République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

faculté des sciences exacte et d'informatique

Département de Mathématique

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse et Applications.

Thème

Étude d'une classe de problèmes d'équations différentielles fractionnaires d'ordre $1 < \alpha \leq 2$

Présenté par :

– Hocine Cherafa.

– Zakaria Ferkha.

Devant le jury :

Président	: S.Melit	M.C.B Université de Jijel
Encadreur	: H. Menigher	M.A.B Université de Jijel
Examinateur	: W. Boukrouk	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur H.MENIGHER pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux.

Nous remerciements vont aussi aux membre de jury W.Boukrouk et S.Melit pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Nos vifs remerciements sont aussi adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nos parents, nos frères et sœurs qui nous ont aidés moralement et physiquement.

A tous nos amis.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin ne serait-ce que par le simple signe d'encouragement.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents qui m'ont toujours soutenue,

Mes sœurs Meriem et Lina et mon frère Aymen.

Mes amies et à tout ceux qui m'ont encouragée durant ma carrière d'étude.

Zakaria Ferkha

Dédicace

Ce travail est dédié à :

Ma mère et mon père.

Mon frère et mes sœurs.

Ma famille et mes amies.

Cherafa Hocine

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En fait, il étend les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable.

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin du $17^{\text{ième}}$ siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)$ si $n = \dfrac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{\text{ième}}$ siècle où de nombreuses application sont été développées utilisant ce concept.

Le calcul fractionnaire a été intensivement développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974 . Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante dû principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes de problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres. le premier chapitre est consacré aux définitions et des notions qui seront utilisées dans la suite du travail.

Dans le deuxième chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire, on introduire l'opérateur d'intégration fractionnaire et nous donnons les trois approches de la dérivée fractionnaire les plus populaires et les plus utiles qui sont l'approche de Riemann-Liouville, de Caputo et de Grunwald Letnikov, ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à l'étude d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielle d'ordre fractionnaire

${}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$, pour tout $t \in I = [0, T], 1 < \alpha \leq 2$, avec trois types de conditions. Conditions locales $y(0) = y_0$, $y(T) = y_T$, conditions non locales $y(0) = g(y)$, $y(T) = y_T$, et conditions intégrales de la forme $y(0) = \int_0^T y(s)\mathrm{d}s$, $y(T) = y_T$.

les résultats de ce chapitre sont basés sur les travaux de M.Benchohra et autres [1],[2], [3], [4].

Notations

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	L'ensemble des nombres réels positives.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{Z}_-$	L'ensemble des nombres entiers négatifs.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des nombres naturels strictement positives.
E	Un espace de Banach.
C	Un ensemble convexe.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$	La dérivée partielle de f par rapport a x.
(K,d)	L'espace métrique muni de la distance d.
C(I,E)	L'espace de Banach des fonctions continues y définies de I dans E, muni de la norme $\|y\|_\infty = sup\|y(t)\| : t \in I$.
$\Gamma(x)$	La fonction Gamma d'Euler.
$\mathrm{B}(x,t)$	La fonction Bêta d'Euler.
$L^1[a,b]$	L'espace des fonctions intégrable sur [a,b].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les opérateurs équicontinus et complètement continus, quelques notions des fonctions définies par une intégrale (continuité d'une intégrale, dérivation sous le signe intégrale et le théorème du Fubini) et résultats sur les fonction eulériennes (la fonction Gamma et la fonction Bêta). On donne aussi quelques théorèmes de point fixe utiles dans le troisième chapitre.

1.1 Définitions

Definition 1.1 (Opérateur borné)**.** [8]

Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.

Definition 1.2 (Application complètement continue)**.** [3]

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite compacte si $f(E)$ est relativement compacte dans F.

Definition 1.3 (Ensemble équicontinue)**.** [5]

Soient (K, d) un espace métrique et F un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $A \subset C(K, F)$ est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon \text{ pour tout } x, y \in K \text{ tel que } d(x, y) < a(\varepsilon).$$

Definition 1.4 (Contraction)**.** [13]

Soient E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\|x - y\|_E \text{ pour tout } x, y \in E.$$

1.2 Quelques théorèmes de point fixe

Definition 1.5 (Point fixe). [13]

Soit E un espace de Banach et $A : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de A si $Ax = x$.

Théorème 1.1 (Banach). [6]

Soit (Y, d) un espace métrique complet et $F : Y \to Y$ une contraction. Alors F admet une unique point fixe.

Théorème 1.2 (Schauder). [13]

Soit M un sous ensemble borné fermé convexe d'un espace de Banach X, et $T : M \to M$ un opérateur. Si T est compacte, alors T admet un point fixe.

Théorème 1.3 (Schaefer). [6]

Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u \text{ pour un certain } \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.4 (Alternative non-linéaire de Leray Schauder). [6]

Soit $C \subset E$ un ensemble convexe, et soit U un ouvert de C tel que $0 \in U$. Alors, toute application compacte $F : \overline{U} \to C$ admet au moins une des propriétés suivantes :

1) F admet une point fixe.

2) Il existe $x \in \partial U$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda F(x)$.

Théorème 1.5 (Ascoli-Arzélà). [12]

Soit A un sous ensemble de $C(I, E)$. A est relativement compact dans $C(I, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

1) L'ensemble A est borné, ie il existe une constante $k > 0$, tel que

$$\|f(x)\| \leq k \text{ pour tout } x \in I \text{ et tout } f \in A.$$

2) L'ensemble A est équicontinue, ie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \text{ et tout } f \in A$$

3) Pour tout $x \in I$, l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

1.3 Fonctions définies par une intégrale

Dans cette partie, $X, I \subset \mathbb{R}$ sont deux intervalles. Nous allons étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité de fonctions $F : X \to \mathbb{R}$ définies par une intégrale

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt,$$

avec $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Théorème 1.6 (Continuité)**.** [10]

Soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables vérifiant

1) pour tout $x \in X$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I,

2) pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue en $x_0 \in X$,

3) il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I telles que pour tout $x \in X$ et tout $t \in I$: $g(t) \leq f(x,t) \leq f(t)$.

Alors, la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue en x_0.

Corollaire 1.1. [10]

Si X est un compact, si I est un segment et si $f : X \times I \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur X.

Venons-en maintenant à la dérivabilité.

Théorème 1.7 (Dérivabilité)**.** [10]

Soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que

1) pour tout $x \in X$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I,

2) pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(x,t)$ est dérivable sur X,

3) il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I telles que pour tout $x \in X$ et tout $t \in I$: $g(t) \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq f(t)$.

Alors, la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t,$$

est dérivable sur X, $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Le résultat suivant est un corollaire des deux théorèmes précédents.

Corollaire 1.2. [10]

Soit $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui admet en tout point une dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *qui est elle-même continue sur* $X \times [a,b]$. *Alors, la fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t,$$

est de classe C^1 *sur* X *et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Il est parfois utile de savoir dériver une fonction définie par une intégrale dont les bornes dépendent du paramètre.

Proposition 1.1. [10]

Soient $a : X \to I$ *et* $b : X \to I$ *des fonctions de classe* C^1 *et* $f : X \times I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui admet en tout point une dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *qui est elle-même continue sur le domaine décrit par* (x,t). *Alors, la fonction* $F : X \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t,$$

est de classe C^1 *sur* X *et*

$$F'(x) = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.8. *(Théorème de Fubini pour les triangles fermés)*
Soit $D = \{(x,y) \in [a,b]^2,\ y < x\}$ $(a < b)$ *un triangle fermé du plan* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* f *est intégrable sur* D *et on a*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

1.4 Fonctions Eulériennes

Dans cette section nous présentons la fonction Gamma et la fonction Bêta qui seront utilisées dans la suite, ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.4.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Léone Euler "1707-1783" dans son objectif de généraliser le factoriel à des valeurs non entières.

