République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse et Applications.

Thème

Un résultat de viabilité pour une inclusion différentielle du premier ordre

Présenté par :

- Boudebane imene – Boudjerda kawter.

Devant le jury :

Président	: S. Izza	M.C.B
Encadreur	: M. Benguessoum	M.A.A
Examinateur	: H. Menigher	M.A.A

Promotion **2017/2018**

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous a aidés et nous a données la patience et le courage durant ces langues années d'étude.
Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apportées leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire et particulièrement notre encadreur **M.Benguessoum**,pour D'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

Nous tenons à remercier sincèrement les membres du jury qui ont accepté de jurer notre travail.
Nous n'oublions pas nos parents, membres de nos familles pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction **3**

1 Notations et préliminaires **5**

1.1 Notations générales 5

1.2 Compacité 7

1.3 Quelques concepts de l'analyse convexe 7

1.3.1 Ensembles convexe 7

1.3.2 Fonctions convexes 8

1.3.3 Semicontinuité inférieure 9

1.4 Applications absolument continues et Lipschitziennes 10

1.4.1 Fonctions mesurables 11

1.5 Multi-applications 11

1.5.1 Semicontinuité supérieure 12

1.6 Sous-différentiabilité 13

1.7 Sous-différentiel d'une fonction propre convexe et semicontinue inférieurement 15

1.8 Topologie faible 17

1.9 Quelques résultats de convergence 17

2 Existence de solution viable pour inclusion différentielle du premier ordre **20**

2.1 Résultat principal 20

3 Résultat d'existence de solution viable pour une inclusion différentielle du premier ordre avec retard 34

Conclusion 46

Bibliographie 47

Introduction

L'étude des problèmes de mathématiques ou de physique conduit souvent à la résolution d'équations et d'inclusions différentielles, d'où l'importance de cette branche en mathématique.

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence de solutions viables pour des inclusions différentielles du premier ordre sans retard et avec retard dont le second membre n'est pas nécessairement convexe.

L'étude des problèmes de viabilité occupe une place importante grâce à leurs applications â diverses disciplines, l'économie mathématique, la théorie des jeux et la théorie de contrôle.

Le concept de viabilité a été introduit par **Nogumv**[13] et depuis il a connu une très large extension. Il s'agit d'établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation différentielle admette une trajectoire viable, cette condition est que la fonction demeure dans le cône contingent à l'espace des états. Ce résultat a été étendu au cas multivoque par **Haddad en 1981**[9].

Bressan, **Cellina** et **Colombo** [5] prouvent l'existence de solutions du problème $\dot{x}\ (t)\ \in F(x(t)),\ x(0) = x_0 \in K$, où F est une multi-application semicontinue supérieurement contenue dans le sous différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement (i.e, la multifonction F est cycliquement monotone). Ce résultat a été généralisé par **Ancona** et **Colombo** [1] en prouvent l'existence de solutions du problème perturbé

$$\dot{x}\ (t)\ \in F(x(t)) + f(t, x(t)),\ x(0) = x_0$$

Õu f est une fonction de Carathéodory.

Le manuscrit se compose de trois chapitres dans le premier, nous introduisons quelques notions et définitions de l'analyse fonctionnelle et dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions viables pour une inclusion différentielle avec une perturbation Carathéodory

Enfin,dans le troisième chapitre, on présente un résultat d'existence de solution viable pour le problème du premier ordre avec retard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) \in F(\tau(t)x) + f(t, \tau(t)x) \\ x(t) \in \mathrm{K} \\ \tau(x)x(0) = \varphi_0(0) \end{cases}$$

où $\tau(t)x$ est une application définie de $C([-\sigma, T], \mathbb{R}^n)$ vers $C([-\sigma, 0], \mathbb{R}^n)$ par

$$(\tau(t))x(s) = x(t+s) \text{ pour tout } s \in [-\sigma, 0].$$

$\tau(t)x$ présenté l'historique du la de trajectoire jusqu'à l' instant.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons toutes les notations et tous les résultats que nous avons utilisés tout le long de ce mémoire. On présente quelques définitions et résultats concernant : la sous différentiabilité dans le cas convexe, la topologie faible, et on termine par quelques résultats de convergence.

1.1 Notations générales

$I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

(E, d) un espace métrique.

$(E, \|.\|)$ un espace normé.

$W^{1,2}(I; H)$ l'espace des fonction absolument continues définies sur I à valeurs dans H

$C_\sigma = C([-\sigma, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues définies sur $[-\sigma, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$\|x\|_\sigma = \sup\{\|x(t)\|, t \in [-\sigma, 0]\}$.

$K_0 = \{\varphi \in C([-\sigma, T], \mathbb{R}^n)\}$.

$\mathbf{B}(0, 1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbf{B}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.

$\overline{\mathbf{B}}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r.

$\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

K sous ensemble fermée compact de $\mathbb{R}^n$.

$D(f)$ le domaine effectif de la fonction f.

$int(I)$ l'intérieur de I.

$dom(F)$ le domaine effectif de la multi application F.

$Img(F)$ l'image de F.

$L^2(I, \mathbb{R}^n)$ espace de Hilbert des applications de carré intégrable définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme.

$$\|.\|_2 = \left(\int_I (\|f(t)\|)^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\langle ., . \rangle$ produit scalaire.

$\|.\|$ norme associée à produit scalaire.

$gph(F)$ le graphe de la multi-application F.

$\dot{x}\,(.) = \dfrac{dx}{dt}(.)$ la dérivée de x par rapport à t.

$\rightharpoonup$ convergence faible.

$s.c.s$ semi-continue supérieurement.

$s.c.i$ semi-continue inférieurement.

$\partial f(x)$ sous différentiel d'une fonction convexe.

$\liminf$ la limite inférieure.

$\limsup$ la limite supérieure.

$d(x, A)$ la distance entre x et l'ensemble $A \subset E$ définie par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \left\| x - y \right\|.$$

χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble A, définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A. \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

$co(A)$ l'enveloppe convexe de A.

$\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.

$p.p$ presque par tout.

1.2 Compacité

Définition 1.2.1 (Recouvrement d'un ensemble). *Soit X un ensemble quelconque et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de X. On dit que $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $X \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.*

• *Si X un espace topologique et pour tout $i \in I$, O_i est un sous ensemble ouvert de X,alors $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X.*

Définition 1.2.2 (Sous recouvrement). *Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Si $J \subset I$ et $(O_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de X, alors $(O_j)_{j\in J}$ est appelé un sous recouvrement du recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de X.*

Définition 1.2.3. *(**Recouvrement fini.**) Un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique E est localement fini si pour tout $x \in E$, il existe un voisinage V de x tel que $O_i \bigcap V \neq \varnothing$ pour un nombre fini d'indices i.*

Définition 1.2.4 (Ensemble compact). *Soit E un espace métrique, $K \subset E$.*

• *On dit que K est compact si toute suite d'éléments de K admet une sous suite convergente dans K.*

• *On dit que K est relativement compact si $\overline{K}$ est compact.*

Proposition 1.2.1. *Soient E un espace métrique, $K \subset E$. On dit que K est compact si de tout recouvrement ouverts de K on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Proposition 1.2.2. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées.*

1.3 Quelques concepts de l'analyse convexe

Pour plus de détails sur cette section voir [3],[12],[15] et [16].

1.3.1 Ensembles convexe

Définition 1.3.1 (Ensemble convexe). *Soit E un espace vectoriel. Un ensemble $K \subset E$ est dit convexe si*

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in K.$$

Définition 1.3.2. ***(Enveloppe convexe)*** *Soient E un espace vectoriel , et $A \subset E$. On appelle enveloppe convexe de A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contiennent A. C'est en fait le plus petit convexe de E qui contient A.*

Définition 1.3.3. ***(Enveloppe convexe fermée)*** *On appelle enveloppe convexe fermée de $A \subset E$, le plus petit convexe fermé qui contient A. Elle est notée $\overline{co}(A)$.*

Définition 1.3.4. ***(Simplexe)*** *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ qu'on note Δ_n l'ensemble défini par*

$$\Delta_n = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \geqslant 0\, \forall i,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

Théorème 1.3.1. *Soient E un espace vectoriel et A un sous ensemble de E, alors*

$$co(A) = \left\{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N},\, (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+1} \in \Delta_{k+1},\, x_i \in A\right\}.$$

1.3.2 Fonctions convexes

Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.

Définition 1.3.5. ***(Domaine effectif)*** *On appel domaine effectif de f l'ensemble défini par*

$$D(f) = \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.3.6. ***(Fonction propre)*** *La fonction f est dite propre si et seulement si $f(x) \neq -\infty$, $\forall x \in E$ et $f \not\equiv +\infty$ (i.e. il existe $x_0 \in E, f(x_0) \neq +\infty$).*

Définition 1.3.7. ***(Épigraphe)*** *On appelle épigraphe de f l'ensemble défini par*

$$epif = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Définition 1.3.8. ***(Fonction convexe)*** *On dit qu'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x, y \in D(f)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Proposition 1.3.1. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

1.3.3 Semicontinuité inférieure

Définition 1.3.9. *Soient E un espace vectoriel topologique et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est semicontinue inférieurement (s.c.i en abrégé) au point $x_0 \in E$ si*
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(x_0) > \lambda$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x) > \lambda$, $\forall x \in V$.
On dit que f est s.c.i sur E si et seulement si elle est s.c.i en tout point $x \in E$.

Remarque. *Soient $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction . Alors on a*
1. *Si f est s.c.i au point $x_0 \in E$ et si $f(x_0) = +\infty$. Alors*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = +\infty;$$

2. *Si $f(x_0) = -\infty$, alors f est semicontinue inférieurement en x_0.*

Définition 1.3.10. *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors f est semicontinue inférieurement au point $x_0 \in E$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 on a*

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Proposition 1.3.2. *Soit E un espace topologique, et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors f est s.c.i au point $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Théorème 1.3.2. *Soit H un espace de Hilbert, soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe qui est semicontinue inférieurement et $\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que*

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Remarque. [3] *La norme d'un espace normé est semicontinue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ car les ensembles de niveau $\{x \in E, \|x\| \leq \lambda\}$ sont fortement fermés et convexes, donc faiblement fermés.*

Définition 1.3.11. *Soient E un espace vectoriel topologique et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est semicontinue supérieurement (s.c.s en abrégé) en $x_0 \in E$ si*
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(x_0) < \lambda$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x) < \lambda$, $\forall x \in V$.
On dit que f est s.c.s sur E si et seulement si elle est s.c.s en tout point $x \in E$.

