

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique
Université de Jijel



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département D'Automatique

Projet de fin d'étude

Pour l'obtention du Diplôme Master en Automatique et Système

Thème :

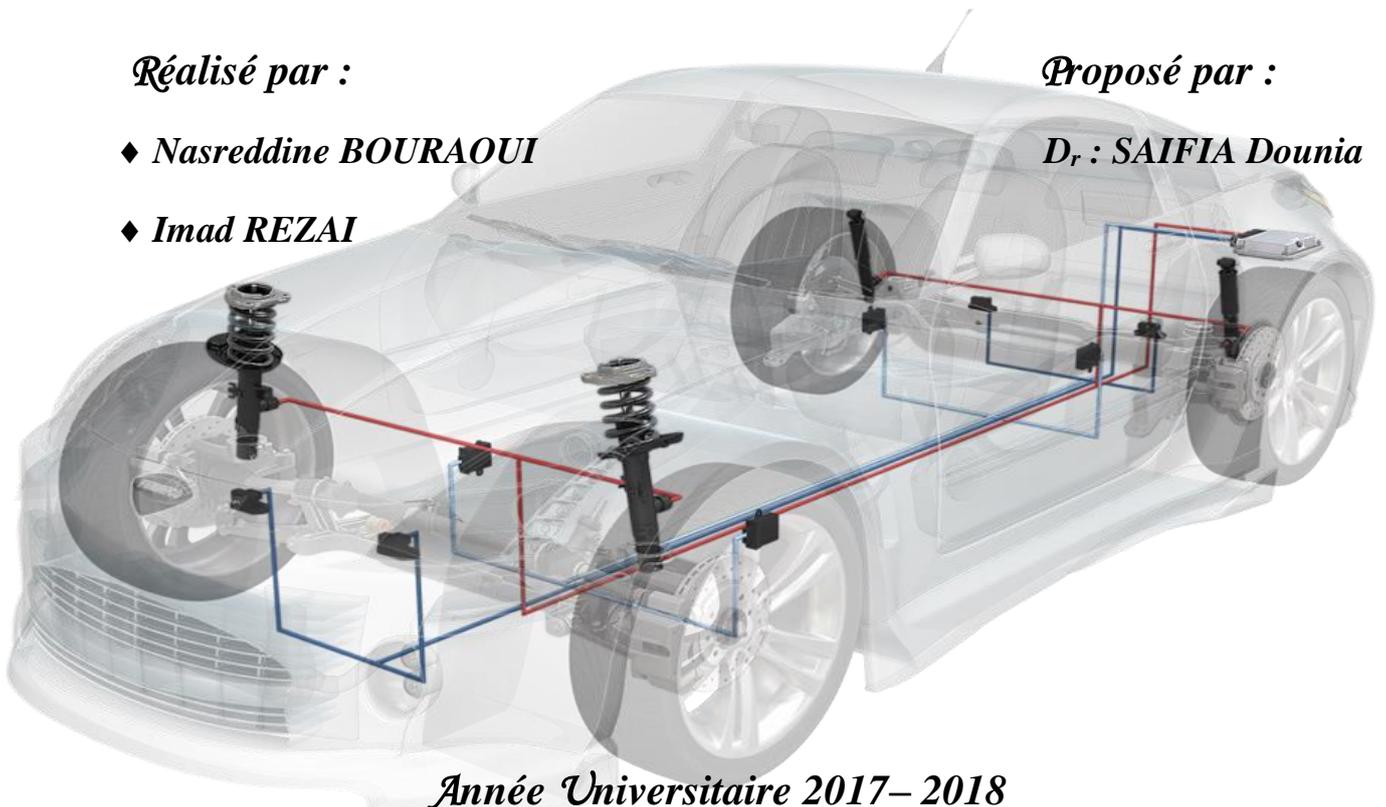
***Modélisation et Commande H_{∞} de
Suspension de Véhicules***

Réalisé par :

- ◆ ***Nasreddine BOURAOUI***
- ◆ ***Imad REZAI***

Proposé par :

Dr : SAIFIA Dounia



Année Universitaire 2017– 2018

Remerciements

Avant toute chose, Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donnée courage, force et surtout patience durant toutes ces années d'étude. Nous sommes très reconnaissants à Mme. Dounia saïfia, pour avoir accepté de diriger nos travaux, et pour ses encouragements et son soutien qui nous ont été une aide précieuse. Nous ne saurions oublier le doctorant Nasri Mohamed, nos amis, avec lesquelles nous avons partagé des très beaux moments. Merci et bonne chance à mes collègues dans le département d'Automatique, pour leurs amours et leurs confiances.

Enfin, nous ne saurions

Jamais suffisant remercier notre mères, notre pères, mes frères et mes sœurs, que nous portons toujours avec nous dans notre pensée, sans leurs confiances immenses en nous, sans leurs aides et leurs amours, nous n'aurions pas pu aller au bout de nos projets.

Dédicaces

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant la et la reconnaissance durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste travail à :

- *l'amour de ma vie ma Chère mère,*
- *Mon cher père,*
- *Mon cher frère et mes chères sœurs,*
- *Tous mes amis(e) et tous les autres.*

Imad

Dédicaces

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant

la et la reconnaissance durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste travail à:

- *l'amour de ma vie ma Chère mère,*
- *Mon cher père,*
- *Mes chers frères et mes chères sœurs,*
- *Tous mes amis(e) et tous les autres.*

Nasro

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Généralité sur la suspension.	
1.1 Introduction	3
1.2 Historique sur les suspensions	4
1.3 Éléments d'un véhicule	5
1.4 Tenue de la route	6
1.5 Suspension automobile	6
1.5.1 Influence de la suspension	6
1.5.2 Composants d'une suspension	7
1.5.2.1 Amortisseur	7
1.5.2.2 Ressort	7
1.5.2.3 Pneu	8
1.5.3 Architecture des suspensions courantes	8
1.5.3.1 Mac Pherson	8
1.5.3.2 Double triangulation	9
1.5.3.3 Multilink	9
1.5.4 Types de suspensions	9
1.5.4.1 Suspension passive	9
1.5.4.2 Suspension semi-active	9
1.5.4.3 Suspension active	10
1.7 Sollicitations externes	10
1.8 Conclusion	11
Chapitre 2 : Modélisation de système non linéaire	
2.1 Introduction.....	12
2.2 Différents mouvements de véhicule	12
2.3 Représentation d'état des systèmes non linéaires	13
2.4 Modélisation de la suspension	14
2.4.1 Modèle de quart de véhicule.....	14
2.4.1.1 Modélisation de quart de véhicule.....	15
2.4.2 Modèle demi-véhicule	16
2.4.2.1 Modélisation de demi-véhicule.....	17
2.4.3 Modèle de véhicule complet.....	20

2.4.3.1 Modélisation de véhicule complet.....	21
2.5 Réponses du système autonome.....	24
2.5.1 Quart de véhicule.....	26
2.5.2 Demi-véhicule.....	26
2.5.3 Véhicule complet.....	28
2.6 Conclusion.....	29
Chapitre 3 : Représentation multi-modèles de système de suspension.	
3.1 Introduction.....	30
3.2 Représentation des Modèles Takagi-Sugeno (T-S)	30
3.2.1 Structure couplée.....	32
3.2.2 Structure découplée.....	33
3.3 Obtention d'une structure multi-modèle.....	33
3.3.1 Par identification.....	33
3.3.2 Par linéarisation.....	34
3.3.3 Par transformation d'un système non linéaire polytopique convexe	35
3.4 Représentation des systèmes de suspension par la représentation multi-modèles.....	36
3.4.1 Multi-modèles de quart de véhicule.....	36
3.4.2 Multi-modèles de demi-véhicule.....	37
3.4.3 Multi-modèles de véhicule complet.....	39
3.5 Validation de représentation des multi-modèles.....	43
3.5.1 Modèle quart de véhicule	43
3.5.2 Modèle demi-véhicule.....	44
3.5.3 Modèle de véhicule complet.....	46
3.6 Conclusion	47
Chapitre 4 : Commande multi-modèles de système de suspension.	
4.1 Introduction.....	48
4.2 Stabilisation d'un multi-modèle.....	48
4.3 Concept PDC (Parallel Distributed Compensation)	48
4.4 Analyse convexe et inégalité matricielle.....	49
4.4.1 Analyse convexe.....	49
4.4.2 Inégalités Matricielles Linéaires(LMI).....	49
4.4.2.1 Définition d'une LMI	49

4.4.2.2 Problèmes génériques LMI	50
4.4.2.3 Lemme de Schur.....	51
4.5 Notions sur la stabilité.....	52
4.5.1 Définition de la stabilité	52
4.5.1.1 Point d'équilibre.....	52
4.5.1.2 Stabilité locale simple et asymptotique.....	52
4.5.1.3 Stabilité au sens de Lyapunov.....	53
4.5.2 Fonction de Lyapunov quadratique.....	53
4.6 Stabilité et stabilisation quadratique du multi-modèles	53
4.6.1 Stabilité globale	53
4.6.2 Stabilisation par retour d'état non linéaire.....	54
4.7 Autres lois de commande.....	55
4.8 Normes de signaux et de systèmes LTI / LPV.....	56
4.8.1 Système LTI	56
4.9 Commande H_∞	57
4.9.1 Problème H_∞ Optimal.....	58
4.9.2 Problème H_∞ Sous-Optimal.....	58
4.9.3 Stabilisation H_∞ de multi-modèles.....	58
4.9.4 Synthèse H_∞ d'une commande PDC stabilisante.....	59
4.10 Application de la commande H_∞ de type T-S basé sur le système de suspension..	61
4.10.1 Quart de véhicule.....	61
4.10.2 Demi-véhicule.....	62
4.10.3 Véhicule complet.....	64
4.11 Conclusion.....	64
Conclusion générale.....	65

Liste des figures

Figure 1.1: Image sur l'impact d'un mauvais ou bon filtrage de la route sur les passagers du véhicule.....	6
Figure 1.2 : Dynamique de la caisse en fonction de la suspension.....	7
Figure 1.3 : Différentes architectures des suspensions des trains avant les plus utilisées sur les véhicules de nos jours.....	8
Figure 1.4 : Types de suspension d'un véhicule.....	10
Figure 2.1: Mouvements linéaires et angulaires du véhicule dans l'espace.....	13
Figure 2.2 : Modèle quart de véhicule.....	14
Figure 2.3 : Modèle demi-véhicule.....	16
Figure 2.4 : Modèle véhicule complet.....	21
Figure 2.5 : Perturbation sur le modèle quart de véhicule.....	25
Figure 2.7 : Réponse de système de suspension en boucle ouverte, cas modèle quart de véhicule.....	26
Figure 2.8 : Réponse de système de suspension en boucle ouverte, cas modèle demi-véhicule.....	27
Figure 2.9: Réponse de système de suspension en boucle ouverte, cas modèle véhicule complet.....	28
Figure 3.1 : Représentation multi-modèles d'un système non linéaire.....	31
Figure 3.2 : fonction d'appartenance de quart de véhicule.....	37
Figure 3.3 : Réponses du système non linéaire et le multi-modèles Cas du modèle de quart de véhicule.....	44
Figure 3.4: Réponses du système non linéaire et le multi-modèles Cas du modèle de demi-véhicule.....	45
Figure 3.5 : Réponses du système non linéaire et le multi-modèles Cas du modèle de véhicule complet.....	46
Figure 4.1 : problème H_∞ standard général.....	57
Figure 4.2 : Réponse du système en boucle fermé, dans le cas de modèle quart de véhicule.....	62
Figure 4.3 : Réponse du système en boucle fermé, dans le cas de modèle demi-véhicule.....	63

Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Paramètres de simulation de quart de véhicule.....	24
Tableau 2.2 : Paramètres de simulation de demi-véhicule.....	24
Tableau 2.3 : Paramètres de simulation de véhicule complet.....	25
Tableau 3.1 : Valeur des termes non linéaires dans chaque règles.....	42
Tableau 4.1 : Réponse du système en boucle fermé, dans le cas de modèle quart véhicule.....	61
Tableau 4.2 : Réponse du système en boucle fermé, dans le cas de modèle de demi- véhicule.....	61

Notations et définitions

f_k : Effort exercé par le ressort suspension.

f_b : Effort exercé par l'amortisseur.

f_t : Effort exercé par le pneu.

m_s : Masse suspendue (c.à.d. quart de la masse posée sur les suspensions).

m_u : Masse non suspendue (c.à.d. la masse des pièces mécaniques constituant l'assemblage de la roue).

z_s : Déplacement vertical de m_s autour de sa position statique.

z_u : Déplacement vertical de m_u autour de sa position statique.

z_r : Profil vertical du sol.

u : Force générée par l'actionneur.

z_{uf} : Déplacement de la masse non suspendue côté avant.

\dot{z}_{uf} : Vitesse de la masse non suspendue côté avant

z_{ur} : Déplacement de la masse non suspendue côté arrière.

\dot{z}_{ur} : Vitesse de la masse non suspendue côté arrière.

\dot{z} : Vitesse verticale de la caisse.

$\ddot{\theta}$: Accélération angulaire (tangage) de la caisse.

J_1 et J_2 : Tangage et roulis du moment d'inertie.

z_{s1}, z_{s2}, z_{s3} et z_{s4} : Déplacements de châssis pour chaque coin.

z_{u1}, z_{u2}, z_{u3} et z_{u4} : Déplacements de roue pour chaque coin.

a : Distance entre le centre de la masse suspendue et la roue avant.

b : Distance entre le centre de la masse suspendue et la roue arrière.

b_f et b_r : Amortisseur avant et arrière.

k_f et k_r : Raideur de ressort du châssis avant et arrière.

k_{tf} et k_{tr} : Raideur du pneu.

φ_s : Angle de roulis.

$\dot{\varphi}_s$: Taux de roulement.

θ_s : L'angle d'inclinaison.

z_s, \dot{z}_s : Déplacement verticale et vitesse verticale.

z_{u1} : Déplacement vertical de la roue avant droite.

\dot{z}_{u1} : Vitesse vertical de la roue avant droite.

z_{u2} : Déplacement vertical de la roue avant gauche.

\dot{z}_{u2} : Vitesse vertical de la roue avant gauche.

z_{u3} : Déplacement vertical de la roue arrière droite.

\dot{z}_{u3} : Vitesse vertical de la roue arrière droite.

z_{u4} : Déplacement vertical de la roue arrière gauche.

\dot{z}_{u4} : Vitesse vertical de la roue arrière gauche.

NL : Non linéaire.

T-S : Takagi-Sugeno.

LMI : Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)

PDC : Parallel Distributed Compensation (loi de commande basée sur le retour d'état).

LTI : Linéaire à temps invariant.

Ddl : degré de liberté.

$\xi(t)$: variable de prémisse.

M_{ji} : sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous.

$\mu_i(\xi(t))$: fonction d'activation.

Introduction générale

L'automobile est un ensemble d'organes composant un système. Ce système est soumis aux sollicitations du conducteur (angle du volant, pression sur les pédales) et de l'environnement (profil de route, adhérence, vent). Les positions et les vitesses des différents organes évoluent selon ces sollicitations. C'est pour cette raison que toutes les automobiles sont munies de suspensions. La suspension a pour but de diminuer et ultimement d'éliminer ces vibrations qui sont néfastes pour les passagers et pour le véhicule [26].

Les systèmes de suspension classiques, dits passifs, se compose d'un ressort et un élément d'amortissement. Ils sont jusqu'à nos jours les plus répandus de part leur bas coût et leur conception mécanique relativement simple. Leur fonctionnement consiste à dissiper l'énergie ou à filtrer la transmission des efforts et vibrations de la route vers le véhicule. Cependant, ces systèmes passifs ont atteint leurs limites en termes de performance. En effet, ils nécessitent un compromis entre confort et tenue de route, l'un ne pouvant être optimisé sans dégrader l'autre. De plus, ils répondent favorablement à des sollicitations de la chaussée sur une plage de fréquence restreinte.

Avec le développement des microprocesseurs, des capteurs et des actionneurs leurs coefficients de ressort et d'amortissement peuvent être contrôlés. Des nouvelles suspensions, dites contrôlables (actives), ont marqué le début d'une nouvelle ère dans les transports terrestres. Elles ont ouvert la voie à de nombreuses solutions visant à réduire les vibrations et les oscillations dues aux imperfections routières [9].

C'est dans cette optique et afin d'assurer un bon confort de conduite et une tenue de route, nous proposons dans ce travail de concevoir une loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation) basée sur la représentation multi-modèles. En effet, l'approche multi-modèles est une approche mathématique visant à représenter du mieux possible le fonctionnement dynamique d'un processus, en utilisant des modèles linéaires invariants dans le temps (LTI). Elle permet de fournir une représentation efficace du système non linéaire sous forme d'interpolation entre des modèles linéaires. En se basant sur cette représentation, des conditions de stabilisation sont dérivées et formulées sous forme LMI (Linear Matrix Inequalities). La synthèse des performances et en particulier le rejet de perturbation a été étudié par l'approche H_∞ . Le problème H_∞ consiste à concevoir une commande assurant la stabilité asymptotique du système bouclé ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système [1].

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre, nous donnons en premier lieu quelques généralités sur la suspension. Dans le deuxième chapitre, nous faisons la modélisation de nos systèmes pour les trois modèles (quart, demi et complet) de véhicule pour mieux comprendre le système.

Dans le troisième chapitre, une représentation des systèmes non linéaires sous forme multi-modèles est abordée. Les méthodes de génération d'un multi-modèles à partir d'un modèle non linéaire sont également exposées.

Le dernier chapitre est consacré aux notions et outils utilisés dans la synthèse d'une loi de commande multi-modèle. On y trouve la loi de commande PDC, le problème H_∞ , la formulation LMI du problème de stabilisation via la loi de commande PDC, après on finira le chapitre par l'application de la de commande sur les différents modèles.

1.1 Introduction

L'homme est toujours à la recherche d'une solution à ses problèmes quotidiens et du confort pour faciliter sa vie, et parmi ses problèmes, les différents niveaux de vibrations affectant la mécanique.

Les automobiles, en font partie, elles n'échappent pas à ce phénomène et c'est pour cette raison que toutes les automobiles sont munies de suspensions. La suspension automobile a pour but de réduire et ultimement d'éliminer ces vibrations qui sont néfastes pour les passagers et pour le véhicule.

Sur un véhicule, la suspension est le système reliant les masses non suspendues (typiquement la roue, les systèmes de freinage, d'entraînement de roue, etc.) aux masses suspendues (à savoir le châssis, les passagers et tous les composants du véhicule fixés au châssis). La suspension est un élément essentiel par les véhicules de transport terrestre, elle a pour but d'assurer une liaison des roues au sol en toutes circonstances. En absorbant les chocs dus à l'état de la route, elle permet d'augmenter la longévité du moteur et du châssis, en plus d'assurer un confort au conducteur et aux passagers. De plus, elle doit assurer au véhicule une bonne dynamique à la conduite, ceci signifie que son comportement doit être sain en ce qui concerne la liaison au sol et que celui-ci doit réagir conformément aux attentes de son conducteur, notamment dans les phases de virage, freinage et accélération. Ces différentes manœuvres sont l'origine de plusieurs mouvements verticaux et angulaires du véhicule. D'une manière générale, les principaux rôles de la suspension sont définis à travers deux critères: le confort et la tenue de route [8].

La vraie sécurité des voitures contemporaines réside dans leur tenue de route. La qualité de leur comportement détermine l'issue d'une situation d'urgence : virage qui se referme, adhérence changeante, obstacle imprévu. La tenue de route est essentiellement faite par le pneumatique, mais on comprend aisément sur un obstacle imprévu que la suspension doit apporter sa contribution. En effet, sur un sol dégradé, le battement de roue fait varier la charge normale dynamique. Au pire, si la roue est décollée, alors le pneumatique ne génère plus aucune force de traction/freinage ou de guidage. La suspension permet alors d'atténuer les variations de charge normale sur le pneumatique et donc de contrôler la tenue de route. Une suspension dite « ferme » et amortie permet ainsi d'atténuer fortement les débattements verticaux. Un premier objectif pour la suspension est donc de contrôler la tenue de route [13].

Depuis maintenant plus d'un demi-siècle, le confort en matière d'isolation vibratoire des passagers est réellement pris en compte par les constructeurs automobile. Dans un véhicule, trois éléments participent au confort en créant une chaîne entre la route et le corps de l'automobiliste : le pneumatique, la suspension et le siège. Le confort des passagers ne réside pas uniquement dans l'isolation vibratoire mais également dans la limitation des mouvements de la caisse sous sollicitations basses fréquences. En effet, la caisse du véhicule a sa propre dynamique ce qui implique une certaine résonance autour du mode propre. Or la physiologie de l'être humain n'offre pas la même sensibilité en fonction des fréquences. Cette sensibilité aux fréquences de l'être humain explique pourquoi il est important de filtrer les aspérités de la route et justifie le choix d'une fréquence de résonance du mode caisse dans la zone la moins sensible du corps humain. La fréquence la moins sensible est 1Hz, ce qui implique une raideur assez faible ou encore une suspension dite « souple ». De plus, pour limiter l'amplification des mouvements de la route par la caisse, cette fréquence doit être amortie. Un deuxième objectif pour la suspension est donc d'assurer la tenue de la caisse sous sollicitations venant de la route [13].