Definition 1.6. [9]

La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement le factoriel aux nombres réels, et même aux nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $x \notin \mathbb{Z}_-$. On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Propriété importante :

La propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.1}$$

On a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a t^x e^{-t} dt.$$

Par une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a t^x e^{-t} dt &= \lim_{a\to\infty} \left(\left[-t^x e^{-t} \right]_0^a + x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(-a^x e^{-a} + x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Par récurrence, si $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+n) &= (x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\
&= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) \\
&\vdots \\
&= (x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)\cdots(x+1)x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)\cdots(x+1)x\Gamma(x),$$

ou

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Prolongement de Gamma dans $\mathbb{C}$:

Soit $x \in \mathbb{C}$. Si $-1 < Re(x) < 0$ alors $0 < Re(x+1) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par la forme

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad 0 < Re(x+1) < 1.$$

Si $-2 < Re(x) < -1$ alors $0 < Re(x+2) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}.$$

En générale, si $-n < Re(x) < -n+1$ alors $0 < Re(x+n) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Alors on peut prolonger Γ pour les nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $x \notin \mathbb{Z}_-$ par

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}, \quad 0 < Re(x+n) < 1.$$

Valeurs particulières de Gamma :

1) $\Gamma(0^+) = +\infty$.
2) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.
3) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dérivation de la fonction Gamma :

La fonction Gamma est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En effet, par définition

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

La dérivée d'ordre 1 est

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}) e^{-t} dt = \int_0^\infty (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

La dérivée d'ordre 2 est

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(x) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}) \ln t e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{(x-1)\ln t}) \ln t e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty (\ln t) e^{(x-1)\ln t} \ln t e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.
\end{aligned}
$$

En générale, la dérivée d'ordre n est

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t} dt.$$

1.4.2 La fonction Bêta

En mathématique la fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes x et y des parties réelles strictement positives par

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^\infty t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \tag{1.2}$$

La fonction Bêta a été étudier par Euler et Legendre et doit son nom à Jacquet Binet. Elle est en relation avec la fonction Gamma d'Euler par la formule

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Propriétés :

1) Dans la formule (1.2), le changement de variable $x = 1 - t$ prouve que la fonction Bêta est symétriques.
2) Si x et y sont des entiers naturels, on obtient l'identité suivante

$$\mathrm{B}(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Dérivation de la fonction Bêta :

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(x, y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right).$$

En effet, on a vu que

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)\Gamma(x+y) - \Gamma'(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma^{(2)}(x+y)} \\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma'(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma^{(2)}(x+y)} \\
&= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right) \\
&= \mathrm{B}(x,y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(x,y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right).
$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. On se restreindre les trois approches de la dérivée fractionnaire les plus populaires et les plus pratiques, l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés et la comparaison entre ces différentes approches.

2.1 Intégrale fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, $b > a > 0$ telle que $f(a) = 0$. l'inverse de l'opérateur de dérivation $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ est l'opérateur d'intégration I :

$$\mathrm{D}f(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = g(t) \text{ avec } f(a) = 0 \iff f(t) = \mathrm{I}g(t) = \int_a^t g(s)\mathrm{d}s.$$

De même, l'inverse de la dérivation $n^{ième}$ est définie par le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I précédent. Ainsi la fonction f_2 telle que $f_2(0) = f_2'(0) = 0$ avec $f_2'' = g$ est définie par

$$f_2(t) = \mathrm{I}(\mathrm{I}g(t)) = \mathrm{I}^2 g(t) = \int_a^t \Big(\int_a^r g(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}r.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\mathrm{I}^2 g(t) = \int_a^t g(s)\Big(\int_s^t \mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}s = \int_0^t (t-s)g(s)\mathrm{d}s.$$

Plus généralement, pour tout entier n, le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$\mathrm{I}^n g(t) = \int_a^t \mathrm{d}s_1 \int_a^{s_1} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_a^{s_{n-1}} g(s_n)\mathrm{d}s_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} g(s)\mathrm{d}s. \tag{2.1}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma, $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le membre droit de (2.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière. Il était naturel de définir l'intégrale fractionnaire comme suit :

Definition 2.1 (Integral fractionnaire de Riemann-liouville)**.** [12]
Soit $f \in L^1[a,b]$ espace des fonctions intégrable sur $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. L'intégrale

$$\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s,$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale

$$\mathrm{I}_{b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s,$$

est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Pour $\mathrm{I}^0 = 0$ on a $\mathrm{I}^0 f(t) = f(t)$, c'est-à-dire I^0 est l'opérateur identité.

Exemple 2.1. *Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = ct^r$ tel que $r > -1$ et $c \in \mathbb{R}$. On a*

$$\mathrm{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} cs^r \mathrm{d}s.$$

En utilisant le changement de variable $s = tx$ et la fonction Bêta on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1} t^{r+1} x^r \mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r} \int_0^1 x^r (1-x)^{\alpha-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r} \mathrm{B}(\alpha, r+1) \\
&= \frac{c\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)} t^{\alpha+r}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $r = 0$ on obtient l'intégrale fractionnaire d'une fonction constante

$$\mathrm{I}_{0^+}^{\alpha} c = \frac{ct^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha}}{\alpha}, \quad t \geq 0.$$

Remarque 2.1. *L'intégrale fractionnaire est linéaire d'après la linéarité de l'intégrale classique.*

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale à gauche et on le note tout simplement I^{α}.

Proposition 2.1. [11]
Si $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$, alors $\mathrm{I}^\alpha f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a $\mathrm{I}^\alpha f \in L^1([a,b])$.

Preuve. Soit $f \in L^1([a,b])$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t-s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 < u \leq b-a, \\ 0, & \text{si } u \in \mathbb{R}\backslash]0, b-a], \end{cases}$$

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u), & \text{si } a \leq u \leq b, \\ 0, & \text{si } u \in \mathbb{R} \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Par construction, $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(\mathbb{R})$, et on a $\mathrm{I}^\alpha f \in L^1([a,b])$. □

Proposition 2.2. [12]
Soit $\alpha, \beta > 0$. Alors $\mathrm{I}^\alpha \mathrm{I}^\beta = \mathrm{I}^{\alpha+\beta} = \mathrm{I}^\beta \mathrm{I}^\alpha$.

Preuve. Soit $f \in L^1([a,b])$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\mathrm{I}^\beta f(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = \xi + z(t-\xi)$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\alpha-1} z^{\beta-1}(t-\xi)^\beta \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^1 (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}(1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Mais
$$\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} \mathrm{d}z = \mathrm{B}(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}.$$

Donc
$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\beta} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{I}^{\alpha+\beta} f(t).\end{aligned}$$

D'autre part
$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha+\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\beta+\alpha-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{I}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha}.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{I}^{\alpha}\mathrm{I}^{\beta} = \mathrm{I}^{\alpha+\beta} = \mathrm{I}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha}$. □

2.2 Dérivée fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n-1 < \alpha < n$, on définit la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre α par une intégration d'ordre $n-\alpha$ suivie d'une dérivation d'ordre n.

Definition 2.2 (La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville)**.** [9]

Soit $f \in L^1[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On définit la dérivée fractionnaire de f au sens de Riemann-Liouville par
$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

Exemple 2.2. *La dérivée fractionnaire de $(t-a)^r$.*

Soit α non entier, $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < n-1 < \alpha < n$, et $r > -1$. On a
$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^r = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^r \mathrm{d}\tau. \tag{2.3}$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^{r} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^r(t-a)^{r+1}\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^1 (t-a)^{n-\alpha+r}(1-s)^{n-\alpha-1}s^r\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t-a)^{n-\alpha+r}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^r\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Calcule de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t-a)^{n-\alpha+r}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-a)^{n+r-\alpha} &= (n+r-\alpha)(t-a)^{n+r-\alpha-1}\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t-a)^{n+r-\alpha} &= (n+r-\alpha)(n+r-\alpha-1)(t-a)^{n+r-\alpha-2}\\
&\vdots\\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t-a)^{n+r-\alpha} &= (n+r-\alpha)(n+r-\alpha-1)\cdots(n+r-\alpha-(n-1))(t-a)^{n+r-\alpha-n}\\
&= (n+r-\alpha)(n+r-\alpha-1)\cdots(r-\alpha+1)(t-a)^{r-\alpha}
\end{aligned}
$$

On sait que

$$(r-\alpha+1)\cdots(n+r-\alpha-1)(n+r-\alpha) = \frac{\Gamma(n+r-\alpha+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)},$$

et

$$\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^r\mathrm{d}s = \mathrm{B}(n-\alpha, r+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha+r+1)}.$$

Donc

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^{r} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{(r-\alpha)}.$$

Proposition 2.3. [12, 11]

Soient $\alpha > \beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > \alpha$, et soit $f \in L^1[a,b]$. Alors

1) ${}^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t) = \mathrm{I}^{\alpha}f(t)$.

2) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t) = \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n-\alpha}f(t)$.

3) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) = f(t)$.

4) $\mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)) = f(t) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i}f(a)$.

5) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) = \mathrm{I}^{\alpha-\beta}f(t)$.

Preuve.

1) On a

$$^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n+\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

Comme $(t-\tau)^{n+\alpha-1}f(\tau)$ est une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors

$$^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t \frac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n+\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

On calcul $\frac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n+\alpha-1}$

$$\frac{d}{dt}(t-\tau)^{n+\alpha-1} = (n+\alpha-1)(t-\tau)^{n+\alpha-2}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(t-\tau)^{n+\alpha-1} = (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)(t-\tau)^{n+\alpha-3}$$

Par récurrence on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n+\alpha-1} &= (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots(n+\alpha-(n+1))(t-\tau)^{\alpha-1}\\ &= (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots(\alpha-1)(t-\tau)^{\alpha-1}\\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau = I^\alpha.$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > n$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^n\mathrm{I}^{n-\alpha}f(t) &= \mathrm{D}^{n-m+m}\mathrm{I}^{n-m+m-\alpha}f(t)\\ &= \mathrm{D}^m\mathrm{D}^{n-m}\mathrm{I}^{n-m}\mathrm{I}^{m-\alpha}f(t)\\ &= \mathrm{D}^m(\mathrm{I}^{m-\alpha}f(t))\\ &= \mathrm{D}^m(^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-m}f(t))\\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha f(t).\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}^{RL}\mathrm{D}^\alpha(\mathrm{I}^\alpha f(t)) &= \mathrm{D}^n\mathrm{I}^{n-\alpha}(I^\alpha f(t))\\ &= \mathrm{D}^n(\mathrm{I}^n f(t))\\ &= \mathrm{I}^0 f(t) = f(t).\end{aligned}$$

4) On a

$$\mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} ({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.4}$$

On fait l'intégration par parties n fois. Posons

$$\begin{aligned} u(\tau) &= (t-\tau)^{\alpha-1} \implies u'(\tau) = -(\alpha-1)(t-\tau)^{\alpha-2}, \\ v'(\tau) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(\tau) \implies v(\tau) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(\tau), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[(t-\tau)^{\alpha-1\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(\tau)\Big]_a^t + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-2\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-2\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} u(\tau) &= (t-\tau)^{\alpha-2} \implies u'(\tau) = -(\alpha-2)(t-\tau)^{\alpha-3}, \\ v'(\tau) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(\tau) \implies v(\tau) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-2} f(\tau), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \Bigg(\Big[(t-\tau)^{\alpha-2\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-2} f(\tau)\Big]_a^t + \\ &\quad (\alpha-2) \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-3\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-2} f(\tau)\mathrm{d}\tau \Bigg) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-1} f(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}(t-a)^{\alpha-2\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-2} f(a) + \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-3\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-2} f(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Généralement

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha+1-i)} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-n-1\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-n} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{-(\alpha-n)\,RL}\mathrm{D}^{\alpha-n} f(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha+1-i)} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i} f(a) \\ &= f(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha+1-i)} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i} f(a). \end{aligned}$$

5) On a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}(\mathrm{I}^{\alpha} f(t)) &= \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n-\beta}(\mathrm{I}^{\alpha} f(t)) \\ &= \mathrm{D}^{n}(\mathrm{I}^{n-\beta+\alpha} f(t)) \\ &= \mathrm{I}^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. [12]

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $k \in N$. On a

1) $\mathrm{D}^k({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{k+\alpha} f(t)$.

2) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t)$.

Preuve.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

On pose $p = n - \alpha > 0$. On a

$${}^{RL}\mathrm{D}^{n-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dt^k}({}^{RL}\mathrm{D}^{n-p} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\
&= {}^{RL}\mathrm{D}^{n+k-p} f(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{D}^k({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{k+\alpha} f(t).$$

2) On distingue trois cas.

1$^{\text{er}}$ Cas $\alpha < 0,\ \beta < 0$:

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) &= \mathrm{I}^{-\alpha}(\mathrm{I}^{-\beta} f(t)) \\
&= \mathrm{I}^{-\alpha-\beta} f(t)) \\
&= \mathrm{I}^{-(\alpha+\beta)} f(t) \\
&= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}$$

2$^{\text{ème}}$ Cas $\alpha > 0,\ \beta > 0$:

Soit $g \in L^1([a,b])$ et $f = I^{\alpha+\beta} g$. On a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha+\beta} g(t)) \\
&= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{I}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha} g(t)) \\
&= g(t). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta}(\mathrm{I}^{\alpha+\beta} g(t)) \\ &= g(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6) on conclure que

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t).$$

3$^{\text{ème}}$ Cas $\alpha > 0, \beta < 0$:

Soit $g \in L^1([a,b])$ et $f = I^{\alpha} g$. On a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha} g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha-\beta} g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-(\alpha-\beta)} g(t) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} g(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Et

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta}(\mathrm{I}^{\alpha} g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\beta\, RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha} g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} g(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8) on conclure que

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t).$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \beta$. On a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n-\beta} f(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n}\mathrm{I}^{-\beta} f(t)) \\ &= \mathrm{D}^{n}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{I}^{n}\mathrm{I}^{-\beta} f(t)) \\ &= \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{-\alpha}\mathrm{I}^{n-\beta} f(t) \\ &= \mathrm{D}^{n}({}^{RL}\mathrm{D}^{-n+(\alpha+\beta)} f(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Approche de Caputo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n-1 < \alpha < n$, La dérivée d'ordre α au sens de Caputo est obtenue en dérivant d'abord à l'ordre n puis en intégrant à l'ordre $n - \alpha$.

Definition 2.3 (La dérivée fractionnaire au sens de Caputo). [9]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (avec $n-1 < \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) f est une fonction telle que $\dfrac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a,b]$. On définit la dérivée fractionnaire de f au sens de Caputo par

$$ {}^C\mathrm{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\mathrm{d}s. \tag{2.9} $$

Il est évident que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

Exemple 2.3. *La dérivée fractionnaire de la fonction f définie par $f(t) = (t-a)^r$.*

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$ avec $r > -1$, alors on a

$$ {}^C\mathrm{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau, $$

si $r \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, alors on a $f^{(n)}(\tau) = 0$ donc

$$ {}^C\mathrm{D}^\alpha f(t) = 0. $$

Si $r > n-1$, on a

$$ \begin{aligned} f^{(n)}(\tau) &= r(r-1)(r-2)\cdots(r-(n-1))(\tau-a)^{r-n} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(\tau-a)^{r-n}. \end{aligned} $$

D'où

$$ {}^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{r-n}\mathrm{d}\tau. $$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$ \begin{aligned} {}^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^r &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1} s^{r-n}(t-a)^{r-n+1}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{r-n}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \mathrm{B}(n-\alpha, r-n+1). \end{aligned} $$

Mais

$$ B(n-\alpha, r-n+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}, $$

donc

$$ {}^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{r-\alpha}. $$

Si $r = \alpha$ on trouve

$$ {}^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^\alpha = \Gamma(\alpha+1). $$

Remarque 2.2. *D'après la linéarité de l'intégrale classique on déduit que la dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire.*

2.2.3 Relation entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville

Proposition 2.5. [7]

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. Soit $f \in L^1[a,b]$. Si f possède $n-1$ dérivées en a, alors

$$^{C}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right), \quad \forall t \in [a,b].$$

Preuve. Posons

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

On a

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} g(t) &= \mathrm{D}^n I^{n-\alpha} g(t) \\ &= \mathrm{D}^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Soit

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

On fait l'intégration par parties de J. Posons

$$\begin{aligned} &u(\tau) = g(\tau) \implies u'(\tau) = \mathrm{D}g(\tau), \\ &v'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies v(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\Big[g(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha}\Big]_a^t + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}\mathrm{D}g(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= 0 + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}\mathrm{D}g(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

En répétant l'intégration par parties de J n fois on obtient

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1}\mathrm{D}^n g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Mais $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$ donc $\mathrm{D}^n g(\tau) = \mathrm{D}^n f(\tau)$.

