

N° d'ordre :

N° de séries :



Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de
Master
Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Discrète

Thème

Suites log-concave de fonctions symétriques

Présenté par :

Khadidja BELADJILA Souheyla DROUCHE

Devant le jury :

Président	: Aderrahmane BOUHAIR	Université de Jijel
Encadreur	: Moussa AHMIA	Université de Jijel
Examineur	: Mourad CHELGHAM	Université de Jijel

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier le bon dieu de nous avoir guidé et donné la force et la volonté pour atteindre notre objectif. Nous remercions nos très chers parents pour leurs soutiens et leurs patiences.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur Mr M. AHMIA pour sa disponibilité, ses précieux conseils et motivations qui nous ont gardé sur le droit chemin afin de réaliser ce modeste travail.

Nous remercions le Mr A. BOUCHAIR, d'avoir fait l'honneur de présider notre jury de mémoire. Nous veu aussi remercions Mr M. CHELGHAM, pour l'honneur qu'il nos a fait en acceptant de participer à ce jury.

Sans oublier tous les enseignants d'avoir contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques. Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

MERCI

Souheyla et Khadidja

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Les fonctions symétriques	2
1.1.1 Les fonctions symétriques élémentaires	3
1.1.2 Les fonctions symétriques complètes	5
1.1.3 Partages et diagramme de Young	8
1.1.4 Tableaux de Young	10
1.1.5 Lien entre les tableaux de Young et les fonctions symétriques	11
1.1.6 Les fonctions de Schur et le déterminant de Jacobi-Trudi	11
1.2 Outils de base de combinatoire	13
1.2.1 Factorielle, factorielles montante et descendante	13
1.2.2 Le coefficient binomial	14
1.2.3 Arrangements	15
1.2.4 Permutations	15
1.2.5 Partitions	16
1.2.6 Fonction ou série génératrice	17
2 Suites remarquables	18
2.1 Les nombres de Stirling	18
2.1.1 Les nombres de Stirling de première espèce	18
2.1.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce	23
2.1.3 Lien entre les deux types de nombres de Stirling	28
2.2 Les nombres Eulérien	28
2.3 Le q -analogue des suites remarquables	28
2.3.1 Les coefficients q -binomiaux	28

2.3.2	Les nombres q -Stirling	30
3	La log-concavité des suites de fonctions symétriques	33
3.1	Préliminaires sur les suites log-concaves	33
3.1.1	La log-concavité	33
3.1.2	La q -log-concavité des suites de polynômes	35
3.1.3	Approche des chemins de Gessel et Viennot	36
3.2	Résultats principaux	40
3.3	Applications	49
	Conclusion	50

Introduction

La combinatoire représente depuis quelque temps un domaine de recherche très intéressant et elle sera prometteuse, via ces techniques et outils pratiques, afin de prouver en générale, des propriétés combinatoires.

Un grand nombre de suites d'intérêt combinatoire sont log-concaves. Il s'agit de propriétés difficiles à montrer et non conservées par des transformations linéaires, en général. Parmi les applications combinatoires, nous citerons à titre non exhaustif, la coloration des graphes, la théorie des probabilités et la complexité algorithmique, l'économétrie et d'autres domaines des mathématiques appliquées, voir Butler [8] et Stanley [20]. En vue de ces développements, des propriétés combinatoires associées à la log-concavité ont été établies.

Les fonctions symétriques se situent dans le domaine de combinatoire où la motivation principale est le calcul de certaines identités issues des mathématiques discrètes ou de la physique, à l'aide des objets combinatoires. De nos jours, l'études des fonctions symétriques se situe à la croisé de la combinatoire, de la physique et de l'algèbre.

Notre travail consiste à étudier la log-concavité (respectivement la q -log-concavité forte) de certaines suites de coefficients binomiaux, des nombres de Stirling en deux espèces (respectivement leurs q -analogues). Pour vérifier ces deux propriétés, on doit utiliser les techniques de preuves injectives. Toutefois utiliser la fonction symétrique appropriée qui interprète ces suites est nécessaire pour pouvoir appliquer ces techniques combinatoires.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Le premier chapitre, regroupe les notions des fonctions symétriques, tableaux de Young, la fonction de Schur et le déterminant de Jacobi-Trudi, ainsi le lien entre eux. Nous abordons aussi les outils de base de combinatoire : factorielle, combinaison, permutation, série génératrice...etc.

Au deuxième chapitre, nous introduisons les suites qui sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire et complète, en particulier les nombres de Stirling de première et de deuxième espèce seront présentés avec quelques identités remarquables.

Au dernier chapitre, nous prouvons que les différentes suites de fonctions symétriques élémentaires et complètes sont forte log-concaves, ce qui nous permet d'établir la q -log-concavité forte de certaines suites de coefficients q -binomiaux et nombres de q -Stirling. La principale technique utilisée est une interprétation combinatoire des déterminants utilisant des chemins de réseau dus à Gessel et Viennot [14]. Les résultats établis dans ce chapitre sont dus au travail de Sagan [18].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on présente des outils et préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Nous commençons par définir les fonctions symétriques. Ensuite nous introduisons les outils de base de combinatoire. Pour plus d'informations voir [3, 4, 5, 6, 15].

1.1 Les fonctions symétriques

Définition 1.1. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ en n variables est symétrique si elle est invariante par permutation de ses variables, c'est-à-dire pour toute permutation σ_n la relation suivante est vérifiée :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Remarque 1.2. Pour $n = 1$, toute fonction est symétrique.

Exemple 1.3. 1. La fonction $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1x_2$ est symétrique car $f(x_2, x_1) = x_2 + x_1 + x_2x_1 = f(x_1, x_2)$.

2. La fonction $g(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ n'est pas symétrique car $g(x_2, x_1) = x_2^2x_1 \neq g(x_1, x_2)$.

Considérons l'équation de degré n :

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n) = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j,$$

qui admet n racines réelles ou complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Après le développement on obtient

$$x^n - \beta_1x^{n-1} + \beta_2x^{n-2} - \beta_3x^{n-3} + \cdots + (-1)^n\beta_n = 0,$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sont des polynômes homogènes et symétriques en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on les note : $\beta_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. On peut les noter $\beta_i(n)$ (si on veut seulement préciser le nombre de racines), ou encore $\beta_i(f)$, f étant le polynôme

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

Ces polynômes β_i sont appelés *fonctions symétriques élémentaires*.

1.1.1 Les fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.4. Soient n, k deux entiers naturels. On appelle la k -ième fonction symétrique élémentaire à n variables la fonction définie par :

$$e_k(n) = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n}, \quad (1.1)$$

avec $i_1, i_2, \dots, i_n = 1$ ou 0 . Tel que $e_0(n) = 1$ et $e_k(n) = 0$ pour $k > n$.

Exemple 1.5. 1. Pour $n = 2$, on aura les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} e_0(2) = 1 \\ e_1(2) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ e_2(2) = \lambda_1 \lambda_2. \end{cases}$$

2. Ainsi pour $n = 4$, on obtient :

$$\begin{cases} e_0(4) = 1 \\ e_1(4) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ e_2(4) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 \\ e_3(4) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ e_4(4) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4. \end{cases}$$

Proposition 1.6. Les relations suivantes sont vérifiées

1. $e_k(n+1) = \lambda_{n+1} e_{k-1}(n) + e_k(n)$.
2. $e_k(n) = \lambda_n e_{k-1}(n-1) + \lambda_{n-1} e_{k-1}(n-2) + \dots + \lambda_{n-i} e_{k-1}(n-i+1) + \dots + \lambda_k e_{k-1}(k-1)$.

Preuve. 1. On a

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} e_{k-1}(n) + e_k(n) &= \lambda_{n+1} \sum_{i_1+\dots+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} + \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+\dots+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+\dots+i_n+1=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+\dots+i_{n+1}=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^{i_{n+1}}, \quad i_{n+1} = 0 \vee 1 \\ &= e_k(n+1). \end{aligned}$$

2. De la relation précédente, on a

$$\begin{aligned} e_k(n) &= \lambda_n e_{k-1}(n-1) + e_k(n-1) \\ &= \lambda_n e_{k-1}(n-1) + \lambda_{n-1} e_{k-1}(n-2) + e_k(n-2) \\ &= \lambda_n e_{k-1}(n-1) + \lambda_{n-1} e_{k-1}(n-2) + \lambda_{n-2} e_{k-1}(n-3) + e_k(n-3) \\ &= \lambda_n e_{k-1}(n-1) + \lambda_{n-1} e_{k-1}(n-2) + \lambda_{n-2} e_{k-1}(n-3) \\ &\quad + \dots + \lambda_{n-i} e_{k-1}(n-i-1) + \dots + \lambda_k e_{k-1}(k-1). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7. *Les fonctions symétriques élémentaires peuvent se définir comme coefficients de la série :*

$$E(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e_k(\lambda) z^k = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \lambda_i z), \quad (1.2)$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.

Preuve. On va montrer par induction sur n .

Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 (1 + \lambda_i z) &= (1 + \lambda_1 z)(1 + \lambda_2 z) \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)z + \lambda_1 \lambda_2 z^2 \\ &= e_0(2) + e_1(2)z + e_2(2)z^2 \\ &= \sum_{k=0}^2 e_k(2) z^k. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n , et la montrer pour $(n + 1)$ c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n+1} e_k(n+1) z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i z).$$

On a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i z) &= \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i z)(1 + \lambda_{n+1} z) \\ &= \sum_{k=0}^n e_k(n) z^k (1 + \lambda_{n+1} z) \\ &= \sum_{k=0}^n e_k(n) z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^n e_k(n) z^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n e_k(n) z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1}(n) z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (e_k(n) + \lambda_{n+1} e_{k-1}(n)) z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} e_k(n+1) z^k. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$E(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e_k(\lambda) z^k = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \lambda_i z). \quad (1.3)$$

D'où le résultat. ■

1.1.2 Les fonctions symétriques complètes

Définition 1.8. Soient n, k deux entiers naturels. On définit la k -ième fonction symétrique complète à n variables par :

$$h_k(n) = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n},$$

avec $i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0$.

Exemple 1.9. 1. Pour $n = 2$, on aura les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} h_0(2) = 1 = e_0 \\ h_1(2) = \lambda_1 + \lambda_2 = e_1 \\ h_2(2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \\ h_3(2) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^2\lambda_1 \\ \vdots \end{cases}$$

2. Ainsi pour $n = 3$, on obtient :

$$\begin{cases} h_0(3) = 1 \\ h_1(3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ h_2(3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ h_3(3) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Proposition 1.10. Les relations suivantes sont vérifiées

1. $h_k(n+1) = \lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n)$.
2. $h_k(n+1) = \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1}h_1(n) + \dots + \lambda_{n+1}h_{k-1}(n) + h_k(n)$.

Preuve. 1. On a

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n) &= \lambda_{n+1} \sum_{i_1+\dots+i_{n+1}=k-1} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^{i_{n+1}} + \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+\dots+i_{n+1}=k-1} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^{i_{n+1}} \lambda_{n+1} + \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+\dots+i_n+i_{n+1}+1=k} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_{n+1}^{i_{n+1}+1} + \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^0. \end{aligned}$$

On sait que $i_{n+1} \geq 0$, alors $i_{n+1} + 1 \geq 1$. On pose alors $i'_{n+1} = i_{n+1} + 1$ ou $i'_{n+1} = 0$, on aura donc $i'_{n+1} \geq 0$ et

$$\lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i'_{n+1}=k} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n} \lambda_{n+1}^{i'_{n+1}} = h_k(n+1).$$

Il s'ensuit que

$$h_k(n+1) = \lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n).$$

2.

$$\begin{aligned}
 h_k(n+1) &= \lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n) \\
 &= \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}h_{k-2}(n+1) + h_{k-1}(n)) + h_k(n) \\
 &= \lambda_{n+1}^2h_{k-2}(n+1) + \lambda_{n+1}h_{k-1}(n) + h_k(n) \\
 &= \lambda_{n+1}^3h_{k-3}(n+1) + \lambda_{n+1}^2h_{k-2}(n) + \lambda_{n+1}h_{k-1}(n) + h_k(n) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \lambda_{n+1}^i h_{k-i}(n+1) + \lambda_{n+1}^{i-1} h_{k-(i-1)}(n) + \cdots + \lambda_{n+1}^2 h_{k-2}(n) \\
 &\quad + \lambda_{n+1} h_{k-1}(n) + h_k(n), i < k \\
 &\quad \vdots \\
 &= \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1} h_1(n) + \lambda_{n+1}^{k-2} h_2(n) + \cdots + \lambda_{n+1} h_{k-1}(n) + h_k(n).
 \end{aligned}$$

■

Proposition 1.11. *Les fonctions symétriques complètes peuvent se définir comme coefficients de la série :*

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(\lambda) z^k = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - \lambda_i z)^{-1}. \quad (1.4)$$

Preuve. On raisonne par induction sur le nombre des variables.

Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned}
 H_2(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(2) z^k = h_0(2) + h_1(2)z + h_2(2)z^2 + \cdots \\
 &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)z + (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)z^2 + \cdots \\
 &= (1 + \lambda_1 z + \lambda_1^2 z^2 + \cdots)(1 + \lambda_2 z + \lambda_2^2 z^2 + \cdots) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_1 z)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_2 z)^k \right) \\
 &= \frac{1}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)} \\
 &= \prod_{i=1}^2 (1 - \lambda_i z)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vérifiée pour n , c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k(n) z^k = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i z)^{-1},$$

et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. On a

$$h_k(n+1) = \lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(n+1)z^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n))z^k \\
 &= \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} h_{k-1}(n+1)z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(n)z^k \\
 &= \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} h_{k-1}(n+1)z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(n)z^k \\
 &= \lambda_{n+1}z \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(n+1)z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(n)z^k \\
 &= \lambda_{n+1}z \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \lambda_i z)^{-1} + \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i z)^{-1} \\
 &= \frac{\lambda_{n+1}z + (1 - \lambda_{n+1}z)}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - \lambda_i z)} \\
 &= \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \lambda_i z)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(\lambda)z^k = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - \lambda_i z)^{-1}.$$

D'où le résultat. ■

Les liens entre les fonctions symétriques élémentaires et complètes sont donnés dans la proposition suivante.

Proposition 1.12. *Les relations suivantes sont vérifiées*

1. $H(z)E(-z) = 1.$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k e_k h_{n-k} = 0, \forall k \geq 1.$

Preuve. 1. Par Proposition 1.7 et Proposition 1.11.

2. On a

$$\begin{aligned}
 H(z)E(-z) = 1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^k \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j e_j z^j = 1 \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j h_k e_j z^{k+j} = 1 \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^j h_{n-j} e_j z^n = 1 \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_n z^n = 1 \text{ avec } c_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j h_{n-j} e_j.
 \end{aligned}$$

Par identification on trouve

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_n = 0, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

D'où le résultat. ■

1.1.3 Partages et diagramme de Young

Les tableaux de Young sont des objets combinatoires qui jouent un rôle important en théorie des représentations du groupe symétrique et dans la théorie des fonctions symétriques [19]. Ils ont été introduits en 1901 par Alfred Young [22] comme un outil pour développer la théorie des représentations du groupe symétrique. Ils permettent en particulier de construire les représentations irréductibles de ce dernier. Après ce développement la théorie de tableaux de Young joue un rôle important dans plusieurs domaines mathématiques comme la combinatoire énumérative et la combinatoire géométrique.

Définition 1.13. *Un n -diagramme est un sous-ensemble fini $D = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Les éléments de D sont appelés les cases de D . Une case (i, j) d'un n -diagramme correspond à un carré unitaire dans le plan $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un partage ou une partition λ de n est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On va utiliser le mot partage pour λ , et on le note $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ vérifiant :*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = |\lambda| = n.$$

Si la suite d'entiers est nulle, on dénote par \emptyset et on l'appelle partage vide. De plus, si λ a m_i parts de taille i on écrit encore

$$\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}.$$

On dit alors que m_i est la multiplicité de la part i dans λ . La longueur $l(\lambda) = r$ de λ est le nombre de parts de λ .

Exemple 1.15. *Pour $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ le partage de 11, on a $\lambda = 1^1 2^1 4^2$, et $l(\lambda) = 4$.*

Définition 1.16. On appelle *diagramme de Young de partage λ* le diagramme de $l(\lambda)$ lignes ayant λ_i cases cadrées à gauche dans la i -ème ligne. Explicitement, il est le diagramme :

$$Y(\lambda) = \{(i, j); 1 \leq i \leq l(Y) \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Les cases d'un diagramme de Young sont généralement indicées par des paires d'entiers, le premier indice dénotant la ligne, le deuxième la colonne. La notation française correspond aux coordonnées cartésiennes de manière que les coordonnées i et j sont les y et x du plan cartésien.

On identifie λ à son diagramme de Young $Y(\lambda)$.

Exemple 1.17. La Figure 1.1 montre le diagramme de Young du partage $(4, 4, 2, 1)$. Ainsi $l(\lambda) = 4$ et $Y(\lambda) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

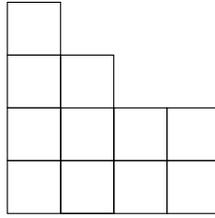


FIGURE 1.1 – Diagramme de Young associé à $(4, 4, 2, 1)$, (notation française).

Définition 1.18. Le *conjugué de λ* noté par λ' , est le partage lié à λ par la réflexion sur la diagonale principale. Explicitement, il est le diagramme :

$$Y(\lambda') = \{(j, i); (i, j) \in Y(\lambda)\}.$$

On a $|\lambda| = |\lambda'| = |Y(\lambda)|$, $l(\lambda') = \lambda_1$ et $(\lambda')' = \lambda$.

Exemple 1.19. La Figure 1.2 montre le conjugué $\lambda' = (4, 3, 2, 2)$ de $\lambda = (4, 4, 2, 1)$, où

$$|\lambda| = |\lambda'| = |Y(\lambda)| = 11, \text{ et } l(\lambda') = 4.$$

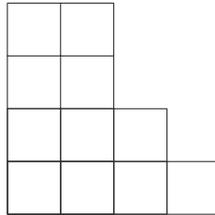


FIGURE 1.2 – Diagramme de Young conjugué du partage $(4, 4, 2, 1)$.

4			
1	6		
3	8		
5	12	3	7

FIGURE 1.3 – Tableau de Young du partage $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans $[12]$.

1.1.4 Tableaux de Young

Définition 1.20. *Un tableau de Young est construit à partir du diagramme de Young tel que ses cases sont remplies avec des éléments de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Il est indexé*

$$T = \{T(i, j); 1 \leq i \leq l(\lambda) \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Exemple 1.21. *La Figure 1.3 montre un tableau du partage $(4, 2, 2, 1)$.*

Définition 1.22. *Un tableau de Young T est dit semi-standard si les nombres placés dans ses cases sont en ordre croissant pour chaque ligne et strictement croissant pour chaque colonne, c'est-à-dire*

$$T(i, j) \leq T(i + 1, j) \text{ et } T(i, j) < T(i, j + 1).$$

Exemple 1.23. *La Figure 1.4 montre un tableau semi-standard du partage $(4, 2, 2, 1)$.*

7			
5	8		
3	5		
2	2	2	6

FIGURE 1.4 – Tableau de Young semi-standard du partage $(4, 2, 2, 1)$ à valeur dans $[8]$.

Définition 1.24. *Soit T un tableau de Young. Le contenu c de T est*

$$c(T) = 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots$$

où m_i est la multiplicité de l'entier i dans T .

Exemple 1.25. *Pour le tableau T de la Figure 1.4, on a $c(T) = 2^3 3^1 5^2 6^1 7^1 8^1$.*

Définition 1.26. *Soit T un tableau, on appelle poids de T et on note x^T le monôme dont l'exposant de x_i est égale au nombre d'occurrences de l'entier i dans T .*

Exemple 1.27. *Le poids de T de la Figure 1.4 est le monôme $x_2^3 x_3 x_5^2 x_6 x_7 x_8$.*

1.1.5 Lien entre les tableaux de Young et les fonctions symétriques

D'après la définition du tableau de Young semi-standard et la Définition 1.26, on peut interpréter les fonctions symétriques élémentaires et complètes par les façons suivantes :

1. La somme des monômes de tous les tableaux semi-standards possibles du partage $\lambda = (1, \dots, 1) = (1^k)$ dans $[n]$ est la fonction symétrique élémentaire $e_k(n)$.

Par exemple les tableaux de Young semi-standard possibles pour $k = 3$ et $n = 4$ sont :

3	4	4	4
2	2	3	3
1	1	1	2

On obtient alors

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4.$$

2. La somme des monômes de tous les tableaux semi-standards possibles du partage $\lambda = (k)$ dans $[n]$ est la fonction symétrique complète $h_k(n)$.

Par exemple les tableaux de Young semi-standard possibles pour $k = 3$ et $n = 2$ sont :

1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

On obtient alors

$$h_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3.$$

1.1.6 Les fonctions de Schur et le déterminant de Jacobi-Trudi

En guise de conclusion à cette introduction aux fonctions symétriques, nous allons introduire la plus intéressante des familles de fonctions symétriques : les fonctions de Schur [4]. Ce sont, de loin, celles qui interviennent de la façon la plus profonde dans les applications des fonctions symétriques. Elles ont été introduites par Schur de la façon suivante.

Définition 1.28. Soit λ un partage tel que $l(\lambda) \leq n$. La fonction de Schur $s_n(\lambda, x)$ associée au partage λ est la somme de tous les monômes des tableaux semi-standards T du partage λ , c'est-à-dire :

$$s_n(\lambda, x) = \sum_T x^T.$$

Exemple 1.29. Les tableaux du Young semi-standard du partage $\lambda = (2, 1)$ à valeurs dans $[3]$ sont :

2		3		2		3		3		3		3	
1	1	1	1	1	2	1	2	1	3	2	2	2	3

Alors la fonction de Schur associée sera :

$$s_3(\lambda, x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_1 x_2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Remarque 1.30. Il est loin d'être évident que les fonctions de Schur sont symétriques, mais c'est le cas.

Propriétés 1.31. Les fonctions symétriques élémentaires et complètes sont des cas particulier de la fonction de Schur.

$$\begin{aligned} e_k(x_1, \dots, x_n) &:= s_n((1^k), x_1, \dots, x_n), \\ h_k(x_1, \dots, x_n) &:= s_n((k), x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Définition 1.32. Le déterminant de Jacobi-Trudi permet de développer la fonction de Schur en terme des fonctions symétriques élémentaires et complètes. Plus explicitement, pour un partage λ avec $l(\lambda) = r$ et λ' son conjugué on a :

1.

$$\begin{aligned} s_n(\lambda, x) &= |e_{\lambda'_j - j + i}(x)|_{\lambda'_1 \times \lambda'_1} \\ &= \begin{vmatrix} e_{\lambda'_1}(x) & e_{\lambda'_2 - 1}(x) & e_{\lambda'_3 - 2}(x) & \cdots & e_{\lambda'_{\lambda'_1 - 1} - \lambda'_1}(x) & e_{\lambda'_{\lambda'_1} - \lambda'_1 + 1}(x) \\ e_{\lambda'_1 + 1}(x) & e_{\lambda'_2}(x) & e_{\lambda'_3 - 1}(x) & \cdots & e_{\lambda'_{\lambda'_1 - 1} - \lambda'_1 + 1}(x) & e_{\lambda'_{\lambda'_1} - \lambda'_1 + 2}(x) \\ e_{\lambda'_1 + 2}(x) & e_{\lambda'_2 + 1}(x) & e_{\lambda'_3}(x) & \cdots & e_{\lambda'_{\lambda'_1 - 1} - \lambda'_1 + 2}(x) & e_{\lambda'_{\lambda'_1} - \lambda'_1 + 3}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\lambda'_1 + \lambda'_1 - 1}(x) & e_{\lambda'_2 + \lambda'_1 - 2}(x) & e_{\lambda'_3 + \lambda'_1 - 3}(x) & \cdots & e_{\lambda'_{\lambda'_1 - 1} + 1}(x) & e_{\lambda'_{\lambda'_1}}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

avec $e_0 = 1$, $e_k = 0$ pour $n < k$.

2.

$$\begin{aligned} s_n(\lambda, x) &= |h_{\lambda_j - j + i}(x)|_{r \times r} \\ &= \begin{vmatrix} h_{\lambda_1}(x) & h_{\lambda_2 - 1}(x) & h_{\lambda_3 - 2}(x) & \cdots & h_{\lambda_{r-1} - r}(x) & h_{\lambda_r - r + 1}(x) \\ h_{\lambda_1 + 1}(x) & h_{\lambda_2}(x) & h_{\lambda_3 - 1}(x) & \cdots & h_{\lambda_{r-1} - r + 1}(x) & h_{\lambda_r - r + 2}(x) \\ h_{\lambda_1 + 2}(x) & h_{\lambda_2 + 1}(x) & h_{\lambda_3}(x) & \cdots & h_{\lambda_{r-1} - r + 2}(x) & h_{\lambda_r - r + 3}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{\lambda_1 + r - 1}(x) & h_{\lambda_2 + r - 2}(x) & h_{\lambda_3 + r - 3}(x) & \cdots & h_{\lambda_{r-1} + 1}(x) & h_{\lambda_r}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

avec $h_0 = 1$, $h_k = 0$ pour $k < 0$.