Dans ce chapitre, nous parlerons d'une manière générale de la suspension, nous commencerons par une petite histoire sur la suspension. Par la suite, nous parlerons des éléments essentiels dans un véhicule. Enfin, nous y montrerons le rôle et les catégories de suspensions les plus répandues.

1.2 Historique sur les suspensions

Pendant des siècles, les premiers véhicules n'ont pas été équipés d'aucune sorte de suspension. Seulement plus tard, au huitième siècle, avait lieu une suspension primitive basée sur un système développé de chaîne de fer. Des ressorts en métal ont été développés pour la première fois au 17^{ième} siècle et peu après ressorts a lame. De diverses conceptions ont été élaborées jusqu'au siècle dernier, qui a vu le développement du concept de la suspension basée sur un ressort et un amortisseur [4].

Les débuts des études sur le domaine du véhicule remontent aux années 1920 et aux années 1930. La recherche sur la dynamique de manipulation et de direction a été suivie plus tard dans les années 1950 comme rapporté par Milliken WF et Milliken DL 1995, la théorie aléatoire de vibration de l'étude du véhicule a été appliquée.

L'optimisation des suspensions est réalisée non seulement par l'intermédiaire d'une conception et d'un accord soigné ; des ressorts et des amortisseurs, mais également en améliorant la conception des autres composants des suspensions (par exemple, les buissons en caoutchouc et les supports), afin d'améliorer et d'atténuer l'exploitation de leurs propriétés et d'obtenir une amélioration globale de tout [4].

Les suspensions commandées (actif et semi-actif) ont fait appel à des ingénieurs automobiles pendant beaucoup de décennies. Des amortisseurs semi-actifs ont été développés par des fabricants tels que ZF Sachs [4]. Maintenant beaucoup de véhicules offrent un certain genre de suspensions commandées. Des suspensions actives ont été développées la première fois pour des voitures Lotus en 1983. En plus des voitures de course, des systèmes actifs ont été étudiés pendant longtemps et également développés pour les véhicules routiers (typiquement voitures de ville). Mercedes agit pendant des années sur les suspensions actives. Le coupé de CL de Mercedes Cross en 1999 équipé de commande entièrement intégrée de suspension et de traction. Dans le Toyota Celica par Yokoya et autre en 1990, est généralement équipée par des suspensions semi-actives [4].

1.3 Éléments d'un véhicule

Le véhicule est une structure mécanique composée de différents éléments :

- Le châssis est une structure métallique externe. C'est le corps principal du véhicule. Son mouvement par rapport au sol, est caractérisé par trois translations (longitudinale, latérale et verticale) et trois rotations (roulis, tangage et lacet). Le châssis est également appelé masse suspendue dans la modélisation, car il se trouve au dessus des suspensions [10].
- Les éléments pour le contrôle longitudinal sont : le groupe moto-propulseur (moteur, embrayage, boîte de vitesse et transmission), le système de freinage, les roues et les pneumatiques, ce qui permet au véhicule d'accélérer et freiner [10].
- Les éléments pour le contrôle latéral sont : le volant, la colonne de direction, les roues et les pneumatiques. Ces éléments permettent au véhicule de tourner.
- La suspension est composée de ressorts et d'amortisseurs. Elle assure la liaison verticale entre la roue et le châssis. Elle permet la tenue de route du véhicule et le confort des passagers.

1.4 Tenue de la route

Selon l'accélération à laquelle est soumis le passager, ce dernier peut ressentir des malaises. Par exemple, à certaines fréquences, une sensation de malaise due aux vibrations de certains organes du corps humain peut être ressentie.

Sur un véhicule, la suspension doit assurer la continuité du contact roue/chaussée malgré les défauts de la route. La tenue de route représente la stabilité d'un véhicule, elle est relative à la capacité du véhicule à suivre la trajectoire que le conducteur souhaite lui imposer. Pour obtenir cela, il faut que les efforts moteurs, directionnels ou de freinage soient correctement transmis. C'est le pneu qui génère les forces longitudinales et latérales nécessaires aux changements et aux corrections de trajectoire.

1.5 Suspension automobile

Le premier but de la suspension automobile est d'atténuer les perturbations causées par les imperfections de la route et idéalement d'éliminer les vibrations néfastes pour le véhicule et pour les passagers afin d'assurer un meilleur confort et bien-être des passagers dans le véhicule, et de protéger les organes du véhicule.

1.5.1 Influence de la suspension

Un mauvais choix de la suspension peut provoquer des réactions physiologiques sur l'être humain, pour cela nous devons mettre à la fois le ressort et l'amortisseur en reliant la caisse avec la roue, le rôle du ressort est pour absorber de l'énergie mécanique à cause des vibrations, aussi l'amortisseur a un but d'absorber l'énergie mais l'énergie qui est provoqué par le ressort, alors que tous les deux ont un rôle intégré pour l'atténuation des vibrations sur l'automobile (Figure 1.1).

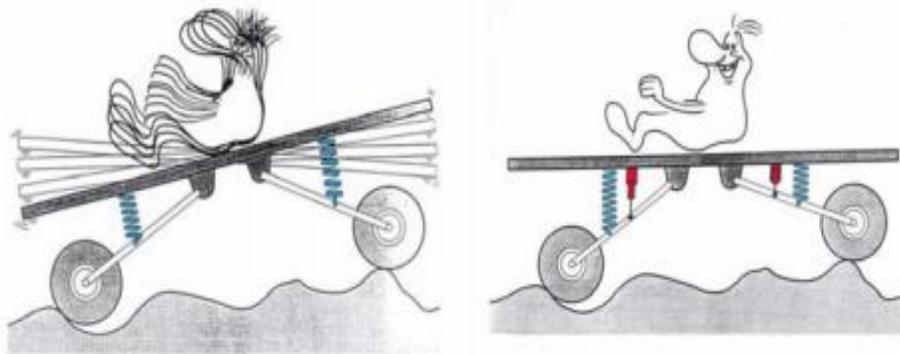


Figure 1.1: Image sur l'impact d'un mauvais ou bon filtrage de la route sur les passagers du véhicule[13].

La fréquence de résonance (fréquence pour laquelle le gain du transfert Caisse/Roue est maximal) fixe l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle il y a filtrage. Ainsi, plus la fréquence de résonance est élevée, plus le filtrage est mauvais. De plus, si la fréquence de résonance est élevée alors les mouvements de la caisse sont rapides. Or l'être humain est particulièrement sensible aux fréquences en dessous de 1Hz et au-delà de 2Hz. La réponse fréquentielle du transfert Caisse/Route apporte donc, énormément d'information sur les aspects confort d'un véhicule (Figure 1.2) [13].

Alors que, l'importance de la raideur d'un ressort qui doit être ni faible ni fort comme il est montré dans la figure suivante :

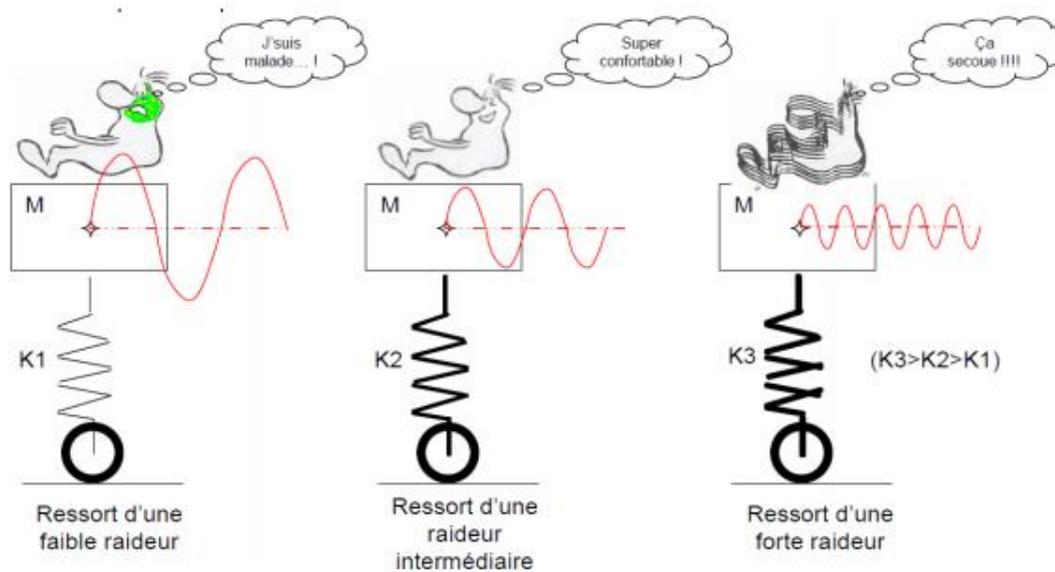


Figure 1.2 : Dynamique de la caisse en fonction de la suspension[13].

1.5.2 Composants d'une suspension

De nombreux composants sont implantés dans la suspension, ces éléments possèdent des rôles différents mais surtout complémentaires. Les principaux sont listés ci-dessous :

1.5.2.1 Amortisseur : est l'élément central de la suspension automobile, il sert à dissiper l'énergie cinétique due aux mouvements du châssis. Il en existe plusieurs géométries et conceptions. Son type de fonctionnement permet de déterminer la nature de la suspension [5].

1.5.2.2 Ressort : monté précontraint en parallèle avec l'amortisseur, sert à absorber les chocs grâce à sa déformation élastique. Il restitue l'énergie accumulée lors de sa compression permettant à la suspension de regagner continuellement sa position d'équilibre initiale [4].

1.5.2.3 Pneu : est monté sur une jante, il a pour fonction première l'adhérence mais il joue aussi un rôle comparable à l'amortisseur en se déformant. C'est un composant essentiel dans la maîtrise du comportement d'un véhicule. Il transmet les forces longitudinales nécessaires à l'accélération et au freinage ainsi que les forces latérales permettant de tourner [4].

1.5.3 Architecture des suspensions courantes

Dans cette partie, nous présentons un inventaire des architectures de la suspension les plus utilisées. Il existe plusieurs types de systèmes de suspensions. Ils se différencient suivant qu'ils se situent sur les trains avant ou arrière du véhicule. Dans les deux cas, on peut diviser l'ensemble de ces systèmes en deux familles : les suspensions à essieu rigide et celles à essieu indépendant. Généralement, le train avant est équipé de suspensions indépendantes tandis que l'essieu rigide est utilisé sur les roues arrière. En ce qui concerne le train avant, trois configurations sont aujourd'hui répandues [9] :



(a):Mac Pherson

(b):Double triangulation

(c):Multilink

Figure 1.3 : Différentes architectures des suspensions des trains avant les plus utilisées sur les véhicules de nos jours[9].

1.5.3.1 Mac Pherson

C'est la suspension la plus utilisée en automobile (Figure 1.3.a). Le combiné ressort-amortisseur est ici un élément à part entière du train avant puisqu'il assure la liaison entre le moyeu et la caisse, à même titre que le triangle inférieur (liaison rotule au niveau du moyeu et pivot avec la caisse). Dans cette situation, il faut alors être vigilant quant au dimensionnement du combiné car il doit subir des efforts importants [9].

1.5.3.2 Double triangulation

Cette architecture (Figure 1.3.b) est plutôt utilisée sur les véhicules à tendance sportive ou haut de gamme car elle plus coûteuse, mais aussi plus efficace quant à la conservation de la géométrie initiale du train (parallélogramme déformable). Dans cette situation, le combiné ressort amortisseur n'a plus à assurer à lui seul la rigidité et la robustesse du train puisque c'est le rôle des deux triangles [9].

1.5.3.3 Multilink

C'est la configuration la plus récente (Figure 1.3.c), elle est utilisée sur certains modèles de voitures de luxe. On retrouve toujours deux triangles mais la partie supérieure est composée de plusieurs parties articulées afin d'augmenter les possibilités de réglages du train pour, d'après les constructeurs, optimiser la tenue de route. On remarque également que dans ce cas l'amortisseur et le ressort forment deux pièces distinctes contrairement aux modèles précédents [9].

1.5.4 Types de suspensions

Dans le cadre des suspensions classiques nous distinguons trois types de suspensions :

1.5.4.1 Suspension passive

Une suspension passive est généralement équipée d'un ressort et d'un amortisseur. La force du ressort dépend de l'élongation de celui-ci tandis que l'amortisseur exerce une force en fonction de la différence entre la vitesse de la masse suspendue et celle de la masse non suspendue. La technologie d'amortissement passive est de loin la plus utilisée et l'amortisseur hydraulique classique est le plus employé. Lorsque la suspension est passive, ses caractéristiques ne varient qu'avec l'usure des éléments. Avec ce type de suspensions passives, il existe des fréquences qui ne sont pas bien filtrées, ce qui constitue leur plus grand inconvénient (Figure 1.4.a).

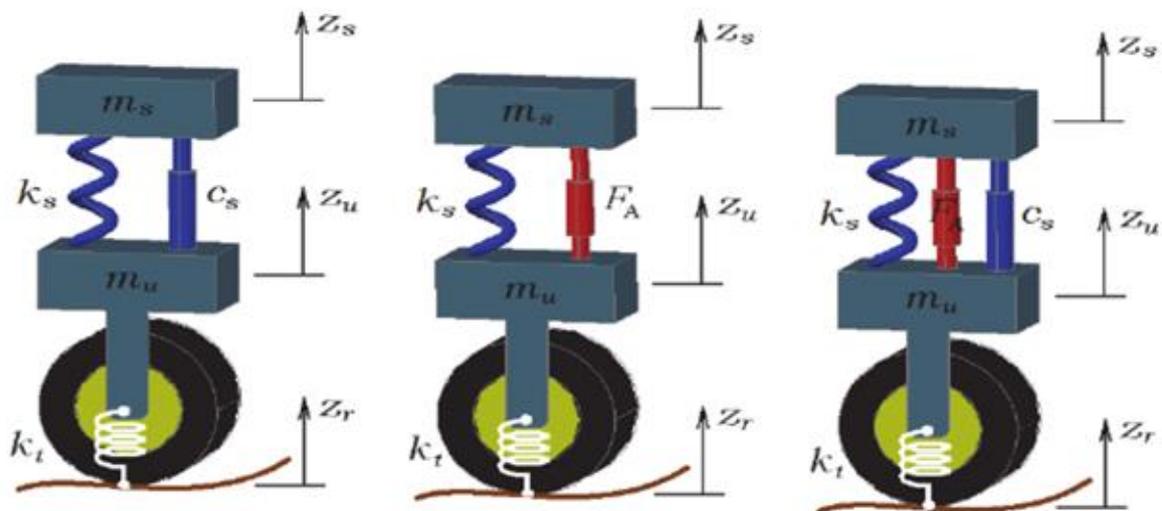
1.5.4.2 Suspension semi-active

La suspension semi-active (Figure 1.4.b) est un compromis entre les systèmes passifs et actifs. Un dispositif semi-actif, tout comme l'amortisseur passif, ne peut que dissiper de l'énergie en produisant une force qui s'oppose à la vitesse relative entre la caisse et la roue. Par contre cette force est contrôlable en temps réel. L'idée principale du contrôle semi-actif est très simple : elle consiste à changer, en temps réel, les caractéristiques des dispositifs de dissipation d'énergie et ce changement ne nécessite qu'une source minimale d'énergie.

L'avantage de la suspension semi-active réside dans le fait qu'elles délivrent un amortissement variable avec des temps de réaction très courts tout en nécessitant un faible besoin en énergie. De plus le caractère passif de ce type de suspension les rend naturellement stables.

1.5.4.3 Suspension active

Les suspensions actives (Figure 1.4.c) agissent et réagissent aux diverses contraintes et perturbations subies par le châssis afin d'améliorer le comportement du véhicule, tant sur le plan de la tenue de route que sur le plan du confort. Dans ces systèmes, la force développée est produite directement à partir d'un actionneur électromécanique commandé, en général via un calculateur qui détermine en temps réel l'effort à fournir. En dépit de leurs très bonnes performances, les suspensions actives sont à ce jour peu répandues à cause de leur complexité, de leur coût, de leur consommation d'énergie et du risque potentiel d'instabilité inhérent à tout système actif.



(a): Suspension passive (b): Suspension semi-active (c): Suspension active

Figure 1.4 : Types de suspension d'un véhicule.

1.7 Sollicitations externes

La sollicitation principale pour les suspensions d'un véhicule est le profil vertical de la route. Ce profil de la route peut être défini analytiquement de multiples façons qui peuvent être classés comme chocs ou comme vibrations. Un choc est un événement discret de courte durée et d'amplitude relativement importante qui a lieu sur une route lisse par ailleurs. Par contre, une vibration est caractérisée par une excitation prolongée due à une route dite rugueuse [2].

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des généralités sur la suspension des véhicules. Nous avons commencé par un aperçu sur la suspension, par la suite on a cité les différents mouvements et les éléments d'un véhicule.

En fin, nous avons introduit les différents types, l'architecture et les composants de la suspension.

Le prochain chapitre est consacré à la modélisation d'un quart de véhicule à 2ddl, d'un demi-véhicule de type bicyclette et on fini par un modèle de véhicule complet à 7ddl.

2.1 Introduction

Les systèmes physiques réellement linéaires n'existent pas. Les équations différentielles linéaires, et les fonctions de transfert, ne sont que des modèles qui correspondent plus ou moins bien à la réalité. Partant du principe que tout système qui n'est pas linéaire doit être considéré comme non linéaire, cela revient à dire que tous les systèmes physiques, en général, sont non linéaires [16].

La non-linéarité est la particularité, en mathématiques, de systèmes dont le comportement n'est pas linéaire, c'est-à-dire soit ne satisfaisant pas le principe de superposition, en régime permanent. Les problèmes non linéaires intéressent les mathématiciens et les physiciens car la plupart des systèmes physiques sont non linéaires.

Le véhicule est un système complexe qui a des comportements fortement non linéaires dans des situations de conduite critiques. Il est composé par plusieurs sous systèmes comme le moteur, la chaîne de transmission, le système de direction, les suspensions, les roues, les pneus, etc. En ce qui concerne le système mécanique des suspensions, les modèles utilisés pour la synthèse de stratégies de contrôle peuvent être classés en trois catégories :

- le modèle quart de véhicule prend en compte uniquement les mouvements verticaux de la caisse et de la masse suspendue.
- le modèle bicyclette considère les mouvements verticaux des masses suspendues à l'avant et à l'arrière du véhicule, et les mouvements de rotation de tangage de déplacement vertical de la caisse.
- le modèle complet prend en compte tous les mouvements de la caisse (vertical, tangage et roulis) et les mouvements verticaux des quatre masses non suspendues [17].

Dans ce chapitre, on présentera différents modèles de suspension de véhicule utilisés pour la synthèse de contrôleurs.

2.2 Différents mouvements de véhicule

Le véhicule automobile représenté sur la figure 2.1 est un système possédant six degrés de liberté. Ses mouvements sont définis par les mouvements de translation et de rotation de la caisse. L'origine du repère véhicule est pris au centre de gravité, G , du véhicule. L'axe z est orthogonal au plan de la route avec un sens positif vers le haut. L'axe x correspond à l'axe longitudinal du véhicule. Le sens positif est choisi vers l'avant.

L'axe y est choisi de manière à former une base orthonormée directe avec x et z .

Les mouvements de translations sont [10] :

- Avance : la translation sur l'axe x caractérise le déplacement longitudinal du véhicule.
- Ballant : le déplacement latéral se fait selon l'axe y .
- Pompage : la translation sur l'axe z caractérise le déplacement vertical.

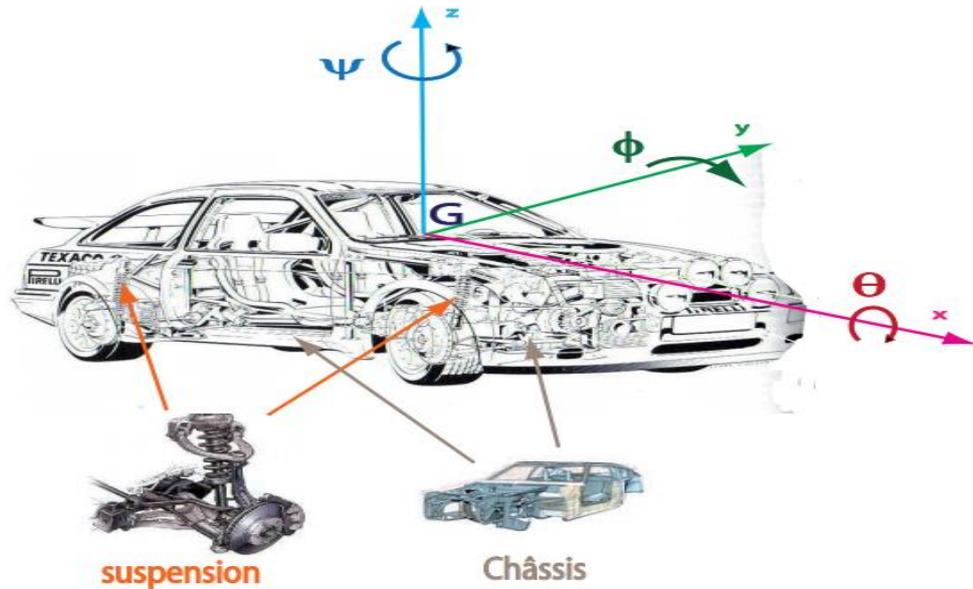


Figure 2.1: Mouvements linéaires et angulaires du véhicule dans l'espace [10].