Alors

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1}\mathrm{D}^n f(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{I}^{n-\alpha+n}(\mathrm{D}^n f(t))$$

Donc

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right) &= \mathrm{D}^{n}J(t)\\
&= \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n-\alpha+n}(\mathrm{D}^{n}f(t))\\
&= \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n}\mathrm{I}^{n-\alpha}(\mathrm{D}^{n}f(t))\\
&= \mathrm{I}^{n-\alpha}(\mathrm{D}^{n}f(t)) = {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}f(t). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Remarque 2.3. *Si* $\mathrm{D}^{k}f(a)=0$ *pour tout* $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$*, alors* ${}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)={}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)$*.*

2.2.4 Approche de Grunwald Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Soit f une fonction de la variable réelle t et $h\in\mathbb{R}$. On a la définition classique

$$
\mathrm{D}f(t)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h}. \tag{2.10}
$$

L'application de cette définition deux fois, nous donne la dérivée second de f,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^{2}f(t)=\frac{\mathrm{d}^{2}f}{\mathrm{d}t^{2}}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{D}f(t)-\mathrm{D}f(t-h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(t)-f(t-h)}{h}-\frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^{2}}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\mathrm{D}^{2}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^{2}}.
$$

Plus généralement, en appliquant (2.10) n fois on obtient

$$
\mathrm{D}^{n}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}f(t-kh). \tag{2.11}
$$

On remarque que la somme dans (2.11) peut être étendue à tous les k entiers non négatifs puisque les termes sont nuls pour $k>n$. Une généralisation naturelle consiste à définir la dérivée d'ordre α, pour $\alpha>0$ par

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\alpha}f(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}f(t-kh) && (2.12)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}f(t-kh), && (2.13)
\end{aligned}
$$

où
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Posons
$$f_h^\alpha(t) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(t-kh).$$

En utilisant la propriété connue des coefficients binomiaux
$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}, \tag{2.14}$$
on peut écrire
$$\begin{aligned}
f_h^\alpha(t) &= \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}f(t-kh) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k-1}f(t-kh)\\
&= \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}f(t-kh) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{\alpha-1}{k}f(t-(k+1)h)\\
&= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}f(a) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\Delta f(t-kh),
\end{aligned} \tag{2.15}$$
où
$$\Delta f(t-kh) = f(t-kh) - f(t-(k+1)h).$$

Nous rappelons que $\Delta f(t-kh)$ est la différence en arrière du premier ordre de la fonction $f(\tau)$ au point $\tau = t - kh$.

En appliquant la propriété (2.14) des coefficients binomiaux m fois on obtient à partir de (2.15)

$$\begin{aligned}
f_h^\alpha(t) &= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}f(a) + \frac{(-1)^{n-1}}{h^\alpha}\binom{\alpha-2}{n-1}\Delta f(a+h)\\
&\quad + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{\alpha-2}{k}\Delta^2 f(t-kh)\\
&= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}f(a) + \frac{(-1)^{n-1}}{h^\alpha}\binom{\alpha-2}{n-1}\Delta f(a+h)\\
&\quad + \frac{(-1)^{n-2}}{h^\alpha}\binom{\alpha-3}{n-2}\Delta^2 f(a+2h) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k\binom{\alpha-3}{k}\Delta^3 f(t-kh)\\
&= \cdots
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{n-k}}{h^{\alpha}} \binom{\alpha-k-1}{n-k} \Delta^k f(a+kh)$$

$$+ \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n-m-1} (-1)^k \binom{\alpha-m-1}{k} \Delta^{m+1} f(t-kh) \tag{2.16}$$

Pour prouver l'existence de la limite dans (2.16) et pour évaluer cette limite, nous avons besoin du théorème suivant

Théorème 2.1. *Soit* $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ *et* $(a_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ *deux suites vérifiant*

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 1,$$

$$\forall k: \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} = A,$$

$$\forall n: \sum_{k=1}^{n} |a_{n,k}| < K,$$

avec $A, K \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_k = A.$$

Évaluons la limite du k[ième] terme dans la première somme de (2.16)

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{(-1)^{n-k}}{h^{\alpha}} \binom{\alpha-k-1}{n-k} \Delta^k f(a+kh) &= \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-k} \binom{\alpha-k-1}{n-k} (n-k)^{\alpha-k} \\
&\quad \times \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\alpha-k} (nh)^{-\alpha+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (t-a)^{-\alpha+k} \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-k} \binom{\alpha-k-1}{n-k} (n-k)^{\alpha-k} \\
&\quad \times \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\alpha-k} \times \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{(t-a)^{-\alpha+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(-\alpha+k+1)},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

parce que l'utilisation de (2.17) donne

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-k} \binom{\alpha-k-1}{n-k} (n-k)^{\alpha-k} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(-\alpha+k+1)(-\alpha+k+2)\cdots(-\alpha+n)}{(n-k)^{-\alpha+k}(n-k)!} \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+1)},
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\alpha-k} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a).$$

Connaissant la limite (2.17), nous pouvons facilement écrire la limite de la première somme dans (2.16).

Pour évaluer la limite de la deuxième somme dans (2.16), écrivons-la sous la forme

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-\alpha+m+1)\binom{\alpha-m-1}{r}r^{-m+\alpha} \times h(rh)^{m-\alpha}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}. \quad (2.18)$$

Pour appliquer le théorème 2.1, nous prenons

$$b_r=(-1)^r\Gamma(-\alpha+m+1)\binom{\alpha-m-1}{r}r^{-m+\alpha},$$
$$a_{n,r}=h(rh)^{m-\alpha}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}},\quad h=\frac{t-a}{n}.$$

En utilisant le théorème 2.1 nous vérifions que

$$\lim_{r\to+\infty}b_r=1. \quad (2.19)$$

De plus, si $m-\alpha>-1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}a_{n,r}=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n-m-1}h(rh)^{m-\alpha}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}$$
$$=\int_a^t(t-\tau)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (2.20)$$

En prenant en compte (2.19) et (2.20) et en appliquant le Théorème 2.1, nous concluons que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n-m-1}(-1)^k\binom{\alpha-m-1}{k}\Delta^{m+1}f(t-kh)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^t(t-\tau)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (2.21)$$

En utilisant (2.17) et (2.21) on obtient finalement la limite (2.13)

$$\mathrm{D}^\alpha f(t)=\lim_{h\to 0}f_h^\alpha(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{-\alpha+k}f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (2.22)$$

La formule (2.22) a été obtenue en supposant que les dérivées $f^{(k)}(t)$, $(k=1,2,\dots,n)$ sont continues dans l'intervalle fermé $[a,t]$ et que n est un nombre entier satisfaisant la condition $n>\alpha$. La plus petite valeur possible pour n est déterminé par l'inégalité $n-1<\alpha<n$.

Exemple 2.4. *La dérivée d'une fonction constante. On considère la fonction f définie par $f(t) = c \in \mathbb{R}$.*

Soit $\alpha > 0$ un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$$\begin{aligned}
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Comme $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $f(a) = c$, alors

$$\mathrm{D}^{k} f(t) = \frac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Exemple 2.5. *La dérivée de la fonction $(t-a)^r$.*

Considérons la fonction f définie par $f(t) = (t-a)^r$ où $r > -1$.

Soit α non entier, $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq n-1 < \alpha < n$, On a

si $k \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ alors on a $f^{(k)}(a) = 0$

et

$${}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Calcule de $f^{(n)}(t)$

$$\begin{aligned}
f(t) &= (t-a)^r \\
f^{(1)}(t) &= r(t-a)^{r-1} \\
f^{(2)}(t) &= r(r-1)(t-a)^{r-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(t) &= r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(t-a)^{r-n} \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(t-a)^{r-n}.
\end{aligned}$$

Donc

$${}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{r-n}\mathrm{d}\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t) &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}\int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{r-n}(t-a)^{r-n+1}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}\int_0^1 (t-a)^{r-\alpha}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{r-n}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{r-n}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}\mathrm{B}(n-\alpha, r-n+1) \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{r-\alpha}.
\end{aligned}$$

Si $r = \alpha$ on trouve

$${}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1).$$

2.2.5 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Grunwald-Letnikov

Proposition 2.6. [12]

La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre α coïncide avec la dérivée de Grunwald-Letnikov du même ordre, c-à-d ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} = {}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha}$.