Proposition 1.3.3. *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction , alors f est s.c.s au point $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\limsup_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Remarque. **1.** *f est s.c.i si et seulement si $-f$ est s.c.s.*

2. *f est continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.*

Pour plus de détails sur la semicontinuité voir $[3], [12]$ *et* $[16]$

1.4 Applications absolument continues et Lipschitziennes

Définition 1.4.1. ***(Application absolument continue)*** *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle [a,b] par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant, $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ on a*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.4.1. *Une application $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction intégrable $g : [a,b] \longrightarrow E$ telle que*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t)dt.$$

De plus une fonction absolument continue est dérivable presque partout et $f'(x) = g(x), p.p.$

Remarque. *Une fonction absolument continue est continue.*

Définition 1.4.2. ***(Application Lipschitzienne)*** *Une application $f : E \longrightarrow F$ définie sur un espace métrique (E, d) est dite Lipschitzienne (continue Lipschitzienne) de rapport k ou k-Lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_E \leq k\ d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

Définition 1.4.3. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace de Banach E, f est dite localement Lipschitzienne de rapport $k > 0$ au voisinage de x_0 si pour un certain $\delta > 0$, f est k-Lipschitzienne sur l'ensemble $\mathbf{B}(x_0, \delta)$.*

Proposition 1.4.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, alors on a*

- *Si f est Lipschitzienne alors f est absolument continue.*
- *Si f est localement Lipschitzienne alors f est continue.*

Remarque. *Une fonction Lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1]$ est appelée une contraction.*

1.4.1 Fonctions mesurables

Définition 1.4.4 (Fonction mesurable). *Soient* $(X, \Sigma_1), (Y, \Sigma_2)$ *deux espaces mesurables et* $f : X \rightrightarrows Y$ *une fonction. On dit que* f *est* (Σ_1, Σ_2) *mesurable si* $f^{-1}(\Sigma_2) \subset \Sigma_1$. *Autrement dit*

$$\forall\ V \in \Sigma_2, f^{-1}(V) \subset \Sigma_1.$$

Définition 1.4.5. ***(Fonction de Carathéodory)*** *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable,* Y *et* Z *deux espaces métriques. Soit* $f : X \times Y \longrightarrow Z$. *On dit que* f *est une application de Carathéodory si*

$$\begin{aligned} f_y : X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto f_y(x) = f(x, y). \end{aligned}$$

est Σ*-mesurable pour chaque* $y \in Y$ *fixé et*

$$\begin{aligned} f_x : Y &\longrightarrow Z \\ y &\longmapsto f_x(y) = f(x, y). \end{aligned}$$

est continue sur Y *pour chaque* $x \in X$ *fixé.*
On dit aussi que f *est séparément mesurable séparément continue.*

1.5 Multi-applications

Définition 1.5.1. *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides. On appelle multi-application (ou fonction multivoque) de* X *dans* Y *toute application* F *définie sur* X *à valeurs dans* $\mathcal{P}(Y)$ *et on note* $F : X \rightrightarrows Y$ *où* $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$. *Alors* $\forall x \in X, F(x)$ *est un sous ensemble de* Y.
Les sous ensembles $F(x)$ *sont appelés les images ou les valeurs de* F.
• *On appelle domaine de* F *qu'on note* $dom(F)$, *le sous ensemble de* X *défini par*

$$dom(F) = \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\}.$$

• *On appelle graphe de* F, *le sous ensemble de* $X \times Y$ *noté par gph(F) défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

• *Image de F qu'on note $Img(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$Img(F) = \{y \in Y, \exists\ x \in X, y \in F(x)\}.$$

• *Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y : \exists\ x \in A, y \in F(x)\}.$$

• *Considérons la multi-application $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

Remarque.

$$dom(F^{-1}) = Img(F) \text{ et } Img(F^{-1}) = dom(F).$$

Soit $V \subset Y$,

• *On appelle l'image réciproque large de V par la multi-application F, le sous ensemble de X défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X, F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

• *On appelle l'image réciproque étroite de V par la multi-application F le sous ensemble de X défini par*

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X, F(x) \subseteq V\}.$$

1.5.1 Semicontinuité supérieure

Définition 1.5.2. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s en abrégé) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x_0)$(i.e., $F(x_0) \subset U$), il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$ i.e, $F(z) \subset U$, pour tout $z \in \Omega$.*
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Proposition 1.5.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1) *F est s.c.s ;*

2) *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y ;*

3) *$F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y ;*

4) *$\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$, pour tout sous ensemble M de Y.*

Proposition 1.5.2. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Théorème 1.5.1. *Soient F, G deux multi-applications définies sur X à valeurs dans Y telles que : $\forall x \in X, F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$. On suppose*

$$\begin{cases} 1)\ F s.c.s \text{ au point } x_0 \in X; \\ 2)\ F(x_0) \text{ est compact}; \\ 3)\ \text{graphe de } G \text{ est fermé.} \end{cases}$$

Alors la multi-application $F \cap G : X \rightrightarrows Y$ est s.c.s au point x_0.

Corollaire 1.5.1. *Soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides avec Y un espace compact alors : si le graphe de G est fermé, alors G est s.c.s.*

Proposition 1.5.3. *Soient X et Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs compactes. Si X est un espace compact, alors $F(X)$ est compact.*

Théorème 1.5.2. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes, alors F est semicontinue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X tells que $x_n \longrightarrow x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous-suite $(y_m)_m$ de $(y_n)_n$ telle que*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} y_m \in F(x).$$

Théorème 1.5.3. [*11*] *Soient X un espace métrique, M un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $F : X \rightrightarrows M$ une multi-application. Donc, si F est semicontinue supérieurement, alors la multi-application $co(F) : x \in X \longmapsto co(F(x)) \subset \mathbb{R}^n$ est aussi semi-continue supérieurement.*

Pour plus de détails sur les multi-applications Voir [2], [11] *et* [10].

1.6 Sous-différentiabilité

Les fonctions convexes ne sont pas nécessairement différentiables sur leurs domaines, d'où l'intérêt d'introduire de nouveaux objets appelés sous-gradient et sous-différentiel qui permettent de généraliser la notion de différentiabilité. Pour plus de détails sur cette section voir [3],[16] et [2].

Définition 1.6.1 (Sous-différentiel). *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et $x_0 \in D(f)$. Le sous-différentiel de f au point x_0, noté par $\partial f(x_0)$ est le sous ensemble de E' défini par*

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E'; f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \forall x \in E\}.$$

Un élément quelconque du sous-différentiel est appelé un sous-gradient.

Remarque. 1. *On dit que f est sous-différentiable au point x_0 si et seulement si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*
2. *Si $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre et $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*
3.*Le sous-différentiel est une multi-application définie de E à valeurs dans E' i.e.*

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) :& E \rightrightarrows E' \\ & x_0 \longrightarrow \partial f(x_0) = \{x' \in E'; f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \forall x \in E\} \subset E'. \end{aligned}$$

4.*Le domaine du sous différentiel noté $dom(\partial f)$ est l'ensemble $\{x \in E; \partial f(x) \neq \emptyset\}$.*

Proposition 1.6.1. *[4] Soit E un espace vectoriel normé et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < +\infty$ alors, $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble convexe fermé de E'.*

Démonstration. • **Montrons que $\partial f(x_0)$ est convexe**
Soient $x', y' \in \partial f(x_0)$ et soit $\lambda \in]0, 1[$ **Montrons que** $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in \partial f(x_0)$

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x', x - x_0\rangle, \; \forall x \in E. \\ &\Leftrightarrow \lambda f(x) \geqslant \lambda f(x_0) + \langle \lambda x', x - x_0\rangle, \; \forall x \in E \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} y' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \langle y', x - x_0\rangle, \; \forall x \in E. \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda) f(x) \geqslant (1-\lambda) f(x_0) + (1-\lambda)\langle y', x - x_0\rangle, \; \forall x \in E. \end{aligned} \tag{1.2}$$

de (1.1) et (1.2)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geqslant \langle \lambda x' + (1-\lambda)y', x - x_0\rangle, \forall x \in E. \\ &\Rightarrow \lambda x' + (1-\lambda)y' \in \partial f(x_0). \end{aligned}$$

Donc $\partial f(x_0)$ est convexe.

• **Montrons que $\partial f(x_0)$ est un fermé**

Soit $(x'_n)_n \subset \partial f(x_0) \subset E'$ tel que $\lim_{n \longrightarrow \infty} x'_n = x'$.

$$\Leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x'_n - x'\| = 0.$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{x \in E \backslash \{0\}} \frac{\langle x'_n - x', x \rangle}{\|x\|} = 0.$$
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\langle x'_n - x', x \rangle}{\|x\|} = 0, \ \forall x \in E \backslash \{0\}.$$
$$\Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x'_n - x', x \rangle = 0, \ \forall x \in E.$$

On a $x'_n \in \partial f(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x'_n, x - x_0 \rangle, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}.$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x'_n, x - x_0 \rangle + \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}.$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x'_n - x', x - x_0 \rangle + \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}.$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x'_n - x', x - x_0 \rangle + \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E.$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E.$$
$$\Rightarrow x' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow \partial f(x_0) \text{est fermé.}$$

■

Proposition 1.6.2. [3] *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe au point $x_0 \in D(f)$. Si f est finie et continue au point x_0, alors f est sous différentiable au point x_0 (i.e, $\partial f(x_0) \neq \emptyset$) et $\partial f(x_0)$ est borné.*

Proposition 1.6.3. *Soit $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe et soit $x_0 \in D(f)$. Alors*
$$\forall \lambda > 0, \partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \, \partial f(x_0).$$

1.7 Sous-différentiel d'une fonction propre convexe et semicontinue inférieurement

Soient H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme $\|.\|$ et A un opérateur (multivoque) défini de H dans $\mathcal{P}(H)$ (l'ensemble des parties de H).

Le domaine de A est l'ensemble $dom(A) = \{x \in H, Ax \neq 0\}$, l'image de A est l'ensemble $img(A) = \bigcup_{x \in H} Ax$.

Définition 1.7.1 (Opérateur monotone). *Un opérateur A est dit monotone si*

$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2,\ \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Définition 1.7.2 (Opérateur maximal monotone). *Un opérateur de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones i.e.*
A maximal monotone si et seulement si A monotone et

$$pour\ tout (x, y) \in H \times H, \langle y - A\varepsilon, x - \varepsilon \rangle \geq 0, \forall \varepsilon \in dom(A).$$

(ou plus précisément $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0, \forall (\xi, \eta) \in A)$, alors $y \in Ax$.

Proposition 1.7.1. *Soit f une fonction convexe propre sur H. Si f est semicontinue inférieurement, alors le sous-différentiel de f est maximal monotone.*

Lemme 1.7.1. [7] *Soient $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe s.c.i et $u \in W^{1,2}(I; H)$ tel que $u(t) \in dom(\partial f)$ p.p sur $]0, T[$. On suppose qu'il existe $g \in L^2(I; H)$ telle que $g(t) \in \partial f(u(t))$ p.p. sur $]0, T[$. Alors la fonction $t \longmapsto f(u(t))$ est absolument continue sur $]0, T[$.*
Désignons par $\mathscr{L}$ l'ensemble des point $t \in]0, T[$ tels que $u(t) \in dom(\partial f)$ et $f(u)$ soient dérivables au point t, alors on a pour tout $t \in \mathscr{L}$

$$\frac{d}{dt} f(u(t)) = \langle h, \frac{d}{dt} u(t) \rangle, \forall h \in \partial f(u(t)).$$

Où $W^{1,2}(I; H)$ désigne l'espace des fonctions x absolument continues définies sur I à valeurs dans H telles que $\frac{dx}{dt} \in L^2(I, H)$.

