \leq \bar{\Delta}$$

L'intérêt de la commande consiste à synthétiser une loi de commande par la technique des modes glissants, assurant la poursuite pour l'état  $x$  d'une trajectoire désirée.

$$x_d = [x_d \quad \dot{x}_d \quad \ddot{x}_d \quad \dots \quad x_d^{(n-1)}]^T \quad (\text{II.6})$$

L'état initial désiré doit être tel que :  $x_d(0) \equiv x(0)$

La recherche d'une commande par modes glissants nous amène à considérer les trois notions suivantes, très importantes lors de la synthèse d'une CSV :

- Choix de la surface de glissement.
- Attractivité de la surface de glissement.
- Invariance du régime glissant vis à vis des incertitudes paramétriques et/ou des perturbations.

#### ◆ Fonction de LYAPUNOV

Il s'agit de formuler une fonction scalaire positive  $V(x) > 0$  pour les variables d'état du système, et de choisir la loi de commutation qui fera décroître cette fonction (i.e.  $\dot{V}(x) < 0$ ).

Cette fonction est généralement utilisée pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires

En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (\text{II.7})$$

Et sa dérivée par :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) \quad (\text{II.8})$$

Pour que la fonction de Lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. Ceci est vérifié si :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0$$

### II.5. Choix de la surface de glissement

Nous voulons faire suivre au vecteur d'état  $x$  une trajectoire désirée, définie par le vecteur d'état désiré  $x_d(t)$ . Pour cela, on pose le vecteur d'erreur :  $e = x_d - x$

Par ailleurs, nous allons définir une surface de glissement variante dans le temps, dans l'espace d'état  $R^n$  par l'équation  $S(x, t)=0$  :

$$S(x, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(x); \quad \lambda > 0 \quad (\text{II.9})$$

$$S(x, t) = e^{(n-1)} + \alpha_{n-1} e^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 e = 0 \quad (\text{II.10})$$

$\lambda$  : constante strictement positive, choisie de façon à assurer la rapidité et la stabilité du système.

$n$ : l'ordre du système.

$S(x, t) = 0$  : est une équation différentielle linéaire, sa solution est :  $e(x)=0$ .

Avec la définition précédente, le problème de suivre  $x_d$  est le même que celui de rester sur la surface  $S(x, t)$  pour tout le temps  $t > 0$ .

En effet,  $S=0$  représente une équation dont la solution unique est :  $e=0$ . De cette façon, le problème de suivre le vecteur désiré est réduit à retenir  $S$  à zéro [11].

Après la détermination de la surface de glissement, l'étape suivante est de garantir l'existence d'un régime glissant.

### II.6. Attractivité de la surface de glissement

La tâche la plus importante est de synthétiser une commande qui conduira l'état du système sur la surface de glissement, cette phase est appelée phase attractive (reaching mode).

Lyapunov propose une approche, déjà utilisée pour l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre, sans avoir à résoudre l'équation d'état du système.

Soit  $v(x)$  une fonction scalaire, continue et dérivable définie sur un domaine  $D$  contenant l'origine  $v(x)$  est dite définie positive si  $v(0)=0$  et  $v(x)>0$ .

Prenons  $v(x)=\frac{1}{2}S(x)^2$  et calculons sa dérivée par rapport au temps,  $v(x)$  étant une norme, elle représente une mesure du carré de la distance par rapport à l'origine.

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S(x)^2 = S(x)\dot{S}(x) \tag{II.11}$$

Ainsi, en s'assurant que cette dérivée soit strictement négative, la distance caractérisée par  $v(x)$  diminuera jusqu'à l'origine c'est à dire que l'état du système sera attiré vers la surface de glissement, d'où le nom d'attractivité.

### II.7. Condition d'existence du glissement

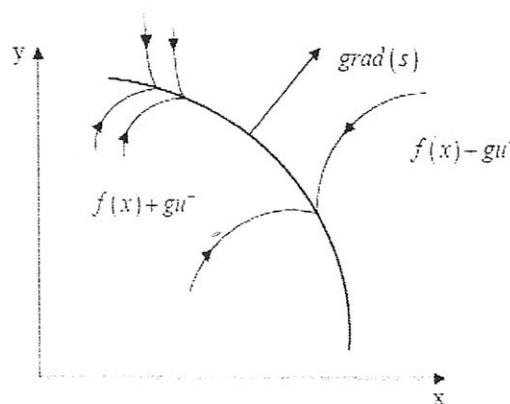
Un régime glissant existe sur une surface de glissement si et seulement si dans un voisinage de la surface de glissement tous les trajectoires du système sont dirigées vers elle, en d'autre termes :

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^-} \dot{S}(x) > 0 \tag{II.12}$$

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^+} \dot{S}(x) < 0 \tag{II.13}$$

L'expression précédente peut être écrite de façon simple :  $S\dot{S} < 0$

Cette équation est appelée attractivité de la surface ou condition de glissement.



Figure(II.5) : attractivité de la surface

- Tant que le régime glissant est assuré. Il admet en outre des erreurs de modélisation, tant que ces variations et erreurs maintiennent les conditions de régime glissant qui s'effectue alors au voisinage de l'hypersurface de glissement  $s(x) = 0$ .

## II.8. Loi de commande

Lorsque le régime glissant est atteint, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant les conditions d'existence de glissement.

### II.8.1 Expression analytique de la commande

Nous nous intéressons au calcul de la loi de commande attractive du système qui est défini dans l'espace d'état par l'équation : (II. 4)

Si le système  $[f(x)+g(x)u]$  est en boucle fermée sous la loi de commande :

$$U = -g^{-1}(f(x) + v(x) + k_0 S(x) + k_1 \text{sign}(S)) \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$$k_{0,1} > 0$$

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} 1 & S > 0 \\ 0 & S = 0 \\ -1 & S < 0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Afin d'annuler l'erreur de poursuite c à d la trajectoire atteinte la surface et y restera ou  $S=0$ , il faut que la fonction  $g(x)$  reste non nulle pendant le régime de convergence et de glissement.

### II.8.2 Propriété de robustesse

Considérons le système :  $y^{(n)} = f(x) + g(x)u$  soumis à des perturbations "d" tel que :

$$y^{(n)} = f(x) + g(x)u + d \quad (\text{II.16})$$

La robustesse des contrôleurs glissants est garantie par le théorème de recouvrement [31].

### Théorème

Un régime glissant sur la surface du système perturbé est indépendant du signal de perturbation "d", si et seulement si:  $d \in \text{vect} \{g(x)\}$ .

Cette condition structurelle est appelée : **condition de recouvrement**.

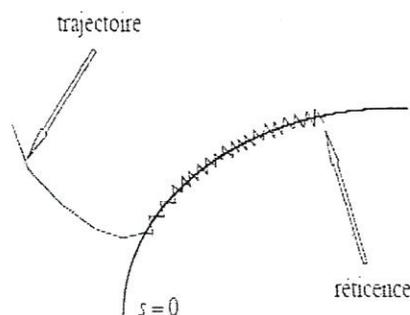
L'ensemble  $\text{vect} \{g(x)\}$  désigne la distribution engendrée par les vecteurs :  $g_1, g_2, \dots, g_n$ .

Il faut noter que le système est insensible aux perturbations seulement en régime glissant, mais qu'il reste infecté pendant le régime transitoire [11].

### II.8.3 Chattering : Broutement

La théorie de la commande décrite précédemment assure un comportement désiré du système en boucle fermée. Cependant, elle a besoin (dans le cas idéal) d'une commutation avec une fréquence infinie au niveau des actionneurs. Cette oscillation au voisinage de la surface de glissement est appelée réticence ou broutement.

La figure suivante montre l'effet de la réticence dans la convergence du système; la réticence n'est pas désirable car elle induit des dynamiques de haute fréquence du système augmentant la commutation énergétique qui peut endommager les actionneurs. La réticence est le principal désavantage des modes glissants. De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer ce problème par exemple la solution par observateur.....



*Figure(II.6) : phénomène de réticence*

## II.9. Synthèse de la commande

La synthèse des lois de commande stabilisantes à partir des fonctions de Lyapunov choisies et qui peuvent assurer la condition nécessaire de glissement à savoir ( $S\dot{S} < 0$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2 = \frac{1}{b_1} \{-k_1 \text{sign}(S_\varphi) - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_2^2 - a_3 \bar{\Omega} x_4 + \ddot{\varphi}_d + \lambda_1 e_2\} \\ U_3 = \frac{1}{b_2} \{-k_2 \text{sign}(S_\theta) - a_4 x_2 x_6 - a_5 x_4^2 - a_6 \bar{\Omega} x_2 + \ddot{\theta}_d + \lambda_2 e_4\} \\ U_4 = \frac{1}{b_3} \{-k_3 \text{sign}(S_\psi) - a_7 x_2 x_4 - a_8 x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \lambda_3 e_6\} \\ U_x = \frac{m}{U_1} \{-k_4 \text{sign}(S_x) - a_9 x_8 + \ddot{x}_d + \lambda_4 e_8\} \quad / U_1 \neq 0 \\ U_y = \frac{m}{U_1} \{-k_5 \text{sign}(S_y) - a_{10} x_{10} + \ddot{y}_d + \lambda_5 e_{10}\} \quad / U_1 \neq 0 \\ U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \{-k_6 \text{sign}(S_z) - a_{11} x_{12} + \ddot{z}_d + \lambda_6 e_{12} + g\} \quad / \cos x_1 \cos x_3 \neq 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.17})$$

### Démonstration

Soient les erreurs de poursuite suivantes :

$$e_i = x_{id} - x_i \quad (\text{II.18})$$

$$e_{i+1} = \dot{e}_i \quad (\text{II.19})$$

Les surfaces de glissement sont choisies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_\varphi = e_2 + \lambda_1 e_1 \\ S_\theta = e_4 + \lambda_2 e_3 \\ S_\psi = e_6 + \lambda_3 e_5 \\ S_x = e_8 + \lambda_4 e_7 \\ S_y = e_{10} + \lambda_5 e_9 \\ S_z = e_{12} + \lambda_6 e_{11} \end{array} \right. \quad (\text{II.20})$$

