République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :...........
№ de séries :.........

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master
Spécialité : Mathématiques
Option : Mathématiques Fondamentales et Discrètes

Thème

Action des Opérateurs de Hecke sur l'Espace des Formes Modulaires

Présenté par :

- Amel Belmehnouf
- Wafa Boulahmar

Devant le jury :

Président	: A. Bouchair	Univ.Jijel
Encadreur	: M. Kemiha	Univ.Jijel
Examinateur	: M. Chelgham	Univ.Jijel

2017/2018

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mme : Kemiha Mounira, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous tenons à remercier tous les enseignants du département de mathématiques pour nous avoir fourni des informations et des concepts tout au long de nos années de formation, sans oublier de remercier tous les enseignants qui nous ont enseignées depuis l'école primaire.

Enfin, nous tenons également à remercier nos familles et nos amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Table des matières

Introduction

La théorie des formes modulaires est l'une des théories les plus fructueuses du XX^e siècle, elle a été grandement popularisée par les travaux de Wils en 1999 démontrant le dernier théorème de Fermat. Issues de la branche des mathématiques étudiant les variables complexes, les formes modulaires se trouvent au croisement de différentes théories, comme la théorie des nombres, la géométrie algébrique, la physique théorique et d'autres.

Elles interviennent de façon plus ou moins naturelle dans la théorie des fonctions elliptiques, des représentations unitaires du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{R})$, la fonction L et représentations du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$. Elles ont été aussi l'objet de plusieurs conjectures célèbres, comme la conjecture de Ramanujan ou la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil.

On rapporte qu'Eichler aurait dit un jour que les formes modulaires constituent la 5^{me} opération de l'arithmétique (après l'addition, la soustraction, la multiplication et la division).

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressées à l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des formes modulaires M_k et l'espace des formes paraboliques S_k, action induite par celle définie sur l'espace des fonctions holomorphes sur le demi plan de Poincaré, périodiques de période $T = 1$ et holomorphes à l'infini. Ces opérateurs, étudiés par Hecke dans les années 30, jouissent de propriétés remarquables.

Nous avons partagé ce mémoire en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on trouve l'essentiel concernant l'action d'un groupe sur un ensemble, en prenant les actions homographiques comme exemple. on trouve aussi des rappels sur les fonctions holomorphes et leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les formes modulaires et comme formes particulières les formes paraboliques et leurs propriétés, illustrées par des exemples.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace de ces formes.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons brièvement quelques définitions et résultats de base que nous allons utiliser tout au long de ce mémoire.

1.1 Groupes et action de groupe sur un ensemble

1.1.1 Groupes

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e.

Définition 1.1. *Une partie non vide H du groupe G est un sous groupe de G si :*

1. $e \in H$.
2. $\forall x, x' \in H, x \cdot x' \in H$.
3. $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.

Définition 1.2. *Un sous groupe H de G est dit normal dans G et on note $H \lhd G$, s'il vérifie : $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$.*

Lemme 1.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $H \lhd G$.
2. $\forall a \in G, aH \subset Ha$.
3. $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$.
4. $\forall a \in G, aHa^{-1} \subset H$.

Définition 1.4. *On appelle relation gauche modulo le sous groupe H, la relation d'équivalence notée $\mathcal{R}$ et définie par :*

$$\forall x, y \in G, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

La classe d'équivalence d'un élément x dans G est $\bar{x} = \{xh/h \in H\}$, notée aussi $x \cdot H$.

Proposition 1.5. *Si $H \triangleleft G$, l'ensemble quotient $G/\mathcal{R} = \{\bar{x}/x \in G\}$, a une structure de groupe pour la loi induite définie par : $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$.*

Remarques.
1- $G/\mathcal{R}$ est noté G/H.
2-L'élément neutre de G/H est $\bar{e} = H$.

Exemple 1.6. *Soit $GL_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre 2 et à coefficients dans $\mathbb{R}$; muni du produit des matrices et soit $SL_2(\mathbb{R})$ le groupe spécial linéaire, constitué des matrices de $GL_2(\mathbb{R})$ de déterminant égale à 1.*
$SL_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe normal de $GL_2(\mathbb{R})$.
En effet :

1. *On a $I_2 \in SL_2(\mathbb{R})$ car $detI_2 = 1$.*
2. *$\forall M, M' \in SL_2(\mathbb{R}) : MM' \in SL_2(\mathbb{R})$, car $det(MM') = detM.detM' = 1$.*
3. *$\forall M \in SL_2(\mathbb{R}), det(M^{-1}) = \frac{1}{detM} = 1$, donc $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{R})$.*
4. *$\forall M \in SL_2(\mathbb{R}), \forall A \in GL_2(\mathbb{R}) : det(AMA^{-1}) = detA.detM.detA^{-1} = detM = 1$. D'où $AMA^{-1} \in SL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow A \cdot SL_2(\mathbb{R}) \cdot A^{-1} \subset SL_2(\mathbb{R})$ et donc $SL_2(\mathbb{R}) \triangleleft GL_2(\mathbb{R})$.*

- *La relation gauche modulo $SL_2(\mathbb{R})$ est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall A, A' \in GL_2(\mathbb{R}) : A\mathcal{R}A' &\iff A^{-1} \cdot A' \in SL_2(\mathbb{R}) \\ &\iff detA^{-1} \cdot detA' = 1 \\ &\iff detA = detA'. \end{aligned}$$

- *Pour $A \in GL_2(\mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \cdot SL_2(\mathbb{R}) = \{A \cdot M/M \in SL_2(\mathbb{R})\} \\ &= \{A' \in GL_2(\mathbb{R})/detA = detA'\}. \end{aligned}$$

- *L'élément neutre de $GL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{R})$ est $\bar{I}_2 = SL_2(\mathbb{R})$.*

Définition 1.7. *Soit A une partie du groupe G. On appelle sous groupe engendré par A le plus petit sous groupe de G contenant A, noté $\langle A \rangle$ et défini par :*

$$\langle A \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} ... a_n^{\varepsilon_n}, n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, \varepsilon_i = \pm 1, \forall i = 1...n\}.$$

Si $G = \langle A \rangle$, on dit que G est engendré par A et que A est une partie génératrice de G.

Exemple 1.8. *Soit $SL_2(\mathbb{Z}) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} /a, b, c, d \in \mathbb{Z}, detA = 1\}$ et soient dans $SL_2(\mathbb{Z})$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors les matrices S et T engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Preuve. Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{Z}$; $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^2 = -I_2$, $ST = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $(ST)^3 = I_2$. Notons $H = \langle S, T \rangle$ le sous groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T ; il suffit de montrer que $SL_2(\mathbb{Z}) \subset H$.
Supposons le contraire, il existe donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $A \notin H$.

Soit $\mathcal{F} = \{A \in SL_2(\mathbb{Z}) \wedge A \notin H\}$ et soit $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$ tel que $\mid a_0 \mid \leqslant \mid a \mid, \forall a \in \mathbb{Z}$, tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$. Nécessairement $a_0 \neq 0$ car sinon, puisque $a_0 d_0 - b_0 c_0 = 1$, ceci implique $-b_0 c_0 = 1$ et donc $-b_0 = c_0 = \pm 1$
donc $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & d_0 \end{pmatrix} = \pm S T^{\pm d_0} \in H$, ce qui est absurde avec le fait que $A_0 \notin H$.
Soit q le quotient de la division euclidienne de $-b_0$ par a_0, alors $-b_0 = a_0 q + r$ avec $\mid r \mid < \mid a_0 \mid$. On a la matrice :
$A_0 T^q(-S) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 q + b_0 & -a_0 \\ c_0 q + d_0 & -c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -a_0 \\ c_0 q + d_0 & -c_0 \end{pmatrix}$ et $A_0 T^q(-S) \in \mathcal{F}$ avec $\mid r \mid < \mid a_0 \mid$, ce qui contredit la minimalité de $\mid a_0 \mid$.
D'où $SL_2(\mathbb{Z}) \subset H$ et donc $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$. $\square$

Définition 1.9. *Soient $(G,\cdot)$ et $(G',\cdot)$ deux groupes. Une application $f : G \to G'$ est dite homomorphisme de groupes si : $f(x \cdot x') = f(x) \cdot f(x'), \forall x, x' \in G$.*

Proposition 1.10. *Si $f : G \longrightarrow G'$ est un homomorphisme de groupes, alors on a :*

1. *$f(e) = e'$.*
2. *$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.*

Exemple 1.11. *Soit H un sous groupe normal de G. L'application :*

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/H \\ x &\longmapsto \pi(x) = \bar{x}. \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes appelé la surjection canonique.

1.1.2 Action d'un groupe sur un ensemble

Définition 1.12. *On appelle action du groupe G sur un ensemble E toute application :*

$$\Psi : G \times E \to E$$

$$(a, x) \mapsto \Psi(a, x),$$

qu'on note $\Psi(a, x) = a \cdot x$, vérifiant les deux conditions :

1. *$(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \forall x \in E, \forall a, b \in G$.*
2. *$e \cdot x = x, \forall x \in E$.*

On dira que G opère sur E, s'il existe une loi d'action de G sur E.

Définition 1.13. *Soit G un groupe opérant sur l'ensemble E et soit $x \in E$. On appelle stabilisateur de x le sous groupe de G, noté G_x, défini par $G_x = \{a \in G / a \cdot x = x\}$.*

Définition 1.14. *On appelle orbite (ou trajectoire) de x le sous ensemble de E noté T_x, défini par $T_x = \{y \in E / \exists a \in G / y = a \cdot x\} = \{a \cdot x / a \in G\}$.*

Proposition 1.15. *Si G opère sur E, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par :*

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists a \in G \text{ tel que } y = a \cdot x,$$

est une relation d'équivalence où T_x est la classe d'équivalence de x.

Définition 1.16. *L'action de G sur E est dite transitive si et seulement si $\forall x, y \in E$: $T_x = T_y = E$.*

Définition 1.17. *L'action de G sur E est dite fidèle si et seulement si $\bigcap\limits_{x\in E} G_x = \{e\}$. Ce qui est équivalent à : $a \cdot x = x, \forall x \in E \Longleftrightarrow a = e$.*

1.2 Espaces vectoriels et applications linéaires

1.2.1 Espaces vectoriels

Soit K un corps et soit E un espace vectoriel sur K.

Définition 1.18. *Soit F une partie de E. On dit que F est un sous espace vectoriel de E si :*

1. $F \neq \emptyset$.
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.
3. $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$.

Définition 1.19. *Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, le sous espace vectoriel $F + G$ défini par :*
$F+G = \{z \in E/\exists x \in F, \exists y \in G/z = x+y\}$ est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G .
En générale, si $F_1, F_2, ..., F_n$ sont des sous espaces vectoriels de E, la somme des $F_1, F_2, ..., F_n$ est définie par :$\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i = \{x \in E/\exists (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_n : x = x_1 + x_2 + ... + x_n\}$.

Définition 1.20. *La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, ..., F_n$ de E est dite somme directe si chaque élément de $\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $F_1, F_2, ..., F_n$, elle est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n$.*

Théorème 1.21. *La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, ..., F_n$ de E est directe si et seulement si la propriété suivante est vérifié :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, 2 \leqslant p \leqslant n, (F_1 + F_2 + ... + F_{p-1}) \cap F_p = \{0\}$$

Théorème 1.22 (Caractérisation de la somme directe)**.**
Soit $(F_1, F_2, ..., F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on considère une base B_i de F_i. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *La somme $F_1 + F_2 + ... + F_n$ est directe.*
2. $\forall (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times ... \times F_n$, $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0_E \Longrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0_E$.

3. *La concaténation des bases* $B_1, ..., B_n$ *est une base de* $F_1 + ... + F_n$.
4. $dim(F_1 + ... + F_n) = dimF_1 + ... + dimF_n$.

Définition 1.23. *Une algèbre sur un corps commutatif* K *ou* K*-algèbre, est une structure algébrique* $(A, +, \cdot, \times)$ *telle que :*

i. $(A, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* K.

ii. $(A, +, \times)$ *est un anneau.*

iii. *Pour tout* $x, y \in A, \lambda \in K : (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$.

Définition 1.24. *Une algèbre graduée est une algèbre* A *pour laquelle il existe une famille* $(A_j)_{j \in J}$ *de sous espaces vectoriels de* A *tels que :*

1. $A = \bigoplus\limits_{j \in J} A_j$.
2. $A_i A_j \subset A_{i+j}, \forall i, j \in J$, *c'est à dire :* $\forall x \in A_i, \forall y \in A_j;\ x \times y \in A_{i+j}, \forall i, j \in J$.

1.2.2 Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 1.25. f *est dite linéaire si on a :*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in E$.
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in E$.

• *L'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F *muni de la somme des applications et la multiplication par scalaire est un espace vectoriel noté* $\mathcal{L}(E, F)$.
• *Si* $F = E$, f *est appelée endomorphisme de* E. *L'ensemble des endomorphismes de* E *est noté* $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.26. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et soit* $\lambda \in K$ *;* λ *est appelée valeur propre de* f *s'il existe* $x \in E$ *tel que* $x \neq 0_E$ *et* $f(x) = \lambda x$.
x *est dit vecteur propre associé à* λ.

Définition 1.27. *Si* A *est une matrice dans* $M_n(K)$, *on dit que* λ *est une valeur propre de* A *s'il existe* $v \in M_{n,1}(K)$ *tel que* $v \neq 0_{M_{n,1}(K)}$ *et* $Av = \lambda v$.