Les mouvements de rotations de la caisse par rapport aux trois axes sont :

- Roulis Θ : rotation du véhicule autour de l'axe x , phénomène en particulier ressenti lorsque le véhicule se déplace dans un virage.
- Tangage ϕ : rotation du véhicule autour de l'axe y , phénomène qui intervient lors des phases d'accélération et de freinage.
- Lacet (cap) ψ : rotation du véhicule autour de l'axe z

2.3 Représentation d'état des systèmes non linéaires

Tout système physique peut s'écrire sous la forme d'une représentation d'état. Celle-ci permet de décrire des relations d'entrées sorties d'un système par le biais d'une modélisation sous la forme d'équations différentielles ordinaires.

Un système non linéaire peut être modélisé sous la forme générale [14]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}, \text{ avec : } \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.1)$$

où x représente le vecteur d'état, u est le vecteur d'entrées de commande et y est le vecteur de sorties. Les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont non linéaires, respectivement de dimension n et p .

2.4 Modélisation de la suspension

La modélisation est une traduction d'une observation pour mieux comprendre le système dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédictions ou opérations dans le monde réel.

Le choix d'un modèle de suspension de véhicule dépend des mouvements auxquels on s'intéresse (le déplacement vertical, latéral, longitudinal, etc.) et les différents éléments constituant le système de suspension du véhicule (Figure 2.1) [1].

2.4.1 Modèle d'un quart de véhicule

Le modèle quart de véhicule est le modèle le plus simple, qui ne prend que le mouvement vertical de la caisse. Il est composé d'un système mécanique masse-ressort-amortisseur. Ce modèle permet de saisir le comportement vertical de l'ensemble caisse-roue-pneu quelque soit la technologie de la suspension en question.

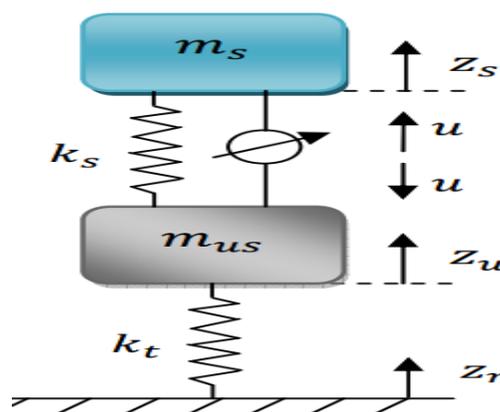


Figure 2.2 : Modèle d'un quart de véhicule [27].

Il est constitué d'une masse suspendue qui repose, par l'intermédiaire de la suspension, sur la masse non-suspendue qui repose-elle même sur le sol par l'intermédiaire du pneumatique (Figure 2.2) [1].

2.4.1.1 Modélisation de quart de véhicule [1]

Par l'application de la 2^{ème} loi de Newton sur le modèle quart de véhicule représenté dans la (figure 2.2), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_i \\ m_s \ddot{z}_s &= -f_k - f_b + u \\ m_u \ddot{z}_u &= f_k + f_b - f_t - u \end{aligned} \quad (2.2)$$

f_k : Effort exercé par le ressort suspension.

f_b : Effort exercé par l'amortisseur.

f_t : Effort exercé par le pneu.

m_s : Masse suspendue (c.à.d. quart de la masse posée sur les suspensions).

m_u : Masse non suspendue (c.à.d. la masse des pièces mécaniques constituant l'assemblage de la roue).

z_s : Déplacement vertical de m_s autour de sa position statique.

z_u : Déplacement vertical de m_u autour de sa position statique.

z_r : Profil vertical du sol.

u : Force générée par l'actionneur.

Nous considérons la représentation non linéaire du ressort, alors les forces (f_k, f_b, f_t) sont données par :

$$\begin{aligned} f_k &= k_s \left[(z_s - z_u) + p_s (z_s - z_u)^3 \right] \\ f_b &= b_c (\dot{z}_s - \dot{z}_u) \\ f_t &= k_t (z_u - z_r) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En remplaçant dans (2.3) :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_s &= -\frac{k_s}{m_s} \left[(z_s - z_u) + p_s (z_s - z_u)^3 \right] - \frac{b_c}{m_s} (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + \frac{1}{m_s} u \\ \ddot{z}_u &= \frac{k_s}{m_u} \left[(z_s - z_u) + p_s (z_s - z_u)^3 \right] + \frac{b_c}{m_u} (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - \frac{k_t}{m_u} (z_u - z_r) - \frac{1}{m_u} u \end{aligned} \quad (2.4)$$

En tenant en compte les variables d'état suivantes :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s \\ z_u \\ \dot{z}_s \\ \dot{z}_u \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

k_s, k_t : Raideur de suspension et raideur de pneumatique respectivement.

b_c : Coefficient d'amortissement.

p_s : Constant.

À partir des équations (2.3) et (2.4), la représentation d'état de modèle quart de véhicule est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k_s S(x)}{m_s} x_1 + \frac{k_s S(x)}{m_s} x_2 - \frac{b_c}{m_s} x_3 + \frac{b_c}{m_s} x_4 + \frac{1}{m_s} u \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_s S(x)}{m_u} x_1 - \frac{(k_s S(x) + k_t)}{m_u} x_2 + \frac{b_c}{m_u} x_3 - \frac{b_c}{m_u} x_4 + \frac{k_t}{m_u} z_r - \frac{1}{m_u} u \end{aligned} \quad (2.6)$$

d'où $S(x)$ est le terme non linéaire :

$$S(x) = (1 + p_s z_1^2), z_1 = x_1 - x_2.$$

Et en considérant que z_r comme une entrée perturbatrice ($w(t) = z_r$) et u comme une entrée de commande, le résultat est un système d'ordre quatre de la forme :

$$\dot{x} = A_1(x)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \quad (2.7)$$

avec:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s S(x)}{m_s} & \frac{k_s S(x)}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s S(x)}{m_u} & -\frac{(k_s S(x) + k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Modèle d'un demi-véhicule

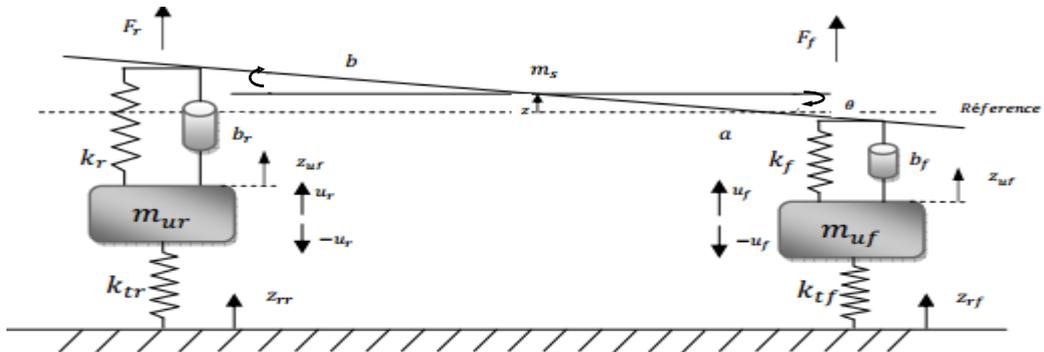


Figure 2.3 : Modèle d'un demi-véhicule [27].

Le modèle demi-véhicule est utilisé pour prendre en compte, en plus des mouvements verticaux, les mouvements de roulis ou du tangage de la caisse. Ce modèle représente une vue de coté d'un véhicule (Figure 2.3).

2.4.2.1 Modélisation de demi-véhicule

Le modèle non linéaire de demi-véhicule est obtenu en considérant l'amortisseur est linéaire mais les ressorts ne sont pas linéaire en avant et en arrière du modèle représenté dans la figure 2.3 représente un modèle simplifié du type bicyclette dans lequel le mode tangage est inclus. Par l'application de la 2^{ème} loi de Newton. On obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \sum F_i \\
 J\ddot{\theta} &= \sum M_i \\
 m_s \ddot{z}_{sf} &= m_s \ddot{z} - m_s a \ddot{\theta} \\
 m_s \ddot{z}_{sr} &= m_s \ddot{z} + m_s b \ddot{\theta} \\
 m_s \ddot{z} &= F_f + F_r
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

D'où le système d'équation :

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{z}_{sf} &= F_f + F_r - m_s a \ddot{\theta} \\
 m_s \ddot{z}_{sr} &= F_f + F_r + m_s b \ddot{\theta} \\
 m_{uf} \ddot{z}_{uf} &= F_f - f_{tf} \\
 m_{ur} \ddot{z}_{ur} &= F_r - f_{tr} \\
 J \ddot{\theta} &= -a \cdot F_f + b \cdot F_r
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour les petites vibrations de θ :

$$\begin{aligned}
 z_{sf} &= z - a \sin \theta \approx z - a\theta \\
 z_{sr} &= z + b \sin \theta \approx z + b\theta
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les formules mathématiques des forces appliquées à la masse suspendue sont données par :

$$\begin{aligned}
 F_f &= -f_{kf} - f_{bf} + u_f \\
 F_r &= -f_{kr} - f_{br} + u_r
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si nous considérons les forces ($f_{kf}, f_{bf}, f_{kr}, f_{br}, f_{tf}, f_{tr}$) ne sont données par :

$$\begin{aligned}
 f_{ki} &= k_i \left[(z_{si} - z_{ui}) + p_s (z_{si} - z_{ui})^3 \right] \\
 f_{bi} &= b_i (\dot{z}_{si} - \dot{z}_{ui}), i = \{f, r\} \\
 f_{ti} &= k_{ti} (z_{ui} - z_{ni})
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

On remplace les forces ($f_{kf}, f_{bf}, f_{kr}, f_{br}, f_{tf}, f_{tr}$) dans l'équation (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ddot{z}_{sf} &= -\alpha k_f \left[(z_{sf} - z_{uf}) + p_s (z_{sf} - z_{uf})^3 \right] - \alpha b_f (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) - \beta k_r \left[(z_{sr} - z_{ur}) \right. \\
&\quad \left. + p_s (z_{sr} - z_{ur})^3 \right] - \beta b_r (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) + \alpha u_f + \beta u_r \\
\ddot{z}_{sr} &= -\beta k_f \left[(z_{sf} - z_{uf}) + p_s (z_{sf} - z_{uf})^3 \right] - \beta b_f (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) - \gamma k_r \left[(z_{sr} - z_{ur}) \right. \\
&\quad \left. + p_s (z_{sr} - z_{ur})^3 \right] - \gamma b_r (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) + \beta u_f + \gamma u_r \\
\ddot{z}_{uf} &= \frac{k_f}{m_{uf}} \left[(z_{sf} - z_{uf}) + p_s (z_{sf} - z_{uf})^3 \right] + \frac{b_f}{m_{uf}} (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) - \frac{k_{tf}}{m_{uf}} (z_{uf} - z_{tf}) \\
&\quad - \frac{1}{m_{uf}} u_f \\
\ddot{z}_{ur} &= \frac{k_r}{m_{ur}} \left[(z_{sr} - z_{ur}) + p_s (z_{sr} - z_{ur})^3 \right] + \frac{b_r}{m_{ur}} (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) - \frac{k_{tr}}{m_{ur}} (z_{ur} - z_{tr}) - \frac{1}{m_{ur}} u_{ur} \\
\ddot{\theta} &= \frac{ak_f}{J} \left[(z_{sf} - z_{uf}) + p_s (z_{sf} - z_{uf})^3 \right] + \frac{ab_f}{J} (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) - \frac{bk_r}{J} \left[(z_{sr} - z_{ur}) \right. \\
&\quad \left. + p_s (z_{sr} - z_{ur})^3 \right] - \frac{bb_r}{J} (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) - \frac{au_f}{J} + \frac{bu_r}{J}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{m_s} + \frac{a^2}{J}, \beta = \frac{1}{m_s} - \frac{ab}{J}, \gamma = \frac{1}{m_s} + \frac{b^2}{J}$$

Pour obtenir la représentation d'état de ce système, on choisit les variables d'état comme suit :

$$\begin{aligned}
X &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T \\
&= \left[(z_{sf} - z_{uf}) \ z_{uf} \ \dot{z}_{uf} \ (z_{sr} - z_{ur}) \ z_{ur} \ \dot{z}_{ur} \ \dot{z} \ \dot{\theta} \right]^T
\end{aligned} \tag{2.14}$$

où :

$(z_{sf} - z_{uf})$: Débattement de la suspension côté avant.

z_{uf} : Déplacement de la masse non suspendue côté avant.

\dot{z}_{uf} : Vitesse de la masse non suspendue côté avant

$(z_{sr} - z_{ur})$: Débattement de la suspension côté arrière.

z_{ur} : Déplacement de la masse non suspendue côté arrière.

\dot{z}_{ur} : Vitesse de la masse non suspendue côté arrière.

\dot{z} : Vitesse verticale de la caisse.

$\ddot{\theta}$: Accélération angulaire (tangage) de la caisse.

Et en concédant que z_{jf} et z_{jr} comme des entrées perturbatrices ($w = [w_f \ w_r]^T = [z_{jf} \ z_{jr}]^T$), u_f et u_r comme des entées de commande $u = [u_f \ u_r]^T$).

A partir des équations (2.13) et (2.14), le résultat est un système d'ordre huit de la forme :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_3 + x_7 - ax_8 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_f}{m_{uf}} x_1 (1 + p_s z_1^2) - \frac{k_{if}}{m_{uf}} x_2 - \frac{b_f}{m_{uf}} x_3 + \frac{b_f}{m_{uf}} x_7 - \frac{ab_f}{m_{uf}} x_8 + \frac{k_{if}}{m_{uf}} z_{jf} - \frac{1}{m_{uf}} u_f \\
\dot{x}_4 &= -x_6 + x_7 + bx_8 \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{k_r}{m_{ur}} x_4 (1 + p_s z_2^2) - \frac{k_{ir}}{m_{ur}} x_5 - \frac{b_r}{m_{ur}} x_6 + \frac{b_r}{m_{ur}} x_7 + \frac{bb_r}{m_{ur}} x_8 + \frac{k_{ir}}{m_{ur}} z_{jr} - \frac{1}{m_{ur}} u_r \\
\dot{x}_7 &= -\frac{k_f}{m_s} x_1 (1 + p_s z_1^2) + \frac{b_f}{m_s} x_3 - \frac{k_r}{m_s} x_4 (1 + p_s z_2^2) + \frac{b_f}{m_s} x_6 - \frac{(b_f + b_r)}{m_s} x_7 \\
&\quad + \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} x_8 + \frac{1}{m_s} u_f + \frac{1}{m_s} u_r \\
\dot{x}_8 &= \frac{ak_f}{J} x_1 (1 + p_s z_1^2) - \frac{ab_f}{J} x_3 - \frac{bk_r}{J} x_4 (1 + p_s z_2^2) + \frac{ab_r}{J} x_6 + \frac{(ab_f - bb_r)}{J} x_7 \\
&\quad - \frac{(b_f a^2 + b_r b^2)}{J} x_8 - \frac{a}{J} u_f + \frac{b}{J} u_r
\end{aligned} \tag{2.15}$$

D'où :

$$S_f(x) = (1 + p_s z_1^2) \text{ et } S_r(x) = (1 + p_s z_2^2), \quad z_1 : x_1, \quad z_2 : x_4$$

La représentation d'état du modèle demi-véhicule est de la forme :

$$\dot{x} = A(x)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \tag{2.16}$$

avec les matrices suivantes :

$$A(x) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k_f S_f(x)}{m_{uf}} & -\frac{k_{ff}}{m_{uf}} & -\frac{b_f}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_f}{m_{uf}} & -\frac{ab_f}{m_{uf}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{k_r}{m_{ur}} & -\frac{k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{bb_r}{m_{ur}} \\
-\frac{k_f S_f(x)}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & -\frac{k_r S_r(x)}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & \frac{(-b_f - b_r)}{m_s} & \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} \\
\frac{ak_f S_f(x)}{J} & 0 & -\frac{ab_f}{J} & -\frac{ak_r S_r(x)}{J} & 0 & \frac{ab_r}{J} & \frac{(ab_f - bb_r)}{J} & -\frac{(a^2 b_f + b^2 b_r)}{J}
\end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \frac{k_{ff}}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} & 0 & 0
\end{bmatrix}^T$$

$$B_2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -\frac{1}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_s} & -\frac{a}{J} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_{ur}} & \frac{1}{m_s} & \frac{b}{J}
\end{bmatrix}^T$$

2.4.3 Modèle d'un véhicule complet

Différents modèles peuvent être développés pour simuler le comportement de l'ensemble des suspensions du véhicule selon la complexité et le réalisme souhaités. Généralement, pour simplifier l'étude des suspensions, seuls les débattements verticaux des suspensions sont pris en compte et pas les débattements latéraux. Le modèle complet à 7ddl (Figure 2.4), est le plus simple, Seuls le mouvement vertical, le roulis et le tangage sont pris en compte car ils engendrent directement un débattement vertical des suspensions. Nous considérons dans notre cas, ces trois mouvements de la caisse ainsi que le déplacement vertical de chacune des quatre roues. Ce modèle peut être complété en tenant compte des 3 déplacements (vertical, latéral et longitudinal) et des 3 rotations (roulis, tangage et lacet possible pour chaque élément. De nouvelles entrées sont alors à considérer notamment l'angle du volant, position de la pédale d'accélération et la pression sur la pédale de frein. Il existe aussi des modèles plus réalistes des suspensions qui représentent les différents bras d'attache d'une suspension et l'inclinaison des amortisseurs et des ressorts qui diffèrent selon l'avant ou l'arrière du véhicule. De plus, on peut aussi

compléter un modèle par l'ajout de la suspension du moteur et de celle des sièges des passagers. Cependant ces modèles deviennent rapidement très complexes à utiliser, à cause des non linéarités, des couplages entre les différents et de la taille des systèmes étudiés [1].

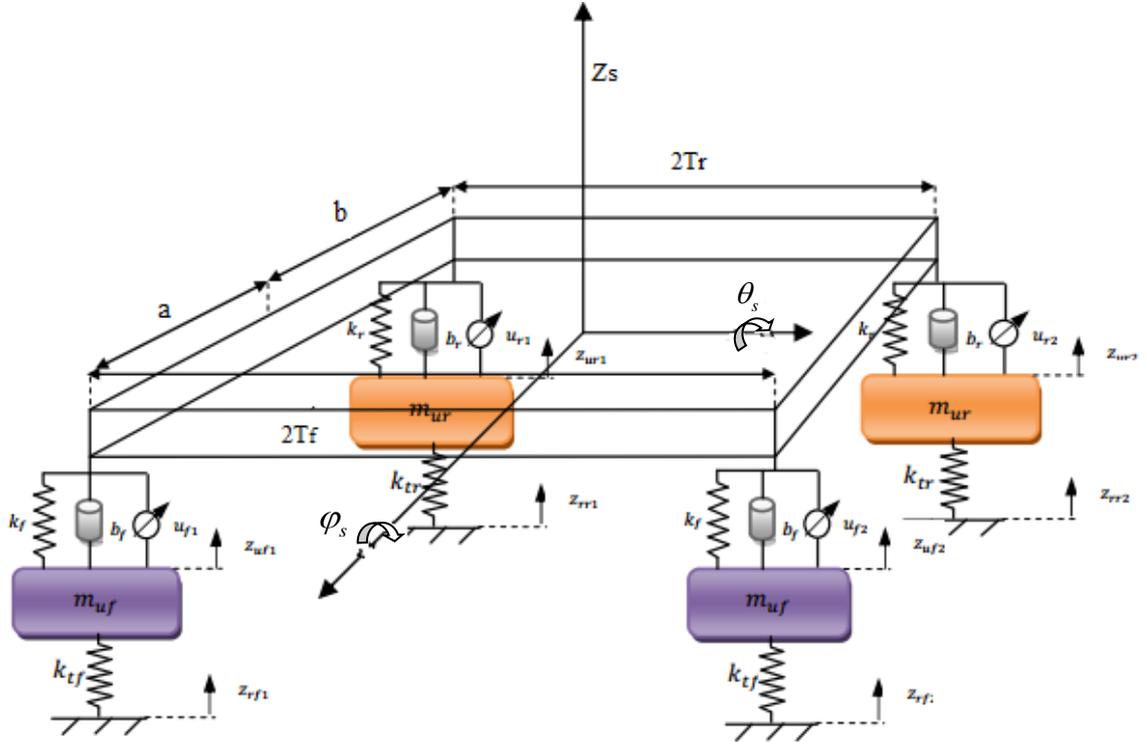


Figure 2.4 : Modèle d'un véhicule complet [27].