Exemple 1.33. Pour $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$ et $\lambda = (2, 1)$ on a :

1.

$$\begin{aligned} |h_{\lambda_j - j + i}(x)| &= \begin{vmatrix} h_2(x) & h_0(x) \\ h_3(x) & h_1(x) \end{vmatrix} = h_2(x)h_1(x) - h_3(x)h_0(x) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)(x_1 + x_2) - (x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3) \\ &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = s_2(\lambda, x_1, x_2). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |e_{\lambda'_j - j + i}(x)| &= \begin{vmatrix} e_2(x) & e_0(x) \\ e_3(x) & e_1(x) \end{vmatrix} = e_2(x)e_1(x) - e_3(x)e_0(x) \\ &= (x_1x_2)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = s_2(\lambda, x_1, x_2). \end{aligned}$$

1.2 Outils de base de combinatoire

1.2.1 Factorielle, factorielles montante et descendante

Soient x un nombre réel et n un entier positif, la factorielle montante de x d'ordre n est définie par

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+1)\cdots(x+n-1), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Aussi, on appelle factorielle montante de x de coefficient α ($\alpha \in \mathbb{N}$) et d'ordre n le polynôme

$$(x | \alpha)^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+\alpha)\cdots(x+(n-1)\alpha), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

D'une manière équivalente, la factorielle descendante de x d'ordre n est définie par

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\cdots(x-n+1), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

et de coefficient α par

$$(x | \alpha)^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-\alpha)\cdots(x-(n-1)\alpha), & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

A noter que, pour $x = 1$ dans l'équation (1.5) ou pour $x = n$ dans l'équation (1.7), on obtient la fonction factorielle (classique)

$$1^{\bar{n}} = n^{\underline{n}} = n!.$$

1.2.2 Le coefficient binomial

Ayant un groupe de n personnes (il est convenu implicitement qu'ils sont discernables), le nombre de façons de choisir un sous-groupe de k individus est compté par le coefficient binomial qui est défini pour tout nombre réel n et tout entier $k \geq 0$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!}.$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ appelé relation du binôme de Newton, où a et b sont des nombres réels ou complexes

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad (1.9)$$

et satisfont une relation de récurrence d'ordre deux

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad (1.10)$$

qui se démontre combinatoirement en discutant le cas de la $n^{\text{ème}}$ personne : si elle est sélectionnée, il reste à choisir $k - 1$ autres personnes depuis les $n - 1$ personnes restantes. Ainsi, nous avons $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. Sinon, elle n'est pas sélectionnée et donc on choisit k individus parmi les $n - 1$ restants. Ce qui se fait de $\binom{n-1}{k}$ façons.

A partir de la relation de récurrence (1.10) nous pouvons construire le triangle de Pascal (voir Figure 1.5).

				1								
				1		1						
			1		2		1					
		1		3		3		1				
	1		4		6		4		1			
	1	5		10		10		5		1		
	1	6	15		20		15	6		1		
	1	7	21	35		35	21	7		1		
	1	8	28	56	70		56	28	8		1	
	1	9	36	84	126	126		84	36	9		1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10			1

FIGURE 1.5 – Triangle de Pascal.

Ce triangle satisfait plusieurs propriétés qui s'interprètent facilement avec des raisonnements combinatoires. Par exemple, on remarque que les lignes du triangle sont symétriques, i.e.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (1.11)$$

En effet, le fait choisir k personnes parmi n est équivalent à ne pas choisir $n - k$ personnes.

On a aussi la convolution de Vandermonde (ou Chu-Vandermonde, ou encore binomiale)

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}. \quad (1.12)$$

Remarque 1.34. Le nombre des monômes dans la k -ème fonction symétrique élémentaire à n variables $e_k(n)$ est exactement le nombre de coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Ainsi

$$e_k(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}) = \binom{n}{k}.$$

Exemple 1.35. $e_2(4)$ possède $\binom{4}{2} = 6$ monômes, (voir Exemple 1.5).

Remarque 1.36. Le nombre des monômes dans la k -ème fonction symétrique complète à n variables $h_k(n)$ est exactement le nombre de coefficient binomial $\binom{n+k-1}{k}$.

Ainsi

$$h_k(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Exemple 1.37. $h_3(3)$ possède $\binom{3+3-1}{3} = 10$ monômes, (voir Exemple 1.9).

1.2.3 Arrangements

On appelle arrangement de k éléments, toute suite de k éléments distincts de l'ensemble $[n]$.

Exemple 1.38. Soit $[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $(2, 6, 5, 3)$ est un arrangement de quatre éléments.
 $(1, 3, 4, 3, 2)$ n'est pas un arrangement.

Propriétés 1.39. Le nombre d'arrangements de $[k]$ dans $[n]$ est compté par le factorielle descendante.

$$(n)^{\underline{k}}.$$

1.2.4 Permutations

Définition 1.40. Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle permutation toute bijection σ_n de $[n]$ dans $[n]$. Une permutation σ_n peut être représentée par la forme matricielle

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ est $n!$.

Exemple 1.41. Soit la permutation σ_8

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Un élément ι de $[n]$ est appelé point fixe si son image par la permutation σ_n est lui-même, c'est-à-dire $\sigma_n(\iota) = \iota$. Dans l'exemple précédent, l'élément 7 est un point fixe.

Aussi, une orbite de ι notée O_ι , est l'ensemble des images de i obtenues en appliquant successivement la permutation σ_n sur l'élément ι , $O_\iota = \{\sigma^p(\iota), p \in \mathbb{N}\}$. L'orbite de l'élément 1 dans l'exemple 1.41 est $O_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$. Remarquez que $O_1 = O_3 = O_4$. Ces éléments $\{1, 3, 4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3, 4)$ où chaque élément est l'image du précédent par σ_n (1 est l'image de 4, 3 est l'image de 1 etc). A partir d'une orbite à p éléments, on peut constituer $(p - 1)!$ cycles. On peut alors écrire une permutation σ_n comme un produit de cycles,

$$\sigma_8 = (1, 3, 4)(2, 8, 5, 6)(7),$$

cette représentation est appelée : écriture en cycles. Nous conviendrons d'appeler k -permutation toute permutation ayant k cycles.

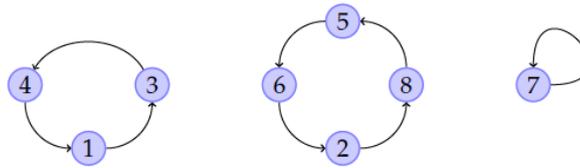


FIGURE 1.6 – Une 3-permutation de $[8]$.

Remarque 1.42. Compter le nombre d'injections de $[k]$ dans $[n]$ peut se réduire à considérer tous les sous-ensembles S de cardinal k de $[n]$ et on a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles, puis à considérer toutes les permutations (bijections) de $[k]$ dans S et on a $k!$ permutations. D'où

$$\binom{n}{k} k! = \binom{n}{k} k!.$$

1.2.5 Partitions

Définition 1.43. Une part P de $[n]$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$. Une partition π de $[n]$ est une famille de parts P_1, \dots, P_k disjointes deux à deux, telles que $\bigcup_{i=1}^k P_i = [n]$.

Notez qu'une k -permutation peut être considérée comme un partitionnement de $[n]$ en k cycles.

Exemple 1.44. Les 3-partitions de $[4]$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \{\{1,4\}\{2\}\{3\}\} & \{\{1\}\{2,4\}\{3\}\} & \{\{1\}\{2\}\{3,4\}\} \\ \{\{1,3\}\{2\}\{4\}\} & \{\{1\}\{2,3\}\{4\}\} & \{\{1,2\}\{3\}\{4\}\} \end{array}$$

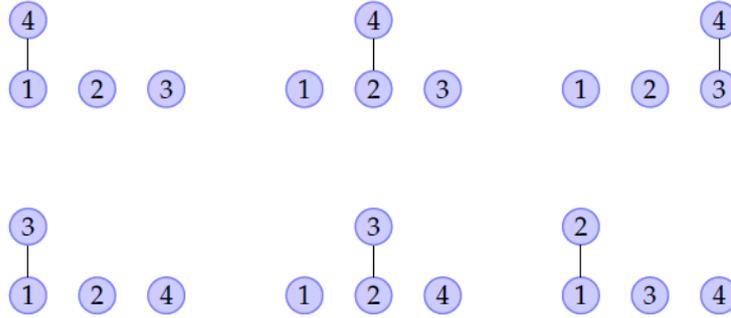


FIGURE 1.7 – 3-partitions de [4].

1.2.6 Fonction ou série génératrice

Soient $(a_n)_n$ une suite et $f_n(X)$ une fonction. On appelle fonction génératrice ou série génératrice de la suite $(a_n)_n$ la série formelle

$$A(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(X).$$

On dit qu'une fonction génératrice est de type ordinaire (série génératrice ordinaire) si la fonction $f_n(X)$ est de la forme $f_n(X) = X^n$. De même, une fonction génératrice est dite exponentielle si la fonction $f_n(X)$ est de la forme $f_n(X) = \frac{X^n}{n!}$.

Deux fonctions génératrices ordinaires (ou exponentielles) $A(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ $\left(A(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{X^n}{n!} \right)$ et $B(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ $\left(B(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{X^n}{n!} \right)$ sont égaux si et seulement si $a_n = b_n$, pour tout $n \geq 0$.

Le produit de convolution de deux séries génératrices ordinaires $A(X)$ et $B(X)$ est une série génératrice ordinaire $C(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$, où $c_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$. De même, le produit de deux séries génératrices exponentielles, appelé produit de convolution binomial, est une série génératrice $C(X) = A(X)B(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{X^n}{n!}$, où $c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$.

Chapitre 2

Suites remarquables

Dans ce chapitre, nous abordons certaines suites liées aux fonctions symétriques élémentaire et complète, ainsi leurs propriétés combinatoires.

2.1 Les nombres de Stirling

Les Stirling des deux espèces furent introduits par Stirling [21] et nommés par Nielsen [16] en l'honneur de ce premier. Ces nombres se manifestent dans de nombreux problèmes de combinatoire et sont reliés à pleins d'autres nombres tels que les nombres de Bernoulli, nombres Eulérien, etc. Nous les trouvons sous différentes notations, les plus courantes sont $s(n, k)$ pour les nombres de Stirling signés et $S(n, k)$ pour la deuxième espèce. Pour notre part, nous utiliserons la notation $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ pour les nombres de Stirling de première espèce non-signés où \square représente des cycles; Et $\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \}$ pour la deuxième espèce où $\{ \}$ désigne des parts. Cette notation a été proposée par Karamata [11] et appuyée par Graham et al. [12] où ces derniers donnent un commentaire sur les notations et exposent les maints avantages de cette dernière.

2.1.1 Les nombres de Stirling de première espèce

Définition 2.1. *Les nombres de Stirling de première espèce (non-signés) $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ comptent le nombre de k -permutations de $[n]$, et apparaissent comme coefficients du développement de la factorielle montante $(x)^{\overline{n}}$*

$$(x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k. \quad (2.1)$$

Notez que les nombres de Stirling de première espèce signés $s(n, k)$ sont liés au développement de la factorielle descendante $(x)^{\underline{n}}$

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k, \quad (2.2)$$

de ce fait

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (2.3)$$

Propriétés 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

1. $\sum_{k=0}^n s(n, k) = n!$.
2. $s(n, 1) = (n - 1)!$.
3. $s(n, n) = 1$.
4. $s(n, n - 1) = \binom{n}{2}$.

Preuve. 1. On montre par induction en n .

Pour $n = 0$ trivial ($s(0, 0) = 1 = 0!$).

On suppose que la propriété est vraie pour n , c'est-à-dire $\sum_{k=0}^n s(n, k) = n!$, et on va la montrer pour $n + 1$.

On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) &= \sum_{k=0}^{n+1} (s(n, k-1) + ns(n, k)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n, k-1) + n \sum_{k=0}^{n+1} s(n, k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} s(n, k) + n \sum_{k=0}^{n+1} s(n, k) \\
 &= \sum_{k=0}^n s(n, k-1) + n \sum_{k=0}^n s(n, k) \\
 &= n! + n(n)! \\
 &= (n+1)!.
 \end{aligned}$$

2. Pour permuter un ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en un seul cycle, on a $n!$ méthodes, et puisque nous avons commencées par l'un des valeurs dans un cycle donné, nous avons surestimé le total d'un facteur de n , alors

$$s(n, k) = (n - 1)!$$

3. Trivial.

4. Pour compter ces permutations, nous avons seulement besoin de choisir les 2 éléments dans $\{1, 2, \dots, n\}$, vont partager un cycle tandis que les autres sont représenté par un cycle singleton. Ainsi

$$s(n, k) = \binom{n}{2}.$$

■

Propriétés 2.3. 1. *Les nombres de Stirling de première espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

avec $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n,0}$, où δ est le symbole de Kronecker, et $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, lorsque $n \neq 0$, $k \notin [n]$.

2. Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=k}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \binom{i}{k}. \quad (2.5)$$

Preuve. 1. La récurrence est vérifiée par le partitionnement des permutations $[n]$ qui a k cycles en deux types. Le premier type contient toutes les permutations dans lesquelles le nombre n est un cycle lui-même, et les autres $n-1$ nombres sont partitionnés en $k-1$ cycles, alors il y a

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

cas pour le premier type.

Dans le deuxième type, le nombre n n'est pas un cycle lui-même, et les autres $n-1$ nombres sont partitionnés en k cycles, et alors le n est inséré immédiatement après certain nombre j dans l'un de ces k cycles. En total, on a

$$(n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

cas pour le deuxième type. La somme des cas dans ces deux types est le nombre total des partitions de $[n]$ en k cycles.