Définition 1.28. *Soit* $A \in M_n(K)$ *; on appelle polynôme caractéristique de* A *; le polynôme en* λ *noté* $P_A(\lambda)$ *et défini par :* $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.
Les racines de $P_A(\lambda)$ *dans* K *sont les valeurs propres de* A.

Définition 1.29. *Si* K *est un corps de caractéristique différente de* 2 *; une application* $\Phi : E \times E \to K$ *est appelée forme bilinéaire si on a :*

1. $\forall \alpha \in K, \forall (x, x', y) \in E^3 : \Phi(\alpha x + x', y) = \alpha \Phi(x, y) + \Phi(x', y)$, *c-à-d :* Φ *est linéaire par rapport à la première variable.*
2. $\forall \beta \in K, \forall (x, y, y') \in E^3 : \Phi(x, \beta y + y') = \beta \Phi(x, y) + \Phi(x, y')$ *c-à-d :* Φ *est linéaire par rapport à la deuxième variable.*
   $\mathcal{L}(E \times E, K)$, *l'ensemble des formes bilinéaires définies sur* $E \times E$ *muni des deux lois citées dans définition* (1.25) *est un espace vectoriel sur* K.

Définition 1.30. *Une forme bilinéaire Φ est dite symétrique si :*

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x), \forall x, y \in E.$$

Définition 1.31. *Supposons $K = \mathbb{R}$. Φ est dite définie positive si $\Phi(x, x) > 0$, $\forall x \in E - \{0\}$.*

Définition 1.32. *Un produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive.*

Définition 1.33. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une forme hermitienne sur E est une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, vérifiant :*

1. *h est linéaire par rapport à la première variable : $h(\lambda x + y, z) = \lambda h(x, z) + h(y, z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall (x, y, z) \in E^3$.*
2. *h est semi-linéaire par rapport à la deuxième variable : $h(x, \lambda y + z) = \bar{\lambda} h(x, y) + h(x, z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall (x, y, z) \in E^3$.*
3. *h vérifie la propriété de symétrie hermitienne : $h(y, x) = \overline{h(x, y)}, \forall (x, y) \in E^2$.*

Définition 1.34. *Un produit scalaire hermitien est une forme hermitienne définie positive.*

1.3 Fonctions holomorphes

1.3.1 Séries entières

On note par $D(o, \rho)$ (resp $\overline{D(o, \rho)}$) le disque ouvert (resp fermé) de centre 0 et de rayon ρ et par $\overset{\circ}{D}(0, \rho)$ son intérieur.

Définition 1.35. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. La série des fonctions de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est appelée série entière de centre z_0 et de coefficients a_n.*

Lemme 1.36. *Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{D(0, \rho)}$ de centre 0 et de rayon $\rho <|z_0|$.*

Définition 1.37. *On appelle rayon de convergence de la série le nombre positif $R = Sup\{r \in \mathbb{R}^* : (a_n r^n)_n$ soit bornée$\}$.*

Théorème 1.38. *Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente sur tout le disque fermé $\overline{D(0, r)}$ pour tout $r < R$ et divergente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$.*

1.3.2 Définitions et propriétés

Dans tout ce qui va suivre Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.39. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est holomorphe sur Ω si :*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe pour tout $z_0 \in \Omega$ et on note :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

appelée la dérivée de f en z_0.
L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est noté $\mathcal{H}(\Omega)$.

Proposition 1.40.
• *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors $f + g$ et fg appartiennent aussi à $\mathcal{H}(\Omega)$.*
• *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega'$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega')$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $z_0 \in \Omega$, $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Exemples 1.41.
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction : $z \longmapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
2. *La fonction : $z \longmapsto \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.*
3. *La fonction : $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$.*

Corollaire 1.42. *$\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la somme des fonctions et la multiplication par scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Définition 1.43. *Une fonction f est dite analytique sur Ω si pour tout disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, $D(z_0, r) \subset \Omega$, il existe $(c_n)_n \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, r).$$

On note par $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Théorème 1.44. *Si $f \in A(\Omega)$, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. De plus $f' \in A(\Omega)$.*

Corollaire 1.45. *Si $f \in A(\Omega)$ alors f a des dérivées de tout ordre et toutes ses dérivées sont dans $A(\Omega)$.*

Proposition 1.46. *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $f' = 0, \forall z \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.*

Proposition 1.47. *Si Ω est un ouvert connexe et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f constante sur Ω.*
2. *$Re(f)$ est constant sur Ω.*
3. *$Im(f)$ est constant sur Ω.*
4. *$|f|$ est constant sur Ω.*
5. *$\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Théorème 1.48. *1. Toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω.*

2. *Le rayon de convergence R de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n$ est supérieur ou égal à $d(z_0, \mathbb{C}\setminus\Omega)$;(La distance de z_0 à $\mathbb{C}\setminus\Omega$).*

3. $\forall\ 0<r<R$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mid c_n \mid^2 r^{2n} = \frac{1}{\Pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid^2 d\theta.$

Lemme 1.49. *Si $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ telle que $f(0)=0$ et si $\mid f(z) \mid < 1$ pour tout $z\in D(0,1)$, alors on a :*

1. $\forall z\in D(0,1)$, $|f(z)|\leqslant |z|$.
2. $|f^{'}(0)|\leqslant 1$.
3. *Si $|f'(0)|=1$ ou s'il existe $z\in D(0,1)\setminus\{0\}$ tel que $|f(z)|=|z|$ alors il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $|\lambda|=1$ et $f(z)=\lambda z$ pour tout $z\in D(0,1)$.*

Définition 1.50. *On dit que $f:\Omega\longrightarrow\Omega^{'}$ est biholomorphe si f est holomorphe sur Ω et bijectif et si f^{-1} est holomorphe sur $\Omega^{'}$.*
On dit dans ce cas que Ω et $\Omega^{'}$ sont conformément équivalents.

Théorème 1.51. *Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent à $D(0,1)$.*

Théorème 1.52. *Soit $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, périodique de période $T=1$; alors il existe une fonction $\widehat{f}:D(0,1)-\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ tel que $f(z)=\widehat{f}(q)\ /q=e^{2i\pi z}$, $\widehat{f}$ holomorphe sur $D(0,1)-\{0\}$, de plus les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{Imz\longrightarrow+\infty} f(z)$ *existe.*
2. $\widehat{f}$ *se prolonge par holomorphie en $z_0=0$.*
3. *f admet un développement en série entière en $z_0=0$ de rayon de convergence $R\geqslant 1$.*

Définition 1.53. *On dit que f est holomorphe en l'infini si $\widehat{f}$ est holomorphe en 0.*

Théorème 1.54. *Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. De plus, la fonction : $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,R)$ et $f^{'}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$.*

Lemme 1.55. *Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ soit convergente. Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.*

Théorème 1.56. *Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $|z_0|=R$ et tel que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ soit convergente de somme S_0. Alors la fonction $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ qui est holomorphe sur $D(0,R)$ a pour limite S_0 lorsque z tend vers z_0.*

1.3.3 Fonctions méromorphes

Séries de Laurent

Définition 1.57. *La série de fonctions de la forme* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée série de Laurent de centre* z_0 *et de coefficient* a_n.
La série $\sum\limits_{-\infty}^{1} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée sa partie principale et* $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée partie régulière.*

Théorème 1.58. *Si* f *est une fonction holomorphe sur la couronne* $C(z_0, r, R)$, *alors* f *est développable en série de Laurent dans* $C(z_0, r, R)$ *sous la forme* $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
De plus la série $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge normalement dans* $C(z_0, r', R')$ *pour tous* r', R' *tels que* $r < r'$ *et* $R < R'$ *et on a pour tout* $n \in \mathbb{Z}$: $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{c(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$, *pour* $r < \rho < R$.

Singularités

Définition 1.59. *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une application et soit* $z_0 \in \Omega$. *On dit que* z_0 *est une singularité isolée de* f *si et seulement s'il existe* $r > 0$ *tel que* $D(z_0, r) \subset \Omega$ *et* f *holomorphe sur* $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Théorème 1.60. *Soit* $z_0 \in \Omega$ *une singularité isolée de* f *et soit* $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ *le développement de* f *en série de Laurent autour de* z_0. *Alors l'un des trois cas se présente :*

1. $a_n = 0$ *pour tout* $n < 0$ *et on dit que* z_0 *est une singularité artificielle de* f.
2. *Il existe* $m \geqslant 1$ *tel que* $a_n = 0$ *pour tout* $n < -m$ *et on dit que* z_0 *est un pôle d'ordre* m *de* f.
3. *L'ensemble* $\{n \in \mathbb{N} / a_{-n} \neq 0\}$ *est infini et on dit que* z_0 *est une singularité essentielle de* f.

Définition 1.61. *Une application* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite méromorphe sur* Ω *s'il existe une suite* $(z_n)_n$ *dans* Ω *sans points d'accumulation dans* Ω *telle que :*

1. $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{(z_n)_n\})$.
2. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, z_n *est un pôle pour* f.

On note par $M(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions méromorphes. Si* Ω *est connexe alors* $M(\Omega)$ *est un corps.*

Chapitre 2

Les formes modulaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement aux formes modulaires et leurs propriétés et comme formes particulières on traite les formes paraboliques. Tout d'abord on va définir une action de groupe qui va nous guider vers le groupe modulaire dont nous allons étudier la structure. Puis on finit par les formes modulaires en donnant des exemples.

2.1 Actions homographiques

Définition 2.1. *On appelle demi plan de Poincaré, noté* $\mathbb{H}$*, l'ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / Im(z) > 0\}.$$

Définition 2.2. *On appelle transformation homographique, toute application* f *de la forme :*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \ /a, b, c, d, z \in \mathbb{C}.$$

• *Si* $c \neq 0$ *;* f *c'est une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$.
• *Si* $c = 0, d \neq 0$ *;* f *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *et s'appelle transformation affine.*

Exemples 2.3.
• *La transformation* $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ *est appelée transformation de Cayley.*
• *La transformation* $z \longmapsto \frac{1}{z}$ *est appelée l'inversion.*

On considère le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices carrés d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant 1.

Proposition 2.4. $SL_2(\mathbb{R})$ *opère transitivement sur* $\mathbb{H}$ *par l'action :*

$$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

appelée action homographique.

Preuve. 1. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$, en posant $A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$, on a :

$$\begin{aligned} Im(A \cdot z) &= Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = Im\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\ &= Im\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \left(\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\right) Im(z) \\ &= \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On en déduit que $Im(A \cdot z) > 0, \forall z \in \mathbb{H}$ et donc $A \cdot z \in \mathbb{H}$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Ceci donne l'existence de l'application :

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (A, z) &\longmapsto A \cdot z. \end{aligned}$$

Reste à vérifier les deux conditions citées dans la définition (1.12).

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ et soit $z \in \mathbb{H}$:
   On a : $(AB) \cdot z = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) \cdot z = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \cdot z$
   $$= \frac{(ae+bg)z + af + bh}{(ce+dg)z + cf + dh},$$

   d'autre part on a :

   $$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot z\right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) \\ &= \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} \\ &= \frac{(ae+bg)z + af + bh}{(ce+dg)z + cf + dh}. \end{aligned}$$

3. $I_2 \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = z.$

4. Pour la transitivité de cette action, il suffit de montrer que tout les éléments de $\mathbb{H}$ ont la même orbite et qui est $\mathbb{H}$.
   On a : $\forall z = x + iy \in \mathbb{H}$, il existe $A = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$ qui est dans $SL_2(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot i = z$, c'est à dire tous les éléments z de $\mathbb{H}$ sont dans la classe de i et donc $T_z = T_i$, $\forall z \in \mathbb{H}$ et l'action est transitive.

$\square$

Remarque. *L'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ n'est pas fidèle car pour $A \in SL_2(\mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bigcap_{z\in\mathbb{H}} SL_2(\mathbb{R})_z &\Longleftrightarrow A \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{H} \\ &\Longleftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z, \forall z \in \mathbb{H} \\ &\Longrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0, \forall z \in \mathbb{H} \\ &\Longrightarrow c = b = 0 \text{ et } a = d, \end{aligned}$$

comme $A \in SL_2(\mathbb{R})$, la condition :

$$\begin{aligned} ad - bc = 1 &\Longrightarrow a^2 = 1 \\ &\Longrightarrow a = \pm 1 \\ &\Longrightarrow A = \pm I_2. \end{aligned}$$

Comme $I_2 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{H}$, alors $\bigcap_{z\in\mathbb{H}} SL_2(\mathbb{R})_z = \{\pm I_2\}$.

2.2 Groupe modulaire

Soit $SL_2(\mathbb{Z})$ le sous groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition 2.5. *On appelle groupe modulaire le groupe quotient $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$.*

Proposition 2.6. *Le groupe modulaire Γ opère sur $\mathbb{H}$ par action homographique fidèle.*

Preuve. Posons pour $\bar{A} \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{H}$: $\bar{A} \cdot z = A \cdot z$, telle que pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$: $A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. On a : $\bar{A} \cdot z \in \mathbb{H}$ (proposition 2.4).

1. On montre que :

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (\bar{A}, z) &\longmapsto \bar{A} \cdot z = A \cdot z \text{ est une application.} \end{aligned}$$

Soient $(\bar{A}, z), (\bar{A}', z') \in \Gamma \times \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} (\bar{A}, z) = (\bar{A}', z') &\Longrightarrow \bar{A} = \bar{A}' \wedge z = z' \\ &\Longrightarrow A^{-1}A' \in \{\pm I_2\} \wedge z = z' \\ &\Longrightarrow A^{-1}A' = \pm I_2 \wedge z = z' \\ &\Longrightarrow A = \pm A' \wedge z = z'. \end{aligned}$$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$:
Si $A = A'$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a'z'+b'}{c'z'+d'} &\Longrightarrow A \cdot z = A' \cdot z' \\ &\Longrightarrow \bar{A} \cdot z = \bar{A}' \cdot z'. \end{aligned}$$

Si $A = -A'$, alors :

$$A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{-a'z-b'}{-c'z-d'} = \frac{-a'z'-b'}{-c'z'-d'} = \frac{a'z'+b'}{c'z'+d'} = A' \cdot z' \Longrightarrow \bar{A} \cdot z = \bar{A}' \cdot z'.$$

D'où ψ est une application.

