

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur

Et de la Recherche scientifique

Université de Jijel

M/GM.ENE

2011/08

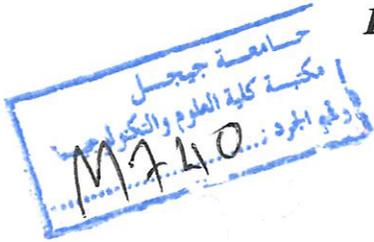
Faculté des Sciences de L'ingénieur



Département de Génie Mécanique



**THESE PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU
DIPLOME DE MASTRE**



02/02

OPTION : ENERGETIQUE

Thème

**Effet du chauffage volumétrique sur
la convection naturelle dans une
cavité cylindrique**

Encadré par :

M^r: Berrahil Farid

Réalisé par :

Hafsa Mebrouk

Promotion : 2011

REMERCIEMENTS

*Je remercie avant tout le bon dieu, qui ma donné la force
Pour terminer ce travail.*

*je remercie mon encadreur Monsieur Farid Berrahil qui m'a aidé, et orienté
pour avoir présenter ce travail
ainsi à tous mes amis qui m'ont a aidé moralement à achever notre projet de fin
d'étude, ainsi à tous de prés ou de loin qui m'ont apporté leur assistance .*

.. A tous nos sincères Remerciements

SOMMAIRE

Remerciements :.....	I
Sommaire :.....	II
Nomenclature :.....	III

Chapitre I

Introduction et recherches bibliographique :.....	01
---	----

Chapitre II

II.1 Géométrie du problème :	9
II.2 Hypothèses :.....	10
II.3 Equations générales de transport :	10
II.3.1 Equation de continuité :	10
II.3.2 Equations de quantité de mouvement :.....	11
II.3.3 Equation d'énergie :.....	11
II.4 Formulation des équations de transport en coordonnées cylindriques :.....	11
II.5 Adimensionnalisation :	12
II.5.1 grandeur caractéristique et variables adimensionnelles :.....	13
II.5.2 Equations adimensionnelles :.....	14
II.6 Condition initiales et aux limites adimensionnelles :	15

Chapitre III

III.2 Equation générale de transport :.....	16
III.3 Maillage :.....	18
III.4 Discrétisation des équations mathématiques :.....	19
III.4.1 Schémas numériques :	22
III.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant R :	24
III.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z :.....	25
III.7 Discrétisation de l'équation de l'énergie :.....	26
III.8 Discrétisation des conditions aux limites :	28
III.9 Les méthodes numériques :	32
III.9.1 Méthode itérative de résolution (Algorithme TDMA):.....	32

III.9.2 Algorithme SIMPLER :.....	36
III. 9.3 Critère de convergence :.....	39

Chapitre IV

IV.1 Validation du code :	41
IV.2 Effet du maillage:.....	44
IV.3..Effet de l'augmentation de nombre de Graschof sur différent rapport d'aspect:.....	46
IV.3.1. Sur le champ d'écoulement :.....	46
IV.3.2. Sur le champ thermique :	46
IV.3.3. Sur les paramètres de l'écoulement :.....	46
IV .4. Effet de la source de chaleur interne	53
IV.4.1.1. Sur le champ de l'écoulement :.....	53
IV.4.1.2. Sur le champ thermique :	53
IV.4.1.3. Sur les paramètres de l'écoulement :.....	53
Conclusion :.....	61
REFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES:	62
RÉSUME:.....	

NOMENCLATURE

A	: Coefficients dans le système d'équations algébriques discrétisées. : Rapport d'aspect.
$A(P)$: Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Peclet.
S	: Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées.
C_p	: Chaleur massique à pression constante [J. kg ⁻¹ . K ⁻¹].
D	: Terme de diffusion dans le système d'équations algébriques discrétisées.
dR_e, dR_w, dR_n, dR_s	: Sont respectivement les distances entre le noeud considéré P et les noeuds E, W, N, S.
F	: Fréquence adimensionnelle.
F_{cr}	: Fréquence critique : Terme de convection dans le système d'équations algébriques discrétisées.
F_i	: Force de volume suivant la direction i [N].
g	: Accélération de la pesanteur [m.s ⁻²].
H	: Hauteur du cylindre [m].
K	: Conductivité thermique [W. m ⁻¹ . K ⁻¹].
Q	: la source interne [W.m ⁻²].
P	: Pression (N. m ⁻²).
P	: Pression adimensionnelle. : Nombre de Peclet.
R	: Direction radiale.
R	: Rayon adimensionnelle du cylindre.
r_c	: Rayon de l'enceinte cylindrique [m].
S	: Surface [m ²].
m	: Mode propre.
T	: Température [K].
t	: Temps [s].
T_c	: Température de la paroi froide [K].
T_H	: Température de la paroi chaude [K].
u	: Composante de la vitesse suivant la direction r [m. s ⁻¹].

U	: Composante de la vitesse radiale adimensionnelle.
V	: Volume [m ³]
v	: Composante de la vitesse suivant la direction z [m. s ⁻¹].
V	: Composante de la vitesse axiale adimensionnelle.
z	: Direction axiale.
Ra	: Nombre de Rayleigh
Ra_E	: nombre de Rayleigh externe
Ra_I	: nombre de Rayleigh interne
Gr	: Nombre de Grashof.
Gr_{cr}	: Nombre de Grashof critique.
S_Q	: Paramètre de la source de chaleur
Pr	: Nombre de Prandtl.
Nu	: Nombre de Nusselt

SYMBOLES GRECS

α	: Coefficient de diffusion thermique [m ² . s ⁻¹].
β	: Coefficient d'expansion thermique à pression constante [K ⁻¹].
ϕ	: Variable dépendante générale (représente : la pression, la température et les composantes de la vitesse).

μ	: Viscosité dynamique [kg. m ⁻¹ . s ⁻¹].
ν	: Viscosité cinématique [m ² . s ⁻¹].
θ	: Température adimensionnelle.
ρ	: Masse volumique [kg. m ⁻³].
τ	: Temps adimensionnel.
Ψ	: Fonction de courant.
Γ	: Coefficient de diffusion générale.
ξ	: Période adimensionnelle.
$\Delta R, \Delta Z$: Dimensions du volume de contrôle considéré.
$\Delta \tau$: Incrément adimensionnel du temps.

INDICES :

E	: Noeud considéré du coté Est du noeud P.
E	: La face Est du volume de contrôle considéré.
N	: Noeud considéré du coté Nord du noeud P.

- N* : La face Nord du volume de contrôle considéré.
- P* : Noeud considéré du maillage.
- S* : Noeud considéré du coté Sud du noeud *P*.
- S* : La face Sud du volume de contrôle considéré.
- W* : Noeud considéré du coté Ouest du noeud *P*.
- w* : La face Ouest du volume de contrôle considéré.

« CHAPITRE I »
« INTRODUCTION ET RECHERCHES »
« BIBLIOGRAPHIQUE »

INTRODUCTION

ET RECHERCHES BIBLIOGRAPHIQUES

Ces dernières années, des études ont été menées sur les écoulements de la convection naturelle des fluides à faibles nombres de Prandtl. Ces écoulements dans les milieux confinés ont un intérêt immense dans plusieurs applications industrielles. Parmi ces applications, la conception des équipements thermiques pour le refroidissement et la régénération efficaces du Tritium à partir du lithium liquide ($Pr = 0.0321$) dans les réacteurs de plasma de type Tokamak ^[1] et la production des cristaux de bonne qualité ^[2].

Dans des différentes situations physiques et applications technologiques, la convection naturelle joue un rôle important puisqu'elle peut être l'origine des écoulements de fluides et des échanges de chaleur et ou de masse. L'étude d'un tel phénomène, dont l'importance est dictée par le rôle qu'il joue dans divers secteurs industriels, a conduit à une imposante bibliographie spécialisée qui s'est accumulée au fur des années. La littérature montre que la cavité cylindrique est un exemple de configuration extensivement étudié. Les travaux s'y rattachent sont en fait si nombreux et variés qu'il devient impensable de les citer tous. De plus, malgré cette abondance apparente, le problème reste loin d'être épuisé. La poursuite de la recherche se rapportant au cas de la cavité cylindrique apporte souvent des renseignements précieux et montre que les connaissances déjà acquises restent loin d'être suffisantes pour prédire correctement l'état de l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur dans telles configurations. Aussi, la recherche actuelle témoigne-t-elle de la carence relative des études se rapportant aux fluides à faible nombre de Prandtl (exemple des métaux liquides), dont la présence couvre divers secteurs industriels (industries microélectroniques,).

Crespo et Bontoux ^[3] (1989) ont simulé les écoulements stationnaires tridimensionnels par la technique de différence finie dans un cylindre chauffé par le bas avec un rapport d'aspect $A = 4$. Ils ont identifié et évalué les modes de l'écoulement pour les nombres de Rayleigh

($Ra=10 \times Ra_{cr}$ au nombre $Pr=6.7$ et $Ra=2.5 \times Ra_{cr}$ au nombre $Pr=0.02$). Aux nombres élevés de Rayleigh, les vortex secondaires correspondant au mode $m=0$ apparaissent et se développent différemment à propos de taille et de grandeur pour les deux nombres de Prandtl.

Gelfgat et Tanasawa^[4] (1994) ont appliqué la méthode spectrale de Galerkin pour l'analyse de l'instabilité oscillante des écoulements de convection dans une cavité rectangulaire ($A = 4$) latéralement chauffée. Ils ont présenté les modèles des perturbations les plus instables de la fonction de courant et de la température.

Young et al^[5](1997) ont étudié numériquement la convection naturelle instationnaire dans une cavité carrée en présence d'une source de chaleur interne (Fig I.1). Les deux parois latérales verticales sont soumises à des températures différentes. Cette différence est représentée par le nombre de Rayleigh externe Ra_E . Une source de chaleur interne uniforme est mesurée par le nombre de Rayleigh interne Ra_I . Les résultats obtenus indiquent que l'augmentation du rapport (Ra_I / Ra_E), l'évolution temporelle de la fonction de courant passe par trois étapes. La première étape est une seule cellule principale de circulation. La deuxième étape indique l'apparition d'une petite cellule contrarotative dans le coin supérieure de la paroi latérale chauffée. Dans la troisième étape, la cavité est occupée par deux cellules de circulation de sens opposé. Ils ont constaté que l'évolution globale de l'écoulement est réalisée au cours d'un temps caractéristique qui est mesuré par $Ra_I^{-1/4}$.

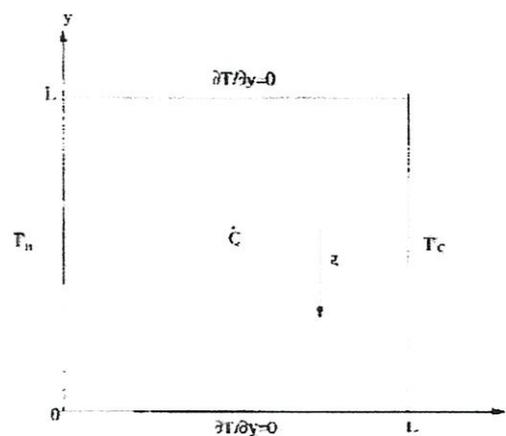


Figure (I.1): La géométrie étudiée^[5].

Gelfgat et al. ^[6] (1997) ont présenté une étude numérique sur les écoulements oscillants en cavités rectangulaires différentiellement chauffées pour deux valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 0$ et 0.015). Ils ont étudié la dépendance du nombre Grashof critique (Gr_{cr}) et la fréquence critique (F_{cr}) des oscillations sur l'allongement de la cavité (A). Les diagrammes de stabilité sont obtenus pour un intervalle de l'allongement variant de 1 à 10. Ils ont constaté que le transfert de chaleur convectif affecte fortement la stabilité de l'écoulement même pour des cas à faible nombre de Prandtl.

A. Lemembre et al. ^[7] (1998) ont présenté une étude numérique de la convection naturelle dans un cylindre vertical (fig I.2). La paroi basse du cylindre est adiabatique par contre les parois latérale et haute sont chauffées par un flux thermique uniforme et refroidies par un flux thermique respectivement. Les paramètres de contrôle de l'écoulement sont variés dans la gamme ($10^2 < Ra < 10^6$; $0.7 < Pr < 92.5$; $0.2 < A < 0.5$). Ils ont constaté que le transfert de chaleur par convection stationnaire est plus important sur la surface supérieure pour le rapport d'aspect $0.2 < A < 0.5$ et est indépendant du nombre de Prandtl. Dans la majorité des cas, l'écoulement stationnaire est caractérisé par une seule cellule par contre dans le cas instationnaire l'écoulement est composé de deux cellules pour le cas ou $A < 1/3$.

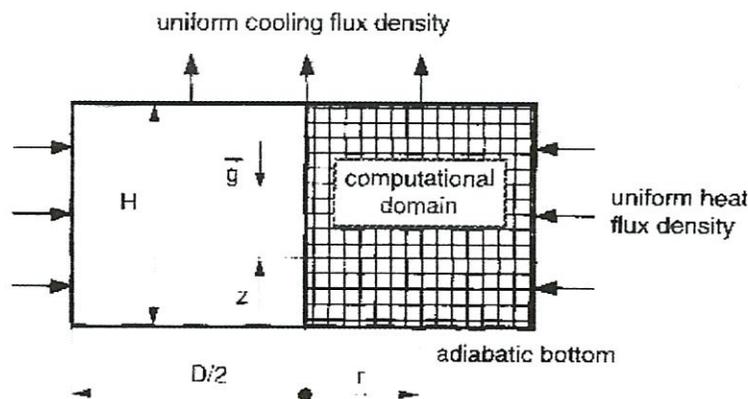


Figure (I.2): La géométrie étudiée ^[7].

Gelfgat et al. ^[8] (2000) ont présenté une étude numérique de l'instabilité tridimensionnelle d'un écoulement axisymétrique associée à la croissance cristalline. Leur objectif principal est le calcul des paramètres critiques correspondant à une transition de l'asymétrie au modèle non-axisymétrique tridimensionnel d'écoulement. Ils ont effectué une étude paramétrique de la dépendance du nombre critique Gr_{cr} à l'égard le nombre de Prandtl $0 < Pr < 0.05$ et l'allongement

du cylindre $1 < A < 4$. La dépendance forte du nombre critique de Grashof et la périodicité azimutale de l'écoulement tridimensionnel résultant indiquent l'importance d'une analyse paramétrique complète de stabilité dans des différentes configurations. En particulier, ils ont montré que la première instabilité de l'écoulement considéré est toujours tridimensionnelle.

Kwang et al.^[9] (2001) ont étudié numériquement la convection naturelle dans un cylindre vertical en variant la température de la paroi latérale. Les parois haute et basse sont adiabatiques (fig I.3). Ils ont constaté que le gradient azimutal de la T_W a intensifié l'écoulement.

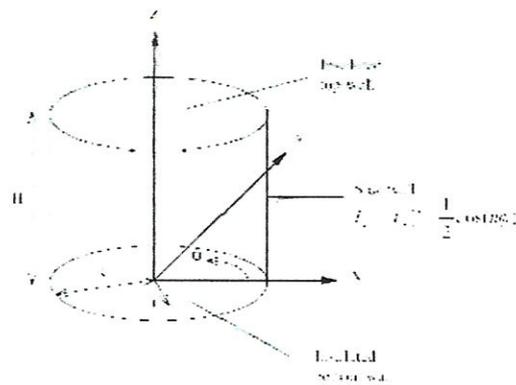


Figure (I.3) : Géométrie et conditions aux limites utilisées^[9]

Gelfgat et al.^[10] (2001) ont fait une étude de l'effet d'un champ magnétique extérieurement imposé sur l'instabilité d'un écoulement axisymétrique de convection naturelle. Ils ont considéré la convection dans un cylindre vertical avec un profil de température parabolique sur la paroi latérale. Ils ont effectué une étude paramétrique de la dépendance du nombre critique de Grashof Gr_{Cr} en fonction du nombre de Hartmann Ha pour des valeurs fixes du nombre de Prandtl ($Pr = 0.015$) et de l'allongement du cylindre ($A = 1, 2$ et 3). Ils ont obtenu le diagramme de stabilité $Gr_{Cr}(Ha)$ correspondant à la transition tridimensionnelle axisymétrique pour des valeurs croissantes du champ magnétique axial. Ils ont montré qu'aux valeurs relativement petites de Ha , l'écoulement axisymétrique tend à être instable oscillant et si l'intensité du champ magnétique (Ha) est importante et dépasse un certain seuil, l'instabilité causée par le mécanisme de Rayleigh-Bénard commute à une bifurcation régulière. Ainsi pour la configuration la plus petite, la stabilisation est considérablement plus forte que dans la plus grande.

Sierra et al. ^[11] (2001) ont présenté une comparaison entre une étude numérique tridimensionnelle et autre expérimentale de la convection naturelle dans une petite cavité cylindrique pour un nombre de Prandtl égale à 0.28 et un nombre de Rayleigh fixe égale à 2.25×10^6). Ils ont trouvé que l'écoulement est composé d'une cellule non-axisymétrique avec un axe de rotation horizontal. En raison de la symétrie de la géométrie et le système de chauffage et de refroidissement, l'orientation de la structure convective est éliminée par les frontières.

Leong ^[12] (2002) a présenté une étude numérique de la convection tridimensionnelle de Rayleigh-Bénard dans un cylindre vertical. Les équations de transport d'énergie et de vorticité sont r solv es en utilisant la méthode ADI. Des solutions sont présentées pour des allongements de 2 et 4, un nombre de Prandtl $Pr = 7$, et le nombre de Rayleigh $12 \leq Ra \leq 37500$. Un  tat conducteur (aucun mouvement) existe quand $Ra \leq Ra_{Cr} = 1860$. Pour le $Ra_{Cr} > Ra$, il y a quatre types principaux de structures d'écoulement, ce sont les roulants concentriques, radiaux, parallèles. Il a constaté que le nombre de Nusselt dépend sur la structure d'écoulement.

Michele Ciofalo et al. ^[13] (2002) ont simulé numériquement la convection tridimensionnelle dans un cube rempli du Lithium liquide avec la présence du chauffage volumétrique. L'écoulement est exposé à un champ magnétique uniforme orthogonal à la pesanteur et au gradient de températures. Ils ont constaté que l'augmentation du nombre Hartmann diminue l'intensité de l'écoulement tridimensionnel.

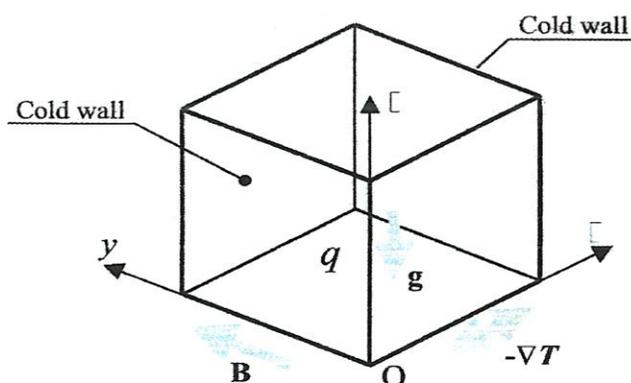


Figure (I.4) : Géométrie et conditions aux limites utilisées ^[13]

Rahman et al. ^[14] (2003) ont fait des investigations numériques sur l'écoulement de la convection naturelle avec ou sans source de chaleur interne (Fig.I.5). Deux principaux paramètres pour ce problème sont le nombre de Rayleigh externe Ra_E et le nombre de Rayleigh

interne, Ra_I . Des résultats sont obtenus pour différents allongements et divers angles d'inclinaison de l'enceinte rectangulaire.