2. On va montrer par récurrence.

On a pour $k > n$ les deux cotés de l'équation (2.5) sont égaux à 0 donc on a $k \leq n$. Pour $n = 0$, alors $k = 0$,

$$\binom{0}{0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supposons pour tout $n \geq 1$ et pour tout k que

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix},$$

alors pour tout $k \leq n$, et d'après la récurrence de Stirling (2.4) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'après la récurrence de Pascal (1.10), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^n \left(\binom{i-1}{k-1} + \binom{i-1}{k} \right) \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i-1}{k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^n \binom{i-1}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par la récurrence de Stirling (2.4), on trouve

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

■

Par la relation de récurrence (2.4), on obtient le tableau des nombres de Stirling de première espèce :

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6						
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

TABLE 2.1 – Les nombres de Stirling de première espèce.

Une forme explicite des nombres de Stirling de première espèce est donné par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1 \dots i_k}. \quad (2.6)$$

De plus, leurs fonctions génératrices sont comme suit :

Proposition 2.4. 1. La fonction génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} y^k = \frac{1}{(1-x)^y}. \quad (2.7)$$

2. La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(1-x). \quad (2.8)$$

Preuve. 1. D'après (2.3) on a :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} s(n, k),$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (y)^k \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) (-y)^k \frac{(-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le binôme de Newton (1.9), on a :

$$\begin{aligned} (1+x)^y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{y}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y!}{(y-n)!n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} y(y-1)(y-2)\dots(y-n+1) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (y)_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) y^k \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) (-y)^k \frac{(-x)^n}{n!} = (1-x)^{-y} = \frac{1}{(1-x)^y}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} y^k \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{(1-x)^y}.$$

2. De la relation (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} y^k &= \frac{1}{(1-x)^y} \\ &= (1-x)^{-y} \\ &= \exp((-y)\ln(1-x)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((-y)\ln(1-x))^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!} y^k. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k l n^k (1-x)}{k!}.$$

■

Remarque 2.5. La relation (2.1) est une série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de première espèce.

Proposition 2.6. Les nombres de Stirling de première espèce sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = e_{n-k}(1, 2, \dots, n-1). \quad (2.9)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k &= (x)^{\bar{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i) \\ &= \sum_{k=0}^n e_{n-k}(0, 1, \dots, n-1) x^k \quad (\text{Proposition 1.7}) \\ &= \sum_{k=0}^n e_{n-k}(1, \dots, n-1) x^k. \end{aligned}$$

Par identification on trouve $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = e_{n-k}(1, 2, \dots, n-1)$. ■

2.1.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce

Définition 2.7. Les nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ comptent le nombre de k -partitions de $[n]$. Ils apparaissent lors de l'expression du monôme x^n dans la base des moments factoriels décroissants $(x)^{\underline{k}}$

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (2.10)$$

Proposition 2.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$.
2. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$.
3. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Preuve. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (2.10) on a :

$$x^n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x(x-1) + \dots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} x(x-1) \cdots (x-n+1) \quad (2.11)$$

1. En prenant $x = 0$ dans (2.11), on obtient immédiatement :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Par suite, en substituant $S(n, 0)$ dans (2.11), puis en divisant sur x , on obtient :

$$x^{n-1} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} (x-1) + \cdots + \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} (x-1)(x-2) \cdots (x-n+1).$$

En prenant dans cette dernière $x = 1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1.$$

Enfin, l'identification des coefficients dominants des polynômes du membre de gauche et du membre de droite de (2.11) donne directement :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1.$$

2. En substituant $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$ par leurs valeurs dans (2.11), on obtient :

$$x^n = x + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} x(x-1) + \cdots + \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

En prenant $x = 2$ dans cette dernière, on obtient :

$$2^n = 2 + 2 \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}.$$

D'où l'on tire :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

3. L'identification des coefficients de x^{n-1} dans les deux membres de l'identité (2.11) donne :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 0.$$

Puisque $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$ (déjà démontrée), il en résulte que :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

Ils ont aussi les relations de récurrence suivantes.

Propriétés 2.9. 1. La relation de récurrence triangulaire d'ordre deux :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (2.12)$$

avec $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{n,0}$, et $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ lorsque $k \notin [n]$ et $n \neq 0$.

2. La relation de récurrence verticale :

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (2.13)$$

Preuve. 1. La récurrence est vérifiée par le partitionnement des partitions $[n]$ en deux types. Le premier contient toutes les partitions dans lesquelles l'entier n est une part lui même, et les autres $n-1$ nombres sont partitionnés à $k-1$ parts, alors il y aura

$$\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \text{ cas dans ce type.}$$

Dans le deuxième type, dans lequel le nombre n n'est pas une part lui même, les autres $n-1$ nombres sont partitionnés en $k-1$ part, et alors il y a

$$k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \text{ cas dans ce type.}$$

Donc, la somme des cas est le nombre total des partitions de $[n]$ en k parts.

2. En partitionnant les partitions $[n+1]$ à $k+1$ parts, il y aura donc

$$\binom{n}{i}$$

méthodes pour choisir les $n-i$ nombres pour être dans la même part que le nombre $n+1$, et alors il y aura aussi

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\}$$

méthodes pour partitionner les i nombres restent à k parts supplémentaires. ■

De la relation de récurrence (2.12), on obtient le tableau des nombres de Stirling de deuxième espèce suivant :

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TABLE 2.2 – Les nombres de Stirling de deuxième espèce.

Les nombres de Stirling de deuxième espèce possèdent aussi les formes explicites suivantes.

1.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} \frac{1}{i_1! \dots i_k!}. \quad (2.14)$$

2.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{k!} \binom{k}{i} i^n. \quad (2.15)$$

De plus, leurs séries génératrices sont comme suit.

Proposition 2.10. 1. La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x|x)^k}. \quad (2.16)$$

2. La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad (2.17)$$

3. La fonction génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1)). \quad (2.18)$$

Preuve. 1. Posons

$$f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n.$$

De la relation de récurrence (2.12), on trouve

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) x^n \\ &= x \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^{n-1} + kx \sum_{n=k-1}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=k-1}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^n + kx \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n \\ &= x f_{k-1}(x) + kx f_k(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} f_{k-1}(x). \quad (2.19)$$

Alors si on procède la relation (2.19) sur k , on aura

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} \times \frac{x}{1-(k-1)x} \times \dots \times \frac{x}{1-x} f_0(x),$$

où $f_0(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} x^0 = 1$. D'où le résultat.

2. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{+\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((k-i)x)^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (e^x)^{k-i} \\
 &= \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

3. D'après (2.17), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} y^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(y(e^x - 1)).
 \end{aligned}$$

■

Proposition 2.11. *Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont des spécialisations de la fonction symétrique complète :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = h_{n-k}(1, 2, \dots, k). \tag{2.20}$$

Preuve. D'après (2.16) de Proposition 2.10, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n &= \prod_{i=1}^k \frac{x^k}{1 - ix} \\
 &= \prod_{i=1}^k \frac{x^k}{1 - ix} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(1, 2, \dots, k) x^{n+k} \text{ (Proposition 1.11)} \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} h_{n-k}(1, 2, \dots, k) x^n.
 \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = h_{n-k}(1, 2, \dots, k).$$

■

2.1.3 Lien entre les deux types de nombres de Stirling

Les nombres de Stirling de première espèce s'expriment en termes des nombres de Stirling de deuxième espèce par la relation d'orthogonalité suivante :

$$\sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \delta_{n,k}, \quad (2.21)$$

synonymes des relations d'inversion suivantes

$$a_n = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} b_k \iff b_n = \sum_{i=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} a_k, \quad (2.22)$$

avec $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites données.

2.2 Les nombres Eulérien

Définition 2.12. *Le nombre Eulérien, noté par $E(n, k)$, $0 \leq k \leq n-1$, compte le nombre de permutations de $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ avec exactement k descentes. Il est défini par la relation de récurrence suivante :*

$$E(n, k) = kE(n-1, k) + (n-k+1)E(n-1, k-1),$$

avec $E(n, 1) = 1$ pour $n \neq 0$.

Sa forme explicite est donnée par

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

2.3 Le q -analogue des suites remarquables

2.3.1 Les coefficients q -binomiaux

En mathématiques, plus précisément dans le domaine de la combinatoire, un q -analogue d'un théorème, d'une identité ou d'une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre q qui se spécialise en le théorème original lorsque l'on prend le cas limite où q tend vers 1. Pour plus de détails voir [1].

Définition 2.13. *Le q -analogue du coefficient binomial est appelé le coefficient q -binomial ou le polynôme de Gauss, est défini pour $0 \leq k \leq n$ par :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad (2.23)$$

où

$$[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q \text{ et } [n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1}.$$

Le coefficient q -binomial s'écrit aussi pour $0 \leq k \leq n$ par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{[n-i]_q}{[i+1]_q}. \quad (2.24)$$

Pour $q = 1$, le coefficient q -binomial est le coefficient binomial classique.

Le coefficient q -binomial est donné aussi par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j q^j. \quad (2.25)$$

Ce coefficient a plusieurs propriétés, par exemple il est symétrique et polynomial en q avec des coefficients $\{a_k\}$.

Nous présentons quelques valeurs du triangle des coefficients q -binomiaux ci-dessous :

n/k	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	$1+q$	1	
3	1	$1+q+q^2$	$1+q+q^2$	1
4	1	$1+q+q^2+q^3$	$1+q+2q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3$
5	1	$1+q+q^2+q^3+q^4$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$	$1+q+2q^2+2q^3+\dots$

TABLE 2.3 – Table des valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

Remarque 2.14. *Comme les coefficients binomiaux, les coefficients q -binomiaux sont symétriques, c'est-à-dire*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q, \quad (2.26)$$

il s'ensuit que

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i. \quad (2.27)$$

Propriétés 2.15. *Les coefficients q -binomiaux satisfont la relation de récurrence suivante*

1. Pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q. \quad (2.28)$$

Cette équation est l'analogue de l'identité de Pascal pour le cas classique.

2. Il y a aussi l'analogie de la formule du binôme de Newton pour les coefficients q -binomiaux

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \quad (2.29)$$

Proposition 2.16. *Les coefficients q -binomiaux sont des spécialisation des fonctions symétriques élémentaires et complètes*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\binom{k}{2}} e_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = h_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-k}). \quad (2.30)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k &= \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) \text{ (Relation(2.29))} \\ &= \sum_{k=0}^n e_k(1, q, \dots, q^{n-1}) x^k \text{ (Par Proposition 1.7).} \end{aligned}$$

Par identification on trouve $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\binom{k}{2}} e_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1})$.

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n h_k(n-k+1) x^k &= h_0(n+1) + h_1(n)x + \dots + h_n(1)x^n + h_{n+1}(0)x^{n+1} \\ &= 1 + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) x + \dots + \lambda_1^n x^n. \end{aligned}$$

Prenons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1, q, q^2, \dots)$ on aura

$$\sum_{k=0}^n h_k(1, q, \dots, q^{n-k}) x^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k.$$

D'où le résultat. ■

2.3.2 Les nombres q -Stirling

Définition 2.17. *Le nombre q -Stirling de première espèce noté $s_q(n, k)$, satisfait la relation de récurrence suivante*

$$s_q(n, k) = s_q(n-1, k-1) + [n-1]_q s_q(n-1, k), \quad n \geq 1$$

avec $s_q(0, 0) = 1$.

Il représente aussi le k -ième coefficient du développement :

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x + [i]_q) = \sum_{k=0}^n s_q(n, k) x^k. \quad (2.31)$$

Nous présentons quelques valeurs du nombre q -Stirling de première espèce ci-dessous :

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	$1+q$	$2+q$	1	
4	0	$1+2q+2q^2+q^3$	$3+4q+3q^2+q^3$	$3+2q+q^2$	1

TABLE 2.4 – Table des valeurs de $s_q(n, k)$.

Définition 2.18. *Le nombre q -Stirling de deuxième espèce noté $S_q(n, k)$, satisfait la relation de récurrence suivante*

$$S_q(n, k) = S_q(n-1, k-1) + [k]_q S_q(n-1, k), \quad n \geq 1$$

avec $S(0, 0)_q = 1$.

Il a aussi la série génératrice suivante :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} S_q(n, k) x^n = \prod_{i=1}^k \frac{x^k}{1 - [i]_q x}. \quad (2.32)$$

Nous présentons quelques valeurs du nombre q -Stirling de deuxième espèce ci-dessous :

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	$2+q$	1	
4	0	1	$3+3q+q^2$	$3+2q+q^2$	1

TABLE 2.5 – Table des valeurs de $S_q(n, k)$.