2. Soient $\bar{A}, \bar{B} \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$:
   $*$ $(\bar{A}.\bar{B}) \cdot z = (\overline{AB}) \cdot z = (AB) \cdot z = A \cdot (B \cdot z) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \cdot z)$.
   $*$ $\bar{I_2} \cdot z = I_2 \cdot z = z$.
3. Soit $\bar{A} \in \bigcap_{z \in \mathbb{H}} \Gamma_z$:

$$\begin{aligned}
\bar{A} \in \bigcap_{z\in\mathbb{H}} \Gamma_z &\Longleftrightarrow \bar{A} \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{H} \\
&\Longleftrightarrow A \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{H} \\
&\Longleftrightarrow A = \pm I_2 \\
&\Longleftrightarrow \bar{A} = \overline{\pm I_2} = \{-I_2, I_2\} \\
&\Longleftrightarrow \bar{A} = e_\Gamma.
\end{aligned}$$

D'où $\bigcap_{z \in \mathbb{H}} \Gamma_z = \{e_\Gamma\}$ et donc l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est fidèle. □

Remarques. *De l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ on a :*

1. *Si $z \in \mathbb{H}$; $T_z = \{\bar{A} \cdot z / \bar{A} \in \Gamma\} = \{A \cdot z / A \in SL_2(\mathbb{Z})\}$*
   $= \{\frac{az+b}{cz+d} / a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$.
2. *Si z, z' sont deux éléments de $\mathbb{H}$ tel que $T_z = T_{z'}$, on dit que z et z' sont congrus modulo Γ.*
3. *Si $\overline{T}$, $\bar{S}$ sont les classes des matrices T et S dans Γ on a :*
   - $\overline{T} \cdot z = T \cdot z = z + 1$ *et* $\bar{S} \cdot z = S \cdot z = -\frac{1}{z}$.
   - $\overline{T^{-1}} \cdot z = T^{-1} \cdot z = z - 1$, $\overline{S}^{-1} \cdot z = S^{-1} \cdot z = -\frac{1}{z}$.

   et $\forall n \in \mathbb{Z} : \overline{T}^n \cdot z = T^n \cdot z = z + n$ *et* $\bar{S}^n \cdot z = S^n \cdot z = \begin{cases} z & \textit{Si } n \textit{ est pair.} \\ -\frac{1}{z} & \textit{Si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$

Dans tout ce qui va suivre un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ et sa classe dans Γ seront notés de la même manière.
Soit D l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par : $D = \{z \in \mathbb{H}, |Re(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|z| \geqslant 1\}$, est appelé le domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$.

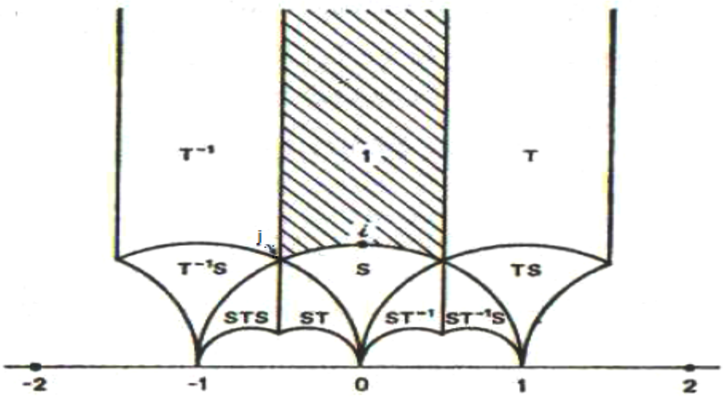

FIGURE 2.1 – Domaine fondamental D

Théorème 2.7.

1. *$\forall z \in \mathbb{H}, \exists B \in \Gamma$ tel que : $B \cdot z \in D$.*
2. *Si $z, z' \in D$, $z \neq z'$, sont congrus modulo Γ, alors :* $\begin{cases} Re(z) = \pm\frac{1}{2} \text{ et } z' = z \pm 1. \\ \vee \\ Re(z) < \frac{1}{2} \text{ et } \mid z \mid = 1 \text{ et } z' = -\frac{1}{z}. \end{cases}$
3. *Soit $z \in D$ et soit Γ_z le stabilisateur de z dans Γ. Alors $\Gamma_z = \{1\}$ sauf dans les cas suivants :*
   (a) *$z = i$, Γ_z est le groupe d'ordre 2 engendré par S ; $\Gamma_z = \{1, S\}$.*
   (b) *$z = j$, où $j = e^{2i\pi/3}$, Γ_z est le groupe d'ordre 3 engendré par ST ; $\Gamma_z = \{1, ST, (ST)^2\}$.*
   (c) *$z = -\bar{j}$, Γ_z est le groupe d'ordre 3 engendré par TS ; $\Gamma_z = \{1, TS, (TS)^2\}$.*

Preuve. 1. Soit $G = \langle S, T \rangle$, le sous groupe de Γ engendré par S et T. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / A \in G$ et $z \in \mathbb{H}$, et de la relation $Im(A \cdot z) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$, l'ensemble $\{Im(A \cdot z)/A \in G\}$ est fini et admet un maximum. Il existe alors $A_0 \in G$ tel que : $Im(A \cdot z) \leqslant Im(A_0 \cdot z)$, $\forall A \in G$. Comme $T^n(A_0 \cdot z) = A_0 \cdot z + n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on peut toujours trouver $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|Re(T^{n_0} \cdot (A_0 \cdot z))| \leqslant \frac{1}{2}$. Posons $z_0 = T^{n_0} \cdot (A_0 \cdot z)$, alors $z_0 = (T^{n_0} A_0) \cdot z$ et on a : $|z_0| \geqslant 1$, car sinon $Im(S \cdot z_0) = Im(-\frac{1}{z_0}) = \frac{Im(z_0)}{|z_0|^2} > Im(z_0)$. Or $Im(z_0) = Im(T^{n_0} \cdot A_0 z) = Im(A_0 z + n_0) = Im(A_0 z)$. On aurait $Im(S \cdot z_0) = Im((ST^{n_0} A_0) \cdot z) > Im(A_0 \cdot z)$, ce qui contredit la maximalité de $Im(A_0 z)$. D'où pour tout $z \in \mathbb{H}$, il existe $B = T^{n_0} A_0 \in \Gamma$ tel que $B \cdot z \in D$.

2. Pour la deuxième et troisième points : soient $z \in D$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ tels que $A \cdot z \in D$. Quitte à remplacer (z, A) par (Az, A^{-1}), on peut supposer que $Im(Az) \geqslant Im(z)$, c'est à dire que $\mid cz + d \mid \leqslant 1$. Ceci est impossible pour $\mid c \mid > 1$, donc on étudier les cas $c \in \{0, \pm 1\}$.
   Si $c = 0$, on a $d = \pm 1$ et A est translation par $\pm b$. Comme $R(z)$ et $R(Az)$ sont entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, on a soit $b = 0$ et $A = 1$, soit $b = \pm 1$, auquel cas l'un des nombres $R(z)$ et $R(Az)$ doit être égal à $-\frac{1}{2}$ et l'autre à $\frac{1}{2}$.

Si $c = 1$, alors $d = 0$, sauf si $z = j($ ou $-\overline{j})$, et dans ce cas on peut avoir $d = 0$ ou $1($ ou $d = 0$ ou -1). Le cas $d = 0$ donne $|z| \leqslant 1$, d'où $|z| = 1$. Comme $ad - bc = 1$, $b = -1$, donne $Az = a - \frac{1}{z}$ et la première partie de la discussion montre que $a = 0$, sauf si $R(z) = \pm\frac{1}{2}$, c'est à dire si $z = j$ ou $-\overline{j}$, auquel cas on peut prendre $a = 0, -1$, ou $a = 0, 1$. Le cas $z = j, d = 1$ donne $a - b = 1$ et $Aj = a - \frac{1}{1-j} = a + j$, d'où $a = 0$ ou 1. On traite de même le cas $z = -\overline{j}$ et $d = -1$.
Enfin, le cas $c = -1$ se ramène au cas $c = 1$ en changeant les signes des coefficients de A.

□

Théorème 2.8. *Γ est engendré par S et T.*

Preuve. Considérons le sous groupe Γ' de Γ engendré par S et T.
Soit $A \in \Gamma$ et $z \in \mathring{D} \subset \mathbb{H}$, donc $Az \in \mathbb{H}$. D'après le théorème (2.7), $\exists A' \in \Gamma' : A'Az \in D$, comme $z \in \mathring{D}$ alors $z = A'Az$ et $A'A = 1 \Rightarrow A \in \Gamma'$ donc $\Gamma \subset \Gamma'$ d'où $\Gamma = \Gamma'$. □

2.3 Formes modulaires

Définition 2.9. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est dite faiblement modulaire de poids k, si elle vérifie pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$:*

$$f(A \cdot z) = J_{A,k}(z) \cdot f(z), \forall z \in \mathbb{H}, \tag{2.2}$$

avec : $J_{A,k}(z) = (cz + d)^k$.
La relation (2.2) est appelée condition de modularité.

Lemme 2.10. *Soient $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$; on a alors :*

$$J_{AB,k}(z) = J_{A,k}(B \cdot z) \cdot J_{B,k}(z), \ \forall z \in \mathbb{H},$$

appelée relation de "cocycle".

Preuve. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors $A \cdot B = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} J_{AB,k}(z) &= [(ca' + dc')z + (cb' + dd')]^k \\ &= [c(a'z + b') + d(c'z + d')]^k \\ &= \left[(c'z + d') \cdot \left(c\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + d\right)\right]^k \\ &= (c'z + d')^k \cdot \left(c\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + d\right)^k \\ &= J_{B,k}(z) \cdot J_{A,k}(B \cdot z). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.11. *Si f est faiblement modulaire de poids k, on a alors :*

1. $\forall A, B \in SL_2(\mathbb{Z}) : f((AB)\cdot z) = J_{A,k}(B\cdot z)\cdot J_{B,k}(z)\cdot f(z)$.
2. $f(z+1) = f(z)$ *et* $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k \cdot f(z)$, $\forall z \in \mathbb{H}$.

Preuve.
1. En effet :

$$\begin{aligned} \text{f faiblement modulaire} &\Longrightarrow f(A\cdot z) = J_{A,k}(z)\cdot f(z), \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow f((AB)\cdot z) = J_{AB,k}(z)\cdot f(z), \forall A, B \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ \text{Lemme (2.10)} &\Longrightarrow f((AB)\cdot z) = J_{A,k}(B\cdot z)\cdot J_{B,k}(z)\cdot f(z) \end{aligned}$$

2.Pour $A = T$ dans la relation (2.2) on obtient :
$f(T\cdot z) = J_{T,k}(z)\cdot f(z) \Longleftrightarrow f(z+1) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{H}$.
Pour $A = S$ dans la relation (2.2) on obtient :
$f(S\cdot z) = J_{S,k}(z)\cdot f(z) \Longleftrightarrow f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k \cdot f(z)$, $\forall z \in \mathbb{H}$. □

Définition 2.12. *Une forme modulaire de poids $k \in \mathbb{Z}$ est une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ faiblement modulaire de poids k telle que :*

1. *f est holomorphe sur $\mathbb{H}$.*
2. *$f(z)$ admet une limite finie quand $Im(z) \to +\infty$ notée $f(\infty)$.*

Proposition 2.13. *Soit $\mathcal{H}(\mathbb{H})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$ et soit M_k l'ensemble des formes modulaires de poids k ; on a alors :*

1. *M_k est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}(\mathbb{H})$.*
2. *$M_k = \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que k impair.*

Preuve.
1. $M_k \neq \emptyset$ car la fonction nulle, notée 0, est un élément de M_k.
• $M_k \subset \mathcal{H}(\mathbb{H})$, car toute forme modulaire est holomorphe sur $\mathbb{H}$.
• $\forall f, g \in M_k$:

$$\begin{aligned} (f+g)(A\cdot z) &= f(A\cdot z) + g(A\cdot z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= J_{A,k}(z)f(z) + J_{A,k}(z)g(z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= J_{A,k}(z)(f(z)+g(z)),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= J_{A,k}(z)\cdot(f+g)(z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Comme $f+g \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ et $\lim\limits_{Imz \to +\infty}(f+g)$ existe, alors $f+g \in M_k$.
• $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in M_k$:

$$\begin{aligned} (\alpha\cdot f)(A\cdot z) &= \alpha\cdot f(A\cdot z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= \alpha\cdot J_{A,k}(z)\cdot f(z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= J_{A,k}(z)\cdot \alpha\cdot f(z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= J_{A,k}\cdot(\alpha f)(z),\ \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Comme $\alpha \cdot f \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ et $\lim\limits_{Imz \to +\infty} (\alpha \cdot f)$ existe, alors $\alpha \cdot f \in M_k$.
D'où M_k est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}(\mathbb{H})$.
2. Si on remplace dans la relation (2.2) la matrice A par $-I_2$ on aurait :

$$f(-I_2 \cdot z) = J_{-I_2,k}(z) \cdot f(z) \Longleftrightarrow f(z) = (-1)^k \cdot f(z), \forall z \in \mathbb{H}.$$

