الجمهورية الجزائرية الدّيمقراطية الشّعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التّعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة محمد الصّدّيق بن يحيى - جيجل

Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématique

Thèse présentée par

M. **BEDHOUCHE Abdelmalek**

En vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Théorie des nombres

Thème

Etude des propriétés arithmétiques du plus petit commun multiple de certaines suites d'entiers

La soutenance aura lieu le 22 juin 2024, à l'Université de Jijel, devant le jury composé de :

M. **Nouressadat TOUAFEK**	Professeur, Université de Jijel	Président
M. **Bakir FARHI**	Professeur, NHSM	Encadreur
M. **Mustapha YAROU**	Professeur, Université de Jijel	Co-Encadreur
M. **Rachid BOUMAHDI**	M.C.A, NHSM	Examinateur
M. **Tarek GARICI**	M.C.A, USTHB	Examinateur

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Trouver les bons mots pour dire « Merci » est un exercice difficile, en particulier quand la langue utilisée n'est pas sa langue maternelle. Je tiens tout d'abord à exprimer ma sincère gratitude envers mon Directeur de Thèse, le Professeur BAKIR FARHI, pour son soutien constant, ses conseils éclairés et son partage de connaissances tout au long de ce parcours de recherches. Mr BAKIR FARHI a toujours fait preuve d'une totale confiance, d'un soutien et d'une gentillesse permanente à mon égard. Les nombreux échanges scientifiques avec mon Directeur de Thèse m'ont permis de découvrir et d'apprécier un champ d'investigation complètement nouveau pour moi. Sa rigueur mathématique et ses conseils avisés m'ont aidé et motivé dans la réalisation de cette Thèse. J'adresse également mes remerciements chaleureux à mon Co-Encadreur, le Professeur MUSTAPHA YAROU, pour son soutien et son aide, notamment dans les démarches administratives. Je suis reconnaissant envers ces deux excellents chercheurs qui ont cru en moi et m'ont offert la chance d'accomplir ce modeste travail.

Par ailleurs, Je témoigne toute ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à ma formation et je tiens à remercier particulièrement le Professeur NOURDDINE MEHIDI pour sa contribution inestimable à ma formation (D.E.S). Je remercie également du fond du coeur le Professeur FATEH BOUHMILA pour son soutien et pour m'avoir mis en contact avec le Professeur YAROU.

Je suis très honoré de la présence à mon Jury de Thèse et je tiens à remercier :

- le Professeur NOURESSADET TOUAFEK pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette Thèse,
- les Professeurs RACHID BOUMAHDI et TAREK GARICI pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour avoir accepté d'examiner ce travail et d'être présents dans mon Jury de soutenance.

Finalement, je remercie ma petite famille et tous mes amis pour leurs encouragements et leur soutien.

A. Bedhouche

Dédicaces

Je dédie cette Thèse à toute ma famille et mes amis et à ceux qui auront la patience de la lire.

À la mémoire de mon père

qui, quand j'étais tout petit, me portait sur ses épaules pour traverser la rivière et aller à l'école …. Que Dieu tout puissant l'accueille dans son vaste paradis.

Table des matières

Principales notations et conventions

Les symboles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des entiers strictement positifs et l'ensemble des nombres premiers. Les ensembles des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes sont désignés respectivement par $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Nous désignons le cardinal d'un ensemble fini A par $\mathrm{Card}A$. La lettre p désigne toujours un nombre premier. Pour tout nombre premier p, on désigne par v_p la valuation p-adic usuelle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et par $\langle x \rangle$ sa partie fractionnaire. Pour $N,\ b \in \mathbb{N}^*$, avec $b \geq 2$, l'écriture de N dans le système de base b est désignée par $N = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}_{(b)}$, signifiant que

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_k b^k,$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, ..., b-1\}$ et $a_k \neq 0$. Dans ce contexte, on note la somme $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k$ par $S_b(N)$. Les fonctions de décompte des diviseurs (d'un entier strictement positif), de décompte des nombres premiers (inférieurs ou égaux à un réel positif donné) et thêta de Tchebychev sont notées respectivement τ, π et θ. Nous avons plus précisément

$$\tau(n) := \sum_{d|n} 1, \ \ \pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 \ \text{ et } \ \theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+).$$

Il est connu que pour $n \geq 3$, on a $\tau(n) = n^{O(1/\log\log n)}$ (voir e.g., [33, Proposition 7.12, page 101]). Donc, a fortiori,

$$\tau(n) = O(n^{1/3}). \tag{1}$$

Par ailleurs, soient I, D et Δ les opérateurs linéaires de $\mathbb{C}[x]$ représentant respectivement l'identité, la dérivation usuelle et la différence ($\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$, $\forall P \in \mathbb{C}[X]$). On désigne par $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ l'anneau des polynômes à valeurs entières et par $\mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$ le sous ensemble de $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ constitué des polynômes de degré $\leq n$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \neq 0$, la notation $a|b$ signifie a divise b. Etant donnés $n, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, nous désignons le plus petit commun multiple de $a_1, a_2, \dots, a_n$ par $\mathrm{ppcm}(a_1,\ a_2, ..., a_n)$ ou par $\vee_{i=1}^{n} a_i$ lorsque cela est plus commode. Pour $n,\ k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq n$ et $x_1,\ x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, notons par $x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n$ le produit $\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} x_i$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *les puissances inférieures et supérieures* d'ordre n d'une indéterminée X sont les polynômes en

X, de degrés n, définis respectivement par :

$$X^{\underline{n}} := X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1) \quad \text{et} \quad X^{\overline{n}} := X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1).$$

On prend aussi par convention $X^{\underline{0}} = X^{\overline{0}} = 1$.

Introduction

À l'origine, l'idée de ce travail était de faire le point sur l'instabilité par dérivation de l'anneau des polynômes à valeurs entières $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ [1]. Cet ensemble $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ est à la fois un anneau commutatif et unitaire et un $\mathbb{Z}$-module libre de rang infini. Ses sous-ensembles tronqués $\mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$ $(n \in \mathbb{N})$ perdent la propriété d'anneau mais conservent la propriété de $\mathbb{Z}$-module libre [2]. Évidement, $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ est stable par l'opérateur Δ (c'est à dire , $\forall P \in \mathrm{Int}(\mathbb{Z}) : \Delta P \in \mathrm{Int}(\mathbb{Z})$). La stabilité par Δ est aussi vérifiée pour chaque $\mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$ $(n \in \mathbb{N})$. Cependant $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ n'est pas stable par dérivation [3]. B. Farhi [19] s'est posé la question de savoir, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, quel est le plus petit entier strictement positif u_n satisfaisant :

$$\forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) : u_n P' \in \mathrm{Int}(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

La relation (2) est bien satisfaite pour $u_n = n!$. Cependant, B. Farhi [19] a montré que u_n est beaucoup plus petit que $n!$. On a précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \mathrm{ppcm}\,(1, 2, ..., n)\,. \tag{3}$$

Il s'agit d'un lien vraiment surprenant entre l'instabilité par dérivation et le plus petit commun multiple. Dans le même travail, B. Farhi [19] a soulevé la question générale relative aux dérivées d'ordres supérieurs et a montré que le plus petit entier strictement positif $u_{n,k}$ vérifiant la propriété

$$\forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) : u_{n,k} P^{(k)} \in \mathrm{Int}(\mathbb{Z}), \tag{4}$$

est intimement lié au nombre

$$C_{n,k} = \mathrm{ppcm}\,\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n\}\,. \tag{5}$$

En fait, il a montré que $u_{n,k}$ divise $C_{n,k}$ et que $u_{n,k}$ est multiple de $\frac{C_{n,k}}{k!}$ (voir [19]). Dans le cas particulier $k = 1$, on retrouve alors (3). Il est à noter cependant que l'expression close de $u_{n,k}$ dans le cas général (en fonction de n et k) est plus compliquée que celle

1. Mathématiquement, on a : $\mathrm{Int}(\mathbb{Z}) := \{P \in \mathbb{Q}[X] : P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}\}$.
2. En fait $\mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$ est de Rang $(n+1)$.
3. on a par exemple $\frac{x(x+1)}{2} \in \mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ alors que $\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)' = x + \frac{1}{2} \notin \mathrm{Int}(\mathbb{Z})$.

de $C_{n,k}$. Dans [19], B. Farhi a montré que les $u_{n,k}$ s'expriment à l'aide de plus petit commun multiple des dénominateurs de certains nombres rationnels appartenant à la famille des nombres hyperharmoniques !

Plusieurs travaux on porté sur l'estimation de l'entier $\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$ $(n \geq 1)$. Entre autre, le célèbre théorème des nombres premiers (voir [1, 4, 33, 37]) a pour conséquence le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \mathrm{ppcm}\,(1,2,...,n)}{n} = 1.$$

Ce qui équivaut à dire que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists \eta(\epsilon)$ tel que pour chaque $n \geq \eta(\epsilon)$, on ait

$$(e-\epsilon)^n \leq \mathrm{ppcm}\,(1,2,...,n) \leq (e+\epsilon)^n.$$

Dans le même contexte, plusieurs estimations effectives ont été obtenues au cours de l'histoire. Par exemple, Tchebychev [12] exploite l'idée d'estimer le nombre $\log(n!)$ de deux façons différentes : l'une est analytique et se sert de la formule de Stirling et l'autre est arithmétique et se sert de la formule de Legendre :

$$n! = \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Cette idée l'avait conduit à l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \; e^{-1} n^{-\frac{5}{2}}.\alpha^n \leq \mathrm{ppcm}\,(1,2,...,n) \leq e.n^{\frac{5}{4}} e^{\frac{5}{4\log 6}\log^2 n}.\beta^n,$$

avec $\alpha \simeq 2,51$ et $\beta \simeq 3,02$. Dans [27], Hanson montre (en utilisant le développement du nombre 1 en série de Sylvester) que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{ppcm}\,(1,2,...,n) \leq 3^n.$$

Dans [35], Nair montre, en exploitant l'intégrale $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$, que l'on a pour tout $\forall n \geq 7$:

$$\mathrm{ppcm}\,(1,2,...,n) \geq 2^n.$$

Récemment, le sujet a connu des développements importants. Dans [2], Bateman, Kalb et Stenger ont obtenu un équivalent asymptotique pour $\log \mathrm{ppcm}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ lorsque $(u_n)_n$ est une progression arithmétique. Dans [25, 26], Farhi a obtenu des minorations non triviales pour $\mathrm{ppcm}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dans le cas où (u_n) est une progression arithmétique et dans le cas où $(u_n)_n$ est une progression quadratique. Ces estimations ont été légèrement améliorées par Hong et Feng [29], Hong et Yang [30] et bien d'autres. Dans [25], Farhi a introduit la suite des applications $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par

$$g_k(n) := \frac{n(n+1)...(n+k)}{\mathrm{ppcm}\{n,\; n+1, ..., n+k\}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \forall k \in \mathbb{N})$$

et a montré que g_k est périodique de période $k!$ (pour tout k). Dans le même article, Farhi a soulevé le problème de déterminer la période minimale P_k de l'application

g_k. La résolution définitive de ce problème est donnée deux ans plus tard par Farhi et Kane [24] qui ont réussi à trouver l'expression explicite de P_k. Bien que l'expression de P_k est compliquée dans le cas général, deux cas particuliers attirent l'attention : lorsque k est tel que $(k+1)$ est premier ou que k possède la forme $(6^r - 1)$ (avec r est un entier supérieur où égal à 2). Pour chacun de ces deux cas, on a simplement : $P_k = \mathrm{ppcm}(1, 2, \dots, k)$. D'autre part, le théorème des nombres premiers stipule que $\pi(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x}{\log x}$. D'autre énoncés équivalents affirment que $\theta(x) \sim_{+\infty} x$ et $\log \mathrm{ppcm}(1, 2, ..., n) \sim_{+\infty} n$ (voir [1, 4, 33, 37]). Les faibles estimations $\pi(x) = O\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$, $\theta(x) = O(x)$, et $\log \mathrm{ppcm}(1, 2, ..., n) = O(n)$ sont appelées les estimations de Tchebychev.

En théorie des nombres, certains nombres spéciaux se factorisent en produit de nombres de type p^α où α s'écrit sous la forme $\lfloor \frac{u_n}{f(p)} \rfloor$ ou une somme de telles expressions. Les exemples les plus célèbres sont peut être les suivants (voir [34, p. 76-77]) :

$$n! = \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots} = \prod_{p \text{ premier}} p^{\frac{n - S_p(n)}{p-1}} \tag{6}$$

et

$$\mathrm{ppcm}(1, 2, \dots, n) = \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor}. \tag{7}$$

Parmi les exemples moins connus, citons les deux suivants :

$$\mathrm{ppcm}\left\{i_1 i_2 ... i_k;\ k \in \mathbb{N},\ i_1, i_2, ..., i_k \in \mathbb{N}^*,\ i_1 + i_2 + ... + i_k \leq n\right\} = \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}, \tag{8}$$

$$\mathrm{ppcm}\left\{i_1 i_2 ... i_n;\ i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}^*,\ i_1 + i_2 + ... + i_n \leq 2n\right\} = \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor}. \tag{9}$$

La formule (8) a été signalée dans le livre de Cahen et Chabert [11] ainsi que par Farhi [19] dans le contexte des polynômes à valeurs entières. Quant à la formule (9), elle a été obtenue par Bedhouche et Farhi [3] et sera démontrée au dernier chapitre de cette thèse. Remarquablement, le membre de gauche de chacune des formules (6), (7), (8) et (9) s'interprète sans faire référence aux nombres premiers !

Plan de la Thèse

Cette thèse comprend trois apports. Le premier apport consiste en l'étude arithmétique des entiers :

$$\begin{array}{lllll}
C_{1,1} & & & & \\
C_{2,1} & C_{2,2} & & & \\
C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & & \\
C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & \\
C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

où chaque entier $C_{n,k}$ $(k \leq n)$ est donné par

$$C_{n,k} = \text{ppcm}\left\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ i_1,\ i_2, ..., i_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1 + i_2 + ... + i_k \leq n\right\}.$$

Le deuxième apport consiste en l'étude des produits de la forme

$$\pi_f(x) := \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor},$$

où f est une fonction vérifiant certaines conditions.

Enfin, le dernier apport porte sur l'étude arithmétique et analytique de $\pi_f(x)$ dans les cas

$$f(x) = x,\ f(x) = x - 1.$$

Cette Thèse est composée de trois chapitres. Le premier chapitre est une approche élémentaire de la fonction de décompte des nombres premiers. Le deuxième chapitre expose les propriétés de quelques opérateurs linéaires, leurs applications à l'ensemble $\text{Int}(\mathbb{Z})$ et l'étude de l'article [19]. Le troisième chapitre porte sur les études arithmétique et analytique des produits $\pi_f(x)$ de ci-dessus.

Chapitre 1

Autour de la fonction de décompte des nombres premiers - Approche élémentaire

1.1 Préliminaires

1.1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit r un nombre rationnel. On appelle *dénominateur* de r, l'entier positif noté $den(r)$ défini comme suit

$$den(r) = \min\{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } d\,r \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 1.2. (valuation p-adique).
Soit p un nombre premier. On appelle *valuation p-adique* l'application qui associe à tout entier relatif non nul n le plus grand entier naturel α tel que p^α divise n. Cet entier naturel α est alors noté $v_p(n)$. Aussi, on conventionne que $v_p(0) = +\infty$.