• **Contrôleur de l'attitude**

La dynamique de l'angle de roulis est comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_2, x_4, x_6, \bar{\Omega}) + b_1 U_2 \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$$f_1(x_2, x_4, x_6, \bar{\Omega}) = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} \quad (\text{II.22})$$

Pour que l'angle suive une trajectoire donnée  $x_{1d}$ , on définit l'erreur de poursuite suivante:

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad (\text{II.23})$$

La dérivée de l'erreur par rapport au temps est comme suit:

$$e_2 = \dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 \quad (\text{II.24})$$

On choisit la surface de glissement comme suit:

$$S_\varphi = e_2 + \lambda_1 e_1 \quad (\text{II.25})$$

La fonction de Lyapunov est donnée par:

$$V(S_\varphi) = \frac{1}{2} S_\varphi^2 \quad (\text{II.26})$$

En dérivant cette fonction par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{V}_1 = S_\varphi \dot{S}_\varphi \quad (\text{II.27})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{S}_\varphi &= \dot{e}_2 + \lambda_1 \dot{e}_1 \\ \dot{S}_\varphi &= \ddot{x}_{1d} - \ddot{x}_2 + \lambda_1 \dot{e}_1 \end{aligned} \quad (*) \quad (\text{II.28})$$

D'autre part :

$$\dot{S}_\varphi = k_1 \text{sign}(S_\varphi) \quad (**) \quad (\text{II.29})$$

Par identification entre (\*\*\*) et (\*), on trouve:

$$k_1 \text{sign}(S_\varphi) = -a_1 x_4 x_6 - a_2 x_2^2 - a_3 \bar{\Omega} x_4 - b_1 U_2 + \ddot{\varphi}_d + \lambda_1 (\dot{\varphi}_d - x_1) \quad (\text{II.30})$$

Alors:

$$U_2 = \frac{1}{b_1} \{-k_1 \text{sign}(S_\varphi) - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_2^2 - a_3 \bar{\Omega} x_4 + \ddot{\varphi}_d + \lambda_1 e_2\} \quad (\text{II.31})$$

On a :

$$U_2 = U_{2attractive} + U_{2equivalente} \quad (\text{II.32})$$



Donc :

$$\begin{cases} U_{2attractive} = \frac{-k_1}{b_1} \text{sign}(S_\varphi) \\ U_{2equivalente} = \frac{-1}{b_1} (a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} - \ddot{\phi}_d - \lambda_1 e_2) \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

De la même manière on trouve :

$$U_3 = \frac{1}{b_2} \left\{ -k_2 \text{sign}(S_\theta) - a_4 x_2 x_6 - a_5 x_4^2 - a_6 \bar{\Omega} x_2 + \ddot{\theta}_d + \lambda_2 e_4 \right\} \quad (\text{II.34})$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3} \left\{ -k_3 \text{sign}(S_\psi) - a_7 x_2 x_4 - a_8 x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \lambda_3 e_6 \right\} \quad (\text{II.35})$$

### • Contrôleur de position

La dynamique de la translation sur  $X$  est comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = f_4(x_8) + \frac{U_1}{m} U_x \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Avec :

$$f_4(x_8) = a_9 x_8 \quad (\text{II.37})$$

Pour que la position suive une trajectoire donnée  $x_{7d}$ , on définit l'erreur de poursuite suivante:

$$\begin{aligned} e_7 &= x_{7d} - x_7 \\ e_8 &= \dot{e}_7 = \dot{x}_{7d} - \dot{x}_7 \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

On choisit la surface de glissement comme suit:

$$S_x = e_8 + \lambda_4 e_7 \quad (\text{II.39})$$

La fonction de Lyapunov est donnée par:

$$V(S_x) = \frac{1}{2} S_x^2 \quad (\text{II.40})$$

En dérivant cette fonction par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{V}_4 = S_x \dot{S}_x \quad (\text{II.41})$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} \dot{S}_x = \dot{e}_8 + \lambda_4 \dot{e}_7 \\ \dot{S}_x = \ddot{x}_{7d} - \dot{x}_7 + \lambda_4 \dot{e}_7 \end{cases} \quad (*) \quad (\text{II.42})$$

D'autre part :

$$\dot{S}_x = k_4 \text{sign}(S_x) \quad (**) \quad (\text{II.43})$$

Par identification entre (\*) et (\*\*), on trouve:

$$k_4 \text{sign}(S_x) = -a_9 x_8 - \frac{U_1}{m} U_x + \ddot{x}_d + \lambda_4 (\dot{x}_d - x_8) \quad (\text{II.44})$$

Alors:

$$U_x = \frac{m}{U_1} \{-k_4 \text{sign}(S_x) - a_9 x_8 + \ddot{x}_d + \lambda_4 e_8\} \quad / U_1 \neq 0 \quad (\text{II.45})$$

On a :

$$U_x = U_{\text{attractive}} + U_{\text{equivalente}} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{cases} U_{\text{attractive}} = \frac{-k_4 m}{U_1} \text{sign}(S_x) \\ U_{\text{equivalente}} = \frac{-1}{U_1} (a_9 x_8 - \ddot{x}_d - \lambda_4 e_8) \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

De la même manière on trouve  $U_y$  :

$$U_y = \frac{m}{U_1} \{-k_5 \text{sign}(S_y) - a_{10} x_{10} + \ddot{y}_d + \lambda_5 e_{10}\} \quad / U_1 \neq 0 \quad (\text{II.48})$$

### • Contrôleur de l'altitude

La dynamique de l'altitude est comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = f_6(x_{12}) + \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

Avec :

$$f_6(x_{12}) = a_{11} x_{12} - g \quad (\text{II.50})$$

Pour que l'altitude suive une trajectoire donnée  $x_{11d}$ , on définit l'erreur de poursuite suivante:

$$\begin{aligned} e_{11} &= x_{11d} - x_{11} \\ e_{12} &= \dot{e}_{11} = \dot{x}_{11d} - \dot{x}_{11} \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

On choisit la surface de glissement comme suit:

$$S_z = e_{12} + \lambda_6 e_{11} \quad (\text{II.52})$$

La fonction de Lyapunov est donnée par:

$$V(S_z) = \frac{1}{2} S_z^2 \quad (\text{II.53})$$

En dérivant cette fonction par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{V}_6 = S_z \dot{S}_z \quad (\text{II.54})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= \dot{e}_{12} + \lambda_6 \dot{e}_{11} \\ \dot{S}_z &= \ddot{x}_{11d} - \dot{x}_{12} + \lambda_6 \dot{e}_{11} \end{aligned} \quad (*) \quad (\text{II.55})$$

D'autre part :

$$\dot{S}_z = k_6 \text{sign}(S_z) \quad (**) \quad (\text{II.56})$$

Par identification entre (\*) et (\*\*), on trouve:

$$k_6 \text{sign}(S_z) = -a_{11} x_{12} + g - \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 + \ddot{z}_d + \lambda_6 (\dot{z}_d - x_{12}) \quad (\text{II.57})$$

Alors:

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \{-k_6 \text{sign}(S_z) - a_{11} x_{12} + \ddot{z}_d + \lambda_6 e_{12} + g\} / \cos x_1 \cos x_3 \neq 0 \quad (\text{II.58})$$

On a :

$$U_1 = U_{\text{attractive}} + U_{\text{equivalente}} \quad (\text{II.59})$$

$$\begin{cases} U_{\text{attractive}} = \frac{-k_6 m}{\cos x_1 \cos x_3} \text{sign}(S_z) \\ U_{\text{equivalente}} = \frac{-1}{\cos x_1 \cos x_3} (a_{11} x_{12} - \ddot{z}_d - \lambda_6 e_{12} + g) \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

