

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia – Jijel



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Automatique

Mémoire

Présenté par

Mohammed BOULASSEL

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Automatique et Systèmes

Thème

**Commande par Backstepping Filtré Adaptative
d'une Classe des Systèmes Non Linéaires Incertains
avec Saturation d'Entrée**

Proposé et dirigé par

Mr. Hicham KHABBACHE

Promotion 2018

REMERCIEMENT

Je remercie avant tout DIEU Allah tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné a fin de réaliser ce modeste travail.

J'exprime ma plus grande reconnaissance et mon respect à mon encadreur Mr KHABBACHE. H pour avoir accepté de diriger ce travail, de m'avoir guidé et soutenu avec patience et indulgence, pour ces lectures enrichissantes de mon mémoire et pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Dédicace

A

Ma très chère mère qu'Allah la protège,

Mon père qu'Allah le protège,

Mes frères et sœurs,

Mes enseignants,

Mes amis : O. BOUGHERNE, M. DBIECHE, ...

Et tous mes collègues en master 2 d'Automatique et Système.

Table des figures

Introduction générale..... 1

Chapitre 1 : Introduction à la commande des systèmes non linéaires.

1.1. Introduction 4

1.2. Systèmes linéaires 4

1.3. Les systèmes non linéaires 5

1.3.1. Propriétés des systèmes non linéaires 5

1.3.2. Commande des systèmes non linéaires 6

1.3.2.1. Linéarisation local 6

1.3.2.2. Linéarisation par blocage 6

1.4. Stabilité des systèmes non linéaires 6

1.4.1. Définitions 7

1.4.2. Stabilité locale et stabilité globale 7

1.4.3. Stabilité simple 8

1.5. Méthode d’analyse de la stabilité des systèmes non linéaires..... 8

1.5.1. Méthode indirecte de Lyapunov 9

1.5.2. Méthode directe de Lyapunov 9

1.6. Synthèse de la commande par la méthode directe de Lyapunov..... 10

1.7. Backstepping 11

1.7.1. Introduction 11

1.7.2. Commande par backstepping..... 11

1.8. Conclusion..... 13

Chapitre 2 : Commande par backstepping filtré.

2.1. Introduction 14

2.2. Commande par surface dynamique DSC 14

2.3. Analyse de la stabilité	17
2.4. Commande par Backstepping Filtré	19
2.5. Analyse de la stabilité	23
2.6. Exemples d'application	24
2.6.1. Exemple 1 : (Exemple numérique) <i>Système non linéaire de deuxième ordre</i>	24
2.6.2. Exemple 2 : (Exemple pratique) <i>Aile d'avion</i>	26
2.7. Conclusion.....	28

**Chapitre 3 : Commande par Backstepping Filtré Adaptative avec Saturation d'Entrée :
Approche 1.**

3.1. Introduction	30
3.2. Commande adaptative	30
3.3. Saturation	30
3.4. Commande adaptative par DSC	32
3.5. Analyse de la stabilité	36
3.6. Commande Adaptative par CFB	38
3.7. Analyse de la stabilité	42
3.8. Exemples d'application	44
3.8.1. Exemple 1 : (Exemple numérique) <i>Système non linéaire de deuxième ordre</i>	44
3.8.2. Exemple 2 : (Exemple pratique) <i>Aile de l'avion</i>	46
3.9. Conclusion.....	48

**Chapitre 4 : Commande par Backstepping Filtré Adaptative avec Saturation d'Entrée :
Approche 2.**

4.1. Introduction	49
4.2. Commande adaptative par DSC	49
4.3. Analyse de la stabilité	53

4.4. Commande Adaptative par Backstepping Filtré (CFB)	54
4.5. Analyse de la stabilité	58
4.6. Exemples d'application	60
4.6.1. Exemple 1 : (Exemple numérique) <i>Système de deuxième ordre</i>	60
4.6.2. Exemple 2 : (Exemple pratique) <i>Aile d'avion.</i>	63
4.7. Conclusion.....	66
Conclusion générale	67
Références bibliographique	69

Chapitre 1 : Introduction à la commande des systèmes non linéaires.

Figure 1.1 : Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov..... 10

Chapitre 2 : Commande par backstepping filtré.

Figure 2.1 : Evolution du système de deuxième ordre..... 26

Figure 2.2 : Evolution du l'aile d'avion 28

**Chapitre 3 : Commande par backstepping filtré adaptative avec saturation d'entrée :
approche 1.**

Figure 3.1. Fonction de saturation..... 31

Figure 3.2 : Evolution du système de deuxième ordre..... 46

Figure 3.3 : Evolution du l'aile de l'avion. 48

**Chapitre 4 : Commande par backstepping filtré adaptative avec saturation d'entrée :
approche 2.**

Figure 4.1 : Réponses temporelles du système de deuxième ordre issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la DSC..... 61

Figure 4.2 : Réponses temporelles du système de deuxième ordre issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la CFB. 63

Figure 4.3 : Réponses temporelles de l'aile de l'avion issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la DSC..... 65

Figure 4.4 : Réponses temporelles de l'aile de l'avion issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la CFB. 66

Introduction générale

Introduction générale

Depuis quelques années, les recherches sur la commande et l'automatisation industrielle se sont multipliées. Différentes techniques de commande ont été proposées pour résoudre le problème de la commande des systèmes non linéaires. L'automatique linéaire repose sur une approximation du modèle du système autour d'un point de fonctionnement donné de telle sorte que les outils d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires puissent être exploités [1, 2]. Cependant, cette approche ne garantit pas la stabilité du système bouclé sur toute la plage de fonctionnement et souffre, en général, d'un manque de robustesse. Quant à elle, l'automatique non linéaire s'intéresse à assurer une stabilité sur une plus large plage de fonctionnement et peut avoir de bonnes propriétés de robustesse [3, 4]. Malheureusement, pour l'automatique non linéaire, il ne dispose pas de solutions universelles, ni pour l'analyse des systèmes, ni pour la conception de leurs contrôleurs. La plupart des approches de commande proposées dans la littérature, que ce soient linéaire ou non linéaire, exigent la connaissance d'un modèle mathématique du système et d'autres approches n'exigent pas cette connaissance.

La technique de commande par backstepping et conçue en se basant sur le théorème de stabilité de Lyapunov. L'idée fondamentale de cette méthode consiste à synthétiser d'une manière récursive une loi de commande stabilisante, afin d'assurer pour une certaine fonction de Lyapunov définie positive, que sa dérivée soit toujours négative. Ce qui permet de garantir la stabilité globale du système en boucle fermée [5]. A cause de sa souplesse et de son application à une grande classe de systèmes non linéaires triangulaires (Nonlinear strict-feedback systems), sans satisfaire la condition de recouvrement (Matching condition), la commande par backstepping [6,7] a atteint un développement exceptionnel au cours de ces dernières décennies. Cependant, l'inconvénient majeur de cette méthode est le problème d'explosion de complexité, qui résulte des dérivations successives des commandes virtuelles à chaque étape de conception du backstepping. Pour résoudre ce problème, des filtres du premier ordre passe-bas ont été introduites à chaque étape de conception. Cette idée a aboutit à des nouvelles approches nommées : commande par surface dynamique (en anglais Dynamic

Surface Control) [8, 9] et commande par backstepping filtré (en anglais Command Filtered Backstepping) [10, 11].

La commande adaptative est une méthode de commande des systèmes. L'idée de base est d'estimer les paramètres et/ou modèle inconnu en ligne, et d'utiliser les paramètres estimés dans le calcul de la loi de commande. Un système de commande adaptative peut donc être considéré comme un système de commande avec estimation en ligne des paramètres [5].

Ce mémoire présente quelques stratégies de la commande adaptative par backstepping filtré d'une classe des systèmes non linéaires triangulaires incertains avec saturation d'entrée. Le mémoire est décomposé en quatre chapitre :

Le premier chapitre présente d'une façon brève, quelques notions sur la commande des systèmes non linéaires, et donner un état de l'art sur les travaux développés dans cet axe de recherche. Ensuite, nous rappelons quelques définitions sur la stabilité des systèmes non linéaires et les différentes méthodes de commande des systèmes non linéaires et nous présentons aussi quelques outils mathématiques utilisés dans le long de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à la commande par backstepping filtré pour une classe des systèmes non linéaires triangulaires. Nous présentons deux stratégies de commande, la première s'appelle commande par surface dynamique (Dynamic Surface Control, DSC) et la deuxième approche est la commande par backstepping filtré (Command Filtered Backstepping, CFB). Pour valider ces deux approches, deux exemples d'application ont été considérés dans la simulation, le premier est numérique représenté par un système non linéaire de deuxième et le deuxième est pratique représenté par une aile d'avion.

Dans le troisième chapitre, nous proposons deux approches de commande adaptatives par backstepping filtré pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec saturation d'entrée. La première approche est une commande adaptative par DSC, tandis que la deuxième est basée sur la CFB. Des résultats de simulation sont présentés pour montrer l'efficacité de ces deux approches de commande.

Le dernier chapitre est dédié à la conception de deux autres approches de commande adaptatives par backstepping filtré pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec saturation d'entrée. La première technique de commande est synthétisée via la DSC et la deuxième est conçue en utilisant la technique CFB. Pour voir s'il y a une amélioration dans

les performances de commande, une comparaison est effectuée en simulation entre ces deux nouvelles stratégies et celles développées dans le chapitre 3.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion reprenant les principaux résultats présentés dans ce travail.

Chapitre 1

Introduction à la Commande des Systèmes Non Linéaires

1.1. Introduction :

Dans le domaine de l'automatique, l'étude des systèmes non linéaires constitue toujours un champ de recherche très riche. Contrairement aux systèmes linéaires pour lesquels l'automatique fournit une panoplie de méthodes d'analyse et de synthèse de lois de commande, les systèmes non linéaires ne disposent pas d'outils et de méthodes générales pour l'analyse et la synthèse. Ceci est dû au fait que les systèmes non linéaires possèdent des structures extrêmement variées, des dynamiques complexes et peuvent présenter toutes sortes de comportements étranges. La plupart des systèmes non linéaires sont caractérisés par des incertitudes structurelles et/ou non structurelles variantes dans le temps, ce qui rend leur commande très délicates et complexes à mettre en œuvre. Pour résoudre ce problème, plusieurs approches ont été développées dans la littérature. Parmi ces approches, on peut citer les techniques commandes par surface dynamique (Dynamic Surface Control) et par backstepping filtré (Command Filtered Backstepping). Ces deux méthodes présentent des performances notables en termes de poursuite et de régulation.

1.2. Systèmes linéaires [12] :

Un système linéaire (le terme *système* étant pris au sens de l'automatique, à savoir un système dynamique) est un objet du monde matériel qui peut être décrit par des équations linéaires (équations linéaires différentielles ou aux différences), ou encore, qui obéit au principe de superposition : toute combinaison linéaire des variables de ce système est encore une variable de ce système.

Les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier que les systèmes linéaires. Néanmoins, en linéarisant (quand c'est possible) un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire, on obtient un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire au voisinage de ce point d'équilibre ou de cette trajectoire. La linéarisation d'un système non linéaire autour d'une trajectoire non réduite à un point d'équilibre engendre un système linéaire à coefficients variables (en fonction de temps), d'où

l'importance qu'a pris ce type de système et les études récentes qui lui ont été consacrées [10].

1.3. Les systèmes non linéaires [13] :

Un système est non linéaire s'il ne vérifie pas le principe de superposition. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires. Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés, à savoir :

- a) L'analyse par des fonctions de transfert est impossible.
- b) La notion des pôles est disparait.
- c) Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour lequel le concept de stabilité est global.

1.3.1. Propriétés des systèmes non linéaires :

Les systèmes non linéaires sont décrits par des équations différentielles non linéaires. Ils sont caractérisés par les propriétés suivantes : (1) Principe de superposition n'est pas applicable, (2) Points d'équilibre multiples : un système non linéaire présente plusieurs points d'équilibre isolés (pour le système linéaire, le point d'équilibre est unique), (3) Limite de cycle : les systèmes non linéaires peuvent exhiber des oscillations à amplitudes et fréquences fixes en l'absence d'une entrée exogène ; ces oscillations sont appelées cycles limites, (4) Bifurcation : la théorie de la bifurcation a montré que le changement quantitatif des paramètres du système entraîne un changement qualitatif dans son comportement, ainsi la stabilité peut être affectée par ce changement quantitatif, (5) Chaos : les systèmes non linéaires présentent un phénomène chaotique qui est défini par la sensibilité de la sortie vis-à-vis des valeurs initiales, (6) Temps d'échappement fini : l'état d'un système non linéaire instable peut aller à l'infini en un temps fini, (7) Oscillations sous harmoniques, harmoniques ou a périodiques : pour une entrée sinusoïdale, le signal de sortie peut contenir de nombreux harmoniques et sous-harmoniques avec amplitudes et déphasages différentes (la sortie d'un système linéaire ne contiendra qu'une sinusoïde à la sortie).

1.3.2. Commande des systèmes non linéaires

Parmi les nombreuses techniques de commande non linéaires, on peut présenter quelques méthodes utilisées pour la synthèse des lois de commande dans les systèmes non linéaires. Elles présentent principalement :

- Linéarisation local.
- Linéarisation par bouclage.

1.3.2.1. Linéarisation local

Une méthode simple consiste à linéariser la dynamique non linéaire du système (approximation du premier ordre) autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les outils de la commande linéaire peuvent être utilisés pour la synthèse d'une loi de commande. Cependant, cette méthode n'est pas valable que localement autour du point de fonctionnement considéré.

1.3.2.2. Linéarisation par blocage

L'idée de cette technique s'appuie d'une part, sur la remarque que le principal obstacle dans la synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires est la présence des non-linéarités dans le système et d'autre part, qu'il existe un nombre important de techniques efficaces de synthèse dans le cas de systèmes linéaires. Si l'on est capable par des transformations adéquates de linéariser toute (ou une partie de) la dynamique du système non linéaire, on peut ensuite utiliser les techniques de synthèse de lois de commande des systèmes linéaire. C'est la philosophie de la linéarisation par bouclage.

1.4. Stabilité des systèmes non linéaires [14]

La théorie de la stabilité joue un rôle principal dans la synthèse d'une loi de commande. Plusieurs types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes. Dans cette section, nous entendons par la stabilité des points d'équilibre qui est généralement étudiée à l'aide du concept de stabilité au sens de Lyapunov. La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Elle consiste à l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est près d'un état d'équilibre.

Dans la prochaine partie, on présente quelques définitions relatives à la stabilité des systèmes non linéaires en particulier la méthode directe de Lyapunov. Considérons le système non linéaire décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.1)$$

où x est le vecteur d'état, avec $x(t_0) = x_0$, et $f(\cdot)$ est une fonction non linéaire.

1.4.1. Définitions :

- **Système autonome [14]** : un système est dit autonome si la fonction $f(\cdot)$ ne dépend pas du temps, soit :

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.2)$$

Dans ce qui suit, on ne considère que les systèmes autonomes.

- **Point d'équilibre [14]** : x_e est un point d'équilibre pour le système (1.2) si et seulement si $f(x_e) = 0$.
- **Stabilité au sens de Lyapunov [15]** : Le point d'équilibre x_e est dit stable au sens de Lyapunov si est seulement si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une constante positive α , tel que : $\|x(t_0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t > t_0$.

Dans le cas contraire, x_e est dit instable.

- **Stabilité asymptotique [14]** : Le point d'équilibre x_e est dit asymptotiquement stable, si il est stable et si il existe $\alpha > 0$, tel que : $\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$
- **Stabilité exponentielle [14]** : Le point d'équilibre x_e est dit exponentiellement stable si il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, tel que : $\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(t_0) - x_e\| e^{-\lambda t}$, $\forall t > t_0, \forall x_0 \in B_r$, avec $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$.

1.4.2. Stabilité locale et stabilité globale :

On peut prédire le comportement d'un système linéaire à partir de l'analyse de sa position d'équilibre. Etant donné qu'un système peut avoir plusieurs positions d'équilibre, la stabilité de l'une de ces positions d'équilibre ne suffit pas à elle seule à prédire la stabilité d'un système non linéaire. Afin de quantifier l'influence de la stabilité d'un point d'équilibre sur la stabilité du système non linéaire, de nouvelles définitions de la stabilité sont introduites ; on parle de stabilité locale et stabilité globale.

➤ **Stabilité locale [13] :**

Si dans un domaine D , il existe une fonction scalaire $V(x)$, dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues, telle que :

1. $V(x)$ est définie positive dans D .
2. $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative dans D .

Alors l'origine est stable.

Si $\dot{V}(x)$ est localement définie négative dans D , alors l'origine est asymptotiquement stable.

➤ **Stabilité globale [13] :**

S'il existe une fonction scalaire $V(x)$, dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues, telle que :

1. $V(x)$ est définie positive.
2. $\dot{V}(x)$ est définie négative.
3. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$ ($V(x)$ est radialement non bornée).

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

1.4.3. Stabilité simple :

S'il est possible de trouver une fonction $V(x)$ de signe défini dans un domaine D et dont la dérivée totale $\dot{V}(x)$ soit semi-définie négative et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simple) stable dans ce domaine.

Dans le cas d'une stabilité simple, on peut prouver la stabilité asymptotique en utilisant le lemme de Barbalat [16], qui vient compléter le théorème de Lyapunov pour la stabilité simple [5].

1.5. Méthode d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires :

L'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est très complexe. L'approche de Lyapunov est l'approche la plus utilisée pour étudier ce problème. Cette approche a été introduite au 19^{ème} siècle par le mathématicien russe Alexandre Mikhailovich Lyapunov dans son travail intitulé, « *The général problem of the motion stability* ».

On distingue deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité : La méthode indirecte et la méthode directe. La première concerne la stabilité locale autour d'un point d'équilibre. Par contre, la deuxième détermine la stabilité des systèmes en construisant une fonction scalaire des états du système dont on examinera la variation temporelle [5].

1.5.1. Méthode indirecte de Lyapunov :

Cette méthode est basée sur le fait que le comportement d'un système non linéaire est le même que son approximation linéaire pour des petites variations autour du point d'équilibre [7]. Elle permet l'étude et l'analyse de la stabilité locale des systèmes physiques.

À contre part, la méthode directe, basée sur le concept d'énergie, détermine la stabilité du système en construisant une fonction de Lyapunov définie positive.

1.5.2. Méthode directe de Lyapunov [17, 18]

La philosophie de cette méthode réside dans l'extension mathématique d'un phénomène physique observé « *si l'énergie totale d'un système est dissipée d'une manière continue, alors le système devra rejoindre finalement un point d'équilibre* ».

L'idée ici est de générer une fonction scalaire pour le système dynamique et d'examiner la dérivée temporelle. On peut ainsi conclure quant à la stabilité sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non linéaires.

