REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ...

Série : ...

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Thème

Contributions à la résolution d'une classe de problèmes d'évolution

Présentée par

Nora Fetouci

Soutenue le 05/ 01 /2017, devant le jury composé de :

Président	T. Zerzaihi	Prof	U.M.S.B.Y. Jijel
Rapporteur	M. F. Yarou	Prof	U.M.S.B.Y. Jijel
Examinateurs	N. Abada	M.C.A	E.N.S. Constantine
	M. Denche	Prof	U. Constantine 01
	A. L. Marhoune	Prof	U. Constantine 01

À

Mes chers parents :

≪ Ahcene et Akila ≫

Ma grand mère : Messaouda

Mes frères et sœurs.

Je dédie ce modeste travail.

F. Nora.

Remerciements

En tout premier lieu, Je remercie DIEU, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mr Mustapha Fateh Yarou Professeur à l'université de Jijel pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses conseils, ses encouragements et sa grande disponibilité qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement Mr Tahar Zerzaihi Professeur à l'université de Jijel qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Mme Najat Abada Maître de Conférences à l'E. N. S de Constantine, Mr Mohamed Denche Professeur à l' université de Constantine et Mr Ahmed Lakhdar Marhoune Professeur à l'université de Constantine qui ont accepté de faire partie du jury de ce travail.

Je ne voudrais pas oublier tous ceux et celles qui au long de ce travail m'ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement car la liste serait longue, je les remercie de leurs encouragements.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

L'analyse multivoque consiste à étudier les propriétés des applications multivaluées, autrement dit les applications dont l'image est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. L'intérêt pour ce type d'applications vient du fait que beaucoup de problèmes sont considérés comme mal posés, c'est-à-dire que l'existence, l'unicité et la dépendance par rapport aux données de la solution ne sont pas assurées. Le besoin de l'analyse multivoque s'est ainsi fait sentir pour la résolution de nombreux problèmes émergeant dans divers domaines comme : la théorie du contrôle, l'économie, la gestion, la biologie, les sciences des systèmes et l'intelligence artificielle, théorie des graphes et théorie des jeux. Dans la littérature ([3, 22, 45, 50]), les techniques de résolution des problèmes multivoques ou inclusions ont souvent été menées dans un cadre où les applications multivoques ont des propriétés de monotonie, plus précisément de maximale monotonie. Les opérateurs maximaux monotones englobent la classe des opérateurs sous différentiels et en particulier les problèmes connus sous le nom du processus de rafle. Les problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones, plus précisément le sous différentiel d'une fonction f convexe semi-continue inférieurement qui se përésente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -\partial f(x(t)), \text{ p.p. sur } [0,T] \\ \qquad\qquad x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

ont été l'objet d'un grand nombre de résultats d'existence, citons par exemple le livre de H. Brezis [22] dans lequel l'existence de solution est garantie par la méthode de régularisation Yosida. Dans le cas particulier, où f est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe, dépendant parfois du temps, on obtient le problème connu sous le nom de processus de rafle. Introduit dans les année 70 par J.J. Moreau, le processus de rafle est un problème d'évolution cinématique lié à la modélisation des systèmes élastoplastiques en mécanique et se présente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)), \text{ p.p. sur } [0,T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

$N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal en $x(t)$ à l'ensemble (fermé mobile) $C(t)$. Le processus de rafle est entièrement résolu pour des multifonctions C à valeurs convexes dans un espace de Hilbert [62]. En l'absence de convexité, plusieurs résultats ont été obtenus en considérant de nouvelles notions de régularité d'ensembles, parmi ces notions, celle qui est sujet de notre intérêt, est *l'uniforme r-prox régularité* introduite dans [37] et [70]. Le problème (2) a connu plusieurs raffinements. Des résultats ont été obtenus pour des perturbations convexes et non convexes, semi-continues supérièrement et semi-continues inférieurement. Le lecteur pourra consulter [7, 9, 19, 29, 43, 82] pour plus de détails sur le processus de rafle du premier ordre. Le processus de rafle du second ordre, a été introduit en premier lieu par Castaing [24] pour la modélisation des systèmes de frottement sec [63]. Le problème perturbé et le problème avec retard ont aussi été traités dans plusieurs contextes et sous différentes hypothèses dans [15, 19, 25, 80]. On veut dire par problème avec retard le problème où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système.

Dans le cas où la multifonction C dépend du temps et de l'état, on obtient le processus de rafle dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{ p.p. sur } [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0,u_0), \end{cases} \tag{3}$$

qui est une généralisation du processus de rafle. Ce problème a été étudié pour la modélisation de certains problèmes liés au traitement en 2-D et 3-D des problèmes d'évolution quasistatiques avec frottement, (voir par exemple [34], [58]) et dans plusieurs modèles de dégâts micromécaniques (les modèles de Gurson) des matériaux en fer à mémoire, pour décrire les déformations plastiques en présence de petits dégâts ; cf [23]. Les premiers travaux pour ce type de problèmes ont été entrepris par Chraibi [34] puis Kunze et Monteiro Marques [54]. Depuis, plusieurs auteurs se sont intéressés à étendre ces résultats d'existence aux problème avec perturbation et problème du second ordre. En s'appyant sur un travail récent de Castaing, Ibrahim, et Yarou [27], nous proposons dans cette thèse de résoudre le problème du second ordre avec une perturbation retardée

$$\begin{cases} -\dot{u}\,(t) \in N^{P}_{C(t,v(t))}\,(u(t)) + G(t, \mathcal{T}(t)v, \mathcal{T}(t)u) & \text{p.p. sur } [0,T]\,; \\ \text{avec } \dot{u} \in L^{\infty}_{H}\,([0,T]) \text{ et } u\,(t) \in C(t, v\,(t)), & \forall t \in [0,T]\,; \\ u(s) = \mathcal{T}(0)u(s) = \psi_0(s), \text{ et } v\,(s) = \mathcal{T}(0)v(s) = \varphi_0(s) & \forall s \in [-\tau, 0]\,. \end{cases} \tag{4}$$

où C est à valeurs fermées uniformément $r-prox$ régulières et F scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes. Dans la plupart des travaux concernant les inclusions différentielles, bien que le second membre, soit en général, seulement semi-continu supérieurement, la convexité et la compacité s'avèrent des conditions incontournables. En renonçant à la convexité, plusieurs travaux ont été réalisés pour des problèmes de type cycliquement monotone, c'est le cas où la multifonction F est incluse dans le sous différentiel d'une fonction f convexe propre semi-continue inférieurement. Notre contribution dans cette thèse est de résoudre les problèmes de type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + h(t, x(t)) & p.\,p.\;\; t \geq 0 \\ \qquad\qquad x(0) = x_0, & \end{cases} \tag{5}$$

où F est une multifonction semi-continue supérieurement et h une fonction de Caratheodory. Notre travail s'inscrit dans la même optique que plusieurs travaux de Bressan, Cellina et Colombo [20], Ancona et Colombo [2]. Ces derniers ont prouvé l'existence de solutions pour le problème du premier ordre pour des opérateurs cycliquement monotones. Ce résultat a connu plusieurs généralisations, on se réfère à [2], [31], [64] et [80]. L'auteur dans [8] a étudié le même problème en remplaçant l'hypothèse de f convexe par f régulière. Cette classe de fonctions est d'une grande importance dans l'analyse non lisse et l'optimisation, le problème en dimension finie a été également étudié.

Notre résultat consiste en premier temps à étendre leurs travaux au cas du sous différentiel d'une fonction semi-continue inférieurement **primal lower nice** (pln en abrégé). Ces fonctions jouissent de propriétés de sous différentiabilité ou encore de régularité très importantes, et parfois plus faciles à obtenir que celles de maximale monotonie.

La notion de fonction "**primal lower nice**" (pln en abrégé) fut introduite et finement étudiée par R.A. Poliquin [67] en dimension finie. Ces fonctions furent également au coeur des préocupations de A.B. Levy, R.A. Poliquin et L.Thibault [55] dans le cadre Hilbertien.

Les fonctions convexes sont clairement pln en tout point de leur domaine effectif. Il en est de même pour les fonctions convexes à un carré près, i.e les fonctions f telles que $f(.) + C\|.\|^2$ soit convexe pour un certain réel $C > 0$. Il fut également démontré que l'importante classe des fonctions convexes composites qualifiées est contenue dans celle des fonctions pln, aussi bien en

dimension finie en vertu de [66], que dans le contexte d'un espace de Banach d'après [36, 81]. Les travaux de Poliquin dans $\mathbb{R}^n$ [67] puis ceux de Levy-Poliquin-Thibault dans les espaces de Hilbert [55], ont fait état d'une caractérisation sous-différentielle des fonctions pln, et ont révélé des propriétés fondamentales de ces dernières telles que la coïncidence de leur sous différentiel proximal avec celui de Clarke.
Les fonctions pln sont complètement déterminées par leur sous différentiel au sens où : si deux fonctions sont pln en un point x' où elles sont toutes deux finies et possèdent le même sous différentiel proximal sur un voisinage de x', alors ces deux fonctions sont égales à une constante additive près au voisinage de x', un résultat d'intégration dû à R. A. Poliquin [67] en dimension finie et à L. Thibault et D. Zagrodny [83] dans un espace de Hilbert.
F. Bernard et L. Thibault [11] ont démontré la régularité $C^{1,+}$ des enveloppes locales de Moreau d'une fonction pln ainsi que le caractère univoque lipschitzien des applications proximales correspondantes ; rappelons qu'une fonction f est $C^{1,+}$ sur Ω si elle est différentiable sur Ω et ∇f est localement lipschitzienne.
Le problème (5) a subi plusieurs extensions, parmi lesquelles la recherche de solutions viables qui a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs tels Bressan, Cellina, Colombo qui ont traité le problème sans perturbation pour F incluse dans le sous différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement et les auteurs dans [1, 8, 14, 16, 61] ont étudié les perturbations univoques et multivoques pour le problème ainsi que le cas du sous différentiel d'une fonction non covexe en dimension finie et infinie.
Depuis les années 80 s'est développée à partir de l'analyse multivoque [3], la théorie de la viabilité dont la principale motivation était l'étude des évolutions des systèmes complexes en avenir incertain soumis à des contraintes de viabilité d'où le nom. Son champ d'application, initialement centré sur les systèmes évolutionnaires en sciences économiques, s'est considérablement élargi dans les années 90 aux sciences sociales (économie dynamique, démographie, finance, environnement,...) et aux sciences de l'ingénieur (contrôle, jeux différentiels, optimisation, ...). Cette théorie mathématique permet de rechercher les conditions (décisions, états) dans lesquelles les contraintes opérationnelles seront toujours satisfaites et donc dans lesquelles le système pourra fonctionner de manière durable. Pour obtenir une solution viable, celle qui vérifie $x(t) \in K$ où K est un sous ensemble fermé, on doit ajouter aux conditions assurant l'existence de solutions, une condition supplémentaire dite, condition de tangence ou condition tangencielle. Nous adoptons dans ce travail la condition de tangence suivante

$$F(x)T_C(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in C. \text{ p.p. sur } [0, +\infty[, \tag{6}$$

où

$$T_C(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^m ; \liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} d(x + hv, C) = 0 \right\}.$$