Définition 1.7.3 (Opérateur cycliquement monotone). *On dit qu'un opérateur A de H est cycliquement monotone si pour toute suite cyclique $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ de $dom(A)$ et toute suite $y_i \in Ax_i, i = 1, 2, ..., n$ on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i - x_{i-1}, y_i \rangle \geq 0.$$

Théorème 1.7.1. *Soit A un opérateur monotone. Alors A est cycliquement monotone si et seulement s'il existe une fonction propre convexe s.c.i f de H dans $]-\infty, +\infty]$ telle que $A \subset \partial f$.*

Proposition 1.7.2. *soit A est une application monotone univoque de $D(A) = H$ dans H, on suppose que A est hémicontinue, c'est à dire pour tout $x(t) \in H$ et $\zeta \in H$ $A((1 - t) + t\zeta) \longrightarrow Ax$, lorsque $t \longrightarrow 0$, alors A est maximale monotone .*

1.8 Topologie faible

Pour plus de détails sur cette section voir [12]
Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient $(\varphi_f)_{f\in E'}$ une famille d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.8.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.*

Proposition 1.8.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a*
1. $x_n \longrightarrow x$ *pour* $\sigma(E, E') \longrightarrow < f, x_n > \longrightarrow < f, x >, \forall f \in E'$
2. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *fortement, alors* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$, *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$ *et si* $f_n \longrightarrow f$ *fortement dans* E',
$(i.e., \|f_n - f\| \longrightarrow 0)$,*alors* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.8.2. [6] *Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Soit (x_n) une suite dans E telle que x_n converge vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et*
$\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$. *Alors $x_n \longrightarrow x$ fortement.*

1.9 Quelques résultats de convergence

Nous commençons par rappeler quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 1.9.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$. Alors*

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Théorème 1.9.1. *(**Théorème d'Ascoli-Arzelà**) Soit (E, d) un espace métrique compact, (E, d') un espace métrique complet, et soit H un sous ensemble de $C(E, Y)$. Alors H est relativement compact si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\, \textit{est équicontinue sur}\, E, \\ ii)\, \textit{pour tout}\, x \in E, H(x) = \{f(x) : f \in H\}\, \textit{estrelativementcompact}. \end{cases}$$

Théorème 1.9.2. *(**Conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà**) [2] Soit $(f_n(.))_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs* *dans un espace E de dimension finie tel que*

$$\begin{cases} i.\ \forall\ t \in I, (f_n(t))_n \text{ est relativement compact dans } E, \\ ii.\ \text{il existe une fonction a valeurs réelles positives } C \in L^1(I, \mathbb{R}_+), \text{ telle que} \\ \| \dot{f}_n\,(t)\| \leq C(t),\ \text{p.p. sur} I. \end{cases}$$

Alors il existe une sous-suite (notée encore $(f_n(.))_n$) et une fonction absolument continue $f : I \longrightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} i)\ (f_n(.)) \text{ converge uniformément vers } x \text{ sur un ensemble compact de } I, \\ ii)\ (\dot{f}_n\,(.)) \text{ converge faiblement vers } \dot{f}\,(.) \text{ dans } L^1(I, E). \end{cases}$$

Théorème 1.9.3. *(**Théorème de la convergence de Lebesgue**)[8] Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré et E un espace de Banach, soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $(f_n(.))$ une suite de fonctions μ-mesurables définies sur T à valeurs dans E, si la suite $(f_n(.))$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$*
(i) $f_n(t) \longrightarrow f(t)\ \mu$.p.p sur T ;
(ii) il existe une fonction positive $g \in L^p_{\mathbb{R}}(T)$ telle que, $\|f_n(t)\| \leqslant g(t)\ \mu$.p.p., $t \in T$, $n \in \mathbb{N}$,
Alors $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ dans $L^p_E(T)$.
En particulier, dans le cas où $p = 1, f_n(.)$ et $f(.)$ sont Bochner intégrables et

$$\int_T f(t)d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_T f_n(t)d\mu.$$

Théorème 1.9.4. *(**Réciproque de la convergence de Lebesgue**) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré et E un espace de Banach, soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Si $f_n(.) \longrightarrow f(.)$ dans $L^p_E(T)$ alors il existe $(f_{n_k}(.))$ une suite extraite de $(f_n(.))$ et une fonction positive*
$g(.) \in L^p_{\mathbb{R}}(T)$ telles que
(i) $f_{n_k}(.) \longrightarrow f(.)\ \mu$.p.p.
(ii) pour tout k, $\|f_{n_k}(.)\| \leqslant g(.)\ \mu$.p.p.

Théorème 1.9.5. *(**Théorème de convergence**) [2] Soient E un espace localement convexe et séparé, Y un espace de Banach, $K \subset Y$ un sous ensemble convexe fermé et $F : X \rightrightarrows K$ une multi-application hémicontinue supérieurement à valeurs convexe. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_k et y_k des fonctions mesurables de I à valeurs dans X (respectivement Y) vérifiant pour presque tout $t \in I$, et tout voisinage V de 0 dans $X \times Y$, $\exists k_0 = k_0(t, v)$ tel que*

$$\forall k \geq k_0, (x_k(t), y_k(t)) \in graph(F) + V.$$

Si

$$\begin{cases} 1)\ (x_k) \text{ Converge presque partout vers une fonction } x \text{ de } I \text{ dans } X; \\ 2)\ (y_k) \subset L^1(I, Y) \text{ et converge faiblement vers } y \text{ dans } L^1(I, Y). \end{cases}$$

Alors

$$(x(t), y(t)) \in graph(F) \text{ i.e., } y(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in I.$$

Proposition 1.9.2. [6] *Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Soit (x_n) une suite dans E telle que x_n converge vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et* $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$. *Alors $x_n \longrightarrow x$ fortement.*

Chapitre 2

Existence de solution viable pour inclusion différentielle du premier ordre

Dans ce chapitre, on prouve l'existence de solutions viables pour une inclusion différentielle du premier ordre du type

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) \in f(t, x(t)) + F(x(t)), \quad p.p\ \ surI \\ x(0) = x_0 \in K, \\ x(t) \in K \quad \forall t \in I. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où K est un fermé de $\mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-fonction semicontinue supérieurement à valeurs compactes non vides dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Carathéodory .
La preuve est basée sur la méthode de discrétisation. On construit une suite de solution approximative, en utilisant le Théorème d'Ascoli-Arzelà on montre qu'on peut en extraire une sous- suite qui converge vers une solution du Problème (2.1).

2.1 Résultat principal

Supposons que F et f vérifient les conditions suivantes

A_1) F est semicontinue supérieurement, i.e, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x - x'\| \leq \delta$ alors $F(x') \subseteq F(x) + \varepsilon\mathbf{B}$.

A_2) Il existe une fonction convexe, propre et semicontinue inférieurement $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $F(x) \subset \partial V(x)$, où ∂V est le sous-différentiel de V.

A_3) $f : \mathbb{R} \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory, i.e.

- pour chaque $x \in K$, $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable,
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t,x)$ est continue.

A_4) Il existe $m \in L^2_I(\mathbb{R})$, tel que

$$\|f(t,x)\| \leq m(t) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times K.$$

A_5) (Condition tangentielle) pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times K$, il existe $v \in F(x)$ tel que

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} d_K \left(x + hv + \int_t^{t+h} f(s,x) ds \right) = 0.$$

Soient $x_0 \in K$, f et F vérifiant les conditions $A_1, ..., A_5$. On a le résultat principal suivant

Théorème 2.1.1. *Il existe $T > 0$ et $x(.) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, telle que*

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) \in f(t,x(t)) + F(x(t)), \quad p.p \ \ sur I \\ x(0) = x_0 \in K, \\ x(t) \in K \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit V une fonction convexe, propre et semicontinue inférieurement tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $F(x) \subset \partial V(x)$. Alors il existe $r_x = r > 0$ et $M_x = M > 0$,

$$\|F(x)\| = \sup_{z \in F(x)} \|z\| \leq M$$

et V est lipschitzienne de rapport M sur $\mathbf{B}(x,r)$.

En effet

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On sait que tout sous ensemble borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$ est compact et comme F est une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs compactes, $F(x)$ est compact, ce qui implique que $F(x)$ est bornée, i.e,

$$\exists\, M > 0,\ \|F(x)\| = \sup_{z \in F(x)} \|z\| \leqslant M.$$

par conséquent $F(x)$ est bornée sur $\mathbf{B}(x,r)$

• **Montrons que $\partial V(x)$ est bornée**

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $M > 0$ et que $x' \in U$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $y' \in \partial V(x)$ tel que $\|y'\| > M$.

Soit $x' = x + \lambda y' \in U$ et soit $y \in F(x) \subset \partial V(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle y - y', x - x' \rangle &= \langle y - y', \lambda y' \rangle \\
&= \lambda \langle y - y', y' \rangle \\
&= \lambda \langle y, y' \rangle - \lambda \langle y', y' \rangle \\
&= \lambda \langle y, y' \rangle - \lambda \|y'\|^2 \\
&\overset{\textbf{C.S}}{\leqslant} \lambda \|y\| \|y'\| - \lambda \|y'\|^2.
\end{aligned}$$

On sait que

$$0 \leqslant (\|y\| - \|y'\|)^2 = \|y\|^2 + \|y'\|^2 - 2\|y\|\|y'\| \Rightarrow \|y\|\|y'\| \leqslant \frac{\|y\|^2}{2} + \frac{\|y'\|^2}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle y - y', x - x' \rangle &\leqslant \lambda \frac{\|y\|^2}{2} + \lambda \frac{\|y'\|^2}{2} - \lambda \|y'\|^2 \\
&= \lambda \frac{\|y\|^2}{2} - \lambda \frac{\|y'\|^2}{2} \\
&< \lambda \frac{M^2}{2} - \lambda \frac{M^2}{2} = 0
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\langle y - y', x - x' \rangle < 0$$

ce qui est en contradiction avec la monotonie de la fonction ∂V, alors $\partial V(x)$ est bornée sur $\mathbf{B}(x, r)$.

- **Montrons que V est M - lipschitzienne sur** $\mathbf{B}(x, r)$

Soit

$$x' \in \partial V(x_1) \Leftrightarrow V(x) - V(x_1) \geqslant \langle x', x - x_1 \rangle, \quad \forall x \in \mathbf{B}(x, r) \tag{2.2}$$

$$y' \in \partial V(x_2) \Leftrightarrow V(x) - V(x_2) \geqslant \langle y', x - x_2 \rangle, \quad \forall x \in \mathbf{B}(x, r) \tag{2.3}$$

en particulier pour $x = x_2$ dans (2.2) on trouve

$$V(x_1) - V(x_2) \leqslant \langle x', x_1 - x_2 \rangle \leqslant \|x'\|\|x_1 - x_2\| \leqslant M \ \|x_1 - x_2\| \tag{2.4}$$

en particulier pour $x = x_1$ dans (2.3) on trouve

$$V(x_1) - V(x_2) \geqslant \langle y', x_1 - x_2 \rangle \geqslant -\|y'\|\|x_1 - x_2\| \geqslant -M\|x_1 - x_2\| \tag{2.5}$$

Il s'ensuit de, (2.4) et (2.5) que

$$|V(x_1) - V(x_2)| \leqslant M\|x_1 - x_2\| \ \ \forall x \in \mathbf{B}(x, r).$$

• Dans la suite de ce chapitre, notons le sous ensemble compact K_0 définie par $K_0 = K \cap \overline{B}(x_0, r)$. Soit $T > 0$, tel que

$$\forall\ T > 0,\ \int_0^T (M + 1 + m(s))\ ds < \frac{r}{2} \tag{2.6}$$

Le lemme suivant important dans la démonstration du Théorème 2.1.1.