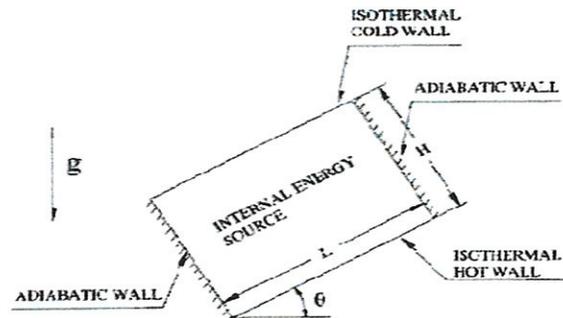
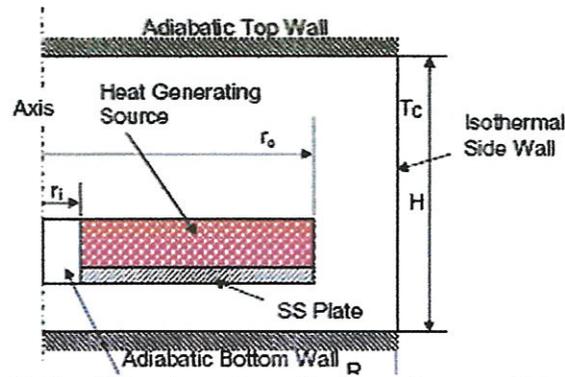


Figure (I.5) : Géométrie et conditions aux limites utilisées (Rahman et al.^[14])

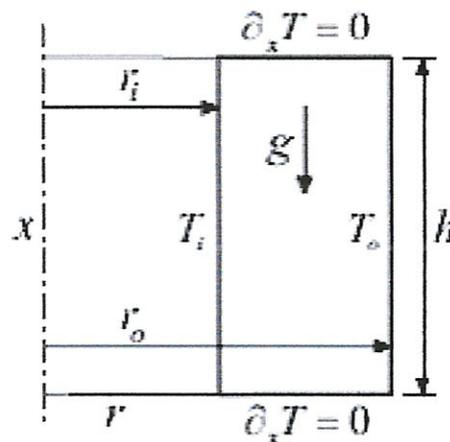
P. H. Kao et al. (2007)^[15] ont fait une simulation numérique de la convection de Rayleigh-bénard avec la méthode de Lattice Boltzmann pour des différents nombres de Prandtl (0.7 à 70) et des différents nombres de Rayleigh inférieur à 10^5 . Le nombre de Nusselt a été étudié en fonction du nombre de Rayleigh. Les résultats de simulation prouvent que les écoulements transitoires périodiques ont lieu à certains nombres de Prandtl avec un nombre approprié de Rayleigh. En outre, le nombre de Nusselt s'avère relativement peu sensible au nombre de Prandtl.

A. Kumar et al.^[16] (2008) ont fait une recherche numérique sur le transfert de chaleur pour un écoulement laminaire et turbulent de la convection naturelle. Une source volumétrique produisant de la chaleur est placée à l'intérieur d'une cavité cylindrique qui est remplie du sodium liquide, $Pr = 0.005$. Les parois basse et haute sont supposées adiabatiques et la paroi latérale est isotherme (Fig I.6). Ils ont effectué des simulations pour montrer l'évolution de l'écoulement et les champs thermiques.

Figure (I.6) : Géométrie de cylindre et les conditions ^[16]

Q.li et al. ^[17] (2009) ont étudié l'écoulement axisymétrique par la méthode de Lattice Boltzmann dans deux cylindres coaxiaux verticaux. Ils ont effectués des simulations numériques pour les écoulements laminaires de la convection naturelle. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt obtenu à partir des simulations est conforme aux solutions analytiques

(Fig I.7).

Figure (I.7) : Géométrie du problème ^[17]

Lin zheng et al. ^[18] (2010) ont proposé un modèle simple (LBE) d'équation de Boltzmann pour l'écoulement axisymétrique dans un cylindre ou ils ont imposé des flux de chaleur l'un est appliqué sur la paroi latérale du cylindre et l'autre sur la paroi haute (Fig I.8). Ils ont étudié deux cas le premier est celle de la convection naturelle et l'autre le cas de la convection Rayleigh-Bénard ou $Pr=0.7$ et $10^3 < Ra < 10^5$. Les résultats obtenus sont en concordance avec la solution analytique.

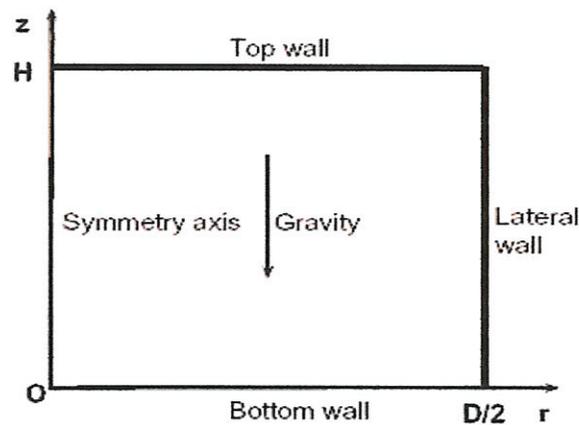


Figure (I.8) : Géométrie du problème. ^[18]

Bum-Jinet et al. ^[19] (2011) ont étudié expérimentalement la convection naturelle dans une cavité cylindrique vertical ou les parois basse et haute sont adiabatiques, pour des nombre de Rayleigh de 1.08×10^{10} jusqu'au 2.11×10^{13} . Ils ont traité les deux régimes de l'écoulement à savoir l'écoulement laminaire et turbulent pour différentes géométries. Un système de mesure a été utilisé pour les mesures des taux de transfert de chaleur.

L'objectif de notre travail est d'étudier l'écoulement axisymétrique de la convection naturelle dans une cavité cylindrique et voir l'effet du chauffage volumétrique sur la structure de l'écoulement et sur le champ thermique.

Le présent mémoire est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons présenté une recherche bibliographique sur les différentes études réalisées dans ce thème pour des configurations variées.

Dans le second chapitre, nous détaillons le modèle mathématique et la géométrie utilisée.

Dans le troisième chapitre, nous exposons la solution numérique, à savoir, le maillage, les équations de discrétisation des équations qui gouvernent notre problème et la méthode numérique utilisée.

Dans le dernier chapitre, en premier lieu, nous validons notre code de calcul et nous discutons et interprétons les résultats obtenus.

« CHAPITRE II »
« MODELE MATHMATIQUE »

MODELE MATHEMATIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons les équations différentielles modélisant notre problème. Ces équations expriment les lois de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

II.1 Géométrie du problème :

La géométrie considérée dans notre étude est illustrée dans la figure (II.1). Il s'agit d'une cavité cylindrique remplie complètement du Lithium liquide (faible nombre de Prandtl), ayant une hauteur H et un rayon r dont le rapport d'Aspect est A ($A=H/r$). Le fond du cylindre est mené a une température constante T_H par contre le haut est refroidi. La paroi latérale est supposée adiabatique avec la présence d'une source de chaleur interne constante.

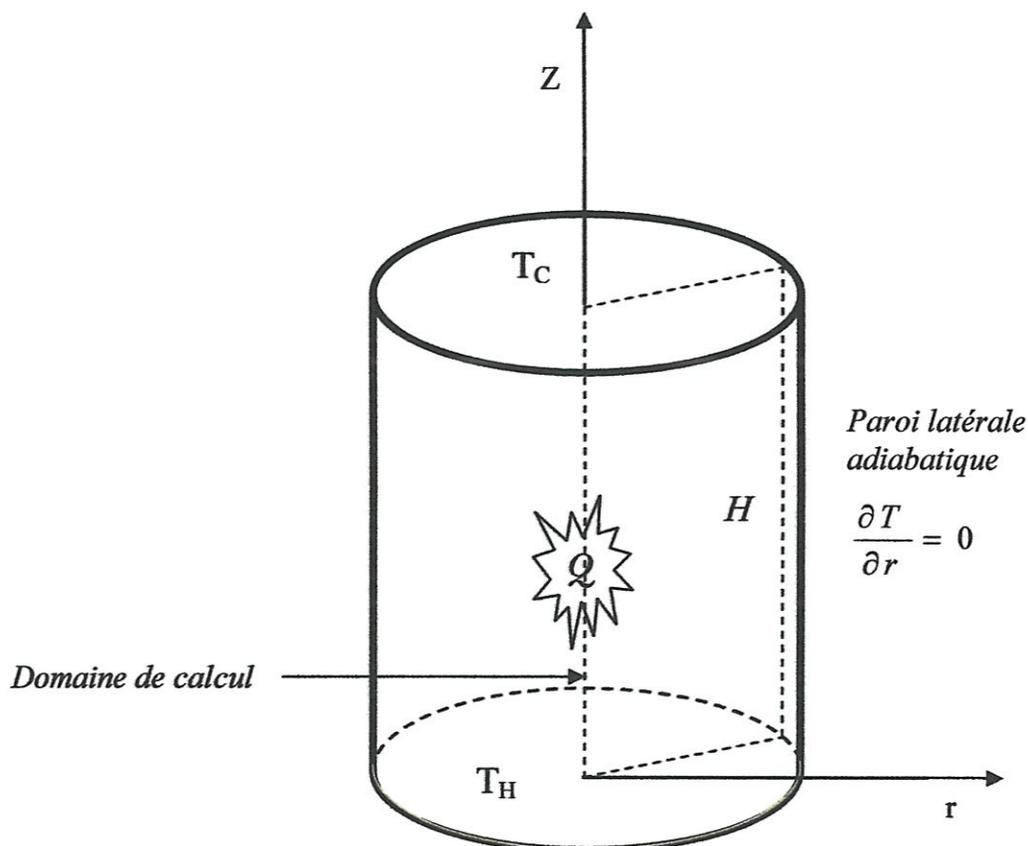


Figure (II.1) : Géométrie et condition aux limites du problème

II.2 Hypothèses :

Pour simplifier la formulation mathématique de notre problème, les hypothèses simplificatrices suivantes sont utilisées:

- Ecoulement laminaire et axisymétrique.
- Les propriétés physiques du fluide (ρ , ν , C_p et k) sont supposées constantes.
- La dissipation visqueuse est négligeable ($\phi = 0$).
- L'approximation de Boussinesq est valable, celle-ci consiste à considérer les variations de masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantité de mouvement ($\rho = \rho_0$), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de la masse volumique ρ en fonction de la température est donnée par:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II.1})$$

ρ_0 : la masse volumique du fluide à la température de référence T_0 .

β : le coefficient d'expansion à pression constante.

II.3 Equations générales de transport :

Le système d'équations qui régit l'écoulement de notre étude est :

II.3.1 Equation de continuité :

Elle déduite du principe de conservation de masse et s'exprime mathématiquement sous forme tensorielle comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (\text{II.2})$$

($j = 1 \sim 2$, indice de sommation).

Pour un fluide Newtonien incompressible ($\rho = \text{constante}$), l'équation (II.2) se réduit à :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II.3})$$

II.3.2 Equations de quantité de mouvement :

Elles sont obtenues par l'application de la deuxième loi de la dynamique à une particule de fluide passant à travers un volume de contrôle infinitésimal. Elles s'écrivent sous forme tensorielle comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i) = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{II.4})$$

(j = 1~2, indice libre)

Où :

ρ : La masse volumique du fluide.

μ : La viscosité dynamique du fluide.

F_i : Les forces de volume.

P : La pression.

II.3.3 Equation d'énergie :

Elle est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation pour un fluide Newtonien incompressible, s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (\text{II.5})$$

Où : $\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$

α : La diffusivité thermique.

K : La conductivité thermique.

C_p : La chaleur spécifique à pression constante.

II.4 Formulation des équations de transport en coordonnées cylindriques :

Les équations générales gouvernant l'écoulement et le transfert de chaleur sont :

- à $t = 0$; $u = v = 0$ et $T = 0$, la source de chaleur est soudainement branchée ;
- pour $t > 0$;

- *Equation de continuité :*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.6})$$

- *Equation de quantité de mouvement suivant r :*

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^2) + \frac{\partial}{\partial z} (v u) \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + u \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

- *Equation de quantité de mouvement suivant z :*

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u v) + \frac{\partial}{\partial z} (v^2) \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + u \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g \beta_r (T - T_c) \quad (\text{II.8})$$

- *Equation d'énergie :*

$$\rho C_p \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u T) + \frac{\partial}{\partial z} (v T) \right] = K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + Q \quad (\text{II.9})$$

Où :

u, v Représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale et axiale selon les directions (r, z) .

g est l'accélération de la pesanteur.

Q est la source interne.

II.5 Adimensionnalisation :

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesure pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème. En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence.

II.5.1 grandeur caractéristique et variables adimensionnelles :

On définit les grandeurs caractéristiques introduites dans nos équations du modèle mathématique comme suit :

- **Convection naturelle**

r_c^2/ν	:	Temps caractéristique	[s].
r_c	:	Rayon caractéristique	[m].
ν/r_c	:	Vitesse caractéristique	[m. s ⁻¹].
$\rho(\nu/r_c)^2$:	Pression caractéristique	[N. m ⁻²].
$T_H - T_C$:	Température caractéristique	[K].

Les variables adimensionnelles sont :

$$\tau = t / \frac{r_c^2}{\nu}$$

$$R = r / r_c$$

$$Z = z / r_c$$

$$U = u / \left(\frac{\nu}{r_c} \right)$$

$$V = v / \left(\frac{\nu}{r_c} \right)$$

$$P = p / \rho \left(\frac{\nu}{r_c} \right)^2$$

$$\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}$$

II.5.2 Equations adimensionnelles :

Les équations générales adimensionnelles de continuité, de quantités de mouvement, et d'énergie qui gouvernent la configuration (de la convection naturelle) s'écrivent alors :

- Equation de continuité :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U) + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (\text{II.10})$$

- Equations de quantités de mouvement :

Suivant r :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U^2) + \frac{\partial}{\partial Z} (V.U) = -\frac{\partial P}{\partial R} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

Suivant z :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U.V) + \frac{\partial}{\partial Z} (V^2) = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) + Gr . \theta \quad (\text{II.12})$$

- Equation d'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U.\theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (V.\theta) = \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) + S_{\varrho} \quad (\text{II.13})$$

Où :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{Nombre de Prandtl})$$

$$S_{\varrho} = \frac{Q r_c^3}{\rho \nu C_p (T_H - T_C)} \quad (\text{Paramètre de la source de chaleur})$$

Et

$$Gr = \frac{g \beta (T_H - T_C) r_c^3}{\nu^2} \quad (\text{Nombre de Grashof})$$

II.6 Conditions initiales et aux limites :

$$\text{à } \tau = 0, \quad U = V = \theta = 0$$

Pour $\tau > 0$, on a :

- **Condition aux limites hydrodynamiques :**

$$\text{à } R = 0 : \quad U = \frac{\partial V}{\partial R} = 0$$

$$\text{à } R = 1 : \quad U = V = 0$$

$$\text{à } Z = 0 : \quad U = V = 0$$

$$\text{à } Z = \frac{H}{r_c} : \quad U = V = 0$$

- **Condition aux limites thermiques :**

$$\text{à } R = 0 : \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{axe de symétrie}$$

$$\text{à } R = 1 : \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{paroi latérale adiabatique}$$

$$\text{à } Z = 0 : \quad \theta = 1 \quad \text{paroi inférieure chaude}$$

$$\text{à } Z = \frac{H}{r_c} : \quad \theta = 0 \quad \text{paroi supérieure froide}$$

« CHAPITRE III »
« MODELISATION NUMERIQUE »

MODELISATION NUMERIQUE

III.1 Introduction :

Les équations de conservation de quantité de mouvement et d'énergie régissant le phénomène de la convection naturelle dans cylindre, sont des équations différentielles aux dérivées partielles elliptiques et non-linéaires d'une part et complexe et couplées d'autre part. Vu la complexité de les résoudre analytiquement, on fait appel aux méthodes numériques.

Pour obtenir une solution numérique, le problème étudié doit être discrétisé en transformant les équations différentielles en un système d'équations algébriques. Il existe plusieurs méthodes de discrétisation telles que : la méthode des volumes finis, des différences finis et des éléments finis, ...etc. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode des volumes finis.

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations de transport sur un ensemble discret de volumes finis jointifs couvrant le domaine physique. Le résultat de la discrétisation en point est une équation algébrique liant la valeur d'une variable aux valeurs des variables des points voisins et d'autres considérés constants. Sa facilité de linéarité des termes sources et son caractère garantissant de conserver la quantité de masse, de mouvement et d'énergie dans tout le domaine étudié donne un choix judicieux d'adopter cette méthode.

III.2 Equation générale de transport :

L'équation générale de transport d'une variable ϕ pour un écoulement axisymétrique et incompressible s'écrit dans le système cylindrique comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U \phi)}_2 + \frac{\partial}{\partial Z} (V \phi) = \underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)}_4 + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

1 : représente le terme transitoire.

2 : représente le terme de transport par convection.

3 : représente le terme de transport par diffusion.

4 : représente le terme de source.

Avec :

U : composante radiale de la vitesse.

V : composante axiale de la vitesse.

Γ : coefficient de diffusion.

Dans le tableau suivant, nous donnons la définition de ϕ , Γ et S_ϕ pour les équations qui gouvernent notre problème général:

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant R	U	1	$-\frac{\partial P}{\partial R}$
Quantité de mouvement suivant Z	V	1	$-\frac{\partial P}{\partial Z} + Gr\theta$
Energie	θ	$\frac{1}{Pr}$	S_θ

Tableaux (III.1) : Variables et coefficients des équations de transport adimensionnelles

III.3 Maillage :

Le domaine physique dans le plan méridien (r, z) est divisé en un semble de petits volumes élémentaires et en chaque volume, on considère des points situés dans son milieu. Les faces d'un volume de contrôle typique sont localisées au point e, w, n, s (voir Fig.III.1). Notons P le centre du volume de contrôle considéré. E, W, N, S sont les centres des volumes de contrôles adjacents

situés à l'Est, Ouest, Nord et Sud, respectivement, de celui contenant P . Les quantités scalaires (pression et température) sont stockées aux centres des volumes finis. Par contre, les composantes de la vitesse sont localisées aux faces des volumes finis.

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires, appelé volume de contrôle typique (Fig.III.2), et pour l'expression des grandeurs vectorielles, on utilise un volume de contrôle décalé (Fig.III.3.a et b).