Les propriétés fondamentales des valuations p-adiques sont rassemblées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit p un nombre premier. Alors*

1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, on a : $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^*$, on a : $v_p(a_1 a_2 \cdots a_k) = v_p(a_1) + v_p(a_2) + \cdots + v_p(a_k)$.*
2. *Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, on a : $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$. Si de plus $v_p(a) \neq v_p(b)$, on a même : $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.*
3. ***(Généralisation du point 2.)** : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^*$, on a : $v_p(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \geq \min(v_p(a_1), v_p(a_2), \dots, v_p(a_k))$. Si de plus les valuations p-adiques $v_p(a_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ sont deux à deux distinctes, on a même : $v_p(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = \min(v_p(a_1), v_p(a_2), \dots, v_p(a_k))$.*

Le prolongement de la valuation p-adique à $\mathbb{Q}^*$ nécessite la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Soient p un nombre premier et r un nombre rationnel non nul. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{a}{b} = r$, la quantité $v_p(a) - v_p(b)$ est la même (i.e., elle dépend uniquement de r et non pas de la fraction rationnelle qui le représente).*

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et montrons $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$. Comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a $ad = bc$; d'où $v_p(ad) = v_p(bc)$. Ce qui équivaut (d'après la proposition 1.3) à $v_p(a) + v_p(d) = v_p(b) + v_p(c)$; d'où l'on tire que $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$, comme il fallait le prouver. □

Définition 1.5. (Valuation p-adique sur $\mathbb{Q}^*$). Soient p un nombre premier. On appelle valuation p-adique sur $\mathbb{Q}^*$, l'application v_p définie par

$$\begin{array}{rccc} v_p & : & \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & r = \frac{a}{b}\ (a,\ b \in \mathbb{Z}^*) & \longmapsto & v_p(r) = v_p(a) - v_p(b). \end{array}$$

La proposition suivante généralise la proposition 1.3.

Proposition 1.6. *Soit p un nombre premier. Alors*

1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{Q}^*$, on a : $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Q}^*$, on a : $v_p(a_1 a_2 \cdots a_k) = v_p(a_1) + v_p(a_2) + \cdots + v_p(a_k)$.*
2. *Pour tous $a, b \in \mathbb{Q}^*$, on a : $v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$. Si de plus $v_p(a) \neq v_p(b)$, on a même : $v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.*
3. ***(Généralisation du point 2.)** : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Q}^*$, on a : $v_p(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \geq \min(v_p(a_1), v_p(a_2), \dots, v_p(a_k))$. Si de plus les valuations p-adiques $v_p(a_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ sont deux à deux distinctes, on a même : $v_p(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = \min(v_p(a_1), v_p(a_2), \dots, v_p(a_k))$.*

Théorème 1.7 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** *Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$a = \prod_p p^{v_p(a)}.$$

Remarque 1.8. Le théorème fondamental de l'arithmétique se généralise aux nombres rationnels non nuls comme ceci :

$$\forall r \in \mathbb{Q}^* : \ |r| = \prod_p p^{v_p(r)}. \tag{1.1}$$

Proposition 1.9. *Soir r un nombre rationnel. On a*

$$r \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \forall p \text{ premier} : \ v_p(r) \geq 0.$$

Démonstration. $\Rightarrow$) (évidente). $\Leftarrow$) (d'après 1.1). □

Proposition 1.10. *Soit $n \geq 2$ un entier et $a_1,\ a_2, ..., a_n$ des entiers strictement positifs. On a*

$$\operatorname{pgcd}(a_1,\ a_2, ..., a_n) = \prod_p p^{\min(v_p(a_1),\ v_p(a_2), ..., v_p(a_n))}$$

et

$$\operatorname{ppcm}(a_1,\ a_2, \ldots, a_n) = \prod_p p^{\max(v_p(a_1),\ v_p(a_2), ..., v_p(a_n))}.$$

Définition 1.11. (Partie entière). Soit x un réel. On appelle partie entière de x que l'on note $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égale à x. La partie fractionnaire de x , notée $\langle x \rangle$, est définie par $\langle x \rangle := x - \lfloor x \rfloor$.

Théorème 1.12 (Euclide)**.** *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Définition 1.13 (Nombres de Stirling)**.** *Les nombres de Stirling de première espèce*, notés $s(n,k)$ $(n,k \in \mathbb{N}, n \geq k)$, sont les nombres réels apparaissant dans l'identité polynomiale :

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k. \tag{1.2}$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce, notés $S(n,k)$ $(n,k \in \mathbb{N}, n \geq k)$, sont les nombres réels apparaissant dans l'identité polynomiale :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}. \tag{1.3}$$

Les propositions suivantes peuvent être trouvées par exemple dans [20; 21].

Proposition 1.14. *Pour tous $n,k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, le signe du nombre entier $s(n,k)$ est*

$$(-1)^{n+k}.$$

Proposition 1.15. *Pour tous Soit $n,\ k \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq k$, on a*

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k), \tag{1.4}$$

$$|s(n+1,k)| = |s(n,k-1)| + n|s(n,k)|, \tag{1.5}$$

$$s(n,k) = (-1)^{n+k} \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{n_1,n_2,...,n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1+n_2+...+n_k=n}} \frac{1}{n_1 n_2 ... n_k}. \tag{1.6}$$

1.2 Quelques outils d'analyse réelle

1.2.1 Les notations de Landau

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$. On dit que f est négligeable par rapport à g au voisinage de x_0 et l'on écrit $f = o_{x_0}(g)$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On écrit $f = O(g)$ s'il existe une constante strictement positif c tel que

$$\forall x \in I \ : \ |f(x)| \leq c|g(x)|.$$

On écrit $f \sim_{x_0} g$ (f équivalente à g) au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1.2.2 Comparaison d'une somme à une intégrale

Proposition 1.16. *Soit f une fonction strictement monotone sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a < b$. Alors, il existe $\theta \in [0, 1]$ (dépendant de a et b) tel que*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \theta(f(b) - f(a)).$$

Démonstration. Traitons juste le cas où f est strictement décroissante. Pour tout entier $k \in [a; b]$, on a

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

D'où

$$\sum_{a\leq k\leq b-1} \int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \sum_{a\leq k\leq b-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{a\leq k\leq b-1} \int_k^{k+1} f(k)dt$$

Ce qui donne après simplification et réarrangement :

$$\sum_{a+1\leq k\leq b} f(k) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \sum_{a\leq k\leq b-1} f(k).$$

D'où l'on tire que :

$$f(b) - f(a) \leq \sum_{a<k\leq b} f(k) - \int_a^b f(t)dt \leq 0.$$

Comme f est strictement décroissante alors $f(b) - f(a) < 0$; d'où (en divisant les deux membres de la double inégalité précédente par $f(b) - f(a)$), on obtient

$$0 \leq \frac{\sum\limits_{a<k\leq b} f(k) - \int_a^b f(t)dt}{f(b) - f(a)} \leq 1.$$

Il suffit alors de poser $\theta = \dfrac{\sum\limits_{a<k\leq b} f(k) - \int_a^b f(t)dt}{f(b) - f(a)} \in [0, 1]$ pour avoir :

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \theta(f(b) - f(a)),$$

comme il fallait le prouver. □

Proposition 1.17. *Soit* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et strictement décroissante et telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Alors il existe une constante absolue c telle que*

$$\sum_{1\leq k\leq n} f(k) = \int_1^n f(t)dt + c + O(f(n)).$$

Démonstration. Nous allons donner juste les passages essentiels de la démonstration. On vérifie facilement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sum_{1\leq k\leq n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Posons $c := \lim_{n\to+\infty} u_n$. Par suite, étant donnés $n,\ N \in \mathbb{N}^*$ avec $n < N$, on a

$$u_n - u_N = \int_n^N f(t)dt - \sum_{n<k\leq N} f(k).$$

En appliquons la proposition 1.16 puis en faisant tendre $N \to +\infty$, on obtient $u_n = c + O(f(n))$. □

1.2.3 Formule sommatoire d'Abel

Théorème 1.18. *Soient* $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite réelle et* $f \in C^1([\alpha, +\infty[)$ $(\alpha > 0)$. *Alors, pour tout* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha \leq x \leq y$, *on a*

$$\sum_{x\leq n\leq y} a_n f(n) = \left(\sum_{x\leq n\leq y} a_n\right) f(y) - \int_x^y \left(\sum_{x\leq n\leq t} a_n\right) f'(t)dt.$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq x \leq y$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{x\leq n\leq y} a_n f(n) &= \sum_{x\leq n\leq y} a_n \left(f(y) - \int_n^y f'(t)dt\right)\\ &= \left(\sum_{x\leq n\leq y} a_n\right) f(y) - \sum_{x\leq n\leq y} \int_n^y a_n f'(t)dt\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases} x \leq n \leq y \\ n \leq t \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq t \leq y \\ x \leq n \leq t \end{cases},$$

en introduisant la fonction indicatrice de l'intervalle $[n, y]$, on a :

$$\sum_{x\leq n\leq y} \int_n^y a_n f'(n) = \int_x^y \left(\sum_{x\leq n\leq t} a_n\right) f'(t)dt.$$

Ce qui conclut à :

$$\sum_{x\leq n\leq y} a_n f(n) = \left(\sum_{x\leq n\leq y} a_n\right) f(y) - \int_x^y \left(\sum_{x\leq n\leq t} a_n\right) f'(t)dt,$$

ce qui achève cette démonstration. □

Théorème 1.19 (Transformation d'Abel)**.** *Soient* $(a_n)_{n\geq 0}$*, et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *des suites complexes. Pour tous entiers* $N,\ M \in \mathbb{Z}$*, on a*

$$\sum_{N<n\leq N+M} a_n b_n = A_{N+M} b_{N+M+1} + \sum_{N<n\leq N+M} A_n (b_n - b_{n+1}),$$

où l'on a posé $A_n := \sum_{N<k\leq n} a_k$ *(*$n \geq 0$*).*

Proposition 1.20 (La formule de Stirling [15, 16])**.** *On a :*

$$n! \sim_{+\infty} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Proposition 1.21 (La formule de Legendre [34, 16])**.** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, la décomposition du nombre* $n!$ *en produit facteurs premiers s'écrit*

$$n! = \prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots} = \prod_p p^{\frac{n - S_p(n)}{p-1}}. \tag{1.7}$$

(Rappelons que $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de* n *dans le système de base* p*).*

Démonstration. Soient n un entier strictement positif et p un nombre premier. Posons $k := \lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor$ et considérons les ensembles A_i ($0 \leq i \leq k$) suivants :

$A_0 := \{a \in \mathbb{N}^* \cap [1, n]$ tel que a ne soit pas un multiple de $p\}$,
$A_1 := \left\{a \in \mathbb{N}^* \cap [1, n]\right.$ tel que a soit un multiple de p mais non un multiple de $\left.p^2\right\}$,
$A_2 := \left\{a \in \mathbb{N}^* \cap [1, n]\right.$ tel que a soit un multiple de p^2 mais non un multiple de $\left.p^3\right\}$,
$\vdots$
$A_k := \left\{a \in \mathbb{N}^* \cap [1, n]\right.$ tel que a soit un multiple de p^k mais non un multiple de $\left.p^{k+1}\right\}$.

Il est clair que ces ensembles A_i ($0 \leq i \leq k$) constituent une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. On a par conséquent :

$$n! = \prod_{a\in\{1,2,\ldots,n\}} a = \prod_{a\in A_0 \sqcup A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k} a = \prod_{a\in A_0} a \cdot \prod_{a\in A_1} a \cdots \prod_{a\in A_k} a.$$

D'où :

$$v_p(n!) = \sum_{a\in A_0} v_p(a) + \sum_{a\in A_1} v_p(a) + \cdots + \sum_{a\in A_k} v_p(a).$$

Mais on constate que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et tout $a \in A_i$, on a : $v_p(a) = i$. D'où l'on déduit que :

$$v_p(n!) = 0\,\mathrm{Card} A_0 + 1\,\mathrm{Card} A_1 + 2\,\mathrm{Card} A_2 + \cdots + k\,\mathrm{Card} A_k.$$

Enfin, puisque l'on a visiblement $\mathrm{Card} A_i = \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{n}{p^{i+1}} \rfloor$ (pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$), il en découle que :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= 0\left(n - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right) + 1\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor\right) + 2\left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor\right) + \ldots \\ &\qquad + k\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor\right) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - k\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots \quad (\text{car } \lfloor n/p^i \rfloor = 0 \text{ pour } i > k). \end{aligned}$$

Ce qui confirme la première égalité de la formule (1.7). Montrons maintenant la seconde égalité de la formule (1.7). Soit $n = \overline{a_r a_{r-1} \ldots a_0}_{(p)} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r$ (avec $r \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et $a_r \neq 0$) l'écriture de n dans le système de base p. On a alors :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor &= a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + \cdots + a_r p^{r-1}, \\ \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor &= a_2 + a_3 p + a_4 p^2 + \cdots + a_r p^{r-2}, \\ \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor &= a_3 + a_4 p + a_5 p^2 + \cdots + a_r p^{r-3}, \\ &\vdots \\ \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor &= a_r \end{aligned}$$

et

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 0 \qquad \text{pour } i > r.$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots \\ &\qquad = a_1 + a_2(1+p) + a_3(1+p+p^2) + \cdots + a_r(1+p+p^2+\cdots+p^{r-1}) \\ &\qquad = \frac{1}{p-1}\left[a_1(p-1) + a_2(p^2-1) + a_3(p^3-1) + \cdots + a_r(p^r-1)\right] \\ &\qquad = \frac{1}{p-1}\left[\left(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r\right) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_r)\right] \\ &\qquad = \frac{1}{p-1}\left(n - S_p(n)\right), \end{aligned}$$

confirmant ainsi la seconde égalité de (1.7). La proposition est démontrée. □

1.3 Autour de la fonction de Mobius

Définition 1.22 (Fonction de Möbius)**.** C'est la fonction arithmétique $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, définie par

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est un produit de } k \text{ nombres premiers deux à deux distincts} \\ 0 & \text{si } n \text{ est multiple d'un caré parfait différent de 1} \end{cases} \cdot$$

Définition 1.23 (Fonction de Dirac)**.** C'est la fonction $\delta : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, définie par

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition 1.24 (Convolution de Dirichlet)**.** Soit f et g deux fonctions arithmétiques. le produit de convolution de Dirichlet de f et g (que l'on note $f * g$) est l'application arithmétique définie par :

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Proposition 1.25. *Le produit de convolution est une loi commutative et associative (sur l'ensemble des fonctions arithmétiques) et admet la fonction de Dirac δ comme élément neutre. De plus, l'élément symétrique de la fonction constant 1 est la fonction de Möbius μ ; soit $1 * \mu = \delta$.*

La première formule d'inversion de Möbius

Théorème 1.26 (Mobius)**.** *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ et définissons $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Démonstration. Par hypothèse on a

$$g = f * 1.$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} g * \mu = (f * 1) * \mu &= f * (1 * \mu) \ \ (\text{car } * \text{ et associative}) \\ &= f * \delta \quad (\text{d'après la proposition 1.25}) \\ &= f \ \ (\text{car } \delta \text{ est un élément neutre pour la loi } *). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

La seconde formule d'inversion de Möbius

Théorème 1.27 (Möbius)**.** *Soit* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *et définissons* $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par*

$$g(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Alors on a

$$f(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Démonstration. En se servant du fait que $\delta = 1 * \mu$, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{1 \leq n \leq x} \delta(n) f\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{1 \leq n \leq x} (1 * \mu)(n) f\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\sum_{d \mid n} \mu(d)\right) f\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{\substack{d,m \in \mathbb{N}^* \\ dm \leq x}} \mu(d) f\left(\frac{x}{dm}\right) = \sum_{1 \leq d \leq x} \mu(d) \left(\sum_{1 \leq m \leq \frac{x}{d}} f\left(\frac{x}{dm}\right)\right) = \sum_{1 \leq d \leq x} \mu(d) g\left(\frac{x}{d}\right), \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. □

1.4 Encadrement de Tchébychev

En 1845, Bertrand conjectura que tout intervalle du type $]n, 2n[$ $(n \geq 2)$ contient au moins un nombre premier. En 1851, Tchebychev démontra cette conjecture par le biais de l'analyse réelle. TChebychev à montré qu'il existe deux constantes absolues strictement positives α et β tel que l'on ait pour tout entier naturel n assez grand : $\alpha \frac{n}{\log n} \leq \pi(n) \leq \beta \frac{n}{\log n}$. La méthode de Tchebychev se sert des fonctions θ et ψ définies comme suit :

Définition 1.28. Les fonctions π, θ et ψ sont définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{aligned} \pi(x) &:= \sum_{p \leq x} 1, \\ \theta(x) &:= \sum_{p \leq x} \log p = \log\left(\prod_{p \leq x} p\right), \\ \psi(x) &:= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^*, p \text{ premier} \\ p^k \leq x}} \log p = \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n), \end{aligned}$$

où Λ est la fonction de Von Mangoldt définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n \text{ est une puissance d'un certain nombre premier } p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Proposition 1.29 (Conséquence des formules de Legendre et de Stirling)**.** *Soit* n *un entier strictement positif. On a*