Théorème 1.1 : (stabilité directe de Lyapunov) :

On dit que le point d'équilibre $x_e = 0$ pour le système (1.2) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction scalaire $V(x)$ de classe C^1 continue avec une dérivée partielle par rapport au temps $\dot{V}(x)$ continue ayant les propriétés suivantes :

1. $V(0) = 0$.
2. $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.
3. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ (radialement non bornée).
4. $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$.

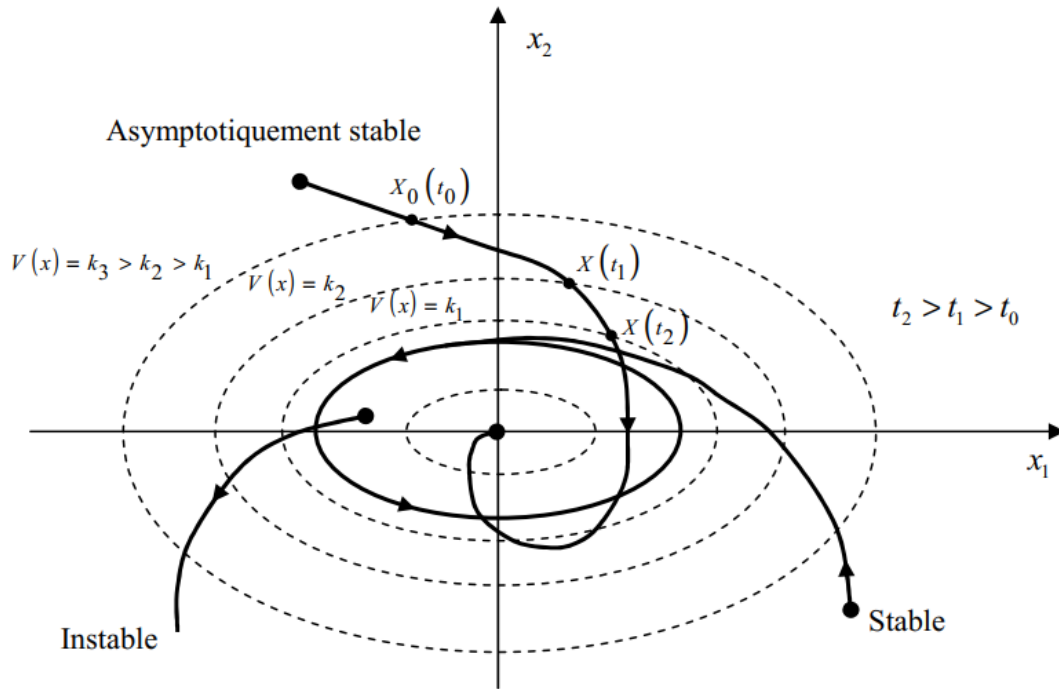


Figure 1.1 : Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov.

Lemme 1.1 [19, 20] : (Stabilité UUB)

Pour un système non linéaire, considérons la fonction définie positive suivante : $\dot{V}(t) \leq -\zeta V(t) + C$, tel que ζ et C sont des constantes qui satisfont $\zeta > 0$ et $C \geq 0, \forall t_0$. Donc, la fonction $V(t)$ est satisfait l'inégalité suivante :

$$0 \leq V(t) \leq \frac{1}{\zeta} \left[C - (C - \zeta V(t_0)) e^{-\zeta(t-t_0)} \right]$$

Ce qui implique que $V(t)$ borné par une quantité $\left(\frac{C}{\zeta} \right)$ et la vitesse de convergence exponentielle au borne de $V(t)$ est égale à ζ . Ainsi, l'état de système est ultimement uniformément bornée (UUB).

1.6. Synthèse de la commande par la méthode directe de Lyapunov [21] :

Dans les paragraphes précédents, nous avons parlé de la stabilité des systèmes, où on a supposé implicitement que la loi de commande a été choisie et notre but était de vérifier la stabilité du système avec cette loi de commande, mais le problème dans cette synthèse est comment trouver cette commande qui stabilisera le système.

Nous allons présenter une méthodologie qui combine entre la recherche de la fonction de Lyapunov et la loi stabilisante. En général, il existe deux concepts pour l'application de la méthode directe de Lyapunov pour la synthèse d'une commande stable :

- ❖ **1^{er} concept** : On suppose que la loi de commande existe et on cherche la fonction de Lyapunov.
- ❖ **2^{ème} concept** : Ici, on fait un choix sur la fonction de Lyapunov candidate $V(x)$ et on cherche la loi de commande qui satisfait les conditions de la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans la plupart des théorèmes et des lemmes de la stabilité au sens de Lyapunov, l'existence de la fonction de Lyapunov était assumée et l'objectif était de déterminer la stabilité de ces systèmes. Mais dans la plupart des cas, la recherche de cette fonction est très difficile. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons la notion du backstepping qui nous offre une solution à ce problème.

1.7. Backstepping

1.7.1. Introduction

Le backstepping a été développé par [6] et inspiré par les travaux de *Feurer & Morse* (1978) [39] d'une part et *Tsinias* (1989) et *Kokotovic & Sussman* (1989) [40,41] d'autre part. L'arrivée de cette méthode a donné un nouveau souffle à la commande des systèmes non linéaires, qui malgré les grande progrès réalisés, manquait d'approches générales. Le backstepping présente une alternative prometteuse aux méthodes basées sur l'équivalence certaine. Il se base sur la deuxième méthode de Lyapunov, dont il combine le choix de la fonction de Lyapunov avec celui des lois de commande et d'adaptation. Ceci lui permet, en plus de la tâche pour laquelle le contrôleur est conçu (poursuit et/ou régulation), de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé [5].

1.7.2. Commande par backstepping

La technique de commande par backstepping permet de construire de manière récursive une loi de commande stabilisante pour les systèmes ayant la forme triangulaire inférieure suivante [5] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u \end{cases} \quad (1.3)$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état du système, u est l'entrée de commande, y est la sortie du système, f_i et g_i , $i = 1, \dots, n$ sont des fonctions non linéaires connues, tel que $f_i(0) = 0$ et $g_i(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

L'objectif de cette approche consiste à déterminer une loi de commande u de telle sorte que la sortie $y = x_1$ suit une trajectoire de référence y_r , où, $\dot{y}_r, \ddot{y}_r, \ddot{\ddot{y}}_r$ jusqu'à $y_r^{(n)}$ sont supposés connues et uniformément bornées. La synthèse de la loi de commande s'effectue en n étapes. L'application récursive du backstepping permet l'extension de la procédure de design aux systèmes triangulaire définie par (1.3), dans le domaine d'intérêt D . la procédure de design commence avec la première équation. Le changement de variable adéquat à chaque étape i permet d'appliquer le backstepping récursivement, en rajoutant l'équation $i+1$. Partant de la trajectoire de référence α_0 , on construit les différentes commandes virtuelles α_i et les fonctions de Lyapunov candidates V_i . Ce qui résulte par

$$\begin{aligned} x_{1d} &= \alpha_0 = y_r \\ x_{(i+1)d} &= \alpha_i = \frac{1}{g_i}(\varphi_i - g_{i-1}e_{i-1} - \omega_i - k_i e_i), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ u &= \frac{1}{g_n}(\varphi_n - g_{n-1}e_{n-1} - \omega_n - k_n e_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où,

$$\begin{aligned} e_i &= x_i - \alpha_{i-1} \\ \varphi_i &= \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} g_k x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} \right) - \omega_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \omega_i &= f_i - \sum_{k=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} f_k \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les différentes fonctions de Lyapunov sont données par

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (1.6)$$

La loi de commande u qui permet d'atteindre les objectifs du design pour le système global, est donnée par la dernière commande virtuelle α_n .

Le problème principal de la technique backstepping est « *l'explosion de complexité* » causé par les dérivations successives des commandes virtuelles à chaque étape de conception. En d'autres termes, la complexité de la conception de la loi de commande augmente lorsque l'ordre du système augmente.

1.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques rappels sur les propriétés générales des systèmes linéaires et non linéaires, les éléments de base de la théorie de stabilité des systèmes, et des différentes méthodes les plus utilisées pour la commande des systèmes non linéaires. Dans le chapitre suivant, nous allons synthétiser deux approches de commande par backstepping filtré (DSC et CFB) pour une classe des systèmes non linéaires. Les performances de ces approches seront examinées sur deux exemples d'application.

Chapitre 2

Commande par Backstepping Filtré

2.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter deux approches de commande par backstepping filtré pour une classe des systèmes non linéaire. La première approche est la commande par surface dynamique (DSC), tandis que la deuxième emploie la technique de commande par backstepping filtré (CFB). L'approche de Lyapunov est utilisée pour démontrer la stabilité du système bouclé. Les performances des approches de commande par backstepping filtré proposées sont illustrées à travers deux exemples d'application.

2.2. Commande par surface dynamique (DSC)

Dans cette section, on va synthétiser une commande par surface dynamique (Dynamic Surface Control), en utilisant des filtres linéaires passe-bas. Considérons la classe des systèmes non linéaires triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où, f_i et g_i , $i = 1, \dots, n$ sont des fonctions non linéaires connues tel que $f_i(0) = 0$ et $g_i(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\bar{X}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ est un vecteur d'état partiel qui correspond aux i premières équations dynamiques, $\bar{X}_n = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état total, u est l'entrée de commande, et y est la sortie du système.

Hypothèse 2.1 [25] : Il existe des constantes positives ω_i et η_i , $i = 1, \dots, n$, telles que

$$0 < \omega_i \leq g_i(\bar{X}_i) \leq \eta_i \tag{2.2}$$

Hypothèse 2.2 [8, 9]: Le signal de référence y_r et ses dérivées \dot{y}_r et \ddot{y}_r sont supposées connues, continues et uniformément bornées.

La procédure de la commande par DSC s'effectue en n étapes comme suite

Etape 1 : ($i = 1$)

Nous définissons la première surface

$$s_1 = x_1 - y_r \quad (2.3)$$

Dont la dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{y}_r \end{aligned} \quad (2.4)$$

On choisit x_{2c} comme première commande virtuelle, telle que

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1(x_1)}(k_1 s_1 + f_1(x_1) - \dot{y}_r), \quad k_1 > 0 \quad (2.5)$$

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle (i.e. \dot{x}_{2c}), on introduit une nouvelle variable x_{2d} obtenu par le filtrage de la commande virtuelle x_{2c} . Dans cette section on utilise un filtre de premier ordre passe-bas avec une constant de temps $\tau_2 > 0$, i.e.

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (2.6)$$

L'erreur du filtre s'exprime par

$$E_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (2.7)$$

Prenant en compte de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, on obtient

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} \\ &= s_2 + E_2 + x_{2c} \end{aligned} \quad (2.8)$$

En remplaçant (2.5) et (2.8) dans (2.4), on obtient

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2 \quad (2.9)$$

Etape i : ($i = 2, \dots, n-1$)

On définit la $i^{\text{ème}}$ surface comme suit

$$s_i = x_i - x_{id} \quad (2.10)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1} - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous choisissons $x_{(i+1)c}$ comme suite

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i(\bar{X}_i)} \left(k_i s_i + g_{i-1} s_{i-1} + f_i(\bar{X}_i) - \dot{x}_{id} \right), \quad k_i > 0 \quad (2.12)$$

Afin éviter la dérivation de la commande virtuelle (i.e. $\dot{x}_{(i+1)c}$), on utilise un filtre du premier ordre passe-bas avec une constante de temps $\tau_{i+1} > 0$, tel que

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c}, \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (2.13)$$

On définit l'erreur du filtre correspondante comme suite

$$E_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (2.14)$$

Donc, sa dérivée temporelle s'écrit

$$\dot{E}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \quad (2.15)$$

Considérons la $i^{\text{ème}} + 1$ surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, donc, il en résulte que

$$x_{i+1} = s_{i+1} + E_{i+1} + x_{(i+1)c} \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.12) et (2.16) dans (2.11), on obtient

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} \quad (2.17)$$

Etape n

La $n^{\text{ième}}$ surface est définie par

$$s_n = x_n - x_{nd} \quad (2.18)$$

La dérivée temporelle de s_n se donne comme suit

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nous choisissons la loi de commande u comme suite

$$u = -\frac{1}{g_n(\bar{X}_n)} \left(k_n s_n + g_{n-1} s_{n-1} + f_n(\bar{X}_n) - \dot{x}_{nd} \right), \quad k_n > 0 \quad (2.20)$$

L'erreur du dernier filtre est définie par

$$E_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (2.21)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\dot{E}_n = \dot{x}_{nd} - \dot{x}_{nc} = -\frac{1}{\tau_n} E_n - \dot{x}_{nc} \quad (2.22)$$

En remplaçant (2.20) dans (2.19), il en résulte que

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} \quad (2.23)$$

2.3. Analyse de la stabilité

On considère la fonction candidat de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n E_i^2 \quad (2.24)$$

La dérivée de (2.24) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= s_1 \dot{s}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} s_i \dot{s}_i + s_n \dot{s}_n + \sum_{i=2}^n E_i \dot{E}_i \\
&= s_1 (-k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2) + \sum_{i=1}^{n-1} s_i (-k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1}) \\
&\quad + s_n (-k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \left(\frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1} + \dot{x}_{(i+1)c} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n -k_i s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i s_i E_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\tau_i} E_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \dot{x}_{(i+1)c}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Avant de continuer l'analyse de la stabilité, on présente l'hypothèse suivante

Hypothèse 2.3 [26] : Les dérivées des commandes virtuelles $\dot{x}_{(i+1)c}, i=1, \dots, n-1$ sont supposées bornées par des constantes positives M_{i+1} , i.e. $0 \leq |\dot{x}_{(i+1)c}| \leq M_{i+1}, i=1, \dots, n-1$.

D'après les hypothèses 2.2-2.3 et l'inégalité de Young (i.e. $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$), on obtient

$$g_i s_i E_{i+1} \leq \frac{\eta_i}{2} (s_i^2 + E_{i+1}^2) \tag{2.26}$$

$$|E_{i+1} \dot{x}_{(i+1)c}| \leq \frac{1}{2} (E_{i+1}^2 + M_{i+1}^2) \tag{2.27}$$

Donc, l'équation (2.25) devient

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \sum_{i=1}^n -k_i s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{2} (s_i^2 + E_{i+1}^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\tau_{i+1}} - \frac{1}{2} \right) E_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} \\
&\leq -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (2k_i - \eta_i) s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2}{\tau_{i+1}} - 1 - \eta_i \right) E_{i+1}^2 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} M_{i+1}^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ou de même

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta \tag{2.29}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \min \left[(2k_1 - \eta_1), \dots, (2k_n - \eta_n), \left(\frac{2}{\tau_2} - 1 - \eta_2 \right), \dots, \left(\frac{2}{\tau_n} - 1 - \eta_n \right) \right] > 0 \\ \beta = \sum_{i=1}^{n-1} M_{i+1}^2 > 0 \end{cases}$$

Théorème 2.1 : *Considérons le système non linéaire (2.1), les lois de commande (2.5), (2.12) et (2.20), les filtres linéaires passe-bas (2.6) et (2.13). Supposons que les hypothèses 2.1-2.3 sont satisfaites. Donc, tous les signaux du système bouclé sont uniformément ultimement bornés (UUB) et l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ converge vers un petit voisinage de zéro.*

Preuve : En appliquant le Lemme 1.1 sur (2.29), on obtient

$$0 \leq V(t) \leq \left(V(0) - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \quad (2.30)$$

et utilisant le fait que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, il vient

$$0 \leq V(t) \leq V(0) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \quad (2.31)$$

Selon (2.29), on peut conclure facilement que pour $V(t) \geq \beta/\alpha$, nous avons $\dot{V}(t) \leq 0$. Donc, en appliquant le théorème de Lyapunov, on peut déduire la bornitude des signaux d'erreur s_i , $i = 1, \dots, n$ et E_{i+1} , $i = 2, \dots, n$. De plus, à partir de (2.24) et (2.31), on a : $\|s_1\| = \|(y - y_r)\| \leq \sqrt{2V(0)} e^{-0.5\alpha t} + \sqrt{2\beta/\alpha}$. Ce qui implique que $\|s_1\| \leq \sqrt{2\beta/\alpha}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. De plus en plus en augmentant la valeur de α et en diminuant la valeur de β , la borne ultime $\sqrt{2\beta/\alpha}$ peut être rendue aussi petite que possible, et par conséquent, l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ peut être faite arbitrairement proche de zéro. Ceci termine la preuve.

2.4. Commande par Backstepping Filtré (CFB)

Dans cette section, on va synthétiser une commande par backstepping filtré (CFB) pour le système (2.1).

Avant de commencer le design, l'hypothèse 2.2 doit être modifiée de la façon suivante :

Hypothèse 2.4 [10, 11] : Le signal de référence y_r et sa dérivée \dot{y}_r sont supposées connues, lisses et uniformément bornées.

La procédure de conception s'effectue aussi en n étapes de la manière suivante :

Etape 1 : ($i=1$)

Nous définissons la première surface

$$s_1 = x_1 - y_r \quad (2.32)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{y}_r \end{aligned} \quad (2.33)$$

La commande virtuelle x_{2c} est définie comme suite

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1}(k_1 s_1 + f_1 - \dot{y}_r), \quad k_1 > 0 \quad (2.34)$$

Introduisons une nouvelle variable x_{2d} , et supposons que x_{2c} passe à travers un filtre de premier ordre pour obtenir x_{2d} , i.e.

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (2.35)$$

Où $\tau_2 > 0$ est la constante de temps du filtre.

Définissons la 2^{ème} surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, il en résulte que

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} \end{aligned} \quad (2.36)$$

En remplaçant (2.34) et (2.36) dans (2.33), on obtient

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 (x_{2d} - x_{2c}) \quad (2.37)$$

Afin d'annuler l'effet de l'erreur connue $(x_{2d} - x_{2c})$, un signal de compensation z_1 est conçu comme suite

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + g_1 z_2 + g_1 (x_{2d} - x_{2c}) \quad , \quad z_1(0) = 0 \quad (2.38)$$

Où z_2 sera défini dans l'étape suivante.

Maintenant, on définit des deux premières surfaces compensées de la manière suivante

$$v_1 = s_1 - z_1, \quad v_2 = s_2 - z_2 \quad (2.39)$$

La dérivée temporelle de v_1 se donne comme suite

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{s}_1 - \dot{z}_1 \\ &= -k_1 s_1 + g_1 s_2 + \cancel{g_1 (x_{2d} - x_{2c})} + k_1 z_1 - g_1 z_2 - \cancel{g_1 (x_{2d} - x_{2c})} \\ &= -k (s_1 - z_1) + g_1 (s_2 - z_2) \\ &= -k_1 v_1 + g_1 v_2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Etape i: ($i=2, \dots, n-1$)

De même, on considère la $i^{\text{ème}}$ surface

$$s_i = x_i - x_{id} \quad (2.41)$$

Dont la dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i) x_{i+1} - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (2.42)$$

La $i^{\text{ème}}$ commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est définie comme suite

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} (k_i s_i + g_{i-1} s_{i-1} + f_i - \dot{x}_{id}), \quad k_i > 0 \quad (2.43)$$

Comme dans la première étape, la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est passée à travers un filtre du premier ordre avec un constant de temps $\tau_{i+1} > 0$ pour avoir $x_{(i+1)d}$, i.e.