II.10. Résultats de simulation

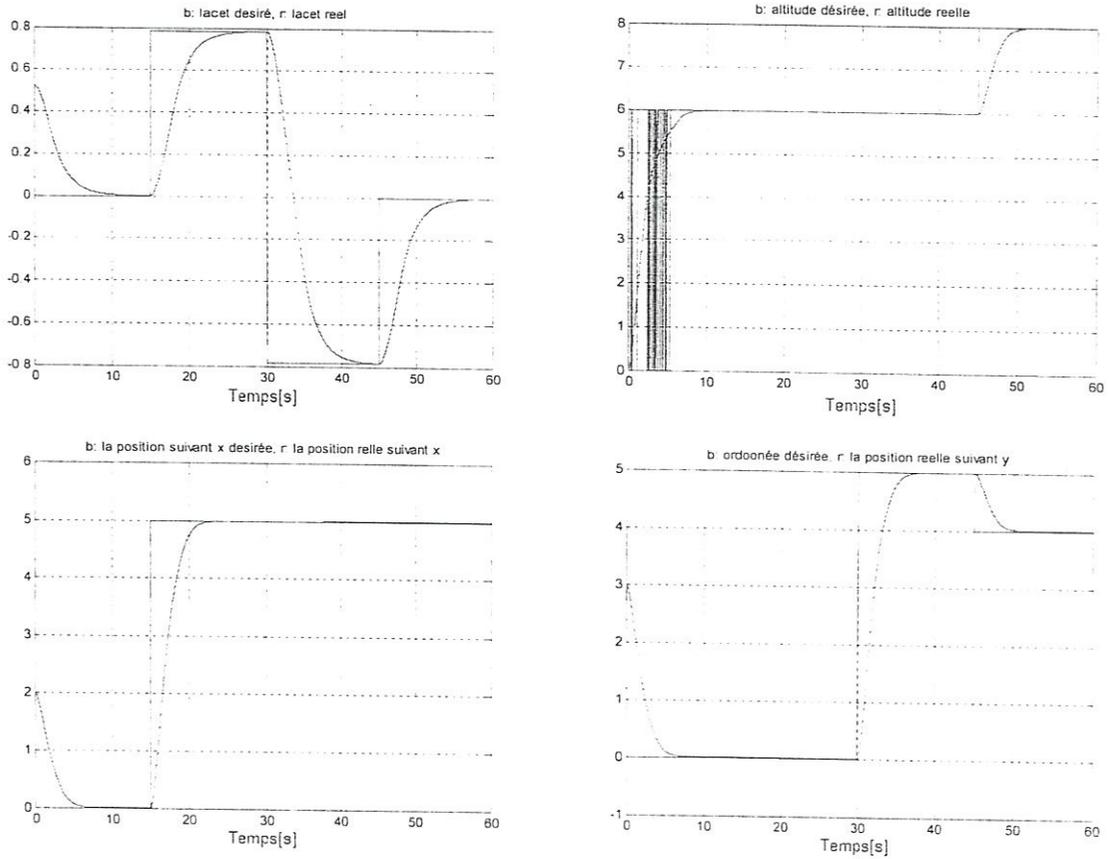
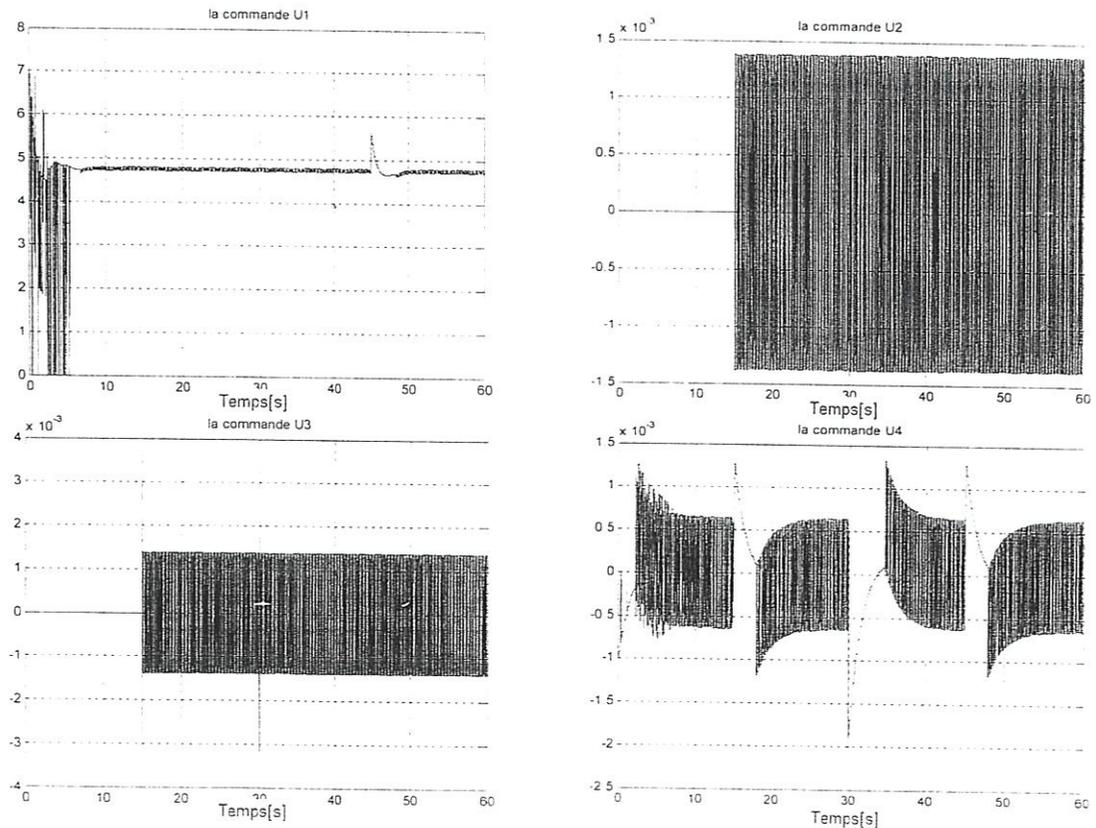
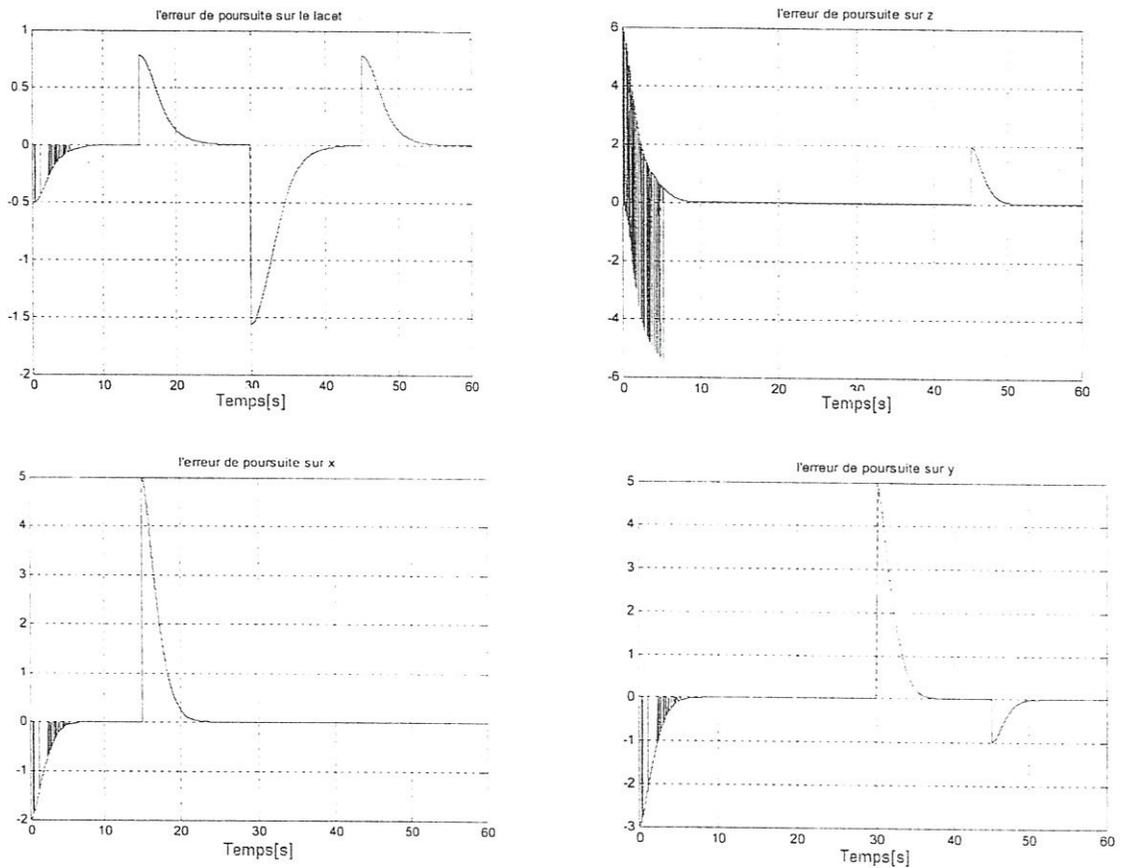


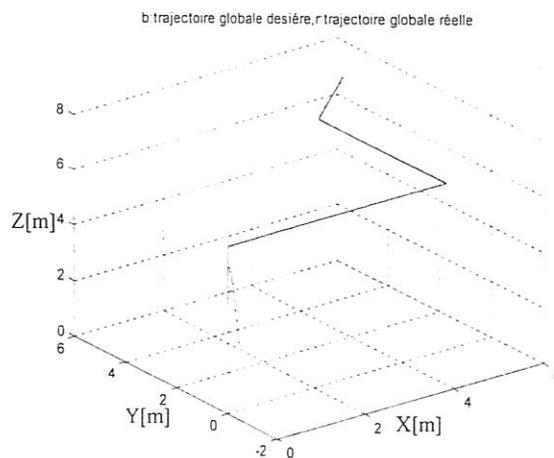
Figure (II.7) : Poursuite des trajectoires désirées selon le lacet  $\phi$  et les axes (X, Y, Z)



Figure(II.8) : Les signaux de commande



Figure(II.9) : Erreurs de poursuite sur les trajectoires désirées selon le lacet  $\phi$  et les Axe (X, Y, Z).



Figure(II.10) : Trajectoire globale du quadrirotor en 3D

### II.11. Interprétation des résultats

La convergence asymptotique vers zéro est réalisée. Cependant comme le montre les figures le phénomène de réticence est observé et entrave l'application de cette loi de commande, ce phénomène est dû au terme de discontinuité présent dans la loi de commande.

- ✓ La commande par mode glissant assure une stabilité au sens de Lyapunov.
- ✓ Le bon choix de  $(k, \lambda)$ , assure de bons résultats de poursuite, tandis le phénomène du chattering est toujours présent au niveau des signaux de commande.

### II.12. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la commande à structure variable (CSV). Après la présentation de la théorie de base de cette commande, nous avons défini la méthodologie de conception nécessaire pour cette commande; nous constatons que le choix convenable des surfaces de commutation permet d'obtenir des hautes performances suite à la nature de la CSV qui s'adapte bien aux systèmes non linéaires.

Il faut noter aussi que la loi de commande par mode glissant synthétisée prend en considération tout les non linéarités du système ainsi que la dynamique de la trajectoire désirée.

Le choix des coefficients  $(k, \lambda)$ , peut être très délicat et difficile bien que ces derniers soient choisis positifs mais cela peut introduire une instabilité, ainsi que le phénomène de chattering au niveau de la commande.