Le présent travail regroupe quatre chapitres : afin de bien comprendre l'univers dans lequel nous travaillons, le premier chapitre est consacré aux outils et notions de base de l'analyse multivoque, sous différentiablité de fonctions, ainsi que quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle qui nous serviront tout au long de ce travail. Une grande partie de ce chapitre sera dédiée aux fonctions primal lower nice qui nous intéressent pour élaborer les travaux de cette thèse. Le deuxième chapitre concerne le processus de rafle non convexe du second ordre dépendant de l'état avec une perturbation retardée. Nous y présentons un résultat d'existence de solutions pour le problème (4) en le ramenant à un problème sans retard et en appliquant un résultat récent de Castaing, Ibrahim et Yarou [27]. Le but du troisième chapitre est de résoudre le problème (5) pour F contenue dans le sous différentiel d'une fonction semi-continue inférieurement pln, ces fonctions sont, dans l'absence de la convexité, un outil puissant pour nos résultats. Nous prouvons dans un premier temps le problème en dimension finie, en utilisant une méthode de discrétisation pour construire les solutions approchées, le théorème d'Ascoli-Arzelà, et un théorème de fermeture dû à Marcellin [56] pour assurer l'existence de la solution. Dans la deuxième partie nous étendons ce résultat à un espace de dimension infinie. Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article paru dans EJDE [44]. Dans le dernier chapitre, nous présentons deux résultats d'existence de solutions viables pour le problème (5) sans perturbation ($h \equiv 0$). Nous établissons un résultat d'existence pour le problème autonome (dépendant seulement de l'état), puis nous résolvons le problème non-autonome (dépendant du temps et de l'état) en le ramenant à un problème autonome et en développant la même technique de Cernea [32] pour le cas convexe au cas pln.

CHAPITRE 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Pour élaborer notre travail, il est indispensable d'introduire tous les outils et notions de base nécessaires dans les chapitres suivants. Nous rappelons quelques définitions et outils de l'analyse convexe et non convexe. Ils seront fréquemmet utilisés tout au long de ce travail. De plus, nous donnerons quelques propriétés de l'analyse multivoque. Cette théorie nous servira, d'une part, à bien comprendre la nature du sous différentiel d'une fonction, et d'autre part, elle constituera la base de la théorie des inclusions différentielles.

Dans tout ce qui suit H est un espace de Hilbert en général séparable, muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$, et de la norme associée $\|.\|$

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{R}^n$	ensemble des vecteurs de dimension n, à coordonnées réelles.
Δ_n	simplexe de $\mathbb{R}^n$.
E'	dual topologique d'un espace vectoriel normé E.
$co(A)$	enveloppe convexe d'un sous ensemble A.
$\overline{co}(A)$	enveloppe convexe fermée de A.
$int(A)$	intérieur de A.
$epi\, f$	épigraphe de f.
$\delta(\cdot, C)$	fonction indicatrice de C.
$proj(\cdot, C)$	projection sur l'ensemble C.
$d(\cdot, C)$	fonction distance à C.
$\delta^*(\cdot, C)$	fonction support de C.
$B(x_0, r)/\overline{B}(x_0, r)$	boule ouverte/fermée de centre x_0 et de rayon r.
$\sigma(E, E')$	topologie faible.
$\rightharpoonup$	convergence faible.
$\sigma(E', E)$	topologie faible $*$.
$f'(x_0, v)$	dérivée directionnelle de f.
$f^\circ(x_0, v)$	dérivée directionnelle généralisée de f.
$e(A, B)$	excès de A sur B.
$\mathcal{H}(A, B)$	distance de Hausdorff entre A et B.
$\mathcal{C}(X, Y)$	espace des fonctions continues définies sur X à valeurs dans Y.

$L^1([0,T], H)$	espace des applications intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.
$L^\infty([0,T], H)$	espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.
$L^2([0,T], H)$	espace de Hilbert des applications de carré intégrable définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.
∇f	gradient de f .
∂f	sous différentiel au sens d'analyse convexe.
$\partial^P f$	sous différentiel proximal.
$\partial^F f$	sous différentiel de Fréchet.
$\partial^C f$	sous différentiel généralisé (de Clarke).
$\partial^L f$	sous différentiel Fréchet limite (de Mordukhovich).

Définition 1.0.1. *Si S est un sous ensemble de H,*

1. *La fonction indicatrice de S, notée $\delta(.,S)$ est définie par*
$$\delta(x,S) = \begin{cases} 0 & si\ x \in S, \\ +\infty & ailleurs. \end{cases} \tag{1.1}$$
2. *$\delta^*(.,S)$ est la fonction support de S, ou bien la fonction polaire de $\delta(.,S)$*
$$\delta^*(p,S) = \sup_{s\in S}\langle p,s\rangle, \quad \forall p \in H.$$

Comme nous travaillons dans le cadre de l'analyse multivoque, les images des applications considérées sont des ensembles. Afin d'évaluer le caractère lipschitz et la régularité des applications multivoques, nous avons donc besoin d'une notion de "distance" entre deux ensembles. Une notion de ce type, appelée excès, a été proposée par Pomeiu dans [71]. Nous allons également utiliser la distance de Hausdorff construite à partir de l'excès.

Définition 1.0.2. *Si A et B sont deux ensembles de H, notons par $e(A,B)$ l'excès (ou l'écart) de A sur B défini par*
$$e(A,B) = \sup\{d(a,B),\ a \in A\},$$
où
$$d(a,B) = \inf_{b\in B}\|a-b\|$$
est la fonction distance de a à B.
$\mathcal{H}(A,B)$ désigne la distance de Hausdorff entre A et B, où A et B sont deux ensembles fermés de H,
$\mathcal{H} : f(H) \times f(H) \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$\mathcal{H}(A,B) = \max(e(A,B), e(B,A)),$$
où $f(H)$ désigne l'ensemble des parties non vides fermées de H.

Définition 1.0.3.
1. *Soit S un sous ensemble convexe fermé de H, la distance du point x à l'ensemble S est donnée par :*
$$d(x,S) = \inf_{s\in S}\|x-s\|.$$
2. *La projection sur S est définie par*
$$\begin{aligned} y = proj(u,S) &\Leftrightarrow y \in S,\ et\ \|u-y\| = \inf_{z\in S}\|u-z\| \\ &\Leftrightarrow y \in S : \|u-y\| = d(u,S). \end{aligned}$$
est caractérisée par
$$y = proj(x,S) \Leftrightarrow y \in S\ et\ \forall z \in S,\ \langle x-y, y-z\rangle \geq 0.$$

3. *Le cône normal à S en y est défini comme suit*

$$\begin{aligned} z \in N_S(y) \quad &\Leftrightarrow \quad y \in S \ \textit{et} \ \langle z, y\rangle = \delta^*(z, S) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in S \ \textit{et} \ z \in \partial\delta(y, S), \end{aligned}$$

où ∂f désigne le sous différentiel de f au sens d'analyse convexe

$$\partial f(x) = \{y \in H : \forall z \in H, \ f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle\}.$$

Chaque élément de $\partial f(x)$ est appelé ***un sous gradient*** *de f en x.*

4. $$\partial f(x) = \{y \in H : f'(x, v) \geq \langle y, v\rangle, \ \forall v \in H\},$$

où $f'(x, v)$ désigne la ***dérivée directionnelle*** *de f au point x dans la direction v*

$$f'(x, v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \inf_{t>0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

quand elle existe.

5. *Pour tout convexe fermé $S \subset H$, et $x \in S$ on a*

$$N_S(x) = \{y \in H, \langle y, z - x\rangle \leq 0, \ \forall z \in S\}.$$

6. $$y = proj(x, S) \Leftrightarrow x - y \in N_S(y).$$

On a toujours $0 \in N_S(x)$, $N_{\{x\}}(x) = H$, $N_S(x) = \{0\}$ pour tout $x \in S$, si $intS \neq \emptyset$.

Définition 1.0.4 (Semi-continuité inférieure). *Soient (E, τ) un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.) en $x_0 \in E$ si pour tout λ réel tel que $f(x_0) > \lambda$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) > \lambda$ pour tout $x \in U$.*

Définition 1.0.5. *Soit E un espace normé. Une fonction $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieurement en x_0 si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x_0 on a*

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Définition 1.0.6. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, l'épigraphe de f noté $epi(f)$ est le sous ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par*

$$epi(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \ : \ t \geq f(x)\}.$$

1.1 Eléments d'analyse multivoque

Définition 1.1.1. *Soient T et X deux ensembles non vides, on appelle multifonction ou multi-application de T dans X toute fonction définie de T dans $\mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X), et on note $F : T \rightharpoondown X$, $F : T \to \mathcal{P}(X)$, $F : T \to 2^X$ ou $F : T \rightrightarrows X$.*

- *On appelle domaine (effectif) de la multifonction $F : T \rightharpoondown X$ et on note $domF$ l'ensemble défini par*
$$domF = \{t \in T; F(t) \neq \emptyset\}.$$
- *On appelle image de F et on note ImF l'ensemble*
$$ImF = \{x \in X; \exists t \in T; x \in F(t)\} = \underset{t\in domF}{\cup} F(t).$$
- *On appelle graphe de F et on note, $gphF$ l'ensemble*
$$gphF = \{(t, x) \in T \times X, t \in T, x \in F(t)\}.$$
- *On appelle sélection de F toute application $f : T \to X$ vérifiant*
$$f(t) \in F(t), \forall t \in T.$$
(f est univoque).