Proposition 2.19. *Les nombres de q -Stirling de première espèce et de deuxième espèce sont des spécialisation des fonctions symétriques élémentaires et complètes respectivement :*

1.

$$s_q(n, k) = e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q), \quad (2.33)$$

2.

$$S_q(n, k) = h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q). \quad (2.34)$$

Preuve. 1. De la relation (2.31), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n s_q(n, k) x^k &= \prod_{i=0}^{n-1} (x + [i]_q) \\ &= \prod_{i=1}^n (x + [i-1]_q) \\ &= \sum_{k=0}^n e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q) x^k. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. D'après (2.32), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{+\infty} S_q(n, k)x^n &= \prod_{i=1}^k \frac{x^k}{1 - [i]_q x} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} h_n([1]_q, \dots, [k]_q)x^{k+n} \quad (\text{Proposition 1.11}) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} h_{n-k}([1]_q, \dots, [k]_q)x^n.
 \end{aligned}$$

Par identification on trouve

$$S_q(n, k) = h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q).$$

■

Chapitre 3

La log-concavité des suites de fonctions symétriques

Les suites log-concaves et q -log-concaves apparaissent souvent en combinatoire, géométrie et algèbre. Il existe un nombre considérable de recherches consacrées à ces sujets (voir [20, 7, 8] pour plus d'information). Parfois utiliser les approches analytiques directes pour prouver ces propriétés est difficile, c'est bien que le cas pour ce chapitre. Cependant faire recours aux fonctions symétriques, en utilisant l'approche des chemins de Gessel et Viennot [14] est parmi les méthodes qui existent en littérature.

Les résultats principaux du chapitre sont largement puisés de l'article de Sagan [18].

3.1 Préliminaires sur les suites log-concaves

Dans cette section, on introduit quelques définitions, notations et résultats liés aux suites log-concaves et aux polynômes q -log-concaves.

3.1.1 La log-concavité

Définition 3.1. Soit $\{x_k\}_k$ une suite des nombres réels positifs, on dit qu'elle est log-concave si pour tout entier $k > 0$,

$$x_{k-1}x_{k+1} \leq x_k^2. \quad (3.1)$$

Théorème 3.2 ([7], Proposition 2.5.1). Soit $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite des nombres réels strictement positifs, la suite $\{x_k\}_k$ est log-concave si et seulement si

$$x_{i-1}x_{j+1} \leq x_i x_j, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq j. \quad (3.2)$$

Preuve. Pour $k \geq 1$, la suite $\{x_k\}_k$ est log-concave si

$$x_{k-1}x_{k+1} \leq x_k^2.$$

1. Si on pose $i = j = k \geq 1$, on aura $x_{i-1}x_{j+1} \leq x_i x_j$;

2. Prenant un $k' > k$, et comme exemple $k' = k + 1$, on aura :

$$x_{k+1}^2 \geq x_k x_{k+2} \implies x_k x_{k+1}^2 \geq x_k^2 x_{k+2} \geq x_{k-1} x_{k+1} x_{k+2} \implies x_k x_{k+1} \geq x_{k-1} x_{k+2}.$$

Alors, si on pose $i = k \geq 1$ et $j = k + 1$, on aura

$$x_{i-1} x_{j+1} \leq x_i x_j. \quad \blacksquare$$

Exemple 3.3. *Ci dessous des exemples de suites log-concaves :*

1. $x_k = \binom{n}{k}$ la n -ième ligne du triangle de Pascal, pour $0 \leq k \leq n$.
2. Les nombres de Stirling (non-signés) de première espèce $([n]_k)_{k \geq 0}$.
3. Les nombres de Stirling de deuxième espèce $(\{n\}_k)_{k \geq 0}$.

Preuve. Car

1. On a

$$\frac{x_k^2}{x_{k-1} x_{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} \geq 0$$

2. On va montrer par récurrence. Pour $n = 0$ et $k = 1$ la log concavité est vérifiée. Supposons que l'hypothèse est vraie pour $n - 1$ c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^2,$$

et on va montrer qu'elle reste vraie pour n , c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2.$$

D'après la relation de récurrence (2.4) on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + (n-1)^2 \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &\quad + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + (n+1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}^2 + (n-1)^2 \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^2 \\ &\quad + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + (n+1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}^2 + (n-1)^2 \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^2 + 2(n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right)^2 \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2. \end{aligned}$$

3. On va montrer par récurrence. On a pour $n = 0$ et $k = 1$ la log-concavité est vérifiée.

Supposons que l'hypothèse est juste pour $n - 1$ c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}^2,$$

et on va montrer qu'elle reste vraie pour n c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ k+1 \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^2.$$

D'après la relation de récurrence (2.12) on a :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ k+1 \end{Bmatrix} &= \left(\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{Bmatrix} + (k-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \right) \left(\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + (k^2 - 1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \\ &\quad + (k-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ k+1 \end{Bmatrix} &\leq \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}^2 + (k^2 - 1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}^2 + (k-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \\ &\quad + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \\ &\leq \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}^2 + k^2 \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}^2 + 2k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \\ &= \left(\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \right)^2 \\ &= \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^2. \end{aligned}$$

■

Ainsi d'autre suites log-concaves :

1. Les nombres de Stirling (non-signés) de première espèce $(\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right])_{n \geq 0}$.
2. Les nombres de Stirling de deuxième espèce $(\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\})_{n \geq 0}$.
3. Les nombres d'Euler $\{E(n, k)\}_k$ et $\{E(n, k)\}_n$.

3.1.2 La q -log-concavité des suites de polynômes

Définition 3.4. Soient q une variable, $f(q)$ et $g(q)$ deux polynômes dans $\mathbb{R}[q]$. On dit $f(q) \leq_q g(q)$ si et seulement si pour tout entier $k \geq 0$ les coefficients de q^k dans le polynôme $f(q)$ sont inférieures ou égales aux coefficients de q^k dans le polynôme $g(q)$.

Définition 3.5. [20] Soit $f(q)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[q]$, la suite $\{f_k(q)\}_{k \geq 0}$ est dite q -log-concave si pour tout entier k positifs on a :

$$f_{k-1}(q)f_{k+1}(q) \leq_q f_k^2(q).$$

Définition 3.6. [17, 18] La suite des polynômes $\{f_k(q)\}_{k \geq 0}$ est dite fortement q -log-concave si on a :

$$f_{k-1}(q)f_{l+1}(q) \leq_q f_k(q)f_l(q), \forall 0 \leq k \leq l.$$

Remarque 3.7. Toute suite fortement q -log-concave est q -log-concave. La réciproque n'est pas vraie en générale.

Exemple 3.8. La suite $\{q^2, q + q^2, 1 + 2q + q^2, 4 + q + q^2\}$ est q -log concave, mais n'est pas fortement q -log concave.

3.1.3 Approche des chemins de Gessel et Viennot

Maintenant nous abordons l'approche des chemins de Gessel et Viennot [14] qui nous permet d'établir la log-concavité et la q -log-concavité forte de certaines suites associées aux fonctions symétriques élémentaires et complètes. L'idée principale utilisée est une interprétation combinatoire de déterminants utilisant des chemins de réseau.

Définition 3.9. [4] Un chemin P dans le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une suite

$$P = (s_0, s_1, \dots, s_n), \tag{3.3}$$

de points $s_i = (x_i, y_i)$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec

$$s_{i+1} = \begin{cases} s_i + (1, 0) & \text{ou,} \\ s_i + (0, 1), \end{cases}$$

pour $0 \leq i \leq n - 1$. Le point s_0 est la source du chemin, et le point s_n est son but. La Figure 3.1 donne l'illustration d'un chemin de longueur 13 allant de $(0, 0)$ à $(9, 4)$.

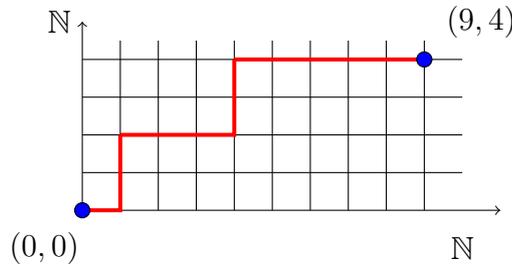


FIGURE 3.1 – Un chemin allant de $(0, 0)$ à $(9, 4)$.

Considérons un chemin de réseaux P dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui utilise seulement des pas unitaire vertical p_i ou horizontal, un tel chemin est donné par la Figure 3.2 :

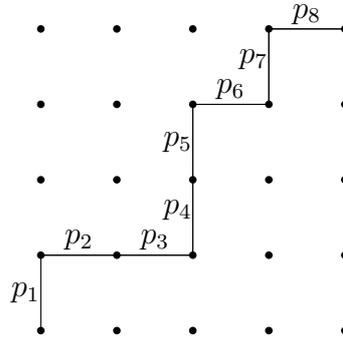


FIGURE 3.2 – Un chemin P .

Notons que si u est le point de départ de P et v son point d'arrivée, alors on écrit

$$u \xrightarrow{P} v.$$

Définition 3.10. Soit $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ un chemin, nous allons étiqueter les pas vertical de P en utilisant l'un des deux étiquettes suivantes :

1. Le e -étiquetage attribue l'étiquette

$$L(p_i) = i, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

2. Le h -étiquetage attribue l'étiquette

$$\tilde{L}(p_i) = (\text{le nombre des } p_j \text{ qui précèdent } p_i) + 1, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

La Figure 3.3 montre le e -étiquetage et le h -étiquetage.

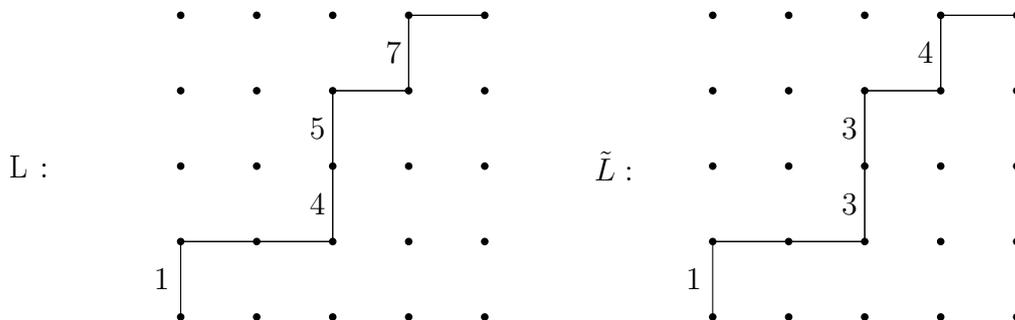


FIGURE 3.3 – Illustration d'un e -étiquetage et h -étiquetage.

Noter bien que les étiquetages sont invariant par translation.

Définition 3.11. Soit P un chemin

- Le e -monôme associé au e -étiquetage est donné par

$$X^P = \prod_{p_i \in P} x_{L(p_i)}. \quad (3.4)$$

- Le h -monôme associé au h -étiquetage est donné par

$$\tilde{X}^P = \prod_{p_i \in P} x_{\tilde{L}(p_i)}. \quad (3.5)$$

- On définit le monôme associé au couple de chemins (P_1, P_2) comme suit :

$$X^{P_1 P_2} = X^{P_1} X^{P_2}.$$

De la définition précédente, il est facile d'avoir les résultats suivants.

Proposition 3.12.

$$e_k(n) = \sum_P X^P,$$

tel que $(a, b) \xrightarrow{P} (a + n - k, b + k)$ pour tout (a, b) fixé.

Et

$$h_k(n) = \sum_P \tilde{X}^P,$$

tel que $(a, b) \xrightarrow{P} (a + n - 1, b + k)$ pour tout (a, b) fixé.

Remarque 3.13. Le nombre des chemins possible $(a, b) \xrightarrow{P} (a + n - k, b + k)$ est le nombre binomial $\binom{n}{k}$, ainsi pour $(a, b) \xrightarrow{P} (a + n - 1, b + k)$ égale à $\binom{n+k-1}{k}$.

Proposition 3.14. Soient P_1, P_2 deux chemins tels que u_1 et u_2 sont leurs points de départ respectivement. On aura alors

1. Pour la fonction symétrique élémentaire :

$$e_k(n)^2 - e_k(n-1)e_k(n+1) = \begin{vmatrix} e_k(n) & e_k(n+1) \\ e_k(n-1) & e_k(n) \end{vmatrix} = \sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} X^{P_1 P_2}. \quad (3.6)$$

2. Et pour la fonction symétrique complète :

$$h_k(n)^2 - h_k(n-1)h_k(n+1) = \begin{vmatrix} h_k(n) & h_k(n+1) \\ h_k(n-1) & h_k(n) \end{vmatrix} = \sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} X^{P_1 P_2}. \quad (3.7)$$

Avec

$$(-1)^{P_1 P_2} = \begin{cases} +1, & \text{si } u_1 \xrightarrow{P_1} v_1 \text{ et } u_2 \xrightarrow{P_2} v_2, \\ -1, & \text{si } u_1 \xrightarrow{P_1} v_2 \text{ et } u_2 \xrightarrow{P_2} v_1. \end{cases}$$

Les applications suivantes jouent un rôle clé dans la preuve des résultats principaux du mémoire.

Définition 3.15. Soient P_1, P_2 deux chemins tels que $u_1 \xrightarrow{P_1} v_1$ et $u_2 \xrightarrow{P_2} v_2$. On donne l'involution suivante :

$$\iota(P_1, P_2) = (P'_1, P'_2),$$

tel que

1. Si $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, alors $P'_1 = P_1$ et $P'_2 = P_2$,
2. Si $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, alors

$$P'_1 := u_1 \xrightarrow{P_1} v_0 \xrightarrow{P_2} v_2 \text{ et } P'_2 := u_2 \xrightarrow{P_2} v_0 \xrightarrow{P_1} v_1,$$

où v_0 est le dernier point d'intersection de P_1 et P_2 .