2.4.3.1 Modélisation de véhicule complet

Pour des petites variations de l'angle θ et par l'application de la 2^{ème} loi de Newton sur le modèle qui est représenté dans la figure 2.4, on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\phi}_s &= -k_f T_f (z_{s1} - z_{u1}) - k_f T_f P_s (z_{s1} - z_{u1})^3 - b_f T_f (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{u1}) + u_{f1} + k_f T_f (z_{s2} - z_{u2}) \\
 &\quad + k_f T_f P_s (z_{s2} - z_{u2})^3 + b_f T_f (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_{u2}) - u_{f2} - k_r T_r (z_{s3} - z_{u3}) - k_r T_r P_s (z_{s3} - z_{u3})^3 \\
 &\quad - b_r T_r (\dot{z}_{s3} - \dot{z}_{u3}) + u_{r3} + k_r T_r (z_{s4} - z_{u4}) + k_r T_r P_s (z_{s4} - z_{u4})^3 + b_r T_r (\dot{z}_{s4} - \dot{z}_{u4}) - u_{r4} \\
 J_2 \ddot{\theta}_s &= -k_f a (z_{s1} - z_{u1}) - k_f a P_s (z_{s1} - z_{u1})^3 - b_f a (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{u1}) + u_{f1} - k_f a (z_{s2} - z_{u2}) \\
 &\quad - k_f a P_s (z_{s2} - z_{u2})^3 - b_f a (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_{u2}) + u_{f2} + k_r b (z_{s3} - z_{u3}) + k_r b P_s (z_{s3} - z_{u3})^3 \\
 &\quad + b_r b (\dot{z}_{s3} - \dot{z}_{u3}) - u_{r3} + k_r b (z_{s4} - z_{u4}) + k_r b P_s (z_{s4} - z_{u4})^3 + b_r b (\dot{z}_{s4} - \dot{z}_{u4}) - u_{r4} \\
 m_s \ddot{z}_s &= -k_f (z_{s1} - z_{u1}) - k_f P_s (z_{s1} - z_{u1})^3 - b_f (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{u1}) + u_{f1} - k_f (z_{s2} - z_{u2}) \\
 &\quad - k_f P_s (z_{s2} - z_{u2})^3 - b_f (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_{u2}) + u_{f2} - k_r (z_{s3} - z_{u3}) - k_r P_s (z_{s3} - z_{u3})^3 \\
 &\quad - b_r (\dot{z}_{s3} - \dot{z}_{u3}) + u_{r3} - k_r (z_{s4} - z_{u4}) - k_r P_s (z_{s4} - z_{u4})^3 - b_r (\dot{z}_{s4} - \dot{z}_{u4}) + u_{r4}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
m_{uf} \ddot{z}_{uf1} &= k_f (z_{s1} - z_{u1}) + k_f P_s (z_{s1} - z_{u1})^3 + b_f (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{u1}) - k_{tf} (z_{u1} - z_{r1}) - \mathbf{u}_{f1} \\
m_{uf} \ddot{z}_{uf2} &= k_f (z_{s2} - z_{u2}) + k_f P_s (z_{s2} - z_{u2})^3 + b_f (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_{u2}) - k_{tf} (z_{u2} - z_{r2}) - \mathbf{u}_{f2} \\
m_{ur} \ddot{z}_{ur3} &= k_r (z_{s3} - z_{u3}) + k_r P_s (z_{s3} - z_{u3})^3 + b_r (\dot{z}_{s3} - \dot{z}_{u3}) - k_{tr} (z_{u3} - z_{r3}) - \mathbf{u}_{r3} \\
m_{ur} \ddot{z}_{ur4} &= k_r (z_{s4} - z_{u4}) + k_r P_s (z_{s4} - z_{u4})^3 + b_r (\dot{z}_{s4} - \dot{z}_{u4}) - k_{tr} (z_{u4} - z_{r4}) - \mathbf{u}_{r4}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
z_{s1} &= T_f \varphi_s + a\theta_s + z_s \\
\dot{z}_{s1} &= T_f \dot{\varphi}_s + a\dot{\theta}_s + \dot{z}_s \\
z_{s2} &= -T_f \varphi_s + a\theta_s + z_s \\
\dot{z}_{s2} &= T_f \dot{\varphi}_s + a\dot{\theta}_s + \dot{z}_s \\
z_{s3} &= T_f \varphi_s - a\theta_s + z_s \\
\dot{z}_{s3} &= T_f \dot{\varphi}_s - a\dot{\theta}_s + \dot{z}_s \\
z_{s4} &= -T_f \varphi_s - a\theta_s + z_s \\
\dot{z}_{s4} &= -T_f \dot{\varphi}_s - a\dot{\theta}_s + \dot{z}_s
\end{aligned} \tag{2.18}$$

D'où :

J_1 et J_2 : Tangage et roulis du moment d'inertie.

z_{s1}, z_{s2}, z_{s3} et z_{s4} : Déplacements de châssis pour chaque coin.

z_{u1}, z_{u2}, z_{u3} et z_{u4} : Déplacements de roue pour chaque coin.

a : Distance entre le centre de la masse suspendue et la roue avant.

b : Distance entre le centre de la masse suspendue et la roue arrière.

b_f et b_r : Amortisseur avant et arrière.

k_f et k_r : Raideur de ressort du châssis avant et arrière.

k_{tf} et k_{tr} : Raideur du pneu.

En tenant compte les variables d'état suivantes:

$$X = \begin{bmatrix} \varphi_s & \theta_s & z_s & z_{u1} & z_{u2} & z_{u3} & z_{u4} & \dot{\varphi}_s & \dot{\theta}_s & \dot{z}_s & \dot{z}_{u1} & \dot{z}_{u2} & \dot{z}_{u3} & \dot{z}_{u4} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

φ_s : Angle de roulis.

$\dot{\varphi}_s$: Taux de roulement.

θ_s : Angle d'inclinaison.

z_s, \dot{z}_s : Déplacement verticale et vitesse verticale.

z_{u1} : Déplacement vertical de la roue avant droite.

\dot{z}_{u1} : Vitesse vertical de la roue avant droite.

z_{u2} : Déplacement vertical de la roue avant gauche.

\dot{z}_{u2} : Vitesse vertical de la roue avant gauche.

z_{u3} : Déplacement vertical de la roue arrière droite.

\dot{z}_{u3} : Vitesse vertical de la roue arrière droite.

z_{u4} : Déplacement vertical de la roue arrière gauche.

\dot{z}_{u4} : Vitesse vertical de la roue arrière gauche.

Des équations (2.17) et (2.19), on obtient la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}_1 = \dot{\phi}_s = x_8$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_s = x_9$$

$$\dot{x}_3 = \dot{z}_s = x_{10}$$

$$\dot{x}_4 = \dot{z}_{u1} = x_{11}$$

$$\dot{x}_5 = \dot{z}_{u2} = x_{12}$$

$$\dot{x}_6 = \dot{z}_{u3} = x_{13}$$

$$\dot{x}_7 = \dot{z}_{u4} = x_{14}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_8 = \frac{1}{J_1} & \left[\left(-k_f T_f^2 (S_1 + S_2) - k_r T_r^2 (S_3 + S_4) \right) x_1 + \left(-k_f T_f a (S_1 - S_2) + k_r T_r b (S_3 - S_4) \right) x_2 \right. \\ & + \left(-k_f T_f (S_1 - S_2) - k_r T_r (S_3 - S_4) \right) x_3 + k_f T_f S_1 x_4 - k_f T_f S_2 x_5 + k_r T_r S_3 x_6 \\ & \left. - k_r T_r S_4 x_7 - 2 \left(b_f T_f^2 + b_r T_r^2 \right) x_8 + b_f T_f x_{11} - b_f T_f x_{12} + b_r T_r x_{13} - b_r T_r x_{14} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_9 = & \frac{1}{J_2} \left[\left(-k_f T_f a (S_1 - S_2) + k_r T_r b (S_3 - S_4) \right) x_1 + \left(-k_f a^2 (S_1 + S_2) - k_r b^2 (S_3 + S_4) \right) x_2 \right. \\ & + \left(-k_f a (S_1 + S_2) + k_r b (S_3 + S_4) \right) x_3 + k_f a S_1 x_4 + k_f a S_2 x_5 - k_r b S_3 x_6 - k_r b S_4 x_7 \\ & \left. - 2(b_f a^2 + b_r b^2) x_9 - 2(b_f a - b_r b) x_{10} + b_f a x_{11} + b_f a x_{12} - b_r b x_{13} - b_r b x_{14} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} = & \frac{1}{m_s} \left[\left(-k_f T_f (S_1 - S_2) - k_r T_r (S_3 - S_4) \right) x_1 + \left(-k_f a (S_1 + S_2) + k_r b (S_3 + S_4) \right) x_2 \right. \\ & + \left(-k_f (S_1 + S_2) - k_r (S_3 + S_4) \right) x_3 + k_f S_1 x_4 + k_f S_2 x_5 + k_r S_3 x_6 + k_r S_4 x_7 \\ & \left. - 2(b_f a - b_r b) x_9 - 2(b_f + b_r) x_{10} + b_f x_{11} + b_f x_{12} + b_r x_{13} + b_r x_{14} \right] \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{11} = \frac{1}{m_{uf}} \left[k_f T_f S_1 x_1 + k_f a S_1 x_2 + k_f S_1 x_3 - (k_f S_1 + k_{ff}) x_4 + b_f T_f x_8 + b_f a x_9 + b_f x_{10} - b_f x_{11} \right]$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{1}{m_{uf}} \left[-k_f T_f S_2 x_1 + k_f a S_2 x_2 + k_f S_2 x_3 - (k_f S_2 + k_{ff}) x_5 - b_r T_f x_8 + b_f a x_9 + b_f x_{10} - b_f x_{12} \right]$$

$$\dot{x}_{13} = \frac{1}{m_{ur}} \left[k_r T_r S_3 x_1 - k_r b S_3 x_2 + k_r S_3 x_3 - (k_r S_3 + k_{rr}) x_6 - b_r T_r x_8 - b_r b x_9 + b_r x_{10} - b_r x_{13} \right]$$

$$\dot{x}_{14} = \frac{1}{m_{ur}} \left[-k_r T_r S_4 x_1 - k_r b S_4 x_2 + k_r S_4 x_3 - (k_r S_4 + k_{rr}) x_7 - b_r T_r x_8 - b_r b x_9 + b_r x_{10} - b_r x_{14} \right]$$

D'où :

$$S_1(x) = (1 + P_s z_1^2), S_2(x) = (1 + P_s z_2^2), S_3(x) = (1 + P_s z_3^2), S_4(x) = (1 + P_s z_4^2).$$

$$z_1 = T_f * x_1 + a * x_2 + x_3 - x_4, z_2 = -T_f * x_1 + a * x_2 + x_3 - x_5,$$

$$z_3 = T_r * x_1 - b * x_2 + x_3 - x_6, z_4 = -T_r * x_1 - b * x_2 + x_3 - x_7$$

2.5 Réponses du système autonome

Les paramètres des trois modèles (quart, demi et véhicule complet) utilisés lors de la simulation sont illustrés par les tableaux (2.1), (2.2) et (2.3) respectivement.

paramètres	m_s (kg)	m_u (kg)	k_s (N / m)	k_t (N / m)	b_c (N _s / m)	p_s
valeurs	250	30	15000	150000	1000	0.6

Tableau 2.1 : Paramètres de simulation de quart véhicule.

paramètre	m_s (kg)	m_{uf} (kg)	m_{ur} (kg)	k_f (N / m)	k_r (N / m)	k_{ff} (N / m)
s	690	40	45	17000	22000	200000
paramètre	k_{rr} (N / m)	b_f (N _s / m)	b_r (N _s / m)	J (kg)	a (m)	b (m)
valeurs	200000	1000	1100	1222	1.5	1.5

Tableau 2.2 : Paramètres de simulation de demi-véhicule.

Paramètres	m_s (kg)	m_{uf} (kg)	m_{ur} (kg)	k_f (N / m)	k_r (N / m)
valeurs	1136	63	60	36297	19620
Paramètres	k_{tf} (N / m)	k_{tr} (N / m)	b_f (N _s / m)	b_r (N _s / m)	J_1 (kg)
valeurs	182470	182470	3924	2943	2400
Paramètres	J_2 (kg)	T_f (m)	T_r (m)	a (m)	b (m)
valeurs	400	0.505	0.557	1.15	1.65

Tableau 2.3 : Paramètres de simulation de véhicule complet.

Un dos d'âne d'hauteur de 0.25 m (Figure 2.5) est utilisé pour une perturbation au quart de véhicule et une autre de la même hauteur (Figure 2.6) est utilisé pour une perturbation au demi-véhicule et véhicule complet, l'état de véhicule est stable au début.

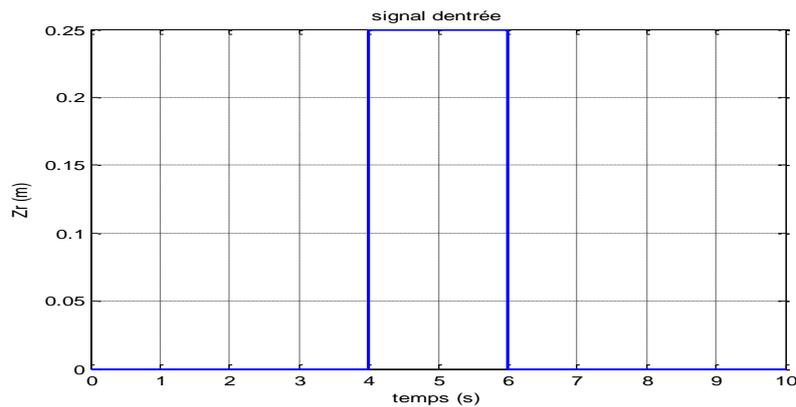


Figure2.5 :Perturbation sur le modèle quart de véhicule.

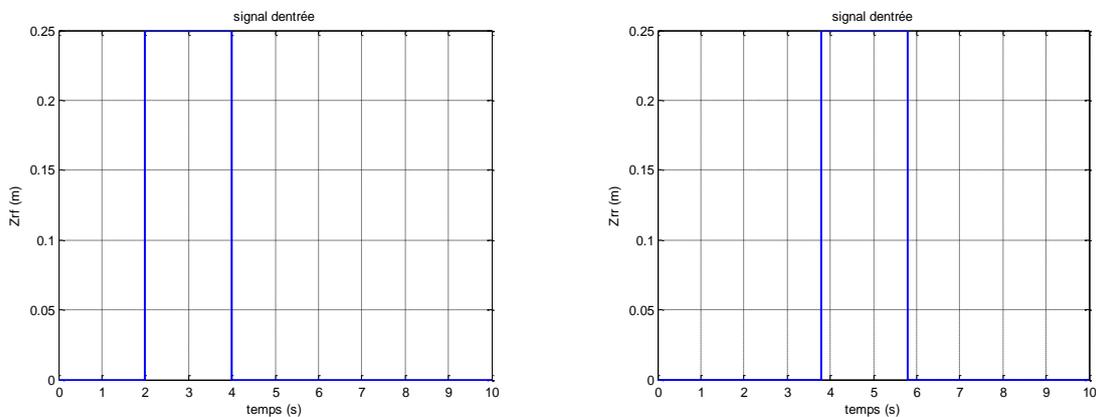


Figure2.6 :Perturbation sur les modèles demi et véhicule complet.

2.5.1 Quart de véhicule

La figure 2.7 montre la réponse du système non linéaire de quart de véhicule en boucle ouverte (réponse libre).

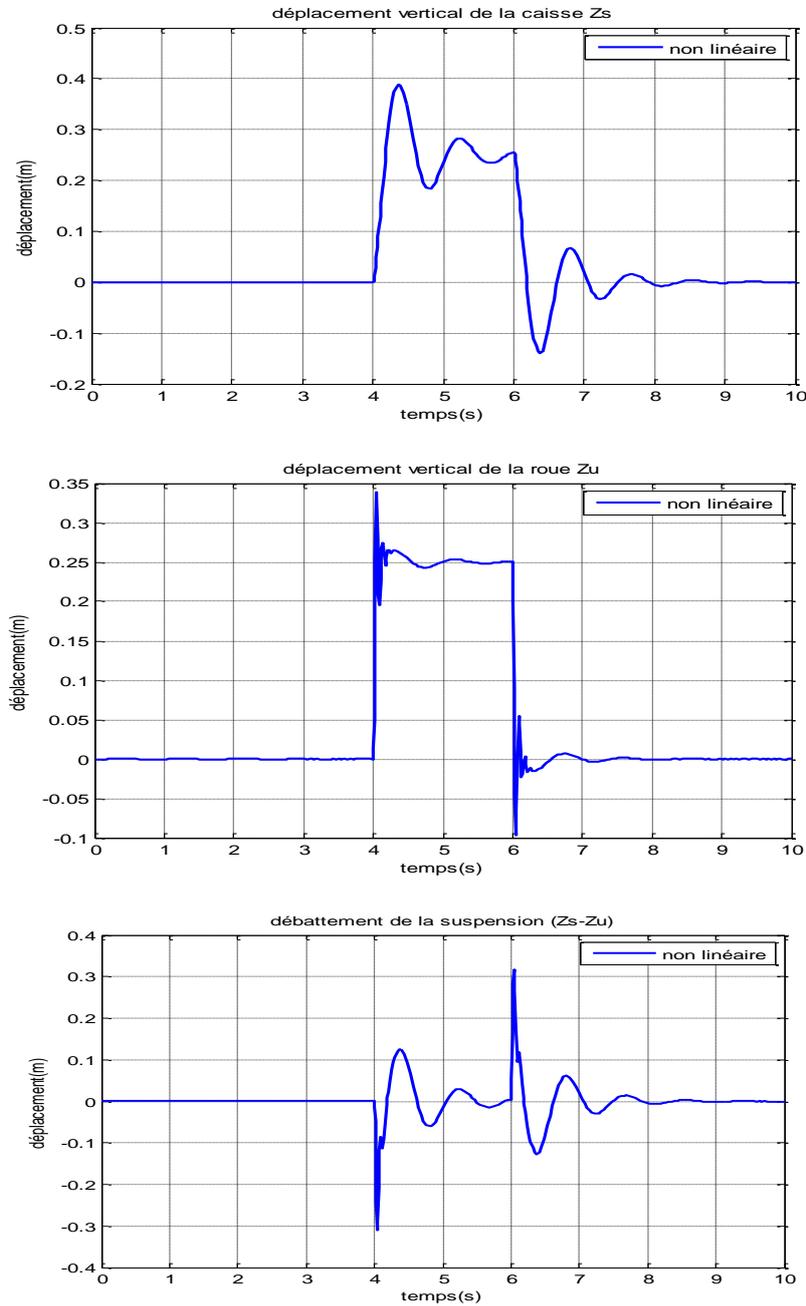


Figure 2.7 : Réponse de système de suspension en boucle ouverte, cas modèle quart de véhicule.

2.5.2 Demi-véhicule

La figure 2.8 montre la réponse du système non linéaire de demi-véhicule en boucle ouverte (réponse libre) via une perturbation illustrée par la figure 2.6

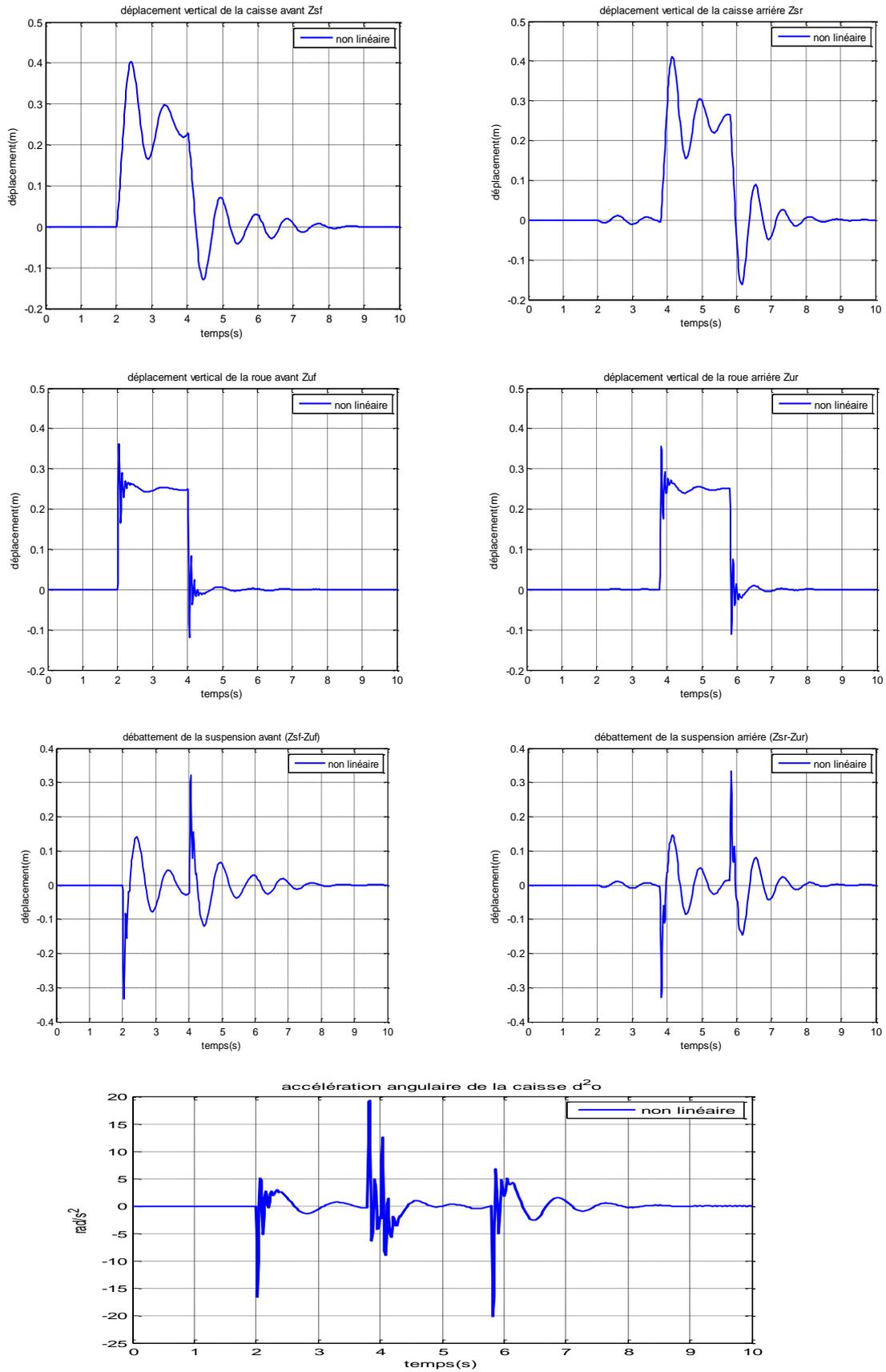


Figure 2.8 : Réponse de système de suspension en boucle ouverte, cas modèle demi-véhicule.