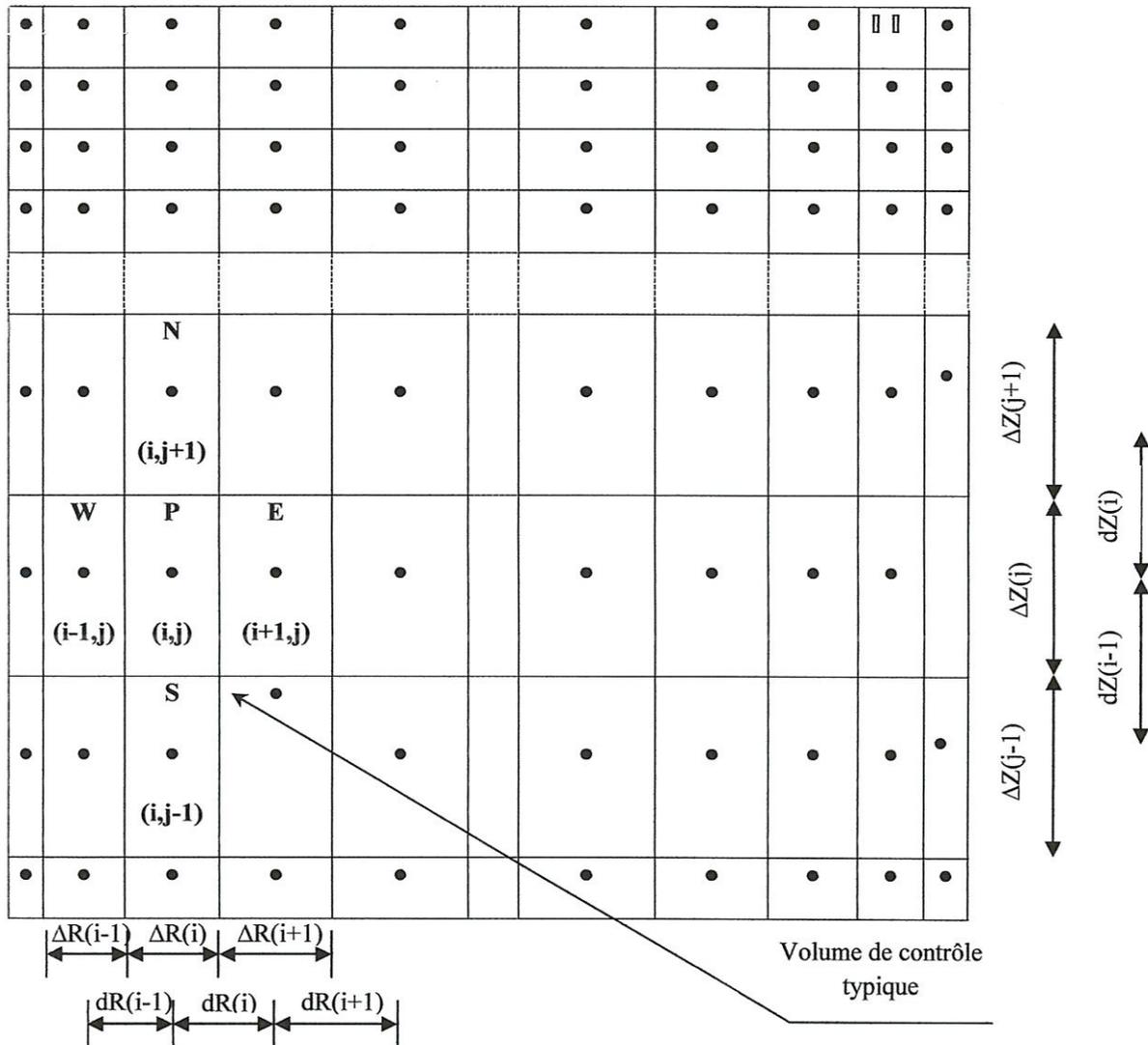


Figure (III.1) : Description du maillage

III.4 Discrétisation des équations mathématiques :

L'équation de la variable ϕ est intégrée sur le volume de contrôle typique (Fig.III.2):

En pose : $dV=RdRdZ$

L'intégration de l'équation (III.1), nous donne :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial \tau} R dR dZ dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U \cdot \phi) dR dZ dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (V \cdot \phi) R dR dZ dt = \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) R dR dZ dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e S_\phi R dR dZ dt \end{aligned} \quad (III.2)$$

le terme transitoire : la division par $\Delta \tau$, nous donne :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta \tau} R dR dZ = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta \tau} R_p \Delta R \Delta Z \quad (III.3)$$

Le terme convectif :

$$\begin{aligned} \int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U \cdot \phi) R dR dZ = \int_s^e [R U \cdot \phi]_w^e dZ = [(R U \cdot \phi)_e - (R U \cdot \phi)_w] \Delta Z \\ \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (V \cdot \phi) R dR dZ = \int_w^e [V \cdot \phi]_s^n R dR dZ = [(V \cdot \phi)_n - (V \cdot \phi)_s] R_p \Delta R \end{aligned} \quad (III.4)$$

Le terme diffusif :

$$\begin{aligned} \int_s^e \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ = \int_s^e \left[R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_w^e dZ = \left[\left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e - \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z \\ \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) R dR dZ = \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right]_s^n R dR = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_s \right] R_p \Delta R \end{aligned} \quad (III.5)$$

Le terme source :

$$\int_s^e \int_w^e S_\phi R dR dZ = \overline{S_\phi} R_p \Delta R \Delta Z \quad (III.6)$$

L'équation (III.2) s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta\tau} R_p \Delta R \Delta Z + [(RU.\phi)_e - (RU.\phi)_w] \Delta Z + [(V.\phi)_n - (V.\phi)_s] R_p \Delta R \\ = \left[\left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e - \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_s \right] R_p \Delta R + \overline{S}_\phi R_p \Delta R \Delta Z \end{aligned} \quad (III.7)$$

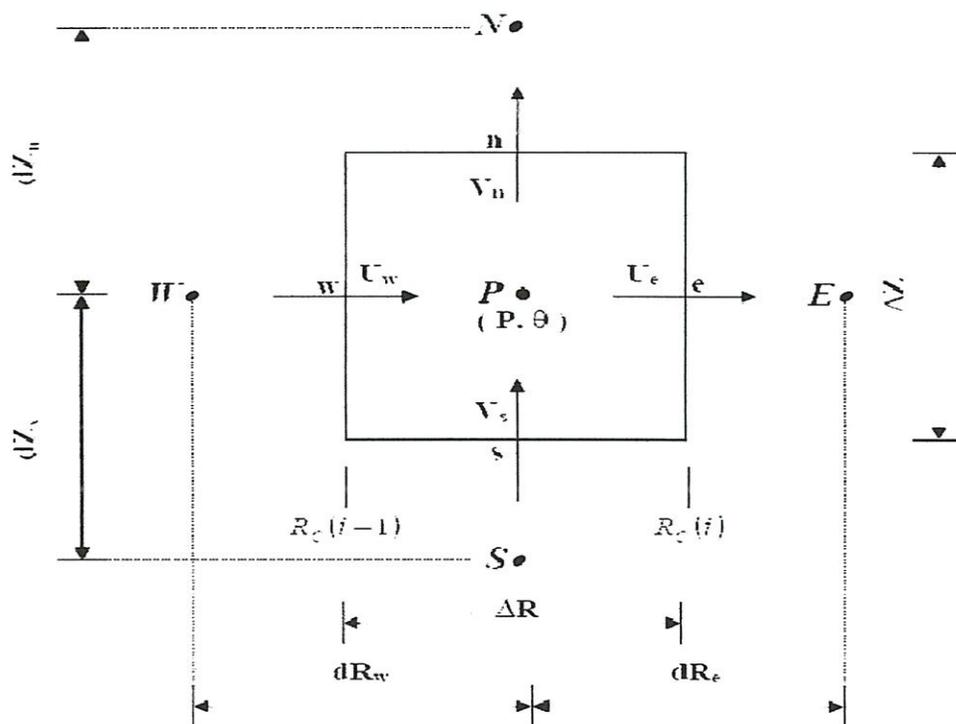


Figure (III.2) : Volume de contrôle typique

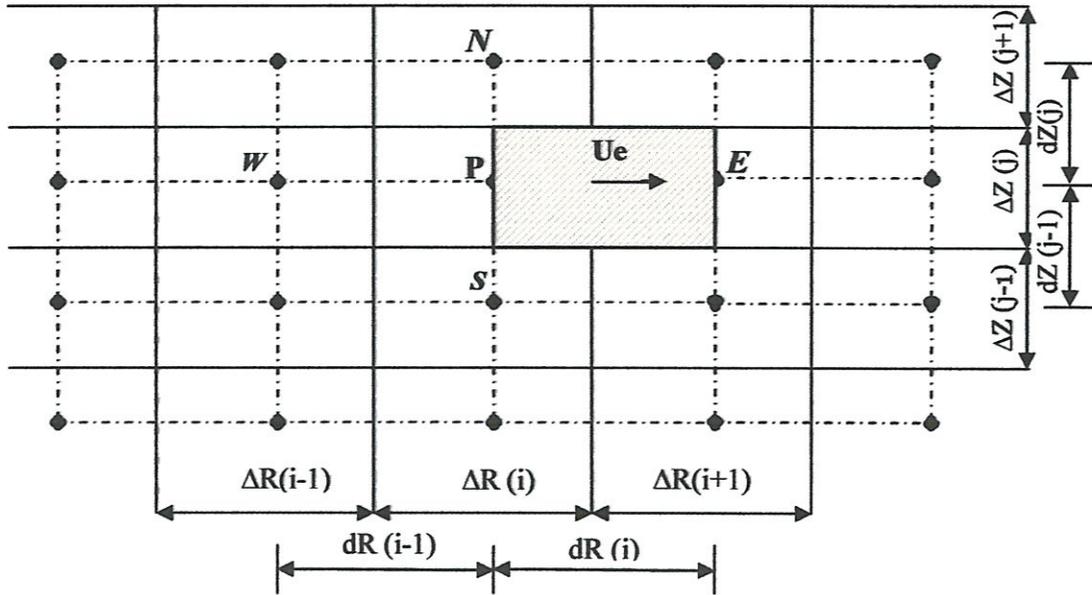


Figure (III.3 a) : Volume de contrôle décalé vers la droite

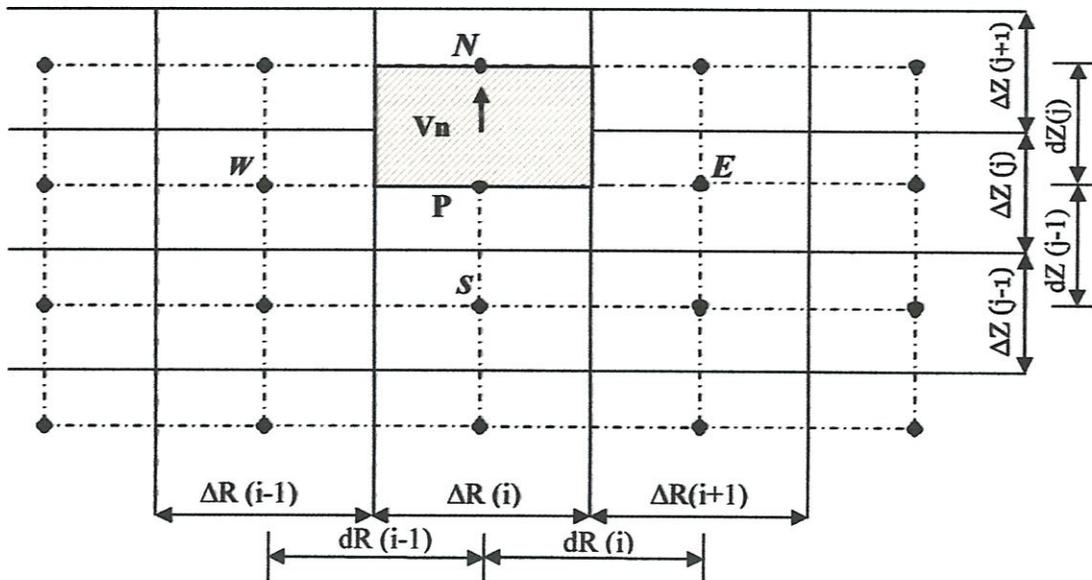


Figure (III.3 b) : Volume de contrôle décalé vers le haut

En arrivant à ce stade, il faudra exprimer les termes des flux convectifs et diffusifs aux interfaces des volumes de contrôle.

Afin de surmonter à ce problème, on fait appel aux schémas de discrétisation (différences centrées, exponentiel, Power Law, hybrid, ...). Ces schémas se différencient par la façon avec laquelle on prend en compte les termes de convection et de diffusion.

Dans notre étude, nous appliquerons le schéma des différences centrées.

III.4.1 Schémas numériques :

La présentation générale de l'équation algébrique discrétisée où le flux total de convection et de diffusion est calculé par une fonction $A(|P|)$ (voir le tableau III.2), s'écrit comme suit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + S \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (\text{III.9})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$S = (\bar{S}_\phi + \frac{\phi^n}{\Delta \tau}) R_p \Delta R \Delta Z \quad (\text{III.10})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) + A_P^0 \quad (\text{III.11})$$

$$A_P^0 = \frac{R_p \Delta R \Delta Z}{\Delta \tau}$$

$$F_e = U_e R_e \Delta Z$$

$$F_w = U_w R_w \Delta Z$$

$$F_n = V_n R_p \Delta R$$

$$F_s = V_s R_p \Delta R$$

et

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{dR_e} R_e \Delta Z$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{dR_w} R_w \Delta Z$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{dZ_n} R_p \Delta R$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{dZ_s} R_p \Delta R$$

$$P_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

A_E, A_W, A_N, A_S et A_P : sont les coefficients correspondants, respectivement, aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud et centre du volume.

A_p^0 : est le coefficient de la variable à calculer au point P , et à un instant précédent.

S : est un terme de source supposé être constant dans le volume de contrôle.

F_e, F_w, F_n, F_s et D_e, D_w, D_n, D_s sont respectivement les termes convectifs et diffusifs aux faces Est, Ouest, Nord, Sud.

P_e, P_w, P_n, P_s désignent le rapport du flux convectif au flux diffusif aux différents faces du volume de contrôle (nombres de Peclet).

III.4.2 Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques :

Le tableau ci-dessous donne les expressions de la fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques.

Schéma	Formule de la fonction $A(P)$
Différences centrées	$1-0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$\text{Max}[0, 1-0.5 P]$
Power Law	$\text{Max}[0, (1-0.1 P)^5]$
Exponentiel	$ P / [\exp(P)-1]$

Tableau (III.2) : Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques

Dans le présent travail nous utilisons le schéma des différences centrées. La stabilité numérique de ce schéma exige que tous les nombres de Peclet doivent être inférieur à 2 en valeurs absolus : $|P_{e,w,n,s}| < 2$ [20].

III.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant r :

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant r sur un volume de contrôle décalé vers la droite (voir Fig.III.3 a) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)U^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)U^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)U^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)U^{n+1}(i, j+1) \\ + A_S(i, j)U^{n+1}(i, j-1) + S(i, j) \quad (\text{III.12})$$

Avec :

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (\text{III.13})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$S(i, j) = [P(i, j) - P(i+1, j)]R_C(i)\Delta Z(j) + U^n(i, j) \frac{R_c(i)dR(i) \cdot \Delta Z(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.14})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{R_C(i)dR(i) \cdot \Delta Z(j)}{\Delta \tau} + \frac{R_C(i)dR(i)dZ(j)}{R_C(i)^2} \quad (\text{III.15})$$

Les termes convectifs :

$$F_e = \frac{1}{2} [U(i+1, j) + U(i, j)] R_p(i+1) \Delta Z(j)$$

$$F_w = \frac{1}{2} [U(i-1, j) + U(i, j)] R_p \Delta R(j) \quad (\text{III.16})$$

$$F_n = \frac{1}{2} [V(i, j) + V(i+1, j)] R_c(i) dR(i)$$

$$F_s = \frac{1}{2} [V(i, j-1) + V(i+1, j-1)] R_c(i) dR(i)$$

Les termes diffusifs :

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{R_p(i+1) \Delta Z(j)}{\Delta R(i+1)} \\ D_w &= \frac{R_p(i) \Delta Z(j)}{\Delta R(i)} \\ D_n &= \frac{R_c(i) dR(i)}{dZ(j)} \\ D_s &= \frac{R_c(i) dR(i)}{dZ(j-1)} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

III.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant z :

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant z sur un volume de contrôle décalé vers le haut (voir Fig.III.3 b) donne l'équation algébrique :

$$\begin{aligned} A_p(i, j) V^{n+1}(i, j) &= A_E(i, j) V^{n+1}(i+1, j) + A_w(i, j) V^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j) V^{n+1}(i, j+1) \\ &\quad + A_S(i, j) V^{n+1}(i, j-1) + S(i, j) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Avec :

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_w = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (\text{III.19})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$S(i, j) = [P(i, j) - P(i, j+1)]R_p(i)\Delta R(i) + 0.5 \times Gr[\theta(i, j+1) + \theta(i, j)]R_p(i)\Delta R(i) \cdot dZ(j) \\ + V^n(i, j) \frac{R_p(i)\Delta R(i) \cdot dZ(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.20})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_w(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{R_p(i)\Delta R(i) \cdot dZ(i)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.21})$$

Les termes convectifs :

$$F_e = \frac{1}{2}[U(i, j) + U(i, j+1)]R_c(i)dZ(j)$$

$$F_w = \frac{1}{2}[U(i-1, j) + U(i-1, j+1)]R_c(i-1)dZ(j) \quad (\text{III.22})$$

$$F_n = \frac{1}{2}[V(i, j+1) + V(i, j)]R_p(i)\Delta R(i)$$

$$F_s = \frac{1}{2}[V(i, j-1) + V(i, j)]R_p(i)\Delta R(i)$$

Les termes diffusifs

$$D_e = \frac{R_c(i)dZ(j)}{dR(i)}$$

$$D_w = \frac{R_c(i-1)dZ(j)}{dR(i-1)}$$

$$D_n = \frac{R_p(i)\Delta R(i)}{\Delta Z(j+1)}$$

$$D_s = \frac{R_p(i)\Delta R(i)}{\Delta Z(j)}$$

(III.23)

III.7 Discrétisation de l'équation de l'énergie :

L'intégration de l'équation de l'énergie adimensionnelle sur un volume de contrôle typique (voir Fig III.2) donne l'équation algébrique suivante :

$$A_p(i, j)\theta^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\theta^{n+1}(i+1, j) + A_w(i, j)\theta^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)\theta^{n+1}(i, j+1) \\ + A_S(i, j)\theta^{n+1}(i, j-1) + S(i, j) \quad (\text{III.24})$$

Avec :

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (\text{III.25})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$S(i, j) = \frac{\theta^n(i, j)}{\Delta \tau} R_p(i) \Delta R(i) \Delta Z(j) + S_Q \quad (\text{III.26})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{R_p(i) \Delta R(i) \cdot \Delta Z(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.27})$$

Les termes convectifs :

$$F_e = U(i, j) R_c(i) \Delta Z(j)$$

$$F_w = U(i-1, j) R_c(i-1, j) \Delta Z(j)$$

$$F_n = V(i, j) R_p(i) \Delta R(i) \quad (\text{III.28})$$

$$F_s = V(i, j-1) R_p(i) \Delta R(i)$$

Les termes diffusifs :

$$D_e = \frac{1}{\text{Pr}} \times \frac{R_c(i) \Delta Z(j)}{dR(i)}$$

$$D_w = \frac{1}{\text{Pr}} \times \frac{R_c(i-1) \Delta Z(j)}{dR(i-1)}$$

$$D_n = \frac{1}{\text{Pr}} \times \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{dZ(j)} \quad (\text{III.29})$$

$$D_s = \frac{1}{\text{Pr}} \times \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{dZ(j-1)}$$

III.8 Discrétisation des conditions aux limites :

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $R = 0$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(1, j) &= 1 \\
 A_E(1, j) &= 0 \\
 A_W(1, j) &= 0 && \text{pour } (1 \leq j \leq JL) && \text{(III.30)} \\
 A_N(1, j) &= 0 \\
 A_S(1, j) &= 0 \\
 S(1, j) &= 0
 \end{aligned}$$

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $R = 1$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(IL-1, j) &= 1 \\
 A_E(IL-1, j) &= 0 \\
 A_W(IL-1, j) &= 0 && \text{pour } (1 \leq j \leq JL) && \text{(III.31)} \\
 A_N(IL-1, j) &= 0 \\
 A_S(IL-1, j) &= 0 \\
 S(IL-1, j) &= 0
 \end{aligned}$$

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $Z = 0$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, 1) &= 1 \\
 A_E(i, 1) &= 0 \\
 A_W(i, 1) &= 0 && \text{pour } (1 \leq i \leq IL-1) && \text{(III.32)} \\
 A_N(i, 1) &= 0
 \end{aligned}$$

III.8 Discrétisation des conditions aux limites :

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $R = 0$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(1, j) &= 1 \\
 A_{\bar{r}}(1, j) &= 0 \\
 A_w(1, j) &= 0 && \text{pour } (1 \leq j \leq JL) && \text{(III.30)} \\
 A_N(1, j) &= 0 \\
 A_S(1, j) &= 0 \\
 S(1, j) &= 0
 \end{aligned}$$

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $R = 1$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(IL-1, j) &= 1 \\
 A_{\bar{r}}(IL-1, j) &= 0 \\
 A_w(IL-1, j) &= 0 && \text{pour } (1 \leq j \leq JL) && \text{(III.31)} \\
 A_N(IL-1, j) &= 0 \\
 A_S(IL-1, j) &= 0 \\
 S(IL-1, j) &= 0
 \end{aligned}$$

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $Z = 0$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, 1) &= 1 \\
 A_{\bar{r}}(i, 1) &= 0 \\
 A_w(i, 1) &= 0 && \text{pour } (1 \leq i \leq IL-1) && \text{(III.32)} \\
 A_N(i, 1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$A_S(i,1) = 0$$

$$S(i,1) = 0$$

La discrétisation de la condition $U = 0$ à $Z = A$ est :

$$A_p(i, JL) = 1$$

$$A_{\bar{r}}(i, JL) = 0$$

$$A_w(i, JL) = 0 \quad \text{pour } (1 \leq i \leq IL - 1) \quad (\text{III.33})$$

$$A_N(i, JL) = 0$$

$$A_S(i, JL) = 0$$

$$S(i, JL) = 0$$

La discrétisation de la condition $\frac{\partial V}{\partial R} = 0$ à $R = 0$ est :

$$A_p(1, j) = 1$$

$$A_{\bar{r}}(1, j) = 0$$

$$A_w(1, j) = 1 \quad \text{pour } (1 \leq j \leq JL - 1) \quad (\text{III.34})$$

$$A_N(1, j) = 0$$

$$A_S(1, j) = 0$$

$$S(1, j) = 0$$

La discrétisation de la condition $V = 0$ à $R = 1$ est :

$$A_p(IL, j) = 1$$

$$A_{\bar{r}}(IL, j) = 0$$

$$A_w(IL, j) = 0 \quad \text{pour } (1 \leq j \leq JL - 1) \quad (\text{III.35})$$

$$A_N(IL, j) = 0$$

$$A_S(IL, j) = 0$$

$$S(IL, j) = 0$$

La discrétisation de la condition $V = 0$ à $Z = 0$ est :

$$A_p(i, 1) = 1$$

$$A_r(i, 1) = 0$$

$$A_w(i, 1) = 0 \quad \text{pour } (1 \leq i \leq IL) \quad (\text{III.36})$$

$$A_N(i, 1) = 0$$

$$A_S(i, 1) = 0$$

$$S(i, 1) = 0$$

La discrétisation de la condition $V = 0$ à $Z = A$ est :

$$A_p(i, JL - 1) = 1$$

$$A_r(i, JL - 1) = 0$$

$$A_w(i, JL - 1) = 0 \quad \text{pour } (1 \leq i \leq IL) \quad (\text{III.37})$$

$$A_N(i, JL - 1) = 0$$

$$A_S(i, JL - 1) = 0$$

$$S(i, JL - 1) = 0$$

La discrétisation de la condition $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$ à $R = 0$ est :

$$A_p(1, j) = 1$$

$$A_r(1, j) = 0$$

$$A_w(1, j) = 1 \quad \text{pour } (1 \leq j \leq JL) \quad (\text{III.38})$$

$$A_N(1, j) = 0$$

$$A_S(1, j) = 0$$

$$S(1, j) = 0$$

La discrétisation de la condition $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} = 0$ à $R=1$ est :

$$A_p(IL, j) = 1$$

$$A_r(IL, j) = 0$$

$$A_w(IL, j) = 1 \quad \text{pour } (1 \leq j \leq JL) \quad (\text{III.39})$$

$$A_N(IL, j) = 0$$

$$A_S(IL, j) = 0$$

$$S(IL, j) = 0$$

La discrétisation de la condition $\theta = 1$ à $Z = 0$ est :

$$A_p(i, 1) = 1$$

$$A_r(i, 1) = 0$$

$$A_w(i, 1) = 0 \quad \text{pour } (1 \leq i \leq IL) \quad (\text{III.40})$$

$$A_N(i, 1) = 0$$

$$A_S(i, 1) = 0$$

$$S(i, 1) = 1$$

La discrétisation de la condition $\theta = 0$ à $Z = A$ est :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, JL) &= 1 \\
 A_r(i, JL) &= 0 \\
 A_w(i, JL) &= 0 \quad \text{pour } (1 \leq i \leq IL) \\
 A_n(i, JL) &= 0 \\
 A_s(i, JL) &= 0 \\
 S(i, JL) &= 0
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

III.9 Les méthodes numériques :

La discrétisation de ces équations a été effectuée à l'aide de la méthode des volumes finis. Le système des équations obtenu étant non linéaires, on va le résoudre itérativement par double balayage en utilisant l'algorithme de THOMAS [20].