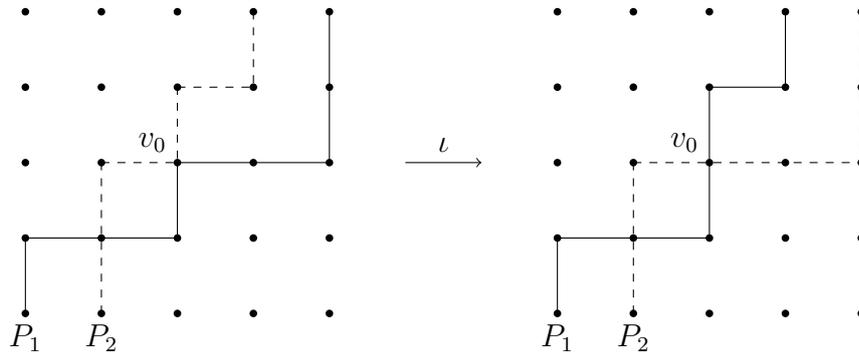


FIGURE 3.4 – L'involution ι .

Définition 3.16. Soient P_1, P_2 deux chemins, et τ_d une application définie par :

$$\tau_d(P_1, P_2) = (\tau_d P_1, P_2),$$

avec τ_d est une translation de première composante par un seul pas vertical ou horizontal.

Définition 3.17. Considérons l'involution de commutation σ comme suit :

$$\sigma(P_1, P_2) = (P'_1, P'_2),$$

où P'_1 est le chemin P_2 translaté au point initial de P_1 , et vice versa pour P'_2 .

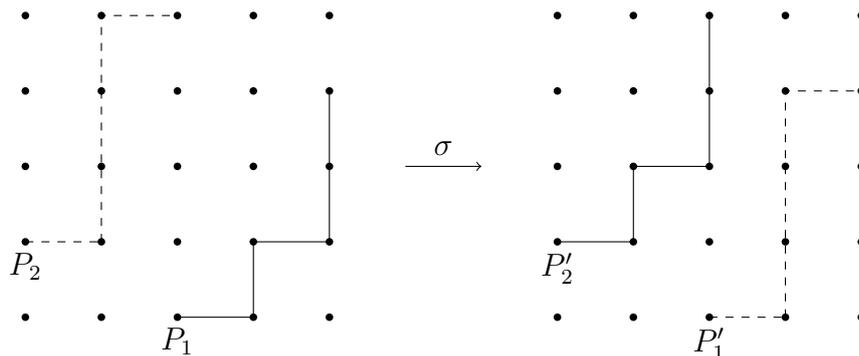


FIGURE 3.5 – L’involution de commutation σ .

3.2 Résultats principaux

Maintenant, nous allons énoncer les résultats principaux du mémoire.

Théorème 3.18. [18] *Si la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est fortement x -log-concave. Alors les suites suivantes :*

1. *Pour n fixé : $(e_k(n))_{k \geq 0}$ et $(h_k(n))_{k \geq 0}$,*
2. *Pour k fixé : $(e_k(n))_{n \geq 0}$ et $(h_k(n))_{n \geq 0}$,*
3. *Pour n et k fixés : $(e_{k-j}(n+j))_{j \geq 0}$ et $(h_{k-j}(n+j))_{j \geq 0}$,*

sont aussi fortement x -log-concave.

Preuve. Posons $(x_n)_{n \geq 0}$ est fortement x -log-concave.

1. Pour n fixé.

Pour prouver la x -log-concavité forte de $(e_k(n))_{k \geq 0}$ il suffit de vérifier que

$$e_k(n)e_l(n) - e_{k-1}(n)e_{l+1}(n) \geq_x 0, \text{ pour } l \geq k. \quad (3.8)$$

D’après la définition du déterminant de Jacobi-Trudi, la relation (3.8) s’écrit comme suit :

$$\begin{aligned} e_k(n)e_l(n) - e_{k-1}(n)e_{l+1}(n) &= \begin{vmatrix} e_l(n) & e_{k-1}(n) \\ e_{l+1}(n) & e_k(n) \end{vmatrix} = |e_{\lambda'_j - j + i}(x)|_{\lambda'_1 \times \lambda'_1} \\ &= s_n(\lambda, x) \geq_x 0, \end{aligned}$$

où $\lambda = (l, k)$, λ' le conjugué de λ et $\lambda'_1 = 2$.

Comme exemple, pour $n = 3$, $k = 1$, $l = 2$, on a

$$\begin{aligned} e_1(3)e_2(3) - e_0(3)e_3(3) &= \begin{vmatrix} e_2(3) & e_0(3) \\ e_3(3) & e_1(3) \end{vmatrix} = s_3(\lambda, x_1, x_2, x_3) \\ &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 \geq_x 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour la x -log-concavité forte de $(h_k(n))_{k \geq 0}$ on a :

$$\begin{aligned} h_k(n)h_l(n) - h_{k-1}(n)h_{l+1}(n) &= \begin{vmatrix} h_l(n) & h_{k-1}(n) \\ h_{l+1}(n) & h_k(n) \end{vmatrix} = |h_{\lambda_j - j + i}(x)|_{r \times r} \\ &= s_n(\lambda, x) \geq_x 0. \end{aligned}$$

où $\lambda = (l, k)$ et $l(\lambda) = r = 2$.

Autre méthode :

3.2. Résultats principaux

Pour montrer que $(h_k(n))_{k \geq 0}$ est fortement x -log-concave, il suffit d'utiliser l'approche des chemins de Gessel et Viennot qui nous donne :

$$h_l(n)h_k(n) - h_{l-1}(n)h_{k+1}(n) = \sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} X^{P_1 P_2} \geq_x 0, \text{ pour } k \geq l, \quad (3.9)$$

avec les conditions suivantes

- $u_1 = (0, 0)$,
- $u_2 = (0, k - l + 1)$,
- $v_1 = (n - 1, k)$,
- $v_2 = (n - 1, k + 1)$.

En appliquant l'involution ι de Définition 3.15 sur chaque h -monôme $X^{P_1 P_2}$ associé au couple de chemins (P_1, P_2) (qui se terminent dans la même ligne verticale) avec le signe -1 dans la relation (3.9) on obtient toujours au moins un h -monôme $X^{P'_1 P'_2}$ associé au couple de chemins (P'_1, P'_2) avec le signe $+1$ égale à $X^{P_1 P_2}$, c'est-à-dire $X^{P'_1 P'_2} - X^{P_1 P_2} = 0$, par ce que l'involution ι corrige le degré, (un exemple est donné dans la Figure 3.6). Cela implique qu'il existe une injection entre l'ensemble des couples des chemins (P_1, P_2) et l'ensemble des couples des chemins (P'_1, P'_2) . D'où l'inégalité (3.9) est vérifiée.

Comme exemple, pour $n = 3$, $l = 2$, et $k = 1$ on a

$$\begin{aligned} h_1(3)h_2(3) - h_0(3)h_3(3) &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad - (x_1x_2x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 \\ &\quad + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) \\ &= x_1(x_1x_2) + x_1(x_1x_3) + x_1(x_2x_3) + x_1(x_1^2) + x_1(x_2^2) \\ &\quad + x_1(x_3^2) + x_2(x_1x_2) + x_2(x_1x_3) + x_2(x_2x_3) + x_2(x_1^2) \\ &\quad + x_2(x_2^2) + x_2(x_3^2) + \underline{x_3(x_1x_2)} + x_3(x_1x_3) + x_3(x_2x_3) \\ &\quad + x_3(x_1^2) + x_3(x_2^2) + x_3(x_3^2) - (x_1x_2x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ &\quad + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) \\ &= s_3(\lambda, x_1, x_2, x_3) \geq_x 0. \end{aligned}$$

La Figure 3.6 présente l'effet de l'involution ι sur les deux monômes soulignés.

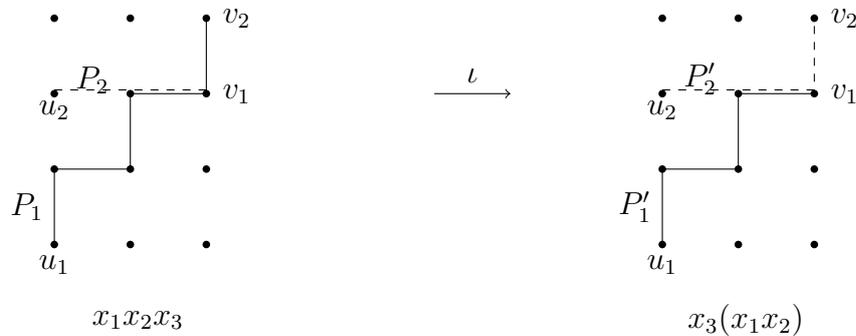


FIGURE 3.6 – L'effet de l'involution ι sur les deux e -monômes soulignés ci-dessus.

2. Pour k fixé.

Pour montrer que $(e_k(n))_{n \geq 0}$ est fortement x -log-concave, c'est-à-dire

$$e_k(m)e_k(n) - e_k(m-1)e_k(n+1) \geq_x 0, \quad n \geq m, \quad (3.10)$$

il suffit d'utiliser l'approche des chemins de Gessel et Viennot qui nous donne :

$$e_k(m)e_k(n) - e_k(m-1)e_k(n+1) = \sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} X^{P_1 P_2} \geq_x 0, \quad \text{pour } n \geq m, \quad (3.11)$$

avec les conditions suivantes :

- $u_1 = (0, 0)$,
- $u_2 = (n - m + 1, 0)$,
- $v_1 = (n - k, k)$,
- $v_2 = (n - k + 1, k)$.

En appliquant l'involution ι sur chaque e -monôme $X^{P_1 P_2}$ associé au couple de chemin (P_1, P_2) (qui se terminent dans la même ligne horizontale) avec le signe -1 dans la relation (3.11) on obtient un e -monôme $X^{P'_1, P'_2}$ associé au couple de chemin (P'_1, P'_2) avec le signe $+1$, et vérifient :

$$X^{P'_1 P'_2} - X^{P_1 P_2} = y \left(\prod_i x_{a_i} x_{b_i} - \prod_i x_{a_i-1} x_{b_i+1} \right),$$

tel que $a_i \leq b_i$ pour tout i . En particulier y est les portions de P_1 et P_2 qui sont fixées par ι (tout monôme se situe au nord-est de v_0) tandis que les produits représentent les parts qui sont commutées par ι . Alors comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est fortement x -log-concave, on aura donc

$$X^{P'_1 P'_2} - X^{P_1 P_2} \geq_x 0.$$

D'où l'inégalité (3.11) est vérifiée.

Comme exemple, pour $n = 3$, $k = 1$ et $m = 2$ on a

$$\begin{aligned} e_1(2)e_1(3) - e_1(1)e_1(4) &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ &= (x_1)(x_1) + (x_1)(x_2) + (x_1)(x_3) + (x_2)(x_1) + (x_2)(x_2) \\ &\quad + \underline{(x_2)(x_3)} - ((x_1)(x_1) + (x_1)(x_2) + (x_1)(x_3) + \underline{(x_1)(x_4)}) \\ &\geq_x 0. \end{aligned}$$

La Figure 3.7 présente l'effet de ι sur les deux monôme soulignés :

Maintenant pour montrer que $(h_k(n))_{n \geq 0}$ est fortement x -log-concave, c'est-à-dire

$$h_k(m)h_k(n) - h_k(m-1)h_k(n+1) \geq_x 0, \quad n \geq m,$$

on utilise le même principe avec les conditions suivantes :

- $u_1 = (0, 0)$,
- $u_2 = (n - m + 1, 0)$,
- $v_1 = (n - 1, k)$,
- $v_2 = (n, k)$.

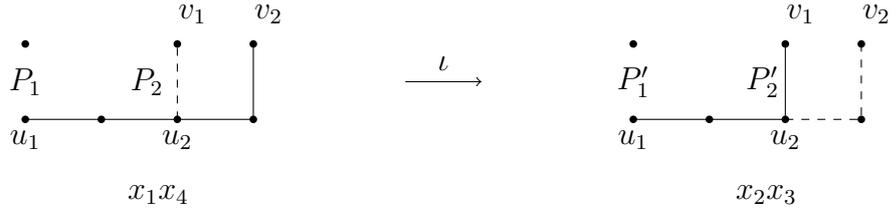


FIGURE 3.7 – L'effet de l'involution ι sur les deux monômes exposés ci-dessus.