Définition 1.1.2 (Opérateur monotone). *Un opérateur multivoque $A : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ est dit monotone si*
$\forall x_1, x_2 \in dom(A),\ \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$, *ou plus précisément*
$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2,\ \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

Proposition 1.1.1. *[22] Soit f une fonction convexe propre sur H. Alors le sous-différentiel de f est un opérateur monotone.*

Définition 1.1.3 (Opérateur maximal monotone). *Voir [22] Un opérateur de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*

Proposition 1.1.2. *[22] Soit f une fonction convexe propre sur H. Si f est semi-continue inférieurement alors le sous-différentiel de f est maximal monotone.*

Définition 1.1.4. *Soit (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique, $F : T \rightharpoondown X$ une multifonction, on dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X, $F^{-1}(V) \in \Sigma$.*
$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t)V \neq \emptyset\}.$$

Théorème 1.1.3. *[30] Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré, avec μ $\sigma-$finie, X un espace de Banach séparable, supposons que Σ est complète ($\Sigma = \Sigma_\mu$). (Σ_μ est la tribu complète de Σ par rapport à μ) donnée par*

$$\Sigma_\mu = [\Sigma \cup N] = \{A \cup \mathcal{N} : A \in \Sigma \ et \ \mathcal{N} \in N\},$$

$$N = \{s \in \mathcal{P}(T)/\exists B \in \Sigma : s \subset B \ et \ \mu(B) = 0.$$

Soit $F : T \rightharpoonup X$ une multifonction à valeurs fermées, alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. *$F^{-1}(V) \in \Sigma$ pour tout ouvert V de X ;*
2. *Pour tout $x \in X$, la fonction distance, définie par*

$$\begin{array}{rcl} g_x : T & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & g_x(t) = d(x, F(t)); \end{array}$$

   est mesurable.
3. *il existe une suite $(\sigma_n)_n$ de sélections mesurables de F telle que*

$$\forall t \in T, F(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n \in \mathbb{N}};$$

4. *$gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ ($\mathcal{B}(X)$ est la tribu de Borel, i.e. la plus petite tribu contenant la topologie de X) ;*
5. *$F^{-1}(B) \in \Sigma$ pour tout borélien B de X ;*
6. *$F^{-1}(C) \in \Sigma$ pour tout fermé C de X.*

Proposition 1.1.4. *[30] Soient E un espace de Souslin localement convexe, $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, Γ une multifonction définie sur T à valeurs convexes fermées localement faiblement compactes dans E, Σ définie de T à valeurs convexes fermées dans E. Si*

$$\forall x' \in E', \delta^*(x', \Sigma(t)) \le \delta^*(x', \Gamma(t))$$

μ presque partout, alors

$$\Sigma(t) \subset \Gamma(t).$$

Rappelons qu'un espace de Souslin X est un espace topologique de Hausdorff tel qu'il existe un espace polonais Y et une application continue de Y vers X. Un espace topologique (Y, τ) est un espace polonais si τ est métrisable par une métrique d telle que (Y, d) est un espace métrique complet séparable. Tout espace de Banach séparable de dimension quelconque est un espace de Souslin.

Définition 1.1.5. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \multimap Y$ une multifonction.*

- *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x \in domF$, si pour tout ouvert O contenant $F(x)$, il existe un voisinage V de x tel que $F(V) \subset O$.*
- *On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert O de X vérifiant $F(x_0)O \neq \emptyset$, il existe un voisinage V de x_0 tel que*

$$F(z)O \neq \emptyset \;\; \forall z \in V.$$

- *Soit E un espace de Hausdorff localement convexe, et $F : X \multimap E$ une multifonction à valeurs non vides convexes faiblement compactes. On dira que F est hemi-continue supérieurement en x_0 ou bien qu'elle est scalairement semi-continue supérieurement en x_0 si pour tout $p \in E'$, $\delta^*(F(x), p)$ est semi-continue supérieurement en x_0. Toute multifonction semi continue supérieurement F de X à valeurs dans Y muni de la topologie faible est hemi-continue supérieurement et si F est à valeurs convexes faiblement compactes, on a équivalence (voir [3]).*

Théorème 1.1.5. *Soit $F : X \multimap Y$ une multifonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *F est semi-continue supérieurement sur X ;*
2. *l'ensemble $F_+^{-1}(O) = \{x \in X : F(X) \subset O\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert O de Y ;*
3. *l'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : f(x)M \neq \emptyset\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y.*

Proposition 1.1.6. *[3] Soit $F : X \multimap Y$ une multifonction à valeurs compactes semi-continue supérieurement sur X. Alors pour chaque ensemble compact $K \subset X$, l'image $F(K) = \underset{x \in K}{\cup} F(x)$ est compacte dans Y.*

Théorème 1.1.7. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \multimap Y$ une multifonction à valeurs compactes, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \to x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous suite (y_m) de (y_n) telle que*

$$\lim_{m \to \infty} y_m \in F(x).$$

Théorème 1.1.8. *Soit $F : X \multimap Y$ une multifonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *F est semi-continue inférieurement sur X ;*

2. *l'ensemble* $F_+^{-1}(M) = \{x \in X : F(X) \subset M\}$ *est un fermé de* X *pour tout fermé* M *de* Y *;*
3. *l'ensemble* $F^{-1}(O) = \{x \in X : f(x)O \neq \emptyset\}$ *est un ouvert de* X *pour tout ouvert* O *de* Y*.*

En outre, si X *et* Y *sont des espaces métriques, alors : F est s.c.i, si et seulement si pour tout* $z \in Y$*, la fonction distance* $x \to d(z, F(x))$ *est semi-continue supérieurement de* X *dans* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 1.1.9. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* $F : X \rightharpoondown Y$ *une multifonction, alors* F *est semi-continue inférieurement si et seulement si pour toute suite* (x_n) *qui converge vers* x *et tout* $y \in F(x)$*, il existe une suite* (y_n) *de* Y *qui converge vers* y *et tel que* $y_n \in F(x_n)$*.*

Nous aurons besoin dans notre travail d'un résultat de fermeture.

Théorème 1.1.10. *[3] Soit* F *une multifonction scalairement semi-continue supérieurement définie sur un espace de Hausdorff localement convexe* X *à valeurs fermées convexes dans un espace de Banach* Y*. Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $x_k(.)$*, et* $y_k(.)$ *des fonctions mesurables de* I *dans* X *(respectivement* Y*) vérifiant :*
pour presque tout $t \in I$*, et tout voisinage* V *de* 0 *dans* $X \times Y$*, il existe* $k_0 = k_0(t, V)$ *:*

$$\forall k \geq k_0,\ (x_k(t), y_k(t)) \in gph(F) + V.$$

Si

1. $x_k(.)$ *converge p.p. vers une fonction* $x(.)$ *;*
2. $y_k(.) \in L^1(I, Y)$ *et converge faiblement vers* $Y(.)$ *dans* $L^1(I, Y)$ *;*

alors

$$(x(t), y(t)) \in gph(F),\ i.e.\ y(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in I.$$

Voici un autre résultat classique de fermeture.

Théorème 1.1.11. *[30] Soient* X *un espace topologique,* Y *un espace de Hausdorff localement convexe et* F *une multifonction définie sur* $[0, T] \times X$ *à valeurs non vides convexes compactes dans* Y *telle que* $\forall t \in [0, T],\ F(t, .)$ *est semi-continue supérieurement. Soient* $x_k,\ x$ *des fonctions de* $[0, T]$ *dans* X *et* $y_k,\ y$ *des fonctions scalairement intégrables de* $[0, T]$ *dans* Y *vérifiant :*

1. *Il existe une suite* (e'_k) *dans* Y' *qui sépare les points de* Y*,*
2. $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$*,*
3. *pour tout* y' *fixé dans* Y'*,* $\langle y', y_k(.)\rangle$ *converge vers* $\langle y', y(.)\rangle$ *pour la topologie faible* $\sigma(L^1([0, T], Y), L^\infty([0, T], Y))$*,*
4. $y_k(t) \in F(t, x_k(t))$ *p.p.*
   alors

$$y(t) \in F(t, x(t)).$$

Pour plus de détails sur les multifonctions, nous renvoyons le lecteur aux références [3, 30, 53].

1.2 Quelques résultats classiques

Théorème 1.2.1. *[21] Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Soit (x_n) une suite dans E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et*

$$\limsup_n \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Alors $x_n \to x$ fortement.

Rappelons qu'un espace de Banach E est dit **uniformément convexe** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$(x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| > \varepsilon) \Leftrightarrow (\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta).$$

On notera que cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité (qui doit être bien ronde) et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente. On a le théorème

Théorème 1.2.2. ***(Milman-Pettis)***
Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Définition 1.2.1. *Une suite $(f_n)_n$ définie sur un sous intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est équicontinue si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : |s - t| \leq \eta \Rightarrow \|f_k(t) - f_k(s)\| \leq \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.2.2. *Soient E un espace vectoriel et A un sous ensemble de E. Alors*

$$co(A) = \{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i / \ k \in \mathbb{N}, (\lambda_i) \in \Delta_{k+1},\ x_i \in A,\ \forall i = 1, ..., k+1\},$$

où

$$\Delta_{k+1} = \{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : \lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.2.3. ***(Fonction absolument continue)***
Soit H un espace de Hilbert, une fonction $u : I \to H$ est dite absolument continue si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de sous intervalles de I (intervalle de $\mathbb{R}$) d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \|u(a_n) - u(b_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.3. *1. Soit $u : I \to H$ telle que $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds$ avec $v(.) \in L^1(I, H)$, t_0, $t \in I$, alors $u(.)$ est absolument continue sur I et $u'(t) = v(t)$ pour presque tout $t \in I$.*

2. Etant donné une application absolument continue $u : I \to H$, alors il existe une application $v : I \to H$ telle que

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds \text{ pour tous } t_0, t \in I,$$

de plus, $u(.)$ est presque partout dérivable et $u'(.) = v(.)$.

Définition 1.2.4. *Soient E un espace de Banach, et $f : [0, T] \to E$ une fonction. On appelle variation totale de f sur $[0, T]$, l'expression*

$$Var(f, [0, T]) = \sup(\sum_{k=1}^{n} \|f(a_k) - f(a_{k+1})\|)$$

pour toute subdivision : $0 = a_0, a_1, ..., a_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$.
Si $Var(f, [0, T]) < +\infty$, on dit que f est à variation bornée. On note par $VB([0, T], E)$ l'espace des fonctions à variation bornée définies sur $[0, T]$ à valeurs dans E.
On note par Df la mesure différentielle de f telle que

$$\forall [a, b] \subset [0, T],\ Df([a, b]) = f^+(b) - f^-(a)$$

$f^+(t)$ (resp. $f^-(t)$) la dérivée à droite (resp. à gauche).