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c} \quad , \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (2.44)$$

Considérons la $i^{\text{ème}} + 1$ surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, il vient

$$x_{i+1} = s_{i+1} + (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) + x_{(i+1)c} \quad (2.45)$$

En remplaçant (2.43) et (2.45) dans (2.42), on obtient

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) \quad (2.46)$$

Pour éliminer l'effet de l'erreur $(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})$, un nouveau signal de compensation z_i est synthétisé de la manière suivante

$$\dot{z}_i = -k_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}), \quad z_i(0) = 0 \quad (2.47)$$

Définissons la $i^{\text{ème}}$ surface compensée

$$v_i = s_i - z_i \quad (2.48)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \dot{s}_i - \dot{z}_i \\ &= -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) + k_i z_i + g_{i-1} z_{i-1} - g_i z_{i+1} - g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) \\ &= -k_i (s_i - z_i) - g_{i-1} (s_{i-1} - z_{i-1}) + g_i (s_{i+1} - z_{i+1}) \\ &= -k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Etape n

La $n^{\text{ième}}$ surface est définie par

$$s_n = x_n - x_{nd} \quad (2.50)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Choisissons la loi de commande u sous la forme

$$u = -\frac{1}{g_n} (k_n s_n + g_{n-1} s_{n-1} + f_n - \dot{x}_{nd}), \quad k_n > 0 \quad (2.52)$$

En remplaçant (2.52) dans (2.51) on obtient

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} \quad (2.53)$$

La dynamique du signal de compensation z_n est définie comme suite

$$\dot{z}_n = -k_n z_n - g_{n-1} z_{n-1}, \quad z_n(0) = 0 \quad (2.54)$$

Définissons la $n^{\text{ième}}$ surface compensée v_n , telle que

$$v_n = s_n - z_n \quad (2.55)$$

En employant (2.53) et (2.54), la dérivée de v_n peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &= \dot{s}_n - \dot{z}_n \\ &= -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + k_n z_n + g_{n-1} z_{n-1} \\ &= -k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1} \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.5. Analyse de la stabilité

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (2.57)$$

La dynamique de (2.57) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{V} &= v_1 \dot{v}_1 + \sum_{i=2}^n v_i \dot{v}_i + v_n \dot{v}_n \\ &= v_1 (-k_1 v_1 + g_1 v_2) + \sum_{i=2}^n v_i (-k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1}) + v_n (-k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1}) \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i v_i^2 \\ &\leq -\alpha V \end{aligned} \quad (2.58)$$

avec $\alpha = \min(2k_1, \dots, 2k_n) > 0$

Lemme 2.1 [11] : Si pour un interval de temps d'initialisation donné $t \in [0, T_1]$, les signaux de compensation sont définis par $z_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, alors pour $t \geq T_1$, lorsque les entrées

bornées satisfaites $|x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}| \leq \beta_0$, $i = 1, \dots, n-1$, les états z_i , $i = 1, \dots, n-1$ définis dans (2.38), (2.47) et (2.54) sont aussi bornées par

$$\|z\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n z_i^2\right)} \leq \frac{\beta_0}{\alpha_0} \left(1 - e^{-\alpha_0(t-T_1)}\right) \quad (2.59)$$

Où $T_1 > 0$, $\beta_0 > 0$ sont des paramètres de conception de petites valeurs et $\alpha_0 = \min(k_1, \dots, k_n) > 0$

Preuve : La démonstration peut être trouvée dans [11]. Donc, elle est omise ici.

Théorème 2.2 : Considérons le système non linéaire (2.1), les lois de commande (2.34), (2.43) et (2.52), les signaux de compensation définis par (2.38), (2.47), et (2.54). Supposons que les hypothèses 2.3 et 2.4 sont satisfaites. Donc, les signaux d'erreurs compensées v_i , $i = 1, \dots, n$ sont exponentiellement stables et l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ converge exponentiellement vers un ensemble résiduel Ω , tel que

$$\Omega = \left\{s_1 = (y_1 - y_r) \mid \|s_1\| \leq \beta_0 / \alpha_0\right\} \quad (2.60)$$

Preuve : A partir de (2.58), on peut facilement déduire la convergence exponentielle des erreurs compensées v_i , $i = 1, \dots, n$ vers zéro. De plus, tant que $\|v\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)} \rightarrow 0$ et $\|z\| \leq \beta_0 / \alpha_0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, on conclue que $\|s_1\| \leq \|v\| + \|z\| \leq \beta_0 / \alpha_0$ quand $t \rightarrow \infty$. Ceci termine la démonstration.

2.6. Exemples d'application

Afin de montrer la validité de la commande par surface dynamique (DSC) et la commande par backstepping filtré (CFB) développées dans ce chapitre, nous effectuons une application de ces deux algorithmes de commande sur deux exemples de simulation.

2.6.1. Exemple 1 : (Exemple numérique) Système non linéaire de deuxième ordre

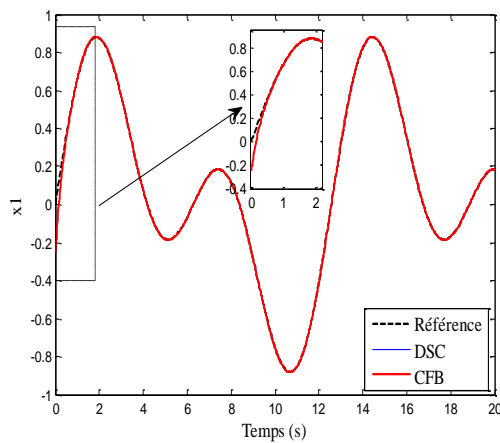
Dans cet exemple, on considère un système non linéaire triangulaire de deuxième ordre donné par [27] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.61)$$

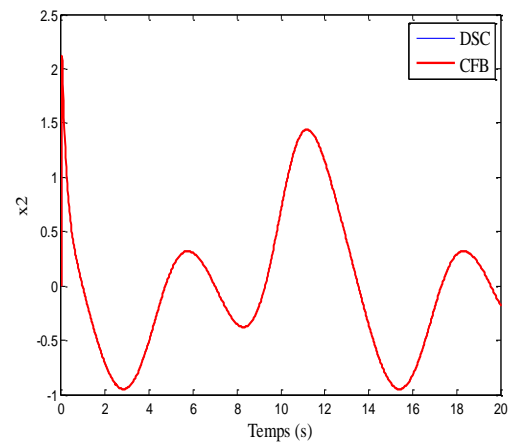
avec $f_1(x_1) = 0.1x_1^2 + x_1e^{-0.5x_1}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1x_2^2$, $g_1(x_1) = 1$, $g_2(x_1, x_2) = 1$.

Où, x_1 , x_2 et u sont, respectivement, les états et l'entrée de commande du système. Les conditions initiales sont choisies comme suite : $x(0) = [-0.25, 0]^T$. Les paramètres de conception sont : $k_1 = 5$, $k_2 = 5$ et $\tau_2 = 0.01$. L'objectif de la commande est de forcer la sortie de système à suivre la trajectoire de référence $y_r = 0.5(\sin(t) + \sin(0.5t))$.

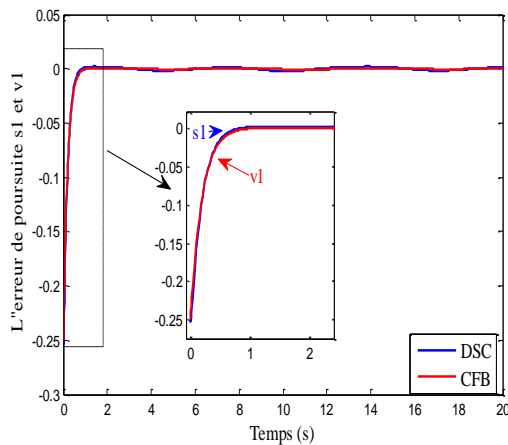
Les résultats de la simulation sont donnés respectivement par la Figure 2.1.



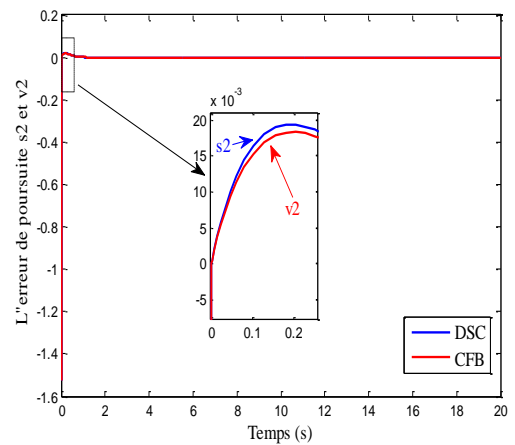
(a) Sortie du système non linéaire.



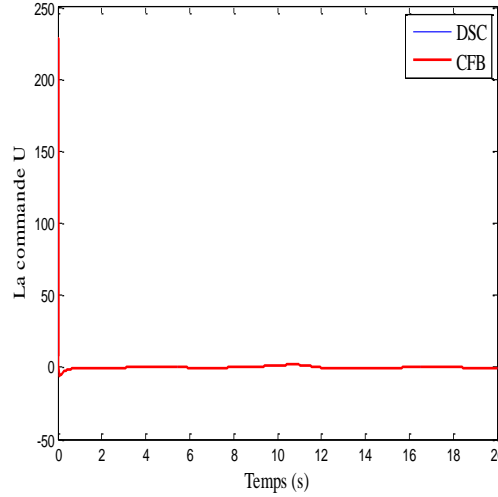
(b) Evolution de la 2^{ième} variable d'état



(c) Poursuite de la première erreur



(d) Poursuite de la deuxième erreur

(g) Signal de commande U **Figure 2.1** : Evolution du système de deuxième ordre.**2.6.2. Exemple 2** : (Exemple pratique) *Aile d'avion*

On considère une aile d'avion comme deuxième exemple d'application, soit ϕ l'angle de roulis de l'avion (rad), $\dot{\phi}$ la vitesse angulaire de roulis (rad/s), et δ_A est la sortie de l'actionneur. Le modèle de ce phénomène est donné par l'équation dynamique non linéaire suivante [28, 29] :

$$\ddot{\phi} = a_1\phi + a_2\dot{\phi} + a_3\dot{\phi}^3 + a_4\phi^2\dot{\phi} + a_5\phi\dot{\phi}^2 + b\delta_A \quad (2.62)$$

On pose le vecteur d'état $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ avec : $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, et $x_3 = \delta_A$, donc, le modèle dynamique (2.67) peut s'écrire sous la forme triangulaire suivante :

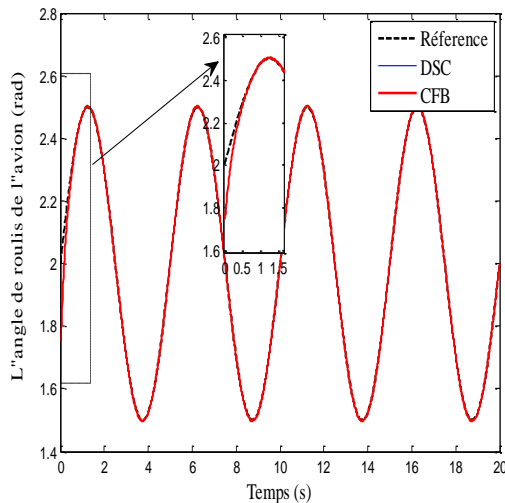
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \end{cases} \quad (2.63)$$

Où $f_2(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_2^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{\tau}x_3$, $g_2(x_1, x_2) = b$, et

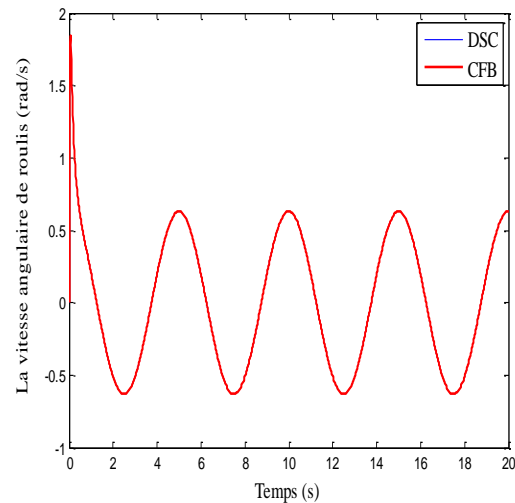
$$g_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\tau}.$$

avec, u est l'entrée de commande de l'actionneur, b est le gain de l'actionneur, τ est la constante de temps d'aileron, et $a_i, i=1, \dots, 5$ sont des paramètres variables dans le temps par rapport à des conditions d'expérimentations libres. Pour la simulation, les paramètres du système sont choisis comme suit [30] : $b=1.5, \tau=1/15, a_1=-0.0148927, a_2=0.0415424, a_3=0.01668756, a_4=-0.06578382$ et $a_5=0.08578836$. Les conditions initiales choisies sont : $x(0)=[1.75, 0, 0]^T$, les paramètres de conception sont : $k_1=5, k_2=5, k_3=5, \tau_2=0.01$, et $\tau_3=0.01$. L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système à suivre la trajectoire de référence : $y_r = 2 + 0.5\sin(0.4\pi t)$.

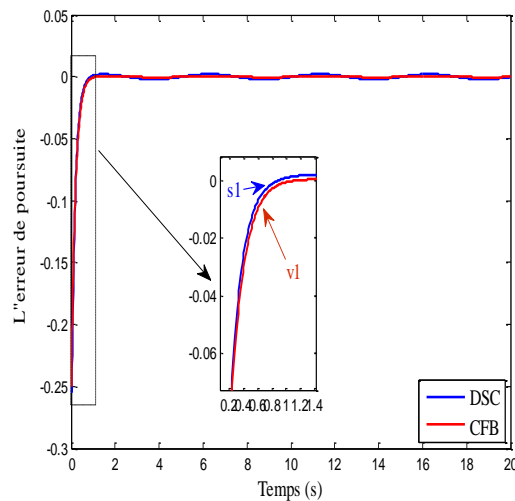
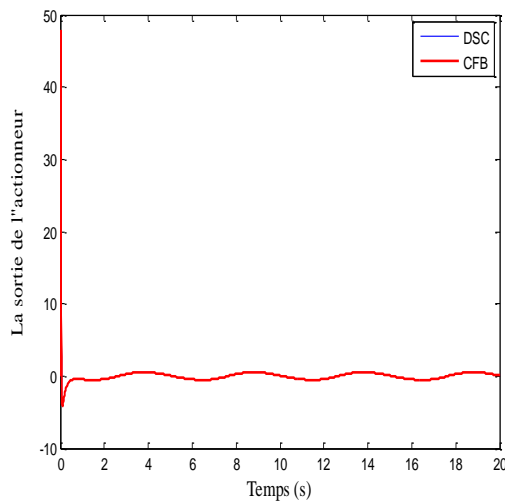
Les résultats de simulation sont illustrés dans les Figure 2.2.



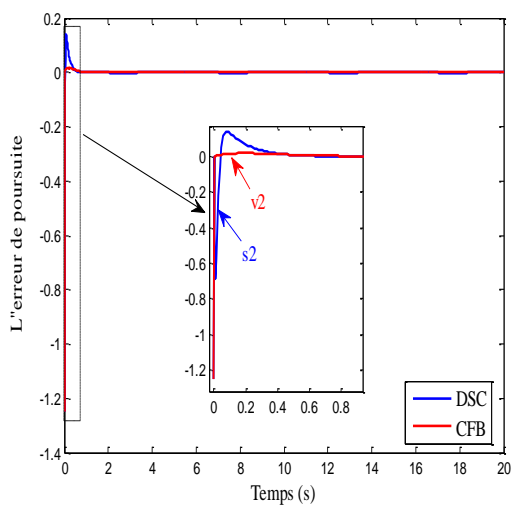
(a) L'angle de roulis de l'avion.



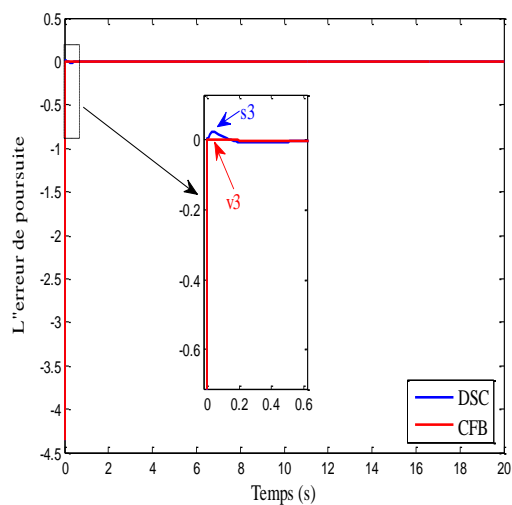
(b) La vitesse angulaire de roulis



(c) La sortie de l'actionneur

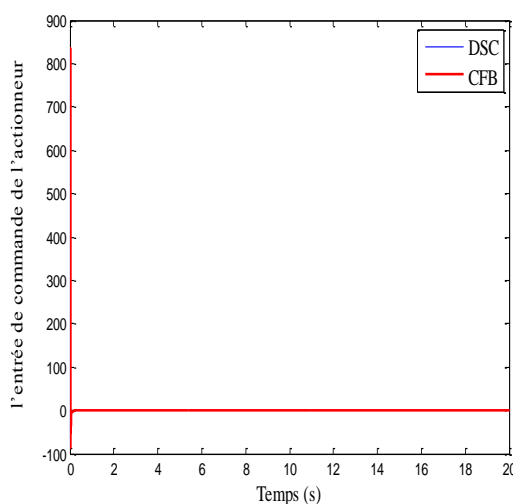


(d) Poursuite de la première erreur



(e) Poursuite de la deuxième erreur

(f) Poursuite de la troisième erreur



(g) Signal de commande

Figure 2.3 : Evolution du l'aile d'avion

D'après les résultats de simulations obtenus dans les deux exemples d'application on remarque que les deux techniques de commande (DSC et CFB) permettent d'avoir des bonnes performances de poursuite avec des résultats très proches entre eux.

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux techniques de commande pour une classe des systèmes non linéaires, la première c'est la commande par surface dynamique (DSC) et la

deuxième c'est la commande par backstepping filtré (CFB). Les deux techniques de commande utilisent des filtres linéaires passe-bas pour éviter le problème d'explosion de complexité. Afin de voir l'efficacité de ces techniques, nous avons appliquées les deux algorithmes de commande sur deux systèmes non linéaires. D'après les résultats de simulation, on conclue que les deux approches proposées dans ce chapitre donnent des bons résultats. Afin de faire face aux perturbations externes, aux incertitudes paramétriques ainsi qu'à la saturation d'actionneur, on propose dans les prochains chapitres d'autres algorithmes de commande basés sur la DSC et la CFB en utilisant les aspects de la commande adaptative.