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \Lambda(k) = n \log n - n + O(\log n).$$

Démonstration. D'après la formule de Legendre, on a

$$\log(n!) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*, p \text{ premier}} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \log p = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \Lambda(k).$$

La formule de Stirling conclut alors au résultat requis. □

Proposition 1.30. *Pour tout $x > 0$, on a*

$$\psi(x) = \sum_{p\le x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p.$$

Démonstration. On a

$$\psi(x) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*, p \text{ premier} \\ p^k\le x}} \log p = \sum_{p\le x} \left(\log p \sum_{1\le k\le \frac{\log x}{\log p}} 1 \right) = \sum_{p\le x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p,$$

comme il fallait le prouver. □

Remarque 1.31. Pour $x = n \in \mathbb{N}$, la somme figurant dans la proposition 1.30 n'est autre que $\log \operatorname{ppcm}\{1, 2, 3, ..., n\}$. Plus généralement, on a pour tout $x > 0$:

$$\psi(x) = \log \operatorname{ppcm}\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \le x\}.$$

Proposition 1.32. *Pour tout nombre réel positif x, on a*

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots.$$

Démonstration. Soit x un nombre réel positif. On a

$$\psi(x) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*, p \text{ premier} \\ p^k\le x}} \log p = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{p\le x^{\frac{1}{k}}} \log p \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right),$$

comme il fallait le prouver. □

Définition 1.33. Soit B la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$B(x) := \sum_{k\le x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor \Lambda(k).$$

Soient aussi L et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{aligned} L(x) &= B(x) + B\left(\frac{x}{30}\right) - B\left(\frac{x}{2}\right) - B\left(\frac{x}{3}\right) - B\left(\frac{x}{5}\right), \\ g(x) &= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Remarque 1.34. D'après la formule de Legendre et la proposition 1.29, on a pour tout $x \ge 0$:

$$B(x) = B(\lfloor x \rfloor) = \log(\lfloor x \rfloor!) = x \log x - x + O(\log x). \tag{1.8}$$

Proposition 1.35. *Pour tout nombre réel strictement positif x, on a*

$$B(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} B(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor \Lambda(k) = \sum_{1 \leq k \leq x} \left(\sum_{1 \leq n \leq \frac{x}{k}} 1 \right) \Lambda(k) &= \sum_{\substack{n,k \in \mathbb{N}^* \\ nk \leq x}} \Lambda(k) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\sum_{1 \leq k \leq \frac{x}{n}} \Lambda(k) \right) = \sum_{1 \leq n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right), \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. □

Lemme 1.36 (Tchebychev)**.** *Pour tout réel positif x, on a :*

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leq L(x) \leq \psi(x).$$

Théorème 1.37 (Tchebychev)**.** *Pour tout réel $x \geq 1$, on a*

$$Cx + O(\log x) \leq \psi(x) \leq \frac{6}{5}Cx + O(\log^2 x),$$

où $C = \log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right)$.

Démonstration. En utilisant la formule (1.8), on obtient que pour tout $x \geq 1$:

$$L(x) = Cx + O(\log x),$$

où $C = \log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right)$. La première inégalité du théorème découle alors du lemme 1.36. Montrons maintenant la seconde inégalité du théorème. En utilisant l'estimation $\frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} \leq e^{\frac{1}{12n}}$ (voir [33, Formule (1.17)]), on a

$$B(x) = B(\lfloor x \rfloor) \leq \log(\sqrt{2\pi}) + x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{12} \; (\forall x \geq 1).$$

En appliquant cette dernière estimation aux arguments $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{5}$ et $\frac{x}{30}$ (à la place de x), on obtient pour tout $x \geq 30$:

$$L(x) := B(x) - B(\frac{x}{2}) - B(\frac{x}{3}) - B(\frac{x}{5}) + B(\frac{x}{30}) \leq Cx + \frac{5}{2}\log(x),$$

avec $C = \log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right)$. D'autre part, un calcul manuel montre que cette inégalité demeure également vraie pour tout $1 \leq x \leq 30$; elle est, par conséquent, vraie pour tout $x \geq 1$. En combinant ceci avec la première inégalité du lemme 1.36, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\psi(x) \leq \psi\left(\frac{x}{6}\right) + Cx + \frac{5}{2}\log(x).$$

Soit α le plus grand entier naturel vérifiant $\frac{x}{6^\alpha} \geq 1$ $\left(\text{c'est à dire } \alpha = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 6} \right\rfloor\right)$. En réitérant cette dernière α fois, on obtient

$$\psi(x) \leq \psi\left(\frac{x}{6^{\alpha+1}}\right) + Cx \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{6^k} + \frac{5}{2} \log\left(\frac{x^{\alpha+1}}{6^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}\right).$$

Comme $\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{6^k} < \frac{5}{6}$, $\psi\left(\frac{x}{6^{\alpha+1}}\right) = 0$ et $\log\left(\frac{x^{\alpha+1}}{6^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}\right) = O\left(\log^2 x\right)$, on en déduit que

$$\psi(x) \leq \frac{6}{5}Cx + O(\log^2 x).$$

Ce qui prouve la seconde inégalité du théorème et complète cette démonstration. □

Remarque 1.38. Une version effective de l'encadrement du théorème 1.37 pour la fonction ψ est donnée par :

$$Cx - \frac{5}{2}\log x - 1 \leq \psi(x) \leq \frac{6}{5}Cx + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{4}\log x.$$

(Voir [12]).

Lemme 1.39. *Pour tout réel $x \geq 2$, on a*

$$\frac{\psi(x)}{\log x} \leq \pi(x) \leq 2\frac{\psi(x)}{\log x}.$$

Démonstration. Appliquons la propriété $\lfloor x \rfloor \leq x \leq 2\lfloor x \rfloor$ (valable pour tout $x \geq 1$). Étant donné $x \geq 2$, on a d'une part

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p \geq \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p = \frac{\psi(x)}{\log x}.$$

D'autre part

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p \leq \frac{2}{\log x} \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p = 2\frac{\psi(x)}{\log x}.$$

Ce qui conclut à l'estimation du lemme. □

Proposition 1.40 (Tchebychev)**.** *On a pour tout $x \geq 2$:*

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Démonstration. Soit $x \geq 2$ fixé. D'une part, d'après le lemme 1.39, on a

$$\pi(x)\log x - \psi(x) \geq 0. \tag{1.9}$$

D'autre part, on a

$$\pi(x)\log x - \psi(x) = \sum_{p \leq x} \log x - \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p.$$

Comme $\left\lfloor \dfrac{\log x}{\log p} \right\rfloor = 1$ pour tout nombre premier p vérifiant $\sqrt{x} < p \leq x$, alors

$$\pi(x)\log x - \psi(x) \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} (\log x - \log p).$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned}
\pi(x)\log x - \psi(x) &\leq \psi(\sqrt{x}) + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \int_p^x \frac{dt}{t} \\
&= \psi(\sqrt{x}) + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \int_{\sqrt{x}}^x \mathbb{1}_{[p,x]}(t)\frac{dt}{t} \\
&\leq \psi(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \left(\sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \mathbb{1}_{[p,x]}(t) \right) \frac{dt}{t} \\
&= \psi(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \left(\sum_{\sqrt{x}<p\leq t} 1 \right) \frac{dt}{t} \\
&= \psi(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t) - \pi(\sqrt{x})}{t} dt \\
&\leq O(\sqrt{x}) + O\left(\frac{x}{\log x} \right).
\end{aligned}$$

D'où l'on tire que

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2} \right).$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Corollaire 1.41. *Pour tout $x > 1$, on a*

$$C\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2} \right) \leq \pi(x) \leq \frac{6}{5}C + O\left(\frac{x}{(\log x)^2} \right).$$

Démonstration. Elle découle du théorème 1.37 et de la proposition 1.40. □

Remarque 1.42. Il existe dans la littérature mathématique plusieurs travaux qui ont raffiné l'estimation du corollaire 1.41. Citons par exemple les encadrements dus à Rosser et Schooenfeld (1962) et Schoenfeld (1976) (voir [37]), selon lesquels on a pour tout $x \geq 52$:

$$\frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2\log x}\right) < \pi(x) < \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{3}{2\log x}\right).$$

1.5 Quelques formules asymptotiques utiles

Lemme 1.43. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n.$$

Démonstration. (Voir [33, page 48]). □

Théorème 1.44 (Le premier théorème de Mertens [37]). *Pour $x \geq 2$, on a*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de démontrer la formule du théorème pour x entier. D'après la formule de Legendre, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\log(n!) = \sum_{p} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \log p = \sum_{p \leq n} \left(\sum_{1 \leq k \leq \frac{\log n}{\log p}} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \log p.$$

Mais en estimant trivialement les parties entières, on a pour tout p premier :

$$\sum_{1 \leq k \leq \frac{\log n}{\log p}} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log n}{\log p}} \frac{n}{p^k} + O\left(\frac{\log n}{\log p}\right) = \frac{n}{p} + O\left(\frac{\log n}{\log p}\right)$$

(où le O est absolue, c'est-à-dire qu'il est indépendant de p). D'où l'on tire que :

$$\log(n!) = \left(\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} \right) n + \left(\sum_{p \leq n} 1 \right) O(\log n) = \left(\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} \right) n + \pi(n) O(\log n).$$

En se servant par suite de l'estimation grossière de Tchebychev $\pi(n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$, il en résulte que :

$$\log(n!) = \left(\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} \right) n + O(n).$$

En comparant ceci avec l'estimation faible de Stirling $\log(n!) = n \log n - n + O(\log n) = n \log n + O(n)$, on conclut à la formule requise :

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} = \log n + O(1).$$

Le théorème est démontré. □

Théorème 1.45. *(deuxième théorème de Mertens). Il existe une constante c_1 telle que l'on ait pour $x \geq 2$*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log(\log x) + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

De plus, la constante $c_1 < 2(1 + ln 4)$.

Démonstration. Pour tout $x \geq 2$, posons

$$R(x) := \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} - \log x = O(1).$$

On a

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{\log p} \frac{\log p}{p} = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} \frac{\log n}{n} (\pi(n) - \pi(n-1)).$$

Nous allons appliquer la formule sommatoire d'Abel en posant

$$a_n = \frac{\log n}{n}(\pi(n) - \pi(n-1)) \text{ et } f(t) = \frac{1}{\log t}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \sum_{2\le n\le x} a_n f(n) &= \left(\sum_{2\le n\le x} a_n\right) f(x) - \int_2^x \left(\sum_{2\le n\le t} a_n\right) f'(t)dt \\ &= \left(\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\right) f(x) - \int_2^x \left(\sum_{p\le t}\frac{\log p}{p}\right) f'(t)dt \\ &= (R(x) + \log x) f(x) - \int_2^x (R(t) + \log t) f'(t)dt\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p} &= 1 + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{R(t)}{t\log^2 t}dt \\ &= \log\log x + 1 - \log\log 2 + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t\log^2 t}dt - \int_x^{+\infty}\frac{R(t)}{t\log^2 t}dt\end{aligned}$$

Posons $R := \sup_{t\ge 2}|R(t)|$. Comme $\left|\frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\log)^2}dt\right| \le \frac{2R}{\log x} < \frac{2(1+\log 4)}{\log x}$ (d'après la remarque fait sur $O(1)$ dans le théorème 1.44, alors $\frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\log)^2}dt = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$. D'où

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t\log^2 t}dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. □

1.6 Le dernier théorème de Tchebychev

Tchebychev a montré que si $\pi(x) \sim c\frac{x}{\log x}$, alors la constante c est nécessairement égale à 1.

Théorème 1.46. *On a*

$$\liminf_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} \le 1 \le \limsup_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}.$$

Démonstration. Nous allons établir l'inégalité de gauche. Soit

$$l := \liminf_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}.$$

Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un $x_0 = x_0(\epsilon) \ge 2$ tel que l'on ait

$$\pi(t) \ge (l-\epsilon)\frac{t}{\log t}, \quad (\forall t \ge x_0).$$

Par ailleurs, en utilisant la formule sommatoire d'Abel, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p} \ge \sum_{x_0\le p\le x}\frac{1}{p} &= \sum_{x_0\le k\le x}\frac{1}{k}(\pi(k)-\pi(k-1))\\ &= \frac{\pi(x)}{x}-\frac{\pi(x_0)}{x}+\int_{x_0}^{x}\frac{(\pi(t)-\pi(x_0))}{t^2}\,dt\\ &= \frac{\pi(x)}{x}-\frac{\pi(x_0)}{x_0}+\int_{x_0}^{x}\frac{\pi(t)}{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Cela entraîne pour $x \ge x_0$

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} \ge -1+(l-\epsilon)\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t\log t} \ge (l-\epsilon)\log(\log x)+O(1).$$

En utilisant le théorème (1.45), il s'ensuit que $l-\epsilon \le 1$ et donc $l \le 1$ puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit. Un raisonnement similaire montre que l'on a $\limsup_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} \ge 1$. Ce qui complète cette démonstration. □

1.7 Le théorème des nombres premiers et ses équivalents

Le théorème des nombres premiers, conjecturé par Gauss en 1792 puis par Legendre en 1798, a été démontré par Hadamard et de la Vallée Poussin (vers 1896). Il s'énonce

Théorème 1.47 (Le théorème des nombres premiers [33])**.** *Lorsque x est au voisinage de l'infini, on a*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Proposition 1.48. *On a*

$$\pi(x) \sim_{+\infty} \frac{x}{\log x} \Leftrightarrow \theta(x) \sim_{+\infty} x.$$

De plus les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour tout $x \ge 2$,

$$c_1\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le c_2\frac{x}{\log x}$$

(ii) Il existe deux constantes strictement positives c_3 et c_4 telles que, pour tout $x \ge 2$,

$$c_3 x \le \theta(x) \le c_4 x.$$

Démonstration. Soit $x \ge 2$ (quelconque). D'une part, on a

$$\theta(x) = \sum_{p\le x}\log p \le \log x\sum_{p\le x}1 = \pi(x)\log x.$$

D'autre part, pour $2 \le y \le x$, on a

$$\pi(x)-\pi(y) = \sum_{y<p\le x}1 \le \frac{1}{\log y}\sum_{y<p\le x}\log p = \frac{1}{\log y}(\theta(x)-\theta(y)).$$

D'où
$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\log y} + \pi(y) \leq \frac{\theta(x)}{\log y} + y.$$
Choisissons $y = \dfrac{x}{\log^2 x}$. Cette dernière inégalité se ramène alors à
$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{\log^2 x}.$$
On vient donc d'obtenir l'encadrement :
$$\frac{\theta(x)}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{\log^2 x}$$
qui conclut immédiatement aux résultats de la proposition. $\square$

Proposition 1.49. *On a équivalence entre $\theta(x) \sim_{+\infty} x$ et $\psi(x) \sim_{+\infty} x$. De plus, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que, pour tout $n \geq 2$
$$k_1 x \leq \theta(x) \leq k_2 x.$$
(ii) Il existe deux constantes k_2 et k_3 telles que, pour tout $n \geq 2$
$$k_2 x \leq \theta(x) \leq k_3 x.$$

Démonstration. De la proposition 1.32, on tire pour $x \geq 1$:
$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor.$$
(puisque $\theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = 0$ dès que $n > \left\lfloor \dfrac{\log x}{\log 2} \right\rfloor$). La proposition (1.49) en résulte. $\square$

1.8 Autour de l'entier $\mathrm{ppcm}(1, 2, 3, \ldots, n)$

Un résultat équivalent au théorème des nombres premiers énonce que :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)}{n} = 1.$$
Ce qui équivaut à dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait pour tout $n \geq N(\epsilon)$:
$$(e - \epsilon)^n \leq \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n) \leq (e + \epsilon)^n.$$

Théorème 1.50 (Farhi [23]). *Pour tout entier strictement positif n, on a :*
$$\mathrm{ppcm}\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right\} = \frac{\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n, n+1)}{n+1}.$$

Corollaire 1.51 (Farhi [23])**.** *Pour tout entier strictement positif n, on a :*

$$\operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n) \geq n\binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \geq \sqrt{n}\, 2^{n-2}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. En appliquant le théorème 1.50, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n) = n \operatorname{ppcm}\left\{\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \ldots, \binom{n-1}{n-1}\right\} &\geq n \max_{0 \leq i \leq n-1} \binom{n-1}{i} \\ &= n\binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}. \end{aligned}$$