Donc si k est impair, on aurait $f(z) = -f(z), \forall z \in \mathbb{H}$, ce qui donne $f(z) = 0, \forall z \in \mathbb{H}$, d'où $f \equiv 0$. $\square$

Remarque. *Ce dernier résultat implique que toute forme modulaire non nulle est de poids pair, ce qui explique le choix de k pair dans la suite.*

Proposition 2.14. *Tout élément f dans M_k admet un développement appelé développement de Fourier de la forme :*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \widehat{f}(n) q^n, \ q = e^{2i\pi z} \ ,$$

normalement convergent sur toute partie de $\mathbb{H}$ vérifiant $Imz > A, A \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve. Soit $f \in M_k$; comme $f \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ et f est périodique de période égale à 1, il existe d'après le théorème (1.52) $\widehat{f} : D(0,1) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, tel que $f(z) = \widehat{f}(q)$, $q = e^{2i\pi z}$, holomorphe sur $D(0,1) - \{0\}$. Comme $\lim\limits_{Imz \to +\infty} f(z)$ existe, $\widehat{f}$ est holomorphe en 0 et assure l'existence d'un tel développement. $\square$

Définition 2.15. *Soit $f = \sum\limits_{n \geqslant 0} \widehat{f}(n) q^n \in M_k$, f est appelée forme parabolique si $\widehat{f}(0) = 0$.*

Proposition 2.16. *L'ensemble S_k des formes paraboliques est un sous espace vectoriel de M_k.*

Preuve.
- Il est clair que $S_k \subset M_k$ et que $S_k \neq \emptyset$.
- $\forall f, g \in S_k$: si $f = \sum\limits_{n \geqslant 0} \widehat{f}(n) q^n$, $g = \sum\limits_{n \geqslant 0} \widehat{g}(n) q^n$; $f + g = \sum\limits_{n \geqslant 0} c_n q^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} (\widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)) q^n$; $c_0 = \widehat{f}(0) + \widehat{g}(0) = 0$, donc $f + g \in S_k$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, f \in S_k : (\alpha \cdot f)(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} c_n q^n = \alpha \sum\limits_{n \geqslant 0} \widehat{f}(n) q^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha \widehat{f}(n) q^n$ d'où $c_0 = \alpha \cdot \widehat{f}(0) = 0$ et donc $\alpha \cdot f \in S_k$. $\square$

2.4 Exemples sur les formes modulaires

2.4.1 Séries d'Eisenstein

Définition 2.17. *Soit $k \geqslant 4$ tel que $k \equiv 0[2]$. La série d'Eisenstein d'indice k est définie comme suit :*

$$G_k(z) = \sum_{(n,m) \in (\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(mz + n)^k}, \ \textit{pour } z \in \mathbb{H}.$$

Théorème 2.18. *[1]. Soient $\eta > 0, \delta > 0$ et $k \geqslant 4$. La série $G_k(z)$ converge uniformément $\forall z \in \Omega$ tel que $\Omega = \{z \in \mathbb{H}/Im(z) \geqslant \eta, \mid Re(z) \mid \leqslant \delta\}$.*

Définition 2.19. *La fonction zêta de Riemann est définie comme suit :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

avec $s \in \mathbb{C}$ et $Re(s) > 1$.

Théorème 2.20. *Pour $k \equiv 0[2]$, $k \geqslant 4$, la série $G_k(z)$ est une forme modulaire de poids k, avec $G_k(i\infty) = 2\zeta(k)$.*

Preuve. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, pour $z \in \mathbb{H}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$m\frac{az+b}{cz+d} + n = \frac{(am+cn)z + (bm+dn)}{cz+d}.$$

Observons que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) &\longmapsto (am+cn, bm+dn) \end{aligned}$$

est bijective et son inverse est $(m, n) \longmapsto (m, n)\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (m, n)M^{-1}$,
donc si $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow (m, n)M \in \mathbb{Z}^2$. Comme G_k est absolument convergente alors :

$$\begin{aligned} G_k(Mz) &= \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(m(Mz)+n)^k} \\ &= \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(cz+d)^{-k}((am+cn)z+(bm+dn))^k} \\ &= \sum_{((m',n')M^{-1})\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(cz+d)^{-k}(m'z+n')^k} \\ &= (cz+d)^k \sum_{(m',n')\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(m'z+n')^k} \\ &= (cz+d)^k G_k(z). \end{aligned}$$

De plus on a l'holomorphie de G_k dans $\mathbb{H}$ par la convergence de $G_k(z), \forall z \in \mathbb{H}$. Il reste à prouver que G_k est holomorphe à l'infini, i.e. $G_k(z)$ a une limite quand $Im(z) \to +\infty$. Pour calculer cette limite on peut restreindre z à Ω où G_k converge uniformément. On peut passer à la limite terme à terme :

$$\begin{aligned}
\lim_{Im(z)\to+\infty} G_k(z) &= \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \lim_{Im(z)\to+\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0 \\ \sum\limits_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{n^k} \text{ si } m = 0 \end{cases} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = 2\zeta(k).
\end{aligned}$$

D'où G_k est holomorphe sur $\mathbb{H}^*$ et donc G_k est une forme modulaire de poids k. □

Développement de Fourier des séries d'Eisenstein

Le but de cette sous section est de déterminer les coefficient $\widehat{G_k}(n)$ de $G_k(z)$.

Définition 2.21. *Les nombres B_k de Bernoulli sont les coefficients dans le développement en série de $\frac{x}{e^x-1}$. On a :*

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} B_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

$$B_1 = \frac{1}{6}\ ,\ B_2 = \frac{1}{30}, \ldots$$

Proposition 2.22. $\forall k \geqslant 1$, *on a :*

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

Preuve. En utilisant les deux relations :

$$cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ,\ sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

on obtient :

$$cot(z) = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i + \frac{2i}{e^{2iz}-1} \Rightarrow zcot(z) = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1}.$$

Posons $x = 2iz$ dans la définition des nombres de Bernoulli, on trouve que :

$$\begin{aligned}
z\cot z &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(-1)^{k+1}\frac{(2iz)^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(-1)^{k+1}(-1)^k\frac{(2z)^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \frac{(2z)^{2k}}{(2k)!}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule standard :

$$f(z) = \sin z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \Rightarrow \log f = \log z + \sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Par dérivation on trouve que :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos z}{\sin z} = \cot z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{-2z}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}}. \\
\Rightarrow z \cot z &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{z^2}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \\
&= 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} \right) \frac{z^{2k}}{\pi^{2k}}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Par identification entre (2.3) et (2.4), on trouve :

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!} B_k = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} \frac{1}{\pi^{2k}}$$

$$\Rightarrow \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

□

Remarque.
$\zeta(k)$ se donne aussi par la formule :

$$\zeta(k) = \frac{(2\pi)^k}{2(k!)} \mid B_k \mid = (-1)^{1+\frac{k}{2}} \frac{(2\pi)^k}{2(k!)} B_k,$$

avec $k = 2, 4, 6, ...$ et B_k sont définis par le développement en série de $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Les premières valeurs de B_k sont : $B_k = 0$ pour k impair, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}, ...$

Définition 2.23. *On définit la fonction suivante pour $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 4$.*

$$h_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^k}.$$

Elle est sous-suite de $G_k(z)$.

Lemme 2.24. *[1]. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 4$, la fonction $h_k(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{H}$ et elle est périodique : $h_k(z+1) = h_k(z), \forall z \in \mathbb{H}$, le développement de Fourier de h_k est :*

$$h_k(z) = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^m, \text{ avec } q = e^{2\pi i z}.$$

Théorème 2.25. *Soit $k \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{H}$. Le développement de Fourier de la série d'Eisenstein G_{2k} est :*

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n, \text{ avec } q = e^{2\pi i z}.$$

Où $\sigma_{p-1}(n)$ est la fonction définie par : $\sigma_{p-1}(n) = \sum_{d \backslash n} d^{p-1}$.

Preuve. $G_{2k}(z) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$, décomposons $G_{2k}(z)$ en trois parties selon que, $m < 0$, $m = 0$ ou $m > 0$:

$$\begin{aligned} G_{2k}(z) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2)^*} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} &= \sum_{m=-\infty}^{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(0z+n)^{2k}} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}} \\ &= \sum_{m=\infty}^{1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(-mz+n)^{2k}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n)^{2k}} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}. \end{aligned}$$

On a :$(-mz+n)^{2k} = (mz-n)^{2k}, (-n)^{2k} = (n)^{2k}$. Par changement d'indice $n \longmapsto -n$ dans les deux premières sommes, il résulte alors :

$$\sum_{m=\infty}^{1}\sum_{n=\infty}^{-\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}} + \sum_{n=\infty}^{1}\frac{1}{(n)^{2k}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}.$$

Grâce à la convergence uniforme de G_{2k}, on peut sommer :

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(mz+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}h_{2k}(mz).$$

D'après le lemme (2.24) on trouve que cette dernière devient :

$$\begin{aligned} &= 2\zeta(2k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}(e^{2\pi imz})^n\right) \\ &= 2\zeta(2k) + 2\frac{(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}e^{2\pi imnz}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Soit $\eta > 0$, pour $z = x + iy \in \mathbb{H}$ avec $y \geqslant \eta$, la double série dernière converge absolument uniformément. En effet :

$$|n^{2k-1}e^{2\pi imnz}| \leqslant n^{2k-1}|e^{2\pi imnx}||e^{-2\pi mny}| = \frac{n^{2k-1}}{e^{2\pi mny}} \leqslant \frac{n^{2k-1}}{e^{2\pi nm\eta}} \leqslant n^{2k-1} \text{ , } (n, m > 1).$$

On peut réordonner (2.5) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1}e^{2\pi imnz} &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{\substack{mn=t\\ m>0,n>0}} n^{2k-1}e^{2\pi itz}\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{mn=t\\ m>0,n>0}} n^{2k-1}\right)e^{2\pi itz} = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{n\backslash t} n^{2k-1}\right)q^t\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(t)q^t.\end{aligned}$$

Donc

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(t)q^t.$$

□

Définition 2.26. *Soit $k \equiv 0[2]$, $k \geqslant 4$. On appelle série d'Eisenstein normée la série $E_k = \frac{1}{2\zeta(k)}G_k$. On a : $E_k(i\infty) = 1$.*

Corollaire 2.27. *Soit $k \equiv 0[2]$, $k \geqslant 4$ et $z \in \mathbb{H}$. Le développement de Fourier de la série d'Eisenstein normée E_k est : $E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$ avec $q = e^{2\pi iz}$.*

Preuve. D'après le théorème (2.25) et la définition de $E_k = \frac{1}{2\zeta(k)}G_k$. On trouve que : $E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$, et on a $\zeta(k) = (-1)^{1+\frac{k}{2}}\frac{(2\pi)^k}{2(k!)}B_k$. Donc :

$$\begin{aligned}E_k(z) &= 1 + \frac{2(2\pi i)^k k!}{(-1)^{1+\frac{k}{2}}(k-1)!(2\pi)^k B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\\ &= 1 + \frac{2(i)^k k}{(-1)^{1+\frac{k}{2}}B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\\ &= 1 + \frac{2(i^2)^{\frac{k}{2}}k}{(-1)^{1+\frac{k}{2}}B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\\ &= 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n.\end{aligned}$$

□

2.4.2 La fonction Δ

Définition 2.28. *On définit : $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ c'est une forme modulaire parabolique de poids 12.*

Lemme 2.29. *[1]. Soit* $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ *une série uniformément convergente pour* $z \in \mathbb{H}$. *Alors on a pour* $k \in \mathbb{C}$ *:*

$$\left(1 + k\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n\right)^2 = 1 + 2k\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n + k^2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{r+s=n} a(r)a(s)\right)q^n.$$

$$\left(1 + k\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n\right)^3 = 1 + 3k\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n + 3k^2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{r+s=n} a(r)a(s)\right)q^n + k^3\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{r+s+t=3} a(r)a(s)a(t)\right)q^n.$$

Théorème 2.30. *Soit* $k \equiv 0[2]$, $k \geqslant 4$ *et* $z \in \mathbb{H}$. *Le développement de Fourier du* Δ *est :* $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n$, *avec* $q = e^{2\pi iz}$ *où* $\tau(n)$ *est la fonction de Ramanujan donné par :*

$$\tau(n) = \frac{1}{12}\Big(5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)\Big) + \sum_{r+s=n}\Big(100\sigma_3(r)\sigma_3(s) - 147\sigma_5(r)\sigma_5(s)\Big) + 8000\sum_{r+s+t=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\sigma_3(t).$$

Preuve. On a d'après le corollaire (2.27) et la définition (2.28) :

$$\begin{aligned}
\Delta(z) &= \frac{1}{12^3}\left(\Big(E_4(z)\Big)^3 - \Big(E_6(z)\Big)^2\right)\\
&= \frac{1}{12^3}\left(\left(1 - \frac{8}{B_4}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right)^3 - \left(1 - \frac{12}{B_6}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{12^3}\left(\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right)^3 - \left(1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n\right)^2\right)
\end{aligned}$$

et d'après le lemme (2.29) on trouve que :

$$\Delta(z) = \frac{1}{12^3}\Bigg(1 + 3.240\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_3(n)q^n + 3.240^2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{r+s=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\right)q^n + 240^3\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sum_{r+s+t=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\sigma_3(t)\right)q^n - 1 + 2.504\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_5(n)q^n - 504^2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{r+s=n}\sigma_5(r)\sigma_5(s)\right)q^n\Bigg).$$

$$= \frac{1}{12^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(3.240\sigma_3(n) + 2.504\sigma_5(n)\Big) + 3.240^2\left(\sum_{r+s=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\right) - 504^2\left(\sum_{r+s=n}\sigma_5(r)\sigma_5(s)\right) + 240^3\left(\sum_{r+s+t=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\sigma_3(t)\right)q^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{5}{12}\sigma_3(n)+\frac{7}{12}\sigma_5(n)\right)+\sum_{r+s=n}\Big(100\sigma_3(r)\sigma_3(s)-147\sigma_5(r)\sigma_5(s)\Big)+\right.$$
$$\left.8000\sum_{r+s+t=n}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\sigma_3(t)\right)q^n.$$

□

Corollaire 2.31. $\tau(1)=1,\ \tau(2)=-24.$

Preuve. $\tau(1)=\frac{5}{12}\sigma_3(1)+\frac{7}{12}\sigma_5(1)=\frac{5+7}{12}=1.$

$$\begin{aligned}\tau(2)&=\frac{5}{12}\sigma_3(2)+\frac{7}{12}\sigma_5(2)+100\sigma_3(1)\sigma_3(1)-147\sigma_5(1)\sigma_5(1)\\&=\frac{5}{12}(1+2^3)+\frac{7}{12}(1+2^5)+100-147=-24.\end{aligned}$$

□

Remarque. *Jacobi a obtenu le développement de Δ en produit infini suivant :*

$$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\ \textit{avec}\ q=e^{2\pi iz}.$$

2.5 Produit scalaire de Petersson et séries de Poincaré

Proposition 2.32. *Soit $f,g\in M_k$ et soit $z=x+iy\in\mathbb{H}$. L'application bilinéaire définie par :*

$$\langle f,g\rangle=\int_D f(z)\bar{g}(z)y^{k-2}dxdy$$

est un produit scalaire hermitien appelé produit scalaire de Petersson.