Preuve. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

On fait l'intégration par parties et la dérivation n fois. Posons

$$J_i(t) = \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(i)}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

alors

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}J_0(t). \tag{2.23}$$

On calcule $J_0(t)$ par parties. Posons

$$\begin{aligned}
&u'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies u(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \\
&v(\tau) = f(\tau) \implies v'(\tau) = f'(\tau),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
J_0(t) &= \Big[\frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}f(\tau)\Big]_a^t + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

On dérive $J_0(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\
&= (t-a)^{n-\alpha-1}f(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= (t-a)^{n-\alpha-1}f(a) + J_1(t).
\end{aligned}$$

On calcule $J_1(t)$ par parties. Posons

$$\begin{aligned}
&u'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies u(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \\
&v(\tau) = f'(\tau) \implies v'(\tau) = f''(\tau),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
J_1(t) &= \Big[\frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\Big]_a^t + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f''(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f'(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f''(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

On dérive $J_1(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f'(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f''(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\
&= (t-a)^{n-\alpha-1}f'(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f''(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= (t-a)^{n-\alpha-1}f'(a) + J_2(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}J_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((t-a)^{n-\alpha-1}f(a) + J_1(t)\Big) \\
&= (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2}f(a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) \\
&= (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2}f(a) + (t-a)^{n-\alpha-1}f'(a) + J_2(t).
\end{aligned}$$

On calcule $J_2(t)$ par parties. Posons

$$\begin{aligned}
&u'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies u(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \\
&v(\tau) = f''(\tau) \implies v'(\tau) = f^{(3)}(\tau),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
J_2(t) &= \left[\frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha} f''(\tau)\right]_a^t + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha} f''(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

On dérive $J_2(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_2(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha} f''(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\
&= (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + J_3(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} J_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2} f(a) + (t-a)^{n-\alpha-1} f'(a) + J_2(t)\Big) \\
&= (n-\alpha-1)(n-\alpha-2)(t-a)^{n-\alpha-3} f(a) \\
&\quad + (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2} f'(a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_2(t) \\
&= (n-\alpha-1)(n-\alpha-2)(t-a)^{n-\alpha-3} f(a) \\
&\quad + (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2} f'(a) + (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + J_3(t).
\end{aligned}$$

Mais

$$(n-\alpha-1)(n-\alpha-2)\cdots(n-\alpha-k) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-k)},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} J_0(t) &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-2)}(t-a)^{n-\alpha-3} f(a) + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-1)}(t-a)^{n-\alpha-2} f'(a) \\
&\quad + (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + J_3(t).
\end{aligned}$$

On générale on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} J_0(t) &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} f^{(0)}(a) + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha} f^{(1)}(a) \\
&\quad + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(3-\alpha)}(t-a)^{2-\alpha} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-1-\alpha} f^{(n-1)}(a) + J_n(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} f^{(k)}(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Finalement, on revient à la formule (2.23) :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} J_0(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)(t-a)^{k-\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= {}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. On se restreindre les trois approches de la dérivée fractionnaire les plus populaires et les plus pratiques, l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés et la comparaison entre ces différentes approches.

Lemme 3.1. *Soit $\alpha > 0$, alors*

$$\mathrm{I}^{\alpha}\left({}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}h(t)\right) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, pour tout $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, et $n = [\alpha] + 1$.

Preuve. On a par la définition de la dérivée fractionaire de Caputo

$${}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}h(t) = \mathrm{I}^{n-\alpha}h^{(n)}(t).$$

En appliquant l'opérateur de l'intégrale fractionnaire aux deux membres on obtient

$$\mathrm{I}^{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}h(t) = \mathrm{I}^{\alpha}\mathrm{I}^{n-\alpha}h^{(n)}(t) = \mathrm{I}^{n}\left(\mathrm{D}^{n}h(t)\right)$$

On calcul $\mathrm{I}^{n}(\mathrm{D}^{n}h(t))$ par récurrence.

Pour $n = 1$:

$$\mathrm{I}(\mathrm{D}h(t)) = h(t) + k_0.$$

Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^2(\mathrm{D}^2 h(t)) &= \mathrm{I}\big(\mathrm{I}\big(\mathrm{D}(\mathrm{D}h(t))\big)\big)\\
&= \mathrm{I}(\mathrm{D}h(t) + k_0)\\
&= h(t) + k_0 t + k_1.
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^3(\mathrm{D}^3 h(t)) &= \mathrm{I}\big(\mathrm{I}^2\big(\mathrm{D}^2(\mathrm{D}h(t))\big)\big)\\
&= \mathrm{I}(\mathrm{D}h(t) + k_0 t + k_1)\\
&= h(t) + \frac{k_0}{2}t^2 + k_1 t + k_2.
\end{aligned}$$

Pour $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^4(\mathrm{D}^4 h(t)) &= \mathrm{I}\big(\mathrm{I}^3\big(\mathrm{D}^3(\mathrm{D}h(t))\big)\big)\\
&= \mathrm{I}\Big(\mathrm{D}h(t) + \frac{k_0}{2}t^2 + k_1 t + k_2\Big)\\
&= h(t) + \frac{k_0}{2\times 3}t^3 + \frac{k_1}{2}t^2 + k_2 t + k_3.
\end{aligned}$$

Plus généralement

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^n(\mathrm{D}^n h(t)) &= \mathrm{I}\big(\mathrm{I}^{n-1}\big(\mathrm{D}^{n-1}(\mathrm{D}h(t))\big)\big)\\
&= \mathrm{I}\Big(\mathrm{D}h(t) + \frac{k_0}{(n-2)!}t^{n-2} + \frac{k_1}{(n-3)!}t^{n-3} + \cdots + k_{n-2}\Big)\\
&= h(t) + \frac{k_0}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{k_1}{(n-2)!}t^{n-2} + \cdots + k_{n-1}\\
&= h(t) + c_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + ... + c_0,
\end{aligned}$$

où $k_i \in \mathbb{R}$ et $c_i = \dfrac{k_{n-i-1}}{i\,!}$ pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$. □

Lemme 3.2. *Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Alors l'équation différentielle fractionnaire $\mathrm{D}^\alpha h(t) = 0$ admet les solutions*

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1};\; c_i \in \mathbb{R},\; \forall i = 0, 1, ..., n-1.$$

Preuve. Supposons que $\mathrm{D}^\alpha h(t) = 0$, alors $\mathrm{I}^\alpha\left(\mathrm{D}^\alpha h(t)\right) = \mathrm{I}^\alpha(0) = 0$.

D'après le lemme 3.1 on a

$$\mathrm{D}^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1},$$

donc

$$h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1} = 0.$$ □

3.1 Problèmes aux limites avec des conditions locales

Dans cette section, on va étudier l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions locales de la forme suivante

$$\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T],\ \alpha \in]1,2], \tag{3.1}$$

$$y(0) = y_0,\ \ y(T) = y_T, \tag{3.2}$$

où D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Pour ce problème on présentera deux résultats d'existence, le premier est basé sur le théorème du point fixe de Banach et le second basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

3.1.1 Existence des solutions

On commence par la définition d'une solution du problème (3.1)–(3.2).

Definition 3.1. *Une fonction $y \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.1)–(3.2) si elle satisfait l'équation $\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t,y(t))$ sur I et les conditions $y(0) = y_0$, $y(T) = y_T$.*

Pour l'existence de la solution du problème (3.1)–(3.2) on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3. [1]

Soit $1 < \alpha < 2$ et soit $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s + y_0 + \left[\frac{y_T - y_0}{T} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T}h(s)\mathrm{d}s\right] t, \tag{3.3}$$

si, et seulement si y est une solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = h(t), \quad \forall t \in I = [0,T], \tag{3.4}$$

$$y(0) = y_0,\ \ y(T) = y_T, \tag{3.5}$$

Preuve. En utilisant le lemme 3.1, on réduit le problème (3.4)–(3.5) à une équation intégral équivalente

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = h(t) &\Longleftrightarrow \mathrm{I}^{\alpha}\left({}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t)\right) = \mathrm{I}^{\alpha}h(t)\\
&\Longleftrightarrow y(t) + c_0 + c_1 t = \mathrm{I}^{\alpha}h(t)\\
&\Longleftrightarrow y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s - c_0 - c_1 t.
\end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes c_0 et c_1 on utilise les conditions au limites. On a

$$y(0) = y_0 \iff -c_0 = y_0,$$

et

$$\begin{aligned} y(T) = y_T &\iff \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s + y_0 - c_1 T = y_T \\ &\iff c_1 = -\frac{y_T}{T} + \frac{y_0}{T} + \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s + y_0 + \frac{y_T t}{T} - \frac{y_0 t}{T} - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T} h(s)\mathrm{d}s + y_0 + \frac{y_T - y_0}{T} t. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.1. [1]

Supposons que

(H1) *Il existe une constante* $k > 0$ *telle que*

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \leq k|u - \overline{u}|, \quad \text{pour tout } t \in [0,T], \text{ et tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3.6}$$

alors le problème (3.1)–(3.2) *admet une solution unique sur* $[0,T]$.