Ce qui confirme la première inégalité du corollaire. La seconde inégalité du corollaire se vérifie aisément par récurrence. Ainsi s'achève cette démonstration. □

Chapitre 2

Instabilité par dérivation du $\mathbb{Z}$-module libre $Int_n(\mathbb{Z})$

2.1 Quelques éléments sur la théorie des opérateurs linéaires et leurs applications sur l'anneau des polynôme à valeur entières

Soient $I, \mathrm{D}, \Delta, \nabla$ et τ les opérateurs linéaires classiques représentant respectivement l'identité, la dérivation, l'opérateur de différence, l'opérateur de différence arrière et l'opérateur de translation par 1, définis comme suit :

$$\left.\begin{aligned} IP(X) &= P(X), \\ DP(X) &= P'(X), \\ \Delta P(X) &= P(X+1) - P(X), \\ \nabla P(X) &= P(X) - P(X-1), \\ \tau P(X) &= P(X+1) \end{aligned}\right. \qquad (\forall P \in \mathbb{C}[X]).$$

2.1.1 Quelques relations liant ces opérateurs

Il est claire que

$$\Delta = \tau - I, \quad \nabla = I - \tau^{-1}. \tag{2.1}$$

Par ailleurs, on a d'après la formule de Taylor pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\tau P(X) = P(X+1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j P(X)}{j!} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j}{j!} \right) P(X) = e^D P(X).$$

D'où l'on tire que :

$$\tau = e^D. \tag{2.2}$$

2.1.2 Quelques applications utiles

1) Les opérateurs ∇ et Δ agissent respectivement sur les puissances inférieures et supérieures de la même façon dont l'opérateur de dérivation D agit sur les puissances (usuelles) X^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de X. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\triangle X^{\underline{n}} = nX^{\underline{n-1}}, \tag{2.3}$$

$$\nabla X^{\overline{n}} = nX^{\overline{n-1}}. \tag{2.4}$$

2) Il est facile de montrer que chacune des deux familles « puissances inférieures » et « puissances supérieures » de X constitue une base du $\mathbb{C}[X]$. Les relations (2.3) et (2.4) permettent d'obtenir les analogues de la formule de Taylor. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\triangle^k P)(0)}{k!} X^{\underline{k}}, \tag{2.5}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nabla^k P)(0)}{k!} X^{\overline{k}}. \tag{2.6}$$

Proposition 2.1. *Pour tout polynôme $P(X)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, on a*

$$P'(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nabla^n P(X)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n P(X)}{n}. \tag{2.7}$$

Formellement, on écrit

$$D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nabla^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n}{n}. \tag{2.8}$$

Démonstration. On a $\nabla = I - \tau^{-1} = I - (e^D)^{-1} = I - e^{-D}$. D'où l'on tire que :

$$D = -\log(I - \nabla) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nabla^n}{n}.$$

De même, on a $\Delta = \tau - I = e^D - I$. D'où l'on tire que :

$$D = \log(I + \Delta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n}{n}.$$

La proposition est ainsi démontrée. □

C'est la formule (2.7) qui a permis de montrer la formule (2) (en remarquant préalablement que $Int(\mathbb{Z})$ est stable par ∇).

2.1.3 Application sur l'anneau $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$.

Bien que $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ n'est pas stable par dérivation (c'est à dire par l'opérateur D), il est visiblement stable par chacun des opérateurs ∇ et Δ. Nous commençons par montrer que $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang infini tout en lui fournissant une base simple.

Proposition 2.2. *L'anneau* Int$(\mathbb{Z})$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre de rang infini et la famille* $\left(\frac{X^{\overline{n}}}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *constitue une base de* Int$(\mathbb{Z})$.

Démonstration. L'ensemble Int$(\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module (évident). La famille $\left(\frac{X^{\overline{n}}}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une génératrice de Int$(\mathbb{Z})$ (grâce à la formule (2.6)). Supposons qu'il existe une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (dont les termes sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux) tel que l'on nait

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{X^{\overline{k}}}{k!} = 0. \tag{2.9}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant ∇^n aux deux membres de (2.9) puis en substituant X par 0, on obtient

$$a_n = 0.$$

L'entier n étant quelconque, la famille en question est libre. □

Remarque 2.3. On montre de la même façon que la famille $\left(\frac{X^{\underline{n}}}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une base de Int$(\mathbb{Z})$.

Conséquence 2.4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'ensemble* Int$_n(\mathbb{Z})$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre de rang* $(n+1)$ *et la famille* $\left(\frac{X^{\overline{k}}}{k!}\right)_{0\leq k\leq n}$ *constitue une base de* Int$_n(\mathbb{Z})$.

Nous achevons cette section en rappelant les jolies formules de Vandermonde et de Nörlund généralisent la formule du binôme. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $X, Y \in \mathbb{R}$:

$$(X+Y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} X^{\underline{k}} Y^{\underline{n-k}}.$$

En effet, il suffit d'appliquer (2.5) pour $p_Y(X) = (X+Y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\triangle^{(k)} p_Y(0)}{k!} X^{\underline{k}}$ (où Y est pris comme paramètre). On démontre De la même façon la formule analogue pour les puissances supérieures, qui est :

$$(X+Y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} X^{\overline{k}} Y^{\overline{n-k}}.$$

2.2 Étude de la stabilité du $\mathbb{Z}$-module libre Int$_n(\mathbb{Z})$ par l'opérateur de dérivation d'ordre supérieur

Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, définissons ([19]) :

$$F_{n,k} := \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}^* \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k} \quad \text{et} \quad d_{n,k} := den(F_{n,k}),$$

avec la convention $F_{0,0} = 1, F_{n,0} = 0 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ et $F_{n,k} = 1$ lorsque $n < k$. Les deux problèmes suivants sont soulevés et résolus par Farhi [19].

2.2.1 Problème 1 :

Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ donnés, déterminer le plus petit entier strictement positif $\alpha_{n,k}$ satisfaisant la propriété :

$$\forall P \in E_n \ : \ \alpha_{n,k} D^k P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}). \tag{2.10}$$

2.2.2 Problème 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, déterminer le plus petit entier strictement positif α_n satisfaisant la propriété :

$$\forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}),\ \forall k \in \mathbb{N} \ : \ \alpha_n D^k P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}). \tag{2.11}$$

2.2.3 Étude du problème 1 :

Commençant par étudier le cas $k = 1$ et n étant quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Dans ce cas, nous allons déterminer le plus petit entier strictement positif $\alpha_{n,1}$ satisfaisant la propriété

$$\forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) \ : \ \alpha_{n,1} P' \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}). \tag{2.12}$$

Pour ce faire, soit l'ensemble ξ_n défini par

$$\xi_n = \{a \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) : \ aP' \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})\}.$$

L'ensemble ξ_n est non nul car, d'après la formule (2.5), $n! \in \xi_n$. Comme ξ_n est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{Z}$ alors il est de la forme

$$\xi_n = S_n \mathbb{Z}. \tag{2.13}$$

Il est clair que S_n est le plus petit entier strictement positif dans ξ_n. Donc, S_n n'est rien d'autre que la constante $\alpha_{n,1}$ requise dans la formule (2.10), c'est à dire

$$\alpha_{n,1} = S_n. \tag{2.14}$$

Théorème 2.5 ([19]). *Pour tout entier positif n, on a*

$$S_n = \mathrm{ppcm}\{1, 2, ..., n\}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et posons $l_n := \mathrm{ppcm}\{1, 2, ..., n\}$. Nous allons montrer que

$$S_n = l_n.$$

Pour ce faire, nous allons montrer que S_n est un multiple de l_n et l_n est un multiple de S_n.

• Montrons que l_n est multiple de S_n. Cela revient à montrer que $l_n \in \xi_n$. D'après (2.7), on a

$$\forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) : l_n P' \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) \quad (\text{car } \nabla^k P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}), \forall k \in \mathbb{N}).$$

Donc $l_n \in \xi_n$. D'après la formule (2.13) on en déduit que l_n est un multiple de S_n.

• Maintenant, nous allons montrer que S_n est multiple de l_n. Par définition de l_n, cela revient à montrer que S_n est un multiple de chacun des entiers positifs $1, 2, 3, ..., n$. Alors, soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$ fixé et montrons que S_n est multiple de k. On pose $B_k(x) = \frac{x^{\bar{k}}}{k!} = \begin{pmatrix} x+k-1 \\ k \end{pmatrix}$. Pour $k \leq n$, on a $B_k \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$; comme $S_n \in \xi_n$, on a $\forall x \in \mathbb{Z} : S_n B_k'(x) \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$. En particulier $S_n B_k'(0) \in \mathbb{Z}$. Mais $B_k'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{B_k(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)(x+2)...(x+k-1)}{k!} = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$. D'où $\frac{S_n}{k} \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que S_n est un multiple de k, ce qui achève la démonstration du théorème. □

• **Étude de la formule** (2.10) **dans le cas** $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ donnés, soit

$$\xi_{n,k} = \{a \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z}) : \ aP^{(k)} \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})\}.$$

Montrons que $\xi_{n,k}$ est non nul. Pour tout $P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$, on a

$$n!P \in \mathbb{Z}[X] \ \ (\text{voir } \ (2.5)).$$

Ce qui entraîne que $(n!P)^{(k)} = n!P^{(k)} \in \mathbb{Z}[X]$, d'où $n!P^{(k)} \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$. Donc $n! \in \xi_{n,k}$, ce qui montre que $\xi_{n,k}$ n'est pas nul. D'autre part, $\xi_{n,k}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{Z}$, donc $\xi_{n,k}$ est de la forme

$$\xi_{n,k} = S_{n,k}\mathbb{Z}, \tag{2.15}$$

avec $S_{n,k} \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que $S_{n,k}$ est le plus petit entier strictement positif dans l'ensemble ξ_n. Donc, $S_{n,k}$ n'est rien d'autre que la constante $\alpha_{n,k}$ requise dans la formule 2.10 c'est à dire

$$\alpha_{n,k} = S_{n,k}. \tag{2.16}$$

Théorème 2.6 ([19])**.** *Pour tous entiers positifs n, k, on a*

$$S_{n,k} = \mathrm{ppcm}\left\{d_{m,k};\ k \leq m \leq n\right\}.$$

Démonstration. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ fixés. Pour simplifier, on pose $l_{n,k} := \mathrm{ppcm}\,\{d_{m,k}; k \leq m \leq n\}$. Nous allons montrer que $S_{n,k} = l_{n,k}$. Pour ce faire, nous allons montrer que $S_{n,k}$ est un multiple de $l_{n,k}$ et $l_{n,k}$ est un multiple de $S_{n,k}$.

• Montrons d'abord que $l_{n,k}$ est multiple de $S_{n,k}$. Il suffit de montrer que $l_{n,k} \in \xi_n$. En effet, d'après la formule (2.7), on a

$$D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nabla^n}{n}.$$

Par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \ D^k = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\nabla^{n_1}}{n_1} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{\nabla^{n_2}}{n_2} ... \sum_{n_k=1}^{+\infty} \frac{\nabla^{n_k}}{n_k} = \sum_{n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, ..., n_k \geq 1} \frac{\nabla^{n_1+n_2+...+n_k}}{n_1 n_2 ... n_k}.$$

Comme $\nabla^i P = 0$ pour $i > n$ cette dernière formule devient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \; D^k = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1+\cdots+n_k \leq n}} \frac{\nabla^{n_1+n_2+\cdots+n_k}}{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \; D^k = \sum_{m=k}^{m=n} \left(\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1+\cdots+n_k = m}} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k} \right) \nabla^m.$$

En appliquant ceci sur P, puisque $\nabla^i P = 0$ pour $i > n$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \; D^k P = \sum_{m=k}^{m=n} F_{m,k} \nabla^m P. \tag{2.17}$$

Pour tout $m \in \{k, k+1, ..., n\}$ on a $\nabla^m P \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$ et $l_{n,k} F_{m,k} \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que $l_{n,k} P^{(k)} \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$, il s'ensuit que $l_{n,k} \in \xi_{n,k}$, d'après (2.15) et (2.16) on en déduit que $l_{n,k}$ est multiple de $S_{n,k}$.

• Maintenant, nous allons Montrer que $S_{n,k}$ est multiple de $l_{n,k}$. Par définition de $l_{n,k}$, cela revient à montrer que $S_{n,k}$ est un multiple de chacun des entiers positifs $d_{k,k}, d_{k+1,k}, d_{k+2,k}, ..., d_{n,k}$. Alors, soit $m_0 \in \{k, k+1, ..., n\}$ fixé et montrons que $S_{n,k}$ est multiple de $d_{m_0,k}$. Posons

$$B(x) := \frac{x^{\overline{m_0}}}{m_0!} = \binom{x + m_0 - 1}{m_0}.$$

Comme $B \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$, on a $S_{n,k} B^{(k)} \in \mathrm{Int}_n(\mathbb{Z})$, ce qui entraîne $S_{n,k} B^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. Or, par application de la formule (2.17) pour $P = B$, on trouve

$$B^{(k)}(0) = \sum_{m=k}^{m=n} F_{m,k} (\nabla^m B)(0).$$

Comme $(\nabla^m B)(0) = \begin{cases} 1 \text{ si } \; m = m_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, cette dernière formule devient

$$B^{(k)}(0) = F_{m_0,k}.$$

Donc $S_{n,k} F_{m_0,k} \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que $S_{n,k}$ est un multiple de $\mathrm{den}(F_{m_0,k}) = d_{m_0,k}$. Ce qui achève la démonstration du théorème. □

Définition-Notation 2.7. Pour $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, posons

$$C_{n,k} := \mathrm{ppcm} \left\{ i_1 i_2 ... i_k \; : \; i_1, i_2, .., i_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1 + i_2 + .. + i_k \leq n \right\},$$

avec la convention $C_{n,0} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned} \rho_n &:= \mathrm{ppcm} \left\{ C_{n,k}; \; 0 \leq k \leq n \right\} \\ &= \mathrm{ppcm} \left\{ i_1 i_2 \cdots i_k; \; k \in \mathbb{N}^*, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n \right\}. \end{aligned}$$

Les propriétés arithmétiques des nombres $C_{n,k}$ et ρ_n constituent une partie de l'objectif du chapitre suivant.