Lemme 2.1.1. *Supposons que F et f vérifient les conditions $A_1, ..., A_5$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ $(\eta < \varepsilon)$ pour tout $(t, x) \in I \times K_0$, il existe $u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$ et $h_{t,x} \in [\eta, \varepsilon]$ tel que*

$$x + h_{t,x}u + \int_t^{t+h_{t,x}} f(s, x)ds \in K.$$

Démonstration du lemme Soient $(t, x) \in I \times K_0$ et $\varepsilon > 0$. Comme F est semicontinue supérieurement alors, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$F(y) \subset F(x) + \varepsilon\mathbf{B},\ \ \forall y \in \mathbf{B}(x, \delta_x).$$

Soit $(s, y) \in I \times K$, d'après la condition de tangente, il existe $h_{s,y} \in]0, \varepsilon]$ et $v \in F(y)$ tel que

$$\lim_{h_{s,y} \longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h_{s,y}} d_K \left(y + h_{s,y}v + \int_s^{s+h_{s,y}} f(\tau, x)d\tau \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h_{s,y} \longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h_{s,y}} d \left(y + h_{s,y}v + \int_s^{s+h_{s,y}} f(\tau, x)d\tau, K \right) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\ h_{s,y} > 0$ tel que

$$\frac{1}{h_{s,y}} d_K \left(y + h_{s,y}v + \int_s^{s+h_{s,y}} f(\tau, x)d\tau \right) < \varepsilon$$

$$d_K \left(y + h_{s,y}v + \int_s^{s+h_{s,y}} f(\tau, x)d\tau \right) < h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T}$$

Considérons les ensembles définis par

$$N(s, y) = \left\{ (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, d(z + h_{s,y}v + \int_t^{t+h_{s,y}} f(\tau, z)d\tau, K) < h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T} \right\}$$

puisque

$$\|f(s, z)\| < m(s) \qquad p.p\, sur I \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

alors, on appliquons le théorème de la convergence dominée sur la suite de fonctions $(\chi_{[t,t+h_{s,y}]}f(.,.))_t$ définie par

$$(\chi_{[t,t+h_{s,y}]}f(.,.))_t = \begin{cases} f(t,.)\ \ si\ \ t \in [t, t + h_{s,y}] \\ 0\ \ sinon. \end{cases}$$

On a $f(t,.)$ est une fonction de Caratéodory, donc elle est continue et on a $\|f(t,z)\| \leqslant m(s)$ alors, la fonction $l \longmapsto \int_l^{l+h_{s,y}} f(\tau,z)d\tau$ est une fonction continue et $z \longmapsto z + h_{s,y}v$ est aussi continue, alors

$$(l,z) \longmapsto z + h_{s,y}v + \int_l^{l+h_{s,y}} f(\tau,z)d\tau = g(l,z)$$

est une fonction continue. Comme la fonction $d(.,K)$ est une fonction continue on obtient que

$$(l,z) \longmapsto d_K\left(z + h_{s,y}v + \int_l^{l+h_{s,y}} f(\tau,z)d\tau\right) = (d_K \circ g)(l,z)$$

est continue.

• **Montrons que l'ensemble $N(s,y)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$**

$$N(s,y) = \left\{(t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (d_k \circ g)(t,z) < h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T}\right\} = (d_K \circ g)^{-1}(]-\infty, h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T}[)$$

On a $]-\infty, h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, comme l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, ce qui applique que $N(s,y)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De plus, puisque $(s,y) \in N(s,y)$, il existe une boule $\mathbf{B}((s,y),\eta_{s,y})$ de rayon $\eta_{(s,y)} < \delta_x$ contenue dans $N(s,y)$, donc, le sous-ensemble compact $I \times K_0$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $\mathbf{B}((s_i,y_i),\eta_{s_i,y_i})$, $i = 1,...,q$, Pour simplifier, notons $h_{s_i,y_i} = h_i, i = 1,...,q$, $\eta = \min_{i=1,...,q} h_i > 0$.
Soit $(t,x) \in I \times K_0$, puisque $(t,x) \in B((s_i,y_i),\eta_{s_i,y_i})$ qui est incluse dans $N(s_i,y_i)$ alors, il existe $x_i \in K$ et $u_i \in F(y_i)$, tel que

$$\begin{aligned}\left\|u_i - \frac{1}{h_i}(x_i - x - \int_t^{t+h_i} f(s,x)ds)\right\| &\leqslant \frac{1}{h_i}d_K\left(x + u_ih_i + \int_t^{t+h_i} f(s,x)ds\right) + \frac{1}{h_i}d_K(x_i)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4T} + \frac{\varepsilon}{4T}\\ &= \frac{\varepsilon}{2T}.\end{aligned}$$

Posons

$$u = \frac{1}{h_i}\left(x_i - x - \int_t^{t+h_i} f(s,x)ds\right)$$

donc

$$uh_i = x_i - x - \int_t^{t+h_i} f(s,x)ds$$
$$x + uh_i + \int_t^{t+h_i} f(s,x)ds = x_i \in K.$$

et

$$\|u_i - u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2T}$$

Comme

$$\|x - y_i\| \leqslant \eta_{(s,y)} < \delta_x$$

puis

$$F(y_i) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2T}\mathbf{B},$$

par conséquent

$$u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}.$$

• **Étape 1 : Construction des solutions approchées**

Soient $x_0^n = x_0 \in K_0$ et $\varepsilon < T$, d'après le Lemme 2.1.1, il existe $\eta > 0, h_0^n \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_0^n \in F(x_0) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$, tel que

$$x_1^n = x_0^n + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0} f(s, x_0)ds \in K \tag{2.7}$$

. •**Montrons que** $x_1^n \in K_0$

D'après, les relations(2.6), (2.7) et l'hypothèse (A_4) si $h_0^n \leqslant T$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - x_0\| &= \left\| x_0 + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, x_0)ds - x_0 \right\| \\
&= \left\| h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, x_0)ds \right\| \\
&\leqslant \|h_0^n u_0^n\| + \left\| \int_0^{h_0^n} f(s, x_0)ds \right\| \\
&\leqslant h_0^n \|u_0^n\| + \int_0^{h_0^n} \|f(s, x_0)ds\| \\
&\leqslant h_0^n (M+1) + \int_0^{h_0^n} m(s)ds \\
&\leqslant \int_0^{h_0^n} (M + 1 + m(s))ds \leqslant \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

donc, $x_1^n \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2})$, et on a $x_1^n \in K$.

Alors, $x_1^n \in \overline{B}(x_0, r) \cap K = K_0$, d' ou $x_1^n \in K_0$.

Pour (h_0^n, x_1^n), et d'après le Lemme 2.1.1, il existe $h_1^n \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_1^n \in F(x_1^n) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$, tel que

$$x_2^n = x_1^n + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n + h_1^n} f(s, x_1^n)ds \in K. \tag{2.8}$$

• **Montrons que** $x_2^n \in K_0$

d'après les relations (2.6), (2.8) et l'hypothèse (A_4) si $h_0^n + h_1^n < T$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_2^n - x_0\|\| &= \left\| x_1^n + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,x_1^n)ds - x_0 \right\| \\
&= \left\| x_0 + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s,x_0^n)ds + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,x_1^n)ds - x_0 \right\| \\
&= \left\| h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s,x_0^n)ds + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} +f(s,x_1^n)ds \right\| \\
&\leqslant \|h_0^n u_0^n\| + \left\| \int_0^{h_0^n} f(s,x_0)ds \right\| + \|h_1^n u_1^n\| + \left\| \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,x_1^n)ds \right\| \\
&\leqslant h_0^n \|u_0^n\| + \int_0^{h_0^n} \|f(s,x_0)ds\| + h_1^n \|u_1^n\| + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} \|f(s,x_1^n)ds\| \\
&\leqslant (h_0^n + h_1^n)(M+1) + \int_0^{h_0^n} m(s)ds + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_0^n} m(s)ds \\
&= (h_0^n + h_1^n)(M+1) + \int_0^{h_0^n+h_1^n} m(s)ds \\
&= \int_0^{h_0^n+h_1^n} (M+1+m(s))ds \leqslant \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

donc, $x_2^n \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2})$ et on a $x_2^n \in K$ alors, $x_2^n \in \overline{B}(x_0, r) \cap K = K_0$
d'ou, $x_2^n \in K_0$.
Posons $h_{-1}^n = 0$, puisque $h_i^n \in [\eta, \varepsilon]$, il existe un entier s tel que

$$\sum_{i=0}^{s-1} h_i^n < T < \sum_{i=0}^{s} h_i^n.$$

Donc, nous construirons par récurrence les suites finies $(h_p^n)_p \subset [\eta, \varepsilon], (x_p^n)_p \subset K_0$ et $(u_p^n)_p \in F(x_p^n) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$, telles que pour tout $p = 0, ..., s-1$, nous avons

$$\begin{cases} x_{p+1}^n = x_p^n + h_p^n u_p^n + \displaystyle\int_{h_{p-1}^n}^{h_{p-1}^n + h_p^n} f(s, x_p^n)ds \in K, \\ u_p^n \in F(x_p^n) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Vérifions que pour tout $p \geqslant 2$ on a

$$\begin{cases} x_p^n = x_0 + \displaystyle\sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, x_i^n)d\tau. \\ u_p \in F(x_p) + \dfrac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}. \end{cases} \tag{2.10}$$

•**Montrons que** (2.10) et vrais pour $p = 2$:
on a

$$x_1^n = x_0 + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(\tau, x_0)d\tau$$

$$\begin{aligned}
x_2^n &= x_1^n + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(\tau, x_1^n) d\tau \\
&= x_0 + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(\tau, x_0) d\tau + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(\tau, x_1^n) d\tau. \\
&= x_0 + \sum_{i=0}^{i=1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=1} \int_0^{h_0^n+h_1^n} f(\tau, x_i^n) d\tau \\
&= x_0 + \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, x_i^n) d\tau.
\end{aligned}$$

d'où (2.10) et vraie pour $p = 2$.

Supposons que (2.10) et vraie pour $p-1$ et montrons qu'elle est vrai pour p

$x_{p-1} = x_0 + \sum_{i=0}^{i=p-2} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-2} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, x_i^n) d\tau.$

d'après, (2.9) on a

$$\begin{aligned}
x_p^n &= x_{p-1}^n + h_{p-1}^n u_{p-1}^n + \int_{h_{p-2}^n}^{h_{p-2}^n+h_{p-1}^n} f(\tau, x_{p-1}^n) d\tau. \\
&= x_0 + \sum_{i=0}^{i=p-2} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-2} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, x_i^n) d\tau + h_{p-1}^n u_{p-1}^n + \int_{h_{p-2}^n}^{h_{p-2}^n+h_{p-1}^n} f(\tau, x_{p-1}^n) d\tau.
\end{aligned}$$

$$x_p^n = x_0 + \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, x_i^n) d\tau$$

Alors, (2.10) est vraie pour $(p-1)$, donc $\big(\mathcal{P}\big)$ et vrai pour tout $p \geqslant 2$.