Preuve. On va transformer le problème (3.1)–(3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R}),$$

défini par

$$\begin{aligned} F(y(t)) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s + y_0 \\ &+ \left[\frac{y_T - y_0}{T} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T} f(s,y(s))\mathrm{d}s \right] t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.1)–(3.2).

Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction. Soit $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\mathrm{d}s \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{kt}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \underset{s\in[0,T]}{sup} |x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{kt}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \underset{s\in[0,T]}{sup} |x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t-s)^\alpha}{\alpha}\right]_0^t + \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(T-s)^\alpha}{\alpha}\right]_0^T \\
&\leq \frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty.$$

Par conséquent, de (3.6) on déduire que F est une contraction et, d'après le théorème de Banach F admet un point fixe unique, qui est une solution du problème (3.1)–(3.2). □

Théorème 3.2. [1]

Supposons que

(H2) *la fonction* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(H3) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $|f(t,u)| \leq M$ *pour tout* $t \in I$, *et tout* $u \in \mathbb{R}$.

Alors, le problème (3.1)–(3.2) *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.7) admet un point fixe. La démonstration se fait en quatre étapes.

Étape 1 : F est continue.

Soit (y_n) une suite convergente dans $C([0,T],\mathbb{R})$ vers une limite y. Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)))\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)))\mathrm{d}s \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t-s)^\alpha}{\alpha}\right]_0^t \\
&\quad + \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(T-s)^\alpha}{\alpha}\right]_0^T \\
&\leq \frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on obtient

$$\|F(y_n) - F(y)\| \leq \frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la continuité de F.

Étape 2 : L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive ℓ telle que, pour tout $y \in B_{\eta^*} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$ on a $\|F(y)\|_\infty \leq \ell$.

On a, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y(t))| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s + y_0 + \frac{y_T - y_0}{T} t \\
&\quad - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T} f(s,y(s))\mathrm{d}s \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\mathrm{d}s + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| \mathrm{d}s \\
&\quad + |y_0| + \frac{t}{T}|y_T - y_0| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + |y_0| + |y_T - y_0|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{-(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^t + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^T + |y_0| + |y_T - y_0| \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^{\alpha} + |y_0| + |y_T - y_0| \\
&\leq \frac{2MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |y_0| + |y_T - y_0|.
\end{aligned}
$$

Posons

$$\ell = \frac{2MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |y_0| + |y_T - y_0|,$$

alors $\|F(y)\|_{\infty} \leq \ell$, c'est-à-dire $F(B_{\eta^*})$ est borné.

Étape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ comme dans l'étape 2, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors

$$
\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s - \frac{t_2}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s + \frac{t_1}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left. - \frac{t_2-t_1}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}\big((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\big)f(s,y(s))\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s - \frac{t_2-t_1}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\bigg(\int_0^{t_1}\big((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\big)\big|f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\big|f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s + \frac{t_2-t_1}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\big|f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s\bigg) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\bigg(\int_0^{t_1}\big((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\big)\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t_2-t_1}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\bigg) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\bigg(- \Big[(t_2-s)^{\alpha} - (t_1-s)^{\alpha}\Big]_0^{t_1} - \Big[(t_2-s)^{\alpha}\Big]_{t_1}^{t_2} \\
&\quad - \frac{t_2-t_1}{T}\Big[(T-s)^{\alpha}\Big]_0^T\bigg) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} + T^{\alpha-1}(t_2-t_1)\Big).
\end{aligned}
$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où $F(B_{\eta^*})$ est équicontinu.

D'après les étapes 1–3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà, $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F est complètement continu.

Par conséquent $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Étape 4 : Maintenant il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour certains } 0 < \lambda < 1\},$$

est borné.

Soit $y \in \mathcal{E}$, alors $y = \lambda F(y)$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Donc, pour tout $t \in I$ on a

$$y(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s + y_0 + \left[\frac{y_T - y_0}{T} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T} f(s,y(s))\mathrm{d}s\right] t.$$

On a, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s + y_0 \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{y_T - y_0}{T} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T} f(s,y(s))\mathrm{d}s\right] t \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\mathrm{d}s + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\, \mathrm{d}s \\
&\quad + |y_0| + \frac{t}{T}|y_T - y_0| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + |y_0| + |y_T - y_0| \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t-s)^\alpha}{\alpha}\right]_0^t + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(T-s)^\alpha}{\alpha}\right]_0^T + |y_0| + |y_T - y_0| \\
&= \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + |y_0| + |y_T - y_0| \\
&\leq \frac{2MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + |y_0| + |y_T - y_0|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{2MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + |y_0| + |y_T - y_0| := \frac{R}{\lambda},$$

d'où $\|y\|_\infty \leq R$, ce qui montre que $\mathcal{E}$ est borné.

Comme une conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.1)–(3.2). $\square$

3.1.2 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant

$$\mathrm{D}y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \quad t \in I = [0,1],\ 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.8}$$

$$y(0) = y_0, \ \ y(1) = y_1. \tag{3.9}$$

Posons

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)}, \quad (t,x) \in I \times [0,\infty[.$$

Soit $x, y \in [0,\infty[$ et $t \in I$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\left|\frac{x}{(1+x)} - \frac{y}{(1+y)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^t)(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

Alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$. On doit vérifier que la condition (3.6) est satisfaite pour des valeurs appropriée de $\alpha \in]1,2]$ avec $T = 1$.

En effet

$$\frac{2k}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \iff \Gamma(\alpha+1) > 2k = 0,2. \tag{3.10}$$

Alors, d'après le Théorème 3.1, le problème (3.8)–(3.9) a une seule solution sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaire (3.10).

3.2 Problèmes aux limites avec des conditions non locales

Dans cette section on présente quelques résultats d'existence et d'unicité des solution du problème aux limites non local suivant

$${}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T],\ 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.11}$$

$$y(0) = g(y), \ \ y(T) = y_T, \tag{3.12}$$

où ${}^C\mathrm{D}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de caputo, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $y_T \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Existence des solutions

Definition 3.2. *Une fonction $y \in C^2([0,T],\mathbb{R})$ est dite solution du problème* (3.11)–(3.12) *si elle satisfait l'équation ${}^C\mathrm{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur I et les conditions*

$$y(0) = g(y), \;\; y(T) = y_T.$$

Pour l'existence de solutions du problème (3.11)–(3.12), nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivants.

Lemme 3.4. *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et soit $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s \\ - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) g(y) + \frac{t}{T} y_T, \end{aligned} \tag{3.13}$$

si, et seulement si y est une solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^C\mathrm{D}^\alpha y(t) = h(t)\,, \quad \forall t \in I = [0,T], \tag{3.14}$$

$$y(0) = g(y), \;\; y(T) = y_T. \tag{3.15}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1 on a

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s.$$

Ils restent à trouver c_0 et c_1. On a

$$y(0) = g(y) \iff c_0 = g(y),$$

et

$$\begin{aligned} y(T) = y_T &\iff g(y) + c_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s = y_T \\ &\iff c_1 = \frac{1}{T} y(T) - \frac{1}{T} g(y) - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
y(t) &= g(y) + \frac{t}{T}y(T) - \frac{t}{T}g(y) - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s \\
&\quad - \left(\frac{t}{T}-1\right)g(y) + \frac{t}{T}y_T.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3. *Supposons que :*

(H1) *Il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \leq k|u-\overline{u}|, \quad \text{pour tout } t \in [0,T] \text{ et tout } u,\overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H4) *Il existe une constante $k^* > 0$ telle que*

$$|g(u) - g(\overline{u})| \leq k^*|u-\overline{u}|, \quad \text{pour tout } t \in [0,T] \text{ et tout } u,\overline{u} \in C([0,T],\mathbb{R}).$$

Si

$$k^* + \frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3.16}$$

alors, le problème non local (3.11)–(3.12) *admet une solution unique sur* $[0,T]$.