Théorème 2.8 ([19]). *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a $S_{n,k}$ divise $C_{n,k}$. Si de plus $n \geq k$ alors $S_{n,k}$ est multiple de $\frac{C_{n,k}}{k!}$.*

Démonstration. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ fixés. Pour tout entier $m \in [k, n]$, on a visiblement :

$$d_{m,k} \text{ divise ppcm} \{i_1 i_2 \cdots i_k;\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k = m\}.$$

Ce qui entraîne que

$$\text{ppcm} \{d_{m,k};\ k \leq m \leq n\} \text{ divise ppcm} \{i_1 i_2 \cdots i_k;\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n\};$$

c'est-à-dire (d'après le théorème 2.6) $S_{n,k}$ divise $C_{n,k}$, comme il fallait le prouver. Ce qui confirme le premier point du théorème. Concernant le deuxième point du théorème, il suffit de montrer que l'entier positif $k!S_{n,k}$ est multiple de $C_{n,k}$, ce qui revient à montrer que $k!S_{n,k}$ est multiple de chaque entier de la forme $i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$, avec $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*$ et $i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n$. Soient $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n$ et montrons que $k!S_{n,k}$ est multiple de l'entier $i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$. Pour ce faire, considérons le polynôme, de degré $i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$, à valeurs entières

$$P(X) = \binom{X}{i_1}\binom{X}{i_2}\cdots\binom{X}{i_k} = B_{i_1}(X)B_{i_2}(X)...B_{i_k}(X).$$

Le développement de Taylor au voisinage de 0 de chaque polynôme $B_i(X)$ $(i \in \mathbb{N}^*)$ commence par $\frac{(-1)^{i-1}}{i}X + \ldots$, car $B_i(0) = 0$ et $B_i'(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{B_i(X)}{x}$ $= \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{(X-1)(X-2)...(X-i+1)}{i!} = \frac{(-1)^{i-1}}{i}$. Par conséquent, le développent de Taylor de $P(X)$ en 0 commence par

$$\frac{(-1)^{i_1-1}}{i_1}.\frac{(-1)^{i_2-1}}{i_2}...\frac{(-1)^{i_k-1}}{i_k}X^k + \cdots = \pm\frac{1}{i_1 i_2 ... i_k}X^k + \ldots.$$

D'où

$$P^{(k)}(0) = \pm\frac{k!}{i_1 i_2 \cdots i_k}.$$

Comme $S_{n,k}P^{(k)} \in \text{Int}_n(\mathbb{Z})$, on a en particulier $S_{n,k}P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $\pm S_{n,k}\frac{k!}{i_1 i_2 \cdots i_k} \in \mathbb{Z}$), ce qui entraîne que $k!S_{n,k}$ est multiple de $i_1 i_2 \cdots i_k$, comme il fallait le prouver. Ceci confirme la seconde partie du théorème et complète cette démonstration. $\square$

2.2.4 Étude du problème 2 :

De la définition de α_n, il est clair que α_n est le plus petit entier strictement positif appartenant à l'idéal de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \xi_{n,k} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_{n,k}\mathbb{Z} \qquad \text{(d'après (2.15))} \\ &= \text{ppcm} \{S_{n,k};\ k \in \mathbb{Z}\} \mathbb{Z} \\ &= \text{ppcm} \{S_{n,k}\,; 0 \leq k \leq n\} \mathbb{Z} \qquad (\text{car } S_{n,k} = 1 \text{ pour } k > n). \end{aligned}$$

D'où
$$\alpha_n = \operatorname{ppcm}\{S_{n,k}; 0 \leq k \leq n\}. \tag{2.18}$$
En utilisant le théorème 2.6, il s'ensuit que
$$\alpha_n = \operatorname{ppcm}\{d_{m,k};\ 0 \leq k \leq m \leq n\}. \tag{2.19}$$

Théorème 2.9 ([19]). *Pour tout entier naturel n , on a*
$$\alpha_n = \rho_n = \prod_{p \text{ premier}} p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}.$$

Rappelons que la définition de ρ_n est indiquée dans la définition 2.7. La démonstration de ce théorème fait appel aux deux lemmes suivants :

Lemme 2.10. *pour tout entier strictement positif a et tout nombre premier p, on a*
$$v_p(a) \leq \frac{a}{p}.$$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. En posant $\alpha := v_p(a)$, la décomposition en produit de facteurs premiers de a permet d'écrire $a = p^\alpha b$, où $b \in \mathbb{N}^*$ n'est pas un multiple de p. Pour $\alpha = 0$, l'inégalité du lemme est triviale. Par ailleurs, pour $\alpha \geq 1$, on a
$$\alpha \leq 2^{\alpha-1} \leq p^{\alpha-1} \leq p^{\alpha-1} b = \frac{a}{p},$$
comme il fallait le prouver. □

Lemme 2.11 (le lemme clef [19]). *Pour tout entier strictement positif k et tout nombre premier p, on a*
$$v_p(F_{kp,k}) = -k.$$

Démonstration. Soient k un entier strictement positif et p un nombre premier. On a par définition :
$$F_{kp,k} := \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1+\cdots+n_k = kp}} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}.$$
Pour tout $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ tel que $n_1 + \cdots + n_k = kp$, on a :
$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}\right) &= -\sum_{r=1}^{k} v_p(n_r) \\ &\geq -\sum_{r=1}^{k} p^{v_p(n_r)-1} \qquad \text{(d'après le lemme 2.10)} \\ &\geq -\sum_{r=1}^{k} \frac{n_r}{p} \\ &= -\frac{kp}{p} = -k. \end{aligned}$$

De plus, l'égalité $v_p\left(\frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}\right) = -k$ a lieu si et seulement si l'on a pour tout $r \in \{1, \ldots, k\}$:

$$v_p(n_r) = p^{v_p(n_r)-1} \text{ et } p^{v_p(n_r)} = n_r.$$

Il est clair que ces deux conditions sont satisfaites pour $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = (p, \ldots, p)$. Inversement, si les conditions en question sont satisfaites alors chaque n_r $(r = 1, \ldots, k)$ est une puissance de p non égale à 1. Ceci entraîne en particulier que $n_r \geq p$ $(\forall r \in \{1, \ldots, k\})$. Comme $n_1 + \cdots + n_k = kp$, on a nécessairement $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = p$. Par conséquent

$$v_p\left(\frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}\right) = -k \Longleftrightarrow (n_1, n_2, \ldots, n_k) = (p, \ldots, p).$$

La propriété usuelle sur la valuation p-adique d'une somme conclut que

$$v_p(F_{kp,k}) = \min_{\substack{n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + \cdots + n_k = kp}} v_p\left(\frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}\right) = -k.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. □

Démonstration du théorème 2.9. Soit n un entier positif fixé. D'après la formule (2.18) et le premier point du théorème 2.8, on a $\alpha_n = \operatorname{ppcm}\{S_{n,k};\ 0 \leq k \leq n\}$ divise $\operatorname{ppcm}\{C_{n,k};\ 0 \leq k \leq n\} = \rho_n$. Il reste à montrer que α_n est multiple de ρ_n et que $\rho_n = \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}$. Il suffit de montrer que l'on a pour tout nombre premier p :

$$v_p(\rho_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, \quad v_p(\rho_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \quad \text{et} \quad v_p(\alpha_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

Soit p un nombre premier fixé.

• Montrons que $v_p(\rho_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n$, on a :

$$v_p(i_1 i_2 \cdots i_k) = v_p(i_1) + v_p(i_2) + \cdots + v_p(i_k).$$

En utilisant le lemme 2.11, il vient que :

$$v_p(i_1 i_2 \cdots i_k) \leq \frac{i_1}{p} + \frac{i_2}{p} + \cdots + \frac{i_k}{p} = \frac{i_1 + i_2 + \cdots + i_k}{p} \leq \frac{n}{p};$$

d'où

$$v_p(\rho_n) = \max_{\substack{k \in \mathbb{N}^*, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n}} v_p(i_1 i_2 \cdots i_k) \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor,$$

comme il fallait le prouver.

• Montrons que $v_p(\rho_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Cette inégalité est triviale lorsque $p > n$. Supposons donc que $p \leq n$. Considérons les entiers $i_1, i_2, \ldots, i_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}$ donnés par

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} = p.$$

Comme $i_1 + i_2 + \cdots + i_{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p \leq n$ alors ρ_n est multiple de $i_1 \cdot i_2 \cdots i_{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} = p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$. D'où

$$v_p(\rho_n) \geq v_p\left(p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}\right) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor,$$

comme il fallait le prouver .

• Montrons que $v_p(\alpha_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

D'après (2.19), on a

$$v_p(\alpha_n) = \max_{0 \leq k \leq m \leq n} v_p(d_{m,k}) \geq v_p\left(d_{p\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}\right) \geq -v_p\left(F_{p\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}\right)$$

(car $d_{p\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ désigne le dénominateur de $F_{p\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$). Mais, d'après le lemme 2.11, on a

$$v_p\left(F_{p\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}\right) = -\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor;$$

d'où $v_p(\alpha_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Ce qui complète la démonstration du théorème 2.9. □

2.2.5 Formes explicites pour les nombres $F_{n,k}$

Proposition 2.12 ([19]). *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on a*

$$F_{n,k} = (-1)^{n+k} \frac{k!}{n!} s(n,k) = \frac{k!}{n!} |s(n,k)|, \tag{2.20}$$

et

$$F_{n,k} = \left| \binom{X}{n}^{(k)} (0) \right|. \tag{2.21}$$

Si de plus $n \geq k \geq 2$, alors on a

$$F_{n,k} = \frac{k!}{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leq n-1} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}. \tag{2.22}$$

La proposition suivante permet de calculer les nombres rationnels $F_{n,k}$ de proche en proche.

Proposition 2.13 ([19]). *On a*

$$F_{n+1,k} = \frac{k}{n+1} F_{n,k-1} + \frac{n}{n+1} F_{n,k} \qquad (\forall n, k \in \mathbb{N}^*,\ n \geq k). \tag{2.23}$$

2.3 Autour de l'entier $C_{n,k}$

Dans cette section, on étudie les nombres $C_{n,k}$ définis par

$$C_{n,k} := \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n\}$$

($\forall n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq k$), lesquels sont issus du problème de la stabilité par dérivation d'ordre k de l'anneau des polynômes à valeurs entières.

Exemple :

$$C_{4,2} := \text{ppcm}\left\{i_1 i_2;\ i_1, i_2 \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1 + i_2 \leq 4\right\} = \text{ppcm}\left\{1, 2, 3, 4\right\} = 12.$$

On classe ces nombres sous forme d'un triangle arithmétique comme suit :

$$\begin{array}{llllll}
C_{1,1} & & & & & \\
C_{2,1} & C_{2,2} & & & & \\
C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & & & \\
C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & & \\
C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Le début de ce triangle est alors :

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
2 & 1 & & & & \\
6 & 2 & 1 & & & \\
12 & 12 & 2 & 1 & & \\
60 & 12 & 12 & 2 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

2.3.1 Une relation de récurrence bien utile

Lorsque les entiers strictement positifs n et k sont assez grands, le calcul des nombres $C_{n,k}$ s'avère assez lent en utilisant uniquement la définition originale de ceux-ci. Il est établi dans [19] une relation de récurrence qui permet de calculer beaucoup plus facilement un nombre $C_{n,k}$ en se servant des nombres $C_{m,k-1}$ $(m < n)$ qui le précèdent. Cette relation permet en outre de créer un programme Maple très simple pour calculer ces nombres $C_{n,k}$.

Proposition 2.14 ([19])**.** *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq k$, on a*

$$C_{n,k} = \text{ppcm}\left\{iC_{n-i,k-1};\ i = 1, \dots, (n-k+1)\right\}.$$

Démonstration. Fixons $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq k$. Dans cette preuve, il est commode d'utiliser la notation $\vee(a, b, c, \dots)$ au lieu de $\text{ppcm}(a, b, c, \dots)$. On a par définition :

$$C_{n,k} := \bigvee_{i_1+\cdots+i_k \leq n} (i_1 \cdots i_k) = \bigvee_{i_1+\cdots+i_{k-1}+i \leq n} (i_1 \cdots i_{k-1} i).$$

Nous constatons que $i_1 + \cdots + i_{k-1} + i \leq n$ entraîne $i \leq n - (i_1 + \cdots + i_{k-1}) \leq$

$n-k+1$. D'où

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \bigvee_{i=1}^{n-k+1}\left(\bigvee_{i_1+\cdots+i_{k-1}\leq n-i}(i_1\cdots i_{k-1}i)\right) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n-k+1}\left(i\left(\bigvee_{i_1+\cdots+i_{k-1}\leq n-i} i_1\cdots i_{k-1}\right)\right) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n-k+1} iC_{n-i,k-1}, \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. □

2.3.2 Un programme Maple pour calculer les nombres $C_{n,k}$

En se servant de la relation de récurrence donnée par la proposition 2.14, on a construit un programme Maple très simple permettant de calculer les nombres $C_{n,k}$ pour n, k donnés. Il permet également de dresser le triangle arithmétique constitué de ces nombres $C_{n,k}$ jusqu'à une ligne voulue. Le programme en question est le suivant :

```
#Procédure qui calcule ppcm(1,...,n)
> ppcm:=proc(n)
> local l,i;
> l:=1;
> for i from 1 to n do;
> l:=ilcm(l,i);
> od;
> l;
> end;

> #Procédure de la fonction C_{n , k}
> BoudFar:=proc(n,k)
> local l,i;
> option remember;
> if k=1 then return(ppcm(n));
> else do;
> l:=1;
> for i from 1 to (n-k+1) do;
> l:=ilcm(l,i*BoudFar(n-i,k-1));
> od;
> return(l);
> od;
> fi;
> end;
```

```
>#Procédure qui dresse le triangle arithmétique des nombres C_{n , k}
 jusqu'à la ligne n
> tbf:=proc(n)
> local m,k;
> for m from 1 to n do;
> print(seq(BoudFar(m,k),k=1..m));
> od;
> end;
```

Exemples d'application de ce programme :

La commande :

```
> ppcm(6);
```

donne :

$$60$$

qui représente le nombre $\mathrm{ppcm}(1, 2, \dots, 6)$. La commande :

```
> BoudFar(5,3);
```

donne :

$$12$$

qui représente le nombre $C_{5,3}$. Enfin, la commande :

```
> tbf(10);
```

donne :

qui représente le triangle arithmétique des nombres $C_{n,k}$ jusqu'à la ligne 10.

2.3.3 Étude des diagonales du triangle des nombres $C_{n,k}$

Les suites diagonales du triangle des $C_{n,k}$ (présenté à la page 35) sont :

$$\begin{array}{llllll}
\boldsymbol{D_0} : & C_{1,1} & C_{2,2} & C_{3,3} & C_{4,4} & \dots \\
\boldsymbol{D_1} : & C_{2,1} & C_{3,2} & C_{4,3} & C_{5,4} & \dots \\
\boldsymbol{D_2} : & C_{3,1} & C_{4,2} & C_{5,3} & C_{6,4} & \dots \\
\boldsymbol{D_3} : & C_{4,1} & C_{5,2} & C_{6,3} & C_{7,4} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

De façon générale, la suite diagonale d'ordre k ($k \in \mathbb{N}$) est :

$$\boldsymbol{D_k} : \quad C_{k+1,1} \; C_{k+2,2} \; \dots \; C_{k+n,n} \; \dots$$

Autrement dit, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{D_k} = (C_{k+n,n})_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

On est amené ainsi à introduire la notation suivante :

Notation : On note pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_{k,n} := C_{k+n,n} = \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_n ;\ i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\}, \tag{2.24}$$

de sorte que la diagonale $\boldsymbol{D_k}$ sera constituée des éléments de la suite $(D_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\boldsymbol{D_k} : \quad D_{k,1} \ D_{k,2} \ D_{k,3} \ \ldots$$

Numériquement, les premiers termes des premières suites diagonales $\boldsymbol{D_k}$ sont donnés par ce qui suit :

$\boldsymbol{D_0}$:	1	1	1	1	1	1	...
$\boldsymbol{D_1}$:	2	2	2	2	2	2	...
$\boldsymbol{D_2}$:	6	12	12	12	12	12	...
$\boldsymbol{D_3}$:	12	12	24	24	24	24	...
$\boldsymbol{D_4}$:	60	360	360	720	720	720	...
$\boldsymbol{D_5}$:	60	360	720	720	1440	1440	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

En dressant ces suites diagonales, voici quelques constatations que l'on justifiera plus loin :

1. Toutes les suites diagonales $\boldsymbol{D_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) sont stationnaires. On a coloré ci-dessus en magenta les termes à partir desquels $\boldsymbol{D_k}$ se stationne.
2. Chaque suite diagonale $\boldsymbol{D_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) se stationne à partir du rang k.
3. En notant par P_k la limite de chaque suite stationnaire $\boldsymbol{D_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), nous avons constaté que P_k est toujours un multiple de $(k+1)!$.
4. Chaque terme d'une suite diagonale $\boldsymbol{D_k}$ divise le terme qui le suit.