•**Montrons que** $x_p^n \in K_0$

on a

$$\begin{aligned}
\|x_p^n - x_0\| &= \left\| \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, x_i^n) d\tau \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n \|u_i^n\| + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} \|f(\tau, x_i^n)\| d\tau \\
&\leqslant (M+1) \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n + \int_0^T m(\tau) d\tau \\
&= \int_0^T (M+1+m(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{i=0}^{i=p-1} h_i^n \leqslant T$ on a

$$\|x_p^n - x_0\| \leqslant \frac{r}{2}.$$

donc, $x_p^n \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2})$, d'autre part, on a $x_p^n \in K$

alors, $x_p^n \in \overline{B}(x_0, r) \cap K = K_0$

d'ou $x_p^n \in K_0$

Pour tout entier n, $q = 0, ..., s-1$ désignons par h_q^n le réel associé à $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et x_q^n donné par le Lemme 2.1.1. Considérons la suite $(\tau_n^q)_n$ définie par

$$\begin{cases} \tau_n^0 = 0, \tau_n^s = T. \\ \tau_n^q = h_0^n + ... + h_{q-1}^n. \end{cases}$$

Puis, on définit sur $[\tau_n^{q-1}, \tau_n^q]$ la suite de fonctions $(x_n(.))_n$ par

$$\begin{cases} x_n(t) = x_{q-1}^n + (t - \tau_n^{q-1})u_{q-1}^n + \displaystyle\int_{\tau_{q-1}^n}^t f(s, x_{q-1}^n)ds \\ x_n(0) = x_0 \end{cases}$$

alors, $\forall t \in]\tau_n^{q-1}, \tau_n^q[$

$$\dot{x_n}\ (t) = u_{q-1}^n + f(t, x_{q-1}^n).$$

On définie les fonctions $\theta_n(.)$ et $\varphi_n(.)$ tel que

$$\theta_n(t) = \begin{cases} \tau_n^{q-1} \;\; si \; t \in [\tau_n^{q-1}, \tau_n^q[, \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \tau_n^{q} \;\; si \; t \in [\tau_n^{q-1}, \tau_n^q[, \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n(t) = x_n(\theta_n(t)) + (t - \theta_n(t))u_n(\theta_n(t)) + \displaystyle\int_{\theta_n(t)}^t f(s, x_n(\theta_n(t)))\, ds, \;\; \forall t \in I \\ x_n(0) = x(0). \end{cases}$$

$$\dot{x_n}\ (t) = u_n(\theta_n(t)) + f(t, x_n(\theta_n(t))).$$

• Étape 2 Convergence des solutions approchées

On remarque que la suite $(x_n(.))_n$ satisfait les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \| \dot{x_n}\ (t)\| &= \|u_n(\theta_n(t)) + f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \\ &\leqslant \|u_n(\theta_n(t))\| + \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \\ &\leqslant M + 1 + m(t). \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^T \| \dot{x_n}\ (t)\|^2 dt \leqslant \int_0^T (M + 1 + m(t))^2 dt.$$

i.e,

$$\| \dot{x_n}\ (t)\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_0^T (M + 1 + m(t))^2 dt. \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t)\| &= \left\| x_n(\theta_n(t)) + (t-\theta_n(t))u_n(\theta_n(t)) + \int_{\theta_n(t)}^{t} f(s, x_n(\theta_n(t)))ds \right\| \\
&= \left\| x_n(\theta_n(t)) + \int_{\theta_n(t)}^{t} u_n(\theta_n(t))ds + \int_{\theta_n(t)}^{t} f(s, x_n(\theta_n(t)))ds \right\| \\
&= \left\| x_n(\theta_n(t)) + \int_{\theta_n(t)}^{t} (u_n(\theta_n(t)) + f(s, x_n(\theta_n(t))))ds \right\| \\
&= \left\| x_n(\theta_n(t)) + \int_{\theta_n(t)}^{t} \dot{x}_n\ (s)ds \right\| \\
&\leqslant \|x_n(\theta_n(t))\| + \left\| \int_{\theta_n(t)}^{t} \dot{x}_n\ (s)ds \right\| \\
&\leqslant \|x_n(\theta_n(t))\| + \int_{\theta_n(t)}^{t} \| \dot{x}_n\ (s)\|ds \\
&\leqslant \|x_0\| + \frac{r}{2} + \int_{\theta_n(t)}^{t} (M+1+m(t))dt \\
&\leqslant \|x_0\| + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = \|x_0\| + r.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_n(t) \in \overline{\mathbf{B}}(0, \|x_0\| + r).$$

Ce qui implique que pour tout $t \in I$, $(x_n(t))_n$, est inclus dans l'ensemble compact donc elle est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$, d'après la relation (2.11) la suite $(x_n(.))_n$ est équi-uniforme. Donc, par le Théorème 1.9.1 $(x_n(.))$ est relativement compact dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. Alors, d'aprés le Théorème 1.9.2 il existe une sous suite encore notée $(x_n(.))_n$ et une fonction absolument continue
$x(.) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tell que

- $x_n(.)$ converge uniformement vers $x(.)$,
- $\dot{x}_n\ (.)$ converge faiblement vers $\dot{x}\ (.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$

•**Montrons que pour tout** $t \in I, \exists\, q \in \{1, ..., q\}$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d_{gr(F)} \big(x_n(t), \dot{x}_n\ (t) - f(t, x_n(\theta_n(t))) \big) = 0.$$

Soit $t \in I$. Par construction de la suite τ_n^q, il existe q tel que $t \in [\tau_n^{q-1}, \tau_n^q]$ et $(\varphi_n(t))$ converge vers t
Puisque

$$\dot{x}_n\ (t) - f(t, x_n(\theta_n(t))) = u_n(\theta_n(t)) \in F(x_n(\theta_n(t))) + \frac{\mathbf{B}}{nT},$$

Alors,$\exists\, b \in \mathbf{B}(0,1)$ tel que

$$(x_n(\theta_n)(t), (u_n(\theta_n(t)) - \frac{b}{nT})) \in gr(F).$$

$$\begin{aligned} d_{gr(F)}\left(x_n(t),\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_n(\theta_n(t)))\right) &= d\left((x_n(t),\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_n(\theta_n(t)))),gr(F)\right)\\ &\leqslant \|x_n(t)-x_n(\theta_n(t))\|+\|u_n(\theta_n)-u_n(\theta_n)+\frac{b}{nT}\|\\ &\leqslant \|x_n(t)-x_n(\theta_n(t))\|+\frac{1}{nT}. \end{aligned}$$

Alors,

$$d\left((x_n(t),\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_n(\theta_n(t)))),gr(F)\right)\leqslant \|x_n(t)-x_n(\theta_n(t))\|+\frac{1}{nT}.$$

Par passage à la limite on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d_{gr(F)}\left(x_n(t),\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_n(\theta_n(t)))\right)=0.$$

ce qui implique

$$\left(x_n(t),\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_n(\theta_n(t)))\right)\in\overline{gr(F)}. \tag{2.12}$$

Puisque la suite $x_n(.)$ converge vers $x(.)$ uniformément, $\dot{x}_n\,(.)$ converge vers $\dot{x}\,(.)$ faiblement dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$, $f(.,x_n(\theta_n(.)))_n$ converge vers $f(.,x(.))$ dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$ comme F est semicontinue supérieurement alors, en appliquant le Théorème (1.9.5), $x(.)$ est une solution du problème convexité suivant

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t)\in\overline{co}(F(x(t)))+f(t,x(t)).\\ x(0)=x_0. \end{cases}$$

Par l'hypothèse (A_2), $\forall t\in I$ on a

$$\dot{x}\,(t)-f(t,x(t))\in\partial V(x(t)). \tag{2.13}$$

•Montrons que $\dot{x}_n\,(.)$ converge fortement vers $\dot{x}\,(.)$ dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$

Pour commencer nous prouvons que $(\|\,\dot{x}_n\,\|_2)_n$converge vers $\|\,\dot{x}\,\|_2$.

On a $x(.)$ et $V(x(.))$ sont absolument continues, d'après la relation (2.13) et le Lemme 1.7.1 on a

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))=\langle\dot{x}\,(t),\dot{x}\,(t)-f(t,x(t))\rangle\quad p.p\,sur\,I.$$

D'après, l'intégration sur l'intervalle I

$$\begin{aligned} V(x(T))-V(x_0) &= \int_0^T\langle\dot{x}\,(s),\dot{x}\,(s)\rangle ds-\int_0^T\langle\dot{x}\,(s),f(s,x(s))\rangle ds\\ &= \int_0^T\|\,\dot{x}\,(s)\|^2ds-\int_0^T\langle\dot{x}\,(s),f(s,x(s))\rangle ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'autre part, pour tout $q=1,...,s$ et $x_n(\tau_n^{q-1})=x_{q-1}^n$ alors,

$$\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_n(\tau_n^{q-1}))=\dot{x}_n\,(t)-f(t,x_{q-1}^n)\in\partial V(x_n(\tau_n^{q-1}))+\frac{1}{nT}\mathbf{B}.$$

il existe $b_q \in \mathbf{B}$, tel que

$$\dot{x}_n\,(t) - f(t, x^n_{q-1}) + \frac{1}{nT}\,b_q \in \partial V(x_n(\tau_n^{q-1})).$$

Par la définition du sous-différentiel, on a,
$\forall t \in [\tau_n^{q-1}, \tau_n^q]$ et $\forall z \in \partial V(x_n(\tau_n^{q-1}))$

$$V(x_n(\tau_n^q)) - V(x_n(\tau_n^{q-1})) \geqslant \langle x_n(\tau_n^q) - x_n(\tau_n^{q-1}), z\rangle$$

en particulier pour $z = \dot{x}_n\,(t) - f(t, x^n_{q-1}) + \frac{1}{nT} b_q$, on trouve que

$$\begin{aligned}
V(x_n(\tau_n^q)) - V(x_n(\tau_n^{q-1})) &\geqslant \langle x_n(\tau_n^q) - x_n(\tau_n^{q-1}), \dot{x}_n\,(t) - f(t, x^n_{q-1}) + \frac{1}{nT} b_q\rangle \\
&\geqslant \langle x_n(\tau_n^q) - x_n(\tau_n^{q-1}), \dot{x}_n\,(s)\rangle - \langle x_n(\tau_n^q) - x_n(\tau_n^{q-1}), f(t, x^n_{q-1})\rangle + \langle x_n(\tau_n^q) - x_n(\tau_n^{q-1}), \frac{b}{nT}\rangle \\
&\geqslant \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\,(s), \dot{x}_n\,(s)\rangle ds + \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\,(s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle ds + \frac{1}{nT} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\,(s), b_q\rangle ds.
\end{aligned}$$

En faisant une sommation sur q, on obtient

$$\begin{aligned}
V(x_n(t)) - V(x_0) \geqslant \int_0^T \| \dot{x}_n\,(s)\|^2 ds - \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\,(s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle ds \\
+ \frac{1}{nT} \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\,(s), b_q\rangle ds. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

• **Montrons que**

la suite $\left(\sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\,(s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle ds\right)_n$ converge vers $\left(\int_0^T \langle \dot{x}_n\,(s), f(s, x(s))\rangle ds\right)$

En effet

$$\begin{aligned}
&\| \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle ds - \int_0^T \langle \dot{x}\ (s), f(s, x(s))\rangle ds \| \\
&= \| \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} (\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle - \langle \dot{x}\ (s), f(s, x(s))\rangle) ds \| \\
&\leqslant \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle - \langle \dot{x}\ (s), f(s, x(s))\rangle\| ds \\
&\leqslant \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle - \langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(s))\rangle\| ds \\
&+ \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(s))\rangle - \langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x(s))\rangle\| ds \\
&+ \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x(s))\rangle) - \langle \dot{x}\ (s), f(s, x(s))\rangle\| ds \\
&= \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(\tau_n^{q-1}))\rangle - \langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(s))\rangle\| ds \\
&+ \int_0^T \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x_n(s))\rangle - \langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x(s))\rangle\| ds \\
&+ \int_0^T \|\langle \dot{x}_n\ (s), f(s, x(s))\rangle) - \langle \dot{x}\ (s), f(s, x(s))\rangle\| ds.
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, x_n converge uniformément vers $x(.)$, $\dot{x}_n\ (.)$ converge faiblement vers $\dot{x}\ (.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n, dt)$.