Pour diminuer le phénomène de « **Chattering** » une commande adoucissante est appliquée.

## *Observateur par mode glissant*

### III.1. Introduction

La commande des processus industriels nécessite souvent la connaissance du vecteur d'état. Malheureusement, en pratique, seule une partie de ce vecteur est disponible à cause de l'absence de capteurs ou du fait que certaines variables n'ont pas une signification physique évidente. De là, se pose le problème de la reconstruction du vecteur d'état à partir des sorties et des entrées mesurées sur le système. Sous certaines conditions, il est possible de reconstruire les variables d'état à l'aide d'un système dynamique dit *Observateur*. La possibilité de reconstruire les variables du système à partir de la mesure des entrées et sorties de ce dernier est liée à son *observabilité*.

Pour les systèmes linéaires, la solution du problème a été donnée par Luenberger. Par contre, le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires est encore l'objet de plusieurs travaux de recherches. Une synthèse sur les résultats obtenus jusqu'en 1989 a été faite par Misawa, Hedrick, une étude comparative des résultats existants jusqu'en 1987 a été présentée par Walcott, Corless, Zak., dont l'*observateur à mode glissant*, qui fera l'objet de notre étude.

Que ce soit pour des raisons de commande par retour d'état ou d'études du comportement d'un système, il est souvent nécessaire de connaître l'évolution des états d'un système. Mais pour des raisons économiques, physiques ou de fiabilité, il est souvent impossible de mesurer toutes les variables d'état. Pour contourner ce problème, nous pouvons alors réaliser soit un estimateur (une copie du système sans retour d'information), soit un observateur (une copie de la dynamique du système, plus un retour d'information), soit un reconstituteur (une bijection entre l'état et les mesures et leurs dérivées), [13].

Pour les systèmes non linéaires, la synthèse d'observateurs est encore un problème ouvert, une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs par mode glissant. Ce type d'observateur est basé sur la théorie des systèmes à structure variable.

### III.2. Rappels sur l'Observabilité

L'observabilité caractérise la propriété de pouvoir récupérer (de façon statique ou dynamique) par une combinaison des mesures et de leurs dérivées toutes les grandeurs d'un système.

Ainsi, soit le système :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x) + g(u) \\ Y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

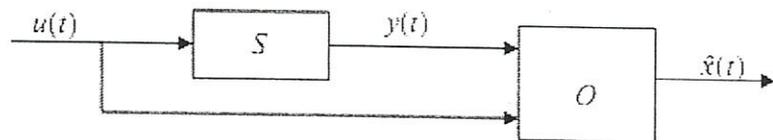
Où  $u \in \mathcal{R}^m$  est la commande,  $y \in \mathcal{R}^p$  la mesure, et  $x \in \mathcal{R}^n$  l'état interne du système.

Une notion importante à rappeler est la notion d'indiscernabilité (ou d'indistinguabilité) entre deux états initiaux :

Soit  $x_u(t, x_0)$  la solution à l'instant  $t$  du système sous la condition initiale  $x_0$  à l'instant  $t_0$  et soumis à la commande  $u$ .

Telle que l'erreur entre le vecteur d'état  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  asymptotiquement vers zéro

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty \quad (\text{III.2})$$



Figure(III.1) : Schéma de principe d'un observateur

### III.3. Commandes à base d'observateurs pour les systèmes linéaires

Supposons qu'on dispose d'une loi de commande par bouclage de l'état qui stabilise le système et qu'un observateur ait été conçu pour estimer l'état de ce système.

On se propose de remplacer, dans le calcul de la loi de commande, l'état réel qui est inconnu, Le problème qui se pose est de savoir si la stabilité du système, ainsi bouclé, sera préservée.

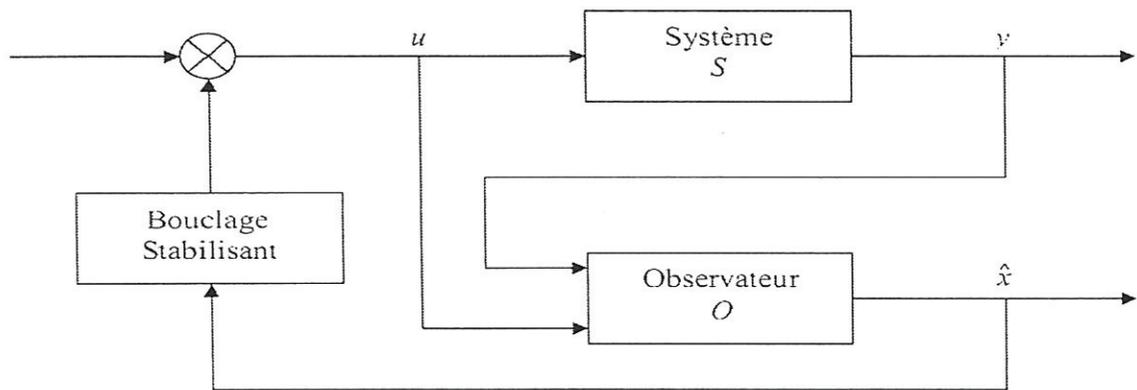


Figure (III.2) : Bouclage de l'état observé

Qui se situe entre la commande et l'observation, est très délicat. En fait, il s'agit de trouver un arrangement entre la dynamique de l'observateur et celle du système.

Il est bien connu que pour les systèmes linéaires, la dynamique du système bouclé à base d'observateur se décompose en deux parties : la dynamique de l'observateur et celle du système bouclé sans observateur.

#### III.4. Commande à base d'observateurs d'état non linéaires des systèmes non linéaires

Le principe de séparation, présenté ci dessus pour les systèmes linéaires, facilite considérablement la tâche. Il n'est, généralement, pas applicable pour la classe des systèmes non linéaires. Toutefois, il a été démontré que certains systèmes non linéaires vérifient un principe de séparation affaibli. Ce principe affaibli prend en charge deux cas de figures, qui sont :

- la bornitude des non-linéarités du système.
- La nature de la stabilité du système et de l'observateur.

#### Théorème 1 :

Considérons que notre système non linéaire pouvant se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = Ax + Bu + f(x) \\ Y = Cx \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Alors le principe de séparation peut être applicable si et seulement si,  $f(x)$  est bornée et de ce fait, on peut considérer  $f(x)$  comme étant une perturbation pour le système, et donc la commande à base d'observateur peut assurer la stabilité interne du système et il n'y aura pas d'explosion de l'état du système.

**Théorème 2 :** (Théorème de la stabilité exponentielle globale)

Soit le système non linéaire :

$$S = \begin{cases} \dot{X} = f(x, u) \\ Y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- l'observateur synthétisé est à erreur d'observation globalement, uniformément et exponentiellement stable.
- Il existe une loi de commande telle que le système sans observateur soit globalement et exponentiellement stable. Alors, le système bouclé via observateur est globalement et exponentiellement stable.

### III.5. Observateurs non linéaires

On considère un système dynamique décrit par un ensemble d'équation différentielles ordinaires, on suppose que les entrées du système ainsi que les sorties mesurées par les capteurs sont disponibles [15] [16].

En général, pour des raisons de réalisabilité technique, de coût, etc. la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Donc, à un instant donné le vecteur d'état  $x(t)$  ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie  $y(t)$  à cet instant. Sous des conditions d'observabilité l'état  $x(t)$  peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé. Le but d'un observateur est précisément de fournir une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties passées. L'observateur revêt en général une forme d'un système dynamique.

➤ **Rôle des entrées dans l'observabilité**

Considérons le système bilinéaire suivant [15]:

$$\dot{x} = u \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad y = x_1 \quad (\text{III.5})$$

Si  $u = 0$ , on ne pourra pas distinguer deux valeurs différentes de  $x_2$  le système linéaire engendré n'est pas observable. Ce phénomène de perte d'observabilité pour des valeurs particulières des entrées n'existe pas pour les systèmes linéaires.

L'observabilité des systèmes non linéaires dépend des entrées qui leur sont appliquées, cela conduit aux notions d'entrées universelles et de persistance de l'excitation.

- Un système linéaire observable est uniformément localement observable.

### III.6. Observateurs à modes glissants

L'observateur à modes glissant est un observateur dont le terme correcteur est une fonction signe. La mise en œuvre de lois des commandes basées sur le modèle non linéaire du système.

Nécessite la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Mais, dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrées et de sorties, il est nécessaire qu'à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle Choisi pour élaborer la commande. De ce fait, l'idée repose sur l'utilisation d'un observateur. Un observateur est un système dynamique que l'on peut appeler capteur informatique, Puisqu'il est souvent implanté sur ordinateur afin de reconstituer ou d'estimer en temps réel l'état courant d'un système, à partir des mesures disponibles, des entrées du système et une connaissance à priori du modèle. Il nous permet alors de suivre l'évolution de l'état en tant qu'information sur le système.

La possibilité de reconstituer une information interne sur le système au moyen des grandeurs externes disponibles peut être utile à plusieurs niveaux :

- La commande du procédé, qui nécessite bien souvent la connaissance de son état Interne.
- La surveillance du procédé, à travers les écarts entre le comportement de l'observateur et celui du procédé.
- L'identification du procédé, au moyen de l'estimation des grandeurs constantes qui paramétrassent le modèle.

La stabilité en boucle fermée ne peut être garantie à priori si la loi de la commande et l'observateur sont synthétisés séparément [20] [17] [19], le principe de séparation est vérifié seulement pour les systèmes linéaires, dont le problème est résolu par les observateurs de Luenberger [18]. Pour les systèmes non linéaires, la synthèse d'observateurs est encore un problème ouvert.

Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs par modes glissants. Ce type d'observateur est basé sur la théorie des systèmes à structure variable.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x, u) \\ Y = Cx \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Avec :  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$c = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  et le vecteur ligne  $c_1 = \{1, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^\mu$

L'un des observateurs à modes glissants le plus simple qui pouvant lui être associé est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = f(\hat{x}, u) + A \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{Y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Où  $A$  est une matrice de gain  $n \times p$  qui peut être dépendante du temps et de l'erreur, avec  $\text{sign}(y - \hat{y}) = (\text{sign}(y_1 - \hat{y}_1), \dots, \text{sign}(y_p - \hat{y}_p))^t$ . Ce type d'observateur étant maintenant classique, nous préférons ici rappeler le cas d'un observateur à mode glissant étape par étape pour un double intégrateur [13].

$$\dot{X}_1 = x_2 \quad (\text{III.8})$$

$$\dot{X}_2 = u \quad (\text{III.9})$$

$$y = x_1 \quad (\text{III.10})$$

Avec  $|x_1| < \alpha$   $|x_2| < \alpha$  l'observateur étape par étape qui peut être lui associé à la structure suivent :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (\text{III.11})$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = u + \lambda_2 E_1 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \quad (\text{III.12})$$

Avec :

$$\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(e_1) \quad (\text{III.13})$$

### Preuve

Nous allons prouver la convergence de l'observateur, et en considérant les conditions initiales  $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$  si  $x_1(0) = \hat{x}_1(0)$  (nous sommes déjà sur la surface de glissement l'instant initial et nous passons directement à l'étape suivante de la preuve)

#### Etape 1 :

Pour l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  nous avons, comme

$$x_1 = \hat{x}_1, \quad e_1 = 0 \quad (\text{III.14})$$

D'où

$$\dot{e}_1 = e_2 + \lambda_1 \text{sign}(e_1), \quad \dot{e}_2 = 0 \quad (\text{III.15})$$

Soit la fonction  $V_1 = e_1^2/2$  nous avons alors  $\dot{V}_1 = e_1(e_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1))$  en choisissant pour  $\lambda_1 > |e_2|_{max}$  pour  $t < t_1$  l'erreur d'observation est converge vers zéro après un temps fini  $t_1$ . De plus, après  $t_1$ , la dynamique sur la surface de glissement est déduite de la résolution de  $\dot{e}_1 = 0$  et on a  $e_2 = \lambda_1 \text{sign}_{eq}(e_1)$  par conséquent pour  $t > t_1, E_1 = 1$  et comme  $\text{sign}_{eq} = \text{sign}_{moy}$  on déduit  $\tilde{x}_2 = x_2$

#### Etape2 :

$$\text{En posant} \quad V_2 = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2} \quad (\text{III.16})$$

$$V_1 = \frac{e_1^2}{2} \quad (\text{III.17})$$

Comme :  $e_1 = 0$

Alors :

$$\dot{V}_1 = e_2(-\lambda_2 E_1 \text{sign}(e_2)) \quad (\text{III.18})$$

On en déduit que  $e_2$  converge vers zero en un temps fini  $t_2 > t_1$  pour toute valeur de  $\lambda_2 > 0$

Maintenant que nous avons exposé le principe de l'observateur étape par étape en laissant de côté les problèmes de robustesse, nous présentons ci-dessous deux exemples simples où la structure étape par étape apporte une solution aux problèmes des singularités (est bifurcations) d'observabilité. L'idée de base des deux observateurs proposés est de faire converger le plus rapidement possible l'observateur lorsque le système est observable et de passer à une structure possédant une partie sans retour d'information (estimateur) quand le système n'est pas observable. Des problèmes tels que, rester sur une sous-variété instable et inobservable.

### III.6.1. Observabilité

**Définition 1 :** L'état  $x_0$  est observable si l'ensemble des points indiscernables de  $x_0$  se réduit à i.e.  $I(x_0) = x_0$ . Le système est observable si, pour tout  $x \in MI(x) = x$

On remarque que l'observabilité ne signifie pas obligatoirement que toute entrée distingue tous les points de. Notons aussi que l'observabilité est une condition nécessaire, mais non suffisante, d'existence d'un observateur [30].

Le concept de l'observabilité globale est modifié pour introduire la notion d'observabilité locale.

**Définition 2 :** soit  $U$  un sous-ensemble de  $M$  contenant deux états initiaux  $x_1$  et  $x_2$ . On dit que  $x_1$  est  $U$ -indiscernable de  $x_2$  ( $x_2 \in I_u(x_1)$ ), si  $\forall t \geq t_0$ , les sorties respectives  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  correspondantes à ces deux conditions initiales sont identiques et si  $\forall t \geq t_0$  les trajectoires  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  appartiennent à  $U$ .

### III.6.2. Observabilité locale

**Définition 1 :** L'état  $x_0$  est dit localement observable, si pour tout voisinage  $U$  de  $x_0$ ,  $I_u(x_1) = x$

**Définition 2 :** L'état  $x_0$  est faiblement observable s'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  de  $I(x_0)V = x_0$ . Le système est dit faiblement observable, si pour tout  $x \in I(x) \cap V = x$ . Cela signifie qu'un état est faiblement observable s'il est le seul indiscernable dans son voisinage. Ce concept affaiblit donc le concept d'observabilité globale.

### III.6.3. Observabilité faible locale

L'état  $x_0$  est dit localement faiblement observable s'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que tout voisinage  $U$  de  $x_0$  contenu dans  $V$ ,  $I_u(x_0)(x) = (x_0)$ ; Et le système est dit localement faiblement observable si pour tout  $x \in M$ ,  $Iu(x) = \{x\}$ .

### III.7. Observateur glissant

- La théorie des modes glissants a montré son efficacité dans le domaine de la commande, pour cela, elle a été utilisée pour la synthèse des observateurs.
- L'observateur glissant possède les avantages suivants : robustesse, possibilité d'imposition de la dynamique, ceci est important car un observateur doit toujours être plus rapide que la dynamique du système à commander.
- L'observateur à modes glissant est robuste par construction, car sa structure considère toutes les parties non linéaires comme étant des perturbations. Ce qui justifie sa robustesse remarquable vis à vis des perturbations paramétriques.

### III.8. Observateur classique par mode glissant

La mise en œuvre des lois de commandes basées sur le modèle non linéaire du système, nécessite la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Cependant, dans la plupart des cas, seule une partie de l'état est accessible à l'aide de capteurs. Pour reconstituer l'état complet du système, l'idée repose sur l'utilisation d'un capteur logiciel, appelé observateur [22][21]. Un observateur est un système dynamique qui à partir de l'entrée  $u(t)$  du système (la commande), de la sortie  $y(t)$  mesurée, ainsi que d'une connaissance a priori du modèle, fournira en sortie un état estimé  $\hat{x}(t)$  qui devra tendre vers l'état réel  $x(t)$ .

Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs par modes glissants [21] [23] [24] [25].

Pour le système, une structure d'observateur par modes glissants classique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = f(\hat{x}, u) + A \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{Y} = C \hat{x} \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

Dans ce cas, la surface de glissement est donnée par :  $S(x) = (y - \hat{y})$

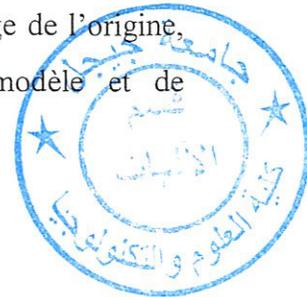
Le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue *signe* appliquée à l'erreur de sortie. L'étude de la stabilité et de la convergence pour de tels observateurs, est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov.

L'étude de la stabilité et de convergence utilise les concepts de résolutions de Filippov [29].

Ainsi que les méthodes dites du vecteur équivalent développé par Utkin pour la commande, et par Drakunov [26] [27] [28] pour les observateurs.

Notre choix de ce type d'observateurs se justifie par les bonnes propriétés qui peuvent être obtenues et parmi lesquelles nous citerons :

- Une convergence en temps fini vers la surface de glissement  $S(x) = (y - \hat{y}) = 0$  si entre autre les conditions d'attractivité vers cette surface sont vérifiées.
- Une réduction de dimension du système d'observation à  $(n - p)$  états avec  $n$  la Dimension de l'état  $x$ , et  $p$  la dimension du vecteur de sortie.
- Comme la fonction **sign** est équivalente à un grand gain au voisinage de l'origine, nous obtenons une certaine robustesse vis-à-vis d'erreurs de modèle et de perturbations bornées.



### III.9. Principe de séparation

La dynamique de l'erreur d'observation  $e = \hat{x} - x$  est aussi non linéaire dépendante de l'état de l'entrée du système.

Le principe de séparation n'est donc plus vérifié et la commande n'étant plus indépendante de l'observateur. Si on veut faire la synthèse d'une commande basée sur  $\hat{x}$

Il est à noter que ces contraintes ne se posent pas pour les systèmes linéaires et également pour les systèmes qui se mettent sous injection de sortie c'est-à-dire dans le cas où la non linéarité ne dépend que des grandeurs connues (les entrées et les mesures) [13].

#### ❖ Calcul de la matrice d'observabilité

Considérons le modèle d'état dans du quadrirotor (I.25), et la sorti Considérée tel que :

$$Y = h(X) = [x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}]^T \quad (\text{III.20})$$

La matrice d'observabilité de notre système est alors :

$$\begin{cases} O_b = \frac{\delta}{\delta X} [L_f^0 h(X) & L_f^1 h(X) & \dots & L_f^{n-1} h(X)]^T \\ 1 \leq p \leq 6 \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

En premier lieu nous allons commencer par construire cette matrice étape par étape et cela de la manière suivante :

$$O_b = \frac{\delta}{\delta X} [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4 \ h_5 \ h_6 \ L_f h_1 \ L_f h_2 \ L_f h_3 \ L_f h_4 \ L_f h_5 \ L_f h_6]^T \quad (\text{III.22})$$

Si le rang de cette première matrice est de plein rang c'est -à-dire :  $r=12$  alors notre système est localement faiblement observable.