Preuve. On transforme le problème (3.11)–(3.12) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R}),$$

définie par

$$\begin{aligned}
F(y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s \\
- \Big(\frac{t}{T}-1\Big)g(y) + \frac{t}{T}y_T.
\end{aligned}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.11)–(3.12).

Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction.

Soient $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| = \bigg| &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big)\mathrm{d}s \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\big(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\mathrm{d}s \\
&- \left(\frac{t}{T}-1\right)g(x) + \left(\frac{t}{T}-1\right)g(y)\bigg|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\mathrm{d}s+|g(x)-g(y)|\\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s+|g(x)-g(y)|\\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}\big|x(s)-y(s)\big|\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s+|g(x)-g(y)|\\
&\leq \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s+k^*\|x-y\|_\infty\\
&\leq k^*\|x-y\|_\infty+\frac{2k\,T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty.\\
&=\left(k^*+\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}
$$

En vertu de (3.16), on déduire que F est une contraction et d'après le théorème de Banach, F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.11)–(3.12). □

Maintenant nous donnons un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.4. [2]

Supposons que :

(H2) *la fonction* $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est continue.*

(H3) *Il existe une constante* $M>0$ *telle que*

$$|f(t,u)|\leq M,\quad \text{pour tout } t\in[0,T] \text{ et tout } u\in\mathbb{R}.$$

(H5) *Il existe une constante* $M_1>0$ *telle que*

$$|g(y)|\leq M_1 \quad \text{pour tout } y\in C([0,T],\mathbb{R}).$$

Alors, le problème (3.11)–(3.12) *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F admet un point fixe, la preuve sera donnée en quatre étapes.

Étape 1 : F est continu.

Soit (y_n) une suite convergente dans $C([0,T],\mathbb{R})$ vers une limite y.

Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| = &\Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\big)\mathrm{d}s \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\mathrm{d}s \\
&- \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y_n) + \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y)\Bigg| \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&+ |g(y_n) - g(y)| \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \underset{s\in[0,T]}{sup}\big|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \underset{s\in[0,T]}{sup}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&+ |g(y_n) - g(y)| \\
\leq &\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \\
&+ k^*\|y_n - y\|_\infty \\
\leq &\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty + k^*\|y_n - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on obtient

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la continuité de F.

Étape 2 : F transforme un ensemble borné en un ensemble borné in $C([0,T],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive ℓ telle que, pour tout $y \in B_{\eta^*} = y \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|y\| \leq \eta^*$, on a $\|F(y)\| \leq \ell$.

On a, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \\
&\quad - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) g(y) + \frac{t}{T} y_T \Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\quad + |g(y)| + |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s + M_1 + |y_T| \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t-s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^t + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(T-s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^T + M_1 + |y_T| \\
&= \frac{M t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1 + |y_T| \\
&\leq \frac{2 M T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1 + |y_T| := \ell.
\end{aligned}$$

Étape 3 : F transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue de $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ et soit $y \in B_{\eta*}$. Alors

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &= \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}] f(s, y(s)) \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t_2 - t_1}{T} g(y) + \frac{t_2 - t_1}{T} y_T \Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}] |f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t_2 - t_1}{T} |g(y)| + \frac{t_2 - t_1}{T} |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}] \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s + M \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{t_2 - t_1}{T} M_1 + \frac{t_2 - t_1}{T} |y_T|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}[-(t_2-t_1)^\alpha + t_2^\alpha - t_1^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha \\
&\quad + M\frac{t_2-t_1}{T\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{t_2-t_1}{T}M_1 + \frac{t_2-t_1}{T}|y_T| \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2^\alpha - t_1^\alpha) + \left(\frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + M_1 + |y_T|\right)\frac{(t_2-t_1)}{T}.
\end{aligned}
$$

Quand $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

En conséquence des étapes 1 à 3 ainsi le théorème d'Ascoli-Arzéla nous pouvons conclure que F est complètement continu.

Étape 4 : Il reste à montrer que l'ensemble

$$
\mathcal{E} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour certains } 0 < \lambda < 1\},
$$

est borné.

Soit $y \in \mathcal{E}$, alors $y = \lambda F(y)$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Donc, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$
\begin{aligned}
F(y(t)) = &\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s - \frac{t\lambda}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s \\
&- \lambda\Big(\frac{t}{T}-1\Big)g(y) + \lambda\frac{t}{T}y_T.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
|F(y(t))| = &\left|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s - \frac{t\lambda}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s\right. \\
&\left. -\lambda\Big(\frac{t}{T}-1\Big)g(y) + \lambda\frac{t}{T}y_T.\right| \\
\leq &\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\mathrm{d}s + \frac{t\lambda}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&+ \lambda\Big(\frac{t}{T}-1\Big)|g(y)| + \lambda\frac{t}{T}|y_T|. \\
\leq &\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + M_1 + |y_T| \\
= &\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + M_1 + |y_T|.
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout t$\in [0,T]$, on a

$$
\|F(y)\|_\infty \leq \frac{2MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1 + |y_T| := R,
$$

d'où $F\|y\|_\infty \leq R$, ce qui montre que $\mathcal{E}$ est borné.

Comme une conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.11)–(3.12). □

3.2.2 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème fractionnaire aux limites suivant

$$^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^{t})(1+|y(t)|)}, \quad t \in J = [0,1], 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.17}$$

$$y(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i), \quad y(1) = 0, \tag{3.18}$$

tel que $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$, c_i ; $i = 1 \cdots n$ sont des constantes positives données avec

$$\sum_{i=1}^{n} c_i < \frac{4}{5}.$$

Soit

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})(1+x)}, \quad (t,x) \in J \times [0,\infty[,$$

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i).$$

Pour tout $x, y \in [0,\infty[$ et $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\ &= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^{t})(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|x-y|. \end{aligned}$$

D'où la condition (H1) est vérifiée avec $k = \dfrac{1}{10}$. De plus

$$|g(x) - g(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i |x-y|,$$

d'où (H4) est satisfaite avec $k^* = \sum_{i=1}^{n} c_i$.

On doit voir que la condition (3.17) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\frac{2kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + k^* = \frac{1}{5\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i < 1 \iff \Gamma(\alpha+1) > 1,$$

qui est satisfait pour tout $\alpha \in]1,2]$. Alors, du Théorème 3.3 le problème (3.18)-(3.18) a une solution unique sur $[0,1]$.

3.3 Problèmes aux limites avec des conditions intégrales

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales de la forme suivante :

$$\mathrm{D}y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I = [0, T],\ \alpha \in]1, 2], \tag{3.19}$$

$$y(0) = \int_0^T y(s)\mathrm{d}s,\ \ y(T) = y_T, \tag{3.20}$$

où D est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et $\mu \in \mathbb{R}^*$.

Nous consacrons la première section à l'existence des solutions du problème (3.19)–(3.20) qui est basé sur le théorème du point fixe de Banach et la deuxième section sera réservée à des exemples illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

Les résultats de ce chapitre s'inspirent des travaux de Benchohra et Ouaar [...].

3.3.1 Existence des solutions

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (3.19)–(3.20).