L'algorithme SIMPLER [20] est utilisé pour résoudre le système d'équations discrétisées et obtenir un champ de pression à partir de l'équation de continuité.

III.9.1 Méthode itérative de résolution (Algorithme TDMA) :

La résolution directe du système d'équations algébriques est compliquée, pour cela, on utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution semi-itérative. Elle consiste à déterminer les valeurs de la variable ϕ sur chaque ligne du domaine d'étude indépendamment des autres lignes, donc le système se transforme d'un système d'équations algébriques multidimensionnelles en un système unidimensionnel, en ajoutant à la source de la dimension choisie des termes des autres dimensions. Le système d'équations obtenu est représenté par une matrice tridiagonale et peut être résolu par l'algorithme de Thomas.

L'équation algébrique s'écrit pour le noeud P du maillage comme suit :

$$\rho_P \bar{u}_P = \sum_{i=E,W,N,S} A_{i,P} \bar{u}_i + \bar{b}_P \tag{III.42}$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme :

$$[A][\phi] = [S_\phi] \quad (\text{III.43})$$

où :

$|A|$ est une matrice de $(IL - 2) \times (JL - 2)$ éléments.

$|\phi|$ Vecteur des inconnues $\phi(i; j)$

$$i = 2; IL - 1$$

$$j = 2; JL - 1$$

Pour déterminer les valeurs de ϕ sur une colonne « i » on suppose que les valeurs de cette dernière sont connues sur les colonnes « $i - 1$ » et « $i + 1$ ». L'équation algébrique (III-42) écrite pour chaque nœud de la colonne « i » est alors réduite à une équation qui contient seulement trois inconnues (ϕ_P, ϕ_N, ϕ_S).

Pour le nœud (i, j) du maillage, l'équation peut être écrite sous la forme d'une équation unidimensionnelle :

$$-A_S(i, j)\phi(i, j-1) + A_P(i, j)\phi(i, j) - A_N(i, j)\phi(i, j+1) = A_E(i, j)\phi(i+1, j) + A_W(i, j)\phi(i-1, j) + S_\phi(i, j) \quad (\text{III.44})$$

Et en posant :

- $a_j = A_P(i, j)$
- $b_j = A_N(i, j)$
- $c_j = A_S(i, j)$

$$d_j = A_E(i, j)\phi(i+1, j) + A_W(i, j)\phi(i-1, j) + S_\phi(i, j)$$

On obtient l'équation (III.45) sous la forme suivante :

$$-c_i \phi_{i-1} + a_i \phi_i - b_i \phi_{i+1} = d_i \quad (III.45)$$

avec :

$$c_1=0 \quad \text{et} \quad b_{JL}=0$$

Pour tous les noeuds $[j = 2, JL - 1]$ de la colonne i , l'équation (III.45) donne un système de la forme :

$$\begin{aligned} -c_2 \phi_1 + a_2 \phi_2 - b_2 \phi_3 &= d_1 \\ -c_j \phi_{j-1} + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} &= d_j \\ -c_{JL} \phi_{JL-1} + a_{JL} \phi_{JL} - b_{JL+1} \phi_{JL+1} &= d_{JL} \end{aligned} \quad (III.46)$$

Les valeurs de ϕ_1 et ϕ_{JL} sont connues (conditions aux limites).

La matrice associée au système est tridiagonale. On utilisera l'algorithme TDMA [20] (Algorithme de THOMAS) pour la résolution en réarrangeant toutes les équations du système (III.46) sous la forme :

$$\phi_j = \frac{c_j}{a_j} \phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \quad (III.47)$$

On obtient ce qui suit :

$$\phi_2 = \frac{\tilde{c}_2}{a_2} \phi_1 + \frac{\tilde{b}_2}{a_2} \phi_3 + \frac{\tilde{d}_2}{a_2} \quad (III.48)$$

$$\phi_3 = \frac{\tilde{c}_3}{a_3} \phi_2 + \frac{\tilde{b}_3}{a_3} \phi_4 + \frac{\tilde{d}_3}{a_3} \quad (III.49)$$

$$\phi_{JL} = \frac{\tilde{c}_{JL}}{a_{JL}} \phi_{JL-1} + \frac{\tilde{b}_{JL}}{a_{JL}} \phi_{JL+1} + \frac{\tilde{d}_{JL}}{a_{JL}} \quad (III.50)$$

Et puisque ϕ_1 est connue, on élimine ϕ_2 de (III.46) puis ϕ_3 de (III.47) et ainsi de suite ; on obtient une relation de récurrence pour ϕ_j telle que :

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{III.51})$$

Détermination de jP et jQ :

Pour le nœud $(i, j-1)$, on a :

$$\phi_{i-1} = P_{i-1} \phi_i + Q_{i-1} \quad (\text{III.52})$$

En remplaçant (III.52) dans (III.46) on trouve :

$$-c_i(P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1}) + a_i\phi_i + b_i\phi_{i+1} = d_i \quad (\text{III.53})$$

D'où on a :

$$(a_i - c_i P_{i-1})\phi_i = d_i + c_i \phi_{i-1} + b_i \phi_{i+1}$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{d_j - c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.54})$$

De (III.51) et (III.54) on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.55})$$

$$Q_j = \frac{d_j + c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.56})$$

Remarquons que pour $j=1$ on a $c_1=0$; l'équation (III.54) pour $j=1$ se réduit à :

$$\phi_1 = \frac{c_1}{a_1} \phi_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.57})$$

Ce qui correspond à la forme de l'équation (III.47).

Donc, on a :

$$P_1 = \frac{-1}{a_1}, Q_1 = \frac{-1}{a_1} \quad (\text{III.58})$$

Aussi, pour $j = JL$ on a : $b_{JL} = 0$, donc $P_{JL} = 0$

Et de l'équation (III.52) on a :

$$\phi_{j+1} = Q_{j+1} \quad (\text{III.59})$$

L'algorithme de THOMAS se résume comme suit :

• Triangulation (la matrice tri diagonale devient bidiagonale) :

1. Calculer P et Q de (III.58).

2. Calculer à partir de (III.55) et (III.56) les coefficients P et Q avec : $j = 2, JL$.

• Résolution du système à matrice bidiagonale :

3. On pose $\phi_{JL} = Q_{JL}$.

4. On utilise la relation (III.51) pour $j = JL - 1, JL - 2, \dots, 1$ afin d'obtenir les valeurs

$$\phi_{JL-1}, \phi_{JL-2}, \dots, \phi_1$$

III.9.2 Algorithme SIMPLER :

On a vu que la discrétisation a remplacé les équations aux dérivées partielles par des systèmes d'équations algébriques. La résolution de ce système présente quelques difficultés, parce que:

- Les coefficients apparaissant dans l'équation de discrétisation dépendent des variables ; donc l'équation n'est pas linéaire.
- Les termes de sources des équations de quantités de mouvement, impliquent les gradients de pression or nous ne disposons pas d'équation pour cette variable.

Grâce à l'algorithme SIMPLER (Patankar[20] (1980), on peut surmonter à ces difficultés. Cet algorithme a été utilisé dans nos calculs.

• Algorithme de solution

La technique de résolution est donnée comme suit :

- 1- Estimer un champ de vitesse.
- 2- Calculer les pseudo-vitesses notées par U_e , U_w , V_n , V_s à partir des équations discrétisées de quantité de mouvement suivant R et Z . Nous aurons ainsi :

$$\hat{U}_e = \sum_{nb=E,W,N,S} \frac{(A_{nb}U_{nb} + b_U)}{A_e} \quad (\text{III.60})$$

$$\hat{U}_w = \sum_{nb=E,W,N,S} \frac{(A_{nb}U_{nb} + b_U)}{A_w} \quad (\text{III.61})$$

$$\hat{V}_n = \sum_{nb=E,W,N,S} \frac{(A_{nb}U_{nb} + b_V)}{A_n} \quad (\text{III.62})$$

$$\hat{V}_s = \sum_{nb=E,W,N,S} \frac{(A_{nb}U_{nb} + b_V)}{A_s} \quad (\text{III.63})$$

A noter que b_U et b_V sont les termes de source ne contenant pas le terme de pression.

Les vitesses U_e , U_w , V_n , V_s aux niveaux des faces du volume de contrôle s'écrivent comme suit :

$$U_e = U(i, j) = \hat{U}(i, j) + \frac{(p_P - p_E)R_c(i)\Delta Z(j)}{A_p(i, j)} \quad (\text{III.64})$$

$$U_w = U(i-1, j) = \hat{U}(i-1, j) + \frac{(p_W - p_P)R_c(i)\Delta Z(j)}{A_p(i-1, j)} \quad (\text{III.65})$$

$$V_n = V(i, j) = \hat{V}(i, j) + \frac{(p_P - p_N)R_p(i)\Delta R(i)}{A_p(i, j)} \quad (\text{III.66})$$

$$V_s = V(i, j) = \hat{V}(i, j-1) + \frac{(p_S - p_P)R_p(i)\Delta R(i)}{A_p(i, j-1)} \quad (\text{III.67})$$

Avec :

$$\hat{U}(i, j) = \hat{U}_e \quad \hat{U}(i-1, j) = \hat{U}_w \quad \hat{V}(i, j) = \hat{V}_n \quad \text{et} \quad \hat{V}(i, j-1) = \hat{V}_s$$

$$A_e = A_p(i, j) \quad , \quad A_w = A_p(i-1, j) \quad , \quad A_n = A_p(i, j) \quad , \quad A_s = A_p(i, j-1)$$

3- L'intégration de l'équation de continuité sur le volume de contrôle (Fig.III.2) donne :

$$[R_e U_e - R_w U_w] \Delta Z + [V_n - V_s] R_p \Delta R = [R_c(i) U(i, j) - R_c(i-1) U(i-1, j)] \Delta Z(j) + [V(i, j) - V(i, j-1)] R_p(i) \Delta R(i) = 0$$

(III.68)

En injectant les relations de $U(i, j)$, $U(i-1, j)$, $V(i, j)$, $V(i, j-1)$ dans l'équation précédente, nous obtiendrons l'équation de pression de la forme suivante :

$$A_p P_p = \sum A_{nb} P_{nb} + \bar{S}_p$$

$$A_p P_p = A_e P_e + A_w P_w + A_n P_n + A_s P_s + \bar{S}_p \quad (III.69)$$

$$A_e = \frac{R_p(i) \Delta Z(j)}{A_p(i, j)} \quad (III.70)$$

$$A_w = \frac{R_p(i-1) \Delta Z(j)}{A_p(i-1, j)} \quad (III.71)$$

$$A_n = \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{A_p(i, j)} \quad (III.72)$$

$$A_s = \frac{R_p(i) \Delta R(i)}{A_p(i, j-1)} \quad (III.73)$$

$$A_p = A_e + A_w + A_n + A_s + A_p^0 \quad A_p^0 = \frac{R_p \Delta R \Delta Z}{\Delta \tau} \quad (III.74)$$

$$\bar{S}_p = [R_c(i) \hat{U}(i, j) - R_c(i-1, j) \hat{U}(i-1, j)] \Delta Z(j) + [\hat{V}(i, j) - \hat{V}(i, j-1)] R_p(i) \Delta R(i) \quad (III.75)$$

La troisième étape de l'algorithme consiste à calculer les coefficients A_e , A_w , A_n , A_s et \bar{S}_p donnés par les équations (III.70), (III.71), (III.72), (III.73), (III.74) et (III.75) de l'équation de pression et de résoudre l'équation (III.67) en utilisant l'algorithme TDMA.

4- On utilise les relations (III.62), (III.63), (III.64) et (III.65) pour obtenir le champ de vitesse.

5- On calcul ensuite les coefficients de l'équation d'énergie discrétisée.

6- On pourra alors, résoudre l'équation d'énergie en utilisant l'algorithme TDMA présenté pour obtenir la température θ .

7- On teste la convergence, en retournant à l'étape 2 si elle n'est pas obtenue.

III.9.3 Critère de convergence :

En régime permanent, la convergence de nos calculs a été vérifiée pour chaque incrément de temps par la comparaison des paramètres de l'écoulement (U, V, θ) de deux itérations successives et qu'elle soit négligeable et aussi par le calcul du bilan des flux traversant les parois verticales de la cavité :

$$\overline{Nu}_{z=0} = \sum_{j=2}^{jL-1} \left[\frac{\theta(i,1) - \theta(j,2)}{dZ(1)} \right] R_p(i) \Delta Z(j) \quad (\text{III.76})$$

$$\overline{Nu}_{z=A} = \sum_{j=2}^{jL-1} \left[\frac{\theta(i, jL-1) - \theta(i, jL-2)}{dZ(jL-1)} \right] R_p(i) \Delta Z(j) \quad (\text{III.77})$$

On définit le nombre de Nusselt moyen tel que :

$$\overline{Nu}_{z=0,A} = \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial Z} R dR \quad (\text{III.78})$$

La convergence est satisfaite quand :

$$\overline{Nu}_{z=0} + S_o \text{Pr} A = \overline{Nu}_{z=A} \quad (\text{III.79})$$

« CHAPITRE IV »
« RESULTATS ET DISCUSSION »

RESULTATS ET DISCUSSIONS

Les résultats qui sont représenté dans notre étude de la convection naturelle dans une cavité cylindrique sous l'effet du chauffage volumétrique avec un rapport d'aspect ($A = H/r$), (H , r hauteur et rayon du cylindre) sont répartis en deux : la première partie concerne l'écoulement de la convection naturelle ou le nombre de Grashof Gr sera varié dans la gamme ($10^3, 10^4, 10^5$) avec trois rapports d'aspect ($A=0.5, 1$ et 2), et la deuxième partie consiste à déterminer l'effet de la source de chaleur interne sur l'écoulement et le transfert de chaleur. Dans cette partie, le nombre de Grashof est fixé à $Gr=10^5$ mais on varie le paramètre de la source de chaleur interne S_Q dans l'intervalle de 25 à 100.

Les maillages utilisé sont non-uniforme dans les directions radiale R et axiale Z , raffiné près de la paroi latérale, l'axe de symétrie et les disques bas et haut. Ces maillages est composé de :

Pour $A=0.5$

72 points suivant la direction radiale ($IL = 72$)

52 points suivant la direction axiale ($JL = 52$)

Pour $A=1$

72 points suivant la direction radiale ($IL = 72$)

72 points suivant la direction axiale ($JL = 72$)

Pour $A=2$

72 points suivant la direction radiale ($IL = 72$)

102points suivant la direction axiale ($JL = 102$)

L'ensemble des résultats obtenus sera représenté par des fonctions de courant, des isothermes et des profiles de vitesse radiales et axiales.

Les lignes de courant sont tracées à l'aide de la fonction de courant Ψ définie par :

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

L'intégration de cette équation nous donne le débit à travers la surface $R_p \cdot \Delta Z$:

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = U \cdot R_p \cdot \Delta Z$$

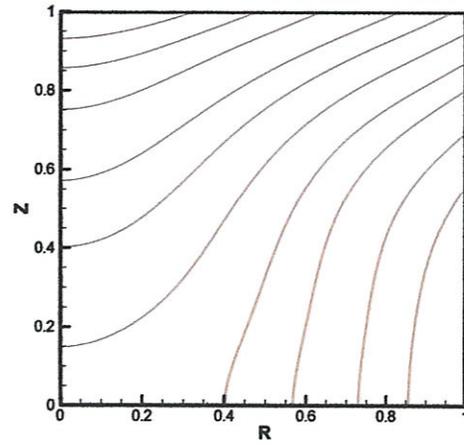
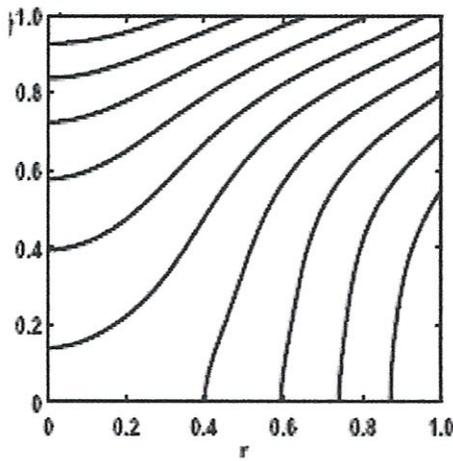
IV.1 Validation du code :

Avant de présenter nos résultats, la première étape consiste à valider notre code de calcul développé en comparant nos résultats avec ceux publiés par d'autres auteurs. A cet effet, nous avons gardé les mêmes paramètres de contrôle utilisés par ces auteurs.