2.4 Quelques résultats

Proposition 2.15. *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq k$, on a*

$$C_{n,k} = \prod_{p \leq n-k+1} p^{\max\left\{\sum_{1 \leq i \leq k} v_p(n_i);\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } n_1 + \cdots + n_k \leq n\right\}}.$$

Démonstration. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq k$. De la définition même des nombres $C_{n,k}$, on a clairement :

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \prod_p p^{v_p(C_{n,k})} \\ &= \prod_p p^{\max\left\{v_p(n_1 \cdots n_k);\, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } n_1 + \cdots + n_k \leq n\right\}} \\ &= \prod_p p^{\max\left\{\sum_{1 \leq i \leq k} v_p(n_i);\, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } n_1 + \cdots + n_k \leq n\right\}}. \end{aligned}$$

Il reste juste à prouver que les nombres premiers dont l'exposant est non nul dans cette décomposition de $C_{n,k}$ en produit de facteurs premiers sont tous inférieurs ou égaux à $n-k+1$. Pour ce faire, posons provisoirement :

$$E_{n,k} := \left\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k} \text{ tel que } n_1 + \cdots + n_k \leq n\right\}.$$

Nous constatons que pour tout $(n_1, \dots, n_k) \in E_{n,k}$, on a :

$$n \geq n_1 + \cdots + n_k \geq \max(n_1, \dots, n_k) + (k-1);$$

d'où :

$$\max(n_1, \dots, n_k) \leq n - k + 1.$$

Pour tout nombre premier p divisant $C_{n,k}$, il existe un k-uplet $(n_1, \dots, n_k) \in E_{n,k}$ pour lequel p divise l'un des n_i $(1 \leq i \leq k)$; donc $p \leq \max(n_1, \dots, n_k) \leq n-k+1$. Ce qui complète la preuve de la proposition. □

Proposition 2.16. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq k$, on a*

$$D_{k,n} = \prod_p p^{\lfloor \frac{k}{p-1} \rfloor} = \prod_{p \leq k+1} p^{\lfloor \frac{k}{p-1} \rfloor}. \tag{2.25}$$

En particulier, la suite diagonale $(D_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire au moins à partir de $n = k$.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq k$. La seconde égalité de (2.25) provient simplement du fait que pour tout nombre premier p vérifiant $p > k+1$, on a $\lfloor \frac{k}{p-1} \rfloor = 0$. Montrons la première égalité de (2.25). Il s'agit de montrer que pour tout nombre premier p, on a

$$v_p(D_{k,n}) = \left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor.$$

Soit alors p un nombre premier. Par définition même du nombre $D_{k,n}$, on a :

$$\begin{aligned} v_p(D_{k,n}) &= v_p\left(\text{ppcm}\left\{i_1 \cdots i_n;\ i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\right\}\right) \\ &= \max\left\{\sum_{1 \leq \ell \leq n} v_p(i_\ell);\ i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$N_p := \left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor.$$

On est amené à montrer que

$$\max\left\{\sum_{1 \leq \ell \leq n} v_p(i_\ell) :\ i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\right\} = N_p.$$

• Montrons d'abord que $\max\left\{\sum_{1 \leq \ell \leq n} v_p(i_\ell) :\ i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\right\} \geq N_p$. Pour ce faire, on considère le n-uplet particulier $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ donné par :

$$j_1 = j_2 = \cdots = j_{N_p} = p \ \text{ et } \ j_{N_p+1} = \cdots = j_n = 1.$$

On a bien :

$$j_1 + \cdots + j_n \;=\; pN_p + n - N_p \;=\; (p-1)N_p + n \;\leq\; (p-1)\frac{k}{p-1} + n \;=\; k+n.$$

D'où :

$$\max\left\{\sum_{1\leq \ell \leq n} v_p(i_\ell) \,:\, i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\right\} \geq \sum_{1\leq \ell\leq n} v_p(j_\ell) = N_p,$$

comme il fallait le prouver.

• Montrons maintenant que $\max\left\{\sum_{1\leq\ell\leq n} v_p(i_\ell);\, i_1+\cdots+i_n \leq k+n\right\} \;\leq\; N_p$. Pour tout n-uplet $(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $i_1+\cdots+i_n \;\leq\; k+n$, en se servant de la majoration [1] $e \leq \frac{p^e-1}{p-1}$ (valable pour tout $e \in \mathbb{N}$), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq\ell\leq n} v_p(i_\ell) \leq \sum_{1\leq\ell\leq n} \frac{p^{v_p(i_\ell)}-1}{p-1} \leq \sum_{1\leq\ell\leq n}\frac{i_\ell-1}{p-1} = \frac{\left(\sum_{1\leq\ell\leq n} i_\ell\right)-n}{p-1} &\leq \frac{(k+n)-n}{p-1}\\ &= \frac{k}{p-1},\end{aligned}$$

et puisque $\sum_{1\leq\ell\leq n} v_p(i_\ell)$ est un entier, on en conclut que :

$$\sum_{1\leq\ell\leq n} v_p(i_\ell) \;\leq\; \left\lfloor \frac{k}{p-1}\right\rfloor \;=\; N_p.$$

Par conséquent, on a :

$$\max\left\{\sum_{1\leq\ell\leq n} v_p(i_\ell) \,:\, i_1+\cdots+i_n \leq k+n\right\} \;\leq\; N_p,$$

comme il fallait le prouver. En conclusion, on a pour tout nombre premier p :

$$\max\left\{\sum_{1\leq\ell\leq n} v_p(i_\ell);\, i_1+\cdots+i_n \leq k+n\right\} = N_p.$$

Ce qui complète cette démonstration. □

Proposition 2.17. *Chaque terme d'une suite diagonale $\mathbf{D_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) divise le terme qui le suit. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$D_{k,n} \;\text{ divise }\; D_{k,n+1}.$$

Démonstration. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 2.14, on a :

$$\begin{aligned} D_{k,n+1} := C_{k+n+1,n+1} &= \operatorname{ppcm}\{iC_{k+n+1-i,n};\, i = 1,\ldots,k+1\}\\ &= \operatorname{ppcm}\{iD_{k+1-i,n};\, i=1,\ldots,k+1\}\\ &= \operatorname{ppcm}\{D_{k,n}\,,\, 2D_{k-1,n}\,,\,\ldots\,,\,(k+1)D_{0,n}\}.\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $D_{k,n+1}$ est multiple de $D_{k,n}$. La proposition est démontrée. □

1. **Preuve de l'inégalité :** Pour tout $e \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{p^e-1}{p-1} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{e-1} \geq \underbrace{1+\cdots+1}_{e \text{ fois}} = e$.

Proposition 2.18. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$D_{k,n} \text{ divise } (k+n)!.$$

Démonstration. Par définition, on a $D_{k,n} := C_{k+n,n} = \text{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_n;\ i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1 + \cdots + i_n \leq k+n\}$. Il s'agit donc de montrer que tout produit de la forme $i_1 i_2 \cdots i_n$ (avec $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1 + \cdots + i_n \leq k+n$) divise $(k+n)!$. Or, un tel produit $i_1 i_2 \cdots i_n$ divise visiblement $i_1! i_2! \cdots i_n!$, et ce dernier divise $(i_1 + \cdots + i_n)!$ (puisque le quotient du second sur le premier est un coefficient multinomial). Enfin, $(i_1 + \cdots + i_n)!$ divise $(k+n)!$ (puisque $i_1 + \cdots + i_n \leq k+n$). D'où l'on conclut que $i_1 i_2 \cdots i_n$ divise $(k+n)!$. Ce qui complète cette démonstration. □

2.4.1 La suite des pivots

Nous nous intéressons dans ce qui suit aux limites des suites stationnaires $\boldsymbol{D_k}$ ($k \in \mathbb{N}$). L'ensemble de toutes ces limites constitue à son tour une suite dont le terme général est, en vertu de la proposition 2.16, $D_{k,k} = C_{2k,k}$. L'importance de cette nouvelle suite suggère de lui attribuer un nom particulier ainsi qu'une notation particulière.

Notation et appellation :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\sigma_n := D_{n,n} = C_{2n,n} = \text{ppcm}\left\{i_1 i_2 \cdots i_n;\ i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}^*, i_1 + i_2 + \cdots + i_n \leq 2n\right\}. \tag{2.26}$$

On appelle σ_n ($n \in \mathbb{N}$) le *pivot* d'ordre n et on appelle $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite des pivots*. La décomposition de σ_n ($n \in \mathbb{N}$) en produit de nombres premiers est une conséquence directe de la proposition 2.16. Elle est donnée par :

$$\sigma_n = \prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} = \prod_{p \leq n+1} p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor}. \tag{2.27}$$

La formule (2.27) nous servira par la suite pour entamer l'étude analytique des nombres σ_n.

Chapitre 3

Sur un certain type de produits portant sur les nombres premiers

Ce chapitre constitue une traduction (en français) et un développement de l'article [3].

3.1 Transformation d'un produit portant sur les nombres premiers en un ppcm

Dans cette section, nous allons étudier des expressions du type $\prod_p p^{\left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor}$, où x désigne un nombre réel positif et f une fonction arithmétique satisfaisant quelques conditions. Nous commençons par prouver qu'une telle expression peut être exprimée à l'aide de la fonction ppcm en omettant toute référence aux nombres premiers. La formule de Legendre nous apprend que le produit

$$\prod_p p^{\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor}$$

est simplement égale à $\lfloor x \rfloor !$. Mais qu'en est-il des produits partiels $\prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$, $\prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor}$, $\prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor}$, etc extraits du produit de Legendre ? Peut-on exprimer chacun de ces produits sans faire appel aux nombres premiers ? Par exemple, comme indiqué dans le chapitre 2, le produit infini $\prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ peut être interprété sans faire appel aux nombres premiers ; on a plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} = \operatorname{ppcm}\left\{i_1 i_2 \cdots i_k ;\ k \in \mathbb{N}^*, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n\right\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons généraliser cette formule aux produits infinis $\prod_p p^{\lfloor \frac{n}{f(p)} \rfloor}$ pour une certaine classe de fonctions $f :\ \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Théorème 3.1. *Soit* $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une application telle que* $f(\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R}_+^*$ *(c'est-à-dire que* f *ne s'annule en aucun point de* $\mathbb{N}^*$ *sauf peut être en* 1*). Munissons* $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *de la relation d'ordre partielle « divise » et* $\mathbb{R}_+^*$ *de la relation d'ordre total usuel «* $\leq$ *» et supposons que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N}^* \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & n & \longmapsto & \dfrac{f(n)}{\ln n} \end{array}$$

est croissante relativement à ces ordres. Alors, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ *:*

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor} = \mathrm{ppcm}\left\{ i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*, f(i_1) + f(i_2) + \cdots + f(i_k) \leq x \right\}.$$

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soit* $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *comme indiquée dans le théorème* 3.1*. Alors, pour tout nombre premier* p *et tout* $a \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$v_p(a) \leq \frac{f(a)}{f(p)}.$$

Démonstration. Soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{N}^*$. Si $v_p(a) = 0$, l'inégalité du lemme est triviale. Supposons donc pour la suite que $v_p(a) = \alpha \geq 1$. On peut donc écrire $a = p^\alpha b$, avec $b \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(b,\ p) = 1$. Le fait que p divise a entraîne (d'après la propriété supposée sur f) que

$$\frac{f(p)}{\ln p} \leq \frac{f(a)}{\ln a}.$$

Ce qui donne :

$$\frac{\ln a}{\ln p} \leq \frac{f(a)}{f(p)}.$$

Mais d'autre part, on a :

$$\frac{\ln a}{\ln p} = \frac{\ln(p^\alpha b)}{\ln p} = \frac{\ln b}{\ln p} + \alpha \geq \alpha.$$

D'où

$$\alpha \leq \frac{f(a)}{f(p)};$$

c'est-à-dire

$$v_p(a) \leq \frac{f(a)}{f(p)},$$

comme il fallait le prouver. □

Démonstration du théorème 3.1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. il s'agit de montrer que pour tout nombre premier p, les deux membres de l'identité du théorème ont la même valuation p-adique. Étant donné p un nombre premier, la valuation p-adique du membre de gauche de l'identité du théorème 3.1 est égale à $\lfloor \frac{x}{f(p)} \rfloor$ et la valuation p-adique du membre de droite de la même identité est égale à

$$l_p := \max \left\{ v_p(i_1 i_2 \cdots i_k);\ k \in \mathbb{N}^*, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*, f(i_1) + f(i_2) + \cdots + f(i_k) \leq x \right\}.$$

Il s'agit donc de montrer que l'on a pour tout nombre premier p :

$$l_p = \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor. \tag{3.1}$$

Pour ce faire, nous allons montrer les deux inégalités :

$$l_p \geq \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor \text{ et } l_p \leq \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor \quad (\forall p \text{ premier}).$$

Soit p un nombre premier fixé. Montrons d'abord que $l_p \geq \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor$. En considérant l'entier positif $k = \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor$ et les entiers strictement positifs particuliers

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_k = p,$$

on obtient

$$f(i_1) + f(i_2) + \cdots + f(i_k) = kf(p) = \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor f(p) \leq x.$$

D'où (par définition même de l_p) :

$$l_p \geq v_p(i_1 i_2 \ldots i_k) = v_p\left(p^k\right) = k = \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor,$$

comme il fallait le prouver.

Montrons maintenant que $l_p \leq \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*$ tels que : $f(i_1) + \cdots + f(i_k) \leq x$, on a :

$$\begin{aligned} v_p(i_1 i_2 \cdots i_k) &= v_p(i_1) + \cdots + v_p(i_k) \\ &\leq \frac{f(i_1)}{f(p)} + \cdots + \frac{f(i_k)}{f(p)} \quad \text{(d'après le lemme 3.2)} \\ &= \frac{f(i_1) + f(i_2) + \cdots + f(i_k)}{f(p)} \\ &\leq \frac{x}{f(p)}; \end{aligned}$$

mais puisque $v_p(i_1 i_2 \cdots i_k)$ est un entier, il s'ensuit que :

$$v_p(i_1 i_2 \cdots i_k) \leq \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor.$$

La définition de l_p permet de conclure que

$$l_p \leq \left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor,$$

comme il fallait le prouver. Ce qui complète la démonstration du théorème. □

Remarque 3.3. Mettons nous dans la situation du théorème 3.1.
(a) Si l'application g est croissante au sens usuel sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ alors elle est croissante au sens imposé par le théorème 3.1 (car on a : $\forall a, b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: a divise $b \Rightarrow a \leq b$).
(b) Si l'application g est croissante au sens usuel sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1,\, 2\}$ et vérifie $g(2) \leq g(4)$ alors elle est croissante au sens imposé par le théorème 3.1.

Corollaire 3.4. *Soit* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *telle que* $f(\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R}_+^*$. *Supposons que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ n & \longmapsto & \dfrac{f(n)}{n} \end{array}$$

est croissante au sens usuel. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,*on a :*

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{x}{f(p)} \right\rfloor} = \operatorname{ppcm}\left\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*, f(i_1) + f(i_2) + \cdots + f(i_k) \leq x\right\}.$$

Démonstration. Nous remarquons que l'application g définie comme dans le théorème 3.1 est le produit des deux fonctions $n \longmapsto \dfrac{f(n)}{n}$ (supposée croissante au sens usuel sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) et la fonction $n \longmapsto \dfrac{n}{\ln n}$ (croissante sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, au sens usuel). Donc g est croissante sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1,\, 2\}$ au sens usuel. D'autre part, on a :

$$g(2) = \frac{f(2)}{\ln 2} \leq \frac{f(2)}{2}\frac{2}{\ln 2} = \frac{f(2)}{2}\frac{4}{\ln 4} \leq \frac{f(4)}{4}\frac{4}{\ln 4} = g(4).$$

C'est-à-dire

$$g(2) \leq g(4).$$

Le théorème 3.1 et le point (b) de la remarque 3.3 permettent de conclure. $\square$

Quelques Applications :

1) En appliquant le théorème 3.1 pour la fonction $f(x) = \log x$ (qui satisfait clairement les conditions requises), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \prod_p p^{\left\lfloor \frac{x}{\log p} \right\rfloor} &= \operatorname{ppcm}\left\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*, \log i_1 + \log i_2 + \cdots + \log i_k \leq x\right\} \\ &= \operatorname{ppcm}\left\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1 i_2 \cdots i_k \leq e^x\right\} \\ &= \operatorname{ppcm}\left(1, 2, 3, \ldots, \lfloor e^x \rfloor\right). \end{aligned}$$

En prenant en particulier $x = \log n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on obtient la formule bien connue :

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} = \operatorname{ppcm}\left(1, 2, 3, \ldots, n\right).$$

2) En appliquant le corollaire 3.4 pour la fonction $f(x) = x$ (qui satisfait clairement les conditions requises), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} = \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n\}\,; \qquad (3.2)$$

ce qui a été indiqué auparavant par Cahen et Chabert [11] et par Farhi [19].
3) (Généralisation de (3.2)). Soit $\alpha \geq 1$. En appliquant le corollaire 3.4 pour la fonction $f(x) = x^\alpha$ (qui satisfait clairement les conditions requises), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor} = \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1^\alpha + i_2^\alpha + \cdots + i_k^\alpha \leq n\}\,.$$

4) Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, définissons (voir la définition-notation 2.7) :

$$C_{n,k} := \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n\}\,.$$

Notons que ces nombres ont été déjà rencontrés et étudiés par Farhi [19] dans le contexte des polynômes à valeurs entières. En appliquant le corollaire 3.4 pour la fonction $f(x) = x - 1$ (qui satisfait clairement les conditions requises), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} &= \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*, (i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \cdots + (i_k - 1) \leq n\} \\
&= \operatorname{ppcm}\{i_1 i_2 \cdots i_k;\ k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*, i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq n + k\} \\
&= \operatorname{ppcm}\{C_{n+k,k};\ k \in \mathbb{N}\} \\
&= C_{2n,n} \qquad \text{(voir la proposition 2.16).}
\end{aligned}$$

On vient donc d'obtenir le remarquable corollaire suivant :

Corollaire 3.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} = C_{2n,n}. \qquad \square$$

Dans toute la suite, nous allons aborder les aspects arithmétique et analytique des nombres suivants :

$$\rho_n := \prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \quad \text{et} \quad \sigma_n := \prod_p p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

La proposition suivante établit le lien entre les entiers ρ_n et σ_n avec les fonctions θ et ψ Tchebychev.