2.5.3 Véhicule complet

La figure 2.9 montre la réponse du système non linéaire de véhicule complet en boucle ouverte (réponse libre) pour une perturbation montrée sur la figure 2.6

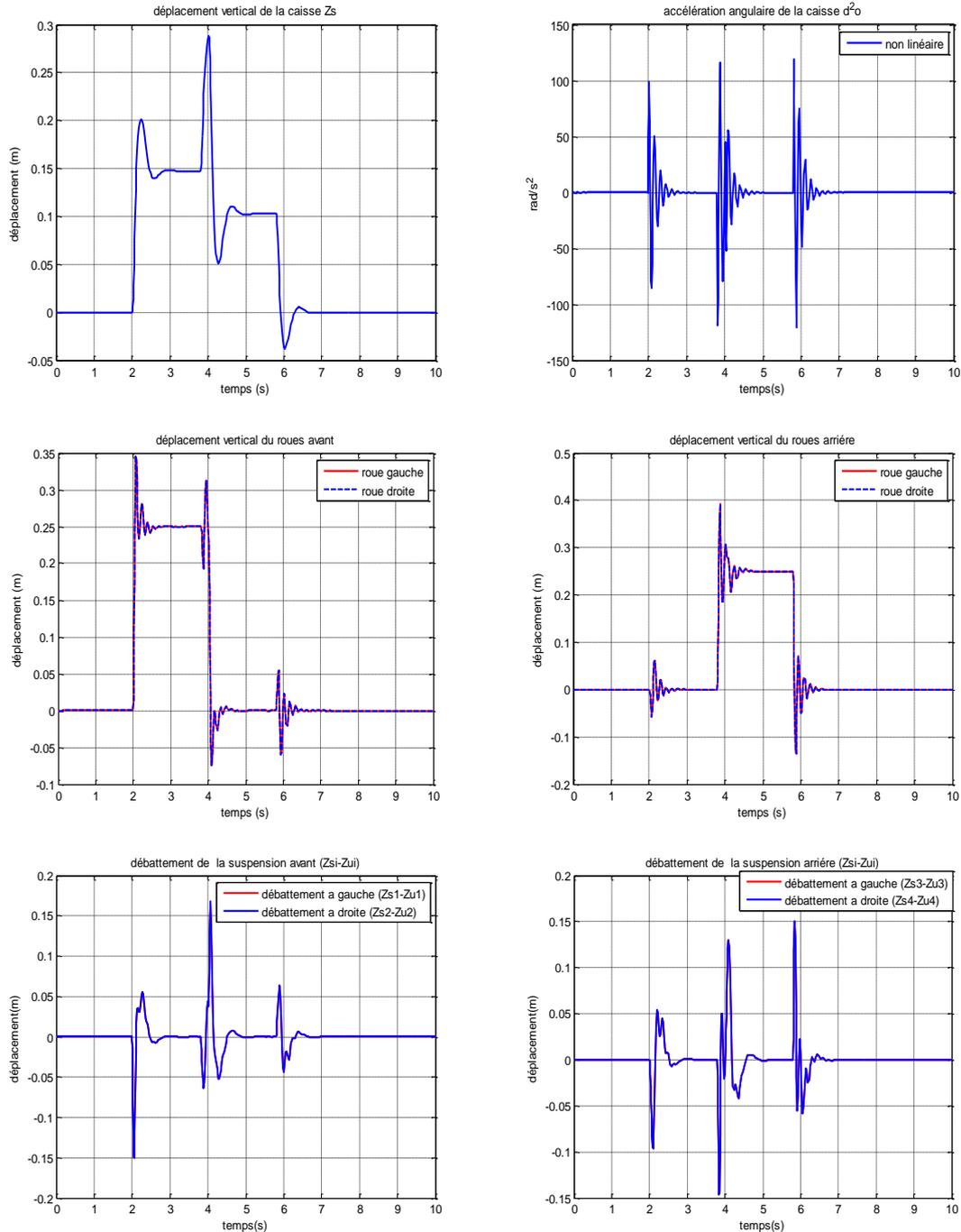


Figure 2.9: Réponse de système de suspension en boucle ouverte, cas modèle véhicule complet.

D'après ces résultats de simulation, on voit clairement que les trois modèles de suspension passives (réponses libres) présentent des grands oscillations et vibrations.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fournis les trois modèles de système de suspension (quart, demi et complet) de véhicule. En tenant compte du comportement non linéaire des ressorts, nous avons développé leurs représentations d'état. Via une perturbation considérée comme une dos d'âne, les réponses de suspensions passives présentent des niveaux de vibrations considérables qui sont néfastes pour les passagers et le véhicule. Afin d'éliminer ces vibrations et assurer le confort, dans les chapitres suivants, nous proposons des lois de commande (chapitre 4) basées sur la représentation multi-modèles de suspension (chapitre 3).

3.1 Introduction

Un modèle linéaire fournit une représentation locale d'un système non linéaire valide autour d'un point de fonctionnement donné. Une description globale, dite l'approche multi-modèles permet de décrire le comportement dynamique du système non linéaire dans une grande plage de fonctionnement a été élaborée. Cette approche est une représentation polytopique convexe reposant sur l'utilisation des modèles linéaires multiples définis autour de différents points de fonctionnement. Dans la littérature, on peut trouver de nombreuses structures des multi-modèles. Cependant, on peut distinguer deux classes principales : la classe de multi-modèles à états découplés et la classe de multi-modèles à état unique. Les modèles de Takagi-Sugeno (T-S) appartiennent à la classe de multi-modèles à état unique. Ces modèles permettent de représenter de manière précise un système non linéaire par une structure simple en se basant sur des modèles linéaires interpolés entre eux par des fonctions non linéaires positives et bornées. Leur structure particulière permet l'extension de certains résultats obtenus dans le cadre des systèmes linéaires. C'est la raison pour laquelle de nombreux travaux ont été basés sur cette représentation dans l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes non linéaires [18].

Ce chapitre est consacré à la représentation multi-modèles de différents modèles de suspensions présentés dans le chapitre précédent.

3.2 Représentation des Modèles Takagi-Sugeno (T-S)

Les modèles de Takagi-Sugeno (T-S) constituent une représentation mathématique très intéressante des systèmes non linéaires, car ils permettent de représenter du mieux possible le fonctionnement dynamique d'un processus de tout système non linéaire, quelle que soit sa complexité, par une structure simple en s'appuyant sur des modèles linéaires interpolés par des fonctions d'activations. Ces modèles permettent de représenter de manière précise les systèmes non linéaires. Ils ont une structure simple présentant des propriétés intéressantes les rendant facilement exploitables du point de vue mathématique et permettant l'extension de certains résultats du domaine linéaire aux systèmes non linéaires, la figure suivante représente la représentation multi-modèles d'un système non linéaire [15].

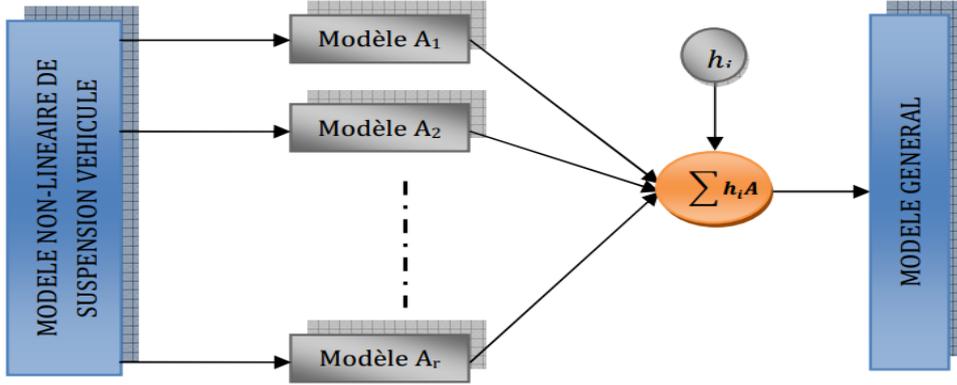


Figure 3.1 : Représentation multi-modèles d'un système non linéaire[27].

- **Sous modèle**

C'est le modèle qui représente le comportement du système non linéaire dans une zone de fonctionnement spécifique.

Le modèle flou représente le système non linéaire par des règles floues de la forme « Si - Alors » comme suit [8] :

Règle i :

Si $\xi_1(t)$ est M_{i1} et, ..., et $\xi_p(t)$ est M_{ip} alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $i = \{1, \dots, r\}$, r est le nombre de règles, M_{ji} sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous, $j = \{1, \dots, p\}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

$\xi_1(t), \dots, \xi_p(t)$ sont les variables des prémisses qui peuvent être des fonctions des variables d'état, des entrées ou une combinaison des deux. À chaque règle est attribué un poids $\omega_i(\xi(t))$ qui dépend du vecteur $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_p(t)]$ et du choix de l'opérateur logique. L'opérateur « ET » est souvent choisi comme étant le produit, d'où :

$$\omega_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\xi_j(t)), i = 1, \dots, r \quad (3.2)$$

avec $\omega_i(\xi(t)) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$

Le modèle global est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\xi(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{\omega_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\xi(t))} \quad (3.4)$$

Le système non linéaire (3.1) peut alors être représenté par le modèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

La fonction $\mu_i(\xi(t))$ dite fonction d'activation détermine le degré d'activation du $i^{\text{ème}}$ modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global. Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions dépendent généralement du vecteur d'état $x(t)$.

Les fonctions d'activations peuvent être de forme triangulaire, sigmoïdale ou gaussienne, et satisfont les propriétés suivantes (convexité):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2.1 Structure couplée

La structure couplée, où le vecteur d'état étant une somme pondérée des états des modèles locaux, s'appelle aussi le modèle flou de Takagi-Sugeno (T-S), et elle est basée

sur des règles du type SI prémisse Alors conséquence, dans cette situation, la représentation multi-modèle est obtenue par interpolation de r modèles locaux linéaires.

Cette représentation (structure couplée) étant la plus largement utilisée, et par l'utilisation de la transformation par secteurs non linéaires, on peut déduire facilement le modèle sans aucune perte d'information [6].

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r C_i x(t) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

3.2.2 Structure découplée

La deuxième famille c'est la structure découplée ou bien les multi-modèles locaux, où il y a plusieurs vecteurs d'états. Elle suppose que le processus est composé de modèles locaux découplés et admet des vecteurs d'états indépendants, et peut être vue comme la connexion parallèle de r modèles affines pondérés par leurs poids de pondération. Dans le contexte d'identification des paramètres cette structure est très utile car elle permet d'ajuster les dimensions des sous-modèles à la complexité des différents comportements d'un processus [6].

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x_i(t) + B_i u(t)) \\ y_i(t) = \sum_{i=1}^r C_i x_i(t) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Dans la suite de ce manuscrit, les modèles T-S étudiés sont tous obtenus à partir d'une décomposition en secteurs non linéaires.

3.3 Obtention d'une structure multi-modèle

Dans la littérature, trois approches sont couramment décrites pour l'obtention d'une structure multi-modèles:

3.3.1 Par identification

En représentant un système non linéaire sous forme multi-modèles, le problème d'identification des systèmes non linéaires est réduit à l'identification des sous-systèmes définis par des modèles locaux linéaires et des fonctions d'activation. Les méthodes d'optimisation numérique sont alors utilisées pour estimer ces paramètres.

Pour l'estimation des paramètres, plusieurs méthodes d'optimisation numérique peuvent être utilisées, selon les informations disponibles à priori. Elles sont généralement basées sur la minimisation de la fonction d'écart entre la sortie estimée du multi-modèles $y(t)$ et la sortie mesurée du système $y_m(t)$ [6].

Le critère le plus utilisé est le critère qui représente l'écart quadratique entre les deux sorties indiquées.

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon(t, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_m(t) - y(t))^2 \quad (3.9)$$

Où N est l'horizon d'observation et θ est le vecteur de paramètres des modèle locaux et ceux des fonctions d'activation.

3.3.2 Par linéarisation

Dans ce cas, on dispose la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis [1,2].

Par la suite, nous représenterons le système non linéaire (2.1) par un multi-modèles, composé de plusieurs modèles locaux linéaire ou affines obtenus en linéarisant le système non linéaire autour de différents points de fonctionnement arbitraires $(x_i, u_i) \in R^n \times R^m$ [7].

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$A_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, B_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, D_i = F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i$$

$$C_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, E_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, N_i = G(x_i, u_i) - C_i x_i - E_i u_i$$

Notons que dans ce cas, le nombre des modèles locaux (r) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation. Ces dernières doivent satisfaire les propriétés (3.6).

3.3.3 Par transformation d'un système non linéaire polytopique convexe

Considérons le cas général d'un système continu non linéaire [12]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

avec

$$x(\cdot) \in \mathbb{R}^n, u(\cdot) \in \mathbb{R}^m, y(\cdot) \in \mathbb{R}^p, f(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^p, g(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^p, B(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^{p \times m}, \text{ et } D(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

Cette méthode est basée sur la bornitude des fonctions continues. L'avantage de la méthode est de ne pas engendrer d'erreur d'approximation et de minimiser le nombre de modèles locaux.

Lemme 2.1

Soit $f(x(t))$ une fonction bornée de

$$\begin{aligned} M_i(\cdot) : [a, b] &\rightarrow [0, 1], i \in I_2 \\ x(t) &\rightarrow M_i(x(t)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec :

$$M_1(x(t)) + M_2(x(t)) = 1 \quad (3.13)$$

Et deux scalaire α et β tels que :

$$f(x(t)) = M_1(x(t))\alpha + M_2(x(t))\beta \quad (3.14)$$

Une décomposition de $f(x(t))$ est considérée $[a, b]$ comme suit :

$$\beta = \min_{x \in [a, b]} (f(x)), \alpha = \max_{x \in [a, b]} (f(x)) \quad (3.15)$$

$$M_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}, M_2(x(t)) = \frac{\alpha - f(x(t))}{\alpha - \beta} \quad (3.16)$$

Sous l'hypothèse de la continuité et la bornitude des fonctions $f(x(t))$ et $g(x(t))$ données en (3.11) avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, ces fonctions peut être réécrites sous la forme suivantes :

$$f(x(t)) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) A_i x(t), g(x(t)) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \quad (3.17)$$

Le modèle (3.11) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (3.18)$$

Dans ce cas le multi-modèles (3.18) obtenu représente de façon exacte le modèle non linéaire (3.11) sur l'intervalle compact considéré.

3.4. Représentation des systèmes de suspension par la représentation multi-modèles

Dans cette section, nous appliquons la représentation multi-modèles sur les modèles (quart, demi et véhicule complet) de suspension de véhicule.

La perturbation $w(t)$ représente le profil de la route (le déplacement verticale de la surface de la route et $u(t)$ est la force engendrée par l'actionneur.

3.4.1 Multi-modèles de quart de véhicule

Nous considérons le terme non linéaire $z_1^2 \in [0, a^2]$ et $a \in R^{+2}$

Les règles flous de type T-S sont données par :

Si z_1^2 est M_1 alors $\dot{x} = A_1 x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$

Si z_1^2 est M_2 alors $\dot{x} = A_2 x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$

avec :

$$M_1 = \frac{z_1^2}{a^2}, M_2 = \frac{a^2 - z_1^2}{a^2}.$$

La représentation générale des modèles locaux s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 \mu_i (A_i x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)) \\ \mu_1(t) &= M_1(x(t)), \mu_2(t) = M_2(x(t)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

La figure 3.2 représente les fonctions d'activation dans le cas d'un ressort non linéaire .

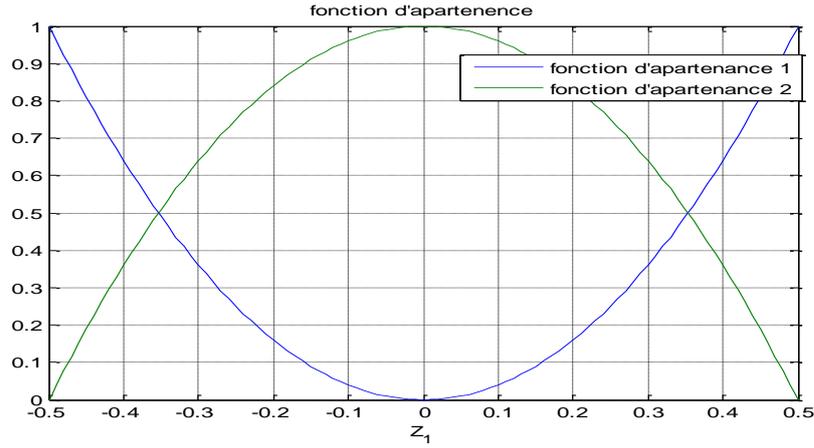


Figure 3.2 : fonction d'appartenance.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s(1+P_s a^2)}{m_s} & \frac{k_s(1+P_s a^2)}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s(1+P_s a^2)}{m_u} & -\frac{(k_s(1+P_s a^2)+k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{(k_s+k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

3.4.2 Multi-modèles de demi-véhicule

En tenant compte les termes non linéaires : $z_1^2 \in [0, c^2]$ et $z_2^2 \in [0, d^2]$, $(c, d) \in \mathbb{R}^{+2}$

Les règles flous de type T-S sont données par :

Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^1 alors $\dot{x} = A_1 x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$

Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 alors $\dot{x} = A_2 x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$

Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^1 alors $\dot{x} = A_3 x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$

Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 alors $\dot{x} = A_4 x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$

avec :

$$M_1^1 = \frac{z_1^2}{c^2}, M_1^2 = \frac{c^2 - z_1^2}{c^2}, M_2^1 = \frac{z_2^2}{d^2}, M_2^2 = \frac{d^2 - z_2^2}{d^2}$$

La représentation générale des modèles locaux s'écrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i (A_i x(t) + B_1 u(t) + B w_2(t)) \quad (3.20)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= M_1^1(x(t)) \times M_2^1(x(t)), \mu_2(t) = M_1^1(x(t)) \times M_2^2(x(t)) \\ \mu_3(t) &= M_1^2(x(t)) \times M_2^1(x(t)), \mu_4(t) = M_1^2(x(t)) \times M_2^2(x(t)) \end{aligned}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_f S_f(x)}{m_{uf}} & -\frac{k_{if}}{m_{uf}} & -\frac{b_f}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_f}{m_{uf}} & -\frac{ab_f}{m_{uf}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_r}{m_{ur}} & -\frac{k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{bb_r}{m_{ur}} \\ -\frac{k_f S_f(x)}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & -\frac{k_r S_r(x)}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & \frac{(-b_f - b_r)}{m_s} & \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} \\ \frac{ak_f S_f(x)}{J} & 0 & -\frac{ab_f}{J} & -\frac{ak_r S_r(x)}{J} & 0 & \frac{ab_r}{J} & \frac{(ab_f - bb_r)}{J} & -\frac{(a^2 b_f + b^2 b_r)}{J} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_f S_f(x)}{m_{uf}} & -\frac{k_{if}}{m_{uf}} & -\frac{b_f}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_f}{m_{uf}} & -\frac{ab_f}{m_{uf}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_r}{m_{ur}} & -\frac{k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{bb_r}{m_{ur}} \\ -\frac{k_f S_f(x)}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & -\frac{k_r}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & \frac{(-b_f - b_r)}{m_s} & \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} \\ \frac{ak_f S_f(x)}{J} & 0 & -\frac{ab_f}{J} & -\frac{ak_r}{J} & 0 & \frac{ab_r}{J} & \frac{(ab_f - bb_r)}{J} & -\frac{(a^2 b_f + b^2 b_r)}{J} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_f}{m_{uf}} & -\frac{k_{tf}}{m_{uf}} & -\frac{b_f}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_f}{m_{uf}} & -\frac{ab_f}{m_{uf}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_r}{m_{ur}} & -\frac{k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{bb_r}{m_{ur}} \\ -\frac{k_f}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & -\frac{k_r S_r(x)}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & \frac{(-b_f - b_r)}{m_s} & \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} \\ \frac{ak_f}{J} & 0 & -\frac{ab_f}{J} & -\frac{ak_r S_r(x)}{J} & 0 & \frac{ab_r}{J} & \frac{(ab_f - bb_r)}{J} & -\frac{(a^2 b_f + b^2 b_r)}{J} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_f}{m_{uf}} & -\frac{k_{tf}}{m_{uf}} & -\frac{b_f}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_f}{m_{uf}} & -\frac{ab_f}{m_{uf}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_r}{m_{ur}} & -\frac{k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{bb_r}{m_{ur}} \\ -\frac{k_f}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & -\frac{k_r}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & \frac{(-b_f - b_r)}{m_s} & \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} \\ \frac{ak_f}{J} & 0 & -\frac{ab_f}{J} & -\frac{ak_r}{J} & 0 & \frac{ab_r}{J} & \frac{(ab_f - bb_r)}{J} & -\frac{(a^2 b_f + b^2 b_r)}{J} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{uf}} & -\frac{a}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_{uf}} & \frac{1}{m_{uf}} & \frac{b}{J} \end{bmatrix}^T$$