Alors :

$$O_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Le rang de cette dernière est bien 12, ce qui nous ramène à conclure que notre système est localement faiblement observable ; ceci dit nous n'avons plus besoin de continuer le calcul.

## III.10. Synthèse d'observateur

Considérons le modèle dynamique présenté dans le premier chapitre (I.15), et soit le vecteur  $\hat{X}$  l'estimé du vecteur  $X$  le modèle de l'observateur est une copie du modèle d'origine et se présente comme suit :

$$\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5, \hat{x}_6, \hat{x}_7, \hat{x}_8, \hat{x}_9, \hat{x}_{10}, \hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}]^T \quad (\text{III.24})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \Lambda_1 e_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 = a_1 \hat{x}_2 \hat{x}_4 + a_2 \hat{x}_2^2 + a_3 \hat{x}_3 \bar{\Omega} + b_1 U_2 + \Lambda_2 e_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 + \Lambda_3 e_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 = a_5 \hat{x}_2 \hat{x}_6 + a_6 \hat{x}_4^2 \bar{\Omega} + b_2 U_3 + \Lambda_4 e_4 \\ \dot{\hat{x}}_5 = \hat{x}_6 + \Lambda_5 e_5 \\ \dot{\hat{x}}_6 = a_7 \hat{x}_2 \hat{x}_6 + a_8 \hat{x}_4^2 + b_3 U_4 + \Lambda_6 e_6 \\ \dot{\hat{x}}_7 = \hat{x}_8 + \Lambda_7 e_7 \\ \dot{\hat{x}}_8 = a_9 \hat{x}_8 + \frac{U_1}{m} U_x + \Lambda_8 e_8 \\ \dot{\hat{x}}_9 = \hat{x}_{10} + \Lambda_9 e_9 \\ \dot{\hat{x}}_{10} = a_{10} \hat{x}_{10} + \frac{U_1}{m} U_y + \Lambda_{10} e_{10} \\ \dot{\hat{x}}_{11} = \hat{x}_{12} + \Lambda_{11} e_{11} \\ \dot{\hat{x}}_{12} = a_{12} \hat{x}_{12} + \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 - g + \Lambda_{12} e_{12} \end{array} \right. \quad (\text{III.25})$$

L'erreur dynamique d'estimation est donner par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = e_2 - \Lambda_1 \\ \dot{e}_2 = a_1 \Delta_{x_4 x_6} + a_2 \Delta_{x_2^2} + a_3 \Delta_{x_4} \bar{\Omega} - \Lambda_2 \\ \dot{e}_3 = e_4 - \Lambda_3 \\ \dot{e}_4 = a_4 \Delta_{x_2 x_6} + a_5 \Delta_{x_4^2} + a_6 \Delta_{x_2} \bar{\Omega} - \Lambda_4 \\ \dot{e}_5 = e_6 - \Lambda_5 \\ \dot{e}_6 = a_7 \Delta_{x_2 x_4} + a_8 \Delta_{x_6^2} - \Lambda_6 \\ \dot{e}_7 = e_8 - \Lambda_7 \\ \dot{e}_8 = a_9 e_8 - \Lambda_8 \\ \dot{e}_9 = e_{10} - \Lambda_9 \\ \dot{e}_{10} = a_{10} e_{10} - \Lambda_{10} \\ \dot{e}_{11} = e_{12} - \Lambda_{11} \\ \dot{e}_{12} = a_{11} e_{12} - \Lambda_{12} \end{array} \right. \quad (\text{III.26})$$

$$\text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{x_i x_j} = x_i x_j - \hat{x}_i \hat{x}_j \\ \Delta_{x_i^2} = x_i^2 - \hat{x}_i^2 \\ \Delta_{x_i} = x_i - \hat{x}_i \end{array} \right. \quad (\text{III.27})$$

$$\text{et :} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_i = y_i - \hat{y}_i \quad \text{si } i \text{ impair} \\ e_i = x_i - \hat{x}_i \quad \text{si } i \text{ pair} \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

Les sorties considérées de notre système sont :

$$\underline{Y} = [x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}]^T \quad (\text{III.29})$$

Afin de prévoir les gains de correcteur, il est nécessaire que la dynamique d'erreurs d'estimation soit stable ainsi, nous a laissés choisit le fonctionnement de Lyapunov donné par :

$$V(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) \quad (\text{III.30})$$

$$\dot{V}(e_1, e_2) = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (\text{III.31})$$

$$\dot{V}(e_1, e_2) = e_1(e_2 - \Lambda_1) + e_2(a_1 \Delta_{x_4 x_6} + a_2 \Delta_{x_2^2} + a_3 \Delta_{x_4} \bar{\Omega} - \Lambda_2) \quad (\text{III.32})$$

La condition est vérifiée et la stabilité de Lyapunov est garantie.

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq 0 \quad (\text{III.33})$$

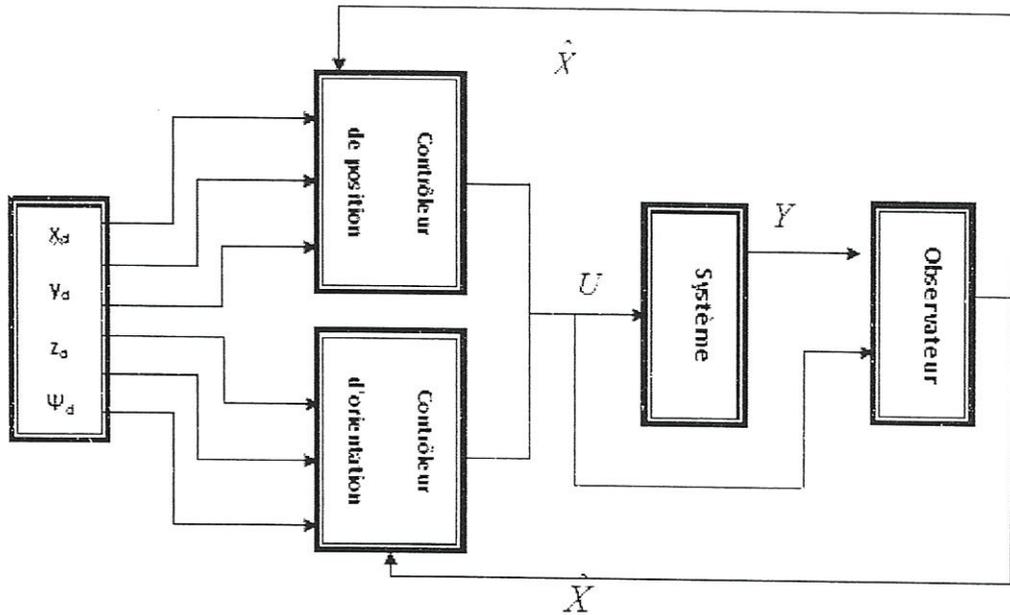
$$\begin{cases} \Lambda_1 e_1 = e_2 + k_1 e_1 \\ \Lambda_2 e_2 = a_1 \Delta_{x_4 x_6} + a_2 \Delta_{x_2^2} + a_3 \Delta_{x_4} \bar{\Omega} + k_2 e_2 \end{cases} \quad (k_1, k_2) \in \mathfrak{R}^{+2} \quad (\text{III.34})$$

De la même façon, nous procédons pour calcul des autres gains :

$$\begin{cases} \Lambda_3 e_3 = e_4 + k_3 e_3 \\ \Lambda_4 e_4 = a_4 \Delta_{x_2 x_6} + a_5 \Delta_{x_4^2} + a_6 \Delta_{x_2} \bar{\Omega} + k_4 e_4 \\ \Lambda_5 e_5 = e_6 + k_5 e_5 \\ \Lambda_6 e_6 = a_7 \Delta_{x_2 x_4} + a_8 \Delta_{x_6^2} + k_6 e_6 \\ \Lambda_7 e_7 = e_8 + k_7 e_7 \\ \Lambda_8 e_8 = a_9 e_8 + k_8 e_8 \\ \Lambda_9 e_9 = e_{10} + k_9 e_9 \\ \Lambda_{10} e_{10} = a_{10} e_{10} + k_{10} e_{10} \\ \Lambda_{11} e_{11} = e_{12} + k_{11} e_{11} \\ \Lambda_{12} e_{12} = a_{11} e_{12} + k_{12} e_{12} \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

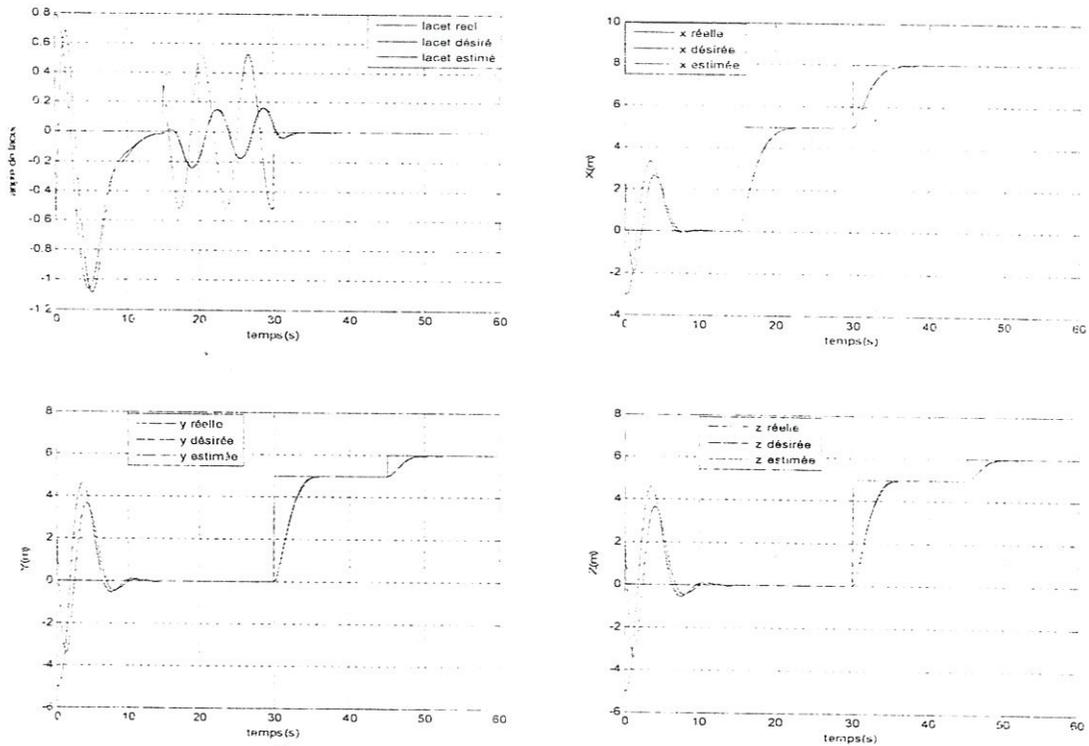
### III.11. Simulation

Afin de pouvoir valider la nouvelle structure de commande basée essentiellement sur la synthèse d'un observateur non linéaire effectuée dans la section précédente en supposant que la sortie est soumise à des bruits et des perturbations extérieures dues à la navigation dans zones de turbulences atmosphérique.