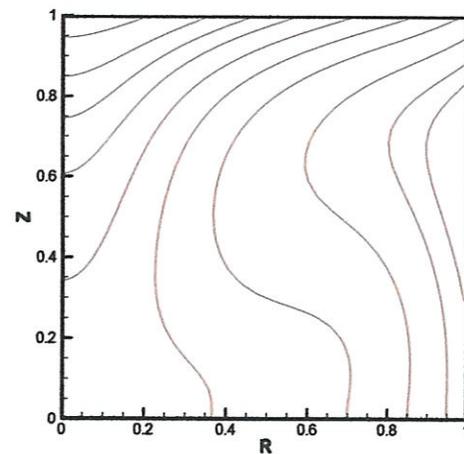
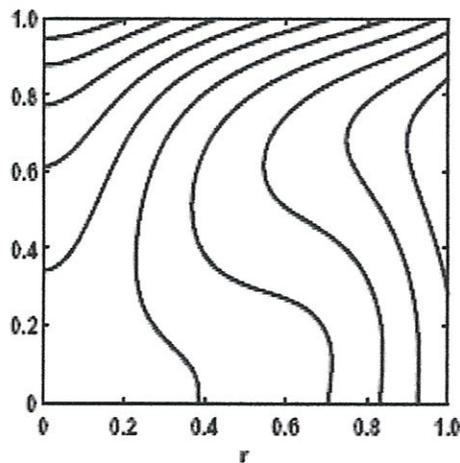
Notre comparaison a été faite avec les résultats numériques investigués par Lin zheng et al.^[18] qui a considéré l'écoulement axisymétrique de la convection naturelle de l'air ($Pr=0,7$) dans une enceinte cylindrique soumise à des flux de chaleur pour ($Ra=10^3, 10^4$ et 10^5)

Résultats de Zheng et al.^[18]

Nos résultats



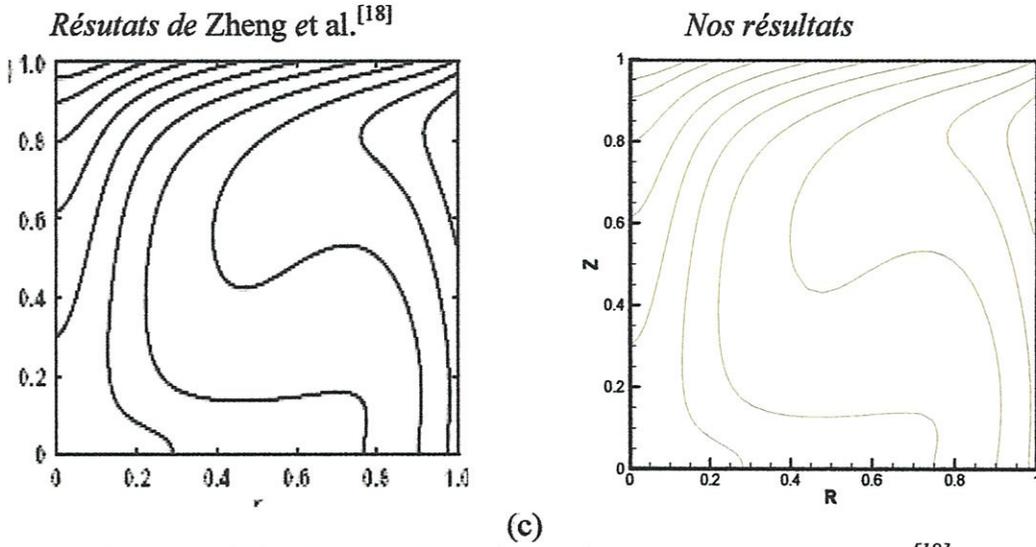
(a)



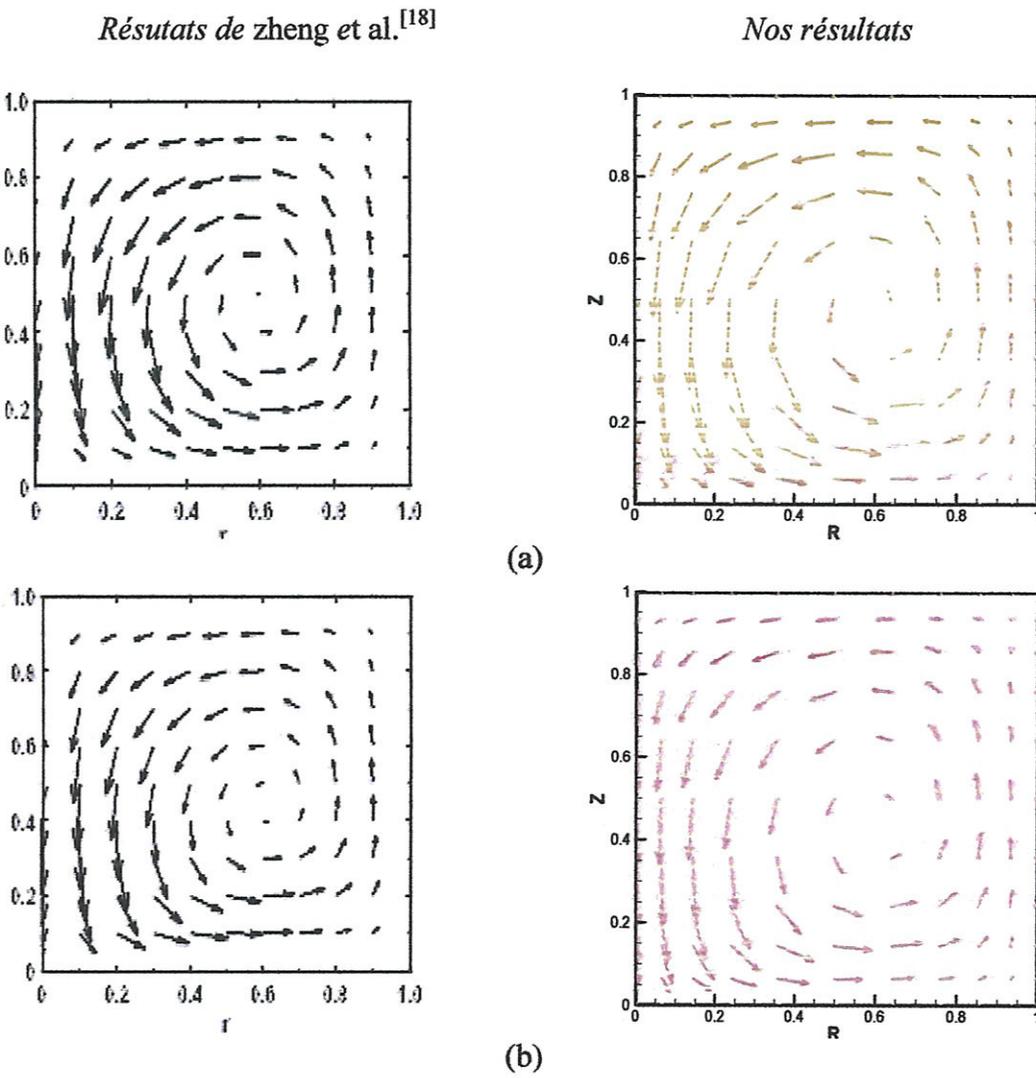
(b)

Résultats de Zheng et al.^[18]

Nos résultats



(c)
Figure (IV.1): Comparaison des isothermes avec la référence ^[18]
 (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$, (c) $Ra=10^5$



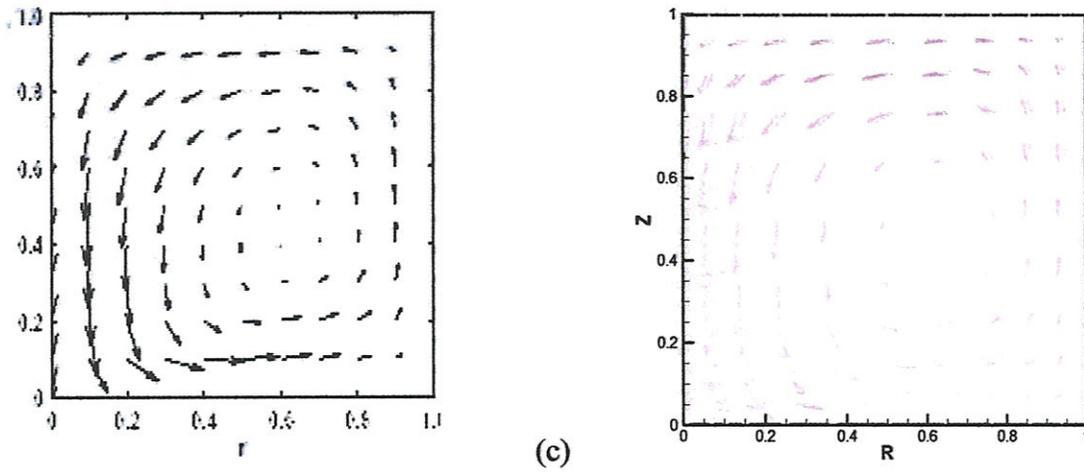


Figure (IV.2): Comparaison les vecteurs de vitesses avec la référence [18]
 (a)Ra=10³,(b)Ra=10⁴,(c)Ra=10⁵

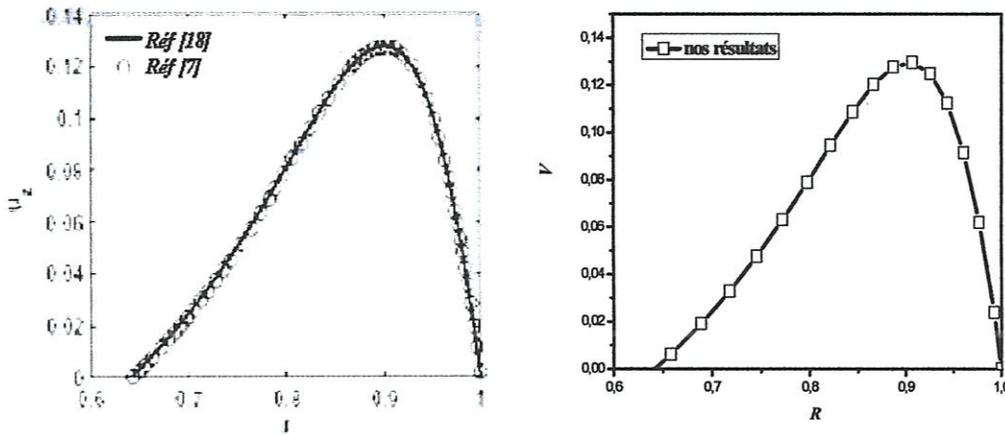


Figure (IV.3): Comparaison des profils de la vitesse $V (U_z)$ au milieu de l'enceinte en fonction de R avec la référence [18]

Ra		V_{max}
10^3	Ref[7]	0.2391
	Ref[18]	0.2397
	Nos résultats	0.2399
10^4	Ref[7]	0.4142
	Ref[18]	0.4135
	Nos résultats	0.4142
10^5	Ref[7]	0.4552
	Ref[18]	0.4593
	Nos résultats	0.4573

Tableau (IV.1) : Comparaison des vitesses V_{max} avec les références [18]

IV.2 Effet du maillage :

La précision des résultats numériques dépend fortement du maillage choisi. A cet effet, nous avons examiné l'influence du maillage. Nous avons considéré le cas d'un écoulement de la convection naturelle dont le rapport d'aspect A , le nombre de Prandtl et le nombre de Grashof Gr sont respectivement $A=1$, $Pr=0.0321$ et $Gr=10^5$. Plusieurs grilles non uniformes en progression géométrique ($\Delta R(i+1) / \Delta R(i) = 1.05$ et $\Delta Z(i+1) / \Delta Z(i) = 1.05$ dans les directions R et Z) sont prises en compte (32×32 , 72×72 , 102×102) (voir Fig.(IV.4)).

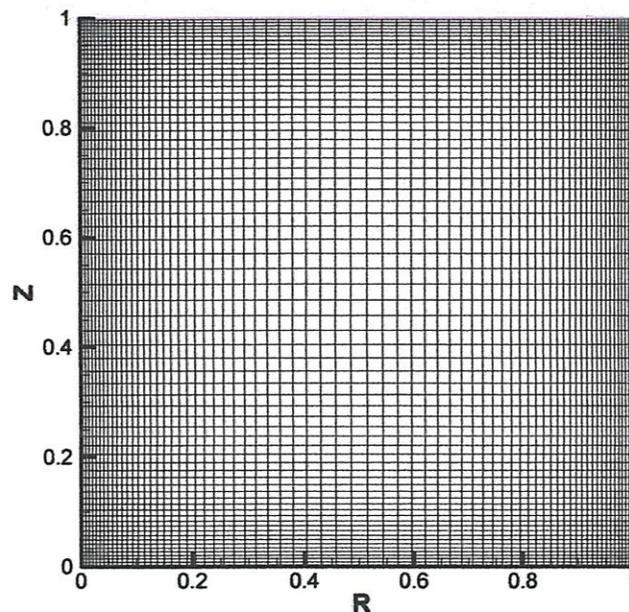


Figure (IV.4): Maillage utilisé (72×72), $IL = 72$ dans la direction R et $JL = 72$ dans la Direction Z .

L'examen de ces courbes nous permet de conclure que c'est assurément les grilles (32×32), (72×72) et (102×102) qui nous permettent d'avoir une meilleure information sur la nature de l'écoulement. Ces résultats ont orienté le choix du maillage définitif vers la grille (72×72) ; vu que le temps d'exécution du programme pour la grille (102×102) est plus grand que la grille choisie.

$A=1$						
	Ψ_{max}	Ψ_{min}	$\overline{Nu} _{Z=0}$	$\overline{Nu} _{Z=A}$	U_{max}	V_{max}
32X32	1.4535843E-04	-1.691220	1.001144	1.001223	13.29079	25.36041
72X72	1.7311065E-04	-4.828600	1.007849	1.008080	39.25664	48.65320
102X102	1.7734378E-04	-5.157885	1.008836	1.008970	41.54551	49.99537

Tableau (VI.2): Comparaison des paramètres d'écoulement pour différentes grilles du maillage et rapport d'aspect $A=1$

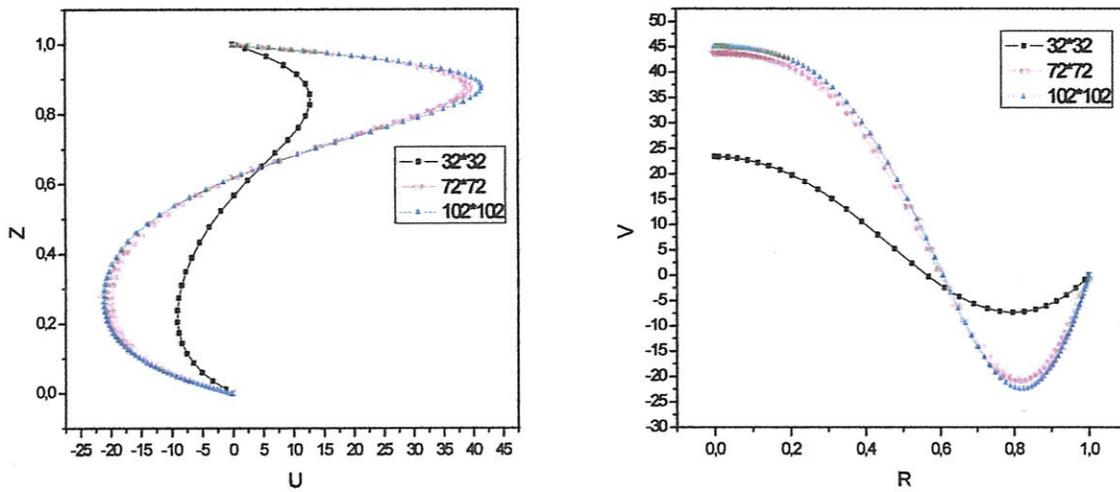


Figure (IV.5) : La variation des vitesses (U,V) en fonction de Z,R

IV.3.Effet de l'augmentation du nombre de Grashof :

Dans cette partie, nous nous intéressons aux résultats sans la présence de la source de chaleur interne.

IV.3.1.Sur le champ d'écoulement :

Pour voir l'effet de l'augmentation du nombre de Grashof pour différents rapports d'aspect sur la structure de l'écoulement, nous avons varié ce nombre dans la gamme de 10^3 à 10^5 .

D'après la figure (IV.6),(IV.7)et (IV.8), on remarque pour $A=0.5$ que la structure de l'écoulement est bicellulaire. Une cellule qui se trouve dans le coté droite de la cavité tourne dans le sens horaire et l'autre cellule qui se trouve à gauche tourne dans le sens inverse. Pour $A=1$ et quelle que soit la valeur de Gr , l'écoulement est présenté par une seule cellule. La même structure est trouvée pour ($A=2$) ou le centre de cellule se déplace vert le haut lorsqu'on augmente le nombre de Grashof ($Gr=10^5$). Cela est expliqué par l'effet de confinement de la configuration. dans les cas d'une enceinte chauffée par le bas (Convection de Rayleigh-Bénard), le nombre de rouleaux augmente avec la longueur de la cavité (R).

IV.3.2.Sur le champ thermique :

En examinant la figure (IV.9),(IV .10)et(IV .11) qui illustre les champs thermiques pour différents nombres de Grashof, Pour des faibles nombres de Gr , on remarque qu'il y a une stratification thermique dans la cavité dont les isothermes sont parallèles et alignés avec les parois horizontale. Ceci montre que le régime est conductif. Lorsque $Gr=10^5$, les isothermes commencent à se déformer aux rapports d'aspect ($A=1,2$) et par conséquent le régime devient convectif (figure IV .10 et 11 c).

IV.3.3. Sur les paramètres de l'écoulement :

D'après les tableaux (VI.3),(VI.4) et (VI.5), on remarque que les paramètres de l'écoulement augmentent à l'augmentation du nombre de Grashof. Nous pouvons relier cette augmentation aux forces de flottabilité qui sont devenues importantes par rapport aux forces visqueuses. Ceci a engendré une circulation et une accélération intense des particules de fluide dans la cavité et une augmentation du taux de transfert thermique par convection.

En examinant les figure (VI.12a), (VI.13a) et(VI.14a) qui représentent respectivement les profils de vitesse radiale U en fonction de l'axe Z , on remarque le profil est parallèle a l'axe de

symétrie $R=0$ pour des faibles valeurs de nombre de Grashof. Par contre L'augmentation Gr a provoqué une élévation de la valeur maximale de la vitesse radiale.

D'après la figure (VI.12b), (VI.13b) et (VI.14b), le profil de la vitesse axial V aux milieux de la cavité est devenu linéaire est perpendiculaire a l'axe de symétrie pour des valeurs faibles de Gr . Pour des valeurs croissantes de Gr , ce profil change et présente plusieurs valeurs maximales.

$A=0.5$						
Gr	Ψ_{max}	Ψ_{min}	$\overline{Nu} _{Z=0}$	$\overline{Nu} _{Z=A}$	U_{max}	V_{max}
10^3	3.775175e-08	-3.065398e-07	2.000003	1.999999	2.9661198e-06	3.4873221e-06
10^4	1.8737539e-07	-3.297654e-06	1.999999	2.000000	3.2033844e-05	2.3024359e-05
10^5	6.9754678e-06	-3.297654e-06	2.000000	2.000000	3.8324401e-04	4.9940142e-04

Tableau (VI.3): Paramètres de l'écoulement pour le rapport d'aspect ($A=0.5$) et différents nombres de Grashof ($Gr=10^3$, 10^4 et 10^5).

$A=1$						
Gr	Ψ_{max}	Ψ_{min}	$\overline{Nu} _{Z=0}$	$\overline{Nu} _{Z=A}$	U_{max}	V_{max}
10^3	7.8262525e-09	-7.760933e-05	1.000028	0.9999865	5.155545e-04	1.295163e-03
10^4	9.8393919e-08	-1.386963e-03	1.000019	0.9999928	9.148591e-03	2.294791e-02
10^5	6.6320157e-05	-2.656103	1.002476	1.002907	21.60773	35.02320

Tableau (VI.4): Paramètres de l'écoulement pour le rapport d'aspect ($A=1$) et différents nombres de Grashof ($Gr=10^3$, 10^4 et 10^5).

$A=2$						
Gr	Ψ_{max}	Ψ_{min}	$\overline{Nu} _{Z=0}$	$\overline{Nu} _{Z=A}$	U_{max}	V_{max}
10^3	1.892471e-08	-5.001089e-04	0.5012254	0.4987873	2.077244e-03	8.327986e-03
10^4	2.051329e-08	-6.069235e-04	0.5014648	0.4985649	2.549443e-03	1.007205e-02
10^5	5.611919e-04	-10.03516	0.5155494	0.5214701	74.76526	107.7102

Tableau (VI.5): Paramètres de l'écoulement pour le rapport d'aspect ($A=2$) et différents nombres de Grashof ($Gr=10^3, 10^4$ et 10^5).