Preuve. Vérifions les conditions du produit scalaire hermitien :

1. $\langle f,f\rangle>0,\forall f\in M_k-\{0\}$. En effet :

$$\langle f,f\rangle=\int_D f(z)\bar{f}(z)y^{k-2}dxdy=\int_D|f(z)|^2y^{k-2}dxdy>0, \tag{2.6}$$

   car $z\in\mathbb{H}$.

2. $\langle f,f\rangle=0\Longrightarrow f=0$. En effet, de (2.6) on a :

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle=0\Longrightarrow|f(z)|^2y^{k-2}=0,\forall z\in\mathbb{H}&\Longrightarrow|f(z)|=0,\forall z\in\mathbb{H}\\&\Longrightarrow f(z)=0,\forall z\in\mathbb{H}\Longrightarrow f\equiv 0.\end{aligned}$$

3. $\langle f, \lambda g + h\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$, $\forall f, g, h \in M_k$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. En effet :

$$\begin{aligned}\langle f, \lambda g + h\rangle &= \int\limits_D f(z)\overline{(\lambda g + h)}(z) y^{k-2} dxdy \\ &= \overline{\lambda} \int\limits_D f(z)\overline{g}(z) y^{k-2} dxdy + \int\limits_D f(z)\overline{h}(z) y^{k-2} dxdy \\ &= \overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle.\end{aligned}$$

4. $\overline{\langle f, g\rangle} = \langle g, f\rangle, \forall f, g \in M_k$. En effet :

$$\begin{aligned}\overline{\langle f, g\rangle} &= \overline{\int\limits_D f(z)\bar{g}(z) y^{k-2} dxdy} \\ &= \int\limits_D \bar{f}(z) g(z) y^{k-2} dxdy = \langle g, f\rangle.\end{aligned}$$

□

2.5.1 Séries de Poincaré

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note par e_n la fonction $z \longmapsto e^{2i\pi nz}$, avec $e_1 = e$.

Définition 2.33. *On définit la série de Poincaré d'ordre m par :*

$$P_m(z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k} e_m(M[c,d]z),$$

avec : $M[c, d]$ désigne une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ de la forme : $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$.

Remarque. *Le choix des coefficients supérieurs de la matrice n'influe pas sur le calcul de P_m.*

Proposition 2.34. *P_m est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{H}$.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}|P_m(z)| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k} e_m(M[c,d]z) \right| \\ &\leqslant \left| \frac{1}{(cz+d)^k} \right| + \left| \frac{1}{(c'z+d')^k} \right| + ... \\ &\leqslant \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{|mz+n|^k}\end{aligned}$$

□

Remarque. *De la proposition* (2.34), *on déduit que* P_m *est holomorphe sur* $\mathbb{H}$.

Lemme 2.35. *Soit* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, *alors :*

$$P_m\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = (\gamma z+\delta)^k P_m(z). \tag{2.7}$$

Preuve. Posons $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, alors :

$$P_m(Mz) = \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cMz+d)^k} e_m(M[c,d]Mz).$$

On a : $M[c,d]M = M[\alpha c+\gamma d, \beta c+\delta d]$. L'application :

$$\begin{aligned} \{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 : (c,d)=1\} &\longrightarrow \{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 : (c,d)=1\} \\ (c,d) &\longmapsto (\alpha c+\gamma d, \beta c+\delta d), \end{aligned}$$

est bijective d'inverse :

$$\begin{aligned} \{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 : (c,d)=1\} &\longrightarrow \{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 : (c,d)=1\} \\ (c,d) &\longmapsto (\delta c-\gamma d, \alpha d-\beta c). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_m(Mz) &= \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\left((\delta c-\gamma d)\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + (\alpha d-\beta c)\right)^{-k} e_m(M[c,d]z) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma z+\delta)^k \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-k} e_m(M[c,d]z) \\ &= (\gamma z+\delta)^k P_m(z). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.36. P_m *est une forme modulaire.*

Preuve. Puisque P_m est holomorphe et vérifie la condition de modularité et puisque $\lim_{Im(z)\to+\infty} p_m(z)$ existe (proposition 2.34) alors p_m est une forme modulaire. □

Proposition 2.37. *[2]. Pour tout* $m > 0$ *:*

$$P_m(z) = e^{2i\pi mz} + 2i^k\pi \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{+\infty}\left[\frac{Kl(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right] e^{2i\pi nz}.$$

Autrement dit,

$$\widehat{P_m}(n) = \begin{cases} 2i^k\pi\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum\limits_{c=1}^{+\infty} \frac{Kl(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) & si\ m\neq n. \\ 1+2i^k\pi \sum\limits_{c=1}^{+\infty} \frac{Kl(m,m;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\right) & si\ m=n. \end{cases}$$

tels que :

$$Kl(m,n;c) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*} e^{2i\pi\frac{mx+n\{x,c\}}{c}}, \text{ où } \{x,c\} \text{ désigne l'inverse de x modulo c,}$$

est la somme de Kloosterman,
et

$$J_v(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2n}$$

est la fonction J de Bessel d'ordre v.

Remarque. *La proposition* (2.37) *montre en particulier que les coefficients de Fourier des séries de Poincaré sont réels.*

Corollaire 2.38. *Pour tout $m > 0$, P_m est une forme parabolique de poids k.*

Preuve. D'après la proposition (2.37), $\widehat{P_m}(0) = 0$, d'où le résultat. □

Proposition 2.39. *[2]. Si m et n sont des entiers strictement positifs, alors*

$$\widehat{P_m}(n) = m^{1-k} \sum_{d\backslash(n,m)} d^{k-1}\widehat{P_1}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Proposition 2.40. *[2]. Soit $f \in S_k$ et soit $m > 0$, alors :*

$$\langle f, P_m\rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}}\widehat{f}(m).$$

Corollaire 2.41. *L'espace S_k est engendré par les séries de Poincaré P_m, avec $m > 0$.*

Preuve. Puisque S_k est de dimension fini on a :

$$S_k = \langle P_m, m \in \mathbb{Z}\rangle^{\perp} \oplus \langle P_m, m \in \mathbb{Z}\rangle.$$

Or la proposition (2.40) implique $\langle P_m, m \in \mathbb{Z}\rangle^{\perp} = \{0\}$ et donc $S_k = \langle P_m, m \in \mathbb{Z}\rangle$. □

2.6 Dimension de M_k

Dans cette partie,on donne la dimension de l'espace M_k. Si f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$ non identiquement nulle et $p \in \mathbb{H}$, on note $v_p(f)$ l'ordre de f en p, c'est l'entier n tel que $f/(z-p)^n$ soit holomorphe et non nulle en p. De plus, si $f = \sum_n \widehat{f}(n)q^n$, notons $v_p(\infty) = min\{n/\widehat{f}(n) \neq 0\}$.

Théorème 2.42. *[6]. Soit f une fonction modulaire de poids k, non identiquement nulle. On a alors la formule suivante :*

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{z\in\mathbb{H}\\ z\neq i,j}} v_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Corollaire 2.43. *Si $k < 0$ et $k = 2$ alors $M_k = S_k = \{0\}$.*

Preuve. Si f est un élément non nul de M_k. Par définition, f est holomorphe, donc l'ordre de f en tout point est positif, alors tous les termes du membre de gauche de la formule :

$$v_\infty + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{z\in\mathbb{H}\\ z\neq i,j}} v_z(f) = \frac{k}{12}$$

sont positifs, d'où k est positif. Si on suppose que f est une forme modulaire de poids 2 donc $\frac{1}{6} = n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}$ avec n_i des entiers positifs, ce qui impossible. □

Proposition 2.44. *Pour $k \geqslant 4$ tel que $k \equiv 0[2]$, $M_k = \langle G_k \rangle \bigoplus S_k$.*

Preuve. On a :

$$G_k \in M_k, S_k \subset M_k \Longrightarrow S_k + \mathbb{C}G_k \subset M_k. \tag{2.8}$$

Soit $f \in M_k$, puisque $\widehat{G_k}(0) \neq 0$ on a :

$$f - \frac{\widehat{f}(0)}{\widehat{G_k}(0)} G_k \in S_k,$$

d'où

$$M_k \subset S_k + \mathbb{C}G_k. \tag{2.9}$$

De (2.8) et (2.9) on a $M_k = S_k + \mathbb{C}G_k$. Comme $G_k \notin S_k$ donc $\mathbb{C}G_k \bigcap S_k = \{0\}$ d'où S_k et $\mathbb{C}G_k$ sont en somme directe alors $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$. □

Lemme 2.45.
Pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$, on a : $M_k M_l \subset M_{k+l}$ tel que : $M_k M_l = \{fg/f \in M_k, g \in M_l\}$.

Preuve. Soient : $f \in M_k, g \in M_l$, on a : $f(A \cdot z) = J_{A,k}(z) \cdot f(z), \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z})$. $g(A \cdot z) = J_{A,l}(z) \cdot g(z), \forall z \in \mathbb{H}, \forall A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(A \cdot z) &= f(A \cdot z) \cdot g(A \cdot z) \\
&= J_{A,k}(z) \cdot f(z) \cdot J_{A,l}(z) \cdot g(z) \\
&= J_{A,k}(z) \cdot J_{A,l}(z) \cdot f(z) \cdot g(z) \\
&= (cz+d)^k \cdot (cz+d)^l \cdot f(z) \cdot g(z) \\
&= (cz+d)^{k+l} \cdot (f \cdot g)(z) \\
&= J_{A,k+l}(z) \cdot (f \cdot g)(z).
\end{aligned}$$

Comme $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ et $\lim\limits_{Imz \to +\infty} (f \cdot g)(z)$ existe, alors $f \cdot g \in M_{k+l}$. □

Proposition 2.46. $S_k \simeq M_{k-12}$.

Preuve. Soit $f \in S_k$, comme $\Delta \in S_{12}$ alors $\frac{f}{\Delta} \in M_{k-12}$, on peut considérer l'application $\varphi : S_k \longrightarrow M_{k-12}$ tel que $\varphi(f) = \frac{f}{\Delta}$. φ est manifestement linéaire, injective. De plus $\forall g \in M_{k-12}$, $\exists f = \Delta g \in M_{k-12+12} = M_k$ tel que $\varphi(\Delta g) = \frac{\Delta g}{\Delta} = g$. De plus :

$$\begin{aligned} \Delta \in S_k &\Longrightarrow \widehat{\Delta}(0) = 0 \\ &\Longrightarrow (\widehat{\Delta g})(0) = \widehat{\Delta}(0)\widehat{g}(0) = 0, \end{aligned}$$

d'où $\Delta g \in S_k$ et φ est surjective, alors φ est bijective donc $S_k \simeq M_{k-12}$. $\square$

Lemme 2.47. *Le sous espace S_k est le noyau de l'application linéaire ϕ définie par $f \longmapsto f(\infty)$ définie de M_k dans $\mathbb{C}$. On a donc $dim \frac{M_k}{S_k} \leqslant 1$.*

Preuve. Soient $f, g \in M_k$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(\infty) = (\alpha f)(\infty) + (\beta g)(\infty) \\ &= \alpha f(\infty) + \beta g(\infty) \\ &= \alpha\phi(f) + \beta\phi(g). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} Ker(\phi) &= \{f \in M_k / \phi(f) = 0\} \\ &= \{f \in M_k / f(\infty) = 0\} \\ &= \{f \in M_k / \widehat{f}(0) = 0\} = S_k. \end{aligned}$$

Donc par le premier théorème d'isomorphisme des espaces vectoriels on trouve que : $\frac{M_k}{S_k} \simeq Im(\phi)$, ce dernier est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}$, alors sa dimension est inférieure ou égal 1, donc $dim \frac{M_k}{S_k} \leqslant 1$. $\square$

Théorème 2.48. *Pour $k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}$, M_k est un espace de dimension 1 admettant comme base 1, G_4, G_6, G_8, G_{10}. On a $S_k = \{0\}$.*

Preuve. Si $k \leqslant 10 \Longrightarrow k - 12 < 0$ et donc d'après le corollaire (2.43) et la proposition (2.46) $S_k = \{0\}$, et d'après le lemme (2.47), alors $dim(M_k) \leqslant 1$. Comme 1, G_4, G_6, G_8 et G_{10} sont des éléments non nuls de $M_0, M_4, M_6, M_8, M_{10}$, donc $dim(M_k) = 1$ pour $k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}$. $\square$

Corollaire 2.49. *Pour $k = 12$, $dim M_k = 2$.*

Preuve. D'après les deux propositions (2.44) et (2.46), on a $M_{12} = \langle G_{12} \rangle \bigoplus S_{12}$ avec $S_{12} \simeq M_0$ qui est de dimension 1 (et même engendré par la forme parabolique Δ de poids 12), donc $dim M_{12} = 2$. $\square$

Corollaire 2.50. *Si M_k est de dimension d, alors M_{k+12} est de dimension $d + 1$. Cela vient des deux propositions (2.44) et (2.46). Résumons ceci dans un tableau.*

k	<0	0	2	4	6	8	10	12	$\dots$	k	$\dots$	$k+12$	$\dots$
$dim M_k$	0	1	0	1	1	1	1	2	$\dots$	d	$\dots$	$d+1$	$\dots$

Théorème 2.51. *Soit* $M_* = \sum\limits_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} M_k$. *$M_*$ a la structure d'une algèbre graduée.*

Preuve.