3.4.3 Multi-modèles de véhicule complet

Soient les termes non linéaires : $z_1^2 \in [0, c^2]$, $z_2^2 \in [0, d^2]$, $z_3^2 \in [0, e^2]$ et $z_4^2 \in [0, f^2]$,

$(c, d, e, f) \in R^{+2}$

Les règles flous de type T-S sont données par :

- Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^1 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_1x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_2x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_3x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_4x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^1 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_5x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^1 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_6x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_7x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_8x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_9x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_{10}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_{11}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^2 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_{12}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_{13}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^1 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_{14}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^2 et z_4^2 est M_4^1 alors $\dot{x} = A_{15}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$
 Si z_1^2 est M_1^1 et z_2^2 est M_2^2 et z_3^2 est M_3^1 et z_4^2 est M_4^2 alors $\dot{x} = A_{16}x(t) + B_1u(t) + B_2w(t)$

avec

$$M_1^1 = \frac{z_1^2}{c^2}, M_1^2 = \frac{c^2 - z_1^2}{c^2}, M_2^1 = \frac{z_2^2}{d^2}, M_2^2 = \frac{d^2 - z_2^2}{d^2}$$

$$M_3^1 = \frac{z_3^2}{f^2}, M_3^2 = \frac{f^2 - z_3^2}{f^2}, M_4^1 = \frac{z_4^2}{e^2}, M_4^2 = \frac{e^2 - z_4^2}{e^2}$$

La représentation générale des modèles locaux s'écrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{16} \mu_i (A_i x(t) + B_1 u(t) + B_2 w(t)) \quad (3.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= M_1^1 \times M_2^1 \times M_3^1 \times M_4^1, \mu_9 = M_1^2 \times M_2^2 \times M_3^2 \times M_4^2 \\ \mu_2 &= M_1^1 \times M_2^1 \times M_3^1 \times M_4^2, \mu_{10} = M_1^2 \times M_2^2 \times M_3^2 \times M_4^1 \\ \mu_3 &= M_1^1 \times M_2^2 \times M_3^2 \times M_4^1, \mu_{11} = M_1^2 \times M_2^2 \times M_3^1 \times M_4^2 \\ \mu_4 &= M_1^1 \times M_2^2 \times M_3^1 \times M_4^1, \mu_{12} = M_1^2 \times M_2^1 \times M_3^2 \times M_4^2 \\ \mu_5 &= M_1^2 \times M_2^1 \times M_3^1 \times M_4^1, \mu_{13} = M_1^1 \times M_2^2 \times M_3^2 \times M_4^2 \\ \mu_6 &= M_1^2 \times M_2^1 \times M_3^1 \times M_4^2, \mu_{14} = M_1^1 \times M_2^1 \times M_3^2 \times M_4^2 \\ \mu_7 &= M_1^2 \times M_2^1 \times M_3^2 \times M_4^1, \mu_{15} = M_1^1 \times M_2^2 \times M_3^2 \times M_4^1 \\ \mu_8 &= M_1^2 \times M_2^2 \times M_3^1 \times M_4^1, \mu_{16} = M_1^1 \times M_2^2 \times M_3^1 \times M_4^2 \end{aligned}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_8^1 & a_8^2 & a_8^3 & a_8^4 & a_8^5 & a_8^6 & a_8^7 & a_8^8 & 0 & 0 & a_8^{11} & a_8^{12} & a_8^{13} & a_8^{14} \\ a_9^1 & a_9^2 & a_9^3 & a_9^4 & a_9^5 & a_9^6 & a_9^7 & 0 & a_9^9 & a_9^{10} & a_9^{11} & a_9^{12} & a_9^{13} & a_9^{14} \\ a_{10}^1 & a_{10}^2 & a_{10}^3 & a_{10}^4 & a_{10}^5 & a_{10}^6 & a_{10}^7 & 0 & a_{10}^9 & a_{10}^{10} & a_{10}^{11} & a_{10}^{12} & a_{10}^{13} & a_{10}^{14} \\ a_{11}^1 & a_{11}^2 & a_{11}^3 & a_{11}^4 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^8 & a_{11}^9 & a_{11}^{10} & a_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^1 & a_{12}^2 & a_{12}^3 & 0 & a_{12}^5 & 0 & 0 & a_{12}^8 & a_{12}^9 & a_{12}^{10} & 0 & a_{12}^{12} & 0 & 0 \\ a_{13}^1 & a_{13}^2 & a_{13}^3 & 0 & 0 & a_{13}^6 & 0 & a_{13}^8 & a_{13}^9 & a_{13}^{10} & 0 & 0 & a_{13}^{13} & 0 \\ a_{14}^1 & a_{14}^2 & a_{14}^3 & 0 & 0 & 0 & a_{14}^7 & a_{14}^8 & a_{14}^9 & a_{14}^{10} & 0 & 0 & 0 & a_{14}^{14} \end{bmatrix}, i = [1, \dots, 16].$$

d'où

$$a_8^1 = \frac{1}{J_1} (-k_f T_f^2 (S_1 + S_2) - k_r T_r^2 (S_3 + S_4)) a_8^2 = \frac{1}{J_1} (-k_f T_f a (S_1 - S_2) + k_r T_r b (S_3 - S_4)).$$

$$a_8^3 = \frac{1}{J_1} (-k_f T_f (S_1 - S_2) - k_r T_r (S_3 - S_4)) a_8^4 = \frac{1}{J_1} k_f T_f S_1 a_8^5 = -\frac{1}{J_1} k_f T_f S_2 a_8^6 = \frac{1}{J_1} k_r T_r S_3.$$

$$a_8^7 = -\frac{1}{J_1} k_r T_r S_4 a_8^8 = -\frac{2}{J_1} (b_f T_f^2 + b_r T_r^2) a_8^{11} = \frac{1}{J_1} b_f T_f a_8^{12} = -\frac{1}{J_1} b_f T_f a_8^{13} = \frac{1}{J_1} b_r T_r.$$

$$a_8^{14} = -\frac{1}{J_1} b_r T_r.$$

$$a_9^1 = \frac{1}{J_2} (-k_f T_f a (S_1 - S_2) + k_r T_r b (S_3 - S_4)) a_9^2 = \frac{1}{J_2} (-k_f a^2 (S_1 + S_2) - k_r b^2 (S_3 + S_4)).$$

$$a_9^3 = \frac{1}{J_2} (-k_f a (S_1 + S_2) + k_r b (S_3 + S_4)) a_9^4 = \frac{1}{J_2} k_f a S_1 a_9^5 = \frac{1}{J_2} k_f a S_2 a_9^6 = -\frac{1}{J_2} k_r b S_3.$$

$$a_9^7 = -\frac{1}{J_2} k_r b S_4 a_9^9 = -\frac{2}{J_2} (b_f a^2 + b_r b^2) a_9^{10} = -\frac{2}{J_2} (b_f a - b_r b) a_9^{11} = \frac{1}{J_2} b_f a.$$

$$a_9^{12} = \frac{1}{J_2} b_f a a_9^{13} = -\frac{1}{J_2} b_r b a_9^{14} = -\frac{1}{J_2} b_r b.$$

$$a_{10}^1 = \frac{1}{m_s} (-k_f T_f (S_1 - S_2) - k_r T_r (S_3 - S_4)) a_{10}^2 = \frac{1}{m_s} (-k_f a (S_1 + S_2) + k_r b (S_3 + S_4)).$$

$$a_{10}^3 = \frac{1}{m_s} (-k_f (S_1 + S_2) - k_r (S_3 + S_4)) a_{10}^4 = \frac{1}{m_s} k_f S_1 a_{10}^5 = \frac{1}{m_s} k_f S_2 a_{10}^6 = \frac{1}{m_s} k_r S_3.$$

$$a_{10}^7 = \frac{1}{m_s} k_r S_4 a_{10}^9 = -\frac{2}{m_s} (b_f a - b_r b) a_{10}^{10} = -\frac{2}{m_s} (b_f + b_r) a_{10}^{11} = a_{10}^{12} = \frac{1}{m_s} b_f a_{10}^{13} = a_{10}^{14} = \frac{1}{m_s} b_r.$$

$$a_{11}^1 = \frac{1}{m_{uf}} k_f T_f S_1 a_{11}^2 = \frac{1}{m_{uf}} k_f a S_1 a_{11}^3 = \frac{1}{m_{uf}} k_f S_1 a_{11}^4 = -\frac{1}{m_{uf}} (k_f S_1 + k_{if}).$$

$$a_{11}^8 = \frac{1}{m_{uf}} b_f T_f a_{11}^9 = \frac{1}{m_{uf}} b_f a a_{11}^{10} = \frac{1}{m_{uf}} b_f a_{11}^{11} = -\frac{1}{m_{uf}} b_f.$$

$$a_{12}^1 = -\frac{1}{m_{uf}} k_f T_f S_2 a_{12}^2 = \frac{1}{m_{uf}} k_f a S_2 a_{12}^3 = \frac{1}{m_{uf}} k_f S_2 a_{12}^5 = -\frac{1}{m_{uf}} (k_f S_2 + k_{if}).$$

$$a_{12}^8 = -\frac{1}{m_{uf}} b_f T_f a_{12}^9 = \frac{1}{m_{uf}} b_f a a_{12}^{10} = \frac{1}{m_{uf}} b_f a_{12}^{12} = -\frac{1}{m_{uf}} b_f.$$

$$a_{13}^1 = \frac{1}{m_{ur}} k_r T_r S_3 a_{13}^2 = -\frac{1}{m_{ur}} k_r b S_3 a_{13}^3 = \frac{1}{m_{ur}} k_r S_3 a_{13}^6 = -\frac{1}{m_{ur}} (k_r S_3 + k_{ir}).$$

$$a_{13}^8 = -\frac{1}{m_{ur}} b_r T_r a_{13}^9 = -\frac{1}{m_{ur}} b_r b a_{13}^{10} = \frac{1}{m_{ur}} b_r a_{13}^{13} = -\frac{1}{m_{ur}} b_r.$$

$$a_{14}^1 = -\frac{1}{m_{ur}} k_r T_r S_4 a_{14}^2 = -\frac{1}{m_{ur}} k_r b S_4 a_{14}^3 = \frac{1}{m_{ur}} k_r S_4 a_{14}^7 = -\frac{1}{m_{ur}} (k_r S_4 + k_{ir}).$$

$$a_{14}^8 = -\frac{1}{m_{ur}} b_r T_r a_{14}^9 = -\frac{1}{m_{ur}} b_r b a_{14}^{10} = \frac{1}{m_{ur}} b_r a_{14}^{14} = -\frac{1}{m_{ur}} b_r \cdot P_s = 0.6.$$

et

règles	Valeur de S_i dans la partie conclusion			
$i = 1$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 2$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = 1$
$i = 3$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = 1$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 4$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = 1$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 5$	$S_1 = 1$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 6$	$S_1 = 1$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = 1$
$i = 7$	$S_1 = 1$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = 1$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 8$	$S_1 = 1$	$S_2 = 1$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 9$	$S_1 = 1$	$S_2 = 1$	$S_3 = 1$	$S_4 = 1$
$i = 10$	$S_1 = 1$	$S_2 = 1$	$S_3 = 1$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 11$	$S_1 = 1$	$S_2 = 1$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = 1$
$i = 12$	$S_1 = 1$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = 1$	$S_4 = 1$
$i = 13$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = 1$	$S_3 = 1$	$S_4 = 1$
$i = 14$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = (1 + P_s z_2^2)$	$S_3 = 1$	$S_4 = 1$
$i = 15$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = 1$	$S_3 = 1$	$S_4 = (1 + P_s z_4^2)$
$i = 16$	$S_1 = (1 + P_s z_1^2)$	$S_2 = 1$	$S_3 = (1 + P_s z_3^2)$	$S_4 = 1$

Tableau 3.1 : Valeur des termes non linéaires dans chaque règle.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}^T$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_2} & \frac{1}{j_1} & \frac{1}{m_s} & \frac{-1}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{j_2} & \frac{1}{j_1} & \frac{1}{m_s} & 0 & \frac{-1}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_2} & \frac{-1}{j_1} & \frac{1}{m_s} & 0 & 0 & \frac{-1}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{j_2} & \frac{-1}{j_1} & \frac{1}{m_s} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_{uf}} \end{bmatrix}^T$$

3.5 Validation de représentation des multi-modèles

Dans cette partie, nous exposons les résultats de la simulation obtenus pour la validation des multi-modèles donnés dans la section précédente.

3.5.1 Modèle quart de véhicule

La figure 3.3 représente les réponses du système non linéaire (2.1) et sa représentation multi-modèles (3.19) dans le cas du modèle quart de véhicule via une perturbation montrée dans la figure 2.5

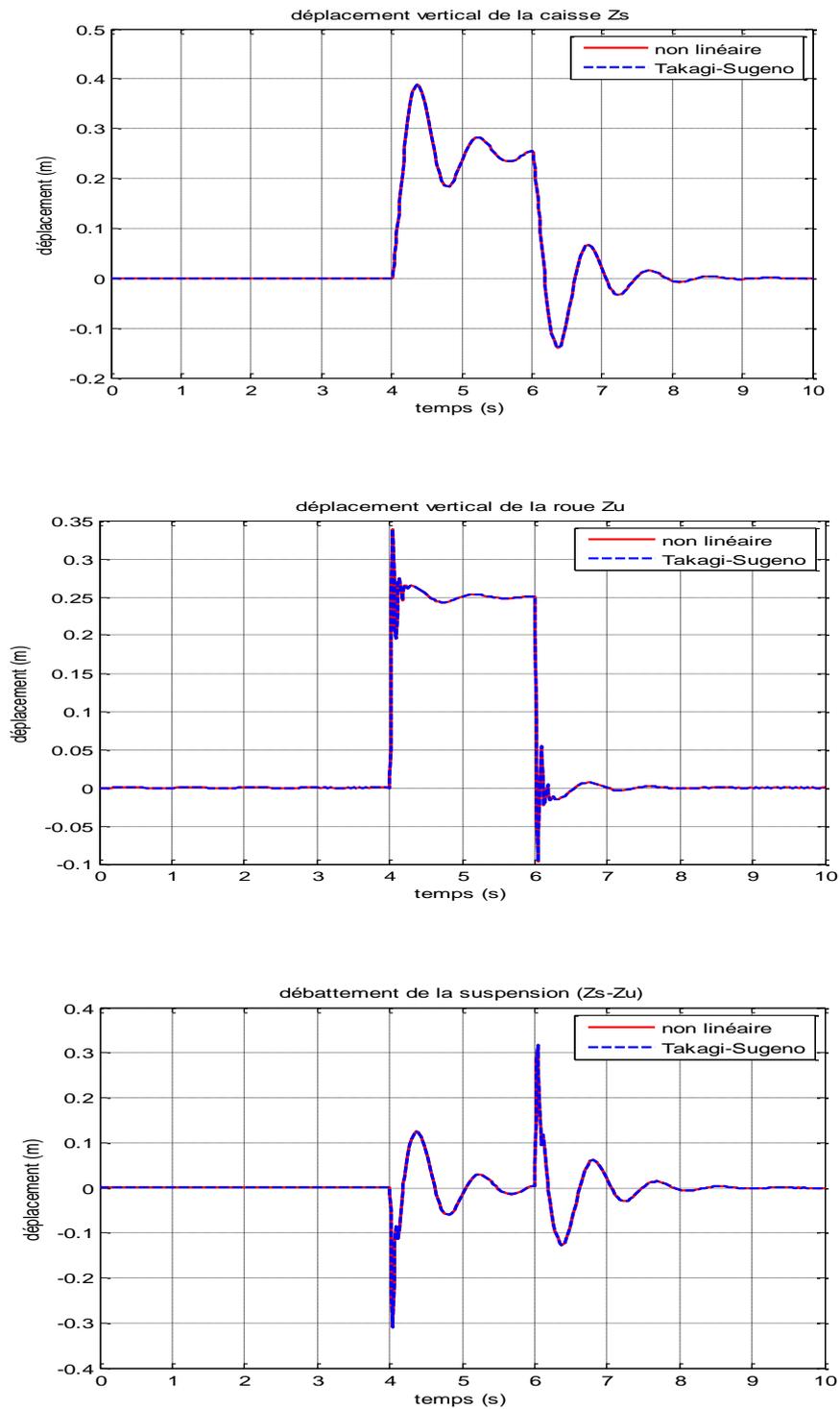


Figure 3.3 : Réponses du système non linéaire et le multi-modèles
Cas du modèle quart de véhicule.

3.5.2 Modèle demi-véhicule

Les réponses du système non linéaire (2.1) et le multi-modèle associé (3.20), sont illustrées sur la figure 3.4

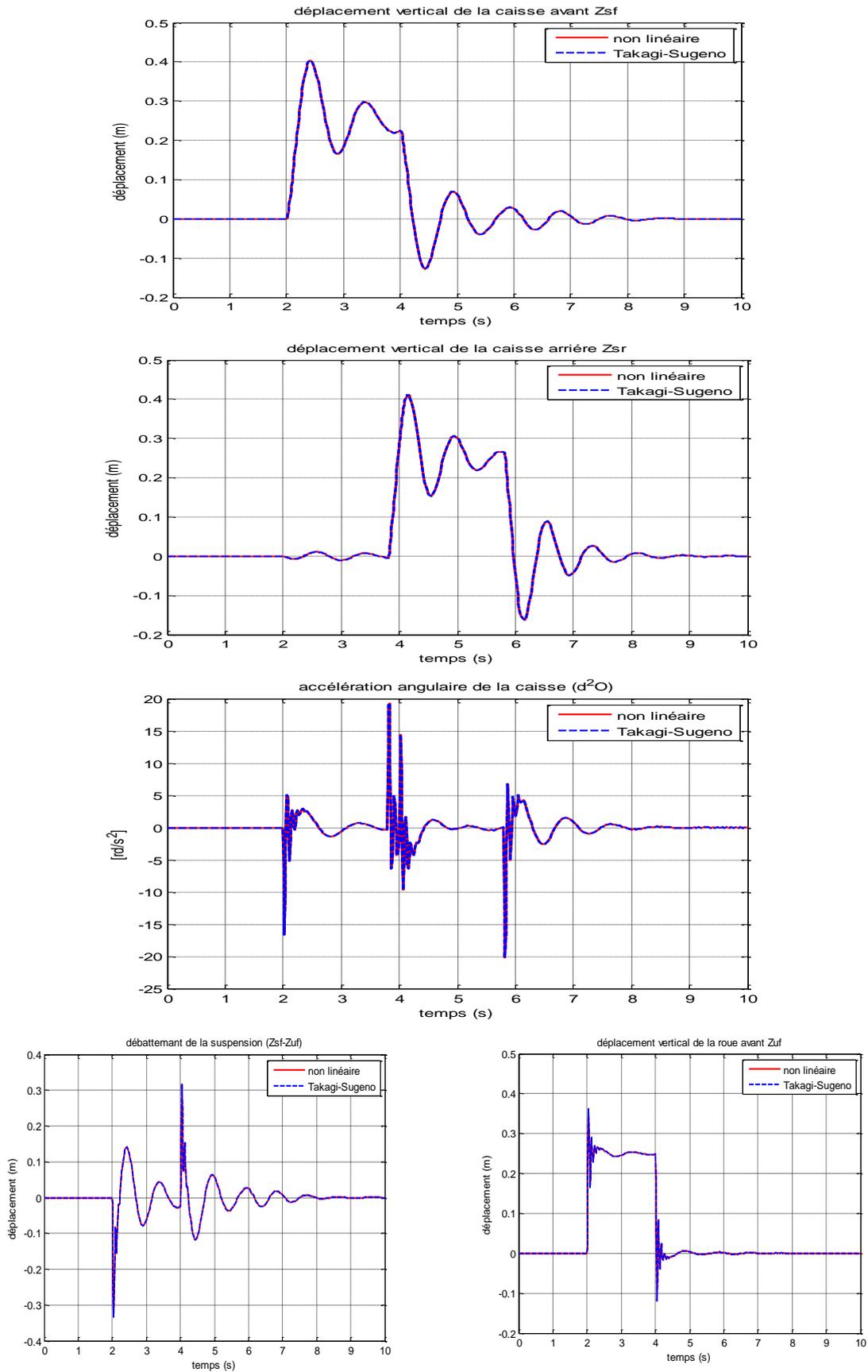


Figure 3.4: Réponses du système non linéaire et le multi-modèles
Cas du modèle de demi-véhicule.

3.5.3 Modèle de véhicule complet

La figure 3.5 montre la dynamique du modèle de véhicule complet entre le système non linéaire et le multi-modèles dans le cas du modèle véhicule complet.