Alors, le dernier terme converge vers 0 et d'autre part,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{nT} \int_{\tau_n^{q-1}}^{\tau_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), b_q\rangle ds = 0.$$

En passant à la limite pour $n \longrightarrow \infty$ dans la relation (2.15) et en utilisant la continuité de la fonction V sur la boule $\mathbf{B}(x_0, r)$, on obtient l' estimation suivante

$$V(x(T)) - V(x_0) \geqslant \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^T \|\ \dot{x}_n\ (s)\|^2 ds - \int_0^T \langle \dot{x}\ (s), f(s, x(s))\rangle ds.$$

D'après, la relation (2.14) et (2.15) on obtient

$$\int_0^T \|\ \dot{x}\ (s)\|^2 ds \geqslant \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^T \|\ \dot{x}_n\ (s)\|^2 ds.$$

Alors

$$\|\ \dot{x}\ \|_2^2 \geqslant \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \|\ \dot{x}_n\ \|_2^2. \tag{2.16}$$

Et par la semi-continue-inférieure faible de la norme, on obtient la relation suivante

$$\|\ \dot{x}\ \|_2^2 \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \|x_n\|_2^2. \tag{2.17}$$

A l'aide de la relation (2.16) et (2.17) en déduit que

$$\| \dot{x} \|_2^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \| \dot{x}_n \|_2^2.$$

On a $(\dot{x}_n\ (.))_n$ converge vers $\dot{x}\ (.)$ fortement dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. par le Théorème 1.9.4 on peut extraire un sous suite notée par $\dot{x}_n\ (.)$ converge p.p. vers $\dot{x}\ (.)$ et d'après la relation (2.12) on conclut que

$$\big(x(t), \dot{x}\ (t) - f(t, x(t))\big) \in \overline{gr(F)} \quad p.p\, sur I.$$

D'après la Proposition 1.5.2 $gr(F)$ est fermé

$$\big(x(t), \dot{x}\ (t) - f(t, x(t))\big) \in gr(F) \;\; p.p\, sur I.$$

donc

$$(\dot{x}\ (t) - f(t, x(t))) \in F(x(t)) \;\; p.p\, sur I.$$

Il résulte que

$$\dot{x}\ (t) \in f(t, x(t)) + F(x(t)) \;\; p.p\, sur I.$$

Finalement, pour tout $t \in I$, il existe $\theta_n(t)$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \theta_n(t) = t$. Puisque $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x(t) - x_n(\theta_n(t))\| = 0$. $x_n(\theta_n(t)) \in K$ et K est fermée, par passage à la limite pour $n \longrightarrow \infty$ on obtient $x(t) \in K$. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence de solution viable pour une inclusion différentielle du premier ordre avec retard

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de solutions viables pour une inclusion différentielle du premier ordre avec retard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) \in F(\tau(t)x) + f(t, \tau(t)x), \quad p.p\ surI \\ \tau(0)x = \varphi_0(0) \end{cases} \tag{3.1}$$

Où K est un fermé de $\mathbb{R}^n$, $F : C_\sigma \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-fonction semicontinue supérieurement à valeurs compactes non vides dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Carathéodory. Pour la démonstration on utilise la méthode de discrétisation.
Dans la suite, on suppose les conditions suivantes pour F et f.

Hypothèses

$C_1)$ Soit $F : C_\sigma \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi application semicontinue supérieure des valeurs non vide compactes.

$C_2)$ Il existe une fonction propre, convexe et semicontinue inférieurement $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(\psi) \subset \partial V(\psi(0)), \psi \in C_\sigma$$

$C_3)$ $f : I \times C_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction Carathéodory et, il existe $m \in L^2(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\|f(t, \psi)\| \leqslant m(t),\ \forall (t, \psi) \in I \times C_\sigma. \tag{3.2}$$

$C_4)$ $\forall(t,\varphi_0) \in \mathbb{R} \times K_0, \exists v \in F(x)$ tel que

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} d_K(\varphi_0(0) + hv + \int_t^{t+h} f(s, \tau(s)x)ds) = 0$$

Soit $\varphi_0(0) \in K_0$, f et F satisfaisaient les conditions $C_1, ..., C_4$, on a le résultat principal suivant

Théorème 3.0.1. *Il existe $T > 0$ et $x(.) : [-\sigma, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, tel que*

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) \in F(\tau(t)x) + f(t, \tau(t)x), \quad p.p\ surI \\ \tau(0)x = \varphi_0(0) \end{cases} \tag{3.3}$$

Démonstration.
la démonstration est une conséquence directe du Théorème 2.1.1. Soit $\varphi_0 \in K_0$ fixe. Comme $\partial V(x)$ est une sous ensemble convexe, fermée et bornée. Par le Théorème 0.7.2 dans [2], le multi-application $x \longmapsto \partial V(x)$ est semicontinue supérieur. D'après la Proposition 1.5.3. Il existe $r > 0, M > 0$ tel que,

$$\sup\{\|v\|, v \in \partial V(x)\} \leqslant M \tag{3.4}$$

d'autre part, par le condition C_2

$$\sup\{\|v\|, v \in F(\psi), \psi \in K_0\} \leqslant M \tag{3.5}$$

Puisque φ_0 est continue sur $[-\sigma, 0]$ nous pouvons choisir $\eta > 0$ assez petit pour que $\|\varphi_0(t) - \varphi_0(s)\| < \frac{r}{4}$ pour tout $t, s \in [-\sigma, 0]$ avec $|t - s| < \eta$.
Notons le sous ensemble compact Q définie par $Q = K \bigcap \overline{\mathbf{B}}(\varphi_0(0), r)$. Soit $T > 0$, tel que

$$\int_0^T (m(s) + M + 1)ds < \frac{r}{2} \tag{3.6}$$

• Étape 1 : Construction de solutions approchées
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ fixions et $\varphi_0 \in K_0$ satisfaisant $\varphi_0(0) = x_0$. Posons $x_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-\sigma, 0]$. On peut trouver une subdivision de l'intervalle I
Soit $\varphi_0(0) \in Q$, $t_0^n = 0$, $x_n(t_0^n) = \varphi_0(0)$ et $\varepsilon < T$, d'après le condition le Lemme 2.1.1, il existe $\eta > 0, h_0^n \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_0^n \in F(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$, tel que

$$x_1^n = \varphi_0(0) + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, \varphi_0(0))ds \in K \tag{3.7}$$

. •**Montrons que** $x_1^n \in Q$

D'après, l'hypothèse (C_3) et la relation (3.6) si $h_0^n \leqslant T$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - \varphi_0(0)\| &= \left\|\varphi_0(0) + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, \varphi_0(0))ds - \varphi_0(0)\right\| \\
&= \left\|h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, \varphi_0(0))ds\right\| \\
&\leqslant \|h_0^n u_0^n\| + \|\int_0^{h_0^n} f(s, \varphi_0(0))ds\| \\
&\leqslant h_0^n \|u_0^n\| + \int_0^{h_0^n} \|f(s, \varphi_0(0))\|ds \\
&\leqslant h_0^n (M+1) + \int_0^{h_0^n} m(s)ds \\
&\leqslant \int_0^{h_0^n} (M+1+m(s))ds \leqslant \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

donc, $x_1^n \in \overline{B}(\varphi_0(0), \frac{r}{2})$, et on a $x_1^n \in K$ alors, $x_1^n \in \overline{B}(\varphi_0(0), r) \cap K = Q$

d'où, $x_1^n \in Q$.

• **Montrons que** $\tau(t_1^n)x_n \in Q$

$$\|\tau(t_1^n)x_n - \varphi_0\| = \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant 0} \|\tau(t_1^n)x_n(s) - \varphi_0(s)\| = \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant 0} \|\varphi_0(t_1^n + s) - \varphi_0(s)\| < \frac{r}{4}$$

Si $-t_1^n \leqslant s \leqslant 0$, alors $0 \leqslant t_1^n + s \leqslant t_1^n$ et par la relation (3.6) on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_n(t_1^n + s) - \varphi_0(s)\| &\leqslant \|x_n(t_1^n + s) - \varphi_0(0)\| + \|\varphi_0(0) - \varphi_0(s)\| \\
&\leqslant \frac{2r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{4} < r
\end{aligned}$$

Donc $\tau(t_1^n)x_n \in \mathbf{B}(\varphi_0, r)$,

$\tau(t_1^n)x_n \in Q$.

Pour (h_0^n, x_1^n), et d'après le Lemme 2.1.1, il existe $h_1^n \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_1^n \in F(\tau(t_1^n)x_n) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$, tel que

$$x_n(t_2^n) = x_n(t_1^n) + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n + h_1^n} f(t, \tau(t_1^n)x_n)dt \in K$$

. • **Montrons que** $x_2^n \in Q$

d'après, l'hypothèse (C_3), la relation (3.6) et si $h_0^n + h_1^n < T$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_2^n - \varphi_0(0)\|\| &= \left\| x_1^n + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,\tau(t_1^n)x_n)ds - \varphi_0(0) \right\| \\
&= \left\| \varphi_0(0) + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s,\varphi_0(0))ds + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,\tau(t_1^n)x_n)ds - \varphi_0(0) \right\| \\
&= \left\| h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s,\varphi_0(0))ds + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,\tau(t_1^n)x_n)ds \right\| \\
&\leqslant \|h_0^n u_0^n\| + \left\| \int_0^{h_0^n} f(s,\varphi_0(0))ds \right\| + \|h_1^n u_1^n\| + \left\| \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} f(s,\tau(t_1^n)x_n)ds \right\| \\
&\leqslant h_0^n \|u_0^n\| + \int_0^{h_0^n} \|f(s,\varphi(0))ds\| + h_1^n \|u_1^n\| + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_1^n} \|f(s,\tau(t_1^n)x_n)ds\| \\
&\leqslant (h_0^n + h_1^n)(M+1) + \int_0^{h_0^n} m(s)ds + \int_{h_0^n}^{h_0^n+h_0^n} m(s)ds \\
&= (h_0^n + h_1^n)(M+1) + \int_0^{h_0^n+h_1^n} m(s)ds \\
&= \int_0^{h_0^n+h_1^n} (M+1+m(s))ds \\
&\leqslant \int_0^T (M+1+m(s))ds \leqslant \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

donc, $x_2^n \in \overline{B}(\varphi_0(0), \frac{r}{2})$ et on a $x_2^n \in K$ alors, $x_2^n \in \overline{B}(\varphi_0(0), r) \cap K = Q$

d'où, $x_2^n \in Q$.

• **Montrons que** $\tau(t_2^n)x_n \in Q$

$$\|\tau(t_2^n)x_n - \varphi_0\| = \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant 0} \|\tau(t_2^n)x_n(s) - \varphi_0(s)\| = \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant 0} \|\varphi_0(t_2^n + s) - \varphi_0(s)\| < \frac{r}{4}$$

Si $-t_2^n \leqslant s \leqslant 0$, alors $0 \leqslant t_2^n + s \leqslant t_2^n$ et par la relation (3.6) on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_n(t_2^n + s) - \varphi_0(s)\| &\leqslant \|x_n(t_2^n + s) - \varphi_0(0)\| + \|\varphi_0(0) - \varphi_0(s)\| \\
&\leqslant \frac{2r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{4} < r
\end{aligned}$$

Donc $\tau(t_2^n)x_n \in \mathbf{B}(\varphi_0, r)$,

$\tau(t_2^n)x_n \in Q$.

Posons $h_{-1}^n = 0$, puisque $h_i^n \in [\eta, \varepsilon]$, il existe un entier s tel que

$$\sum_{i=0}^{s-1} h_i^n < T < \sum_{i=0}^{s} h_i^n.$$

Donc, nous construirons par récurrence les suites finies $(h_p^n)_p \subset [\eta, \varepsilon]$,

$(x_p^n)_p \subset Q$ et $(u_p^n)p \subset F(\tau(t_p^n)x_n) + \dfrac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}$, tel que pour tout $p = 0, ..., s-1$, nous avons

$$\begin{cases} x_{p+1}^n = \varphi_0(0) + h_p^n u_p^n + \displaystyle\int_{h_{p-1}^n}^{h_{p-1}^n + h_p^n} f(s, \tau(t_P^n)x_n)ds \in K, \\ u_p^n \in F(\tau(t_P^n)x_n) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}. \end{cases} \tag{3.8}$$

vérifions que pour tout $p \geqslant 2$ on a

$$\begin{cases} x_p^n = \varphi_0(0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(\tau, \tau(t_p^n)x_n)d\tau. \\ u_p^n \in F(\tau(t_p^n)x_p^n) + \dfrac{\varepsilon}{T}\mathbf{B}. \end{cases} \tag{3.9}$$

•Montrons que la relation (3.9) **et vraie pour** $p = 2$

on a

$$x_1^n = \varphi_0(0) + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, \varphi_0(0))ds$$

$$\begin{aligned} x_2^n &= x_1^n + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n + h_1^n} f(s, \tau(t_1^n)x_n)ds \\ &= \varphi_0(0) + h_0^n u_0^n + \int_0^{h_0^n} f(s, \varphi_0(0))ds + h_1^n u_1^n + \int_{h_0^n}^{h_0^n + h_1^n} f(s, \tau(t_1^n)x_n)ds. \\ &= \varphi_0(0) + \sum_{i=0}^{i=1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=1} \int_0^{h_0^n + h_1^n} f(s, \tau(t_i^n)x_n)ds \\ &= \varphi_0(0) + \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(s, \tau(t_i^n)x_n)ds. \end{aligned}$$

d'où la relation (3.9) et vraie pour $p = 2$.