Chapitre 3

Commande par Backstepping Filtré Adaptative avec Saturation d'Entrée : Approche 1.

3.1. Introduction

Afin de rendre les stratégies de commande par backstepping filtré proposées précédemment robustes vis-à-vis les perturbations externes et les incertitudes paramétriques, dans ce chapitre, deux approches de commande adaptatives seront développées pour une classe des systèmes non linéaires incertains. La première approche est une commande adaptative par DSC avec des filtres linéaires passe-bas, où des erreurs de poursuite ont été utilisées dans les lois d'adaptation. La deuxième approche est une commande adaptative par CFB, où les lois d'estimation sont conçues en employant des erreurs de poursuite compensées. Pour examiner l'efficacité et les performances des approches développées, les deux exemples d'application déjà étudiés dans le chapitre précédent seront considérés ici en tenant compte des perturbations externes et des incertitudes.

3. 2. Commande adaptative

L'origine de la commande adaptative remonte aux années 1950, les automaticiens se sont vite aperçus en effet qu'un contrôleur avec des paramètres fixes n'était pas toujours capable d'assurer les performances voulues, par exemple dans le cas où les paramètres du système variaient dans le temps [13]. La commande adaptative est une méthode de contrôle de ces systèmes. L'idée de base est d'estimer les paramètres et/ou modèle inconnu en ligne, et d'utiliser les paramètres estimés dans le calcul de la loi de commande. Un système de commande adaptative peut donc être considéré comme un système de commande avec estimation en ligne des paramètres [17].

3.3. Saturation [14]

Il est bien connu qu'en pratique tous les systèmes dynamiques sont soumis à des limitations sur leurs entrées dues à des contraintes physiques inhérentes au système ou bien à des limitations sur les actionneurs. Ces limitations sont modélisées par des non-linéarités de type saturation.

La saturation a été toujours un problème important pour les systèmes de commande, du fait que tous les actionneurs seaturent à un certain niveau. Lorsqu'un actionneur atteint ces limites, on dit qu'il est saturé et aucune tentative visant à accroître le signal de commande ne donne un résultat.

Mathématiquement, la saturation peut être décrit par

$$sat(u) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } u \geq u_{\max} \\ u & \text{si } |u| < u_{\max} \\ -u_{\max} & \text{si } u \leq -u_{\max} \end{cases} \quad (3.1)$$

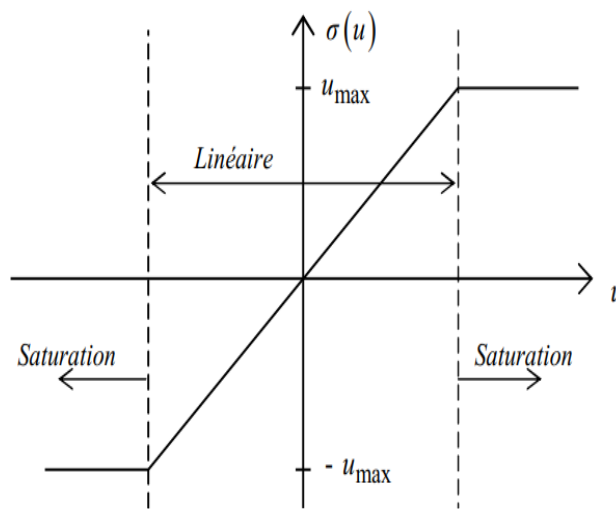


Figure 3.1. Fonction de saturation

Le problème de saturation s'avère plus délicat dans la commande adaptative, parce que le fait de continuer l'adaptation durant la saturation de l'entrée peut causer facilement une instabilité du système. Dans les approches de commande adaptatives, l'adaptation des paramètres s'effectue par l'utilisation de l'erreur de poursuite. Dans cette erreur, on trouve la contribution des conditions initiales, des erreurs paramétriques et de la saturation du signal de commande. Alors, pour avoir une adaptation stable, le signal d'erreur à utiliser dans l'adaptation ne doit pas contenir la composante due à la saturation du signal de commande. L'inclusion de la partie due à la saturation va provoquer une mauvaise adaptation et peut déstabiliser le système bouclé. A partir de ce constat, les solutions utilisées pour remédier aux effets indésirables de la saturation dans le cadre d'une commande adaptative sont :

- L'arrêt de l'adaptation durant la saturation, cette méthode malgré son efficacité est souvent confrontée au problème de démonstration de la stabilité [34].
- La modification de la loi de commande de telle sorte que le signal généré par le contrôleur reste toujours dans la zone linéaire, i.e. non saturé [35, 36].
- La modification du signal d'erreur utilisé dans l'adaptation par élimination de la composante due à la saturation [37].

3.4. Commande adaptative par DSC

Dans cette section, on va synthétiser une approche de commande adaptative basée sur la DSC en utilisant des filtres linéaires passe-bas. On considère une classe des systèmes non linéaires incertains décrits par la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, x) \quad i = 2, \dots, n-1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u(v(t)) + \Delta_n(t, x) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Où, f_i et g_i , $i = 1, \dots, n$ sont des fonctions non linéaires connues tel que $f_i(0) = 0$ et $g_i(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\bar{X}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ est un vecteur d'état partiel qui correspond aux i premières équations dynamiques, $\bar{X}_n = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état total, y est la sortie du système, $\Delta_i(t, x)$ est un terme incertain borné (i.e. $0 \leq |\Delta_i(t, x)| \leq \Delta_i^0$, avec Δ_i^0 est une constante positive) qui inclus les perturbations externes et les incertitudes paramétriques, v est l'entrée de commande à concevoir, $u(v(t))$ désigne l'entrée du système avec saturation, qui peut être décrit comme suit [32] :

$$u(v(t)) = sat(v(t)) = \begin{cases} sign(v(t))u_B & |v(t)| \geq u_B \\ v(t) & |v(t)| < u_B \end{cases} \tag{3.3}$$

La synthèse de la loi de commande se déroulera en n étapes comme suite

Etape 1 : ($i = 1$)

Nous définissons la première surface

$$s_1 = x_1 - y_r \quad (3.4)$$

La dérivée temporelle de (3.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x) - \dot{y}_r \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nous choisissons la première commande virtuelle x_{2c} comme suite

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1} \left(k_1 s_1 + f_1 - \dot{y}_r + \hat{\Delta}_1 \right), \quad k_1 > 0 \quad (3.6)$$

où $\hat{\Delta}_1$ est l'estimé de Δ_1 .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_1$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 \left[s_1 - \sigma_1 \hat{\Delta}_1 \right] \quad (3.7)$$

Comme dans le chapitre 2, et afin d'éviter la dérivation de \dot{x}_{2c} , on va filtrer de la commande virtuelle x_{2c} en utilisant un filtre de premier ordre passe-bas avec une constant de temps $\tau_2 > 0$, i.e.

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (3.8)$$

L'erreur du premier filtre s'exprime par

$$E_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (3.9)$$

Prenant en compte de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, il en résulte que

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} \\ &= s_2 + E_2 + x_{2c} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En remplaçant (3.6) et (3.10) dans (3.5), on obtient

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2 + \tilde{\Delta}_1 \quad (3.11)$$

où $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 - \hat{\Delta}_1$ est l'erreur d'estimation du terme incertain Δ_1 .

Etape i : ($i = 2, \dots, n-1$)

On définit la $i^{\text{ème}}$ erreur de poursuite

$$s_i = x_i - x_{id} \quad (3.12)$$

La dérivée temporelle de la $i^{\text{ème}}$ surface peut s'exprimer par

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, x) - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On choisit la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ comme suite

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} \left(k_i s_i + g_{i-1} s_{i-1} + f_i - \dot{x}_{id} + \hat{\Delta}_i \right), \quad k_i > 0 \quad (3.14)$$

où $\hat{\Delta}_i$ est l'estimé de Δ_i .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_i$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_i = \gamma_i \left[s_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i \right] \quad (3.15)$$

Pour éliminer le problème d'explosion de la complexité, un filtre du premier ordre passe-bas avec une constante de temps $\tau_{i+1} > 0$ est employé comme suite

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c}, \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (3.16)$$

L'erreur du $i^{\text{ème}}$ filtre est décrite sous la forme

$$E_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (3.17)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\dot{E}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \quad (3.18)$$

Tenant en compte la $i^{\text{ème}} + 1$ surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, il en résulte que

$$x_{i+1} = s_{i+1} + E_{i+1} + x_{(i+1)c} \quad (3.19)$$

En remplaçant (3.14) et (3.19) dans (3.13), on obtient

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} + \tilde{\Delta}_i \quad (3.20)$$

où $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \hat{\Delta}_i$ est l'erreur d'estimation de Δ_i .

Etape n

Afin d'éliminer l'effet de saturation, on utilise dans ce chapitre le système auxiliaire suivant [24]:

$$\dot{\lambda} = -k_n \lambda + g_n (\bar{X}_n) (u(v) - v) \quad (3.21)$$

où λ est le signal de conception correspondant.

Donc, la $n^{\text{ième}}$ surface s'écrit sous la forme

$$s_n = x_n - x_{nd} - \lambda \quad (3.22)$$

La dérivée temporelle de s_n peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda} \\ &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u(v) + \Delta_n(t, x) - \dot{\lambda} - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + \cancel{g_n u(v)} - \cancel{g_n u(v)} + k_n \lambda + g_n v + \Delta_n - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous choisissons la loi de commande actuelle v comme suit

$$v = -\frac{1}{g_n} \left(k_n s_n + g_{n-1} s_{n-1} + k_n \lambda + f_n - \dot{x}_{nd} + \hat{\Delta}_n \right), \quad k_n > 0 \quad (3.24)$$

où $\hat{\Delta}_n$ est l'estimé de Δ_n .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_n$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_n = \gamma_n \left[s_n - \sigma_n \hat{\Delta}_n \right] \quad (3.25)$$

L'erreur du dernier filtre est définie par

$$E_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (3.26)$$

La dérivée temporelle de E_n se donne comme suit

$$\dot{E}_n = \dot{x}_{nd} - \dot{x}_{nc} = -\frac{1}{\tau_n} E_n - \dot{x}_{nc} \quad (3.27)$$

En remplaçant (3.24) dans (3.23), on obtient

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \quad (3.28)$$

où $\tilde{\Delta}_n = \Delta_n - \hat{\Delta}_n$ est l'erreur d'estimation du terme incertain Δ_n .

3.5. Analyse de la stabilité

La fonction candidate de Lyapunov est donnée par

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n E_i^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2 \quad (3.29)$$

La dérivée de (3.29) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_1 \dot{s}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} s_i \dot{s}_i + s_n \dot{s}_n + \sum_{i=2}^n E_i \dot{E}_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i \\ &= s_1 \left(-k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2 + \tilde{\Delta}_1 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} s_i \left(-k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} + \tilde{\Delta}_i \right) \\ &\quad + s_n \left(-k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \right) + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \left(-\frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \left(\dot{\Delta}_i - \gamma_i \left[s_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i \right] \right) \quad (3.30) \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i s_i E_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \dot{x}_{(i+1)c} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\Delta}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \tilde{\Delta}_i \hat{\Delta}_i \end{aligned}$$

Hypothèse 3.1 [26, 33] : Les dérivées des termes incertains Δ_i , $i = 2, \dots, n$ sont supposées bornées par des constantes positives $\Delta_i^1 > 0$, telles que : $0 \leq |\dot{\Delta}_i| \leq \Delta_i^1$, $i = 2, \dots, n$.

En utilisant l'inégalité de Young et les hypothèses 2.1, 2.3 et 3.1, il en résulte que

$$g_i s_i E_{i+1} \leq \frac{\eta_i}{2} (s_i^2 + E_{i+1}^2) \quad (3.31)$$

$$|E_{i+1}\dot{x}_{(i+1)c}| \leq \frac{1}{2}(E_{i+1}^2 + M_{i+1}^2) \quad (3.32)$$

$$\tilde{\Delta}_i \hat{\Delta}_i \leq \frac{1}{2}(-\tilde{\Delta}_i^2 + (\Delta_i^0)^2) \quad (3.33)$$

$$\tilde{\Delta}_i \dot{\Delta}_i \leq \frac{1}{2}(\tilde{\Delta}_i^2 + (\Delta_i^1)^2) \quad (3.34)$$

Par conséquent, l'équation (3.30) devient

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^n k_i s_i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\eta_i}{2}(s_i^2 + E_{i+1}^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\tau_{i+1}} - \frac{1}{2} \right) E_{i+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (2k_i - \eta_i) s_i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{2}{\tau_i} - 1 - \eta_i \right) E_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sigma_i - \frac{1}{\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ou de même

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta \quad (3.36)$$

avec,

$$\begin{cases} \alpha = \min \left[(2k_1 - \eta_1), \dots, (2k_n - \eta_n), \left(\frac{2}{\tau_2} - 1 - \eta_1 \right), \dots, \left(\frac{2}{\tau_n} - 1 - \eta_n \right), (\sigma_1 \gamma_1 - 1), \dots, (\sigma_n \gamma_n - 1) \right] > 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \sigma_i (\Delta_i^0)^2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} M_{i+1}^2 \right) > 0 \end{cases}$$

Théorème 3.1 : *Considérons le système non linéaire (3.2) les lois de commande virtuelle (3.5), (3.13), et (3.24), les lois d'estimation (3.6), (3.14), et (3.25), ainsi que les filtres linéaires passe-bas (3.8), et (3.16). Supposons que les hypothèses 2.1-2.3 et 3.1 sont satisfaites. Donc, tous les signaux du système bouclé sont uniformément ultimement bornés (UUB) et l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ converge vers un voisinage de zéro.*

Preuve : En appliquant le Lemme 1.1 sur (3.36), on obtient

$$0 \leq V(t) \leq \left(V(0) - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.37)$$

En utilisant le fait que α et β sont des constantes positives, il en résulte que

$$0 \leq V(t) \leq V(0) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.38)$$

Selon (3.36), on peut conclure facilement que pour $V(t) \geq \beta/\alpha$, nous avons $\dot{V}(t) \leq 0$. Donc, en appliquant le théorème de Lyapunov, on peut déduire la bornitude des signaux d'erreurs $(s_i, E_{i+1}, M_{i+1}, \tilde{\Delta}_i)$. De plus, à partir de (3.29) et (3.38), on a $\|s_1\| \leq \sqrt{2V(0)} e^{-0.5\alpha t} + \sqrt{2\beta/\alpha}$. Ce qui implique que $\|s_1\| \leq \sqrt{2\beta/\alpha}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. De plus en plus en augmentant la valeur de α et en diminuant la valeur de β , la borne ultime $\sqrt{2\beta/\alpha}$ peut être rendue aussi petite que possible, et par conséquent, l'erreur de poursuite $s_1 = y - y_r$ peut être faite arbitrairement proche de zéro. Ceci termine la preuve.

3.6. Commande Adaptative par CFB

Dans cette section, on va concevoir une commande adaptative à l'aide de la technique CFB, où des erreurs de poursuite compensées seront utilisées au lieu des erreurs de poursuite simples dans les lois d'estimation. Considérons la même classe des systèmes non linéaires incertains décrite par (3.2).

Comme dans la section précédente, la procédure de conception s'effectue en n étapes comme suite

Etape 1 : ($i=1$)

Nous définissons la première surface

$$s_1 = x_1 - y_r \quad (3.39)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x) - \dot{y}_r \end{aligned} \quad (3.40)$$

On choisit x_{2c} comme la première commande virtuelle, telle que

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1} \left(k_1 s_1 + f_1 - \dot{x}_{1d} + \hat{\Delta}_1 \right), \quad k_1 > 0 \quad (3.41)$$

Où $\hat{\Delta}_1$ est l'estimé de Δ_1 .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_1$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 \left[v_1 - \sigma_1 \hat{\Delta}_1 \right] \quad (3.42)$$

Introduisons une nouvelle variable d'état x_{2d} , et supposons que x_{2c} passe à travers un filtre de premier ordre, pour obtenir x_{2d} , i.e.

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (3.43)$$

Prenant en compte de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, on obtient

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} \end{aligned} \quad (3.44)$$

En remplaçant (3.41) et (3.44) dans (3.40), il en résulte que

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 (x_{1d} - x_{1c}) + \tilde{\Delta}_1 \quad (3.45)$$

où $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 - \hat{\Delta}_1$ est l'erreur d'estimation de Δ_1 .

Afin d'annuler l'effet de l'erreur connue $(x_{2d} - x_{2c})$, un signal de compensation z_1 est conçu comme suite

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + g_1 z_2 + g_1 (x_{2d} - x_{2c}), \quad z_1(0) = 0 \quad (3.46)$$

Où z_2 sera défini dans l'étape suivante.

Maintenant, on définit les deux premières surfaces compensées de la manière suivante

$$v_1 = s_1 - z_1, \quad v_2 = s_2 - z_2 \quad (3.47)$$

En employant (3.45) et (3.46), la dérivée de v_1 peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= \dot{s}_1 - \dot{z}_1 \\
 &= -k_1 s_1 + \cancel{g_1(x_{2d} - x_{2c})} + g_1 s_2 + k_1 z_1 - g_1 z_2 - \cancel{g_1(x_{2d} - x_{2c})} + \tilde{\Delta}_1 \\
 &= -k(s_1 - z_1) + g_1(s_2 - z_2) + \tilde{\Delta}_1 \\
 &= -k_1 v_1 + g_1 v_2 + \tilde{\Delta}_1
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Etape i : ($i = 2, \dots, n-1$):

De même, on considère la $i^{\text{ème}}$ surface

$$s_i = x_i - x_{id} \tag{3.49}$$

La dérivée temporelle de s_i surface peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\
 &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, x) - \dot{x}_{id}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

La $i^{\text{ème}}$ commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est définie comme suit

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} \left(k_i s_i + g_{i-1} s_{i-1} + f - \dot{x}_{id} + \hat{\Delta}_i \right), \quad k_i > 0 \tag{3.51}$$

Où $\hat{\Delta}_i$ est l'estimé du terme incertain Δ_i .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_i$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_i = \gamma_i \left[v_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i \right] \tag{3.52}$$

Comme dans la première étape, la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est passée à travers un filtre du premier ordre avec un constant de temps $\tau_{i+1} > 0$, pour avoir $x_{(i+1)d}$, i.e.

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c}, \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \tag{3.53}$$

Considérons la $i^{\text{ème}} + 1$ erreur de poursuite $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, il en résulte que

$$x_{i+1} = s_{i+1} + \left(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \right) + x_{(i+1)c} \tag{3.54}$$

En remplaçant (3.51) et (3.54) dans (3.50), on obtient

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) + \tilde{\Delta}_i \quad (3.55)$$

où $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \hat{\Delta}_i$ est l'erreur d'estimation de Δ_i .