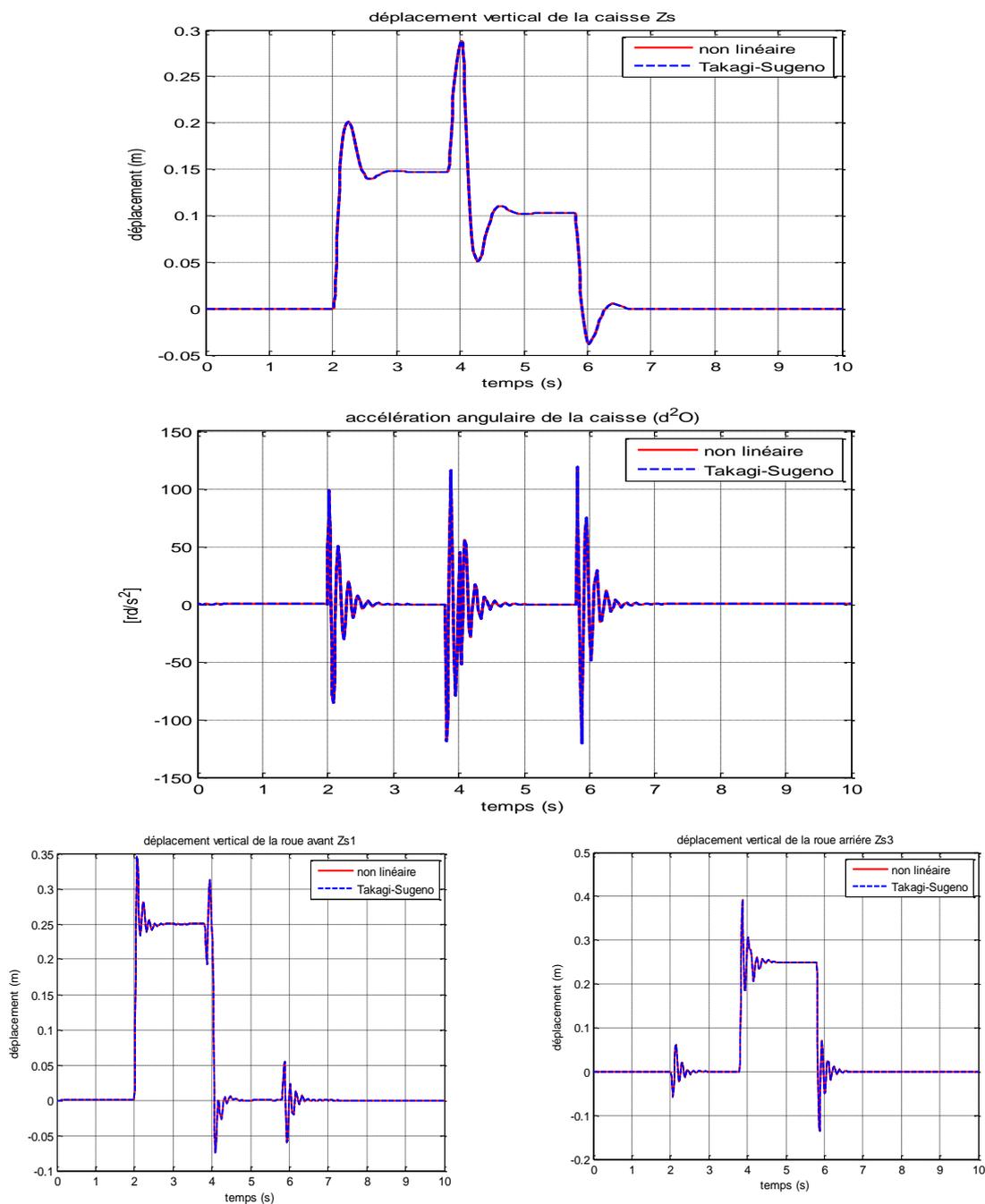


Figure 3.5 : Réponses du système non linéaire et le multi-modèles
Cas du modèle de véhicule complet.

D'après ces résultats de simulation, on remarque que les modèles non-linéaires et le multi-modèles se superposent l'un sur l'autre ce qui justifier leur utilisation dans le chapitre suivant pour la synthèse d'une loi de commande basée sur cette l'approche.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une représentation des systèmes non linéaires sous forme de multi-modèles est abordée. Les différentes méthodes de génération d'un multi-modèles à partir d'un modèle non linéaire sont présentées. Cette approche est une représentation polytopique convexe reposant sur l'utilisation des modèles linéaires (LTI) définis autour de différents points de fonctionnement. La validation de représentations multi-modèles sur les systèmes de suspension (quart, demi et complet) de véhicule montre sa capacité à décrire de manière précise le comportement non linéaire de nos systèmes. En se basant sur cette approche, dans le chapitre suivant, nous d'élaborerons des lois de commande robustes afin d'améliorer les performances de ces systèmes.

4.1 Introduction

Afin d'améliorer les performances telles que, le confort et la tenue de route de suspensions passives, nous proposons dans ce chapitre, une synthèse de correcteurs H_∞ basée sur une loi de commande multi-modèles dite commande PDC (Parallel Distributed Compensation). Le principe de cette approche est de trouver un contrôleur de telle sorte que, la commande compense l'influence des entrées de perturbations sur les sorties à commander, en minimisant la norme du transfert en boucle fermée entre les entrées exogènes et les sorties à commander du système. Dans notre travail, la synthèse de ces correcteurs repose sur les fonctions de Lyapunov quadratiques ; il s'agit de chercher une matrice symétrique définie positive et sa fonction de Lyapunov quadratique associée telles que, certaines conditions simples garantissent les propriétés de stabilité. L'intérêt de la méthode quadratique vient du fait que la recherche d'une fonction de Lyapunov (et de gains de retour d'état dans le cas de stabilisation) est facile à mettre en œuvre et peut être énoncée comme un problème d'optimisation convexe en terme LMI (Linear Matrix Inequalities) résolu efficacement. Néanmoins, les conditions LMIs obtenues par l'approche quadratique sont parfois très conservatives.

4.2 Stabilisation d'un multi-modèles

L'une des premières idées de stabilisation de ces modèles consiste à utiliser des retours d'état linéaires. Ces derniers ont vite été supplantés par une loi de commande qui permette de prendre en compte les non linéarités des modèles flous et connue sous le nom de PDC [23].

4.3 Concept PDC (Parallel Distributed Compensation)

Ce concept utilise une loi de commande linéaire pour chaque sous-modèle. Le résultat est non linéaire. L'idée est de créer un compensateur pour chaque règle du modèle flou. La procédure est la suivante :

- représentation floue T-S du système à commander.
- chaque règle de commande est conçue à partir de la règle du modèle flou précédemment défini,
- un gain de commande par retour d'état constitue la partie conclusion de chaque sous modèle flou.

Le régulateur ainsi conçu partage la même base de règles que le modèle flou (pour sa partie prémisse) [23].

4.4 Analyse convexe et inégalité matricielle

4.4.1 Analyse convexe

Le problème d'analyse et de synthèse dans ce mémoire est formulé en terme d'optimisation, convexe si possible (la commande H_∞ qui sera étudié dans la suite de ce chapitre pose des problèmes d'optimisation). La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage.

- les temps de calcul sont raisonnables.
- le résultat obtenu correspond à un minimum global unique de la fonction coût à optimiser, il n'existe pas de minimum local.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici la définition dans chacun des cas [1].

- **Ensemble convexe**

Soit un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, E est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in E$$

- **Fonction convexe**

Soit une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec E un ensemble convexe, alors f est convexe si et seulement si:

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit:

$$\min_{x \in E} f(x) \text{ où } E \text{ est un ensemble convexe et } f \text{ une fonction convexe.}$$

4.4.2 Inégalités Matricielles Linéaires(LMI)

4.4.2.1 Définition d'une LMI

Une Inégalité Matricielle Linéaire est une contrainte du type:

$$F(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i < 0 \quad (4.1)$$

où $(x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ est un vecteur de n scalaires inconnus (variables de décision) et A_0, A_1, \dots, A_n , sont des matrices symétriques données appartenant à $R^{n \times n}$ (< 0) signifie que la matrice $F(x)$ est définie négative.

Il existe également des LMI non strictes de la forme $F(x) \leq 0$, où signifie que la matrice $F(x)$ est semi définie négative.

Les contraintes $A(x) > 0$ et $A(x) < B(x)$ sont des cas particuliers de (4.1) puisqu'elles peuvent être écrites comme: $-A(x) < 0$ et $A(x) - B(x) < 0$.

Plusieurs LMI sous la forme : $A_1(x), \dots, A_n(x) < 0$ peuvent se regrouper en une seule LMI:

$$F(x) = \text{diag}(A_1(x), \dots, A_n(x)) < 0$$

L'ensemble C défini par $C = R^n / A(x) < 0$ est convexe. Par conséquent une contrainte LMI est une contrainte convexe [1].

4.4.2.2 Problèmes génériques LMI

Il existe trois grandes classes de problèmes d'optimisation avec des contraintes qui peuvent être exprimées au moyen de LMI.

- **Problème de faisabilité**

Définition

Trouver une solution $x \in C \subset R^n$ tel que $F(x) > 0$

Le problème est faisable si $C \neq \emptyset$, il existe un ensemble non vide des x vérifiant l'inégalité $F(x) > 0$ [25].

Note : Sous matlab la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **feasp**.

- **Problème de minimisation d'un objectif linéaire**

Définition

On cherche à minimiser un objectif linéaire sous contraintes LMI

$$\begin{aligned} \min C^T x \\ x \in R^m / F(x) > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

où C^T est une vectrice ligne donnée [12].

Note : Sous matlab la recherche d'une solution global (a une tolérance bien d'déterminée) est assuré par la fonction **mincx**.

- **Problème de valeur propre généralisée**

Définition :

On cherche à minimiser la plus grande valeur propre généralisée du système $(P(x), Q(x))$ sous la contrainte LMI $R(x) > 0$ c.-à-d. [12]:

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \lambda \\ & \text{pour } \lambda \in R, x \in R^m \\ & \lambda \rho(x) - Q(x) > 0 \\ \text{Contraint par : } & \rho(x) > 0 \\ & Q(x) > 0 \end{aligned}$$

Autre écriture du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \lambda_{\max} [\rho(x), Q(x)] \\ & \text{Pour } \lambda \in R, x \in R^m \\ \text{Contraint par : } & \rho(x) > 0 \\ & Q(x) > 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note : Sous matlab, la recherche d'une solution globale est assurée par la fonction **gevp**.

4.4.2.3 Lemme de Schur

Le complément de Schur ou le lemme de Schur est un outil fondamental dans la linéarisation des inégalités matricielles, en effet, il permet dans certain cas de mettre sous forme LMI des contraintes non linéaires.

Soit $Q(x) = Q(x)^T \in R^{n \times n}$, $R(x) = R(x)^T \in R^{n \times m}$ et $S(x) \in R^{n \times p}$ des matrices affines en x , les trois propositions suivantes sont équivalentes [23] :

$$(i) \begin{cases} Q(x) > 0 \\ R(x) - S(x)Q(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

4.5 Notions sur la stabilité

4.5.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non linéaire du premier ordre [19] :

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n \quad (4.4)$$

4.5.1.1 Point d'équilibre

Un vecteur $x_e \in R^n$ est dit point ou état d'équilibre si :

$$f(x_e) = 0 \quad (4.5)$$

Remarque : Tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable $x - x_e \rightarrow x$. Donc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant [19] :

$$x_e = 0 \quad (4.6)$$

4.5.1.2 Stabilité locale simple et asymptotique

L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système (4.5) est :

stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r = r(\varepsilon)$, tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0$$

instable, si non stable, asymptotiquement stable, s'il est stable et si r peut être choisit tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.7)$$

Marginalement stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable. Physiquement, la stabilité au sens de Lyapunov garantit que la trajectoire restera à l'intérieur de la boule $B(x_e, \varepsilon)$ si son point de départ appartient à une boule $B(x_e, r)$. La stabilité asymptotique dans la boule inclut cette propriété, mais spécifie de plus que toute trajectoire initialisée $B(x_e, r)$ converge vers $x(t=0)$. Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre [19].

4.5.1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Le principe de stabilité selon Lyapunov repose sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Cette énergie est représentée généralement par une fonction $V(x(t))$ de l'état x du système. Le signe de cette fonction et sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donne une information sur la stabilité du système. Le principal résultat de la théorie de stabilité de Lyapunov montre que pour un système autonome $\dot{x} = f(x)$, l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction positive vérifiant les conditions suivantes [18]:

$$\begin{cases} i) V(x(t)) > 0, \forall x \neq 0 \\ ii) \dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0 \\ iii) V(0) = 0 \text{ et } \|x\| \rightarrow \infty, V(\infty) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.8)$$

4.5.2 Fonction de Lyapunov quadratique

L'utilisation de la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à une fonction $V(x(t))$.

Cependant, il existe des familles de fonction de Lyapunov souvent utilisées, le choix plus classique consiste à utiliser une forme quadratique:

$$v(x) = x^T P x, P > 0 \quad (4.9)$$

Ce type de fonction, adoptée pour étudier la stabilité des systèmes linéaires et aussi utilisé dans le cas des multi-modèles [12].

4.6 Stabilité et stabilisation quadratique du multi-modèles

4.6.1 Stabilité globale

L'approche présentée dans ce mémoire repose sur les fonctions de Lyapunov

quadratiques. Il s'agit de chercher une matrice symétrique définie positive et sa fonction de Lyapunov quadratique associée telles que les (4.8) garantissant les propriétés de stabilité sont vérifiées.

Considérons le modèle T-S de la forme:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4.10)$$

$$\mu_i(\xi(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad (4.11)$$

Le multi-modèles en boucle ouverte correspondant à (4.10) est:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (4.12)$$

Théorème 2 [20]: Le multi-modèle est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que les LMI suivantes sont réalisables.

$$\begin{aligned} A_i^T P + P A_i &< 0, i = 1, \dots, r \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ce résultat est obtenu en dérivant la fonction quadratique (4.9). L'existence d'une matrice P dépend de deux conditions.

4.6.2 Stabilisation par retour d'état non linéaire

Dans le cadre des multi-modèles, plusieurs techniques pour élaborer des lois de commande existent dans la littérature. La plupart reposent sur l'approche de Lyapunov quadratique [12]. L'avantage de cette approche est sa facilité de mettre en œuvre. Son inconvénient est qu'elle conduit à des conditions de stabilité souvent conservatives.

Pour stabiliser les multi-modèles, la loi de commande $u(t)$ de type PDC est souvent utilisée [21]. Celle-ci correspond à un retour d'état non linéaire qui utilise les mêmes fonctions $\mu_i(\xi(t))$ que le modèle (4.1) et des gains constants k_j tels que :

$$u(t) = \sum_{j=1}^r \mu_j(\xi(t)) k_j x(t) \quad (4.14)$$

En appliquant la loi de commande (4.14) au modèle (4.1), la boucle formée prend la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i + B_i k_j) x(t) \quad (4.15)$$

Les conditions de stabilité du système en boucle fermée reviennent à chercher les gains de commande tels que la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique $v(x) = x^T P x$, $P > 0$ soit négative. La dérivée de la fonction le long des trajectoires du multi-modèles (4.15) s'écrit:

$$\dot{v}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) x^T \left[(A_i + B_i k_j)^T P + P (A_i + B_i k_j) \right] x < 0 \quad (4.16)$$

En posant $G_{i,j} = (A_i + B_i k_j)$, les conditions de stabilisation suffisantes sont énoncées comme suit :

Théorème 3: [14]

Pour le système (4.1), s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ vérifiant les inégalités suivantes:

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0 \quad (4.17)$$

pour tout $i, j = 1, 2, \dots, r$. L'équilibre du système en BF est globalement asymptotiquement stable.

La détermination des gains K_j , ($j = 1, 2, \dots, r$), de la loi de commande PDC passe alors par la transformation des conditions du théorème en un problème équivalent prenant la forme d'inégalités matricielles linéaires pouvant être résolues par les outils numériques existants. Cette transformation correspond à de simples changements de variables bijectifs $Q = P^{-1}$ et $K_j = F_j P^{-1}$. En multipliant à droite par la matrice Q et à gauche par sa transposée (congruence), on obtient les expressions LMI suivantes en fonction des variables Q et F_j :

$$A_i Q + Q A_i - B_i F_j - F_j^T B_i^T < 0 \quad (4.18)$$

4.7 Autres lois de commande

Il existe autre lois de commande pour stabiliser les systèmes non linéaires décrits par les multi-modèles comme:

PPDC (Proportional PDC), CDF (compensation et Division pour modèles Flous) et OPDC (loi de commande basée sur le retour de sortie).

4.8 Normes de signaux et de systèmes LTI / LPV

Nous définissons ici les normes H_2 et H_∞ [24]

Signaux :

Définition: sur l'espace \mathfrak{T}_2 des signaux de carré sommable sur $(0, \infty)$, on définit le produit scalaire :

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)dt \quad (4.19)$$

qui induit la norme de l'énergie

$$\|x(s)\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} x(t)^T x(t)dt \right)^{1/2} \quad (4.20)$$

La transformée de fourier envoie \mathfrak{T}_2 sur l'espace H_2 des fonctions $X(s)$ analytique dans $R_e(s) \geq 0$ et de carré sommable. Par l'identité de parseval, on a

$$\|x(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

Pour les signaux admettant une transformée de Laplace $X(s)$ analytique dans $R_e(s) \geq 0$, on considère aussi la norme

$$\|x(s)\|_\infty = \sup_{R_e(s) \geq 0} \|X(s)\| = \sup_{\omega} \|X(j\omega)\| \quad (4.22)$$

On appelle H_∞ l'espace des fonctions $X(s)$ analytiques dans $R_e(s) \geq 0$ et telles que $\|x(s)\|_\infty < \infty$.

4.8.1 Système LTI

Soit S un système LTI ayant comme vecteurs d'entrées $u(t)$, de sortie $y(t)$ et de fonction de transfert $G(s)$. On s'intéresse aux deux normes suivantes sur la relation entrée/sortie.

Définition : norme H_2 [24]:

$$\|G(s)\|_2 = \sup_{U(s) \in H_2} \frac{\|Y(s)\|_\infty}{\|U(s)\|_\infty} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega))dt \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

Définition : norme H_∞ :

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{U(s) \in H_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (4.24)$$

où σ_{\max} représente la plus grande valeur singulière.

Interprétations [24]:

Norme H_2 : c'est l'énergie en sortie du système lorsqu'on injecte un Dirac en entrée (cas SISO), où plus généralement un bruit blanc vérifiant $U(j\omega)U^*(j\omega) = I$ (densité spectrale uniforme).

Norme H_{∞} : c'est la norme matricielle induite par la norme des fonctions vectorielles de H_2 . Dans le cas linéaire SISO, elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle $G(j\omega)$.

4.9 Commande H_{∞}

La synthèse H_{∞} est un problème d'atténuation de perturbation. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation $w(t)$ sur le comportement du système. Le signal $w(t)$ est supposé d'énergie finie et sa taille est mesurée en norme d'un vecteur "coût" $z(t)$, on peut agir sur le système par une commande $u(t)$ et on dispose d'une mesure $z(t)$. Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande $u(t)$ qui minimise l'impact de $w(t)$ sur $z(t)$.

On mesure cet impact par le rapport $\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$. La stabilité interne du système bouclé devra

bien sûr être assurée [24].

Ce problème est représenté schématiquement par la figure 4.1

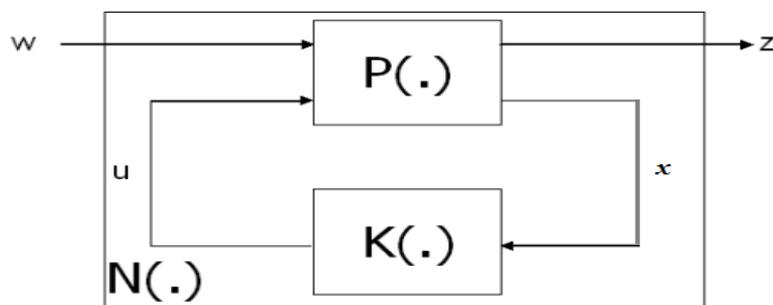


Figure 4.1 : problème H_{∞} standard général [24].

L'opérateur $P(\cdot)$ (L2 dans L2) décrit les interconnexions entre $w(t), u(t), z(t), x(t)$.

En observant que le ratio $\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$ est dans le pire des cas $\|N(\cdot)\|_\infty$ le problème décrit ci-

dessus peut se formuler mathématiquement comme suit :

4.9.1 Problème H_∞ Optimal : minimiser $\|N(\cdot)\|_\infty$ sur l'ensemble des contrôleurs $K(\cdot)$ qui stabilisent le système $N(\cdot)$ de manière interne.

Le minimum est noté γ_{opt} et appelé gain " H_∞ " optimal. Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important :

4.9.2 Problème H_∞ Sous-Optimal : étant donné $\gamma > 0$, trouver un compensateur $K(\cdot)$ qui stabilise le système $N(\cdot)$ de manière interne et assure $\|N(\cdot)\|_\infty < \gamma$.

4.9.3 Stabilisation H_∞ de multimodèles

Dans cette section, nous exposons les conditions LMI de stabilisation H_∞ du multi-modèles via la commande PDC.

Considérons un système non linéaire représentant sous la forme d'un multi-modèles comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_{i1} u(t) + B_{i2} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (C_{i1} x(t)) \end{cases} \quad (4.25)$$

avec :

$x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur de commande, $z(t) \in R^m$ est le vecteur d'état commandable, $w(t) \in \mathfrak{S}_2$ est vecteur des variables perturbatrices, $\xi(t) \in R^q$ est le vecteur de variable de décision.

Tel que :

$\mathfrak{S}_2 \triangleq \{w(t) \in R^{n\omega} \mid \|w\|_2 \leq \bar{w}, \bar{w} > 0\}$ est un signal d'énergie finie).