Soit η une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ et $L^1_E(I, \eta)$ l'espace de Banach des fonctions η-intégrables définies sur l'intervalle I à valeurs dans E. Enonçons par la suite quelques résultats de compacité qui nous seront très utiles dans la démonstration des résultats principaux de notre thèse.

Théorème 1.2.4. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)****[40] Soient J un espace métrique compact, (Y, d) un espace métrique complet, et K un sous ensemble de $\mathcal{C}(J, Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors K est relativement compact si et seulement si K est équicontinu et $K(x)$ est relativement compact, avec*

$$K(x) = \{f(x) : f \in K\}.$$

Théorème 1.2.5. ***(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)****[40] Soient J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E vérifiant les conditions suivantes :*

1. $\forall t \in J$, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact dans E ;

2. *il existe une fonction à valeurs réelles positives* $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telle que*

$$\|f_n'(t)\| \leq h(t), \text{ p.p. sur } J;$$

alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ *qui converge vers une fonction absolument continue* $f : J \to E$ *au sens suivant :*

– $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *;*

– $(f_n')_n$ *converge faiblement vers* f' *dans* $L^1(J, E)$.

Théorème 1.2.6. ***(Théorème d'Eberlein-Smulian)***
Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. S *est faiblement (relativement) séquentiellement compact,*
2. S *est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.2.7. ***Théorème de Smulian***
Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach. Si* S *est relativement faiblement compact, alors pour chaque* $x \in \overline{S}^w$ *(fermeture faible de* S*) il existe une suite* (x_n) *d'éléments de* S *convergeant faiblement vers* x.

Théorème 1.2.8. ***(Théorème de Banach-Mazur)*** *Soit* (x_n) *une suite d'éléments d'un espace de Banach* E *convergeant faiblement vers* x*. Alors il existe une suite* (z_n) *(où* z_n *est une combinaison convexe des éléments* $x_n,\ x_{n+1}, ...$*) convergeant fortement vers* x.

1.3 Processus de rafle

Le processus de **rafle** est une inclusion différentielle de la forme

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)), \text{ p.p. sur } [0, T]; \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{1.2}$$

où $C(t)$ est un ensemble non vide convexe fermé, $N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal de Clarke à $C(t)$ en $u(t)$. Les premiers travaux concernant ce type de problèmes ont été entrepris dans les années 70 par J.J-Moreau, pour la modélisation d'un certain nombre de situations pratiques en mécanique comme l'écoulement d'eau dans une cavité, dynamique des systèmes avec contrainte unilatérale, plasticité et évolution des systèmes élastoplastiques : dans ce dernier cas le point u représente non pas une configuration du système mécanique étudié, mais en un sens généralisé, une force. L'ensemble $C(t)$ dérive de la loi de plasticité du système, la convexité de cet ensemble a une signification mécanique profonde et n'est pas seulement motivée par la commodité mathématique, la structure hilbertienne de H pour sa part, est liée à la loi d'élasticité du système. Intuitivement, on peut définir le processus de rafle comme suit : un ensemble convexe fermé mobile d'un espace de Hilbert varie avec le temps. A l'instant initial, un point $u_0 \in C(0)$, au cours du temps ce point est éventuellement poussé par le bord de $C(t)$ dans la direction de la normale rentrante et reste dans $C(t)$, c'est à dire le point mobile reste fixe dans H tant qu'il est interne à $C(t)$, lorsque u est rejoint par la frontière de cet ensemble, il est poussé par cette frontière dans la direction de la normale rentrante de manière à rester dans $C(t)$ pour tout t.

1.4 Inclusions différentielles avec retard

Les inclusions différentielles avec retard sont des équations différentielles multivoques où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Si une inclusion différentielle exprime qu' à tout instant la vélocité du système dépend de son état à tout instant, les inclusions différentielles avec retard expriment que la vélocité dépend non seulement de l'état du système à cet instant, mais aussi de l'histoire de la trajectoire jusqu'à cet instant. Pour formaliser ce concept, on introduit pour tout $T > 0$ et $\tau > 0$, l'espace de Banach $\mathcal{C}_T := \mathcal{C}([-\tau, T], H)$ (resp. $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}([-\tau, 0], H)$) des fonctions continues de $[-\tau, T]$(resp. $[-\tau, 0]$) dans l'espace de Hilbert H, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts.

$$\|\phi\|_T = \max\{\|\phi(s)\|, s \in [-\tau, T]\};$$

respectivement

$$\|\phi\|_0 = \max\{\|\phi(s)\|, s \in [-\tau, 0]\}.$$

Si $u : [-\tau, T] \to H$, alors pour chaque $t \in I := [0, T]$, on définit la fonction

$$u_t(s) = \mathcal{T}(t)u(s) = u(t+s), s \in [-\tau, 0];$$

il est évident que, si $u \in \mathcal{C}_T$, alors $u_t \in \mathcal{C}_0$, et l'application $u \to u_t$ est continue au sens de la convergence uniforme.

Ce genre de problèmes se rencontrent en théorie de contrôle optimal, dans les problèmes de collision, en électrodynamique, ainsi que dans les procédures de planning en microéconomie et dans les problèmes d'évolution biologiques.

Avant de présenter les fonctions primal lower nice, et les différentes propriétés relatives à ces fonctions, nous allons rappeler les définitions de quelques types de sous-différentiel qui ont permis de généraliser la notion de sous-différentiabilité aux fonctions non convexes et qui nous seront utiles pour la suite.

1.5 Sous-différentiabilité des fonctions

Définition 1.5.1. *Le sous différentiel **proximal** d'une fonction f au point x, noté $\partial^P f(x)$, est l'ensemble de tout les $\xi \in H$, pour lesquels il existe $\delta,\ \sigma > 0$ tels que pour tout $x' \in \overline{B}(\overline{x}, \delta)$, on a*

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) + \sigma \|x' - x\|^2.$$

Ainsi le sous différentiel proximal de la fonction distance s'écrit

$$\partial^P d(x, S) = \{y \in H : \exists \delta,\ \sigma > 0 : \forall x' \in \overline{B}(\overline{x}, \delta),\ \langle y, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2 + d(x', S) - d(x, S)\}.$$

Définition 1.5.2. *Le sous différentiel de **Fréchet** $\partial^F f(\overline{x})$ de f en $\overline{x}$ est défini par :*
$v \in \partial^F f(\overline{x})$ si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\overline{x}, \eta)$,

$$\langle v, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon \left\| x - \overline{x} \right\|.$$

*Le sous différentiel de **Clarke** d'une fonction s.c.i f en $\overline{x}$ est l'ensemble*

$$\partial^C f(\overline{x}) \quad := \quad \left\{ v \in H : f^{\uparrow}(\overline{x}; y) \geq \langle v, y \rangle\,,\ \forall y \in H \right\}$$

où $f^{\uparrow}(\overline{x}; y)$ est la dérivée généralisée de Rockafellar définie par

$$f^{\uparrow}(\overline{x}; y) \quad = \quad \limsup_{\substack{x \xrightarrow{f} \overline{x} \\ t \to 0^+}} \inf_{y' \to y} t^{-1}[f(x + ty') - f(x)],$$

où $x \xrightarrow{f} \overline{x}$ veut dire $x \to \overline{x}$ et $f(x) \to f(\overline{x})$. Quand f est localement lipschitzienne, la dérivée généralisée de Rockafellar $f^{\uparrow}(\overline{x}; y)$ coïncide avec la dérivée directionnelle de Clarke $f^0(\overline{x}, y)$ définie par

$$f^0(\overline{x}, y) = \lim_{x \longrightarrow \overline{x}} \sup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + ty) - V(x)}{t}.$$

Si $x \notin domf$, $\partial^C f(x) := \emptyset$.
Le sous différentiel de Mordukhovich (Le sous différentiel Fréchet limite) de f en $\bar{x}$ est donné par

$$\partial^L f(\bar{x}) := \{v \in H / \exists x_n \rightharpoonup \bar{x},\ avec\ v_n \in \partial^F f(x_n),\ x_n \xrightarrow{f} \bar{x}\},$$

où $x_n \xrightarrow{f} \bar{x}$ veut dire $\|x_n - \bar{x}\| \to 0$ avec $f(x_n) \to f(\bar{x})$.
Si f est convexe semi-continue inférieurement, on a

$$\partial^P f = \partial^F f = \partial^L f = \partial^C f = \partial f.$$

On note par ∂f l'opérateur différentiel au sens d'analyse convexe.

Définition 1.5.3. *Soient S un ensemble fermé non vide de H, et $x \in S$. On définit le cône normal proximal de S en x par*

$$\begin{aligned} N_S^P(x) &= \{\xi \in H : \exists \alpha > 0; x \in proj(x + \alpha\xi, S)\} \\ &= \{\xi \in H : \exists \alpha > 0; d(x + \alpha\xi, S) = \alpha\|\xi\|\}, \end{aligned}$$

où

$$proj(u, S) = \{y \in S : d(u, S) = \|u - y\|\}.$$

1.6 Fonctions primal lower nice (pln)

Afin de bien comprendre l'univers dans lequel nous travaillons, cette section est consacrée aux fonctions qui nous intéressent dans ces travaux, à savoir les fonctions primal lower nice. Nous y détaillons les définitions de base, des exemples de ces fonctions, ainsi que leurs propriétés d'intégration, et de régularité. Dans un but de clarté, on a jugé utile de démontrer certains résultats concernant ce concept. Pour plus de détails sur cette section, le lecteur pourra consulter la référence [67].

1.6.1 Généralités sur les fonctions pln

Commençons d'abord par définir ce qu'est une fonction pln.

Définition 1.6.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et soit $x_0 \in domf$. La fonction f est dite primal lower nice (pln en abrégé) en x_0, s'il existe des nombres réels positifs s_0, c_0, Q_0 tels que pour tout $x \in \overline{B}(x_0, s_0)$, $q \geq Q_0$ et $v \in \partial^P f(x)$ vérifiant $\|v\| \leq c_0 q$, on ait*

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle - \frac{q}{2}\|y - x\|^2 \text{ pour } y \in \overline{B}(x_0, s_0).$$

Remarque 1.6.1. *1. Toute fonction convexe est pln en tout point de son domaine.*

2. Toute fonction convexe à un carré près, i.e. les fonctions f telles que $f(.) + C\|.\|^2$ soit convexe pour un certain $C > 0$.