Definition 3.3. *Une fonction $y \in C(I, \mathbb{R})$ est dite une solution de* (3.19)–(3.20) *si elle satisfait l'équation* $\mathrm{D}y(t) = f(t, y(t))$ *sur I, et les conditions*

$$y(0) = \int_0^T y(s)\mathrm{d}s,\ \ y(T) = y_T.$$

Lemme 3.5. [4]

Soit $1 < \alpha \leqslant 2$ et soit $h \in C(I, \mathbb{R})$ une fonction donnée. Alors le problème aux limites

$$\mathrm{D}y(t) = h(t), \quad t \in I, \tag{3.21}$$

$$y(0) = \int_0^T y(s)\mathrm{d}s,\ \ y(T) = y_T, \tag{3.22}$$

admet une solution unique donnée par

$$y(t) = \int_0^T G(t, s)h(s)\mathrm{d}s + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^T y(s)\mathrm{d}s + \frac{t}{T}y_T, \tag{3.23}$$

où $G(\cdot, \cdot)$ est la fonction de Green donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ -\dfrac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha)}, & \text{si } t < s \leqslant T. \end{cases} \tag{3.24}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on peut réduire le problème (3.21)–(3.22) en une équation intégrale équivalente

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s + c_0 + c_1 t.$$

Pour déterminer les constantes c_0 et c_1 on utilise les conditions aux limites (3.22).

$$y(0) = \int_0^T y(s)\mathrm{d}s \iff c_0 = \int_0^T y(s)\mathrm{d}s,$$

et

$$\begin{aligned} y(T) = y_T &\iff \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s + \int_0^T y(s)\mathrm{d}s + c_1 T = y_T \\ &\iff c_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{T}\int_0^T y(s)\mathrm{d}s + \frac{y_T}{T}. \end{aligned}$$

Donc la solution unique de (3.21)–(3.22) est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s + \int_0^T y(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s \\ &\quad - \frac{t}{T}\int_0^T y(s)\mathrm{d}s + \frac{t}{T} y_T \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + (1-\frac{t}{T}) \int_0^T y(s)\mathrm{d}s + \frac{t}{T} y(t) \\ &= \int_0^T G(t,s)h(s)\mathrm{d}s + \left(1-\frac{t}{T}\right) \int_0^T y(s)\mathrm{d}s + \frac{t}{T} y(t). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1. *La fonction*

$$t \mapsto \int_0^T |G(t,s)h(s)|\mathrm{d}s,$$

est continue sur I et est donc bornée.

Soit

$$\widehat{G} = \sup\left\{ \int_0^T |G(t,s)|\mathrm{d}s,\ t \in I \right\}.$$

Notre premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.5. [4]

Supposons que

(H1) *Il existe un $k > 0$, tel que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant k|u-v|, \text{ pour tout } t \in I, \text{ et } u, v \in \mathbb{R}.$$

Si

$$k\widehat{G} < 1, \tag{3.25}$$

alors, il existe une solution unique pour le problème aux limites (3.19)–(3.20).

Preuve. Considérons l'opérateur $F : C(I,\mathbb{R}) \to C(I,\mathbb{R})$ défini par

$$F(y(t)) = \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s,$$

où $G(\cdot,\cdot)$ est la fonction de Green donnée par (3.24).

D'après le Lemme 3.5 les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problèmes (3.19)–(3.20).

On doit montrer que F est une contraction. Soit $x, y \in C(I,\mathbb{R})$ alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x(t)) - F(y(t))| &= \left|\int_0^T G(t,s)\big(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big)\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)|.k|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant k\int_0^T |G(t,s)| \underset{s\in[0,T]}{sup} |x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant k\|x-y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant k\widehat{G}\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leqslant L\|x-y\|_\infty\ ,$$

où $L = k\widehat{G} < 1$. D'où F est une contraction. □

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.6. [4]

Supposons que

(C1) *La fonction* $f : I \times \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ *est continue,*

(C2) *Ils existent* $\rho \in C(I \times \mathbb{R}^+)$ *et* $\psi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *continues et non décroissantes telles que*

$$|f(t,u)| \leqslant \rho(t)\psi(|u|),\ \textit{pour tout } t \in I \textit{ et } u \in \mathbb{R},$$

(C3) *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\frac{M}{\rho^* \psi(M) \widehat{G}} > 1, \tag{3.26}$$

où $\rho^* = \sup\{\rho(s), s \in I\}$.

Alors, le problème (3.19)–(3.20) *admet au moins une solution.*

Preuve. Soit

$$D = \{y \in C(I, \mathbb{R}),\ \|y\|_\infty \leqslant M\},$$

où M est la constante donnée par (C3).

D est un sous-ensemble fermé et convexe de $C(I, \mathbb{R})$. Nous allons montrer que F satisfait les conditions du théorème du point fixe de Schauder.

Étape 1 : F est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(I, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
|F(y_n(t)) - F(y(t))| &= \left| \int_0^T G(t,s)\big(f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\big) \mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)|. \underset{s \in [0,T]}{sup} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \widehat{G} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Étape 2 : $F(D)$ est un ensemble borné de $C(I, \mathbb{R})$.

Soit $y \in D$; alors pour chaque $t \in I$, C(2) implique

$$\begin{aligned}
|F(y(t))| &= \left| \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) \mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)|. \rho(s) \psi(|y(s)|) \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)|. \underset{s \in [0,T]}{sup} \rho(s) \psi(|y(s)|) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$\leqslant \rho^* \psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t,s)| \mathrm{d}s.$$

Donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq \rho^* \psi(M) \widehat{G} := \ell.$$

Étape 3 : $F(D)$ est un ensemble équicontinue de $C(I, \mathbb{R})$.

Soient $y \in D$, $t_1, t_2 \in I$; $t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
|F(y(t_2)) - F(y(t_1))| &= \left| \int_0^T \big(G(t_2,s) - G(t_1,s)\big) f(s, y(s)) \mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \cdot |f(s,y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| . \rho(s) \psi(|y(s)|) \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \sup_{s \in [0,T]} \rho(s) \psi(|y(s)|) \mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho^* \psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$ Le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par le théorème d'Ascoli-Arzélà, $F(D)$ est relativement compact pour tout borné de D. Alors F est complètement continu.

Étape 4 : $F(D)$ est un sous ensemble de D.

Soit $y \in D$. On va montrer que $F(y) \in D$. Pour chaque $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|F(y(t))| &= \left| \int_0^T G(t,s) f(s,y(s)) \mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s,y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| . \rho(s) \psi(|y(s)|) \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| . \sup_{s \in [0,T]} \rho(s) \psi(|y(s)|) \mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho^* \psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t,s)| \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leqslant \rho^* \psi(\|y\|_\infty) \widehat{G}.$$

Par (3.26) on a $\|F(y)\|_\infty \leqslant M$.

Par suite, on déduit que F admet un point fixe qui est une solution du problème aux limites (3.19)–(3.20). □

3.3.2 Exemple

Considérons le problème aux limites

$$\mathrm{D}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in I = [0,1],\ \alpha \in]1,2], \tag{3.27}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)\mathrm{d}s,\ \ y(1) = y_1, \tag{3.28}$$

où

$$f(t, y(t)) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}x\ , \quad (t,x) \in I \times]0, +\infty[.$$

Soit $x, y \in [0, +\infty[$ et $t \in I$. On a

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}|x-y| \leqslant \frac{1}{20}|x-y|.$$

Alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{20}$.

D'après (3.24) G est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ , & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ -\dfrac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ , & \text{si } t < s \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.29}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G(t,s)|\mathrm{d}s &= \int_0^t |G(t,s)|\mathrm{d}s + \int_t^1 |G(t,s)|\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \mathrm{d}s + \int_t^1 \left| -\frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \mathrm{d}s + \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{-(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t + t \left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t + t \left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]_t^1 \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\widehat{G} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Alors la condition (3.25) est satisfaite car $\widehat{G}k < 1$ pour tout $\alpha \in]1,2]$. Alors d'après le Théorème 3.5, le problème (3.27)–(3.28) admet une unique solution sur $[0,1]$.

Bibliographie

[1] **M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas**, *boundary value problems for differential equations with fractional order*, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[2] **M.Benchohra, S.Hamani and S.K.Ntouyas** *Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal condition*, Nonlinear Analysis 71(2009)2391-2396.

[3] **M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas and A. Ouahab**, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1340-1350.

[4] **M. Benchohra and F.Ouaar**, *Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions*, Math. Anal. Appl. 2 (2010), 7-15.

[5] **S. Dolecki**, *Analyse Fondamentale, Espaces métriques, topologiques et normés*, 2nd édition, Hermann Édition, Paris, 2013.

[6] **A. Granas et J. Dugundji**, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag New York, 2003.

[7] **A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo** *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[8] **D. Li**, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Ellipses Édition, 2013.

[9] **l. Podlubny**, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, California, USA, 1999.

[10] **J-P. Ramis et A. Warusfel**, *Mathématiques Tout-en-Un pour la Licence, Niveau L2*, Dunod, Paris, 2007.

[11] **S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev**, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Longhorne, PA, 1993.

[12] , **M. Weilbeer**, *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*, Braunschweig Universitätsbibliothek Göttingen, 2005.

[13] **E. Zeidler**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I : Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag New York, 1986.