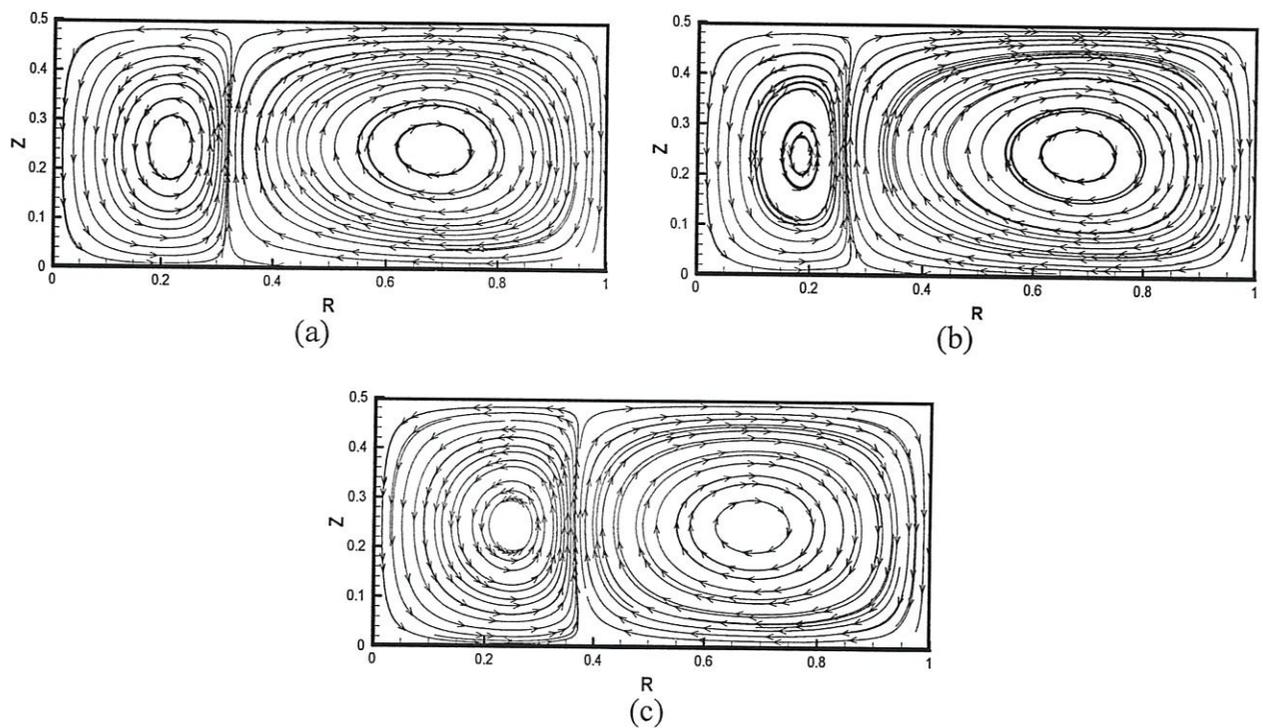


Figure (IV.6) : Fonctions de courant pour différent nombres de Grashof ($Gr=10^3$ (a), 10^4 (b), 10^5 (c)) et rapport d'aspect ($A=0.5$).



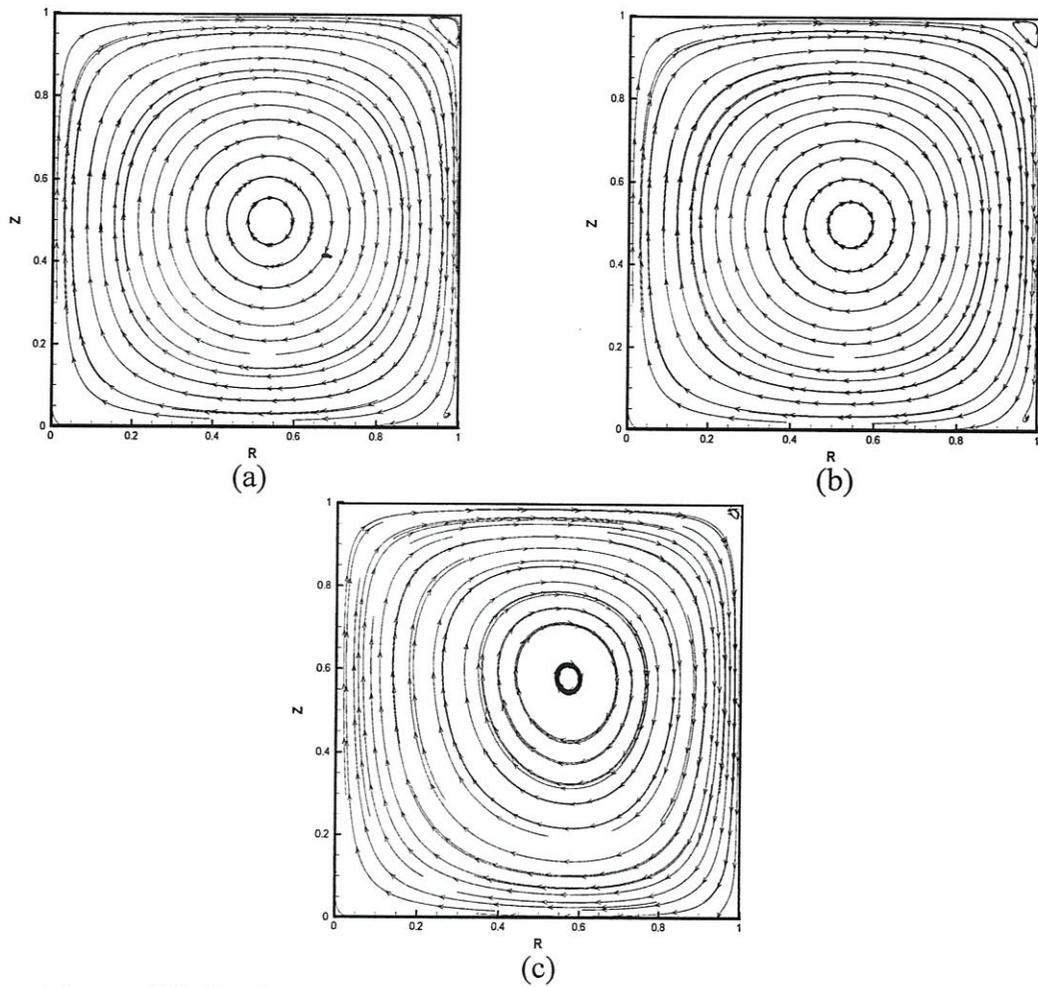


Figure (IV.7) : Fonctions de courant pour différent nombres de Grashof ($Gr=10^3$ (a), 10^4 (b), 10^5 (c)) et rapport d'aspect ($A=1$).

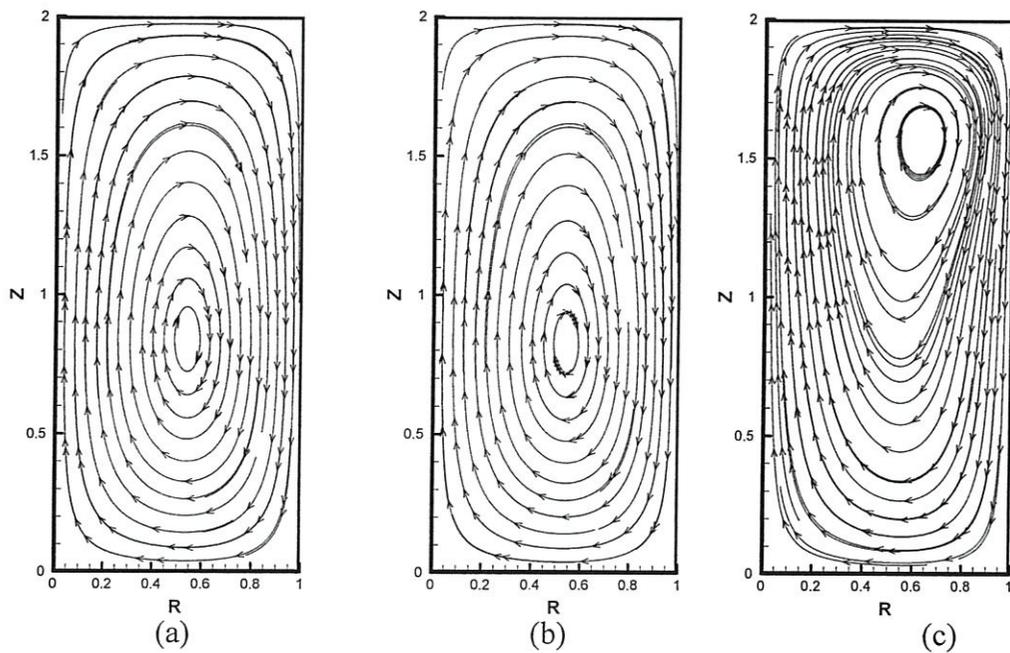


Figure (IV.8) : Fonctions de courant pour différent nombres de Grashof ($Gr=10^3$ (a), 10^4 (b), 10^5 (c)) et rapport d'aspect ($A=2$)

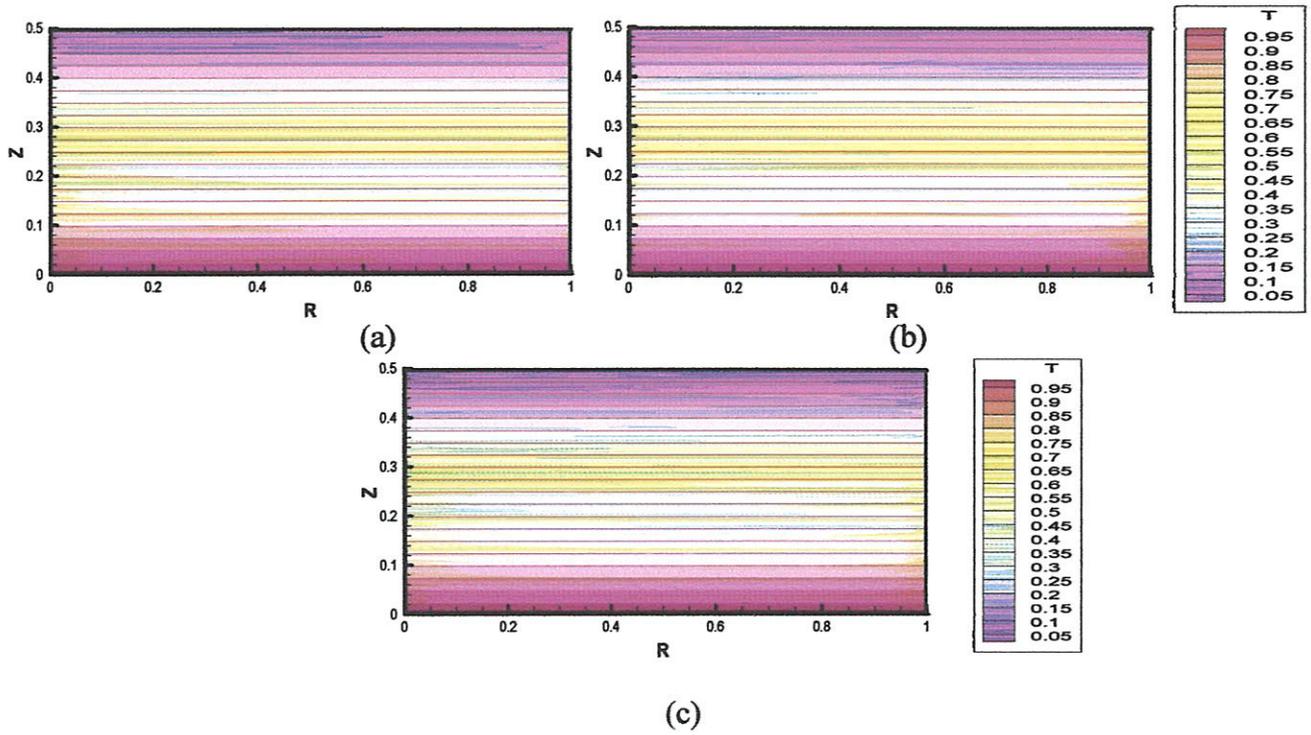
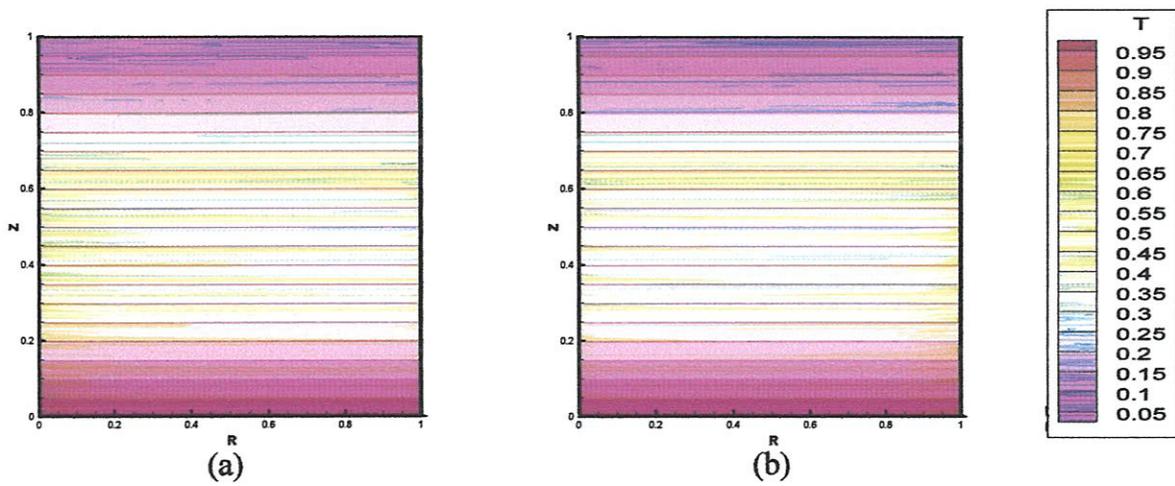


Figure (IV.9) : Isothermes pour different nombres de Grashof ($Gr=10^3$ (a), 10^4 (b), 10^5 (c)) et rapport d'aspect ($A=0,5$).



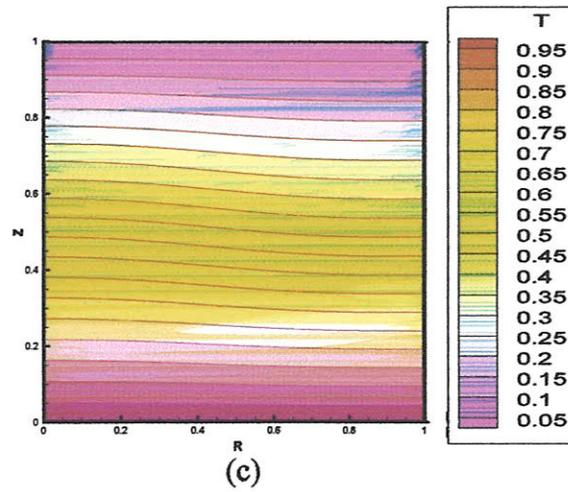


Figure (IV.10) : Isothermes pour différent nombres de Grashof ($Gr=10^3$ (a), 10^4 (b), 10^5 (c)) et rapport d'aspect ($A=1$).

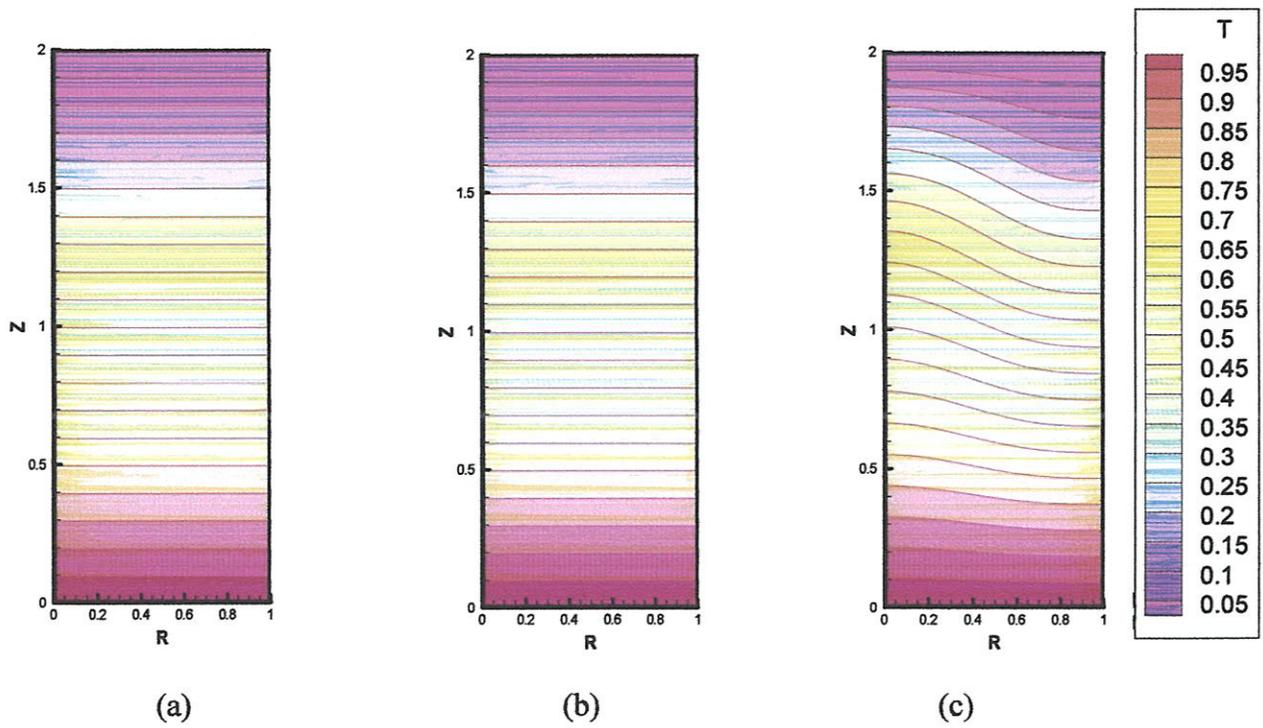
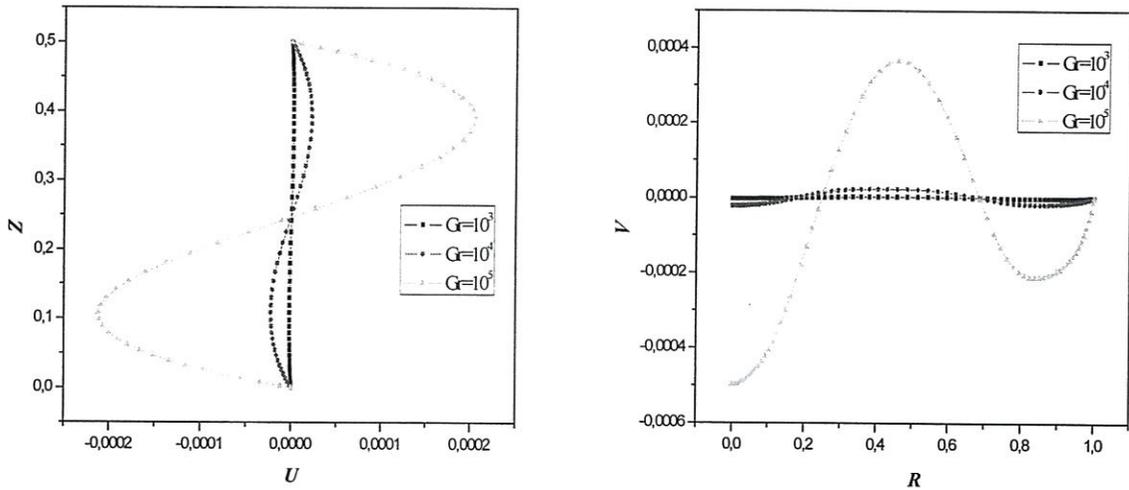
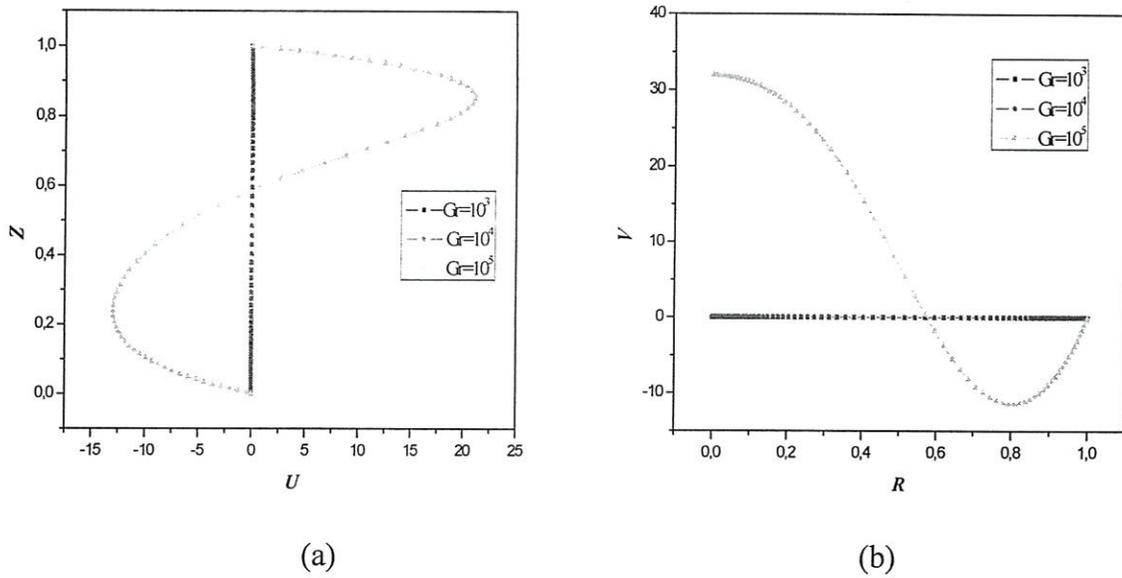


Figure (IV.11) : Isothermes pour différent nombres de Grashof ($Gr=10^3$ (a), 10^4 (b), 10^5 (c)) et rapport d'aspect ($A=2$).