3. *Il est clair que, si f est pln en x_0 de constantes s_0, c_0, Q_0, on ait*

$$\langle v_1 - v_2,\ x_1 - x_2\rangle \geq -q\,\|x_1 - x_2\|^2,$$

$\forall q \geq Q_0,\ x_i \in \overline{B}(x_0, s_0),\ y_i \in \partial^P f(x_i)$ *et* $\|y_i\| \leq c_0,\ i = 1, 2.$

4. *Si f est pln en $x_0 \in domf$, donc pour tout x dans un voisinage de x_0, le sous différentiel de f en x coïncide avec le sous différentiel de Clarke de f en x, c'est à dire $\partial^P f(x) = \partial^F f(x) = \partial^L f(x) = \partial^C f(x)$, et on note, dans ce cas, par $\partial f(x)$ pour le sous différentiel commun, et par $\partial^0 f(x)$ son élément de norme minimale pour $x \in domf$ $(d(x) = \|\partial^0 f(x)\|$ et $d(x) := d(0, \partial f(x))$.*

Définition 1.6.2. *Soient $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction convexe propre s.c.i et $\bar{x} \in dom(g \circ F)$. On dit que la qualification de la contrainte de base (q.c.b) est vérifiée en $\bar{x}$ s'il n'existe aucun vecteur y dans $N_{domg}(F(\bar{x}))$ avec $y \neq 0$, et $y\nabla F(\bar{x}) = 0$, (ici y est un vecteur ligne et $\nabla F(\bar{x})$ est la matrice des dérivées partielles).*

Le théorème suivant dû à Poliquin [67] donne un exemple de fonctions pln construit en composant une fonction convexe s.c.i et une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 1.6.1. *Si $f = g(F(.))$ où $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une fonction convexe propre s.c.i, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^2$, $\bar{x} \in domf$ vérifiant la (q.c.b), alors f est pln en $\bar{x}$.*

On aura besoin, pour la démonstration des deux lemmes auxiliaires suivants :

Lemme 1.6.2. *Si X est un ensemble compact, alors il existe $\sigma > 0$, $x_i \in X$, $v_i \in \partial g(F(x_i))$, avec $\|v_i\| \leq \sigma t$, $i = 1, 2$, tels que*

$$\langle v_1 \nabla F(x_1) - v_2 \nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq -t\|x_1 - x_2\|^2.$$

Lemme 1.6.3. *Si la (q.c.b) est vérifiée en $\bar{x}$, donc pour tout $\sigma > 0$, il existe $c > 0$, $T > 0$ et $\Im$ un voisinage de $\bar{x}$, tel que si $t \geq T$, $x \in \Im$, $v \in \partial g(F(x))$ et $\|v\nabla F(x)\| \leq ct$, donc $\|v\| \leq \sigma t$.*

Preuve. du Lemme 1.6.2 : Supposons que $x_1 \neq x_2$. Soit $F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_m(x))$ et $F_{ij}(x) = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j})(x)$, $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$. Soit M le maximum de $\|\nabla F_{ij}(x)\|$ pour tous $x \in coX$, $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$, i.e.

$$M = \max_{\substack{x \in coX \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \|\nabla F_{ij}(x)\|.$$

Nous allons démontrer l'inégalité suivante

$$\frac{\langle v_1 \nabla F(x_1) - v_1 \nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \geq -Mmn^2\{\|v_1\| + \|v_1 - v_2\|\}.$$

Pour ce faire, on aura besoin de démontrer les deux inégalités suivantes :

$$\frac{\langle v_1\nabla F(x_1) - v_1\nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \geq -Mmn^2\|v_1\|. \tag{1.3}$$

$$\frac{\langle v_1\nabla F(x_2) - v_2\nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \geq -Mmn^2\|v_1 - v_2\|. \tag{1.4}$$

■

Preuve. de l'inégalité (1.3) :

$$\begin{aligned}
\frac{\langle v_1\nabla F(x_1) - v_1\nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} &= \sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\frac{\langle \nabla F_i(x_1) - \nabla F_i(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2}\\
&= \sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\sum_{j=1}^{n}\frac{(F_{ij}(x_1) - F_{ij}(x_2))(x_1 - x_2)_j}{\|x_1 - x_2\|^2}\\
&= \sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\langle \nabla F_{ij}(c_{ij}), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \quad (c_{ij} \in [x_1, x_2])\\
&= \sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\nabla F_{ij}(c_{ij}))_k(x_1 - x_2)_k(x_1 - x_2)_j}{\|x_1 - x_2\|^2}\\
&\geq -\sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\nabla F_{ij}(c_{ij}))_k\\
&\geq -\sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\nabla F_{ij}(c_{ij})\|\\
&\geq -\sum_{i=1}^{m}(v_1)_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\max_{\substack{x\in co(X)\\ 1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\|\nabla F_{ij}(x)\|\\
&\geq -\|v_1\|M\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}1\\
&\geq -\|v_1\|Mmn^2,
\end{aligned}$$

On sait que $|(x_1 - x_2)_k| \leq \|x_1 - x_2\|$ et $|(x_1 - x_2)_j| \leq \|x_1 - x_2\|$. Donc pour $k = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$

$$\frac{(x_1 - x_2)_k(x_1 - x_2)_j}{\|x_1 - x_2\|^2} \in [-1, 1].$$

Et on a

$$\left|(\nabla F_{ij}(c_{ij}))_k\right| \leq \|\nabla F_{ij}(c_{ij})\| \text{ et } |(v_1)_i| \leq \|v_1\|.$$

Ce qui termine la démonstration de l'inégalité (1.3).

■

Preuve. de l'inégalité (1.4) : On a $v_i \in \partial g(F(x_i))$, $\langle v_1 - v_2, F(x_1) - F(x_2)\rangle \geq 0$. Par conséquent,

$$\frac{\langle v_1 - v_2, F(x_1) - F(x_2) + \nabla F(x_2)(x_1 - x_2) - \nabla F(x_2)(x_1 - x_2)\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle v_1 - v_2, \nabla F(x_2)(x_1 - x_2))\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} &\geq \frac{-\langle v_1 - v_2, F(x_1) - F(x_2) - \nabla F(x_2)(x_1 - x_2)\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \frac{(v_1 - v_2)_i(F_i(x_1) - F_i(x_2) - \nabla F_i(x_2)(x_1 - x_2))}{\|x_1 - x_2\|^2} \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \frac{(v_1 - v_2)_i \langle \nabla F_i(c_i) - \nabla F_i(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \quad (c_i \in [x_1, x_2]) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} (v_1 - v_2)_i \sum_{j=1}^{n} \frac{(\nabla F_{ij}(c_i) - \nabla F_{ij}(x_2))_j (x_1 - x_2)_j}{\|x_1 - x_2\|^2} \\
&= -\sum_{i=1}^{m} (v_1 - v_2)_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle \nabla F_{ij}(d_{ij}), (c_i - x_2)\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \quad (d_{ij} \in [x_1, x_2]) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} (v_1 - v_2)_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\nabla F_{ij}(d_{ij}))_k (c_i - x_2)_k (x_1 - x_2)_j}{\|x_1 - x_2\|^2} \\
&\geq -\sum_{i=1}^{m} (v_1 - v_2)_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\nabla F_{ij}(d_{ij}))_k \\
&\geq -\sum_{i=1}^{m} (v_1 - v_2)_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|\nabla F_{ij}(d_{ij})\| \\
&\geq -\sum_{i=1}^{m} (v_1 - v_2)_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \max_{\substack{x \in co(X) \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \|\nabla F_{ij}(x)\| \\
&\geq -\|v_1 - v_2\| M \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&\geq -\|v_1 - v_2\| M m n^2,
\end{aligned}$$

On sait que $|(c_i - x_2)_k| \leq \|c_i - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. Donc pour $k = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$

$$\frac{(c_i - x_2)_k (x_1 - x_2)_j}{\|x_1 - x_2\|^2} \in [-1, 1].$$

Et on a

$$\left|(\nabla F_{ij}(c_{ij}))_k\right| \leq \|\nabla F_{ij}(c_{ij})\| \quad \text{et} \quad |(v_1 - v_2)_i| \leq \|v_1 - v_2\|.$$

Ce qui termine la démonstration de l'inégalité (1.4).

Soit $\sigma = 1/(6Mmn^2)$. Si $\|v_i\| \leq \sigma t$, $\quad i = 1, 2$, alors $\|v_1 - v_2\| \leq \sigma t = 2t/(6Mmn^2)$. Par conséquent, $\|v_1\| + \|v_1 - v_2\| \leq \sigma t = t/(2Mmn^2)$ ce qui implique que

$$2Mmn^2(\|v_1\| + \|v_1 - v_2\|) \leq t.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{\langle v_1\nabla F(x_1) - v_2\nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} & \\
&= \frac{\langle v_1\nabla F(x_1) - v_1\nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \\
&+ \frac{\langle v_1\nabla F(x_2) - v_2\nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|^2} \\
&\geq -2Mmn^2(\|v_1\| + \|v_1 - v_2\|) \geq -t.
\end{aligned}$$

■

Preuve. du Lemme 1.6.3 : Montrons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\sigma > 0,\ c_n \downarrow 0$, $x_n \to \bar{x},\ t_n \to \infty$ et $v_n \in \partial g(F(x_n))$, tels que $\|v_n\nabla F(x_n)\| \leq c_n t_n$ et $\|v_n\| \geq \sigma t_n$. On doit supposer que
$v_n/\|v_n\| \to v$ et $\|v\| = 1$. Il en résulte que

$$\frac{\|v_n\nabla F(x_n)\|}{\|v_n\|} \leq \frac{c_n t_n}{\sigma t_n} = \frac{c_n}{\sigma}.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$v\nabla F(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\|v_n\nabla F(x_n)\|}{\|v_n\|} = 0.$$

Or $v \in N_D(F(\bar{x}))$ (où $D = domg$) et $\|v\| = 1$, ce qui contredit la (q.c.b) au point $\bar{x}$ de X.