Proposition 3.6. *Pour tout entier positif n, on a*

$$\begin{aligned}
\log \rho_n &= \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}\right), \\
\log \sigma_n &= \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k} + 1\right), \\
\log\left(\frac{\sigma_n}{\rho_n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\pi\left(\frac{n}{k} + 1\right) - \pi\left(\frac{n}{k}\right)\right) \log p.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit n un entier positif fixé. On a

$$\log \rho_n = \sum_p \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \log p = \sum_p \left(\sum_{1 \le k \le \frac{n}{p}} 1 \right) \log p = \sum_{1 \le k \le n} \left(\sum_{p \le \frac{n}{k}} \log p \right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}\right),$$

comme il fallait le prouver. On a aussi

$$\log \sigma_n = \sum_p \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \log p = \sum_p \left(\sum_{1 \le k \le \frac{n}{p-1}} 1 \right) \log p = \sum_{1 \le k \le n} \left(\sum_{p \le \frac{n}{k}+1} \log p \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}+1\right),$$

comme il fallait le prouver. Enfin, en se servant des identités que l'on vient de montrer, on a

$$\log\left(\frac{\sigma_n}{\rho_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\theta\left(\frac{n}{k}+1\right) - \theta\left(\frac{n}{k}\right) \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p \le \frac{n}{k}+1} \log p - \sum_{p \le \frac{n}{k}} \log p \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\pi\left(\frac{n}{k}+1\right) - \pi\left(\frac{n}{k}\right) \right) \log p.$$

Ce qui confirme la 3ème formule de la proposition et complète cette démonstration. □

Définition 3.7. Soit $\vee : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ la fonction arithmétique définie par :

$$\vee(k) = \sum_{(p-1)|k} \log p \qquad (\forall k \in \mathbb{N}^*).$$

Lemme 3.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\log \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \vee(k)$$

Démonstration. D'après la proposition 3.6, on a

$$\log \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}+1\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k(p-1) \le n} \log p$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{1(p-1)=m} \log p + \sum_{2(p-1)=m} \log p + \cdots + \sum_{n(p-1)=m} \log p \right)$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{(p-1)|m} \log p = \sum_{m=1}^{n} \vee(m),$$

comme il fallait le prouver. □

Proposition 3.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\sum_{d|n} \mu(d) \vee\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} \log(n+1) & \text{si } (n+1) \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où μ désigne la fonction de Möbius.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Par définition, on a

$$\vee(n) = \sum_{(p-1)|n} \log p = \sum_{\substack{(d+1) \text{ premier} \\ d|n}} \log(d+1) = \sum_{d|n} (\pi(d+1) - \pi(d)) \log(d+1).$$

En utilisant la première formule d'inversion de Möbius, on en déduit que

$$(\pi(n+1) - \pi(n)) \log(n+1) = \sum_{d|n} \mu(d) \vee \left(\frac{n}{d}\right),$$

ce qui confirme le résultat en question, puisque $\pi(n+1) - \pi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n+1) \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. □

3.2 Résultats arithmétiques sur les nombres σ_n et ρ_n

Un certain nombre de propriétés arithmétiques concernant les nombres ρ_n et σ_n sont ou bien immédiates ou bien assez faciles à prouver. On a rassemblé ces propriétés dans la proposition suivante :

Proposition 3.10. *Pour tout entier naturel n, on a*

(i) $\rho_n | \rho_{n+1}$, $\sigma_n | \sigma_{n+1}$ et $\rho_n | \sigma_n$;

(ii) $\rho_n | n!$;

(iii) $n! | \sigma_n$ et $\sigma_n | (2n!)$;

(iv) $\sigma_{2n+1} = 2\sigma_{2n}$.

Démonstration. Soit n un entier naturel fixé. les propriétés du point (i) sont triviales. La propriété du point (ii) découle de la décomposition de $n!$ en produit de facteurs premiers donnée par la formule de Legendre. Enfin, la première partie du point (iii) se déduit immédiatement de la formule de Legendre, puisque

$$\frac{n}{p-1} \geq \frac{n - S_p(n)}{p-1}.$$

La deuxième partie du point (iii) découle immédiatement des deux propositions 2.18 et 2.16. La propriété du point (iv) découle aussi immédiatement de la formule (2.27) et de la propriété élémentaire suivante sur les parties entières des nombres rationnels :

« Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec a non multiple de b, on a : $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor$ ».

□

Proposition 3.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$(n+1)! | \sigma_n \;\; \text{et} \;\; \sigma_n | n! \, \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n, n+1).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Il s'agit de montrer que pour tout nombre premier p, on a :

$$v_p\left((n+1)!\right) \leq v_p(\sigma_n) \leq v_p(n!\text{ppcm}(1,2,\ldots,n,n+1)). \tag{3.3}$$

Soit donc p un nombre premier arbitraire et montrons la première inégalité de l'estimation (3.3). D'après la formule de Legendre, on a :

$$v_p\left((n+1)!\right) = \sum_{\ell=1}^{e} \left\lfloor \frac{n+1}{p^\ell} \right\rfloor,$$

où e désigne le plus grand entier positif tel que $p^e \leq n+1$. En se servant simplement des propriétés élémentaires des parties entières, il en résulte que :

$$v_p\left((n+1)!\right) \leq \sum_{\ell=1}^{e} \frac{n+1}{p^\ell} = \frac{n+1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^e}\right) \leq \frac{n}{p-1} \quad (\text{puisque } p^e \leq n+1).$$

Mais comme $v_p((n+1)!)$ est un entier, il en découle que l'on a aussi :

$$v_p\left((n+1)!\right) \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor.$$

Il ne reste qu'à se rappeler que $\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor = v_p(\sigma_n)$ (en vertu de (2.27)) pour conclure à la première inégalité de l'estimation (3.3). D'autre part, en utilisant l'inégalité $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \geq \frac{a+1}{b} - 1$, laquelle est valable pour tous entiers positifs a, b $(b \neq 0)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{e} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor &\leq \frac{n}{p-1} - \sum_{i=1}^{e} \left(\frac{n+1}{p^i} - 1\right) \\
&= \frac{n}{p-1} - \frac{n+1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^e}\right) + e \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\frac{n+1}{p^e} - 1\right) + e.
\end{aligned}$$

Mais d'après la définition de e, on a $p^{e+1} > n+1$; c'est-à-dire $\frac{n+1}{p^e} < p$. En reportant ceci dans la dernière inégalité, on tire que :

$$\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{e} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor < e+1.$$

Mais comme $\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor - \sum_{i=1}^{e} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor \in \mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{e} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq e;$$

c'est-à-dire $v_p(\sigma_n) - v_p(n!) \leq v_p(\text{ppcm}(1,2,\ldots,n,n+1))$, confirmant la deuxième inégalité de l'estimation (3.3). Ce qui complète cette démonstration. □

Le suivant corollaire constitue une conséquence de la propositions 3.11.

Corollaire 3.12. *On a*

$$\log \sigma_n \sim_{+\infty} n \log n.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.11, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\log(n+1)! \leq \log(\sigma_n) \leq \log(n!) + \log \operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, n, n+1).$$

L'estimation asymptotique du corollaire découle alors des faits

$$\log{(n+1)!} \sim_{+\infty} \log(n!) \sim_{+\infty} n \log n$$

d'après la formule de Stirling, et

$$\log \operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, n, n+1) \sim_{+\infty} n$$

d'après le théorème des nombres premiers. □

Un encadrement de σ_n

Proposition 3.13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$n^n e^{-n} n \leq \sigma_n \leq (6e) n^n \left(\frac{3}{e}\right)^n n\sqrt{n}.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.11, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(n+1)! \leq \sigma_n \leq n! \operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, n, n+1). \tag{3.4}$$

Il existe dans la littérature mathématique des estimations effectives pour $n!$ et aussi pour $\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$. 0n a par exemple les résultats connus suivants :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (voir [33, formule (1.17)]) :

$$n^n e^{-n} \leq n! \leq n^n e^{1-n} \sqrt{n}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (voir [27]) :

$$\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, n) \leq 3^n.$$

En injectant ces deux estimations dans (3.4), on aboutit à l'encadrement requis. □

Notons que l'estimation asymptotique du corollaire ci-dessus sera précisée dans la section prochaine. passons maintenant à l'établissement d'un résultat évaluant les valuations p-adic de l'entier positif $\frac{\sigma_n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ pour des nombres premiers suffisamment grands. On découvre comme un phénomène remarquable que les nombres premiers d'un type spécial jouent un rôle vital. On a le théorème suivant :

Théorème 3.14. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier vérifiant*

$$\sqrt{n+1} < p \leq n+1.$$

Alors on a

$$v_p\left(\frac{\sigma_n}{n!}\right) = \left\lfloor \frac{S_p(n)}{p-1} \right\rfloor \in \{0, 1\}.$$

De plus, l'égalité $v_p(\frac{\sigma_n}{n!}) = 1$ a lieu si et seulement si $S_p(n) \geq p-1$, ce qui a lieu si et seulement si p possède la forme

$$p = \left\lfloor \frac{n}{k} + 1 \right\rfloor,$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $k < \sqrt{n+1} + 1$.

Démonstration. D'après la définition de σ_n et la formule de Legendre (1.7), on a

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{\sigma_n}{n!}\right) &= v_p(\sigma_n) - v_p(n!) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor - \frac{n - S_p(n)}{p-1} \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p-1} - \frac{n - S_p(n)}{p-1} \right\rfloor \qquad \left(\text{puisque } \frac{n - S_p(n)}{p-1} = v_p(n!) \in \mathbb{Z}\right) \\ &= \left\lfloor \frac{S_p(n)}{p-1} \right\rfloor . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Montrons maintenant que $\lfloor \frac{S_p(n)}{p-1} \rfloor \in \{0,1\}$. L'hypothèse sur p assure que $n < p^2 - 1$, ce qui implique que la représentation de l'entier positif n dans la base p possède la forme $n = \overline{a_1 a_0}_{(p)}$, avec $a_0, a_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et $(a_0, a_1) \neq (p-1, p-1)$. Par conséquent, on a $S_p(n) = a_0 + a_1 < 2(p-1)$, impliquant que $\frac{S_p(n)}{p-1} < 2$; d'où $\left\lfloor \frac{S_p(n)}{p-1} \right\rfloor \in \{0,1\}$, comme il fallait le prouver. Ceci démontre la première partie du théorème, qui donne immédiatement l'équivalence entre $v_p(\frac{\sigma_n}{n!}) = 1$ et $S_p(n) \geq p-1$. Maintenant, nous allons montrer la dernière partie du théorème. Supposons que $S_p(n) \geq p-1$. Comme on l'a vu précédemment, la représentation de n dans la base p possède la forme $n = \overline{a_1 a_0}_{(p)} = a_0 + p a_1$, où $a_0, a_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et $(a_0, a_1) \neq (p-1, p-1)$. Nous allons montrer que $k = a_1 + 1$ convient à la forme requise pour p. Par hypothèse, on a $a_0 + a_1 \geq p-1$, impliquant que

$$p - 1 \leq \frac{a_0 + a_1 p}{a_1 + 1} < p,$$

ce qui est équivalent à

$$\left\lfloor \frac{n}{a_1 + 1} \right\rfloor = p - 1.$$

D'où

$$p = \left\lfloor \frac{n}{a_1 + 1} + 1 \right\rfloor .$$

De plus, on a $a_1 = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \leq \frac{n}{p} < \sqrt{n+1}$ (puisque $p > \sqrt{n+1} > \frac{n}{\sqrt{n+1}}$). Ainsi, $k = a_1 + 1$ satisfait les propriétés requises ; i.e., $p = \lfloor \frac{n}{k} + 1 \rfloor$ et $k < \sqrt{n+1} + 1$.

Inversement, supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, avec $k < \sqrt{n+1} + 1$, tel que $p = \lfloor \frac{n}{k} + 1 \rfloor$, et montrons que $S_p(n) \geq p-1$. En posant $a_0 := n - (k-1)p$ et $a_1 := k-1$, nous montrons d'abord que la représentation de n dans le système de base p est $n = \overline{a_1 a_0}_{(p)}$. Puisqu'il est immédiat que $n = a_0 + p a_1$, il reste à montrer que $a_0, a_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Puisque $k < \sqrt{n+1} + 1 < p + 1$ alors $k - 1 < p$; c'est-à-dire $a_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Par suite, puisque $p = \lfloor \frac{n}{k} + 1 \rfloor$ alors

$$p \leq \frac{n}{k} + 1 < p + 1,$$

impliquant que

$$p - k \leq n - (k-1)p < p.$$

D'où

$$p - k \leq a_0 < p.$$

Mais $p - k = (p-1) - a_1 \geq 0$; donc $a_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Nous avons ainsi confirmé que la représentation de n dans la base p est $n = \overline{a_1 a_0}_{(p)}$. Par conséquent, on a

$$S_p(n) = a_0 + a_1 = n - (k-1)(p-1).$$

Enfin, comme $n \geq k(p-1)$ (car $\frac{n}{k} + 1 \geq \lfloor \frac{n}{k} + 1 \rfloor = p$), il s'ensuit que $S_p(n) \geq p - 1$, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve du théorème. □

3.3 Estimations analytiques des nombres $\log \rho_n$ et $\log \sigma_n$

Tout au long de cette section, on note par c la constante absolue strictement positive donnée par :

$$c := \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} = 0{,}755\ldots.$$

Notre objectif est d'établir des estimations asymptotiques pour $\log \rho_n$ et $\log \sigma_n$ lorsque n est au voisinage de l'infini. Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

Théorème 3.15. *On a*

$$\log \rho_n = n \log n - (c+1)n + O\left(\sqrt{n}\right).$$

Théorème 3.16. *On a*

$$\log \sigma_n = n \log n - n + 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

Pour établir le théorème 3.15, nous avons besoin des résultats auxiliaires ci-dessous. Le théorème 3.16 se déduit, quant à lui, du théorème 3.14 et d'un résultat de Bordellès et al. [5].