(a) (b)
Figure (IV.12): Variations des vitesses (U, V) pour $Gr=10^3, 10^4$ et 10^5 et rapport d'aspect ($A=0,5$)
 (a) U au point $R=1/2$ en fonction de Z
 (b) V au point $Z=A/2$ en fonction de R



(a) (b)
Figure (IV.13): Variations des vitesses (U, V) pour $Gr=10^3, 10^4$ et 10^5 et rapport d'aspect ($A=1$)
 (a) U au point $R=1/2$ en fonction de Z
 (b) V au point $Z=A/2$ en fonction de R

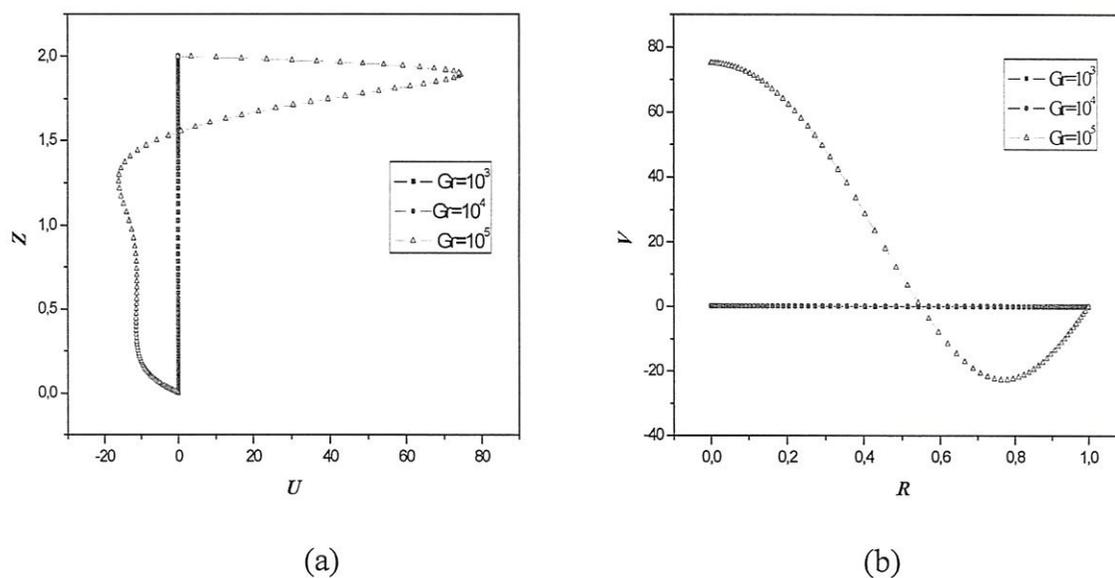


Figure (IV.14): Variations des vitesses (U, V) pour $Gr=10^3, 10^4$ et 10^5 et rapport d'aspect ($A=2$)
 (a) U au point $R=1/2$ en fonction de Z
 (b) V au point $Z=A/2$ en fonction de R

IV .4. Effet de la source de chaleur interne:

L'effet du chauffage volumétrique constant est considéré dans cette partie

IV.4.1 Sur le champ de l'écoulement :

D'après les figures (IV.15),(IV16) et (IV.17) qui représentent les trajectoires de la fonction de courant pour ($A=0.5$, 1 et 2) et pour différents valeurs de la source chaleur interne, on remarque que l'écoulements est constitué par deux cellules pour $A=0.5$, par contre pour $A=1$, on remarque qu'une seule cellule principale occupe la totalité de la cavité. Pour $A=2$, on remarque un décalage important de la cellule principale vers la zone froide à cause de l'augmentation de la valeur de la source la chaleur interne et la naissance d'une cellule secondaire près de la paroi adiabatique. On constate que la source de chaleur a intensifié l'écoulement sans faire des changements significatifs sur sa structure.

IV.4.2 Sur le champ thermique :

Les isothermes illustrés sur la figure (IV.18), pour le rapport d'aspect ($A=0.5$) et pour différentes valeurs de la source de chaleur interne indiquent que le régime est conductif dont les lignes sont parallèles aux parois isothermes, par contre pour $A=1$ et 2 (figures IV.19 et 20), une déformation importes des isothermes due à l'augmentation de la source interne. On constate que la présence d'une source de chaleur interne n'a aucune influence sur le champ thermique lorsque le rapport d'aspect $A=0.5$. La chaleur interne supplémentaire dans le fluide a tendance d'augmenter la température des couches liquides dans l'enceinte. Cet effet détermine également la forme des lignes profilées des isothermes ($A=1$ et 2) et le champ thermique acquiert un maximum dans la région centrale de l'enceinte. La température du fluide dans la cavité devient plus grande que celle des parois horizontales lorsqu'on augmente la génération de la source. L'augmentation de celle-ci entraîne une diminution du nombre de Nusselt près de la paroi chaude contrairement à la paroi froide. On constate que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la source. Ce résultat est vérifié à partir de l'équilibre thermique dans l'enceinte ou le flux de chaleur généré par la source de chaleur reste constant.

IV.4.. Sur les paramètres de l'écoulement :

En examinant les tableaux (IV.6). (VI.7) et (VI.8), on remarque une augmentation importantes des vitesses radiales et axiales. Nous constatons que pour des valeurs élevées du S_Q ,

le chauffage volumétrique engendre une augmentation de la circulation de l'écoulement par l'effet de la flottabilité.

En examinant les figure (VI.21a), (VI.22a) et (VI.23a), on remarque les profils de la vitesse radiale U est augmenté avec la source chaleur.

D'après la figure (VI.21b), (VI.22b) et (VI.23b), le profil de la vitesse axial V au milieu de la cavité est devenu linéaire est perpendiculaire a l'axe de symétrie pour des valeurs faibles de Gr . Nous reions ce résultat par la présence d'une seule cellule de recirculation. Pour des valeurs croissantes de Gr , ce profil change et présente plusieurs valeurs maximales.

$A=0.5$						
S_Q	Ψ_{max}	Ψ_{min}	$\overline{Nu} _{Z=0}$	$\overline{Nu} _{Z=A}$	U_{max}	V_{max}
25	6.340304E-06	-4.141674e-05	1.799376	2.200625	3.939191E-04	4.703554E-04
50	6.6942061E-06	-4.0209274e-05	1.598743	2.401250	3.8887779E-04	5.3032971E-04
75	6.6580728E-06	-4.1506446e-05	1.398128	2.601875	4.0047732E-04	5.1114190E-04
100	6.9124435E-06	-4.0465588E-05	1.197501	2.802500	3.9374072E-04	5.1690853E-04

Tableau (VI.6): Paramètres de l'écoulement pour le rapport d'aspect ($A=0,5$) et différents valeur de la source de chaleur ($S_Q=25, 50, 75$ et 100)

$A=1$						
S_Q	Ψ_{max}	Ψ_{min}	$\overline{Nu} _{Z=0}$	$\overline{Nu} _{Z=A}$	U_{max}	V_{max}
25	7.920778E-05	-2.984627	0.6018883	1.404954	24.80104	37.49867
50	9.5479030E-05	-3.387972	0.2015740	1.807316	28.59759	40.17733
75	1.1614017E-04	-3.871697	-0.1983677	2.210125	33.02975	43.05349
100	1.4284960E-04	-4.475302	-0.5977946	2.613555	38.11241	46.01971

Tableau (VI.7): Paramètres de l'écoulement pour le rapport d'aspect ($A=1$) et différents valeur de la source de chaleur($S_Q=25, 50, 75$ et 100)

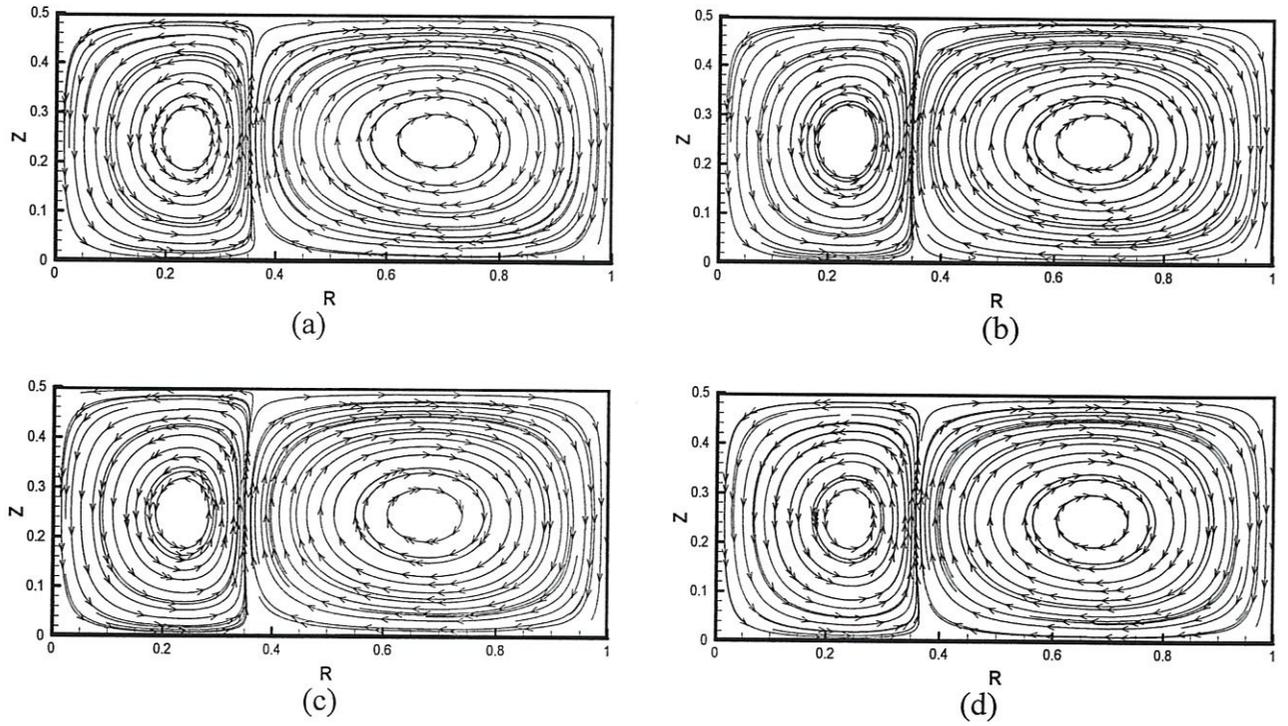
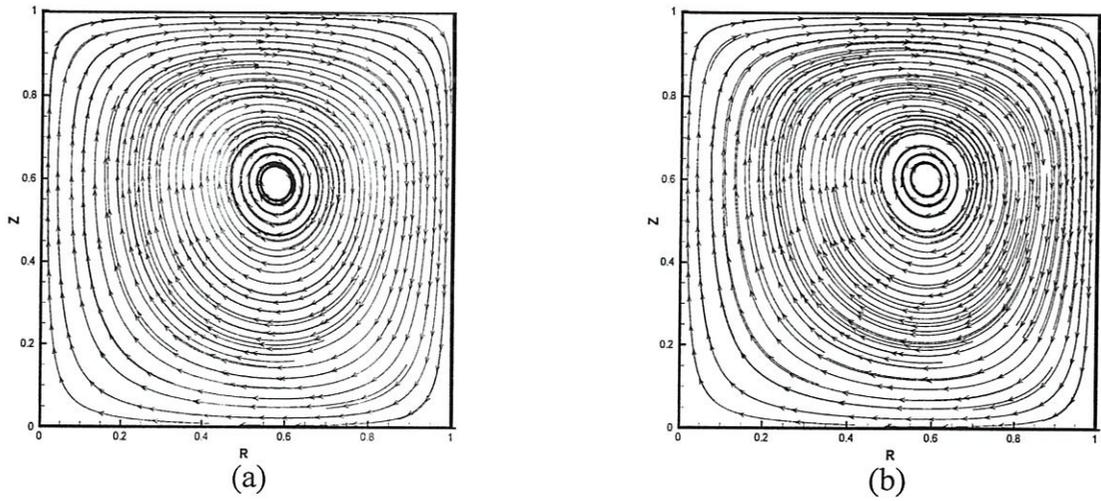


Figure (IV.15) : Fonctions de courant pour ($S_Q=25(a), 50(b), 75(c), 100(d)$), différent rapport d'aspect ($A=0.5$) et le nombre de Grashof ($Gr=10^5$),



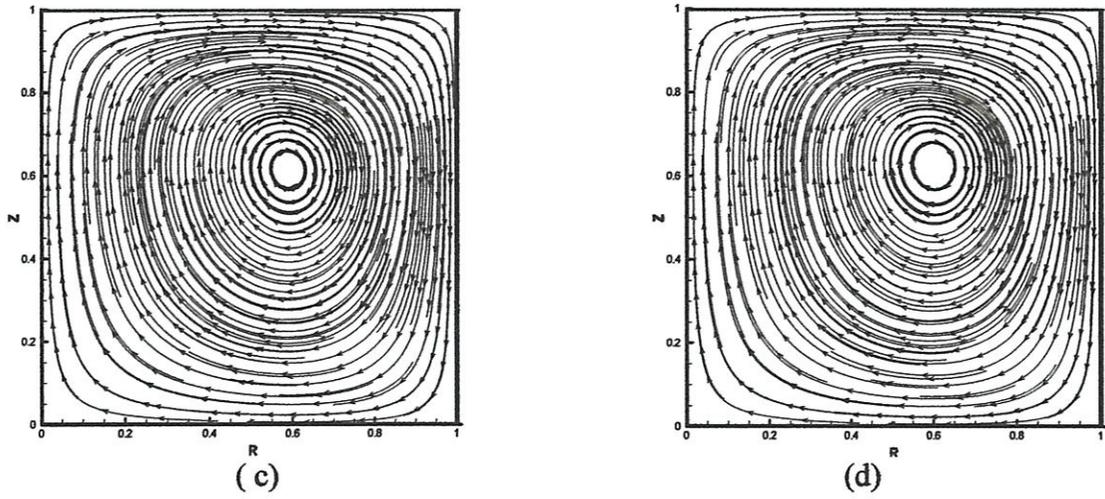


Figure (IV.16) : Fonctions de courant pour ($S_0=25(a), 50(b), 75(c), 100(d)$), différent rapport d'aspect ($A=1$) et le nombre de Grashof ($Gr=10^5$).

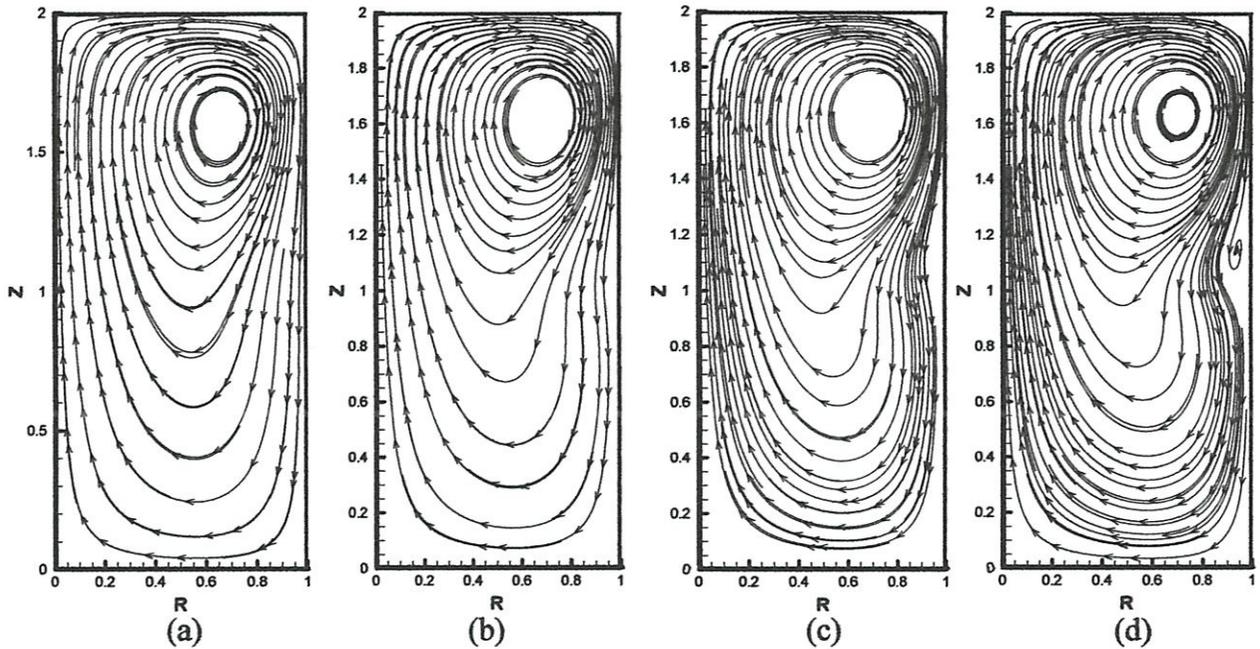


Figure (IV.17) : Fonctions de courant pour ($S_0=25(a), 50(b), 75(c), 100(d)$), différent rapport d'aspect ($A=2$) et le nombre de Grashof ($Gr=10^5$).

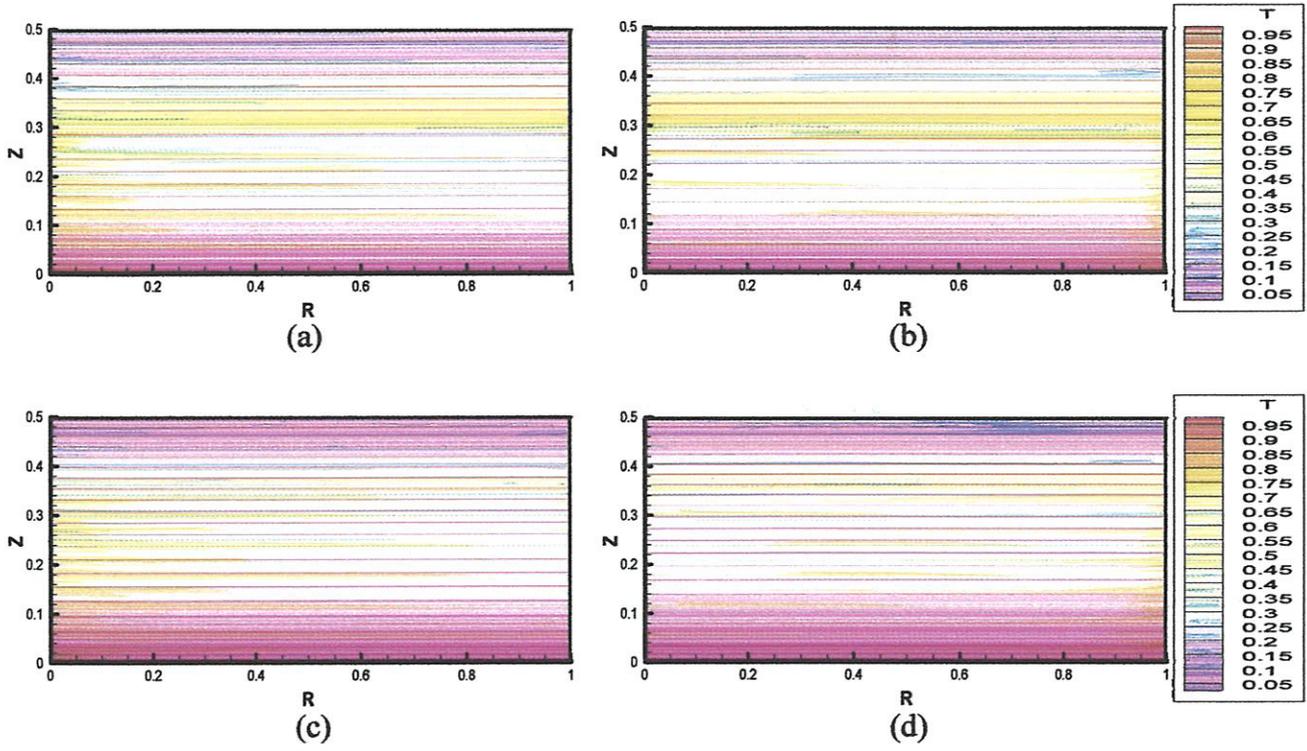
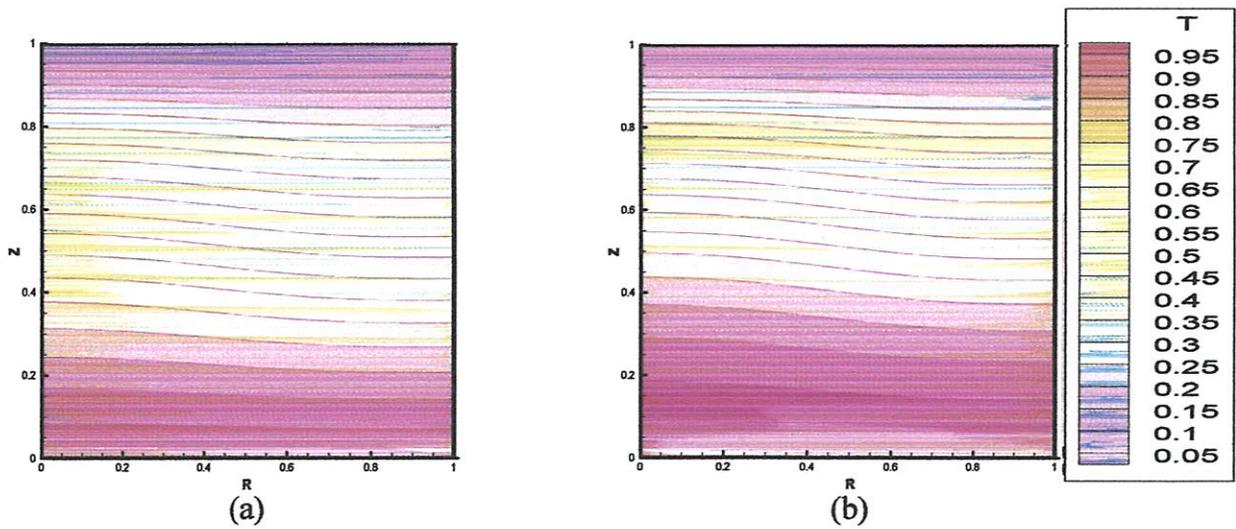


Figure (IV.18) : Les isothermes pour ($S_Q=25(a), 50(b), 75(c), 100(d)$) et différent rapport d'aspect ($A=0, 5$) et le nombre de Grashof ($Gr=10^5$).