Pour éliminer l'effet de l'erreur $(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})$, un nouveau signal de compensation z_i est synthétisé de la manière suivante

$$\dot{z}_i = -k_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}), \quad z_i(0) = 0 \quad (3.56)$$

Définissons la $i^{\text{ème}}$ surface compensée

$$v_i = s_i - z_i \quad (3.57)$$

A partir de (3.55) et (3.56), la dérivée de (3.57) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \dot{s}_i - \dot{z}_i \\ &= -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + \cancel{g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})} + \tilde{\Delta}_i + k_i z_i + g_{i-1} z_{i-1} - g_i z_{i+1} - \cancel{g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})} \\ &= -k_i (s_i - z_i) - g_{i-1} (s_{i-1} - z_{i-1}) + g_i (s_{i+1} - z_{i+1}) + \tilde{\Delta}_i \\ &= -k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1} + \tilde{\Delta}_i \end{aligned} \quad (3.58)$$

Etape n

La $n^{\text{ème}}$ surface est définie sous la forme

$$s_n = x_n - x_{nd} - \lambda \quad (3.59)$$

où λ est un signal auxiliaire défini dans (3.21), qui est utilisé pour réduire l'effet de saturation.

La dérivée temporelle de s_n peut s'exprimer par

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda} \\ &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u(v) + \Delta_n(t, x) - \dot{\lambda} - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + \cancel{g_n u(v)} - \cancel{g_n u(v)} + k_n \lambda + g_n v + \Delta_n - \dot{x}_{nd} \\ &= k_n \lambda + f_n + g_n v + \Delta_n - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Nous choisissons la loi de commande finale v comme suite

$$v = -\frac{1}{g_n} \left(k_n s_n + g_{n-1} s_{n-1} + k_n \lambda + f_n - \dot{x}_{nd} + \hat{\Delta}_n \right), \quad k_n > 0 \quad (3.61)$$

Où $\hat{\Delta}_n$ est l'estimé de Δ_n .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_n$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_n = \gamma_n \left[v_n - \sigma_n \hat{\Delta}_n \right] \quad (3.62)$$

En remplaçant (3.61) dans (3.60), on obtient

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \quad (3.63)$$

où $\tilde{\Delta}_n = \Delta_n - \hat{\Delta}_n$ est l'erreur d'estimation de l'incertitude Δ_n .

La dynamique du signal de compensation z_n est définie comme suite

$$\dot{z}_n = -k_n z_n - g_{n-1} z_{n-1}, \quad z_n(0) = 0 \quad (3.64)$$

Définissons la $n^{\text{ième}}$ surface compensée v_n , telle que

$$v_n = s_n - z_n \quad (3.65)$$

Donc, à partir de (3.63) et (3.64), la dérivée de (3.65) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &= \dot{s}_n - \dot{z}_n \\ &= -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + k_n z_n + g_{n-1} z_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \\ &= -k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.7. Analyse de la stabilité

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2 \quad (3.67)$$

La dynamique de (3.62) s'écrit

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= v_1 \dot{v}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} v_i \dot{v}_i + v_n \dot{v}_n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i \\
 &= v_1 (-k_1 v_1 + g_1 v_2 + \tilde{\Delta}_1) + \sum_{i=2}^n v_i (-k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1} + \tilde{\Delta}_i) \\
 &\quad + v_n (-k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1} + \tilde{\Delta}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i (\dot{\tilde{\Delta}}_i - \gamma_i [v_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i]) \\
 &= -\sum_{i=1}^n k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i \tilde{\Delta}_i \hat{\Delta}_i
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

En utilisant les inégalités (3.33)-(3.34), on obtient

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n 2k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sigma_i - \frac{1}{\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) \tag{3.69}$$

Ou de même

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta \tag{3.70}$$

avec,

$$\begin{cases} \alpha = \min [(2k_1, \dots, 2k_n), (\sigma_1 \gamma_1 - 1), \dots, (\sigma_n \gamma_n - 1)] > 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \sigma_i (\Delta_i^0)^2 \right) \end{cases}$$

Théorème 3.2 : *Considérons le système non linéaire (3.2) les lois de commande (3.41), (3.51), et (3.61), les lois d'estimation (3.42), (3.52), et (3.62), les signaux de compensation définis par (3.46), (3.56), et (3.64). Supposons que les hypothèses 2.3, 2.4 et 3.1 sont satisfaites. Donc, tous les signaux du système en boucle fermée sont uniformément ultimement bornés (UUB) et l'erreur de poursuite $s_1 = y - y_r$ converge vers un petit voisinage de zéro.*

Preuve : La démonstration de la bornitude des signaux d'erreurs $(v_i, \tilde{\Delta}_i)$ s'effectue de la même manière que celle du Théorème 3.1. De plus, en utilisant le Lemme 2.1, on peut facilement déduire la bornitude de $s_i = v_i + z_i, i = 1, \dots, n$ Ainsi, à partir de (3.67), (3.70), et

(2.63), il en résulte que $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \leq \sqrt{2\beta/\alpha}$ et $\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2} \leq \beta_0/\alpha_0$ quand $t \rightarrow \infty$. Ce

qui implique que $\|s_1\| \leq \|v\| + \|z\| \leq \sqrt{2\beta/\alpha} + \beta_0/\alpha_0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. De plus en plus, en augmentant la valeur de (α, α_0) et en diminuant la valeur de (β, β_0) , la borne ultime $\sqrt{2\beta/\alpha} + \beta_0/\alpha_0$ peut être rendue aussi petite que possible, et par conséquent, l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ peut être faite arbitrairement proche de zéro.

3.8. Exemples d'application

Pour montre l'efficacité de la commande adaptative par DSC (i.e. ADSC) et la commande adaptative par CFB (i.e. ACFB) développées dans ce chapitre vis-à-vis des perturbations externes et les incertitudes paramétriques, nous effectuons une simulation sur les deux systèmes non linéaires déjà étudiés précédemment.

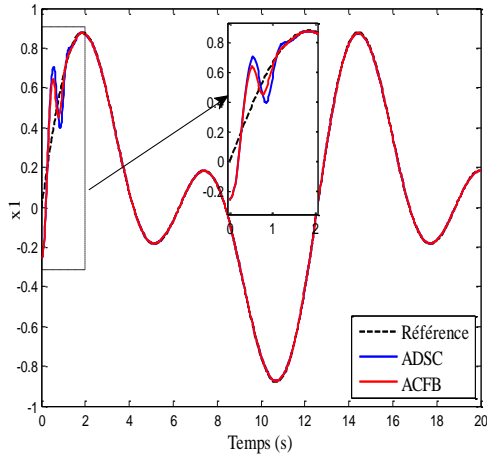
3.8.1. Exemple 1 : (Exemple numérique) *Système non linéaire de deuxième ordre*

En tenant compte des incertitudes paramétriques, le système non linéaire (2.61) devient [27] :

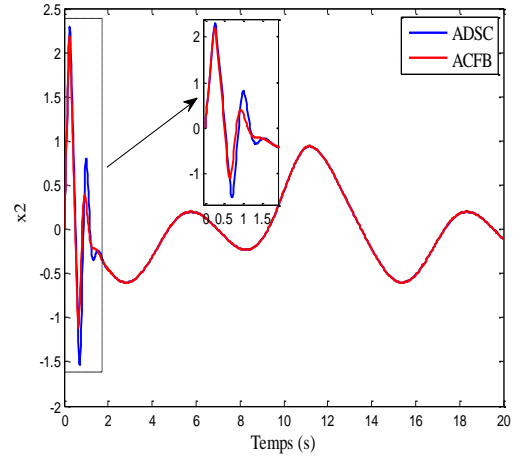
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u + \Delta_2(t, x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.71)$$

avec $f_1(x_1) = 0.1x_1^2 + x_1e^{-0.5x_1}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1x_2^2$, $g_1(x_1) = 1$, $g_2(x_1, x_2) = 1$, $\Delta_1(t, x) = 0.6\sin x_2$, et $\Delta_2(t, x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2)\sin^3 t$.

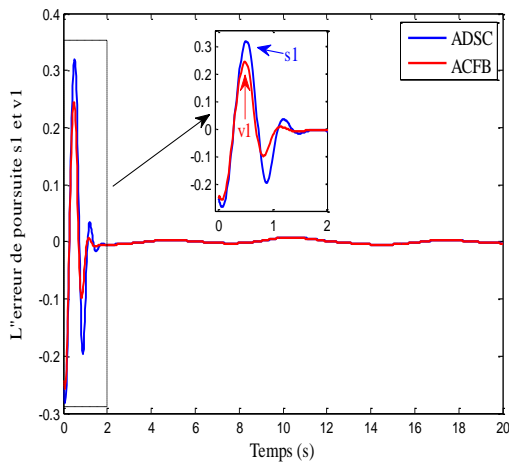
Les conditions initiales sont choisies comme suite : $x(0) = [-0.25, 0]^T$. Les paramètres de conception sont : $k_1 = 5$, $k_2 = 5$ et $\tau_2 = 0.01$. Les paramètres d'adaptations sont : $\gamma_1 = 70$, $\gamma_2 = 70$, $\sigma_1 = 0.01$, $\sigma_2 = 0.01$. Les résultats de simulations sont donnés par la Figure 3.1.



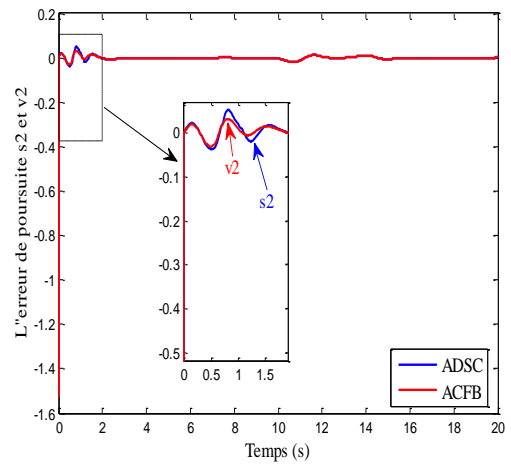
(a) Sortie du système.



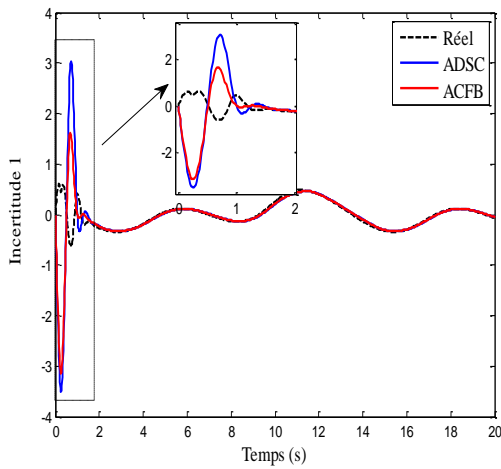
(b) Evolution de la 2^{ème} variable d'état



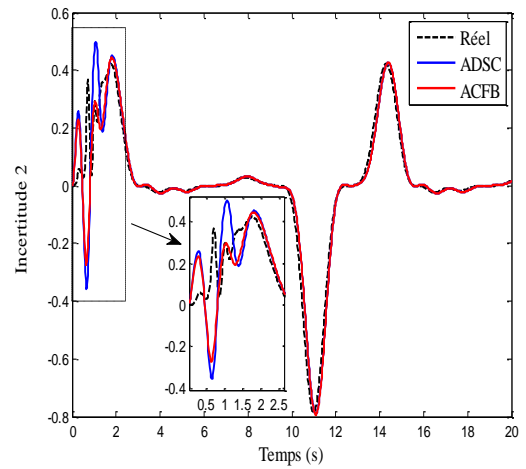
(c) Poursuite de la première erreur



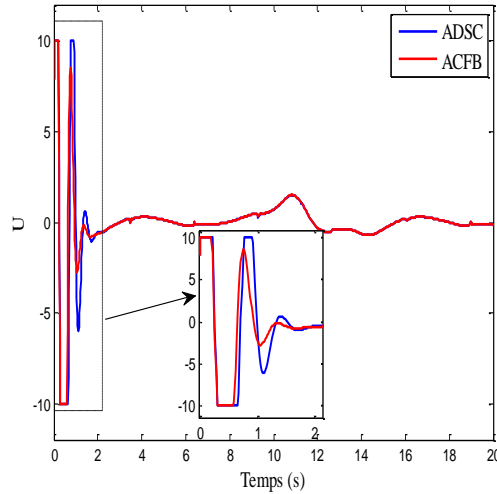
(d) Poursuite de la deuxième erreur



(e) Estimation de l'incertitude Δ_1



(f) Estimation de l'incertitude Δ_2


 (g) Signal de commande U
Figure 3.2 : Evolution du système de deuxième ordre.

3.8.2. Exemple 2 : (Exemple pratique) Aile de l'avion

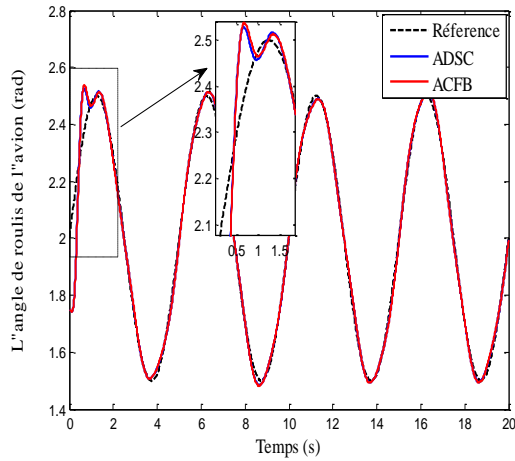
Le système (2.63) étudié dans le chapitre précédent peut être modifié en introduisant des perturbations externes de la manière suivante [28, 29] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 + \Delta(t, x) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \end{cases} \quad (3.72)$$

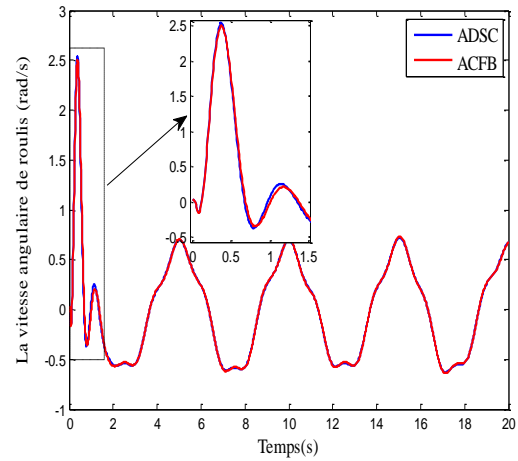
Où $f_2(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_2^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{\tau}x_3$, $g_2(x_1, x_2) = b$,

$g_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\tau}$ et $\Delta(t, x) = 2\sin(2t) + \sin(5t)$.

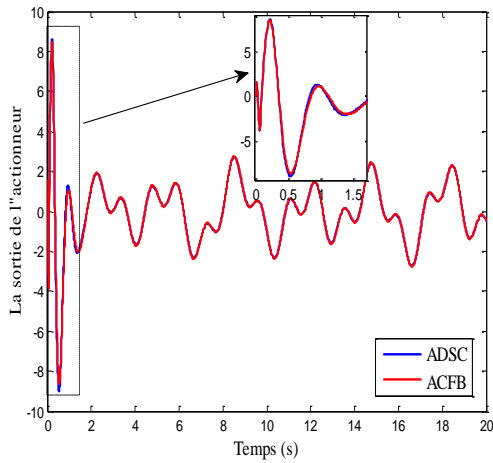
Les conditions initiales sont choisies comme suite : $x(0) = [1.75, 0, 0]^T$. Les paramètres de conception sont : $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, $k_3 = 5$, $\tau_2 = 0.01$, et $\tau_3 = 0.01$. Les paramètres d'adaptations sont $\gamma = 60$ et $\sigma = 0.01$. Les résultats obtenus sont illustrés dans la Figure 3.2.



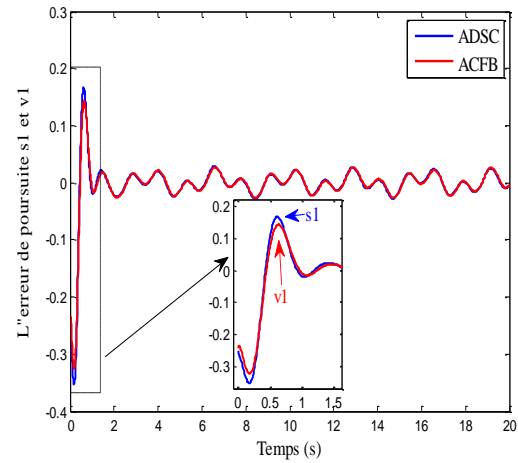
(a) Angle de roulis de l'avion



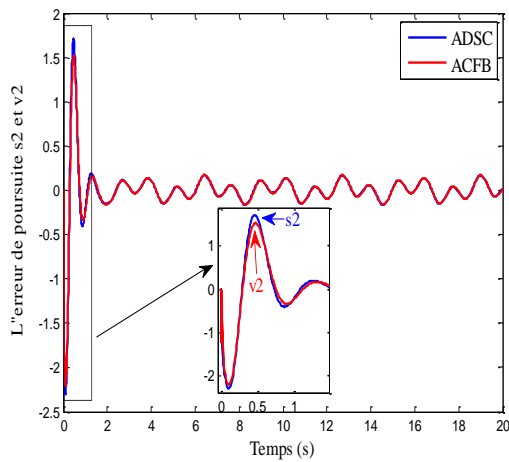
(b) Vitesse angulaire de roulis



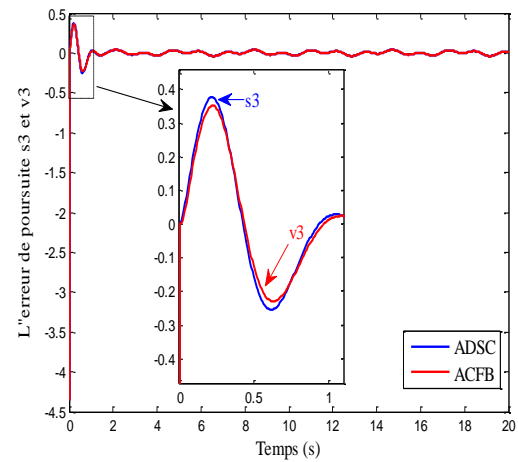
(c) Sortie de l'actionneur



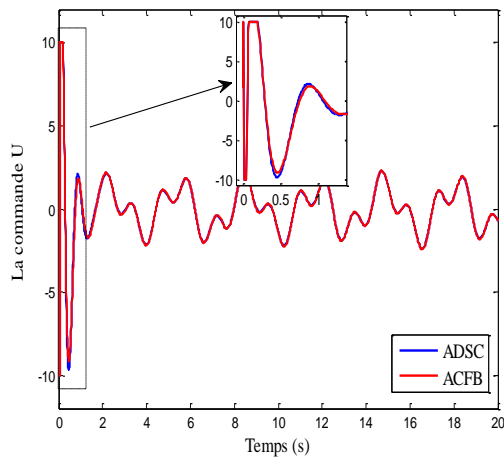
(d) Poursuite de la première erreur



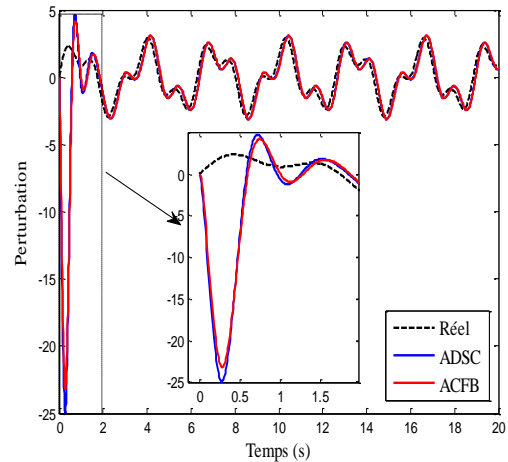
(e) Poursuite de la deuxième erreur



(f) Poursuite de la troisième erreur



(g) Signal de commande U



(h) Estimation de la perturbation externe

Figure 3.3 : Evolution du l'aile de l'avion avec perturbation.