Comme exemple, pour $n = 3$, $m = 2$ et $k = 1$ on a

$$\begin{aligned}
 h_1(2)h_1(3) - h_1(1)h_1(4) &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\
 &= (x_1)(x_1) + (x_1)(x_2) + (x_1)(x_3) + (x_2)(x_1) + (x_2)(x_2) \\
 &\quad + \underline{(x_2)(x_3)} - ((x_1)(x_1) + (x_1)(x_2) + (x_1)(x_3) + \underline{(x_1)(x_4)}) \\
 &\geq_x 0.
 \end{aligned}$$

La Figure 3.8 présente l'effet de ι sur les deux monômes soulignés

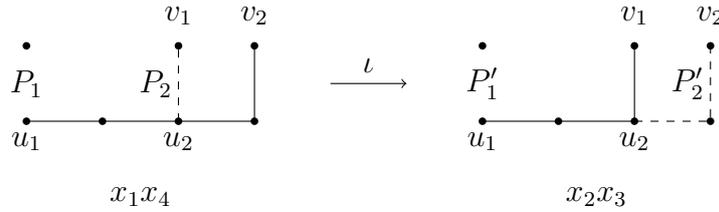


FIGURE 3.8 – L'application de l'involution ι sur les deux monômes soulignés.

3. Pour n et k fixés.

On dit que $(h_{k-j}(n+j))_{j \geq 0}$ est fortement x -log-covcave si on a :

$$h_k(n)h_l(m) - h_{k-1}(n+1)h_{l+1}(m-1) \geq_x 0 \quad (3.12)$$

où $n \geq m$, $l \geq k$ et $k+n = m+l$.

D'abord on montre ça pour $j = 0$, c'est-à-dire

$$h_k^2(n) - h_{k-1}(n+1)h_{k+1}(n-1) \geq_x 0 \quad (3.13)$$

Il suffit d'utiliser l'approche des chemins de Gessel et Viennot avec les conditions suivantes :

- $u_1 = (0, 0)$,
- $u_2 = (1, -1)$,
- $v_1 = (n-1, k)$,
- $v_2 = (n, k-1)$.

Pour vérifier l'égalité (3.13), il suffit de prouver que pour chaque h -monôme $\tilde{X}^{P_1 P_2}$ associé au couple de chemins (P_1, P_2) avec le signe -1 , il existe au moins un h -monôme $\tilde{X}^{P''_1 P''_2}$ associé au couple de chemins (P''_1, P''_2) avec le signe $+1$ tel que $\tilde{X}^{P''_1 P''_2} - \tilde{X}^{P_1 P_2} \geq_x 0$.

Pour faire ça, on combine les trois applications ι , τ_d , σ données aux Définition 3.15, Définition 3.16 et Définition 3.17 respectivement dans la composition suivante :

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{\tau_N^{-1} \iota \tau_N} (P'_1, P'_2) \xrightarrow{\sigma \tau_E^{-1} \iota \tau_E} (P''_1, P''_2) \quad (3.14)$$

Cependant, après τ_N et avant ι les chemins P_1 et P_2 se terminent dans la même ligne horizontale, et par la x -log-concavité forte de $(x_n)_{n \geq 0}$, on obtient dans la première partie de la composition

$$\tilde{X}^{P'_1 P'_2} \geq \tilde{X}^{P_1 P_2}. \quad (3.15)$$

Ensuite, après τ_E et avant ι les chemins P'_1 et P'_2 commencent dans la même ligne verticale, on trouve alors

$$\tilde{X}^{P''_1 P''_2} = \tilde{X}^{P'_1 P'_2} \quad (\text{tous des injections}). \quad (3.16)$$

D'où le résultat.

Pour le cas général

$$h_k(n)h_l(m) - h_{k-1}(n+1)h_{l+1}(m-1) \geq_x 0,$$

avec $k \leq l$ et $k+n = l+m$, on fait la même chose en utilisant la composition suivante :

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{\tau_N^{-1} \iota \tau_N} (P'_1, P'_2) \xrightarrow{\sigma \tau_E^{m-n-1} \tau_N^{n-m} \iota \tau_E^{n-m+1} \tau_N^{m-n}} (P''_1, P''_2) \quad (3.17)$$

avec les conditions suivantes :

- $u_1 = (0, 0)$,
- $u_2 = (n - m + 1, m - n - 1)$,
- $v_1 = (n - 1, k)$,
- $v_2 = (n, k - 1)$.

Comme exemple, pour $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$ et $l = 3$ on a

$$\begin{aligned} h_2(3)h_3(2) - h_1(4)h_4(1) &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^3 + x_2^3 \\ &\quad + x_1^2x_2 + x_1x_2^2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1^4) \\ &= x_1^2(x_1^3) + x_1^2(x_2^3) + x_1^2(x_1^2x_2) + x_1^2(x_1x_2^2) + x_2^2(x_1^3) \\ &\quad + x_2^2(x_2^3) + x_2^2(x_1^2x_2) + x_2^2(x_1x_2^2) + x_3^2(x_1^3) + x_3^2(x_2^3) \\ &\quad + x_3^2(x_1^2x_2) + x_3^2(x_1x_2^2) + x_1x_2(x_1^3) + x_1x_2(x_2^3) \\ &\quad + x_1x_2(x_1^2x_2) + x_1x_2(x_1x_2^2) + x_1x_3(x_1^3) + x_1x_3(x_2^3) \\ &\quad + x_1x_3(x_1^2x_2) + x_1x_3(x_1x_2^2) + x_2x_3(x_1^3) + x_2x_3(x_2^3) \\ &\quad + x_2x_3(x_1^2x_2) + x_2x_3(x_1x_2^2) \\ &\quad - ((x_1x_1^4) + (x_2x_1^4) + (x_3x_1^4) + (x_4x_1^4)) \\ &\geq_x 0. \end{aligned}$$

Et la composition suivante :

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{\tau_N^{-1} \iota \tau_N} (P'_1, P'_2) \xrightarrow{\sigma \tau_E^{-2} \tau_N \iota \tau_E^2 \tau_N^{-1}} (P''_1, P''_2). \quad (3.18)$$

3.2. Résultats principaux

La Figure 3.9 présente l'effet de la composition (3.18) sur les deux monômes soulignés.

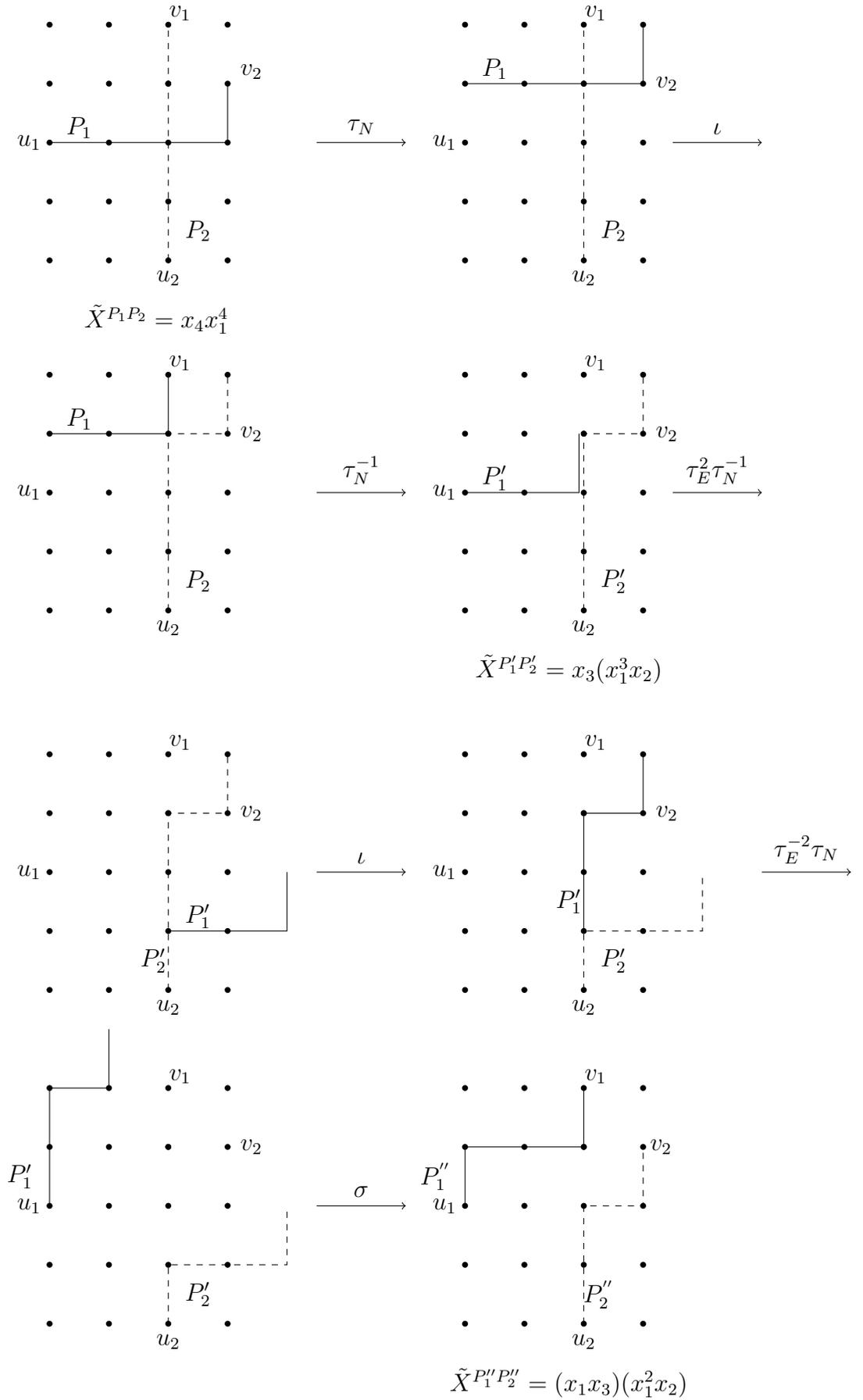


FIGURE 3.9 – L'application de la composition (3.18) sur les deux monômes soulignés ci-dessus.

De la même manière pour la x -log-concavité forte de $(e_{k-j}(n+j))_{j \geq 0}$, il suffit de prendre les conditions suivantes :

- $u_1 = (0, 0)$,
- $u_2 = (2(n-m+1), m-n-1)$,
- $v_1 = (n-k, k)$,
- $v_2 = (n-k+2, k-1)$,

et la composition suivante :

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{\tau_E \tau_N^{-1} \iota \tau_E^{-1} \tau_N} (P'_1, P'_2) \xrightarrow{\sigma \tau_E^{2m-2n-1} \tau_N^{n-m} \iota \tau_E^{2n-2m+1} \tau_N^{m-n}} (P''_1, P''_2) \quad (3.19)$$

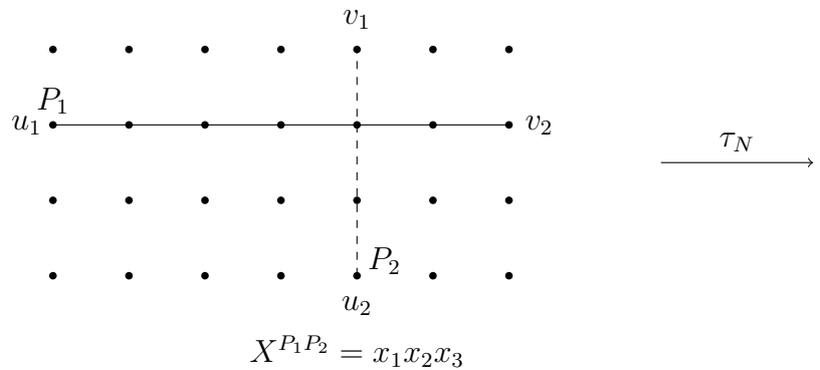
Comme exemple, Pour $m = 4$, $l = 2$, $n = 5$ et $k = 1$ on a