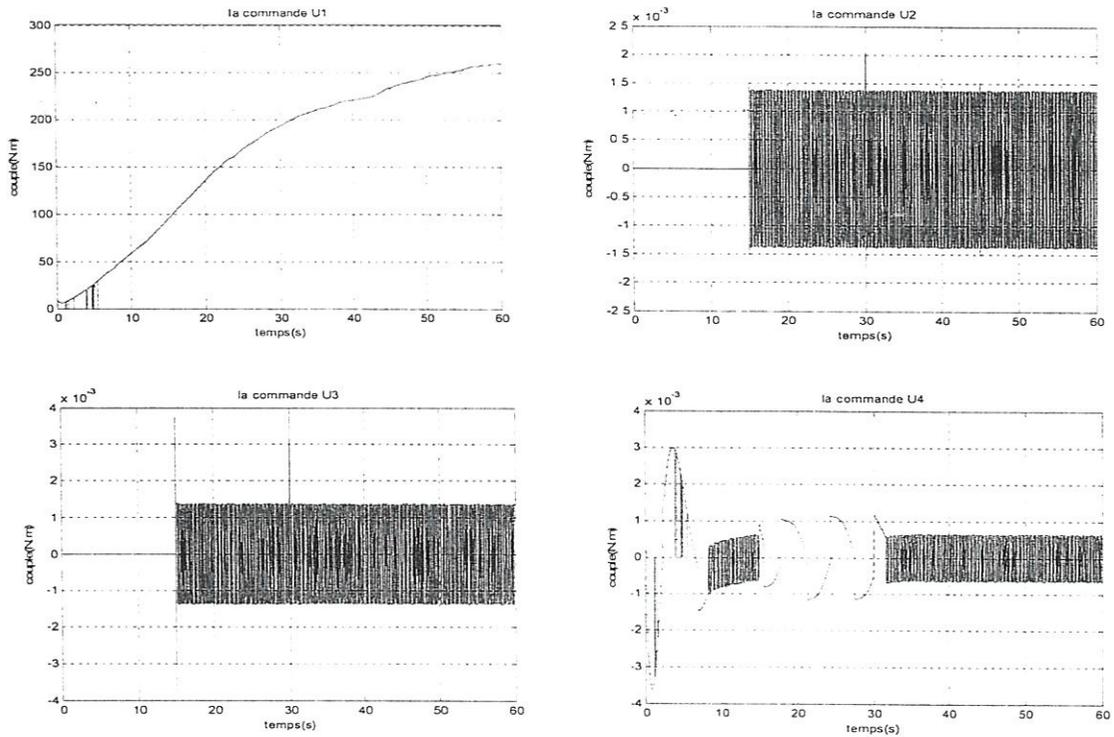


Figure(III.3) : structure de commande avec observateur

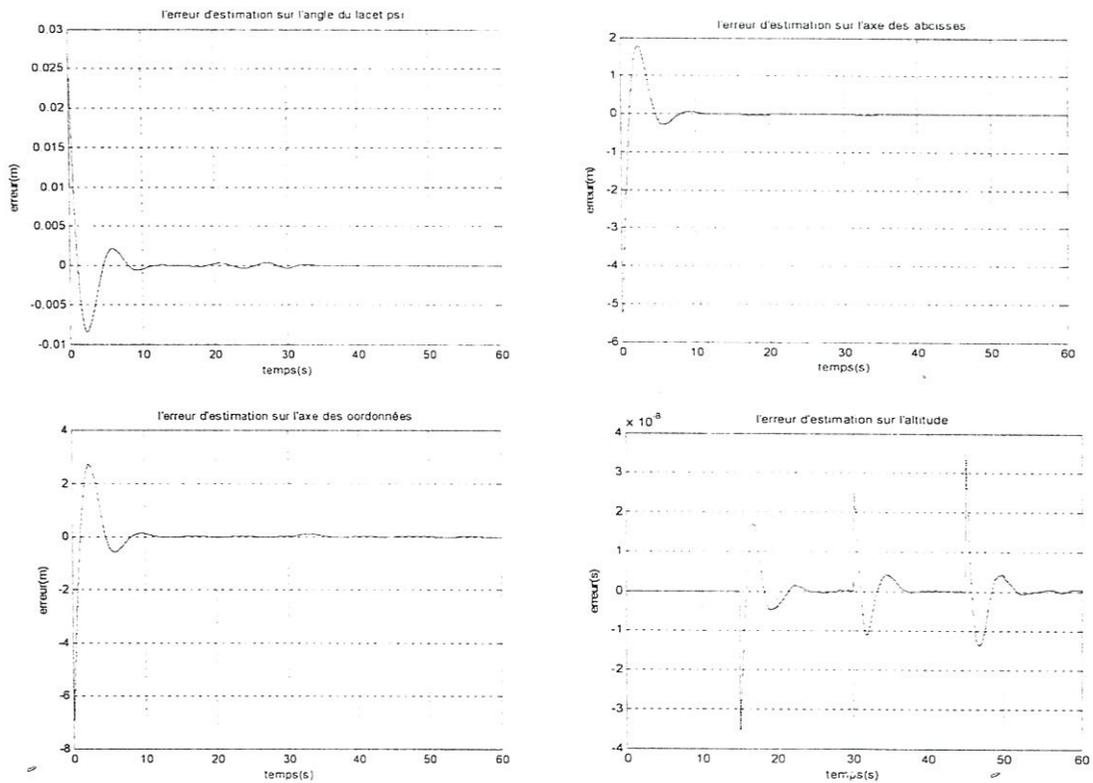
III.12. Résultats de simulation



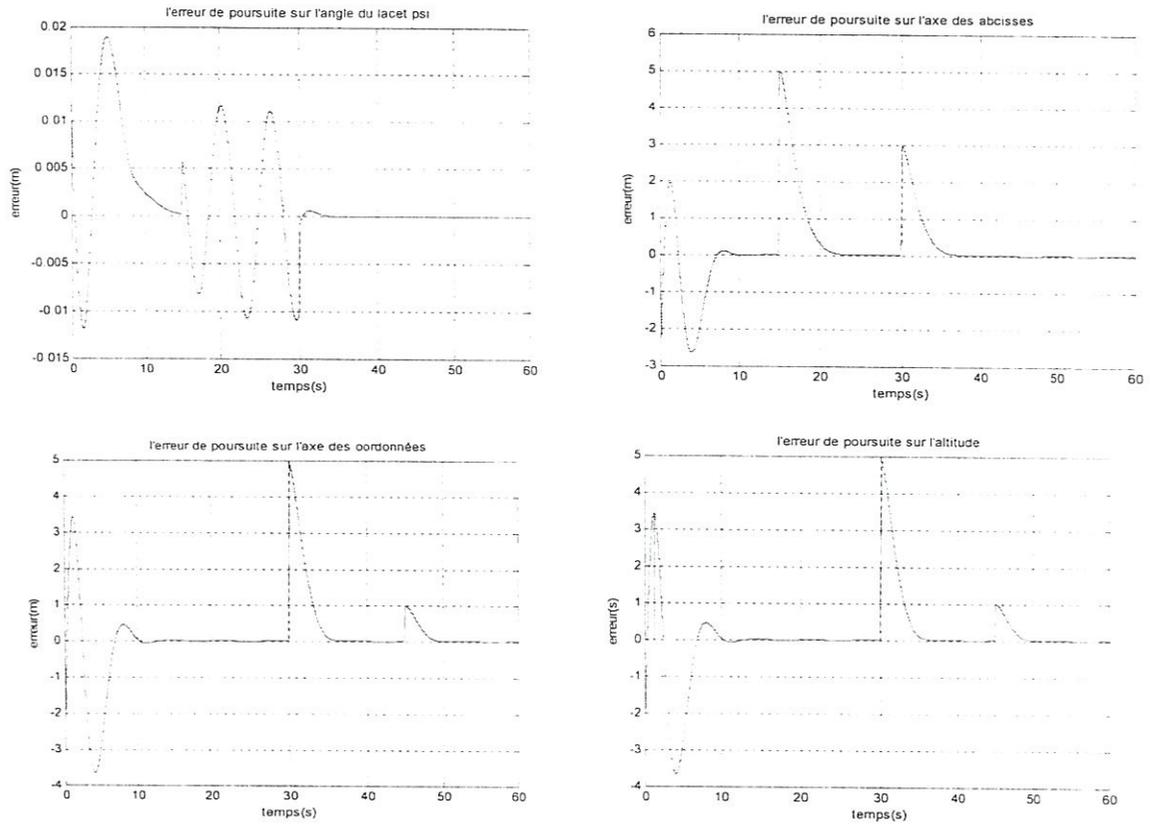
Figure(III.4) : Résultats de poursuite sur les trajectoires désirées selon le lacet  $\psi$  et les axes  $(X, Y, Z)$



Figure(III.5) : Les signaux de commande



Figure(III.6): Erreurs d'estimation sur les trajectoires désirées selon le lacet  $\psi$  et les axes  $(X, Y, Z)$



Figure(III.7) : Erreur de poursuite sur les trajectoires désirées selon le lacet  $\psi$  et les axes  $(X, Y, Z)$

D'après les résultats obtenus, nous remarquons que:

- Les sorties réelles ainsi que les sorties estimées convergent uniformément vers les sorties désirées
- Les erreurs d'estimation ainsi que les erreurs de poursuites de trajectoires convergent vers zéro.
- Les résultats des erreurs de poursuite, signifient que la commande est observée d'une façon acceptable.
- Le phénomène de chattering persiste toujours au niveau de la commande.