■

Définition 1.6.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

– *On définit la* ***fonction quadratique conjuguée*** *comme suit : pour* $w \in \mathbb{R}^n$ *et* $t > 0$ *on a*

$$h_f(w,t) = \max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle w, x\rangle - (\frac{t}{2})\|x\|^2 - f(x)\}.$$

– *On définit la* ***fonction quadratique locale*** *par : pour* $z \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$ *et* $\lambda > 0$ *on a*

$$h_{f,\,t,\,\lambda}(z) = \max_{x\in x+\lambda B}\{\langle tz, x\rangle - (\frac{t}{2})\|x\|^2 - f(x)\}.$$

L'ensemble des points où le maximum est atteint, sera noté par $argmaxh_{t,\,\lambda}(z)$, tel que

$$argmaxh_{t,\,\lambda}(z) = \{x \in \overline{B}(\bar{x}, \lambda) : \langle tz, x\rangle - (\frac{t}{2})\|x\|^2 - f(x) = h_{t,\,\lambda}(z)\}.$$

Les fonctions $h_{t,\,\lambda}$ sont finies et convexes. On peut exprimer le sous différentiel de ces fonctions comme suit :

$$\partial h_{t,\,\lambda}(z) = co\{tx : x \in argmax h_{t,\,\lambda}(z)\}.$$

Pour la démonstration, on se réfère à [36].

Lemme 1.6.4. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *une fonction s.c.i,* $\lambda > 0,\ 0 < 2a < b < 1$ *et* $\bar{x} \in dom\varphi$. *Il existe* $T > 0$*, tel que, si* $t > T$ *et* $z \in \overline{B}(\bar{x}, a\lambda)$*, donc* $\Phi_{t,\lambda}(z)$ *est un sous ensemble de* $\overline{B}(\bar{x}, a\lambda)$*, où*

$$\begin{aligned} \Phi_{t,\lambda}(z) &= \underset{x\in\bar{x}+a\lambda B}{argmax}\{-(\frac{t}{2})\|x-z\|^2 - \varphi(x)\} \\ &= \underset{x\in\bar{x}+a\lambda B}{argmax}\{\langle tz, x\rangle - (\frac{t}{2})\|x\|^2 - \varphi(x)\}. \end{aligned}$$

Preuve. L'égalité entre les deux ensembles *argmax* se démontre comme suit :

$$\begin{aligned} -\frac{t}{2}\|x-z\|^2 - \varphi(x) &= -\frac{t}{2}\langle x-z, x-z\rangle - \varphi(x) \\ &= -\frac{t}{2}\langle x, x\rangle + \frac{t}{2}\langle x, z\rangle + \frac{t}{2}\langle z, x\rangle - \frac{t}{2}\langle z, z\rangle - \varphi(x) \\ &= -\frac{t}{2}\|x\|^2 - \frac{t}{2}\|z\|^2 + \langle tz, x\rangle - \varphi(x). \end{aligned}$$

Soit $\gamma = \underset{\|x-\bar{x}\|\leq\lambda}{min}\{\varphi(x)\}$ et considérons $1 > c > b$. Si $c\lambda \leq \|\widetilde{x} - \bar{x}\| \leq \lambda$ et $\|z - \bar{x}\| \leq a\lambda$, alors $|\widetilde{x} - z\| \geq (c-a)\lambda > (b-a)\lambda$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} -\frac{t}{2}|\widetilde{x} - z\|^2 - \varphi(\widetilde{x}) &\leq \frac{t}{2}|\widetilde{x} - z\|^2 - \gamma \\ &< -\frac{t}{2}(b-a)^2\lambda^2 - \gamma. \end{aligned}$$

Posons

$$T = \frac{2(\varphi\bar{x} - \gamma)}{b(b-2a)}\lambda^2,$$

il est clair que ($T \geq 0,$ *puisque* $\varphi(\bar{x}) \geq \gamma$.

Si $t \geq T$, on a

$$\frac{t\lambda^2((b-a)^2 - a^2)}{2} = \frac{t\lambda^2 b(b-2a)}{2} \geq \varphi(\bar{x}) - \gamma.$$

Par suite,

$$-\frac{t}{2}\lambda^2(b-a)^2 - \gamma \leq -\frac{t}{2}a^2\lambda^2 - \varphi(\bar{x}).$$

D'où

$$\begin{aligned}
-\frac{t}{2}|\widetilde{x}-z\|^2-\varphi(\widetilde{x}) &\leq -\frac{t}{2}|\widetilde{x}-z\|^2-\gamma \\
&< -\frac{t}{2}(b-a)^2\lambda^2-\gamma \\
&\leq -\frac{t}{2}a^2\lambda^2-\varphi(\bar{x}) \\
&\leq -\frac{t}{2}|\bar{x}-z\|^2-\varphi(\bar{x}) \quad (\text{ puisque } |\bar{x}-z\| \leq a\lambda).
\end{aligned}$$

ce qui est vrai pour tout $\widetilde{x}$ vérifiant $c\lambda \leq \|\widetilde{x}-\bar{x}\| \leq \lambda$ et tout $1 > c > b$, on en déduit que $\Phi_{t,\lambda}(z) \subset \overline{B}(\bar{x}, b\lambda.)$

■

Proposition 1.6.5. *[67] Soit f une fonction pln en $\bar{x}$. Il existe $T > 0$, et $\lambda > 0$ tels que : pour tout $t \geq T$, la multifonction $\Gamma_{t,\lambda}(z)$ est univoque et continue sur $\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$ à valeurs dans $\overline{B}(\bar{x}, \frac{3\lambda}{4})$. De plus, si $z \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$ et $x \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{3\lambda}{4})$, avec $y := t(z-x) \in \partial^P f(x)$, alors $t\Gamma_{t,\lambda}(z) = \nabla h_{t,\lambda}(z) = tx$.*

Corollaire 1.6.6. *Soit f une fonction pln en $\bar{x}$. Il existe $T > 0$ et $\lambda > 0$, tels que, pour $x \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{3\lambda}{4})$, $t \geq T$, et $x + \frac{y}{t} \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$ avec $y \in \partial^P f(x)$, alors*

$$f(x') > f(x) + \langle y, x'-x\rangle - (\frac{t}{2})\|x-x'\|^2$$

pour tout x' dans $\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$, $x' \neq x$.

Preuve. Soient $T > 0$ et $\lambda > 0$ donnés par la Proposition 1.6.5. Soit $z = \frac{y}{t} + x$, donc $y = t(z-x)$. On a par hypothèse $z \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$, et d'après la Proposition 1.6.5, on a $\nabla h_{t,\lambda}(z) = tx$. Par conséquent,

$$\langle tz, x'\rangle - (\frac{t}{2})\|x'\|^2 - f(x') < \langle tz, x'\rangle - (\frac{t}{2})\|x\|^2 - f(x)$$

pour tout x' dans $\overline{B}(\bar{x}, \lambda)$, $x' \neq x$.

■

Remarque 1.6.2. *Le résultat précédent a été initialement obtenu par Poliquin [67] dans le cadre d'un espace de dimension finie puis il a été démontré par Thibault et Zagrodny [84] dans un espace de Hilbert, et par Ivanov et Zlateva [51] dans le contexte d'un espace de Banach.*

Corollaire 1.6.7. *L'ensemble $dom\partial^P f = \{x : \partial^P f(x) \neq \emptyset\}$ est dense dans le domaine effectif de f dans le sens : pour tout $\bar{x} \in domf$, il existe $x_n \to \bar{x}$ telle que $f(x_n) \to f(\bar{x})$ et $x_n \in dom\partial^P f$.*

1.6.2 Intégration des fonctions pln

Le théorème suivant affirme que les fonctions pln sont complètement caractérisées par leur sous différentiel proximal c'est à dire si deux fonctions pln en un point x' où elles sont toutes deux finies et possèdent le même sous différentiel proximal sur un voisinage de x', alors ces deux fonctions sont égales à une constante additive près au voisinage de x', ce théorème a été démontré par Poliquin [67] en dimension finie, est un outil très puissant de l'optimisation, il permet d'identifier les fonctions au voisinage d'un point.

Théorème 1.6.8. *Supposons que f_1 et f_2 sont deux fonctions pln en $\bar{x}$, s.c.i et que dans un voisinage de $\bar{x}$ leur sous différentiel proximal coïncide. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que*

$$f_1(x) = f_2(x) + k$$

pour tout x au voisinage de $\bar{x}$.

Les lemmes suivants dus à Poliquin [67] sont utiles pour la démonstration.

Lemme 1.6.9. *Pour $t \geq T$, la fonction $h^i_{t,\lambda}$ définie par*

$$h^i_{t,\lambda}(z) = \max_{x \in (\bar{x}+\lambda\overline{B})} \{\langle tz, x\rangle - (t/2)\|x\|^2 - f_i(x)\}, \quad i = 1, 2,$$

est différentiable sur $\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$ et $\Gamma^1_{t,\lambda}(z) = \Gamma^2_{t,\lambda}(z)$ pour tout $z \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})$ tel que

$$\Gamma^i_{t,\lambda}(z) = argmax h^i_{t,\lambda}(z).$$

Lemme 1.6.10. *Pour tout x dans $[dom\partial^P f_1 int\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})]$ et $y \in \partial^P f_1(x)$, il existe $T_x > 0$, tel que, si $t \geq T_x$, alors*

$$\Gamma^1_{t,\lambda}(z_t) = \Gamma^2_{t,\lambda}(z_t) = \{x\},$$

où $z_t = (y/t) + x$.

Lemme 1.6.11. *Pour tout $x \in [dom\partial^P f_1 int\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})]$, on a*

$$f_1(x) = f_2(x) + k.$$

Preuve. du Théorème 1.6.8 : Comme f_1 et f_2 sont pln en $\bar{x}$, alors il existe $c > 0$, $T_0 > 0$ et $\lambda > 0$ (avec $\lambda < c/2$) tel que pour tous $t \geq T_0$, $x_i \in \overline{B}(\bar{x}, \lambda)$, et $\|y_i\| \leq ct$, $y_i \in \partial^P f(x_i), i = 1, 2$, on a $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq -t\|x_1 - x_2\|^2$, i.e. f_1 et f_2 ont les mêmes constantes.

Montrons que

$$[dom\partial^P f_1 int\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})] = [dom\partial^P f_2 int\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})].$$

D'après le Corollaire 1.6.7, il existe $x_n^1 \subset dom\partial^P f_1$ convergeant vers $\widetilde{x}$, et $f_1(x_n^1)$ converge vers $f_1(\widetilde{x})$. Il s'ensuit que

$$(\widetilde{x}, f_1(\widetilde{x}) - k) \in epi f_2,$$

(puisque, en vertu du Lemme 1.6.11, $f_1(x_n^1) = f_2(x_n^1) + k$ et $\widetilde{x} \in dom f_2$. Donc d'après le Corollaire 1.6.7, il existe x_n^2 convergeant vers $\widetilde{x}$, et $f_2(x_n^2)$ converge vers $f_2(\widetilde{x})$. Il résulte que

$$(\widetilde{x}, f_2(\widetilde{x}) + k) \in epi f_1,$$

(puisque, en vertu du Lemme 1.6.11, $f_1(x_n^2) = f_2(x_n^2) + k$. On a démontré ainsi que

$$f_1(\widetilde{x}) \leq f_2(\widetilde{x}) + k \leq f_1(\widetilde{x}).$$

D'où,

$$[dom\partial^P f_1 int\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})] \subset [dom\partial^P f_2 int\overline{B}(\bar{x}, \frac{\lambda}{4})].$$

En échangeant le rôle de f_1 et f_2, on obtient l'égalité entre les deux ensembles.