Supposons que la relation (3.9) et vraie pour $p-1$ et montrons qu'elle est vrai pour p

$$x_{p-1}^n = \varphi_0(0) + \sum_{i=0}^{i=p-2} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-2} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(s, \tau(t_{p-1}^n)x_n)ds.$$

d'après, la relation (3.8) on a

$$\begin{aligned} x_p^n &= x_{p-1}^n + h_{p-1}^n u_{p-1}^n + \int_{h_{p-2}^n}^{h_{p-2}^n + h_{p-1}^n} f(s, \tau(t_{p-1}^n)x_n)ds. \\ &= \varphi_0(0) + \sum_{i=0}^{i=p-2} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-2} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(s, \tau(t_i^n)x_n)ds + h_{p-1}^n u_{p-1}^n + \int_{h_{p-2}^n}^{h_{p-2}^n + h_{p-1}^n} f(s, \tau(t_{p-1}^n)x_n)ds. \end{aligned}$$

$$x_p^n = \varphi_0(0) + \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(s, \tau(t_i^n)x_n)ds$$

Alors, la relation (3.9) est vraie pour $(p-1)$, donc la relation (3.9) et vraie pour tout $p \geqslant 2$.

•Montrons que $x_p^n \in Q$

on a

$$\begin{aligned}
\|x_p^n - \varphi_0(0)\| &= \left\| \varphi_0(0) + \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(s, \tau(t_i^n)x_n)ds - \varphi_0(0) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n u_i^n + \sum_{i=0}^{i=p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} f(s, \tau(t_i^n)x_n)ds \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n \|u_i^n\| + \sum_{i=0}^{i=p-1} + \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j^n}^{\sum_{j=0}^{i} h_j^n} \|f(s, \tau(t_i^n)x_n)\| ds \\
&\leqslant (M+1) \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i^n + \int_0^T m(\tau)d\tau \\
&= \int_0^T (M + 1 + m(\tau))d\tau
\end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{i=0}^{i=p-1} h_i^n \leqslant T$ et d'après, la relation (3.6) on a

$$\|x_p^n - \varphi_0(0)\| \leqslant \frac{r}{2} \leqslant r.$$

donc, $x_p^n \in \overline{B}(\varphi_0(0), \frac{r}{2})$, d'autre part, on a $x_p^n \in K$

alors, $x_p^n \in \overline{B}(\varphi_0(0), r) \cap K = Q$

d'où $x_p^n \in Q$

• Montrons que $\tau(t_p^n)x_n \in Q$

$$\begin{aligned}
\|\tau(t_p^n)x_n - \varphi_0\|_\sigma &= \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant 0} \|\tau(t_p^n)x_n(s) - \varphi_0(s)\| \\
&= \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant 0} \|x_n(t_p^n + s) - \varphi_0(s)\| \\
&< \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant -t_p^n} \|x_n(t_p^n + s) - \varphi_0(s)\| + \sup_{-t_p^n \leqslant s \leqslant 0} \|x_n(t_p^n + s) - \varphi_0(s)\| \\
&\leqslant \sup_{-\sigma \leqslant s \leqslant -t_p^n} \|\varphi_0(t_p^n + s) - \varphi_0(s)\| + \sup_{-t_p^n \leqslant s \leqslant 0} \|x_n(t_p^n + s) - \varphi_0(0)\| \\
&+ \sup_{-t_p^n \leqslant s \leqslant 0} \|\varphi_0(0) - \varphi_0(s)\| \\
&< \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} < \frac{3r}{4} < r.
\end{aligned}$$

Donc $\tau(t_p^n)x_n \in \mathbf{B}(\varphi_0, r)$,

$\tau(t_p^n)x_n \in Q$.

Pour tout entier n, $q = 0, ..., s$ désigne par h_q^n le réel associé à $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $x_q^n = x_n(t_q^n)$ donné.

Considérons la suite $(t_n^q)_n$ définie par

$$\begin{cases} t_n^0 = 0, t_n^s = T. \\ t_n^q = h_0^n + ... + h_{q-1}^n. \end{cases}$$

Puis, on définit sur $[t_n^{q-1}, t_n^q]$ la suite de fonctions $(x_n(.))_n$ par

$$\begin{cases} x_n(t) = x_{q-1}^n + (t - t_{q-1}^n)u_{q-1}^n + \displaystyle\int_{t_{q-1}^n}^t f(s, \tau(t_{q-1}^n)x_n)ds \\ x_n(0) = \varphi_0(0) = 0 \end{cases}$$

alors, $\forall t \in]t_n^{q-1}, t_n^q[$

$$\dot{x_n}\ (t) = u_{q-1}^n + f(t, \tau(t_{q-1}^n)x_n).$$

On définie les fonctions $\theta_n(.)$ et $\varphi_n(.)$ tel que

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_n^{q-1}\ si\ t \in [t_n^{q-1}, t_n^q[, \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t_n^q\ si\ t \in [t_n^{q-1}, t_n^q[, \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n(t) = x_n(\theta_n(t)) + (t - \theta_n(t))u_n(\theta_n(t)) + \displaystyle\int_{\theta_n(t)}^t f(s, \tau(\theta_n(t))x_n)\, ds, \quad \forall t \in I \\ x_n(0) = \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

$$u_n(\theta_n(t)) \in F(\tau(\theta_n(t))x_n)\ \ p.p\ sur\ I. \tag{3.10}$$

$$\dot{x}_n\ (t) = u_n(\theta_n(t)) + f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)\ \ p.p\ sur\ I. \tag{3.11}$$

• Étape2 : Convergence de solutions approchées

On remarque que la suite $(x_n(.))_n$ satisfait les relations suivants

$$\begin{aligned} \|\ \dot{x}_n\ (t)\| &= \|u_n(\theta_n(t)) + f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)\| \\ &\leqslant \|u_n(\theta_n(t))\| + \|f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)\| \\ &\leqslant M + 1 + m(t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Alors

$$\int_0^T \|\ \dot{x}_n\ (t)\|^2 dt \leqslant \int_0^T (M + 1 + m(t))^2 dt. \tag{3.13}$$

i.e.

$$\|\ \dot{x}_n\ (t)\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_0^T (M + 1 + m(t))^2 dt. \tag{3.14}$$

$$\|x_n(t)\| \leqslant \|\varphi_0(0)\| + \frac{r}{2} \leqslant \|\varphi_0(0)\| + r.$$

Donc

$$x_n(t) \in \overline{\mathbf{B}}(0, \|\varphi_0(0)\| + r). \tag{3.15}$$

$$\|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| = \left\|(t_1 - t_2)u^n(\theta_n(t)) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, \tau(\theta_n(t)))ds\right\| \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|(u^n(\theta_n(t))) + f(s, \tau(\theta_n(t))x_n)d\tau\| \\ &\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} (M + 1 + m(s))ds\right|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

D'après, la relation (3.14) la suite $(\dot{x}_n\ (.))_n$ est bornée dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ et d'après la relation (3.15) et pour tout $t \in I$, $x_n(t)$ est inclus dans l'ensemble compact donc elle est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$, d'après la relation (3.14) la suite $(x_n(.))_n$ est équi-uniforme. Donc, par le Théorème 1.9.1 $(x_n(.))$ est relativement compact dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.
Alors, d'aprèsnle Théorème 1.9.2 il existe une sous suite encore notée $(x_n(.))_n$ et une fonction absolument continue
$x(.) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

- $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$,
- $\dot{x}_n\ (.)$ converge faiblement vers $\dot{x}\ (.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$

De plus $x_n(t) = \varphi_0(t)$ sur $[-\sigma, 0]$, $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur $[-\sigma, T]$. Par la convergence uniforme de x_n vers x sur $[-\sigma, T]$ et par la convergence uniforme θ_n vers t, nous déduisons que $x_n(\theta_n(t)) \longrightarrow x(t)$ uniformément sur I, aussi il est claire que $\tau(0)x = \varphi_0(0)$ sur $[-\sigma, 0]$.
Notons la continuité du module d'une fonction ψ définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ par

$$\omega(\psi, I, \varepsilon) = \sup\{\|\psi(t) - \psi(s)\|; s, t \in I, |s - t| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}.$$

En suite nous avons

$$\begin{aligned} \|\tau(\theta_n(t))x_n - \tau(t)x_n\|_\sigma &= \sup_{-\sigma<s<0} \|\tau(\theta_n(t))x_n(s) - \tau(t)x_n(s)\| \\ &= \sup_{-\sigma<s<0} \|x_n(\theta_n(t+s)) - x_n(t+s)\| \\ &\leqslant \omega(x_n, [-\sigma, T], \frac{1}{n}) \\ &\leqslant \omega(\varphi_0, [-\sigma, 0], \frac{1}{n}) + \omega(x_n, [0, T], \frac{1}{n}) \\ &\leqslant \omega(\varphi_0, [-\sigma, 0], \frac{1}{n}) + \frac{(\|\varphi_0\| + 2r)T}{n} \\ &\leqslant \delta_n \end{aligned}$$

Alors pour tout $n > 1$ où $\delta_n = \omega(\varphi_0, [-\sigma, 0], \frac{1}{n}) + \frac{(\|(\varphi_0\|+2r)T}{n}$. Donc, par la continuité de φ_0, nous avons $\delta_n \longrightarrow 0$ comme $n \longrightarrow \infty$ et donc $\|\tau(\theta_n(t))x_n - \tau(t)x_n\|_\sigma \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$

Donc, de puis la convergence uniforme de x_n à x sur $[-\sigma, T]$ implique que

$$\tau(t)x_n \longrightarrow \tau(t)x \text{ uniformément sur } [-\sigma, T], \tag{3.18}$$

Nous en déduisons

$$\tau(\theta_n(t))x_n \longrightarrow \tau(t)x \text{ sur } \mathbf{C}_\sigma. \tag{3.19}$$

Depuis f est une fonction de carathéodory la suite $f(., \tau(\theta_n(t)x_n(.)))_n \longrightarrow f(.,.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$, $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$, et $\dot{x}_n(.)$ converge faiblement vers $\dot{x}\ (.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ et d'après la relation (3.10) et (3.11)

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} & d\left(\tau(t)x_n, \dot{x}_n\ (t) - f(t, \tau(\theta_n(t))x_n), gr(F)\right) \\ & \leqslant \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\tau(t)x_n - \tau(\theta_n(t))x_n\| = 0.\end{aligned} \tag{3.20}$$

depuis ∂V est semicontinue supérieurement avec des valeurs convexes, on appliquant le Théorème 1.9.5 on obtient

$$\dot{x}\ (t) \in f(t, \tau(t)x) + \partial V(x(t)), \quad \text{pour chaque} \quad t \in I \tag{3.21}$$

Depuis θ_n converge uniformément vers t d'après la relation (3.11)

$$\dot{x}_n\ (t) - f(t, \tau(\theta_n(t))x_n) = u_n(\theta_n(t)) \in F(\tau(\theta_n(t))x_n) + \frac{\mathbf{B}}{nT}$$

et on a

$$\begin{aligned}d_{gr(F)}\left(x_n(t), \dot{x}_n\ (t) - f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)\right) &= d\left((x_n(t), \dot{x}_n\ (t) - f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)), gr(F)\right) \\ &\leqslant \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| + \|u_n(\theta_n) - u_n(\theta_n) + \frac{1}{nT})\| \\ &\leqslant \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| + \frac{1}{nT}.\end{aligned}$$

Alors,

$$d\left((x_n(t), \dot{x}_n\ (t) - f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)), gr(F)\right) \leqslant \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| + \frac{1}{nT}.$$

Par passage à la limite on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d_{gr(F)}\left(x_n(t), \dot{x}_n\ (t) - f(t, \tau(\theta_n(t))x_n)\right) = 0. \tag{3.22}$$

•Montrons que $\dot{x}_n\ (.)$ converge fortement vers $\dot{x}\ (.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$

Pour commencer nous pouvons que $(\|\ \dot{x}_n\ \|_2)_n$converge vers $\|\ \dot{x}\ \|_2$.