1. Soit $k_1 < k_2 < ... < k_j$ avec $k_i \in 2\mathbb{N} \setminus \{2\}$ et supposons que $\exists f_i \in M_{k_i}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{j} f_i = 0$. Fixons $z \in \mathbb{H}$ n'annulant aucune f_i. On a pour $A = \begin{pmatrix} 1 & d-1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$

$$(z+d)^{-k_j} \sum_{i=1}^{j} f_i \left(\frac{z+d-1}{z+d} \right) = 0, \forall d \in \mathbb{Z},$$

par la modularité des f_i, il en résulte

$$\sum_{i=1}^{j} (z+d)^{k_i - k_j} f_i(z) = 0,$$

puisque $k_i - k_j < 0$ pour $i \neq j$, on trouve en faisant tendre d vers l'infini que $f_j(z) = 0$, ce qui contredit le choix de z, donc $M_* = \bigoplus\limits_{k \in 2\mathbb{N}, k \neq 2} M_k$.

2. On a d'après le lemme (2.45) $M_k M_l \subset M_{k+l}, \forall k, l \in 2\mathbb{N} \setminus \{2\}$.

$\square$

Chapitre 3

Les opérateurs de Hecke

Dans ce chapitre nous allons voir un type d'opérateurs qui agit sur M_k ; les opérateurs de Hecke. Nous allons définir ces opérateurs et donner des propriétés intéressantes concernant surtout l'espace S_k.

3.1 Introduction aux opérateurs de Hecke

Définition 3.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ donné et $n \in \mathbb{N}^*$. L'opérateur de Hecke T_n est défini pour $f \in M_k$ par l'application linéaire :*

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{d \backslash n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz+bd}{d^2}\right). \tag{3.1}$$

Si n est premier, noté p, (3.1) *se réduit à :*

$$(T_p f)(z) = p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right). \tag{3.2}$$

Soit $Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$, périodiques de période 1 et holomorphes en l'infini.

Lemme 3.2.
Si $f \in Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$, alors $T_p f$ est périodique de période 1.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
T_p f(z+1) &= p^{k-1} f(p(z+1)) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{(z+1)+b}{p}\right) \\
&= p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p}\left(\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right) - f\left(\frac{z}{p}\right) + f\left(\frac{z+p}{p}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right) \\
&= T_p f(z).
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemme 3.3. *Soit p un nombre premier, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$
T_p e_n = \begin{cases} p^{k-1} e_{np} + e_{\frac{n}{p}} & Si\ p \setminus n. \\ p^{k-1} e_{np} & sinon. \end{cases} \tag{3.3}
$$

Preuve. Posons $f(z) = e_n(z)$. Supposons que $p \setminus n$, de (3.2) on trouve :

$$
\begin{aligned}
T_p e_n(z) &= p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e_n\left(\frac{z+b}{p}\right) = p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e^{2i\pi n(\frac{z+b}{p})} \\
&= p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e^{2i\pi n\frac{z}{p}} e^{2i\pi n\frac{b}{p}} = p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e^{2i\pi\frac{n}{p}z} \\
&= p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} e^{2i\pi\frac{n}{p}z} \sum_{b=0}^{p-1} 1 = p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} e^{2i\pi\frac{n}{p}z} p \\
&= p^{k-1} e_{np}(z) + e_{\frac{n}{p}}(z).
\end{aligned}
$$

Sinon

$$
\begin{aligned}
T_p e_n(z) &= p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} e_n\left(\frac{z+b}{p}\right) \\
&= p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{p} z\right) e^{\frac{2\pi nb}{p} i} + \sin\left(\frac{2\pi n}{p} z\right) e^{\frac{-2\pi nb}{p} i}\right) \\
&= p^{k-1} e_{np}(z) + \frac{1}{p} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{p} z\right) \sum_{b=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi nb}{p} i} + \sin\left(\frac{2\pi n}{p} z\right) \sum_{b=0}^{p-1} e^{\frac{-2\pi nb}{p} i}\right) \\
&= p^{k-1} e_{np}(z).
\end{aligned}
$$

$\square$

Remarque. *$\forall f \in Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$, on pose la convention $\widehat{f}(r) = 0$ si $r \notin \mathbb{Z}$.*

Proposition 3.4. *Si $f \in Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$
\widehat{T_p f}(n) = \begin{cases} p^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{f}(np) & Si\ p \setminus n. \\ \widehat{f}(np) & Sinon. \end{cases} \tag{3.4}
$$

Preuve. Posons : $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n)e_n(z)$

$$\begin{aligned} T_p(f)(z) &= T_p\left(\sum_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n)e_n(z)\right) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} T_p(\widehat{f}(n)e_n(z)) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n)T_p(e_n(z)). \end{aligned}$$

Or d'après le lemme (3.3) on trouve que :

$$\sum_{n\geqslant 0} \widehat{T_pf(n)}e_n = \sum_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n)p^{k-1}e_{np} + \widehat{f}(n)e_{\frac{n}{p}} + \sum_{n\geqslant 0, p\nmid n} \widehat{f}(n)p^{k-1}e_{np}.$$

Par identification on trouve le résultat. □

3.2 Formes propres des opérateurs de Hecke

Définition 3.5. *Une fonction non identiquement nulle f satisfaisant à une relation de la forme $T_nf = \lambda(n)f$ pour un $\lambda(n) \in \mathbb{C}$ est appelée fonction propre ou forme propre de l'opérateur de Hecke. Le nombre $\lambda(n)$ est appelée valeur propre de T_n.*

Remarque.
Si f est une forme propre, alors cf l'est aussi, $\forall c \neq 0$.

Exemple 3.6. *Si un opérateur linéaire T applique un espace de fonctions V de dimension 1 sur lui-même, alors toute fonction non-nulle de V est une forme propre de T.*

Preuve. Comme $dim(V) = 1$ alors $V = \langle f_0 \rangle$, on doit avoir f_0 non identiquement nulle. Donc $\forall f \in V, f = \lambda f_0$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Si on suppose $f \neq 0$, on doit avoir $\lambda \neq 0$. Par conséquent, on a : $Tf = \xi f_0 = \xi\frac{1}{\lambda}f$. Posons $\wedge = \frac{\xi}{\lambda} \in \mathbb{C}$, on obtient $Tf = \wedge f$. Par définition f est une forme propre de T. □

Exemple 3.7. *On a vu que pour $k = 4, 6, 8, 10$, $dim(M_k) = 1$, et d'après l'exemple (3.6) on conclut que pour chacune de ces valeurs de k, les fonctions non nulles de M_k sont des formes propres de T_n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*
En particulier, les séries d'Eisenstein G_4, G_6, G_8, G_{10} sont des formes propres de $T_n, \forall n$.

Définition 3.8. *Si f est une forme propre de tout opérateur de Hecke T_n, $n \geqslant 1$, alors f est appelée forme propre simultanée.*

Remarque. *Les formes propres mentionnées dans l'exemple (3.7) sont clairement des formes propres simultanées.*

3.3 Propriétés des formes propres simultanées

Définition 3.9. *Une forme propre simultanée telle que* $\widehat{f}(1) = 1$ *est dite normalisée.*

Proposition 3.10. *Si* f *est une forme propre simultanée normalisée alors* $T_p f = \widehat{f}(p) f, \forall p$ *premier.*

Preuve. On a : $T_p f = \lambda_p f$ avec $\lambda_p \in \mathbb{C}$, d'oú $\widehat{T_p f}(1) = \lambda_p \widehat{f}(1) = \lambda_p$, et par la proposition (3.4) on a aussi $\widehat{T_p f}(1) = \widehat{f}(p)$ donc $\lambda_p = \widehat{f}(p)$, alors $T_p(f) = \widehat{f}(p) f$. □

Remarque. *Les coefficients de Fourier d'ordres premiers des formes propres simultanées normalisées sont déterminer par le spectre des opérateurs de Hecke.*

Corollaire 3.11. *Soit* f *une forme propre simultanée normalisée,* p *un nombre premier et* $n \in \mathbb{N}$*. Alors :*

$$\widehat{f}(p)\widehat{f}(n) = \begin{cases} p^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{f}(np) & \text{Si } p \setminus n. \\ \widehat{f}(np) & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve. On a : $T_p f = \widehat{f}(p) f$ donc $\widehat{T_p f}(n) = \widehat{f}(p)\widehat{f}(n)$ et d'après la proposition (3.4) on trouve le résultat. □

Théorème 3.12. *Soit* f *une forme propre simultanée normalisée. Alors :*

1. $\forall p \in \mathcal{P}$ *et* $\forall v \in \mathbb{Z}$ *tel que* $v \geqslant 1$ *:*
$$\widehat{f}(p^{v+1}) = \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^v) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1}).$$
2. $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, (m, n) = 1$ *:*
$$\widehat{f}(mn) = \widehat{f}(m)\widehat{f}(n).$$

Preuve.
1) On applique le corollaire (3.11) pour $n = p^v$.
2)Supposons $m = p^v$, si $v = 0$ donc $\widehat{f}(1) = 1$, si $v = 1$, il est conséquence du corollaire (3.11). Supposons le résultat vrai pour tout $m = p^l$, avec $l \leqslant v$, alors :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(p^{v+1})\widehat{f}(n) &= \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^v)\widehat{f}(n) - P^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1})\widehat{f}(n) \\ &= \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^v n) - P^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1}n) \\ &= \widehat{f}(p^{v+1}n) + P^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1}n) - P^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1}n) \\ &= \widehat{f}(p^{v+1}n). \end{aligned}$$

Par récurrence, le résultat est donc vrai dès que m est une puissance de nombre premier. Si $m \neq 1$, on pose $m = \prod_{i=1}^{w} p_i^{v_i}$ tels que p_i distincts. En écrivant $n_1 = \frac{m}{p_1^{v_1}}$, on a : $\widehat{f}(m) = \widehat{f}(p_1^{v_1})\widehat{f}(n_1)$, donc $\widehat{f}(m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \widehat{f}(p^{v_p(m)})$, on pose :

$$m = \prod_{i=1}^{w} p_i^{v_i}, n = \prod_{i=w+1}^{t} p_i^{v_i},$$

avec p_i sont des facteurs premiers distincts car $(m, n) = 1$ donc :

$$\widehat{f}(m)\widehat{f}(n) = \prod_{i=1}^{t} \widehat{f}(p_i^{v_i}) = \widehat{f}\left(\prod_{i=1}^{t} p_i^{v_i}\right) = \widehat{f}(mn).$$

□

Remarque. *Au fait* $v_p(n)$=*max* $\{t \in \mathbb{N}/p^t/n\}$.