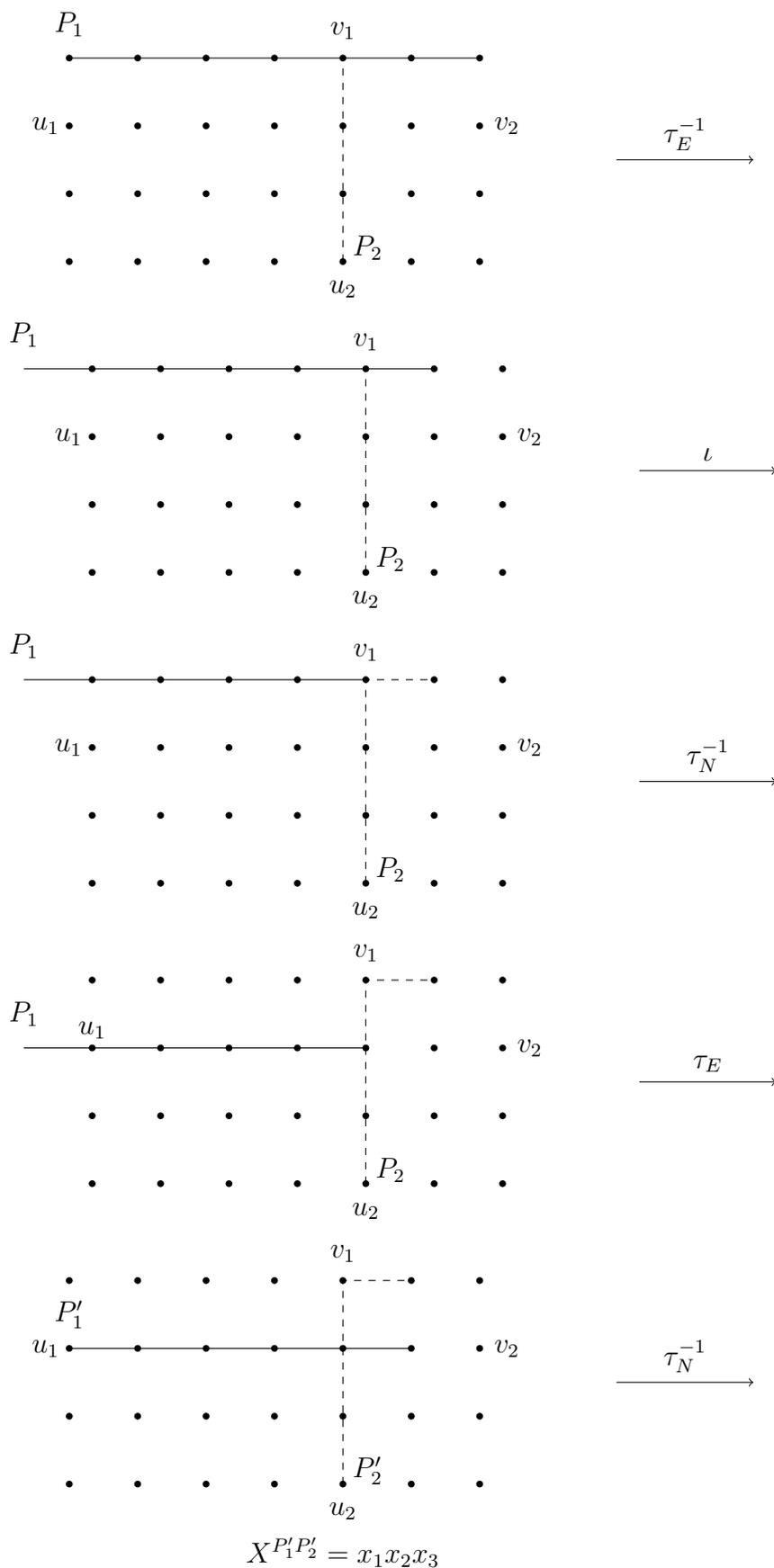
$$\begin{aligned} e_1(5)e_2(4) &- e_0(6)e_3(3) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)((x_1x_2) + (x_1x_3) + (x_1x_4) \\ &\quad + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - (x_1x_2x_3) \\ &= x_1(x_1x_2) + x_1(x_1x_3) + x_1(x_1x_4) + \underline{x_1(x_2x_3)} + x_1(x_2x_4) + x_1(x_3x_4) \\ &\quad + x_2(x_1x_2) + x_2(x_1x_3) + x_2(x_1x_4) + x_2(x_2x_3) + x_2(x_2x_4) + x_2(x_3x_4) \\ &\quad + x_3(x_1x_2) + x_3(x_1x_3) + x_3(x_1x_4) + x_3(x_2x_3) + x_3(x_2x_4) + x_3(x_3x_4) \\ &\quad + x_4(x_1x_2) + x_4(x_1x_3) + x_4(x_1x_4) + x_4(x_2x_3) + x_4(x_2x_4) + x_4(x_3x_4) \\ &\quad + x_5(x_1x_2) + x_5(x_1x_3) + x_5(x_1x_4) + x_5(x_2x_3) + x_5(x_2x_4) + x_5(x_3x_4) \\ &\quad - \underline{(x_1x_2x_3)} \\ &\geq_x 0. \end{aligned}$$

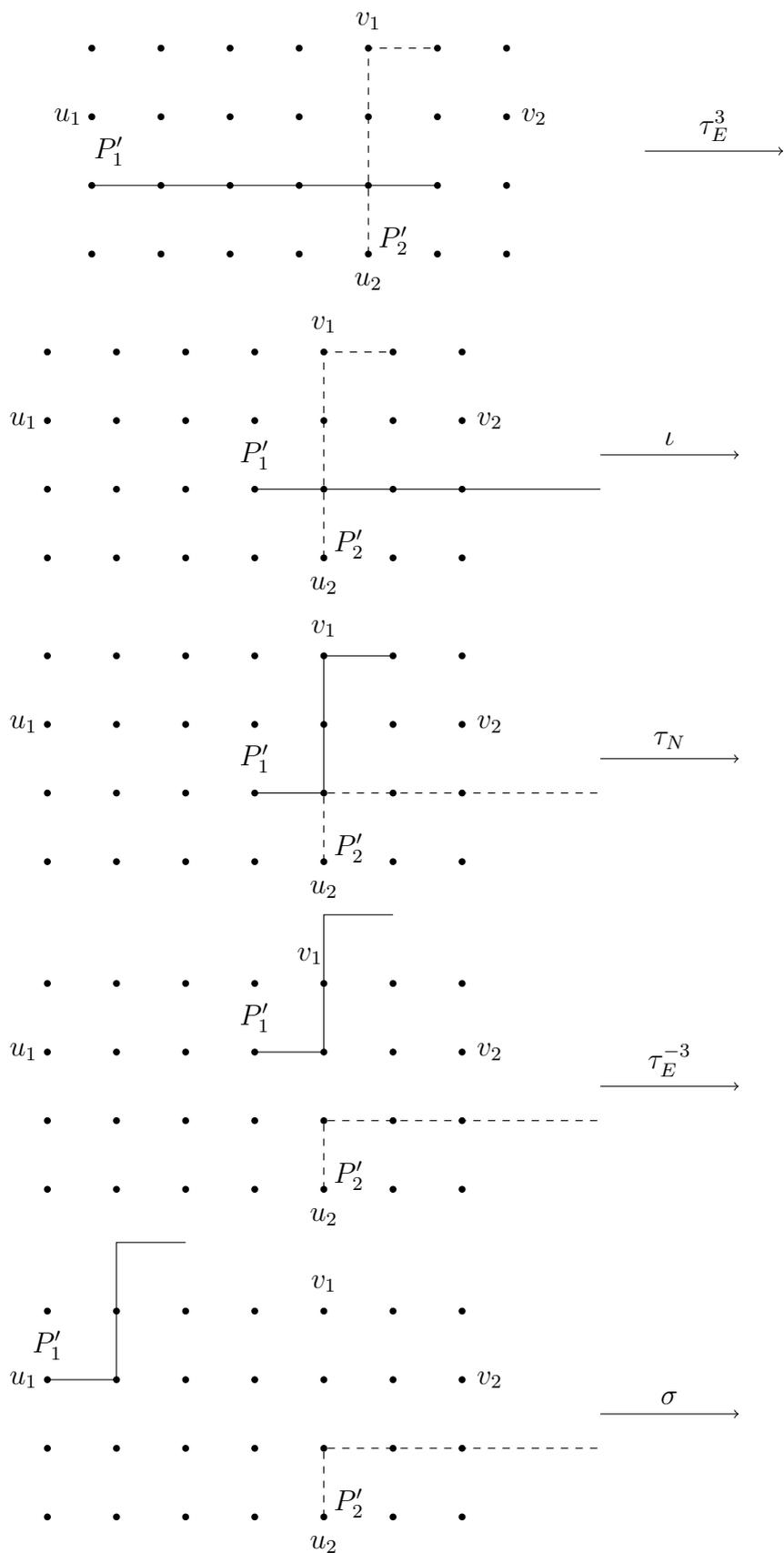
Et la composition suivante :

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{\tau_E \tau_N^{-1} \iota \tau_E^{-1} \tau_N} (P'_1, P'_2) \xrightarrow{\sigma \tau_E^{-3} \tau_N \iota \tau_E^3 \tau_N^{-1}} (P''_1, P''_2). \quad (3.20)$$

La Figure 3.10 présente l'application de la composition (3.20) sur les deux monômes soulignés.







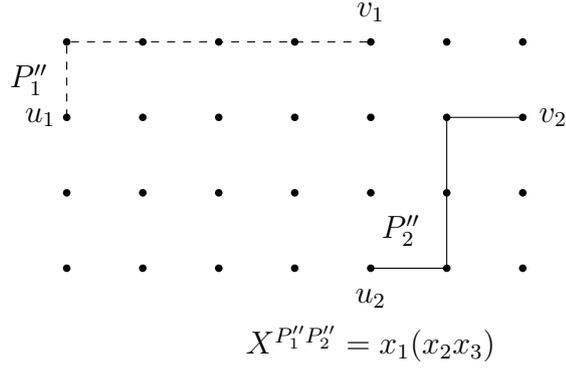


FIGURE 3.10 – L’application de la composition (3.20) sur les deux monômes exposés ci-dessus.

■

3.3 Applications

Comme applications, il résulte immédiatement du Théorème 3.18, de Proposition 2.29 et de Proposition 2.19 que

Corollaire 3.19. *Les suites suivantes sont fortement q -log-concaves :*

$$\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \right)_{k \geq 0}, \quad \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \right)_{n \geq 0}, \quad \left(\begin{bmatrix} n+j \\ k-j \end{bmatrix}_q \right)_{j \geq 0}.$$

Corollaire 3.20. *La suite $\left(\begin{bmatrix} n+j \\ k-j \end{bmatrix} \right)_{j \geq 0}$ est log-concave.*

Corollaire 3.21. *Les suites suivantes sont fortement q -log-concaves :*

$$(S_q(n, k))_{k \geq 0}, \quad (S_q(n, k))_{n \geq 0}, \quad (S_q(n+j, k-j))_{j \geq 0}.$$

Corollaire 3.22. *La suite $\left(\begin{Bmatrix} n+j \\ k-j \end{Bmatrix} \right)_{j \geq 0}$ est log-concave.*

Corollaire 3.23. *Les suites suivantes sont fortement q -log-concaves :*

$$(s_q(n, k))_{k \geq 0}, \quad (s_q(n+j, k-j))_{j \geq 0}.$$

Corollaire 3.24. *La suite $\left(\begin{bmatrix} n+j \\ k-j \end{bmatrix} \right)_{j \geq 0}$ est log-concave.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la log-concavité et la q -log-concavité forte des suites associées aux fonctions symétriques élémentaires et complètes. Nous avons constaté que ces propriétés sont parfois difficile à établir par des approches analytique, pour cela nous avons utilisé une preuve combinatoire qui consiste à construire des injections en basant sur l'interprétation des déterminants utilisant des chemins de réseaux dus à Gessel et Viennot ainsi le déterminant de Jacobi-Trudi, ce travail fait l'objet de l'article de Sagan [18].

Comme applications, nous avons vérifié la log-concavité des suites de coefficients binomiaux et des nombres de Stirling, ainsi la q -log-concavité forte de q -analogue de ces suites.

Bibliographie

- [1] M. Ahmia, *Log-concavité, log-converxité et unimodalité de suites numériques*, Thèse de doctorat, USTHB (2015).
- [2] M. Ahmia, *Sur la log-concavité des suites numériques*, Mémoire de Magister en Mathématiques, (2009).
- [3] O. Azenhas, *Schur functions : tableaux, determinant formulas and lattices paths*, CMUC, November 24, 2008.
- [4] F. Bergeron, *Introduction à la combinatoire Algébrique*, Hiver 2015.
- [5] I. Bousbaa, *Combinatoire des suites de Stirling généralisées*, Thèse de doctorat, USTHB (2017).
- [6] A. Boussayoud, *Fonction Symétrique*, Cour de Master 1, Université de Jijel (2016).
- [7] F. Brenti, *Unimodal, log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics*, Mem. Amer. Math. Soc. no. 413 (1989).
- [8] L. M. Butler, *The q -log-concavity of q -binomial coefficient*, IMA Preprint Séries 418 (April 1988).
- [9] B. Farhi, *Sur les nombres de Stirling de seconde espèce*, Université de Béjaia Algérie, 22 avril 2014.
- [10] B. Farhi, *Sur les nombres de Stirling de 1^{re} espèce*, Université de Béjaia Algérie, 11 novembre 2013.
- [11] J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant*, 1935,(Cité page 13).
- [12] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA*, second edition, 1994. A foundation for computer science. (Cité pages 1 et 13).
- [13] I. Gessel, *Determinants and plane partitions*, unpublished manuscript, 1989.
- [14] I. Gessel, G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. 58(1985), 300-321.
- [15] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.
- [16] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, 1906. (Cité pages 13 et 36).
- [17] B. E. Sagan, *Inductive proofs of q -log concavity*, Discrete Math. 99 (1992) 289–306.
- [18] B. E. Sagan, *Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi-Trudi determinants*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992) 795-811.

- [19] W. Serhan, *Monoïde plaxique décalé et tableaux de Young*, université du Québec à Montréal, Novembre 2015.
- [20] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. 576 (1989) 500-534.
- [21] J. Stirling, *Methodus differentialis*, london, 1730. English translation, The Differential Method, 1749. (Cité page 13).
- [22] A. Young, *Quantative substitutional analysis I*. Dan : Proc. London Math. Soc. 33 (1901), p. 97-146.