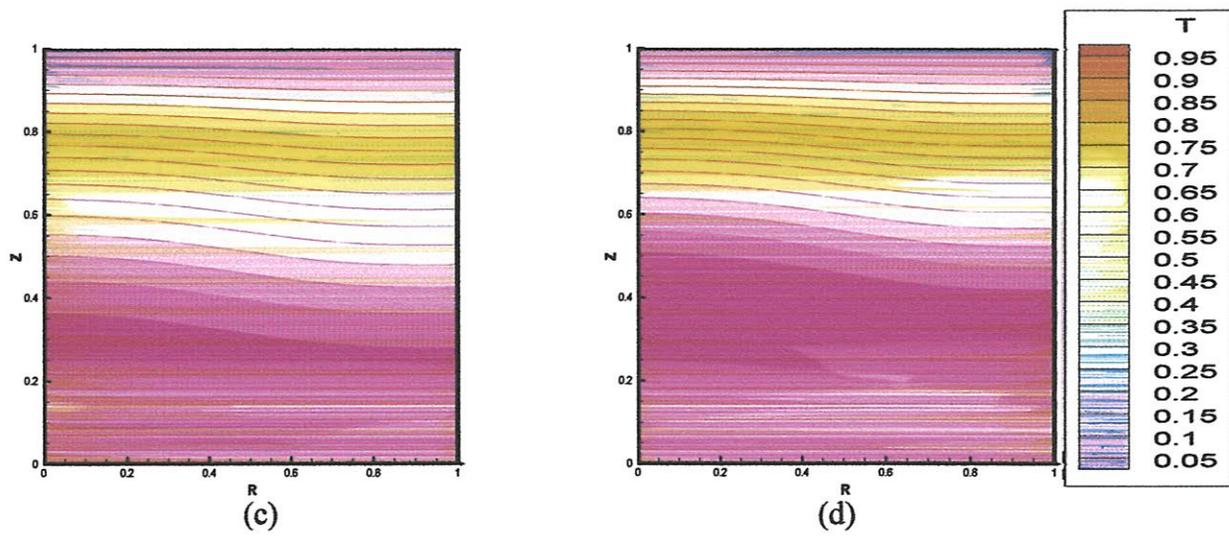


Figure (IV.19) : Les isothermes pour ($S_0=25(a), 50(b), 75(c), 100(d)$), différent rapport d'aspect ($A=1$) et le nombre de Grashof ($Gr=10^5$),

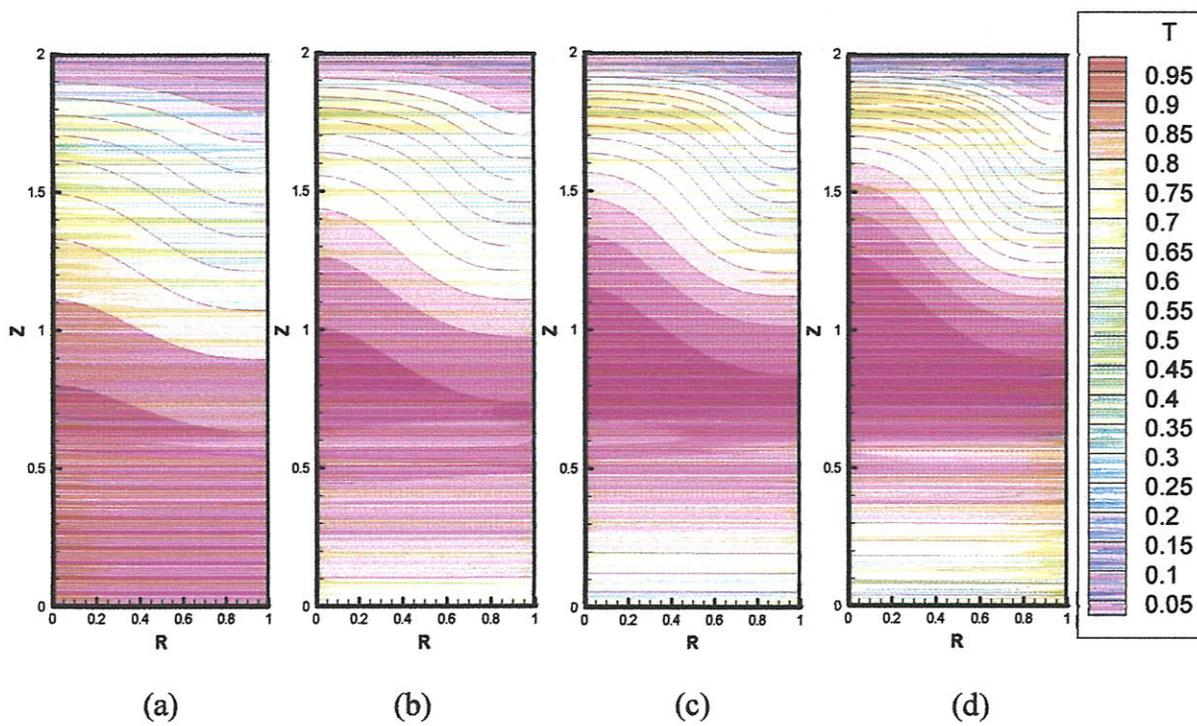


Figure (IV.20) : Les isothermes pour ($S_0=25(a), 50(b), 75(c), 100(d)$), différent rapport d'aspect ($A=2$) et le nombre de Grashof ($Gr=10^5$)

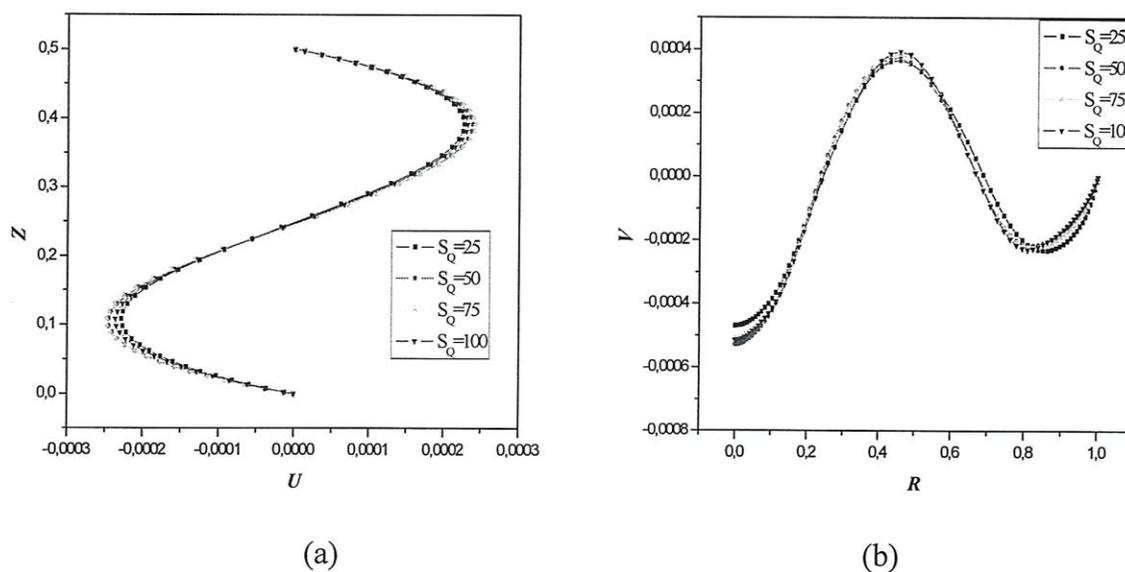


Figure (IV.21): Variations des vitesses (U, V) pour $S_Q=25, 50, 75$ et 100 et rapport d'aspect ($A=0.5$), $Gr=10^5$
 (a) U au point $R=1/2$ en fonction de Z
 (b) V au point $Z=1/2$ en fonction de R

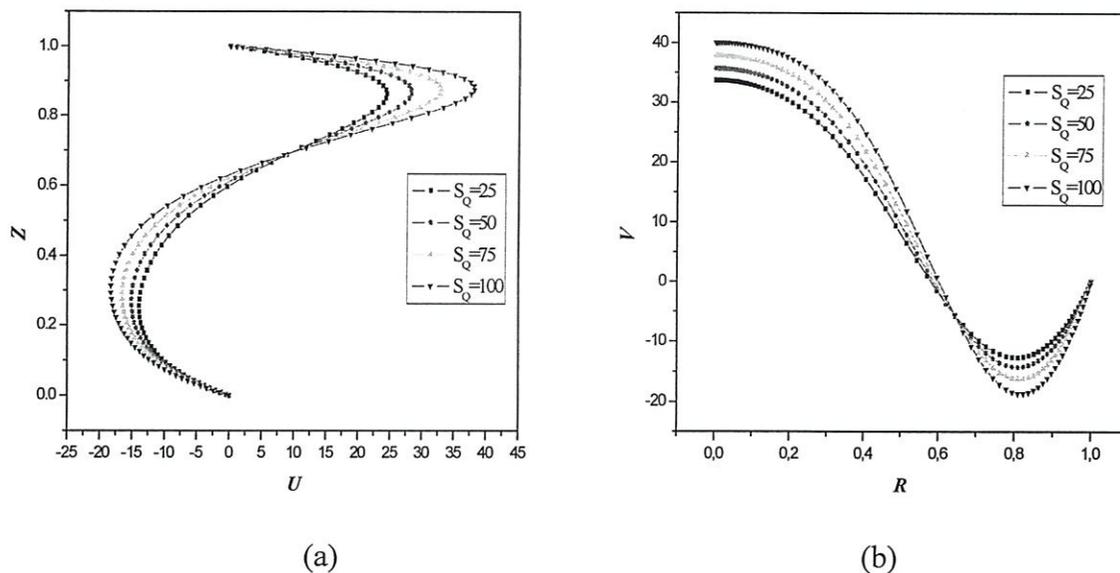


Figure (IV.22): Variations des vitesses (U, V) pour $S_Q=25, 50, 75$ et 100 et rapport d'aspect ($A=1$), $Gr=10^5$
 (a) U au point $R=1/2$ en fonction de Z
 (b) V au point $Z=1/2$ en fonction de R

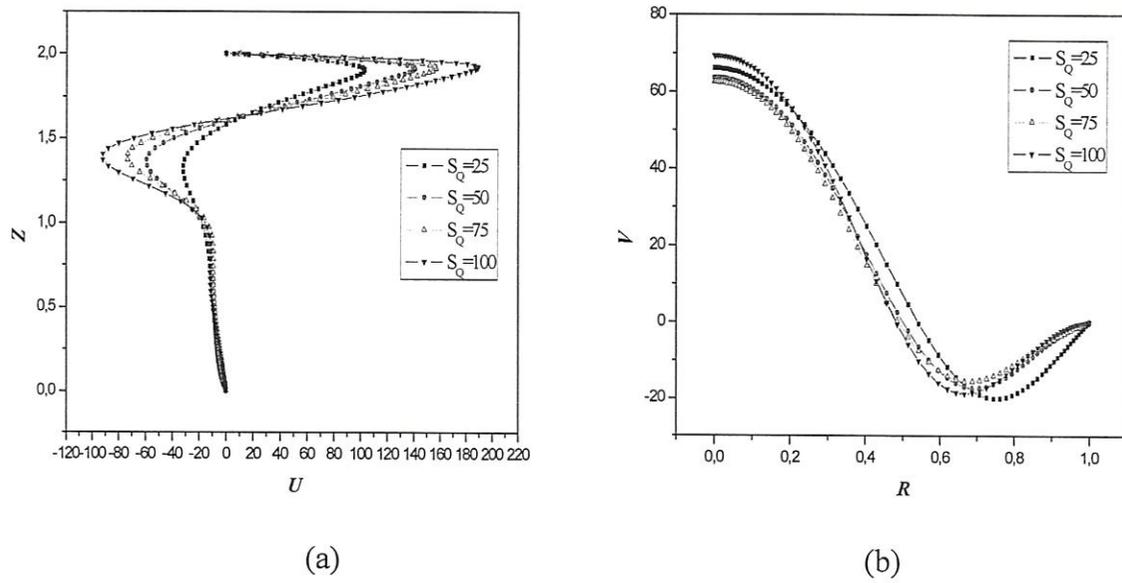


Figure (IV.23): Variations des vitesses (U, V) pour $S_Q=25, 50, 75$ et 100 et rapport d'aspect ($A=2$), $Gr=10^5$
 (a) U au point $R=1/2$ en fonction de Z
 (b) V au point $Z=1/2$ en fonction de R

CONCLUSION

L'écoulement axisymétrique de la convection naturelle dans une cavité cylindrique avec la présence d'une source de chaleur interne (un chauffage volumétrique) d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.0321$) a été étudié. Les équations gouvernantes à savoir l'équation de continuité et de quantité de mouvement et d'énergie sont résolues par la méthode des volumes finis.

Les résultats obtenus ont montré que l'augmentation du nombre de Gr pour différents rapports d'aspects a engendré des changements sur la structure de l'écoulement et le champ thermique.

La présence d'une source de chaleur volumétrique uniforme dans une cavité cylindrique chauffée par le bas a permis de dégager les conclusions suivantes :

- La source de chaleur interne augmente l'intensité de la circulation de l'écoulement, favorise l'apparition du régime multicellulaire et augmente la température au centre de la cavité.
- L'augmentation de la génération de la source interne conduit à une diminution du nombre de Nusselt près de la paroi chaude et son augmentation près de la paroi froide.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. Kharicha, S. Molokov, S. Aleksandrova, & L. Bühler "Buoyant convection in the helium-cooled lithium lead blanket, in a strong uniform magnetic field" *FZKA 6959* (2004), Forschungszentrum Karlsruhe.
- [2] D. T. J. Hurle "Crystal Growing from the Melt" Springer (1993).
- [3] E. Crespo del Arco & P. Bontoux. (1989) , " Numerical solution and analysis of asymmetric convection in vertical cylinder : An effect of Prandtl number ", *Physics of fluids* **1**, 1348.
- [4] A. Yu. Gelfgat & I. Tanasawa. (1994), " Numerical analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method ", *Numerical Heat transfer, Part A*, **25** 627-648.
- [5] Young Min Shim and Jae Min Hyun (1997), "Transient confined natural convection with internal heat generation" *Int. J. Heat and Fluid Flow* **18**: 328-333.
- [6] A. Yu. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph, & A. L. Yarin. (1997), " On oscillatory instability of convective flows at low Prandtl number ", *J. Fluids Eng.* **119** 823-829.
- [7] A. LEMEMBRE and J.-P. PETIT.(1998), "Laminar natural convection in a laterally heated and upper cooled vertical cylindrical enclosure" *Int J. Heat Mass Transfer*. Vol. 41, No 16, pp. 2437-2454.
- [8] A. Yu. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph & A. Solan. (2000) , " Axisymmetry breaking instabilities of natural convection in a vertical Bridgman growth configuration ", *J. of Crystal Growth* **220**, 316-325.
- [9] kwang hyo chung, jae Min hyun (2001), " Effect of circumferential variation of sidewall temperature on buoyant convection in a vertical cylindre" *International Journal of Heat Mass Transfer* **44**.2583-2587.
- [10] A. Yu. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph & A. Solan. (2001), " Effect of axial magnetic field on three-dimensional instability of natural convection in a vertical Bridgman configuration ", *J. of Crystal Growth* **230**, 63-72.

- [11] Minerva Vargas, F.Z. Sierra, E. Ramos, A. A. Avramenko.(2001), “ Steady naturel convection in a cylindrical cavity” *Int.comm.Hear Mass Transfer*,Vol.29,No.3,pp.213-221
- [12] S. S. Leong. (2002) “ Numerical study of Rayleigh-Bénard convection in cylinder ” *Numerical Heat Transfer, Part A*, 41, 673-683.
- [13]Michele Ciofalo and Fabrizio Cricchio (2002) “Influence of a magnetic field on liquid metal free convection in an internally heated cubic enclosure” *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*,Vol. 12 No. 6, , pp. 687-715
- [14] M. Rahman and M. A. R. Sharif. (2003) “Numerical study of laminar naturel convection in inclind rectangular enclosures of various aspect ratios”, *Numerical Heat Transfer*.44,pp. 355–373.
- [15]: P.-H. Kao, R.-J. Yang (2007)" Simulating oscillatory flows in Rayleigh-Bénard convection using the lattice Boltzmann method" *Inter. J. Heat and Mass Transfer* 50 . 3315–3328
- [16]Anil Kumar Sharma a, K. Velusamy a, C. Balaji (2008) “Conjugate transient natural convection in a cylindrical enclosure with internal volumetric heat generation” *Annals of Nuclear Energy* 35 1502–1514
- [17] Q. Li, Y. L. He, G. H. Tang, and W. Q. Tao (2009)"Lattice Boltzmann model for axisymmetric thermal flows" *PHYSICAL REVIEW E* 80, 037702
- [18] Lin Zheng, Baochang Shi, Zhaoli Guo, Chuguang Zheng (2010) “Lattice Boltzmann equation for axisymmetric thermal flows” *Computers & Fluids* 39, 945–952
- [19] Bum-Jin Chung , Jeong-Hwan Heo , Min-Hwan Kim , Gyeong-Uk Kang (2011) “The effect of top and bottom lids on natural convection inside a vertical cylinder” *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54 (2011) 135–141
- [20] S.V.Patankar. “ Numerical heat transfer and fluid flow ”, Hemisphere. Washinton, DC, 1980.

Résumé :

Le présent travail a pour but d'étudier numériquement l'effet de chauffage volumétrique sur la convection naturelle du Lithium liquide dans un cylindre en présence d'une source de chaleur interne pour différents rapports d'aspect ($A=0.5, 1$ et 2), et une gamme des nombres Grashof ($Gr=10^3, 10^4, 10^5$). La méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution du système d'équations qui régit l'écoulement axisymétrique. Le couplage vitesse-pression a été assuré par l'algorithme de SIMPLER. L'influence du chauffage volumétrique, sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique au sein de la cavité, a été examinée. Les résultats numériques révèlent que l'effet de la source de chaleur sur l'écoulement et le transfert de chaleur est importante dans le cas où $A=1$ et 2 .