On a $x(.)$ et $V(x(.))$ sont absolument continues, alors, d'après la relation (3.21) et le Lemme (1.7.1) on a

$$\frac{d}{dt}(V(x(t)) = \langle \dot{x}\ (t), \dot{x}\ (t) - f(t, \tau(t)x) \rangle \quad p.p\, sur\, I.$$

D'après, l'intégration sur l'intervalle I

$$\begin{aligned}
V(x(T))-V(\varphi_0(0)) &= \int_0^T \frac{d}{dt}V(x(s))ds\\
&= \int_0^T \langle \dot{x}\ (s), \dot{x}\ (s) - f(t,\tau(s)x)\rangle ds\\
&= \int_0^T \langle \dot{x}\ (s), \dot{x}\ (s)\rangle ds - \int_0^T \langle \dot{x}\ (s), f(s,\tau(s)x)\rangle ds\\
&= \int_0^T \parallel \dot{x}\ (s)\|^2 ds - \int_0^T \langle \dot{x}\ (s), f(s,\tau(s)x)\rangle ds. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $q=1,...,s$

$$\dot{x}_n\ (t) - f(t,(\tau_n^{q-1})x) \in \partial V(x_n(t_n^{q-1})) + \frac{1}{nT}\mathbf{B}.$$

Alors, il existe $b_q \in \mathbf{B}$

$$\dot{x}_n\ (t) - f(t,\tau(t_n^{q-1})x) - \frac{1}{nT}\, b_q \in \partial V(x_n(t_n^{q-1})).$$

Par la définition du sous-différentiel,on a
$\forall t \in [t_n^{q-1}, t_n^q]$ et $\forall \zeta \in \partial V(x_n(t_n^{q-1}))$

$$V(x_n(t_n^q)) - V(x_n(t_n^{q-1})) \geqslant \langle x_n(t_n^q) - x_n(t_n^{q-1}), \zeta\rangle$$

en particulier pour $\zeta = \dot{x}_n\ (t) - f(t,f(t,\tau(t_n^{q-1})x) + \frac{1}{nT}b_q$, on trouve que

$$\begin{aligned}
V(x_n(t_n^q)) - V(x_n(t_n^{q-1})) &\geqslant \langle x_n(t_n^q) - x_n(t_n^{q-1}), \dot{x}_n\ (t) - f(t,\tau(t_n^{q-1})x) + \frac{1}{nT}b_q\rangle\\
&= \langle \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \dot{x}_n\ (s)ds, \dot{x}_n\ (t)\rangle - \langle \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \dot{x}_n\ (s)ds, f(t,\tau(t_n^{q-1})x)\rangle + \langle \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \dot{x}_n\ (s)ds, \frac{1}{nT}b_q\rangle\\
&\geqslant \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), \dot{x}_n\ (t)\rangle ds - \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), f(t,\tau(t_n^{q-1})x)\rangle ds + \frac{1}{nT}\int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), b_q\rangle ds\\
&= \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \parallel \dot{x}_n\ (s)\|^2 ds - \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), f(t,\tau(t_n^{q-1})x)\rangle ds + \frac{1}{nT}\int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), b_q\rangle ds.
\end{aligned}$$

Il est claire que

$$\begin{aligned}
V(x_n(T) - V(\varphi(0)) \geqslant \int_0^T \parallel \dot{x}_n\ (s)\|^2 ds - \sum_{q=1}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), f(s,\tau(t_n^{q-1})x)\rangle ds\\
+ \frac{1}{nT}\sum_{q=1}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (s), b_q\rangle ds. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

- **Montrons que la suite**

$$\left(\sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (t), f(t,\tau(t_n^{q-1})x)\rangle dt\right)_n \text{ converge vers } \left(\int_0^T \langle \dot{x}_n\ (t), f(t,\tau(t)x)\rangle dt\right)$$

En effet

$$\| \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, x_n(t_n^{q-1})) \rangle dt - \int_0^T \langle \dot{x}\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle dt \|$$

$$\begin{aligned}
&=; \left\| \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} (\langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t_n^{q-1})x) \rangle - \langle \dot{x}\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle) dt \right\| \\
&\leqslant \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \left\| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t_n^{q-1})x) \rangle - \langle \dot{x}\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle \right\| dt \\
&\leqslant \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t_n^{q-1})x) \rangle - \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x_n) \rangle \| dt \\
&+ \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x_n) \rangle - \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle \| dt \\
&+ \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle - \langle \dot{x}\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle \| dt \\
&= \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t_n^{q-1})x) \rangle - \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x_n) \rangle \| dt \\
&+ \int_0^T \| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x_n) \rangle - \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle \| dt \\
&+ \int_0^T \| \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle - \langle \dot{x}\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle \| dt.
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$, et $\dot{x}_n\ (.)$ converge faiblement vers $\dot{x}\ (.)$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n, dt)$.

Alors,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{q=0}^{s} \int_{t_n^{q-1}}^{t_n^q} \langle \dot{x}_n\ (t), f(t, \tau(t_n^{q-1})x) \rangle dt = \int_0^T \langle \dot{x}\ (t), f(t, \tau(t)x) \rangle dt$$

En passant à la limite pour $n \longrightarrow \infty$ dans la relation (3.24) et en utilisant la continuité de la fonction V sur la boule $\mathbf{B}(\varphi(0), r)$ on obtient l' estimation suivante

$$V(x_n(T)) - V(\varphi_0) \geqslant \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \int_0^T \| \dot{x}_n\ (t) \|^2 dt - \int_0^T \langle \dot{x}\ (t), f(t, x(t)) \rangle dt.$$

D'après, la relation (3.23) on obtient

$$\int_0^T \| \dot{x}\ (t) \|^2 dt \geqslant \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^T \| \dot{x}_n\ (t) \|^2 dt. \tag{3.25}$$

d'où

$$\| \dot{x} \|_2^2 \geqslant \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \| \dot{x}_n \|_2^2. \tag{3.26}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \varphi(x) = \sqrt{x}$$

on obtient

$$\varphi(\| \dot{x} \|_2^2 \geqslant \varphi(\lim_{n\to\infty} \sup \| \dot{x}_n \|_2^2)$$

alors

$$\begin{aligned} \| \dot{x} \|_2^2 &\geqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \varphi(\| \dot{x}_n \|_2^2) \\ &\geqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \| \dot{x}_n \|_2 \end{aligned}$$

On a $(\dot{x}_n\ (.))_n$ converge vers $\dot{x}\ (.)$ fortement d'après la Proposition 1.9.2 $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. Compte tenu de (3.22), On conclut que

$$d\left((x(t), \dot{x}\ (t) - f(t, x(t))), gr(F)\right) = 0. \quad p.p\ \ sur\ \ I$$

Alors

$$\dot{x}\ (t) - f(t, x(t)) \in \overline{gr(F)}$$

à l'aide de la Proposition 1.5.2 vu que le graphe de F est fermé, on conclut que

$$\left(x(t), \dot{x}\ (t) - f(t, x(t))\right) \in gr(F)\ \ p.p\, sur I.$$

et par suite

$$\dot{x}\ (t) - f(t, x(t)) \in F(x(t))\ \ p.p\, sur I.$$

Il résulte que

$$\dot{x}\ (t) \in f(t, x(t)) + F(x(t))\ \ p.p\, sur I.$$

Finalement, pour tout $t \in I$. il existe $\theta_n(t)$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \theta_n(t) = t$ puisque

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x(t) - x_n(\theta_n(t))\| = 0, \text{ et } x_n(\theta_n(t)) \in K$$

K est fermée par passage à la limite pour $n \longrightarrow \infty$ on obtient $x(t) \in K$.

■

Conclusion

Dans notre travail, nous nous sommes intéressées à établir des résultats d'existence de solution viable en dimension finie pour des inclusions différentielles dont le second membre est une multi-application s.c.s à valeurs non convexes incluses dans le sous différentielle d'un fonction V propre, convexe et s.c.i.
L'existence d'une solution viable, celle qui vérifie $x(t) \in K$, où K est un sous ensemble fermé, à été initialement prouvée, en ajoutant une condition supplémentaire dite condition de tangence. Les inclusions différentielles avec retard, c'est à dire le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système, à ont été également étudié .

Bibliographie

[1] **Ancona, F . and Colombo, G.** - *Existence of Solutions for a class of nonconvex differential inclutions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 83 (1990).

[2] **Aubin, J.P. and Cellina, A.**- *Differential Inclusions*, Spring-Verlag, Berlin, 1984.

[3] **AZE, D.**, *Eléments d'analyse convexe et variationnelle, ellipses, édition marketing*S.A., Paris, 1997.

[4] **Azzam-Laouir, D.**, *Cours d'analyse convexe et cours d'optimisation*, Département de Mathématiques Université MSB- Jijel 2017-2018.

[5] **Bressan, A. Cellina, A . and Colombo, G.** - *Upper semicontinuous differential inclusions without convexity*,Proc. Am. Math. Soc., 106 (1989), 771-775.

[6] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle*, Paris, MASSON, 1983.

[7] **Brezis, H.**- *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[8] **Descombes, R.**, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[9] **Haddad, G.**, *Monotone Trajectoires of Differential Inclusions and Functional Differential Inclusions with Memory*, Isr.J. Math., 39 , 83-100 (1981).

[10] **Kamenskii, M. V . OBukhovskii, P . Zecca**, *Condensing multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*. Walterde de Gruyter. Berlin, New York, 2001.

[11] **Kisielewicz, M.**, *Differential Inclusions and Optimal Control*. Kluwer Acad. Publishers, London, 1991.

[12] **Nagumo, M.**, *Uber die lage der Integralkurven gewuhnlicher Differentialgle Ichungen.* Proc. phys.math. soc. Japan 24, 551-559(1942).

[13] **Phelps, R. R.**, *Convex functions, Monotone operateurs and differentiability* . Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1989.

[14] **Rossi, P.** - *Viability for upper semicontinuous differential inclutions*,Diff. Int. Eqs., 6 (1998), 21-37.

[15] **Sonntag, Y.**,*Topologie et Analyse Fonctionnelle*,Berlin 23-4-1880, 1997.

[16] **Tiel, J.V.**,*Convex analysis an introductory text,* New York, Singapore, 1984.