Définition 3.13. *Soit $n \geqslant 1$ un entier. Si $n = 1$, le premier opérateur de Hecke est $T_1 = I_d$. Si $n = p^v$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $v \geqslant 2$, l'opérateur de Hecke d'ordre p^v est défini par la relation de récurrence :*

$$T_{p^v} = T_p \circ T_{p^{v-1}} - p^{k-1} T_{p^{v-2}}. \tag{3.6}$$

Si $n > 1$ est quelconque, l'opérateur de Hecke est :

$$T_n = \bigcirc_{p \in \mathcal{P}} T_{p^{v_p(n)}}. \text{ Si } n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}. \tag{3.7}$$

Exemple 3.14.

$$\begin{aligned} T_{50} = T_{5^2} \circ T_2 &= (T_5 \circ T_5 - 5^{k-1} T_1) \circ T_2 \\ &= T_5 \circ T_5 \circ T_2 - 5^{k-1} T_2. \end{aligned}$$

Proposition 3.15. *Si $f \in Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$ alors :*

$$\widehat{T_m f}(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \backslash (m,n)}} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) \ , \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Preuve.
• Si $m = 1$ le résultat est évident.
• Si m est un nombre premier c'est la proposition (3.4).
• Supposons $m = p^v$, avec p premier et $v \geqslant 2$, et supposons le résultat vrai si on remplace m par p^{v-1} et p^{v-2}, on a :

$$\widehat{T_{p^v} f}(n) = T_p \widehat{(T_{p^{v-1}} f)}(n) - p^{k-1} \widehat{T_{p^{v-2}} f}(n),$$

et d'après la proposition (3.4) on trouve :

$$\widehat{T_{p^v} f}(n) = p^{k-1} \widehat{T_{p^{v-1}} f}(n/p) + \widehat{T_{p^{v-1}} f}(np) - p^{k-1} \widehat{T_{p^{v-2}} f}(n),$$

et par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{T_{p^v} f}(n) = p^{k-1} &\sum_{d \backslash (p^{v-1}, n/p)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^{v-1} n/p}{d^2}\right) + \sum_{d \backslash (p^{v-1}, np)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^{v-1} np}{d^2}\right) \\ &- p^{k-1} \sum_{d \backslash (p^{v-2}, n)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^{v-2} n}{d^2}\right). \end{aligned}$$

On pose $\delta = pd$, on trouve :

$$\widehat{T_{p^v}f}(n) = \sum_{\substack{\delta\backslash(p^v,n)\\ p\backslash\delta}} \delta^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^v n}{\delta^2}\right) + \sum_{d\backslash(p^{v-1},np)} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^v n}{d^2}\right) - \sum_{\substack{\delta\backslash(p^{v-1},np)\\ p\backslash\delta}} \delta^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^v n}{\delta^2}\right),$$

donc :

$$\widehat{T_{p^v}f}(n) = \sum_{\delta\backslash(p^v,n)} \delta^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^v n}{\delta^2}\right).$$

• Si $m = p_1^{v_1}....p_w^{v_w}$ alors :

$$\widehat{T_m f}(n) = \sum_{\substack{d_1\backslash(p_1^{v_1},n)\\ d_2\backslash(p_2^{v_2},n)\\ \vdots\\ d_w\backslash(p_w^{v_w},n)}} (d_1...d_w)^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{mn}{(d_1...d_w)^2}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned}\{(d_1,...,d_w) : d_1 \setminus (p_1^{v_1},n),...,d_w \setminus (p_w^{v_w},n)\} &\longrightarrow \{d : d \setminus (p_1^{v_1}...p_w^{v_w},n)\}\\ (d_1,...,d_w) &\longmapsto d_1...d_w,\end{aligned}$$

c'est une bijection, donc :

$$\widehat{T_m f}(n) = \sum_{d\backslash(m,n)} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

□

Remarque. *La proposition* (3.15) *implique en particulier :*

$$\widehat{T_m f}(n) = \widehat{T_n f}(m). \tag{3.8}$$

Théorème 3.16. *Soit $f \in Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$ et soit $n \geqslant 1$ un entier. Supposons que f est une forme propre de l'opérateur de Hecke T_n, de valeur propre notée λ_n. On a : $\widehat{f}(n) = \lambda_n\widehat{f}(1)$.*

Preuve. On a : $T_n f = \lambda_n f \Longrightarrow \widehat{T_n f}(1) = \widehat{f}(1)\lambda_n$. D'après la proposition (3.15) et la relation (3.8) si $m = 1$ on trouve que : $\widehat{T_n f}(1) = \widehat{f}(n)$ donc $\widehat{f}(n) = \lambda_n\widehat{f}(1)$. □

Théorème 3.17. *Soit $f \in Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$ une forme propre simultanée non nulle. Si $k \neq 0$ alors $\widehat{f}(1) \neq 0$.*

Preuve. On suppose que $\widehat{f}(1) = 0$ donc d'après le théorème (3.16) $\widehat{f}(n) = 0, \forall n \geqslant 1$, i.e, $f(z) = \widehat{f}(0) = f(\infty)$ donc f est une fonction constante d'où $f \equiv 0$ ou $k = 0$ car $M_0 = \langle 1\rangle = \mathbb{C}$, qui est une contradiction avec l'hypothèse donc $\widehat{f}(1) \neq 0$. □

Remarque. *Si g est une forme propre simultanée alors $\widehat{g}(1) \neq 0$ d'après le théorème* (3.17). *On peut construire à partir de g une forme propre simultanée normalisée c'est*

$$f = \frac{g}{\widehat{g}}.$$

.

Exemple 3.18. *$G_k + \alpha$ est une forme propre simultanée normalisée, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.*
En effet :

1. *Soit $n \geqslant 1$, écrivons $n = n^{'} p^{\beta}$ avec $(p, n^{'}) = 1$ et $\beta \geqslant 0$. On a :*

$$\begin{aligned}
\widehat{T_p G_k}(n) &= \widehat{T_p G_k}(p^{\beta} n^{'}) \\
&= p^{k-1} \widehat{G_k}(p^{\beta-1} n^{'}) + \widehat{G_k}(p^{\beta+1} n^{'}) \\
&= p^{k-1} \sigma_{k-1}(p^{\beta-1} n^{'}) + \sigma_{k-1}(p^{\beta+1} n^{'}) \\
&= \sigma_{k-1}(p) \sigma_{k-1}(p^{\beta}) \sigma_{k-1}(n^{'}) \ \textit{(d'après le théorème (3.12))} \\
&= \sigma_{k-1}(p) \sigma_{k-1}(n).
\end{aligned}$$

   donc $T_p G_k = \sigma_{k-1}(p) G_k$.
   D'autre part :

$$\begin{aligned}
T_p \alpha(z) &= p^{k-1} \alpha(pz) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} \alpha \left(\frac{z+b}{p} \right) \\
&= p^{k-1} \alpha + \frac{1}{p} (p\alpha) \\
&= \alpha(p^{k-1} + 1) = \alpha \sigma_{k-1}(p).
\end{aligned}$$

   alors $T_p(G_k + \alpha) = \sigma_{k-1}(p)(G_k + \alpha)$, d'où $G_k + \alpha$ est une forme propre simultanée.

2. *On a $\widehat{G_k}(1) = \sigma_{k-1}(1) = 1$ et $\widehat{\alpha}(1) = 0$ alors $(\widehat{G_k + \alpha})(1) = 1$ donc $G_k + \alpha$ est une forme propre simultanée normalisée.*

En particulier $G_k - \widehat{G_k}(0)$ est une forme propre simultanée normalisée nulle en l'infini.

Corollaire 3.19. *Soit f une forme propre simultanée normalisée, alors $T_n f = \widehat{f}(n) f$.*

Preuve. On a par définition $T_n f = \lambda_n f$, comme f est normalisée on trouve que $\widehat{T_n f}(1) = \lambda_n \widehat{f}(1) = \lambda_n$, et d'après la proposition (3.15) et la relation (3.8) on a $\widehat{T_n f}(1) = \widehat{f}(n)$ donc
$\widehat{f}(n) = \lambda_n$, d'où $T_n f = \widehat{f}(n) f$. $\square$

On avait ensuite une nouvelle formation de $T_n f$ en introduisant pour $n = ad$ la transformation de Möbius A associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

telle que $Az := \frac{az+b}{d}$:

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \geqslant 1, ad=n \\ 0 \leqslant b < d}} d^{-k} f(Az) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geqslant 1, ad=n \\ 0 \leqslant b < d}} a^k f(Az).$$

3.4 Transformation d'ordre n :

Définition 3.20. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une transformation de la forme $Az = \frac{az+b}{cz+d}$, avec a, b, c, d des entiers, tel que $ad - bc = n$, est appelée transformation d'ordre n. Une telle transformation est représentée par la matrice : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

On identifie généralement A et son opposé $-A$. L'ensemble de toutes les transformations d'ordre n est noté $\Gamma(n)$. Le groupe modulaire Γ est évidement $\Gamma(1)$ sur $\Gamma(n)$, on définit la relation suivante : A_1 et $A_2 \in \Gamma(n)$ sont équivalentes $\Longleftrightarrow \exists V \in \Gamma(1) = \Gamma$ telle que $A_1 = VA_2$. Dans ce cas, on note $A_1 \sim A_2$.

Lemme 3.21. *" $\sim$ " est une relation d'équivalence, ce qui induit une partition de $\Gamma(n)$ en classes d'équivalence modulo $\sim$.*

Théorème 3.22. *Dans toute classe d'équivalence (modulo $\sim$) de $\Gamma(n)$, on peut trouver un représentent de la forme $R = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec $d > 0$.*

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$. Si $c = 0$, on a terminée. Si $c \neq 0$, on choisit r et s deux entiers premiers entre eux tels que $\frac{s}{r} = -\frac{a}{c}$ (i.e $\frac{s}{r}$ est la réduction de $-\frac{a}{c}$). Comme r et s sont premiers entre eux, l'algorithme d'Euclide étendu permet de trouver deux entiers p et q tels que $ps - qr = 1$. On pose $V := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Par construction, on a que $V \in \Gamma$ et on a :

$$VA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{pmatrix}.$$

On a $ra + sc = 0$ par construction ; comme $\det(VA) = \det(A)\det(V) = n$, on conclut que $VA \in \Gamma(n)$, et donc que $VA \sim A$ (par définition de "$\sim$"), Ainsi (selon le signe de $rb + sd$) VA ou $-VA$ est de la forme voulue. □

Théorème 3.23. *Un système complet d'éléments non-équivalents (par "$\sim$") dans $\Gamma(n)$ est donné par l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, où d parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de n, où pour chaque d fixé on a : $a = \frac{n}{d}$, et b parcourt un système complet de restes modulo d.*

Preuve. Le théorème (3.22) montre que tout élément de $\Gamma(n)$ est équivalent à une transformation en forme triangulaire supérieure, donc il suffit la preuve sur deux telles transformations, $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ sont équivalentes $\Longleftrightarrow a_1 = a_2$, $d_1 = d_2$ et $b_1 \equiv b_2[d_1]$.

"$\Longleftarrow$" : Si $a_1 = a_2$, $d_1 = d_2$ et $b_1 \equiv b_2[d_1]$, alors $b_2 = b_1 + qd_1, q \in \mathbb{Z}$, et il suffit de prendre $V = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir $VA_1 = A_2$. On a donc $A_1 \sim A_2$.

"$\Longrightarrow$" : Si $A_1 \sim A_2$, alors $\exists V = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $A_2 = VA_1$ d'où :

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_1 & pb_1 + qd_1 \\ ra_1 & rb_1 + sd_1 \end{pmatrix}.$$

Comme on doit avoir $ra_1 = 0$ et qu'on a $a_1 \neq 0$ (car $a_1 d_1 = n \neq 0$), il faut que $r = 0$. Comme $ps - qr = 1$ (car $V \in \Gamma$) $\Longrightarrow ps = 1$ (car $r = 0$) $\Longrightarrow p = s = 1$(ou $p = s = -1$), car $p, s \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p = s = 1$ (sinon il suffit de considérer $-V$ au lieu de V), et on conclut : $a_2 = pa_1 = a_1$, $d_2 = sd_1 = d_1$, et $b_2 = pb_1 + qd_1 = b_1 + qd_1$ (i.e $b_2 \equiv b_1[d_1]$). $\square$

Remarque. *L'expression de la formation de T_nf peut maintenant être écrite de la manière suivante : $(T_nf)(z) = \frac{1}{n}\sum\limits_{A} a^k f(Az)$, où A parcourt un ensemble complet d'éléments non équivalents dans $\Gamma(n)$, de la forme décrite de la théorème* (3.23).

Théorème 3.24. *Soient $A_1 \in \Gamma(n)$ et $V_1 \in \Gamma$, lors $\exists A_2 \in \Gamma(n)$, et $V_2 \in \Gamma$, telles que $A_1V_1 = V_2A_2$, et si $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & d_i \end{pmatrix}$, $V_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$ alors $a_1(\gamma_2 A_2 z + \delta_2) = a_2(\gamma_1 z + \delta_1), \forall z \in \mathbb{H}$.*

Preuve. On a $\det(A_1V_1) = \det(A_1)\det(V_1) = n \Longrightarrow A_1V_1 \in \Gamma(n) \overset{thm(3.22)}{\Longrightarrow} \exists A_2 \in \Gamma(n), V_2 \in \Gamma$ tels que $A_1V_1 = V_2A_2$. De plus $A_1V_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ d_1\gamma_1 & d_1\delta_1 \end{pmatrix}$ et

$$A_2^{-1} = \tfrac{1}{n}\begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$V_2 = A_1V_1A_2^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} * & * \\ d_1\gamma_1 & d_1\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} * & * \\ d_1d_2\gamma_1 & -d_1\gamma_1b_2 + d_1\delta_1a_2 \end{pmatrix}$$

$\overset{n=a_1d_1}{\Longrightarrow}$ il faut :

$$\gamma_2 = \frac{d_1d_2\gamma_1}{n} = \frac{d_2\gamma_1}{a_1}, \text{ et } \delta_2 = \frac{-d_1\gamma_1b_2 + d_1\delta_1a_2}{n} = \frac{-\gamma_1b_2 + a_2\delta_1}{a_1}.$$

$\Longrightarrow a_1\gamma_2 = d_2\gamma_1$ et $a_1\delta_2 = -b_2\gamma_1 + a_2\delta_1$, d'où :

$$\begin{aligned} a_1(\gamma_2A_2z + \delta_2) &= a_1\gamma_2A_2z + a_1\delta_2 \\ &= d_2\gamma_1\frac{a_2z + b_2}{d_2} - b_2\gamma_1 + a_2\delta_1 \\ &= \gamma_1a_2z + \gamma_1b_2 - b_2\gamma_1 + a_2\delta_1 \\ &= a_2(\gamma_1z + \delta_1). \end{aligned}$$