D'après les résultats de simulation dans les deux exemples d'applications, on remarque une bonne poursuite de la trajectoire de référence, et une bonne robustesse vis-à-vis les perturbations externes et des incertitudes paramétriques avec une supériorité des performances de l'approche de commande via la CFB par rapport à celle basée sur la DSC.

3.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de la commande adaptative avec saturation d'entrée pour une classe des systèmes non linéaires incertains. Deux approches de commande ont été abordées. La première est une commande adaptative via la DSC, tandis que la deuxième est basée sur la CFB. Afin de réduire l'effet de saturation, un système auxiliaire a été introduit dans la dernière étape de conception. Ainsi, pour montrer les performances des deux approches proposées, nous avons considéré deux systèmes non linéaires comme exemples de simulation. Le premier est un exemple numérique décrit par un système de deuxième ordre et l'autre est un système pratique représenté par une aile d'avion. Les résultats de simulations obtenus montrent l'efficacité, ainsi que la robustesse de ces deux techniques de commande vis-à-vis des perturbations externes et des incertitudes paramétriques.

Chapitre 4

Commande par Backstepping Filtré Adaptative avec Saturation d'Entrée : Approche 2.

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous avons développé deux nouvelles approches de commande adaptative pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec saturation d'entrée. La première approche de commande est synthétisée via la DSC, tandis que la deuxième basé sur la technique CFB. Pour éliminer l'effet de saturation, un système auxiliaire est introduit dans chaque étape de conception. Afin de confirmer l'amélioration des performances de commande, une comparaison entre ces nouvelles stratégies de commande et celles proposées dans le chapitre 3 sera réalisée en simulation à travers les deux exemples d'application déjà étudiés.

4.2. Commande adaptative par DSC

Afin de compenser l'effet de la saturation dans ce chapitre, on utilise le nouveau système auxiliaire suivant [38] :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -k_1 \lambda_1 + g_1 \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_i &= -k_i \lambda_i + g_{i+1} \lambda_{i+1}, & i = 2, 3, \dots, n \\ \dot{\lambda}_n &= -k_n \lambda_n + g_n (\bar{X}_n)(u(v) - v) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ est le vecteur des signaux auxiliaires.

Considérons la classe des systèmes non linéaires incertains décrite par (3.2). En se basant sur la technique DSC, la procédure de conception de la loi de commande v s'effectue en n étapes comme suite.

Etape 1 : ($i = 1$)

On considère la première surface modifiée

$$s_1 = x_1 - y_r - \lambda_1 \quad (4.2)$$

Sa dérivée temporelle peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r - \dot{\lambda}_1 \\ &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x) - \dot{y}_r + k_1\lambda_1 - g_1\lambda_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

On choisit x_{2c} comme première commande virtuelle, telle que

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1} \left(k_1(s_1 + \lambda_1) + f_1 - \dot{y}_r + \hat{\Delta}_1 \right), \quad k_1 > 0 \quad (4.4)$$

où $\hat{\Delta}_1$ est l'estimé du terme incertain Δ_1 .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_1$ peut être écrite par

$$\dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 \left[s_1 - \sigma_1 \hat{\Delta}_1 \right] \quad (4.5)$$

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle, on introduit une nouvelle variable x_{2d} obtenue par le filtrage de la commande virtuelle x_{2c} en utilisant un filtre de premier ordre passe-bas avec une constant de temps $\tau_2 > 0$, i.e.

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (4.6)$$

L'erreur du filtre s'exprime par

$$E_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (4.7)$$

Prenant en considération la deuxième surface modifiée $s_2 = x_2 - x_{2d} - \lambda_2$, on obtient

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} + \lambda_2 \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} + \lambda_2 \\ &= s_2 + E_2 + x_{2c} + \lambda_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

En remplaçant (4.4) et (4.8) dans (4.3), en il résulte que

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2 + \tilde{\Delta}_1 \quad (4.9)$$

où $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 - \hat{\Delta}_1$ est l'erreur d'estimation de l'incertitude Δ_1 .

Etape i : ($i = 2, \dots, n-1$)

On définit la $i^{\text{ème}}$ surface modifiée

$$s_i = x_i - x_{id} - \lambda_i \quad (4.10)$$

Sa dérivée temporelle est décrit par

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} - \dot{\lambda}_i \\ &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, x) - \dot{x}_{id} + k_i\lambda_i - g_{i+1}\lambda_{i+1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Choisissons la $i^{\text{ème}}$ commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ comme suite

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} \left(k_i(s_i + \lambda_i) + g_{i-1}s_{i-1} + f_i - \dot{x}_{id} + \hat{\Delta}_i \right), \quad k_i > 0 \quad (4.12)$$

où $\hat{\Delta}_i$ est l'estimé de Δ_i .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_i$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_i = \gamma_i \left[s_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i \right] \quad (4.13)$$

La variable $x_{(i+1)c}$ est passée à travers un filtre du premier ordre passe-bas avec une constante de temps $\tau_{i+1} > 0$ pour obtenir $x_{(i+1)d}$, i.e.

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c}, \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (4.14)$$

On définit l'erreur du filtre correspondant comme suite

$$E_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (4.15)$$

La dérivée temporelle de E_{i+1} est exprimée par

$$\dot{E}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \quad (4.16)$$

Considérons la $i^{\text{ème}} + 1$ surface modifiée $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d} - \lambda_{i+1}$, il vient

$$x_{i+1} = s_{i+1} + E_{i+1} + x_{(i+1)c} + \lambda_{i+1} \quad (4.17)$$

En employant les équations (4.12) et (4.17) dans (4.11), on obtient

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} + \tilde{\Delta}_i \quad (4.18)$$

où $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \hat{\Delta}_i$ est l'erreur d'estimation du terme incertain Δ_i .

Etape n

La $n^{\text{ième}}$ surface modifiée est définie par

$$s_n = x_n - x_{nd} - \lambda_n \quad (4.19)$$

La dérivée temporelle de s_n peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda}_n \\ &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u(v) + \Delta_n(t, x) - \dot{\lambda}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + \cancel{g_n u(v)} - \cancel{g_n u(v)} + k_n \lambda_n + g_n v + \Delta_n - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nous choisissons la loi de commande v comme suite

$$v = -\frac{1}{g_n} (k_n s_n + g_{n-1} s_{n-1} + k_n \lambda_n + f_n + \hat{\Delta}_n - \dot{x}_{nd}), \quad k_n > 0 \quad (4.21)$$

Où $\hat{\Delta}_n$ est l'estimé de l'incertitude Δ_n .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_n$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_n = \gamma_n [s_n - \sigma_n \hat{\Delta}_n] \quad (4.22)$$

L'erreur du filtre est définie par

$$E_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (4.23)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\dot{E}_n = \dot{x}_{nd} - \dot{x}_{nc} = -\frac{1}{\tau_n} E_n - \dot{x}_{nc} \quad (4.24)$$

En remplaçant (4.23) dans (4.22), il en résulte que

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \quad (4.25)$$

où $\tilde{\Delta}_n = \Delta_n - \hat{\Delta}_n$, est l'erreur d'estimation de l'incertitude Δ_n .

4.3. Analyse de la stabilité

Considérons la fonction de Lyapouv suivante

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} E_i^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2 \quad (4.26)$$

La dérivée de (4.26) peut être exprimée par

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_1 \dot{s}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} s_i \dot{s}_i + s_n \dot{s}_n + \sum_{i=1}^{n-1} E_i \dot{E}_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i \\ &= s_1 (-k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2 + \tilde{\Delta}_1) + \sum_{i=1}^{n-1} s_i (-k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} + \tilde{\Delta}_i) \\ &\quad + s_n (-k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \left(-\frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \left(\dot{\Delta}_i - \gamma_i [s_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i] \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i s_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i s_i E_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\tau_{i+1}} E_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \dot{x}_{(i+1)c} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \tilde{\Delta}_i \dot{\hat{\Delta}}_i \end{aligned} \quad (4.27)$$

A partir de (3.31)-(3.34), il vient

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^n k_i s_i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\eta_i}{2} (s_i^2 + E_{i+1}^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\tau_{i+1}} - \frac{1}{2} \right) E_{i+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (2k_i - \eta_i) s_i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{2}{\tau_i} - 1 - \eta_i \right) E_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sigma_i - \frac{1}{\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ou de même

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \min \left[(2k_1 - \eta_1), \dots, (2k_n - \eta_n), \left(\frac{2}{\tau_2} - 1 - \eta_1 \right), \dots, \left(\frac{2}{\tau_n} - 1 - \eta_n \right), (\sigma_1 \gamma_1 - 1), \dots, (\sigma_n \gamma_n - 1) \right] > 0 \\ \beta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} \end{cases}$$

Théorème 4.1 : *Considérons le système non linéaire (3.2) les lois de commande (4.4), (4.12), et (4.21), les lois d'estimation (4.5), (4.13), et (4.22), ainsi que les filtres linéaires passe-bas du premier ordre (4.6), et (4.14). Supposons que les hypothèses 2.1-2.3 et 3.1 sont satisfaites. Donc, tous les signaux du système bouclé sont uniformément ultimement bornées (UUB) et l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ converge vers un petit voisinage autour de zéro.*

Preuve : La preuve est similaire à celle du Théorème 3.1.

4.4. Commande Adaptative par Backstepping Filtré (CFB)

Dans cette section, une deuxième approche de commande adaptative via la CFB sera conçue, où des erreurs de poursuite compensées modifiées seront utilisées dans les lois d'estimation. On considère la même classe des systèmes non linéaires incertains décrite par (3.2).

La procédure de conception s'effectue en n étapes comme suite

Etape 1 : ($i = 1$)

On considère la première surface modifiée

$$s_1 = x_1 - y_r - \hat{\lambda}_1 \quad (4.32)$$

Sa dérivée s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r - \dot{\hat{\lambda}}_1 \\ &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \Delta_1(t, x) - \dot{y}_r - \dot{\hat{\lambda}}_1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

La première commande virtuelle x_{2c} est définie par

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1} \left(k_1 (s_1 + \lambda_1) + f_1 - \dot{y}_r + \hat{\Delta}_1 \right), \quad k_1 > 0 \quad (4.34)$$

où $\hat{\Delta}_1$ est l'estimé de Δ_1 .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_1$ peut s'écrire comme suit

$$\dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 \left[v_1 - \sigma_1 \hat{\Delta}_1 \right] \quad (4.35)$$

Maintenant, la commande virtuelle x_{2c} est passée à travers un filtre linéaire passe-bas avec une constant de temps $\tau_2 > 0$ pour obtenir x_{2d} , i.e.

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (4.36)$$

Définissons la deuxième surface modifiée $s_2 = x_2 - x_{2d} - \lambda_2$, donc, on trouve

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} + \lambda_2 \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} + \lambda_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

En remplaçant (4.34) et (4.37) dans (4.33), on obtient

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + g_1 s_2 + g_1 (x_{1d} - x_{1c}) + \tilde{\Delta}_1 \quad (4.38)$$

où $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 - \hat{\Delta}_1$ est l'erreur d'estimation de Δ_1 .

On définit la première surface compensée modifiée de la manière suivante

$$v_1 = s_1 - z_1 \quad (4.39)$$

Où z_1 est un signal de compensation, utilisé pour annuler l'effet de l'erreur $(x_{2d} - x_{2c})$.

La dynamique de z_1 est exprimée par

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + g_1 z_2 + g_1 (x_{2d} - x_{2c}), \quad z_1(0) = 0 \quad (4.40)$$

Où z_2 sera défini dans l'étape suivante.

A partir de (4.38) et (4.40), la dérivée de v_1 est obtenue de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= \dot{s}_1 - \dot{z}_1 \\
 &= -k_1 s_1 + \cancel{g_1(x_{2d} - x_{2c})} + g_1 s_2 + k_1 z_1 - g_1 z_2 - \cancel{g_1(x_{2d} - x_{2c})} + \tilde{\Delta}_1 \\
 &= -k(s_1 - z_1) + g_1(s_2 - z_2) + \tilde{\Delta}_1 \\
 &= -k_1 v_1 + g_1 v_2 + \tilde{\Delta}_1
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Etape i : ($i = 2, \dots, n-1$)

Définissons la $i^{\text{ème}}$ surface modifiée

$$s_i = x_i - x_{id} - \lambda_i \tag{4.42}$$

La dérivée temporelle de s_i peut s'écrire par

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} - \dot{\lambda}_i \\
 &= f_i(\bar{X}_i) + g_i(\bar{X}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, x) - \dot{x}_{id} - \dot{\lambda}_i
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Choisissons maintenant la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ sous la forme

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} \left(k_i (s_i + \lambda_i) + g_{i-1} s_{i-1} + f_i - \dot{x}_{id} + \hat{\Delta}_i \right), \quad k_i > 0 \tag{4.44}$$

Où $\hat{\Delta}_i$ est l'estimé de Δ_i .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_i$ est donnée par

$$\dot{\hat{\Delta}}_i = \gamma_i \left[v_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i \right] \tag{4.45}$$

Comme l'étape précédente, la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est passée à travers un filtre du premier ordre avec un constant de temps $\tau_{i+1} > 0$ pour avoir $x_{(i+1)d}$, i.e.

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c}, \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \tag{4.46}$$

Considérons la surface modifiée $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d} - \lambda_{i+1}$, il en résulte que

$$x_{i+1} = s_{i+1} + E_{i+1} + x_{(i+1)c} + \lambda_{i+1} \tag{4.47}$$

En remplaçant (4.44) et (4.47) dans (4.43), on obtient

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) + \tilde{\Delta}_i \quad (4.48)$$

où $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \hat{\Delta}_i$ est l'erreur d'estimation de Δ_i .

Maintenant, la $i^{\text{ème}}$ surface compensée modifiée est définie par

$$v_i = s_i - z_i \quad (4.49)$$

Où z_i est le $i^{\text{ème}}$ signal de compensation, qui est utilisé pour d'éliminer l'effet de l'erreur $(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})$.

La dynamique de z_i s'écrit de la façon suivante

$$\dot{z}_i = -k_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}), \quad z_i(0) = 0 \quad (4.50)$$

A partir de (4.48) et (4.50), la dérivée de v_i peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \dot{s}_i - \dot{z}_i \\ &= -k_i s_i - g_{i-1} s_{i-1} + g_i s_{i+1} + \cancel{g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})} + \tilde{\Delta}_i + k_i z_i + g_{i-1} z_{i-1} - g_i z_{i+1} - \cancel{g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})} \\ &= -k_i (s_i - z_i) - g_{i-1} (s_{i-1} - z_{i-1}) + g_i (s_{i+1} - z_{i+1}) + \tilde{\Delta}_i \\ &= -k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1} + \tilde{\Delta}_i \end{aligned} \quad (4.51)$$

Etape n

La $n^{\text{ème}}$ surface modifiée est définie par

$$s_n = x_n - x_{nd} - \lambda_n \quad (4.52)$$

Sa dérivée temporelle s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda}_n \\ &= f_n(\bar{X}_n) + g_n(\bar{X}_n)u(v) + \Delta_n(t, x) - \dot{\lambda}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n + \cancel{g_n u(v)} - \cancel{g_n u(v)} + k_n \lambda_n + g_n v + \Delta_n - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (4.53)$$

On choisit la loi de commande actuelle v comme suite

$$v = -\frac{1}{g_n} \left(k_n s_n + g_{n-1} s_{n-1} + k_n \lambda_n + f_n + \hat{\Delta}_n - \dot{x}_{nd} \right), \quad k_n > 0 \quad (4.54)$$

où $\hat{\Delta}_n$ est l'estimé de Δ_n .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_n$ est écrite comme suit

$$\dot{\hat{\Delta}}_n = \gamma_n \left[v_n - \sigma_n \hat{\Delta}_n \right] \quad (4.55)$$

En remplaçant (4.54) dans (4.53), on obtient

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \quad (4.56)$$

où $\tilde{\Delta}_n = \Delta_n - \hat{\Delta}_n$ est la loi d'estimation de Δ_n .

La dynamique du signal de compensation correspondant est décrite par

$$\dot{z}_n = -k_n z_n - g_{n-1} z_{n-1}, \quad z_n(0) = 0 \quad (4.57)$$

Définissons la $n^{\text{ième}}$ surface compensée modifiée v_n , telle que

$$v_n = s_n - z_n \quad (4.58)$$

A partir de (4.56) et (4.57), la dérivée de v_n peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &= \dot{s}_n - \dot{z}_n \\ &= -k_n s_n - g_{n-1} s_{n-1} + k_n z_n + g_{n-1} z_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \\ &= -k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \end{aligned} \quad (4.59)$$

4.5. Analyse de la stabilité

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2 \quad (4.60)$$

La dérivée de (4.60) peut être écrite comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= v_1 \dot{v}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} v_i \dot{v}_i + v_n \dot{v}_n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i \\
 &= v_1 \left(-k_1 v_1 + g_1 v_2 + \tilde{\Delta}_1 \right) + \sum_{i=2}^n v_i \left(-k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1} + \tilde{\Delta}_i \right) + v_n \left(-k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1} + \tilde{\Delta}_n \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \left(\dot{\tilde{\Delta}}_i - \gamma_i \left[v_i - \sigma_i \hat{\Delta}_i \right] \right) \\
 &= -\sum_{i=1}^n k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i \tilde{\Delta}_i \dot{\hat{\Delta}}_i
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

D'après les inégalités (3.34)-(3.35), il vient

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n 2k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sigma_i - \frac{1}{\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i^0)^2 \right) \tag{4.62}$$

Ou de même

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta \tag{4.63}$$

avec,

$$\begin{cases} \alpha = \min \left[(2k_1, \dots, 2k_n), (\sigma_1 \gamma_1 - 1), \dots, (\sigma_n \gamma_n - 1) \right] > 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_i} (\Delta_i^1)^2 + \sigma_i (\Delta_i^0)^2 \right) > 0 \end{cases}$$

Théorème 4.2 : *Considérons le système non linéaire (3.2) les lois de commande (4.34), (4.44), et (4.54), les lois d'estimation (4.35), (4.45), et (4.55), les signaux de compensation définis par (4.40), (4.50), et (4.57). Supposons que les hypothèses 2.3-2.4 et 3.1 sont satisfaites. Donc, tous les signaux du système en boucle fermée sont uniformément ultimement bornés (UUB) et l'erreur de poursuite $(y - y_r)$ converge vers un petit voisinage autour de zéro.*

Preuve : La démonstration s'effectue de la même façon que celle du Théorème 3.2.