### II.13. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est le développement d'un observateur non linéaire, afin d'être en mesure d'estimer les états non mesurés sans prendre en considération les effets des perturbations externes additives comme le vent et bruit.

La connaissance complète ou partielle de l'état d'un système est une exigence importante qui intervient dans les domaines de la commande, du diagnostic et de la surveillance des systèmes. Pratiquement, cette exigence est difficile à satisfaire directement dans la plupart des cas. Ceci est dû d'une part, au fait que les variables d'état n'ont pas toujours une signification physique et leur mesure directe est impossible à réaliser. D'autre part, lorsqu'une variable d'état existe physiquement, sa mesure peut être délicate à effectuer d'un point de vue technique (capteur nécessaire indisponible ou de précision insuffisante ...).

## Conclusion générale

Le travail effectué dans ce mémoire avait pour objectif d'une part, la génération d'un modèle pour un engin volant qui est un mini-hélicoptère à quatre rotors et d'autre part, l'utilisation de lois de commande stabilisante pour sa commande en poursuite de trajectoire en vol.

Le quadrirotor est un système complexe non linéaire, multivariables, instable et présente une dynamique fortement couplée. Le problème traité consiste à garantir en premier lieu la stabilité de ce dernier ainsi que la poursuite de trajectoire avec plus au moins des performances acceptables vis-à-vis le milieu de navigation.

Souvent la commande de tels systèmes évoque de pré les problèmes de la modélisation dynamique ainsi que le problème de la fidélité du modèle au comportement dynamique du système, dans tous ces modes de vol, chose jusqu'à nos jours impossible à réaliser. Dans notre cas, le développement du modèle dynamique du quadrirotor était basé sur les travaux de recherche concernant l'identification expérimentale des paramètres d'un prototype existant au niveau de LISV (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles).

Le premier chapitre a permis de donner un modèle dynamique pour notre système dans lequel le problème de sous actionnement et les forts couplages entre les dynamiques de translation et de rotation ont été mis en évidence, ainsi qu'une simulation en boucle ouverte est effectuée pour mieux comprendre le comportement instable du système.

Dans le deuxième chapitre, on s'est intéressé à la synthèse de la loi de commande par mode glissant, elle basée sur le choix d'une surface en fonction des erreurs des états à commandé. Mais cette commande a de grand désavantage qui limite son utilisation, c'est l'effet chattering. Plusieurs travaux de recherche ont proposé des solutions pour éliminer cet effet.

Le dernier chapitre concerne les observateurs à base de mode glissant, qui peuvent reconstruire le vecteur d'état d'une façon partielle ou complète et qui peuvent aussi parer aux problèmes de modélisation dû aux états non mesurables.

Au terme de ce mémoire, il s'avère intéressant de préciser les perspectives à aborder dans le futur ; comme l'utilisation de la commande par modes glissant d'ordre supérieur, et concernant la partie observateur d le manque de temps et les difficultés rencontrés lors de la simulation ne nous a pas permis d'introduire des bruits blancs à la sortie du système avec différents puissance.

## Bibliographies

- [1] H.Bouadi. **‘Synthèse de lois de commande stabilisantes et observateur pour un UAV type quadrotor’** thèse de magister EMP 2008
- [2] H. bouadi, M. bouchoucha, et M. tadjine. **‘Sliding mode control based on beckstepping approach for an UAV type quadrirotor’**. International journal of applied mathematics and computer sciences, vol .4, No.1, pp.12-17, Spain 2007.
- [3] B. Achène. **‘Commande PID adaptative robuste de type MIMO appliqué au quadrirotor’** Mémoire d’ingénieur, Université de Jijel 2009.
- [4] E. Altuge, J. P. Ostrowski, and R. Mahony.’ **Control of a quadrirotor helicopter using visual feedback’**. In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002.
- [5] P. Pounds, R. Mahony, J. Gresham, P. Cooke, and J. Roberts. **‘Towards dynamically-favourable quadrirotor aerial robots’**. In Proceedings of the 2004 Australasian Conference on Robotics and Automation, 2004.
- [6] M. Pascal. **‘Some open problems in dynamic analysis of flexible multibody systems. Multibody System Dynamics’**, 5:315–334, 2001.
- [7] N. Azouz, K Benzermane, G. Damm, and G. Pradel. **‘Modelling and development of a 4 rotors helicopter uav’**. In 6th IFAC Symposium on intelligent Autonomous Vehicles, 2007.
- [8] P. McKerrow. **‘Modelling the draganflyer four-rotor helicopter’**. In Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Robotics and Automation, 2004.
- [9] H.Tamrbed et T.Azarobr. **‘Réglage par mode glissant d’une machine asynchrone’** Thèse d’ingénieur, Annaba, juin 2000.
- [10] B. benhelle. **‘Étude comparative de deux commandes robustes ; commande à structure variable et commande floue optimisé par un algorithme génétique’**.  
Thèse de magister université Blida 2007
- [11] T.s.jimenze. **‘contribution à la commande d’un robot sans marin autonome de type topille’**. Université monppeulier 2
- [12] L.Fadila et G. Hakima. **‘Etude comparative de la commande par mode glissant et la Commande vectorielle d’un machine asynchrone’** Mémoire d’ingénieur, université de Mohamed Boudiaf M’sila, 2004.

- [13] T. Boukhobza. ‘**Contribution aux formes d’observabilité pour les observateurs à modes glissants et étude des commandes par ordres supérieurs**’ (Thèse)
- [14] A.J. fossard et D.normand-cyrot. ‘**Systèmes non linéaires Tome1. Modélisation et Estimation**’, Editions Masson, Paris, France, 1993.
- [15] B. djeridene et M.djeddou. ‘**Les différents types de commandes et observateurs**’, Projet de fin d’étude, ENP, Alger, Algérie, 1999.
- [16] E.Chaib. ‘**Synthèse d’observateurs d’état non linéaires pour les systèmes interconnecté**’, Projet de fin d’étude, ENP, Alger, Algérie, 2004.
- [17] N.Manamani et N.K. Nadjar Gauthier, N et M’Sirdi. ‘**Sliding mode control or pneumatique robot leg**’. Bruxelles ECC. 1997.
- [18] DG. Luenberger. ‘**An introduction to observers**’ . IEEE Trans. On Auto. Const; 16(6), 1971.
- [19] M. Djemai, N. Manamani,T. Boukhobza, and N.K. M’Sirdi. ‘**Non linear sliding observer for a pneumatique robot leg**’ .IEEE-Syst, Men and Cyber. IMACS, CESA 98, Hamamat, Tunisia.1997.
- [20] T. Boukhobza. ‘**Observateurs à modes glissants et formes d’observabilité et analyse et synthèse des commandes par ordres supérieurs**’. PhD thesis, Université de Paris-Sud Orsay, Laboratoire des Signaux et Systèmes, 1997
- [21] V. Krishnaswami, C. Siviero, F. Cabognani, and V Utkin. ‘**Application of sliding mode observers to automobile power-train**’. In: Proc. of the IEEE int. Conf. On Cont. Appli., pages 355.360, 1996.
- [22] S. Nicosia, A. Tornambe. ‘**High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints**’. Syst & Cont. Lett., 13: 331-337, 1989.
- [23] H. Sira-Ramirez et S.K. Spurgeon. ‘**On the robust design of sliding observers for linear systems**’. Syst. & Cont. Lett., 23: 9.14, 1994.
- [24] J.J.E. Slotine et W. Li. ‘**On the adaptive control of robot manipulators**’. Int. Jour.of Robot. Research, 6(3): 49.59, 1987.
- [25] V. I. Utkin et S. Drakunov. ‘**Sliding mode observer**’. Tutorial’. IEEE Conf.On Dec.and Cont .pages 3376.3378, 1995.
- [26] V. I. Utkin. ‘**Sliding modes in control optimisation**’. Springer-Verlag, 1992.
- [27] S.V. Drakunov. ‘**Sliding mode observer based on equivalent control method**’. In IEEE Conf. on Dec. and Cont., pages 2368.2369, 1992.

- [28] S. Drakunov et V. Utkin. 'Sliding mode observer'. Tutorial. IEEE Conf. on Dec. and Cont., pages 3376.3379, 1995.
- [29] A. F.Fillipov. 'Differential equations with discontinuous right-hand side'. Amer.Math .Soc.Trans. 62. P: 199-231, 1960.
- [30] Aj. Fossard et D.Normand-Cyrot. ' Systèmes non linéaire -Modélisation Estimation' Masson, 1993.
- [31] Z.M.bouache. 'Commande non linéaire de la machine asynchrone ; PFE ; CU '. université de Jijel 2000