$\blacksquare$

CHAPITRE 2

Processus de rafle non convexe du second ordre dépendant de l'état avec perturbation retardée

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude d'un problème d'évolution du second ordre de type

$$\begin{cases} v(t) = b + \int_0^t u(s)\,ds, & \forall t \in [0,T]\,; \\ u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s)\,ds, & \forall t \in [0,T]\,; \\ \text{avec } \dot{u} \in L^\infty([0,T], H) \text{ et } u(t) \in C(t, v(t)), & \forall t \in [0,T]\,; \\ -\dot{u}(t) \in N^P_{C(t,v(t))}(u(t)) + G(t, \mathcal{T}(t)v, \mathcal{T}(t)u) & \text{p.p. sur } [0,T]\,; \\ u(s) = \mathcal{T}(0)u(s) = \psi_0(s), \text{ et } v(s) = \mathcal{T}(0)v(s) = \varphi_0(s) & \forall s \in [-\tau, 0]\,, \end{cases}$$

où $C : [0,T] \times H \rightharpoondown H$ est une multifonction à valeurs non vides fermées uniformément $r - prox$ régulières, et $G : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \rightharpoondown H$ est une multifonction scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes, ce qu'on appelle processus de rafle non convexe du second ordre dépendant de l'état avec perturbation retardée.

Le processus de rafle dépendant de l'état, qui se présente sous la forme

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)),\ u(0) = u_0 \in C(0, u_0)$$

est une généralisation du processus de rafle, ce problème a été étudié pour la modélisation de certains problèmes liés au traitement en 2-D et 3-D des problèmes d'évolution quasistatiques avec

frottement, (voir par exemple [34], [58]) et dans plusieurs modèles de dégâts micro-méchaniques (les modèles de Gurson) des matériaux en fer à mémoire, pour décrire les déformations plastiques en présence de petits dégâts ; cf [23]. Dans le cas convexe, c'est à dire C à valeurs convexes a été initialement étudié par Chraibi [34] puis Kunze et Monteiro marques [54] dans le contexte d'un espace de Hilbert.
Les auteurs dans [33] ont résolu le problème non convexe avec une pertubation. Récemment plusieurs résultats d'existence pour le problème du premier ordre ainsi que le problème du second ordre ont été obtenus par Castaing, Ibrahim and Yarou [27] sous différentes hypothèses. En s'appuyant sur un résultat de ces derniers pour un problème du second ordre sans retard et en faisant appel à une méthode de discrétisation qui permet à se ramener à ce cas, nous allons établir un résultat d'existence pour le problème avec retard.

2.2 Ensembles uniformément $r - prox$-réguliers

La non convexité des valeurs des multifonctions, produit souvent plusieurs difficultés dans l'étude de quelques problèmes d'évolution contenant des cônes, entre autre le processus de rafle. Cette lacune a été comblée par l'introduction de sous ensembles réguliers de telle façon que la projection existe sur des boules de rayon $r > 0$. Cette section est consacrée à l'études de ce type de sous ensembles dit : ensembles uniformément $r - prox$-réguliers.

Définition 2.2.1. *Etant donné un $r \in]0, +\infty]$, un sous ensemble $S \subset H$ est uniformément $r - prox$-régulier si et seulement si pour tout $y \in S$ et tout $\xi \in N_S^P(y)$, $\xi \neq 0$ on a*

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - y\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - y\|^2,$$

pour tout $x \in S$. Par convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$ (dans ce cas, l'uniforme $r-prox$-régularité est équivalente à la convexité de S).

La proposition suivante résume quelques propriétés importantes de ces ensembles.

Proposition 2.2.1. *Soient $r > 0$, et S un sous ensemble non vide fermé uniformément $r-prox$-régulier de H, alors on a :*

1. *$\partial^P d(x, S) = N_S^P(x)\, \overline{B}_H(0, 1)$, et $\partial^P d(x, S)$ est le sous différentiel proximal de la fonction distance $d(., S)$ au point x,*
2. *le sous différentiel proximal $\partial^P d(x, S)$ coïncide avec le sous différentiel de Clarke $\partial^C d(x, S)$ en tout point x de S satisfaisant $d(x, S) < r$,*
3. *la projection $proj(x, S)$ existe et est unique pour tout $x \in H$ avec $d(x, S) < r$),*

4. *soit* $C : [0,T] \times H \rightharpoonup H$ *une multifonction à valeurs non vides fermées uniformément* $r-prox$ *régulières vérifiant*

$$|d\left(u, C\left(t,x\right)\right) - d\left(v, C\left(s,y\right)\right)| \leq \|u-v\| + W\left(t\right) - W\left(s\right) + L\left\|x-y\right\|$$

pour tous u, v, x, y *dans* H *et pour tout* $s \leq t$ *dans* $[0,T]$, *où* $W : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction absolument continue décroissante et* L *est une constante positive. Alors la multifonction* $(t,x,y) \to \partial^P d\left(y, C\left(t,x\right)\right)$ *à valeurs convexes faiblement compactes vérifie la propriété suivante : soit* (t_n, x_n) *une suite de* $[0,T]) \times H$ *convergeant vers* $(t,x) \in [0,T] \times H$, *et* (y_n) *une suite de* H *avec* $y_n \in C(t_n, x_n)$ *convergeant vers* $y \in C(t,x)$, *donc pour tout* $z \in H$,

$$\limsup_n \delta^*\left(z, \partial^P d\left(y_n, C\left(t_n, x_n\right)\right)\right) \leq \delta^*\left(z, d\left(y, C\left(t,x\right)\right)\right).$$

2.3 Résultat principal

Etant donnée une multifonction $C : [0,T] \times H \rightharpoonup H$ à valeurs non vides fermées satisfaisant

$$|d(u, C(t,x)) - d(v, C(s,y))| \leq |u-v| + \Lambda(|t-s| + |x-y|) \tag{2.1}$$

pour tous u, x, v, y dans H et tous s, t dans $[0,T]$, Λ ici est une constante positive. Autrement dit, C est Λ lipschitzienne par rapport à la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$ sur les sous ensembles fermés de H.
Enonçons d'abord le problème sans retard. Ce résultat est un théorème d'existence très récent dû à Castaing, Ibrahim et Yarou ([27]).

Théorème 2.3.1. *[27] Soient* H *un espace de Hilbert séparable,* $C : [0,T] \times H \rightharpoonup H$ *est une multifonction à valeurs non vides fermées uniformément* $r-prox$ *régulières vérifiant (2.1) et telle que* C *transforme toute suite bornée* (t_n, x_n) *de* $[0,T] \times H$ *en un sous ensemble à boule compacte de* H, *c-à-d, l'intersection de* $\cup_n C\left(t_n, x_n\right)$ *avec toute boule fermée de* H *est relativement compacte,* $G : [0,T] \times H \times H \rightharpoonup H$ *est une multifonction scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes telle que* $G\left(t,x,y\right) \subset \left(1 + \|x\| + \|y\|\right) \overline{B}_H\left(0,1\right)$ *pour tout* $(t,x,y) \in [0,T] \times H \times H$. *Alors pour tous* $b \in H$, $a \in C\left(0,b\right)$, *il existe deux applications absolument continues* $u : [0,T] \to H$ *et* $v : [0,T] \to H$ *telles que*

$$\begin{cases} v(t) = b + \int_0^t u\left(s\right) ds, & \forall t \in [0,T]; \\ u\left(t\right) = a + \int_0^t \dot{u}\left(s\right) ds, & \forall t \in [0,T]; \\ \text{avec } \dot{u} \in L^\infty\left([0,T], H\right) \text{ et } u\left(t\right) \in C(t, v\left(t\right)), & \forall t \in [0,T]; \\ 0 \in \dot{u}\left(t\right) + N^P_{C(t,v(t))}\left(u(t)\right) + G(t,v,u) & \text{p.p. sur } [0,T]; \end{cases}$$

avec

$$\|u(t)\| \leq \beta; \text{ et } \|\dot{u}(t)\| \leq N;$$

où

$$\begin{aligned}
\beta &= \delta \exp(\Lambda + 4);\\
\delta &= (\Lambda + 5)\|a\| + 2\|b\| + \Lambda;\\
N &= \Lambda(1+\beta) + 2(1 + 2\beta + \|b\| + \|a\|).
\end{aligned}$$