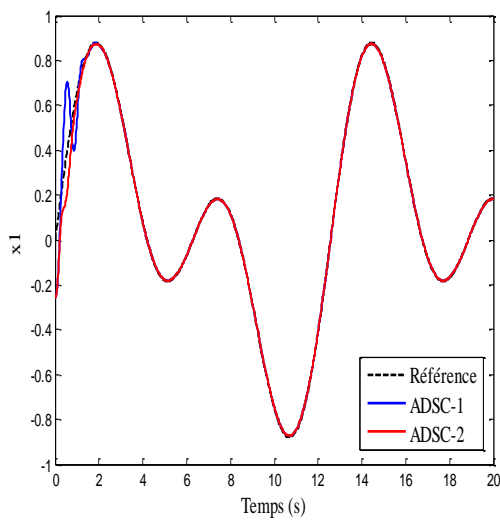
4.6. Exemples d'application

Afin d'illustrer la supériorité des approches de commande proposées dans ce chapitre par rapport à celles du chapitre précédent, on effectue une comparaison entre chaque

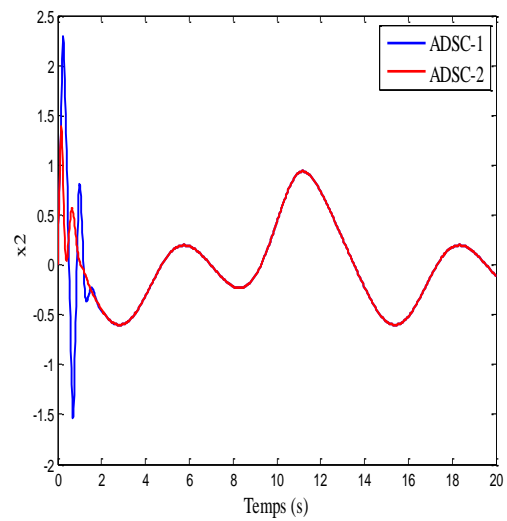
algorithme de commande développé avec celui du chapitre précédent (i.e. ADSC-1 avec ADSC-2, et ACFB-1 avec ACFB-2). Ainsi, pour les deux exemples d'application, les paramètres de conception et les conditions de simulation restent les mêmes que celles du chapitre 3.

4.6.1. Exemple 1 : (Exemple numérique) Système de deuxième ordre

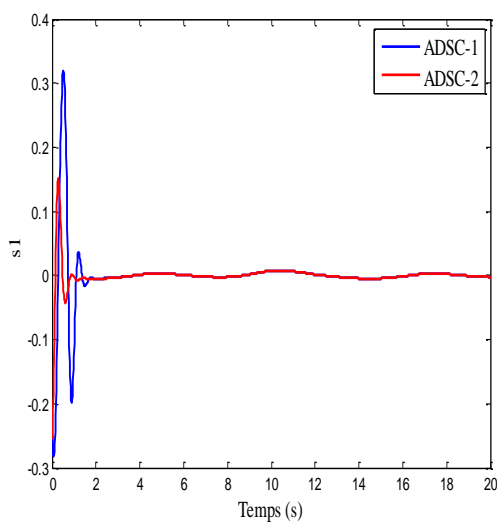
Les résultats obtenus de l'implémentation des algorithmes de commandes adaptatives via la DSC et la CFB sont illustrés respectivement dans les Figures 4.1 et 4.2.



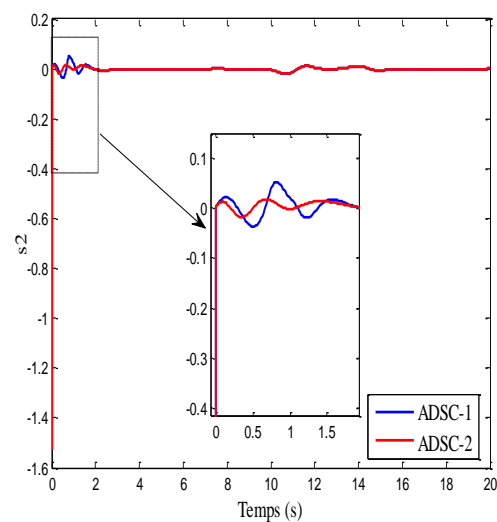
(a) Sortie du système non linéaire.



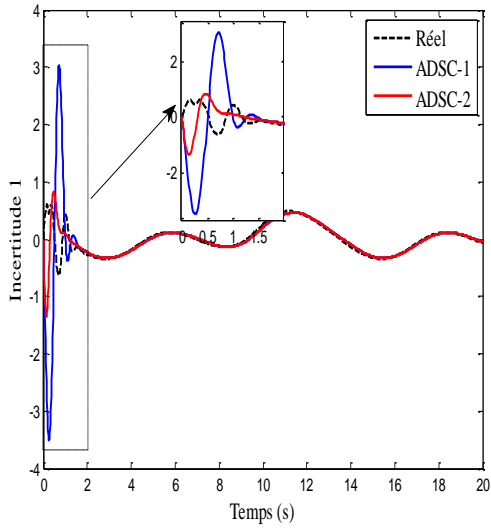
(b) Evolution de la 2^{ème} variable d'état



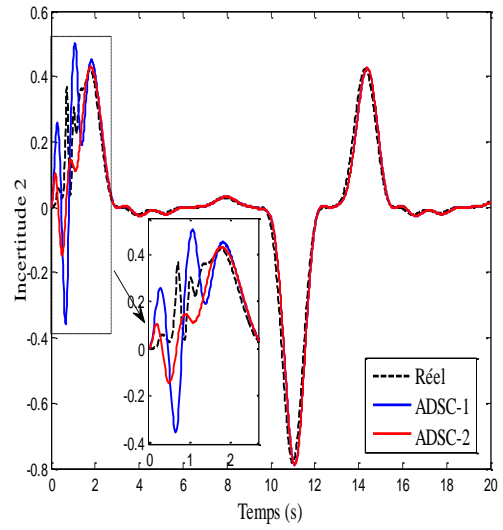
(c) Erreur poursuite s_1



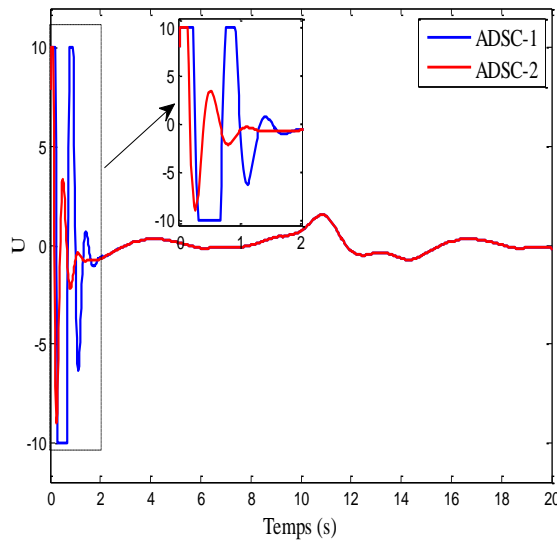
(d) Erreur poursuite s_2



(e) Estimation de l'incertitude Δ_1

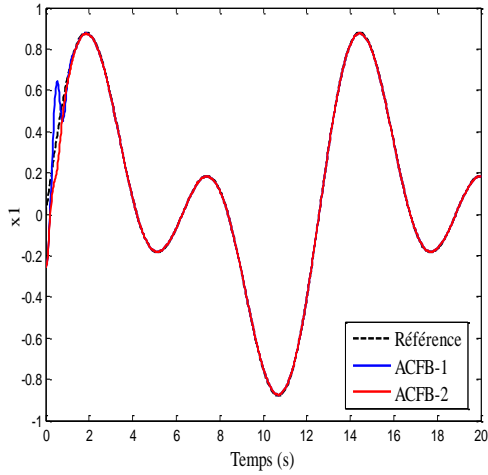


(f) Estimation de l'incertitude Δ_2

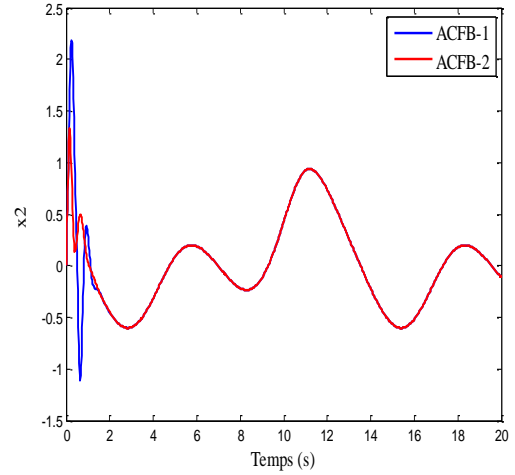


(g) Signal de commande U

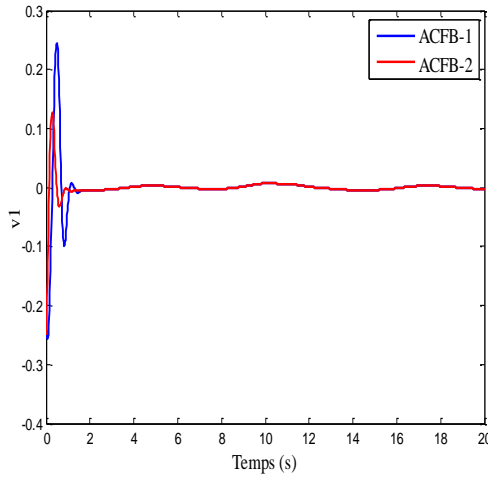
Figure 4.1 : Réponses temporelles du système de deuxième ordre issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la DSC.



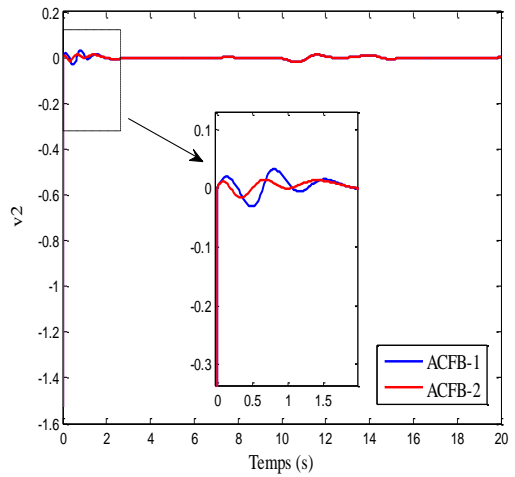
(a) Sortie du système non linéaire.



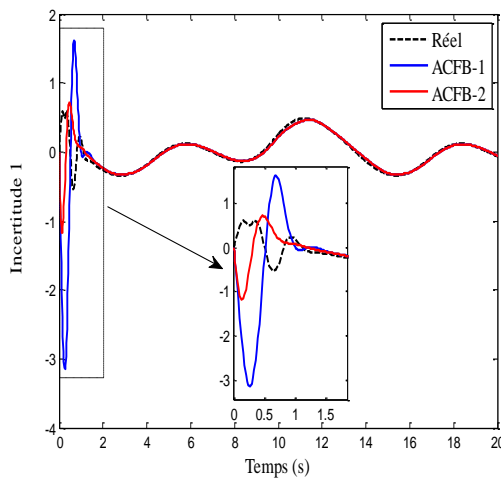
(b) Evolution de la 2^{ème} variable d'état



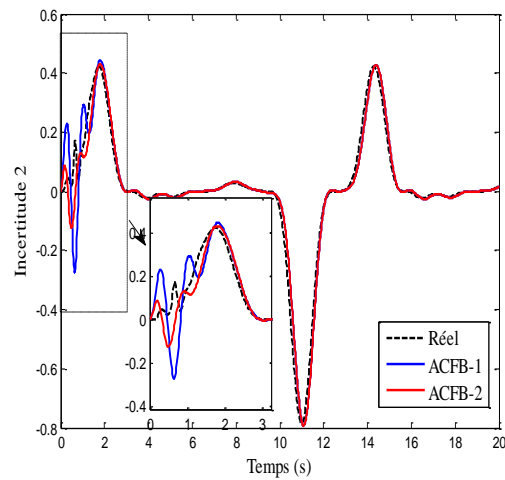
(c) Erreur poursuite v_1



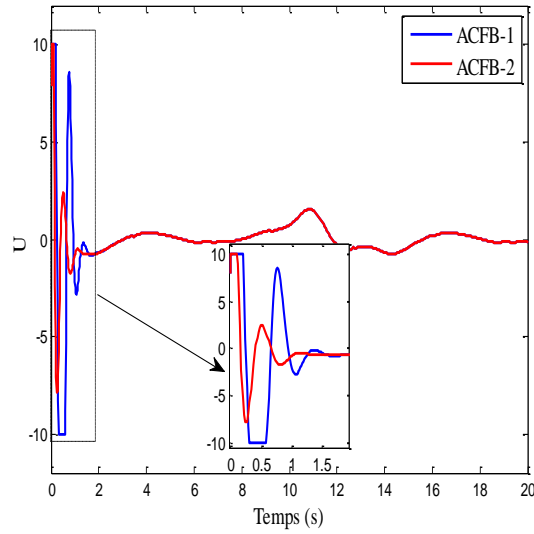
(d) Erreur poursuite v_2



(e) Estimation de l'incertitude Δ_1



(f) Estimation de l'incertitude Δ_2

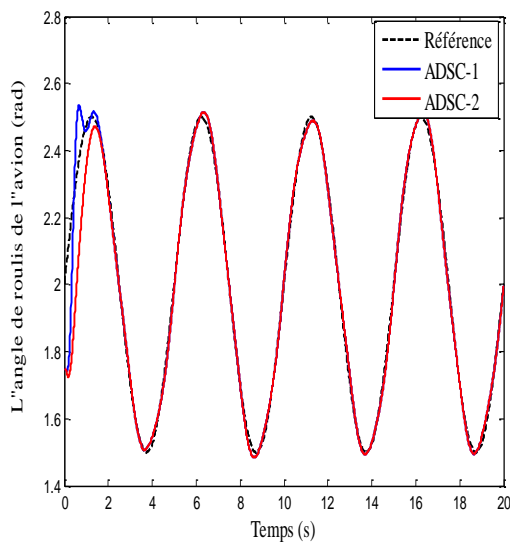


(g) Signal de commande U

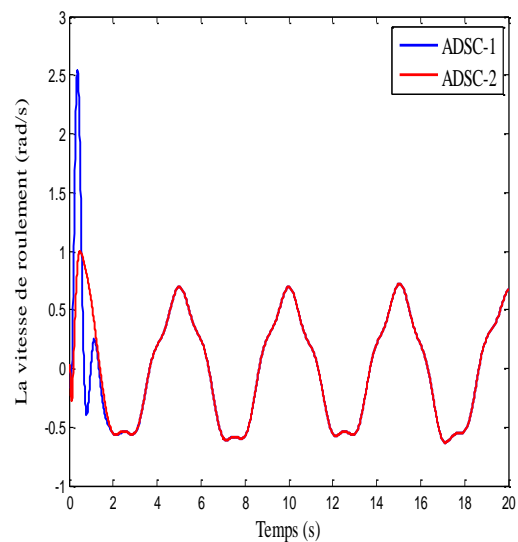
Figure 4.2 : Réponses temporelles du système de deuxième ordre issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la CFB.

4.6.2. Exemple 2 : (Exemple pratique) *Aile d'avion.*

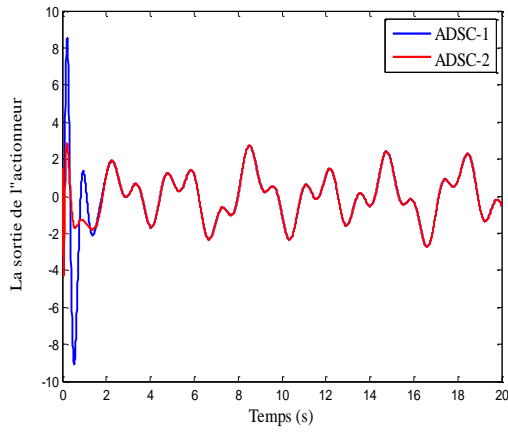
Les résultats de simulation qui correspondent à chaque technique de commande sont illustrés respectivement dans les Figures 4.3 et 4.4.