$\square$

3.5 Comportement de T_nf sous l'action de Γ

Théorème 3.25. *Soient $f \in M_k$ et $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$. Alors :*

$$(T_nf)(Vz) = (\gamma z + \delta)^k T_nf(z).$$

Preuve. On a : $(T_n f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{A_1} a_1^k f(A_1 z)$, où $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ parcourt un ensemble complet d'éléments non équivalents de $\Gamma(n)$. On remplace alors z par Vz pour obtenir :

$$(T_n f)(Vz) = \frac{1}{n}\sum_{A_1} a_1^k f(A_1 V z).$$

D'après les théorèmes (3.22) et (3.24) : $\exists A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$, et $V_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$, telles que $A_1 V = V_2 A_2$ et $a_1(\gamma_2 A_2 z + \delta_2) = a_2(\gamma z + \delta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} a_1^k f(A_1 V z) = a_1^k f(V_2 A_2 z) &= a_1^k (\gamma_2 A_2 z + \delta_2)^k f(A_2 z) \\ &= a_2^k (\gamma z + \delta)^k f(A_2 z). \end{aligned}$$

Comme A_1 parcourt un ensemble complet d'éléments non équivalents de $\Gamma(n)$, A_2 aussi, donc on trouve :

$$(T_n f)(Vz) = \frac{1}{n}(\gamma z + \delta)^k \sum_{A_2} a_2^k f(A_2 z) = (\gamma z + \delta)^k (T_n f)(z).$$

□

3.6 Propriété multiplicative des opérateurs de Hecke

Cette section montre que toute paire d'opérateurs de Hecke T_n et T_m sur M_k commute, ce qui découle d'une propriété multiplicative de la composition $T_n T_m$. On commence par le cas où m et n sont premiers entre eux :

Théorème 3.26. *Si $(m, n) = 1$ alors $T_m T_n = T_{mn}$ (Composition d'opérateurs).*

Preuve. Soit $f \in M_k$, on a :

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geqslant 1, ad = n \\ 0 \leqslant b < d}} a^k f(Az), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

En appliquant T_m à gauche et à droite on trouve :

$$(T_m(T_n f))(z) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha \geqslant 1, \alpha\delta = m \\ 0 \leqslant \beta < \delta}} \alpha^k \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geqslant, ad = n \\ 0 \leqslant b < d}} a^k f(BAz) \text{ avec } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$\overset{C := BA}{\Longleftrightarrow} (T_m(T_n f))(z) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{\alpha \geqslant 1, \alpha\delta = m \\ 0 \leqslant \beta < \delta}} \sum_{\substack{a \geqslant 1, ad = n \\ 0 \leqslant b < d}} (\alpha a)^k f(Cz).$$

On peut avoir que $C = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta d \\ 0 & \delta d \end{pmatrix}$. Comme d et δ parcourent les diviseurs positifs respectifs de n et m, leur produit $d\delta$ parcourt les diviseurs positifs de mn, car m et n

sont premiers entre eux par hypothèse. Donc on a que pour d et δ fixés, $\alpha a = \frac{mn}{d\delta}$. La combinaison linéaire $\alpha b + \beta d$ parcourt un système complet de restes modulo δd, car b et β parcourent des systèmes complets de restes modulo d, respectivement δ, d'après le théorème (3.23) C parcourt un système complet d'éléments non équivalents dans $\Gamma(mn)$, donc on trouve que :

$$\begin{aligned}(T_m(T_n f))(z) &= \frac{1}{mn} \sum_{\substack{\alpha a \geqslant 1, (\alpha a)(\delta d) = mn \\ 0 \leqslant \alpha b + \beta d < \delta d}} (\alpha a)^k f(Cz) \\ &= (T_{mn} f)(z).\end{aligned}$$

□

Maintenant le cas où m et n sont deux nombres naturels (non nuls) quelconques.

Proposition 3.27. *[2]. Pour tous entiers m, n tels que $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, on a :*

$$T_m T_n = \sum_{d \backslash (m,n)} d^{k-1} T_{\frac{mn}{d^2}}.$$

Proposition 3.28. $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m \geqslant 1, n \geqslant 1$ *on a :*

$$m^{k-1} T_n P_m = n^{k-1} T_m P_n.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\widehat{T_n P_m}(l) &= \sum_{d \backslash (n,l)} d^{k-1} \widehat{P_m}\left(\frac{nl}{d^2}\right) \\ &= \sum_{d \backslash (n,l)} d^{k-1} m^{1-k} \sum_{\delta \backslash \left(\frac{nl}{d^2}, m\right)} \delta^{k-1} \widehat{P_1}\left(\frac{\frac{mnl}{d^2}}{\delta^2}\right) \\ &= \frac{1}{m^{k-1}} \sum_{\substack{d \backslash (n,l) \\ \delta \backslash \left(\frac{nl}{d^2}, m\right)}} (d\delta)^{k-1} \widehat{P_1}\left(\frac{mnl}{(d\delta)^2}\right).\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\widehat{T_m P_1}(l) = \sum_{\delta \backslash (m,l)} \delta^{k-1} \widehat{P_1}\left(\frac{ml}{\delta^2}\right),$$

donc :

$$\begin{aligned}\widehat{T_n \circ T_m P_1}(l) &= \sum_{d \backslash (n,l)} d^{k-1} \widehat{T_m P_1}\left(\frac{nl}{d^2}\right) \\ &= \sum_{\substack{d \backslash (n,l) \\ \delta \backslash \left(m, \frac{nl}{d^2}\right)}} (d\delta)^{k-1} \widehat{P_1}\left(\frac{mnl}{(\delta d)^2}\right)\end{aligned}$$

d'où : $m^{k-1}\widehat{T_nP_m}(l) = \widehat{T_n \circ T_m}P_1(l)$, alors : $m^{k-1}T_nP_m = T_n \circ T_mP_1$. D'autre part

$T_n \circ T_mP_1 = T_m \circ T_nP_1$ et on a :

$$\begin{aligned}\widehat{T_nP_1}(l) &= \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^* \\ d\backslash(n,l)}} d^{k-1}\widehat{P_1}\left(\frac{nl}{d^2}\right) \\ &= \frac{\widehat{P_n}(l)}{n^{1-k}} = n^{k-1}\widehat{P_n}(l).\end{aligned}$$

Donc $T_nP_1 = n^{k-1}P_n$, i.e. $T_m \circ T_nP_1 = n^{k-1}T_mP_n$ qui implique $m^{k-1}T_nP_m = n^{k-1}T_mP_n$. □

Théorème 3.29.
La restriction des opérateurs de Hecke T_n à M_k est à valeurs dans M_k. La restriction des opérateurs de Hecke T_n à S_k est à valeurs dans S_k.

Preuve. On a : $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$ et G_k est une forme propre des opérateurs de Hecke, $\forall n \geqslant 1$, donc on montre le résultat pour S_k. D'après la proposition (3.28) on a $T_nP_1 = n^{k-1}P_n$ donc $T_nP_1 \in S_k$.
De plus :

$$\begin{aligned}T_nP_m &= m^{1-k}T_n \circ T_mP_1 \\ &= m^{1-k}\sum_{d\backslash(n,m)} d^{k-1}T_{\frac{mn}{d^2}}P_1.\end{aligned}$$

donc $T_nP_m \in S_k, \forall n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ car $S_k = \langle P_m\rangle$, d'où S_k est stable par T_n. □

Proposition 3.30. *T_n sont autoadjoints pour le produit scalaire de Petersson.*

$$\langle T_nf, g\rangle = \langle f, T_ng\rangle, \forall f, g \in S_k.$$

Preuve. Puisque $S_k = \langle P_m\rangle, \forall m \geqslant 1$ on prends $f = p_m$ et $g = p_l$. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle T_nP_m, P_l\rangle &= \frac{(k-2)!}{(4\pi l)^{k-1}}\widehat{T_nP_m}(l), \text{ (d'après la proposition (2.40))} \\ &= (k-2)!\left(\frac{n}{4\pi lm}\right)^{k-1}\widehat{T_mP_n}(l), \text{ (d'après la proposition (3.28))} \\ &= (k-2)!\left(\frac{n}{4\pi lm}\right)^{k-1}\widehat{T_lP_n}(m), \text{ (d'après l'équation (3.8))} \\ &= \left(\frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}}\right)\widehat{T_nP_l}(m) \\ &= \langle T_nP_l, P_m\rangle \\ &= \langle P_m, T_nP_l\rangle.\end{aligned}$$

□

Les opérateurs de Hecke commutent et autoadjoints on déduit le théorème suivant.

Théorème 3.31. *Il existe une base orthogonale de S_k constituée de formes propres simultanées.*

Définition 3.32. *On appelle forme primitive de S_k tout forme propre simultanée de premier coefficient de Fourier égal à 1.*

Remarque. *Une forme primitive est donc une forme propre simultanée normalisée.*

Les formes de $S_k \setminus \{0\}$ n'étant pas constantes, si f appartient à une base comme celle donnée par le théorème (3.31) alors $\widehat{f}(1) \neq 0$ grâce au théorème (3.17). En particulier, après division par le coefficient de Fourier d'ordre 1 de chaque élément d'une base fournie par le théorème (3.31) on voit qu'il existe une base orthogonale de S_k formée de formes primitives. On va voir qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes primitives et que leur ensemble constitue la seule base de formes primitives.

Proposition 3.33. *L'ensemble des formes primitives de S_k est une base orthogonale de S_k. On note H_k^* cette base.*

Preuve. Soit $f_1, ..., f_d$ une base de formes primitives de S_k construite à partir du théorème (3.31). Soit g une forme primitive de S_k. Il existe des nombres complexes $\alpha_1, ..., \alpha_d$ tels que :

$$g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i f_i.$$

Choisissons j tel que $\alpha_j \neq 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$T_n g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i T_n f_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \widehat{f_i}(n) f_i$$

car on a $T_n f = \widehat{f}(n) f$. D'autre part :

$$T_n g = \widehat{g}(n) g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \widehat{g}(n) f_i.$$

On a donc $\alpha_j \widehat{f_j}(n) = \alpha_j \widehat{g}(n) \Longrightarrow \widehat{f_j}(n) = \widehat{g}(n) \Longrightarrow g = f_j$. Alors les seules formes primitives sont f_i, $i = 1, ..., d$, et par construction leur ensemble est une base orthogonale. $\square$

Proposition 3.34. *Les coefficients de formes primitives sont réels.*

Preuve. On a : $T_n f = \widehat{f}(n) f$, et donc $\langle T_n f, f \rangle = \widehat{f}(n) \parallel f \parallel^2$. Les opérateurs de Hecke étant autoadjoints, on a ensuite $\langle T_n f, f \rangle = \langle f, T_n f \rangle$, d'autre part $\langle f, T_n f \rangle = \langle f, \widehat{f}(n) f \rangle = \overline{\widehat{f}(n)} \parallel f \parallel^2$, donc $\widehat{f}(n) = \overline{\widehat{f}(n)}$. $\square$

Proposition 3.35. *La fonction Δ est une forme primitive de S_{12}.*

Preuve. Soit $n \geqslant 0$ un entier, $T_n \Delta \in S_{12}$ et $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ d'où $T_n \Delta = \lambda_n \Delta$, tel que $\lambda_n \in \mathbb{C}$ donc Δ est une forme propre simultanée et comme $\widehat{\Delta}(1) = \tau(1) = 1$, alors c'est une forme primitive de S_{12}. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'action des opérateurs de Hecke T_n sur l'espace des formes modulaires M_k.

Nous avons présenté les formes modulaires sous un point de vue algébrique, nous avons ensuite étudié l'espace M_k en tant qu'un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}(\mathbb{H})$. Pour bien assimiler ces concepts un peu abstraits, nous avons présenté les séries d'Eisenstein comme des formes modulaires et les séries de Poincaré comme des formes paraboliques.

Concernant les opérateurs de Hecke, tout comme les formes modulaires, nous avons adopté le concept algébrique de T_n comme des applications linéaires qui agissent sur M_k et plus généralement sur l'espace $Hol_\infty(\mathbb{H}/\mathbb{Z})$.

Bibliographie

[1] **A. Wohlhauser**, *Les coefficients de Fourier de la forme modulaire Δ : La fonction de Ramanujan $\tau(n)$*. Département de Mathématiques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. 1996-97.

[2] **E. Royer**, *Un cours « Africain » sur les formes modulaires*, 4 avril 2013.

[3] **G. Chenevier**, *Introduction aux formes modulaires, Leçon à l'école normale supérieure*, Mars 2015.

[4] **G. TenenBum**, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, seconde édition. Cours spécialisés [Specialised courses], Vol.2, société Mathématique de France, Paris 1995.

[5] **H. Cartan**, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques.* Edition, Hermann, EAN13 : 9782705652 159, 1995.

[6] **J. P. Serre**, *Cours d'arithmétique.*Presses universitaires de France, Paris, 1977.

[7] **M. François and E. Royer**, *Formes modulaires et périodiques, Formes modulaires et transcendance*, Sémin. Congr., vol.12, soc. Math. France, Paris, 2005, pp.1-117. MR MR2186573 (2007).

[8] **M. Knopp and S. Robins**, *Easy proofs of Riemann's functional equation for $\xi(s)$ and of Lipschitz summation*, proc.Amer. Math.SOC.129(2001),№7.

[9] **APOSTOL**, Tom M.(1990), *Modular functions and Dirichlet is Number theory* (pp.113-133). Springer-Verlag.New York. ISNB 0-387-97127-0.

[10] **T. Miyak**, *Modular forms, Springer*-Verlag, Berlin, 1989.