En supposant :

$$A_\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i, B_{1\mu} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) B_{i1}, B_{2\mu} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) B_{i2}$$

$$C_{1\mu} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) C_{i1}, K_\mu = \sum_{j=1}^r \mu_j(\xi(t)) K_j.$$

Le système en boucle fermée (4.25)-(4.25) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_\mu + B_{2\mu} K_\mu) x(t) + B_{1\mu} w(t) \\ z(t) = C_{1\mu} x \end{cases} \quad (4.26)$$

4.9.4 Synthèse H_∞ d'une commande PDC stabilisante

Notre objectif est de trouver un retour d'état statique qui garantit la stabilité du système bouclé (4.26) et d'élimine l'effet de perturbation.

Pour atteindre ce but, ici on utilise la norme \mathfrak{F}_2 :

$$\frac{\|z(t)\|^2}{\|w(t)\|^2} \leq \gamma^2 \quad (4.27)$$

Le problème d'estimation du domaine d'attraction et de minimiser l'effet du perturbation est équivalent du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \gamma \\ J = \dot{v} + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

On dérive la fonction (4.9)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (A_\mu x + B_{1\mu} K_\mu x + B_{2\mu} w)^T P x + x^T P (A_\mu x + B_{1\mu} K_\mu x + B_{2\mu} w) \\ &= x^T (A_\mu^T P + B_{1\mu}^T K_\mu^T P + B_{2\mu}^T w^T P) x + x^T (P A_\mu + P B_{1\mu} K_\mu + P B_{2\mu} w) x \end{aligned} \quad (4.29)$$

On a :

$$Q = P^{-1}, F_j = K_\mu Q$$

On trouve

$$(A_\mu Q + B_{1\mu} F_j + (*)) < 0$$

d'après l'équation (4.28)

$$J = x^T (P A_\mu + P B_{1\mu} K_\mu + (*)) x + w^T B_{2\mu}^T P x + x^T P B_{2\mu} w + z^T z - \gamma^2 w^T w \quad (4.30)$$

d'après le théorème de Schur on obtient :

$$J = \begin{bmatrix} x^T \\ w^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (PA_\mu + PB_{1\mu}K_\mu + (*)) & PB_{2\mu} \\ PB_{2\mu} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + z^T z < 0 \quad (4.31)$$

on met :

$$\begin{bmatrix} (PA_\mu + PB_{1\mu}K_\mu + (*)) & PB_{2\mu} \\ PB_{2\mu} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} = \Omega$$

d'après le théorème de Schur sur l'équation (4.31) on trouve :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} x^T \\ w^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & C_{1\mu}^T \\ C_{1\mu}^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

On remplace Ω dans l'équation (4.32) on trouve :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (PA_\mu + PB_{1\mu}K_\mu + (*)) & B_{2\mu} & C_{1\mu}^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

Posons : $P = Q^{-1}, F_j = K_\mu Q$

En multipliant à gauche et à droite de l'équation Γ par $R = \text{diag}(Q, I, I)$, on obtient :

$$R = \begin{bmatrix} (A_\mu Q + B_{1\mu}F_j + (*)) & B_{2\mu} & QC_{1\mu}^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

Remarque

- (*) : C'est le transposée d'équation avant d'elle
- Les matrices Γ , R sont symétriques

Théorème 4: Pour le système donné (4.25), le point d'équilibre de système en boucle fermée sous la commande (4.14) est asymptotiquement stable et réalise un niveau d'atténuation de perturbation γ , s'il existe une matrice symétrique $Q > 0$ et des matrices $j \in R^{m \times p}$ solution au problème d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} \min_{Q, F_j} \gamma, \text{ Pour } i, j \dots \dots \dots j \in R^{m \times p} \\ S_{ij} < 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

4.10 Application de la commande H_∞ de type T-S basé sur le système de suspension

Dans cette section, nous avons présenté les résultats d'application de la commande H_∞ sur le suspension d'automobile (quart, demi et complet) véhicule en présence d'une perturbation de dos d'âne d'amplitude 0.25m (Figure 2.5).

Les paramètres de commande obtenue par la réalisation des LMI, des deux modèles (quart et demi-véhicule) utilisés lors de la simulation sont illustrés par les tableaux (4.1) et (4.2) respectivement.

$\gamma = 0.0145$
$K_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -6.5180 & 0.3586 & -0.1458 & -0.0082 \end{bmatrix}$
$K_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -6.5180 & 0.3586 & -0.1458 & -0.0082 \end{bmatrix}$

Tableau 4.1 : Réponse du système en boucle fermé. dans le cas de modèle quart de véhicule.

$\gamma = 1.0789 \times 10^{-13}$
$K_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.4019 & -1.4065 & -0.0005 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0218 & 0.0283 \\ 0.0709 & 0.0711 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0014 \end{bmatrix}$
$K_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.4019 & -1.4065 & -0.0005 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0218 & 0.0283 \\ 0.0710 & 0.0711 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0014 \end{bmatrix}$
$K_3 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.4019 & -1.4065 & -0.0005 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0218 & 0.0283 \\ 0.0709 & 0.0711 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0014 \end{bmatrix}$
$K_4 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.4019 & -1.4065 & -0.0005 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0218 & 0.0283 \\ 0.0709 & 0.0711 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0014 \end{bmatrix}$

Tableau 4.2 : Réponse du système en boucle fermé. dans le cas de modèle de demi-véhicule.

4.10.1 Quart de véhicule

La figure 4.2 représente la réponse du système en boucle fermé. Dans le cas de quart de véhicule commandé par H_∞ via une perturbation sous forme d'une dos d'âne (figure 2.5).

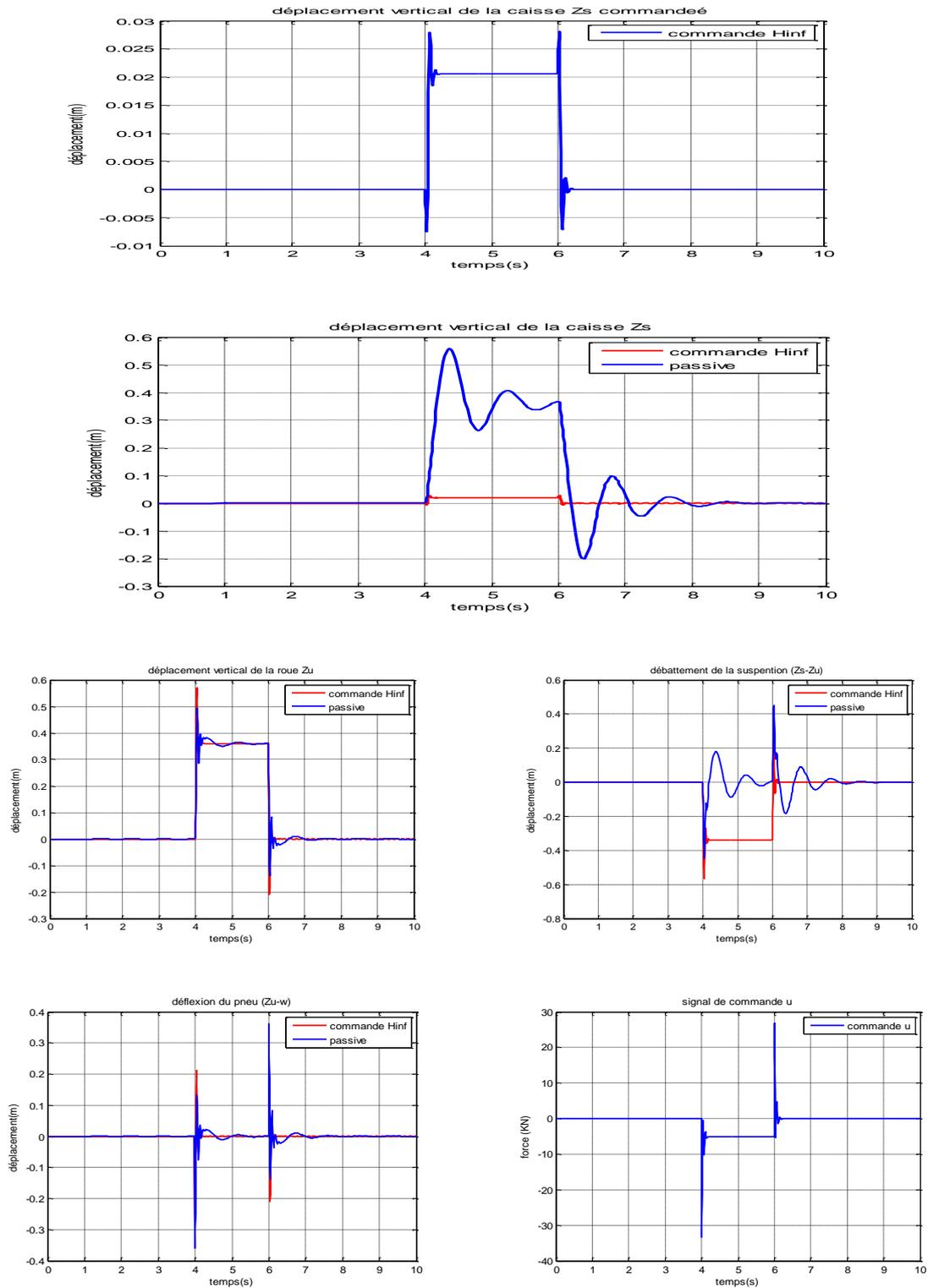


Figure 4.2 : Résultats de commande H_∞ basée sur le retour d'état statique de quart de véhicule.

4.10.2 Demi- véhicule

La figure 4.3 représente la réponse du système en boucle fermé de commande H_∞ pour le cas de modèle demi-véhicule.

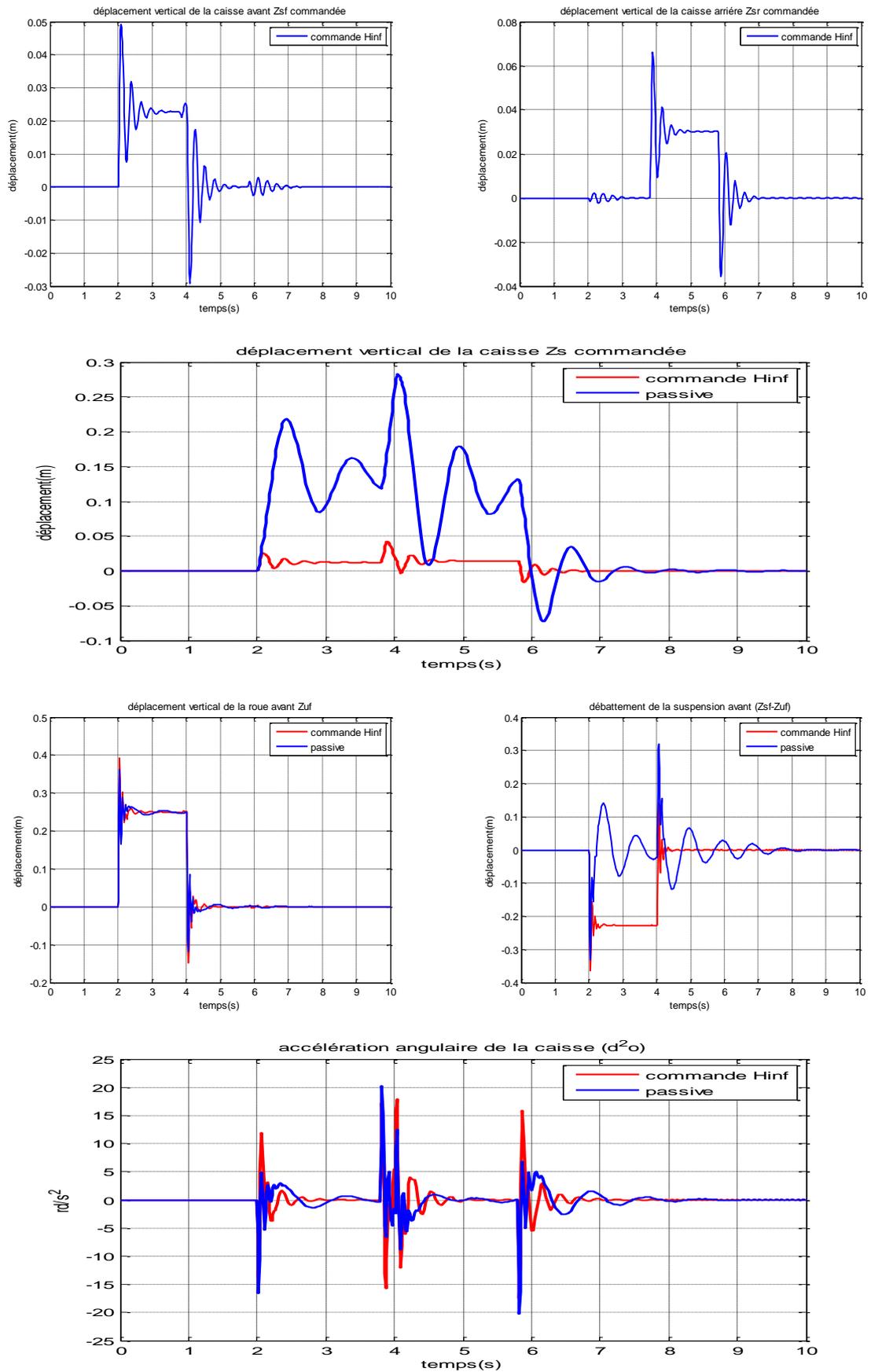


Figure 4.3 : Réponse du système en boucle fermé, dans le cas de modèle demi-véhicule.

D'après la figure 4.2 et 4.3, on remarque que la commande H_∞ permet de diminuer efficacement le déplacement de la masse suspendue, la déflexion du pneu est améliorée en minimisant à la fois les oscillations de la roue et caisse ce qui permet d'améliorer la tenue de la route et le confort aux passagers et même au véhicule.

4.10.3 Véhicule complet

Dans ce cas, le nombre des LMI trouvées sont 256 contraintes, nous avons trouvé infaisabilité (pas de solution). En effet, Il est bien connu que trouver une simple fonction de Lyapunov commune pour tous les modèles locaux peut être très difficile, surtout pour un grand nombre de ces derniers. Et pour aller loin du pessimisme de l'approche quadratique, nous proposons comme perspective de ce travail d'utiliser les fonctions de Lyapunov non quadratiques (multi-quadratique)

4.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les outils et les théorèmes nécessaires pour la synthèse d'une loi de commande multi-modèles (stabilité au sens Lyapunov, commande PDC et commande H_∞ basée sur le retour d'état statique). Par la suite, des conditions suffisantes de stabilisation H_∞ quadratique des multi-modèles perturbés sont présentées et sont écrites en termes LMI. Dans le cas de modèle de suspension (quart et demi) véhicule, les résultats de simulation montrent que l'application de cette loi de commande permet de réduire efficacement les vibrations par rapport au cas passif et permet d'améliorer la tenue de la route et le confort aux passagers. Alors que, le résultat obtenu dans le cas de véhicule complet montre une autre fois que l'approche quadratique est parfois très conservatives, surtout pour un grand nombre de modèles locaux. On y conclut que l'utilisation de fonctions de Lyapunov non quadratiques constitue un autre moyen pour relâcher les conditions quadratiques.

Conclusion générale

Nous avons abordé dans ce travail, quelques aspects de la commande robuste pour le contrôle global de la suspension automobile, dans le cadre de l'amélioration du compromis confort/tenue de route pour les véhicules automobiles. En effet, le chapitre 1 est consacré à rappeler des généralités sur les systèmes de suspension. Au deuxième chapitre, on a donné la modélisation du système : nous avons présenté respectivement, les modèles quart véhicule, demi véhicule de type bicyclette, et complet à 7ddl. Au troisième chapitre, nous avons exposé la représentation multi-modèles et les différentes méthodes pour obtenir la structure multi-modèles. On y conclut ce chapitre par la validation de cette représentation sur nos systèmes. Le dernier chapitre décrit au développement et à la validation de quelques schémas de commande robuste pour le contrôle global de la suspension.

L'application des théorèmes et commandes cités précédemment dans la mémoire nous permet de conclure que :

- L'efficacité de l'approche multi-modèles dans la synthèse et la représentation de systèmes non linéaire.
- L'efficacité des approches LMI quadratique dans l'analyse de stabilité des multi-modèles.
- L'efficacité des approches H_∞ à éliminer l'effet de perturbation.

Au vu des résultats obtenus, un certain nombre de vues peuvent être identifiées, les suivantes sont indiquées: la valeur de la masse de voitures n'est pas constante qui pose un problème de la robustesse et de loi de commande.

- La prise en compte d'autre type de non linéarité du système comme les angles de tangage, lacet et roulis, la non linéarité d'actionneur avec la représentation multi-modèle.
- Le choix d'autre candidates de Lyapunov moins conservatives telle que la fonction de Lyapunov multi-quadratique.
- Le choix d'autre loi de commandes récentes comme la loi de commande non-PDC.

Bibliographie

- [1] Lekbir.Z et Boudjir.H, "commande H_{∞} de systèmes décrits par multimodèles avec contraintes sur l'entrée : Application sur la suspension automobile", PFE-Université de Jijel, Jijel 2010
- [2] Damien.S,"sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles",Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG. Grenoble 2001
- [3] Rouchaila.D, " Modeling and Control of active suspension for a full car model ", Master de l'ingénieur, Université de la technologie, Malaisie 2008.
- [4] Emanuele G,Tudor S, Charles WS, Gheorghe G et Marius G,"Semi-active suspension control",Springer-Verlag London limited ,ISBN 978-1-84800-230-2,2008.
- [5] Lamamra.B,"control semi actif d'une suspension d'un véhicule terrestre", PFE-Université de Biskra, Biskra 2015.
- [6] Hammoudi.M, "Contribution a la commande et a l'obsevation dans l'association convertisseurs machine", Thèse de doctorat- université Mohammed Khider–Biskra.Octobre2015.
- [7] Gasso K, "Identification des systèmes dynamiques non linéaires : approche multimodèle", Thèse de doctorat de l'INPL, 2000.
- [8] Takagi T et Sugeno M. "Fuzzy identification of systems and it applications to modeling and control", Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1985.
- [9] Sleiman.H,"Système de suspension semi-active a base de fluide magnétorhéologique pour l'automobile", Thèse de doctorat-université de Paris, France 2010.
- [10] Ouahi.M, "Observation de système à entrées inconnues, applications à la dynamique automobile" Thèse Doctorat-université de Limoges, France 2011.

- [11] Bouatit.H, "*La commande H_{∞} de systèmes décrits par multimodèles : Application sur les machines synchrones a aimants permanents*", PFE-Université de Jijel,Jijel 2013.
- [12] Chadli.M, "Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles" ThèseDoctorat-Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL.France 2002.
- [13] Rizzo.A," L'approche crone dans le domaine des architectures complexe des suspension de véhicules automobiles : la suspension crone hydrative" , ThèseDoctorat-Université de bordeaux. France 2002.
- [14] Nady.k et Maria.A," Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic :Application a une station d'épuration", Thèse Doctorat-Université de Nancy.France 2010.
- [15] Zahaf.A, " Commande prédictive floue sous contraintes :Applications a des systèmes non linéaires" , PFE-Université de Constantine1.Algérie 2014.
- [16] Arzelier-D.Peaucelle, "Cours Analyse des asservissements continus non linéaires"disponible sur le site : <https://fr.scribd.com/document/109078209/Cours-Non-lineaire-LAAS> .
- [17] Alessandro.Z, "Sur la commande robuste de suspensions automobiles en vue du contrôle global de châssis", Thèse de doctorant, Institut National Polytechnique de Grenoble – INPG.France, 2005.
- [18] Saifia.D, "Commande des systèmes non linéaires avec contraintes sur l'entrée " , Thèse de doctorant-université de jijel,jijel,2013
- [19] Park J.H et Kim Y.S., "Decentralized variable structure for active suspensions based on a full car model", IEEE international conference on control Applications,pp.383 387,1-4Septembre 1998.Trieste,Italy.
- [20] Tanaka.K,Nishimura.M.,et Wang H.O. "multi-objective fuzzy control of high rise /high speed elevators using lmis". American control conference, Juin 1998.
- [21] Tanaka.K ,et Wang H.O. " fuzzy control systems design and analysis :A linear matrix inequality aproache. " , John Wiley and Sons Inc 2001.

[22] Samuel.G, " étude d'un système de contrôle pour suspension automobile. ", PFE,université de Québec. Canada,Avril 2006.

[23] Morère.Y "Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type takagi-sugeno", Thèse de doctorant, Université de valenciennes. France Janvier 2001.

[24] Zin.A, "Sur la commande robuste de suspensions automobiles en vue du contrôle global de châssis ", Thèse de doctorant, Université de Grenoble. France, Novembre 2005.

[25] Chadli.M., Maqjuni D. et Ragot J, "Static output feedback for Takagi-Sugeno systems : an LMI approach. " , In Proc.of the 10 th Mediterranean conference on Control and Automation (MED'02), Lisbona. Portugal 2002.

[26] Benchaaben.A, Tijani.Z et Bechka.L, " commande du système de suspension d'un véhicule ", PFE- Université Kasdi Merbah, Ouargla 2017.

[27] N .Said, " commande Multimodèle de suspensions Automobiles ", Rapport de stage de recherche,Amiens, 20 Juin 2008.