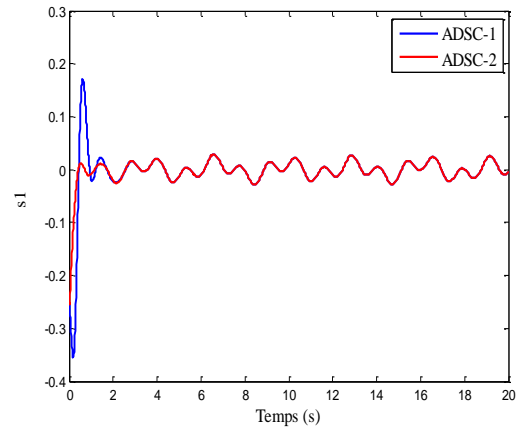
(a) *L'angle de roulis de l'avion.*



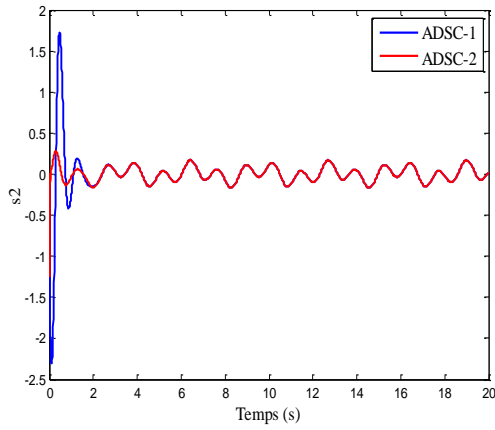
(b) *La vitesse de roulement*



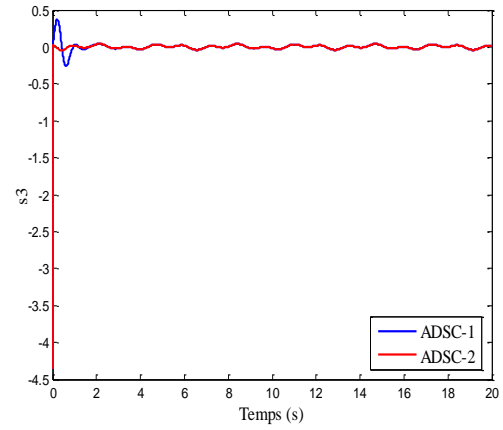
(c) La sortie de l'actionneur



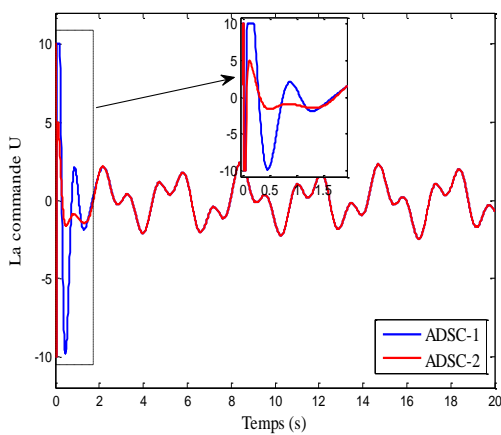
(d) Erreur poursuite s_1



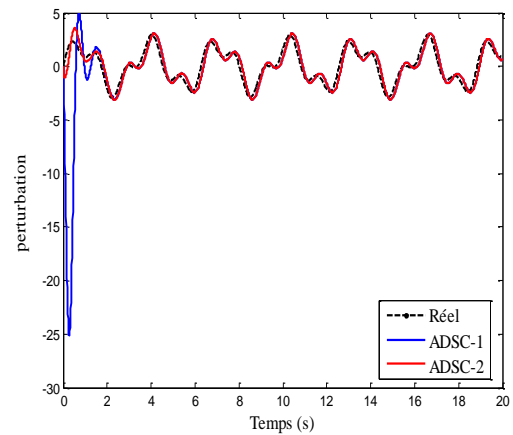
(e) Erreur poursuite s_2



(f) Erreur poursuite s_3

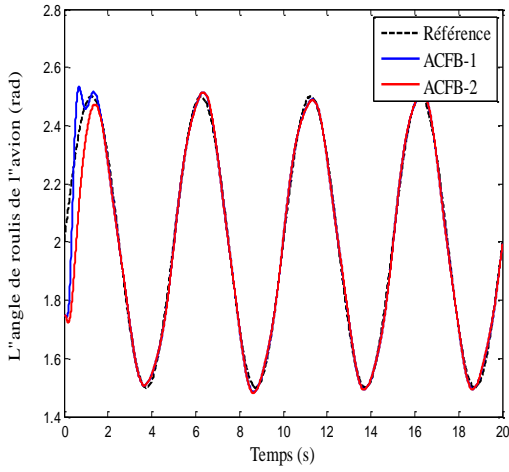


(g) Signal de commande U

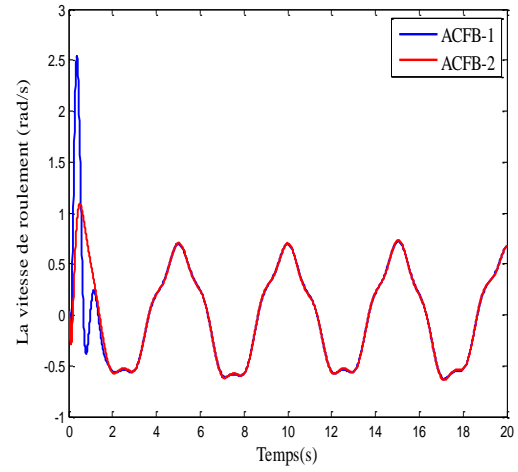


(h) Perturbation

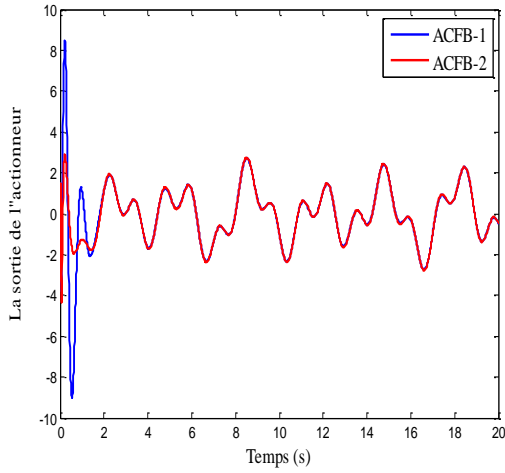
Figure 4.3 : Réponses temporelles de l'aile de l'avion issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la DSC.



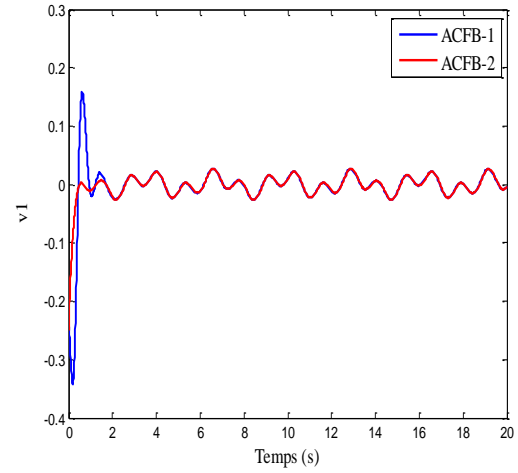
(a) L'angle de roulis de l'avion.



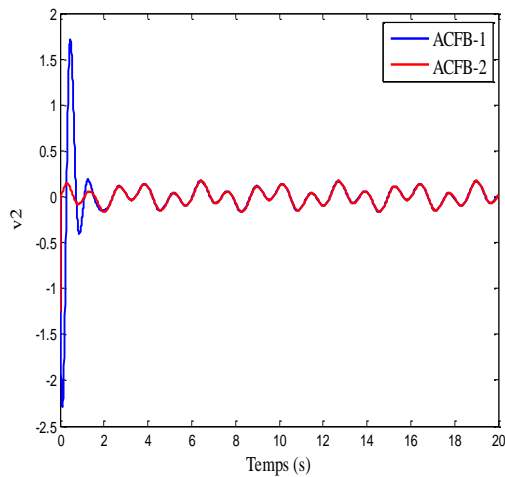
(b) La vitesse de roulement.



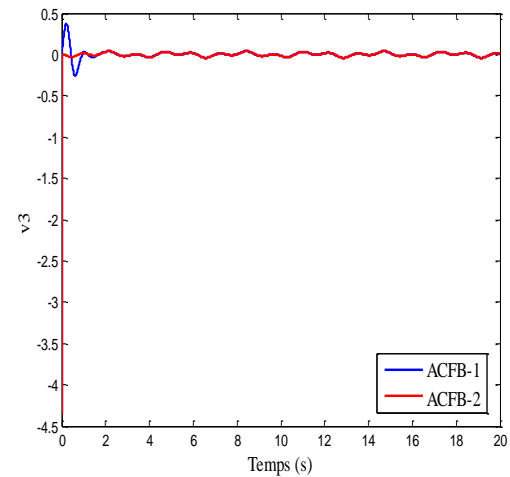
(c) La sortie de l'actionneur



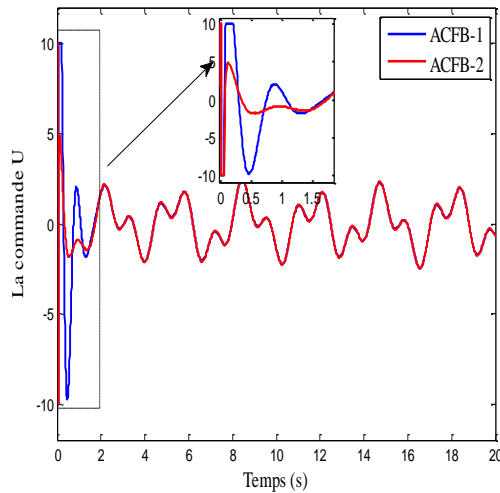
(d) Erreur poursuite v_1



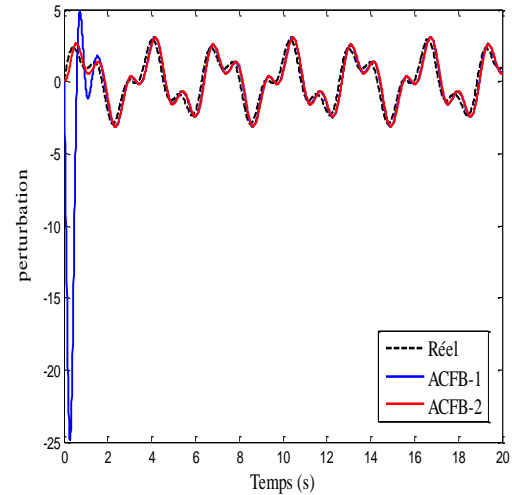
(e) Erreur poursuite v_2



(f) Erreur poursuite v_3



(g) Signal de commande U



(h) Perturbation

Figure 4.3 : Réponses temporelles de l'aile de l'avion issues de l'application des algorithmes de commande adaptatives via la CFB.

D'après les résultats de simulation dans les deux exemples d'applications, il est clair de voir une supériorité de performances des stratégies de commande développées (illustrées en rouge) par rapport à celles du chapitre précédent (illustrées en bleu) en terme de poursuite, d'estimation, de robustesse vis-à-vis les perturbations externes et les incertitudes paramétriques, et de faisabilité physique des lois de commande.

4.7. Conclusion

Dans ce chapitre, la commande adaptative par backstepping filtré a été étudiée pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec saturation d'entrée. Nous avons développé deux approches de commandes, la première est une commande adaptative via la DSC (i.e. ADSC-2), tandis que la deuxième est une commande adaptative basée sur la CFB (i.e. ACFB-2). Contrairement aux approches de commande proposées dans le chapitre précédent, le principe ici est d'introduire un système auxiliaire dans chaque étape de conception. Les résultats de simulation obtenus à partir des deux exemples d'application ont montré une supériorité des performances de commande par rapport à ceux du chapitre précédent.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude et le développement des techniques de commande adaptatives par backstepping filtré pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec saturation d'entrée. Ces techniques de commande nécessitent la synthèse des lois de commande adaptative. L'inconvénient majeur de l'approche de commande par backstepping est le problème de l'explosion de la complexité, qui résulte des dérivations successives des commandes virtuelles à chaque étape de conception du backstepping. L'utilisation des approches de commande par DSC et CFB qui introduisent un filtrage des commandes virtuelles a permis de résoudre ce problème. La stabilité de toutes les structures de commande développées dans ce travail a été démontrée en utilisant le théorème de Lyapunov.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé, au début, des méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires. Les outils mathématiques qui nous ont servis dans le présent manuscrit, ont été exhibés aussi dans ce chapitre. Ensuite, nous avons présenté la définition du backstepping ainsi que la procédure de design de cette technique de commande.

Dans le deuxième chapitre, deux stratégies de commande par backstepping filtré ont été présentées pour une classe des systèmes non linéaires ayant la forme triangulaire inférieure. La première technique est la commande par DSC, tandis que la deuxième est la commande par CFB. Les deux approches de commande utilisent des filtres linéaires du premier ordre passe-bas pour éviter le problème d'explosion de complexité.

Dans le troisième chapitre, est afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée vis-à-vis les perturbations externes et les incertitudes paramétriques, deux stratégies de commande adaptatives par backstepping filtré ont été synthétisées. La première approche est conçue via la DSC, où des erreurs de poursuite ont été utilisées dans les lois d'adaptation. La deuxième approche est développée en se basant sur la technique CFB, où des erreurs de poursuite compensées sont employées dans les lois d'estimation. Pour les deux méthodes, un

Le système auxiliaire a été introduit dans la dernière étape de conception afin de réduire l'effet de saturation.

Dans le dernier chapitre, nous avons développé deux autres stratégies de commande adaptatives par backstepping filtré pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec saturation d'entrée. La première est conçue en utilisant la technique DSC et la deuxième exploite les concepts de l'approche CFB. Contrairement au chapitre 3, et dont le but d'éliminer l'effet de saturation, un système auxiliaire a été introduit dans chaque étape de conception.

Les performances de toutes les stratégies de commande proposées dans ce mémoire ont été examinées sous des différentes conditions de simulation à travers deux exemples d'application : un exemple numérique de deuxième ordre et une aile d'avion. Les résultats obtenus montrent la supériorité des performances de l'approche adaptative via la CFB par rapport à celle basée sur la DSC, et des techniques de commande adaptatives développées au dernier chapitre par rapport à celles du chapitre 3.

Bibliographie

Références bibliographique

- [1] P. de Larminat : *Analysis and control of linear systems*. ISTE. Wiley, 2013.
- [2] S. P. Boyd et C. H. Barratt : *Linear controller design : limits of performance*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice-Hall International, 1991.
- [3] H.K. Khalil, *Nonlinear systems (2nd Ed)*. Printence-Hall, 1996.
- [4] A. Isidori: *Nonlinear control systems*. Communications and control engineering. Springer, 1995.
- [5] BENASKEUR, Abderrezak. *Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires*. Thèse de Doctorat. Québec : Université de Laval, Février 2000.
- [6] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. <<Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems>>. *IEEE Trans Autom Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1241-1253, 1991.
- [7] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1995.
- [8] P. P. Yip, and J. K. Hedrick. <<Adaptive dynamic surface control: a simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems>>. *Int J Control*. Vol. 71, No. 5, pp. 959-979, 1998.
- [9] D. Swaroop, J. K. Hedrick, P. P. Yip and J. C. Gerdes. <<Dynamic surface control for a class of nonlinear systems>>. *IEEE Trans Autom Control*. Vol. 45, No.10, pp. 1893-1899,2000.

- [10] J. A. Farrell, M. Polycarpou, M. Sharma et W. Dong. << Command filtered backstepping>>. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 54, No. 6, pp. 1391-1395, 2009.
- [11] W. Dong, J. A. Farrell, M. M. Polycarpou, V. Djapic et M. Sharma. <<Command filtered adaptive backstepping>>. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. Vol. 20, No. 3, pp. 566-580, 2012.
- [12] https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_lin%C3%A9aire
- [13] AMIEUR, Toufik. *Commande des systèmes non linéaires par mode glissant flou*. Mémoire de Magister. Biskra : Université Mohamed KHEIDER, 2009.
- [14] ZIBRA, Aicha. *Commande adaptative floue des systèmes non linéaires avec saturation des commandes*. Mémoire de Magister. Bejaia : Université Abderrahmane MIRA, 2009.
- [15] F, Eshabir. *Modélisation et commande d'un système multi-moteur par la technique de commande backstepping*. Thèse de Doctorat. Québec : Université de Trois-Rivières, 2005.
- [16] MOKHTARI, Messaoud. *Commande adaptative des systèmes non linéaires par l'approche backstepping neuronale*. Thèse de Doctorat. Batna : Université HADJ LAKHDAR, 2015.
- [17] J.J.E Slotine, W. Li, *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [18] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, Printence-hall, London, Inc., 1996.
- [19] Qu. Zhihua, Darren M. Dawson, S. Y. Lim, et John F. Dorsey, "A New Class of Robust Control Laws for Tracking of Robots", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 13, No. 4, pp. 355-363, 1994.
- [20] Jun. Wu, Jian. Huang, Yonji. Wang, et Kexin. Xing "Nonlinear Disturbance Observer-Based Dynamic Surface Control for Trajectory Tracking of Pneumatic Muscle System", *IEEE Transactions on Control Systems Technology* Vol. 22, No. 2, pp. 440-455, 2014.
- [21] SOUKKOU, Yassine. *Commande adaptative par backstepping d'une classe des systèmes non linéaires incertains*. Mémoire de Magister. Jijel : Université de Jijel, Février 2014.

- [22] J. S. Bang, H. Shim, S. K. Park & J. H. Seo. <<Robust tracking and vibration suppression for a two-inertia system by combining backstepping approach with disturbance observer>>. *IEEE Trans Ind Electron*, Vol. 57, pp. 3197-3206, 2010.
- [23] W. Yim. <<Adaptive control of a flexible joint manipulator>>. *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea, pp. 3441-3446, May 21-26, 2001.
- [24] Yongming Li, Shaocheng Tong, and Tieshan Li. <<Composite Adaptive Fuzzy Output Feedback Control Design for Uncertain Nonlinear Strict-Feedback Systems With Input Saturation>>. *IEEE Transactions on Cybernetics*.2014.
- [25] Y. H. Chang and W. S. Chan. <<Adaptive dynamic surface control for uncertain nonlinear systems with interval type-2 fuzzy neural networks>>. *IEEE Transactions on Cybernetics*. 2013.
- [26] H. Khebbache, M. Tadjine et S. Labiod. <<Adaptive sensor-fault tolerant control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems: Adaptive nonlinear filtré-based dynamic surface control>>. *Journal of the Franklin Institute*. Vol. 353, No. 6, pp. 1313-1338, 2016.
- [27] HONG, Fan. *Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems*. Thèse de Doctorat. Singapore: National University of Singapore, 2003.
- [28] Elzebda, J. M et al. <<Development of an analytical model of wing rock for slender delta wings>>. *AIAA Journal of Aircraft* 26, 737-743, 1989.
- [29] Nayfeh, A. H et al. <<Analytical study of the subsonic wing rock phenomenon for slender delta wings>>. *AIAA Journal of Aircraft*. Vol. 26, No. 9, pp. 805-809, 1989.
- [30] Levin, D. Katz, J. <<Dynamic load measurements with delta wings undergoing self-induced roll oscillation>>. *AIAA Journal of Aircraft* 21, 30-36.
- [31] KHETTAB, Khatir. *Commande adaptative floue des systèmes non linéaires par la méthode de backstepping utilisant le mode glissant*. Mémoire de Magister. Setif : Université FERRHAT Abbas, 2005.

- [32] Y. Li, S. Tong, T. Li, Adaptive fuzzy output-feedback control for output constrained nonlinear systems in the presence of input saturation, *Fuzzy Sets and Systems* 248 (2014) 138–155.
- [33] H. Khebbache, M. Tadjine, S. Labiod et A. Boulkroune. <<Adaptive sensor-fault tolerant control for a class of multivariable uncertain nonlinear systems>>. *ISA Transactions*. Vol. 55, pp. 100-115, 2015.
- [34] S. Labiod, T.M. Guerra, direct adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems with input saturation. Third IFAC Workshop on Advanced Fuzzy and Neural Control, 2007.
- [35] A. Zibra, S. Labiod et B. Mendil “Commande adaptative indirecte floue d’une classe de systemes non linéaires avec saturation”, CGE’06, EMP, 2009.
- [36] J. H. Park, G. T. Park, Robust adaptive controller using universal approximators for nonlinear systems under input constraint. *ISIE*, pp. 1881-1886, 2001.
- [37] M. Polycarpou, J. Farrell and M. Sharma, On-line approximation control of uncertain nonlinear systems: issues with control input saturation. In *Proc. ACC*, pp. 543-548, 2003.
- [38] J. Zhou, et C. Wen. *Adaptive backstepping control of uncertain system : Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-Variations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [39] Feurer, A. & Morse, A. S. (1978), ‘Adaptative control of single-input, single-output linear systems’. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 23(4), 557-569, 1978.
- [40] Tsinias, J. ‘Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization’, *Math. Contr. Signal. Sys.* Vol. 2, pp. 343-357, 1989.
- [41] Kokotovic, P. V. & Sussmann, H. J. (1989) ‘A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems’, *Systems & Control Letter*, 13, 125, 1989.