Lemme 3.17. *Pour $x \geq 1$, on a*

$$\sum_{p > x} \frac{\log p}{p(p-1)} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Démonstration. Comme $\frac{\log p}{p(p-1)} \leq 2\frac{\log p}{p^2}$ (pour p premier), alors il suffit de montrer que $\sum_{p>x} \frac{\log p}{p^2} = O(\frac{1}{x})$. D'après la formule sommatoire d'Abel (voir le théorème 1.18), pour tous nombres réels x, y, avec $x < y$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{x < p \leq y} \frac{\log p}{p^2} &= \left(\sum_{x < p \leq y} \log p\right) \frac{1}{y^2} - \int_x^y \left(\sum_{x < p \leq t} \log p\right) \left(\frac{1}{t^2}\right)' dt \\
&= \frac{\theta(y) - \theta(x)}{y^2} + 2\int_x^y \frac{\theta(t) - \theta(x)}{t^3}\, dt.
\end{aligned}$$

Par suite, en faisant tendre y vers l'infini, il s'ensuit (puisque $\theta(y) = O(y)$) que

$$\sum_{p>x} \frac{\log p}{p^2} = 2\int_x^{+\infty} \frac{\theta(t) - \theta(x)}{t^3}\, dt = 2\int_x^{+\infty} \frac{\theta(t)}{t^3}\, dt - \frac{\theta(x)}{x^2}.$$

En se servant finalement de l'estimation $\theta(t) = O(t)$, on tire que :

$$\sum_{p>x} \frac{\log p}{p^2} = O\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

Comme il fallait le prouver. Ce qui achève cette démonstration. □

Le lemme 3.17 ci-dessus est utilisé dans la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 3.18. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p = c \cdot n + O\left(\sqrt{n}\right).$$

Démonstration. Soit n un entier strictement positif fixé. Pour un nombre premier p, désignons par e_p le plus grand entier positif satisfaisant $p^{e_p} \leq n$; explicitement $e_p = \lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor$. Donc on a $p^{e_p+1} > n$. D'une part, on a

$$\sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p \leq \sum_p \left(\frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \cdots \right) \log p = \sum_p \frac{n}{p(p-1)} \log p;$$

c'est-à-dire

$$\sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p \leq c \cdot n. \tag{3.6}$$

D'autre part, on a (d'après la définition de e_p)

$$\begin{aligned}
\sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p &= \sum_{p\leq\sqrt{n}} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^{e_p}} \right\rfloor \right) \log p \\
&\geq \sum_{p\leq\sqrt{n}} \left(\left(\frac{n}{p^2} - 1 \right) + \left(\frac{n}{p^3} - 1 \right) + \cdots + \left(\frac{n}{p^{e_p}} - 1 \right) \right) \log p \\
&= n \sum_{p\leq\sqrt{n}} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots + \frac{1}{p^{e_p}} \right) \log p - \sum_{p\leq\sqrt{n}} (e_p - 1) \log p \\
&= n \sum_{p\leq\sqrt{n}} \left(\frac{1}{p(p-1)} - \frac{1}{p^{e_p}(p-1)} \right) \log p - \sum_{p\leq\sqrt{n}} (e_p - 1) \log p \\
&= n \sum_{p\leq\sqrt{n}} \frac{\log p}{p(p-1)} - n \sum_{p\leq\sqrt{n}} \frac{\log p}{p^{e_p}(p-1)} - \sum_{p\leq\sqrt{n}} (e_p - 1) \log p \\
&= n \left(c - \sum_{p>\sqrt{n}} \frac{\log p}{p(p-1)} \right) - n \sum_{p\leq\sqrt{n}} \frac{\log p}{p^{e_p}(p-1)} - \sum_{p\leq\sqrt{n}} (e_p - 1) \log p;
\end{aligned}$$

autrement dit,

$$\begin{aligned}
\sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p \geq c\, n - n \sum_{p>\sqrt{n}} \frac{\log p}{p(p-1)} - n \sum_{p\leq\sqrt{n}} \frac{\log p}{p^{e_p}(p-1)} \\
- \sum_{p\leq\sqrt{n}} (e_p - 1) \log p.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Mais, en utilisant le lemme 3.17, on a

$$\sum_{p>\sqrt{n}} \frac{\log p}{p(p-1)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.8}$$

par ailleurs, en utilisant le fait $p^{e_p} > \frac{n}{p}$ (pour p premier), on a

$$\sum_{p\leq\sqrt{n}} \frac{\log p}{p^{e_p}(p-1)} < \frac{1}{n} \sum_{p\leq\sqrt{n}} \frac{p}{p-1} \log p \leq \frac{2}{n} \sum_{p\leq\sqrt{n}} \log p = \frac{2}{n}\theta\left(\sqrt{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.9}$$

et en utilisant le fait $e_p - 1 < e_p := \lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor \leq \frac{\log n}{\log p}$, on a

$$\sum_{p\leq\sqrt{n}} \left(e_p - 1\right) \log p < \sum_{p\leq\sqrt{n}} \log n = (\log n)\pi(\sqrt{n}) = O\left(\sqrt{n}\right). \tag{3.10}$$

En reportant par suite (3.8), (3.9) et (3.10) dans (3.7), on obtient

$$\sum_{p} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p \geq c\, n + O\left(\sqrt{n}\right). \tag{3.11}$$

Enfin, (3.6) et (3.11) permettent de conclure que :

$$\sum_{p} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p = c \cdot n + O\left(\sqrt{n}\right),$$

comme il fallait le prouver. □

Nous somme maintenant prêts à démontrer le théorème 3.15.

Démonstration du théorème 3.15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on a d'après la formule de Legendre :

$$\begin{aligned}\log \rho_n = \sum_p \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \log p &= \sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots \right) \log p \\ &\quad - \sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p \\ &= \log(n!) - \sum_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \log p.\end{aligned}$$

La forme faible de la formule d'approximation de Stirling $\log(n!) = n \log n - n + O(\log n)$ et la Proposition 3.18 concluent alors que

$$\log \rho_n = n \log n - (c+1)n + O(\sqrt{n}),$$

comme il fallait le prouver. □

Passons maintenant à l'estimation de $\log \sigma_n$. Pour ce faire, on s'appuie sur le théorème 3.14 et sur le resultat de Bordellès et al. [5] (conjecturé auparavant par Kellner [32]), dont une partie est rappelée ci-dessous :

Théorème 3.19 (Corollaire 1.6 de [5])**.** *on a*

$$\sum_{\substack{p>\sqrt{n}\\ S_p(n)\geq p}} 1 = \frac{2\sqrt{n}}{\log n} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$$

quand $n \to +\infty$.

Démonstration du théorème 3.16. Pour un entier strictement positif n donné, d'après le théorème 3.14, on a

$$\frac{\sigma_n}{n!} = \prod_{\substack{\sqrt{n+1}<p\leq n+1\\ S_p(n)\geq p-1}} p = \prod_{\substack{\sqrt{n+1}<p\leq n+1\\ S_p(n)=p-1}} p \cdot \prod_{\substack{p>\sqrt{n+1}\\ S_p(n)\geq p}} p$$

(en remarquant que $S_p(n) \geq p$ entraîne $p \leq n$). D'où,

$$\log \sigma_n = \log(n!) + \sum_{\substack{\sqrt{n+1}<p\leq n+1\\ S_p(n)=p-1}} \log p + \sum_{\substack{p>\sqrt{n+1}\\ S_p(n)\geq p}} \log p. \tag{3.12}$$

Maintenant, d'une part, on remarque que $n \equiv S_p(n) \pmod{(p-1)}$ (pour p premier), donc pour un nombre premier p satisfaisant $\sqrt{n+1} < p \leq n+1$, la condition $S_p(n) = p-1$ est équivalente à $(p-1) \mid n$. Par conséquent,

$$\sum_{\substack{\sqrt{n+1}<p\leq n+1\\ S_p(n)=p-1}} \log p \leq \sum_{d\mid n} \log(d+1) \leq \tau(n)\log(n+1) = O\left(n^{1/3}\log n\right) \tag{3.13}$$

(en vertu de (1)). D'autre part, en utilisant le théorème 3.19, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p>\sqrt{n+1}\\ S_p(n)\geq p}} \log p = \sum_{\substack{p>\sqrt{n}\\ S_p(n)\geq p}} \log p + O(\log n) &= \left(\sum_{\substack{p>\sqrt{n}\\ S_p(n)\geq p}} 1\right)\log n + O(\log n)\\ &= 2\sqrt{n} + o\left(\sqrt{n}\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Il ne reste qu'a reporter (3.13), (3.14) et la formule d'approximation de Stirling $\log(n!) = n\log n - n + O(\log n)$ dans (3.12) pour aboutir à

$$\log \sigma_n = n\log n - n + 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}),$$

comme il fallait le prouver. □

Bibliographie

[1] R. AYOUB. *An introduction to the analytic theory of numbers*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1963.

[2] P. BATEMAN, J. KALB & A. STENGER. A limit involving least common multiples, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), p. 393-394.

[3] A. BEDHOUCHE & B. FARHI. On some products taken over the prime numbers, *J. Integer Sequences*, **26** (2023), Article 23.1.5.

[4] A. BLANCHARD. *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, Paris, 1969.

[5] O. BORDELLÈS, F. LUCA, P. MOREE & I. E. SHPARLINSKI. Denominators of Bernoulli polynomials, *Mathematika* **64** (2018), p 519-541.

[6] S. A. BOUSLA. Estimations du plus petit commun multiple de certaines suites d'entiers, Thèse de Doctorat de l'Université de Bejaia, 2020.

[7] S. A. BOUSLA. Nontrivial upper bounds for the least common multiple of an arithmetic progression, *Asian-Eur. J. Math.*, **14** n° 08 (2021), 2150138.

[8] S. A. BOUSLA. On the least common multiple of binary linear recurrence sequences, *Rocky Mountain J. Math.*, **51** n° 05 (2021), p. 1583-1597.

[9] S. A. BOUSLA & B. FARHI. Identités et estimations concernant le plus petit commun multiple de suites à forte divisibilité, *C. R. Math*, **358** (2020), p. 481-487. Détaillé sur https://arxiv.org/abs/1907.06700 (2019).

[10] S. A. BOUSLA & B. FARHI. Nontrivial effective lower bounds for the least common multiple of some quadratic sequences, *J. Integer Sequences*, **23** (2020), Article 20.6.6.

[11] P.-J. CAHEN & J-L. CHABERT. *Integer-valued polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, Providence, RI : American Mathematical Society, **48** (1997).

[12] P. L. CHEBYCHEV. Mémoire sur les nombres premiers, *J. Maths Pures Appl.*, **17** (1852), p. 366-390.

[13] J. CILLERUELO. The least common multiple of a quadratic sequence, *Compos. Math.*, **147** n° 4 (2011), p. 1129–1150.

[14] L. COMTET. *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions* (revised and enlarged edition), D. Reidel Publishing Company, 1974.

[15] D. DOMINICI. Variations on a theme by Stirling, *Note Mat.*, **28** (2008), p. 1–13.

[16] B. FARHI. Prérequis d'analyse asymptotique et d'arithmétique pour la théorie analytique des nombres, prépublication disponible sur http://farhi.bakir.free.fr/home/data/prerequis_TAN.pdf (2019).

[17] B. FARHI. La méthode de Tchebychev, prépublication disponible sur http://farhi.bakir.free.fr/home/data/Tchebychev_TAN.pdf (2021).

[18] B. FARHI. Nontrivial effective lower bounds for the least common multiple of a q-arithmetic progression, *J. Integer Sequences*, **24** (2021), Article 21.3.7.

[19] B. FARHI. On the derivatives of the integer-valued polynomials, *Funct. Approx. Comment. Math*, **61** n° 2 (2019), p. 227-241.

[20] B. FARHI. Sur les nombres de Stirling de 1ère espèce, prépublication disponible sur http://farhi.bakir.free.fr/home/data/Stirling_1.pdf (2013).

[21] B. FARHI. Sur les nombres de Stirling de seconde espèce, prépublication disponible sur http://farhi.bakir.free.fr/home/data/Stirling_2.pdf (2014).

[22] B. FARHI. An analog of the arithmetic triangle obtained by replacing the products by the least common multiples, prépublication disponible sur https://arxiv.org/abs/1002.1383v2 (2010).

[23] B. FARHI. An identity involving the least common multiple of binomial coefficients and its application, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009), p. 836-839.

[24] B. FARHI & D. KANE. New results on the least common multiple of consecutive integers, *Proc. Am. Math. Soc*, **137** (2009), p. 1933-1939.

[25] B. FARHI. Nontrivial lower bounds for the least common multiple of some finite sequences of integers, *J. Number Theory*, **125** (2007), p. 393-411.

[26] B. FARHI. Minorations non triviales du plus petit commun multiple de certaines suites finies d'entiers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. **I 341** (2005), p. 469-474.

[27] D. HANSON. On the product of the primes, *Canad. Maths. Bull.*, **15** (1972), p. 33-37.

[28] G. H. HARDY & E. M. WRIGHT. *The Theory of Numbers*, 5th ed, Oxford. Univ. Press, London, 1979.

[29] S. HONG & W. FENG. Lower bounds for the least common multiple of finite arithmetic progressions, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, Sér. **I 343** (2006), p. 695-698.

[30] S. HONG & Y. YANG. On the periodicity of an arithmetical function, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, Sér. **I 346** (2008), p. 717-721.

[31] L. K. HUA. *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[32] B. C. KELLNER. On a product of certain primes, *J. Number Theory*, **179** (2017), p. 149-164.

[33] J.-M. De Koninck F. Luca. *Analytic Number Theory : Exploring the Anatomy of Integers*, Grad. Stud. in Math., Vol. **134**, American Mathematical Society, 2012.

[34] Victor H. Moll. *Numbers and Functions. From a classical-experimental mathematician's point of view*, Student Mathematical Library, Vol. **65**, American Mathematical Society, 2012.

[35] M. Nair. On chebychev-type inequalities for primes, *Amer. Math. Monthly.*, **89** (1982) p. 126-129.

[36] N. J. A. Sloane et al. *The On-line Encyclopedia of integer Sequences*, disponible sur https://oeis.org/ (2023).

[37] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, $5^{\text{ème}}$ édition, Dunod, Paris, 2022.

Résumé

Cette Thèse est motivée par l'étude de quelques suites d'entiers (à un seul indice ou à double indice) issues de l'instabilité par dérivations successives de l'anneau des polynômes à valeurs entières $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$. Au troisième chapitre (qui est le principal chapitre de cette Thèse), nous avons focalisé notre étude sur les suites d'entiers strictement positifs $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\rho_n := \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \text{ et } \sigma_n := \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Pour ces deux suites, nous avons établi des propriétés arithmétiques et des estimations analytiques (asymptotiques). Bien que l'estimation asymptotique de $\log \rho_n$ a été établie par le moyen de la théorie analytique réelle des nombres (à la Tchebychev), celle de $\log \sigma_n$ n'a pas été si-simple, puisque l'on est amené à utiliser un résultat très récent de Bordellès et al. [5], lequel est obtenu par le moyen *des sommes d'exponentielles*. Cette Thèse comprend aussi une présentation générale de quelques résultats de la théorie analytique (réelle) des nombres et de quelques résultats sur les polynômes à valeurs entières (essentiellement les résultats de [19]).

Mots clés : Polynômes à valeurs entières, plus petit commun multiple, nombres premiers, théorèmes de Tchebychev.

Abstract

This thesis is motivated by the study of certain sequences of integers (with a single index or a double index) arising from the instability through successive derivations of the integer-valued polynomials ring $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$. In the third chapter (which is the main chapter of this thesis), we focused our study on the two sequences of positive integers defined by :

$$\rho_n := \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \text{ et } \sigma_n := \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

For these two sequences, we have established arithmetic properties and asymptotic estimates. Although the asymptotic estimate of ρ_n was established using elementary analytic number theory, that of σ_n was not so straightforward, as it required the use of a very recent result by Bordellès et al. [5], which is obtained through *exponential sum methods*. This thesis also includes a general presentation of some results from real analytic number theory and some results on integer-valued polynomials (essentially Farhi's results [19]).

Keywords : Integer-valued polynomials, least common multiple, prime numbers, the Tchebychev theorems.

ملخّص :

الدّافع وراء هذه الأطروحة هو دراسة بعض متتاليات الأعداد الصّحيحة (ذات دليل واحد أو دليلين) النّاشئة من عدم استقرار حلقة كثيرات الحدود ذات قيم صحيحة بالمشتقّات المتعاقبة. في الفصل الثّالث (و هو الفصل الرّئيسي للأطروحة)، ركّزنا دراستنا على المتتاليتين المعرفتين كما يلي :

$$\rho_n := \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \quad \text{و} \quad \sigma_n := \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

حيث قمنا بتحديد الخصائص الأرتماطقية و كذا التّقديرات التّحليلية لكل منهنّ. على الرّغم من أنّ تقدير ρ_n تمّ تحديده باستخدام نظرية الأعداد التّحليلية الإبتدائية إلّا أنّ الأمر بالنّسبة لـ σ_n لم يكن بنفس البساطة ; فلقد آلت بنا الضرورة إلى استخدام نتيجة حديثة جدّا لبورديليس (Bordellès) و آخارين [5] والّتي تمّ الحصول عليها بطريقة **المجاميع الأسّية** . تشمل هذه الأطروحة أيضًا عرضًا عامًا لبعض النّتائج في نظرية الأعداد التّحليلية الحقيقية و بعض النّتائج حول كثيرات الحدود ذات قيم صحيحة (بشكل أساسي نتائج فرحي [19]).

الكلمات المفتاحية : كثيرات الحدود ذات قيم صحيحة، المضاعف المشترك الأصغر، الأعداد الأولية، نظريات تشبيشيف (Tchebychev).