On résout maintenant le problème avec retard

Théorème 2.3.2. *Soient H un espace de Hilbert séparable, $C : [0,T] \times H \rightharpoonup H$ est une multifonction à valeurs non vides fermées uniformément $r-$prox régulières vérifiant (2.1) et telle que C transforme toute suite bornée (t_n, x_n) de $[0,T] \times H$ en un sous ensemble à boule compacte de H, c-à-d, l'intersection de $\cup_n C(t_n, x_n)$ avec toute boule fermée de H est relativement compacte, $G : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \rightharpoonup H$ est une multifonction scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes telle que $G(t, \varphi_0, \psi_0) \subset (1 + \|\varphi_0(0)\| + \|\psi_0(0)\|)\overline{B}_H(0,1)$ pour tout $(t, \varphi_0, \psi_0) \in [0,T] \times \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$. Alors pour tous $b \in H$, $a \in C(0,b)$, il existe deux applications absolument continues $u : [0,T] \to H$ et $v : [0,T] \to H$ telles que*

$$\begin{cases}
v(t) = b + \int_0^t u(s)\,ds, & \forall t \in [0,T];\\
u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s)\,ds, & \forall t \in [0,T];\\
\text{avec } \dot{u} \in L^\infty([0,T], H) \text{ et } u(t) \in C(t, v(t)), & \forall t \in [0,T];\\
-\dot{u}(t) \in N^P_{C(t,v(t))}(u(t)) + G(t, \mathcal{T}(t)v, \mathcal{T}(t)u) & p.p. \text{ sur } [0,T];\\
u(s) = \mathcal{T}(0)u(s) = \psi_0(s), \text{ et } v(s) = \mathcal{T}(0)v(s) = \varphi_0(s) & \forall s \in [-\tau, 0].
\end{cases} \tag{2.2}$$

avec

$$\varphi_0(t) = b + \int_0^t \psi_0(s)\,ds \quad \forall t \in [-\tau, 0].$$

Preuve. Etape1 : Constrution des solutions approchées : Soit $\psi_0 \in \mathcal{C}_0$ satisfaisant $\psi_0(0) = a$, et posons $\varphi_0(t) = b + \int_0^t \psi_0(s)\,ds$ pour tout $t \in [-\tau, 0]$. Considérons une subdivision de $[0,T]$ par les points : $t_k^n = ke_n$, $e_n = \frac{T}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n, ..$ Pour tout $(t, v, u) \in [-\tau, t_1^n] \times H \times H$, on définit $f_0^n : [-\tau, t_1^n] \times H \to H$, $g_0^n : [-\tau, t_1^n] \times H \to H$ par

$$f_0^n(t, v) = \begin{cases}
\varphi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0];\\
\varphi_0(0) + \frac{n}{T}t(v - \varphi_0(0)), & \forall t \in]0, t_1^n];
\end{cases}$$

$$g_0^n(t, u) = \begin{cases}
\psi_0(t) & t \in [-\tau, 0];\\
\psi_0(0) + \frac{n}{T}t(u - \psi_0(0)), & t \in]0, t_1^n].
\end{cases}$$

On a $f_0^n(t_1^n, v) = v$ et $g_0^n(t_1^n, u) = u$ pour tout $(u, v) \in H \times H$. Observons que l'application $(v, u) \to (\mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(., v), \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(., u))$ de $H \times H$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ est 1-lipschitzienne pour tout $(v_1, v_2) \in H \times H$ en vertu de

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{T}(\frac{T}{n}) f_0^n(., v_1) - \mathcal{T}(\frac{T}{n}) f_0^n(., v_2) \right\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s \in [-\tau, 0]} \left\| f_0^n\left(s + \frac{T}{n}, v_1\right) - f_0^n\left(s + \frac{T}{n}, v_2\right) \right\| \\
&= \sup_{s \in \left[-\tau + \frac{T}{n}, \frac{T}{n}\right]} \left\| f_0^n(s, v_1) - f_0^n(s, v_2) \right\| \\
&= \sup_{0 \le s \le \frac{T}{n}} \left\| \frac{n}{T} s\left(v_1 - \varphi_0(0)\right) - \frac{n}{T} s\left(v_2 - \varphi_0(0)\right) \right\| \\
&= \sup_{0 \le s \le \frac{T}{n}} \left\| \frac{n}{T} s\left(v_1 - v_2\right) \right\| \\
&= \left\| v_1 - v_2 \right\|.
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient pour tout $(u_1, u_2) \in H \times H$

$$\left\| \mathcal{T}(\frac{T}{n}) g_0^n(., u_1) - \mathcal{T}(\frac{T}{n}) g_0^n(., u_2) \right\|_{\mathcal{C}_0} = \left\| u_1 - u_2 \right\|.$$

Donc l'application $(v, u) \to (\mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(., v), \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(., u))$ définie sur $H \times H$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ est 1-lipschitzienne et par suite la multifonction $G_0^n : [0, t_1^n] \times H \times H \rightharpoonup H$ définie par

$$G_0^n(t, v, u) = G(t, \mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(., v), \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(., u))$$

est scalairement semi-continue supérieurement sur $[0, t_1^n] \times H \times H$ puisque G est l'est également sur $[0, t_1^n] \times \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$, à valeurs non vides convexes faiblement compactes dans H vérifiant

$$G_0^n(t, v, u) = G(t, \mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(., v), \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(., u)) \subset (1 + \|v\| + \|u\|),$$

pour tout $(t, v, u) \in [0, t_1^n] \times H \times H$ puisque $\mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(0, v) = v, \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(0, u) = u$.
Donc G_0^n vérifie les conditions du Théorème 2.3.1, on en déduit qu'il existe deux applications absolument continues $u_0^n : [0, t_1^n] \to H$ et $v_0^n : [0, t_1^n] \to H$ telles que

$$\begin{cases}
v_0^n(t) = b + \int_0^t u_0^n(s)\, ds, & \forall t \in [0, t_1^n]; \\
u_0^n(t) = a + \int_0^t \dot{u}_0^n(s)\, ds, & \forall t \in [0, t_1^n]; \\
0 \in \dot{u}_0^n(t) + N_{C(t, v_0^n(t))}^P(u_0^n(t)) + G(t, \mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(., v_0^n(t)), \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(., u_0^n(t))) & \text{p.p. sur } [0, t_1^n]; \\
u_0^n(t) \in C(t, v_0^n(t)) & \forall t \in [0, t_1^n]; \\
v_0^n(0) = b = \varphi_0(0), \quad u_0^n(0) = a = \psi_0(0);
\end{cases}$$

avec

$$\|u_0^n(t)\| \le \beta; \ \|\dot{u}_0^n(t)\| \le N.$$

Posons

$$v_n(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & \forall t \in [-\tau, 0], \\ v_0^n(t) & \forall t \in]0, t_1^n]. \end{cases}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} \psi_0(t), & \forall t \in [-\tau, 0], \\ u_0^n(t) & \forall t \in]0, t_1^n]. \end{cases}$$

Donc, v_n et u_n sont bien définies sur $[-\tau, t_1^n]$, avec $v_n = \varphi_0$, $u_n = \psi_0$ sur $[-\tau, 0]$, et

$$\begin{cases} v_n(t) = b + \int_0^t u_n(s)\, ds, & \forall t \in [0, t_1^n]; \\ u_n(t) = a + \int_0^t \dot{u}_n(s)\, ds, & \forall t \in [0, t_1^n]; \\ 0 \in \dot{u}_n(t) + N^P_{C(t, v_n(t))}(u_n(t)) + G(t, \mathcal{T}(t_1^n) f_0^n(., v_n(t)), \mathcal{T}(t_1^n) g_0^n(., u_n(t))) & \text{p.p. sur } [0, t_1^n]; \\ \text{avec } \dot{u}_n \in L^\infty([0, T], H) \text{ et } u_n(t) \in C(t, v_n(t)) & \forall t \in [0, t_1^n]; \\ u_n(s) = \psi_0(s), \ v_n(s) = \varphi_0(s) & \forall s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Par récurrence, supposons ainsi construites v_n et u_n sur $[-\tau, t_k^n]$ $(k \geq 1)$ telles que $v_n = \varphi_0$, $u_n = \psi_0$ sur $[-\tau, 0]$ et vérifiant

$$v_n(t) = \begin{cases} v_0^n(t) = b + \int_0^t u_n(s)\, ds & \forall t \in [0, t_1^n]; \\ v_1^n(t) = v_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t u_n(s)\, ds & \forall t \in]t_1^n, t_2^n]; \\ \ldots \\ v_{k-1}^n(t) = v_n\left(t_{k-1}^n\right) + \int_{t_{k-1}^n}^t u_n(s)\, ds & \forall t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]; \end{cases}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0^n(t) = a + \int_0^t \dot{u}_n(s)\, ds & \forall t \in [0, t_1^n]; \\ u_1^n(t) = u_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{u}_n(s)\, ds & \forall t \in]t_1^n, t_2^n]; \\ \ldots \\ u_{k-1}^n(t) = u_n\left(t_{k-1}^n\right) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{u}_n(s)\, ds & \forall t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]; \end{cases}$$

v_n et u_n sont solutions de

$$\begin{cases} v_n(t) = v_{k-1}^n(t) = v_n\left(t_{k-1}^n\right) + \int_{t_{k-1}^n}^t u_n(s)\, ds & \forall t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]; \\ u_n(t) = u_{k-1}^n(t) = u_n\left(t_{k-1}^n\right) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{u}_n(s)\, ds & \forall t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]; \\ 0 \in \dot{u}_n(t) + N^P_{C(t, v_n(t))}(u_n(t)) + G(t, \mathcal{T}(t_k^n) f_{k-1}^n(., v_n(t)), \mathcal{T}(t_k^n) g_{k-1}^n(., u_n(t)) & \text{p.p. sur } \left[t_{k-1}^n, t_k^n\right]; \\ u_n(t) \in C(t, v_n(t)). \end{cases}$$

où f_{k-1}^n, g_{k-1}^n sont définies pour tout $(u, v) \in H \times H$ comme suit

$$f_{k-1}^n(t, v) = \begin{cases} v_n(t), & \forall t \in \left[-\tau, t_{k-1}^n\right]; \\ v_n\left(t_{k-1}^n\right) + \frac{n}{T}\left(t - t_{k-1}^n\right)\left(v - v_n\left(t_{k-1}^n\right)\right), & \forall t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]. \end{cases}$$

$$g_{k-1}^n(t, v) = \begin{cases} u_n(t), & \forall t \in \left[-\tau, t_{k-1}^n\right]; \\ u_n(t_{k-1}) + \frac{n}{T}\left(t - t_{k-1}^n\right)\left(u - u_n\left(t_{k-1}^n\right)\right), & \forall t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]. \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut définir $f_k^n, g_k^n : \left[-\tau, t_{k+1}^n\right] \times H \to H$ par

$$f_k^n(t,v) = \begin{cases} v_n(t), & \forall t \in [-\tau, t_k^n]; \\ v_n(t_k^n) + \frac{n}{T}(t - t_k^n)(v - v_n(t_k^n)), & \forall t \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]. \end{cases}$$

$$g_k^n(t,u) = \begin{cases} u_n(t) & \forall t \in [-\tau, t_k^n]; \\ u_n(t_k^n) + \frac{n}{T}(t - t_k^n)(u - u_n(t_k^n)), & \forall t \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]. \end{cases}$$

pour tout $(v,u) \in H \times H$. Notons que $\mathcal{T}(t_{k+1}^n) f_k^n(0,v) = f_k^n\left(t_{k+1}^n, v\right) = v$, $\mathcal{T}(t_{k+1}^n) g_k^n(0,u) = g_k^n\left(t_{k+1}^n, u\right) = u$ pour tout $(v,u) \in H \times H$. Notons aussi que, pour tout $(v_1,u_1),(v_2,u_2) \in H \times H$, on a

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{T}(t_{k+1}^n) f_k^n(.,v_1) - \mathcal{T}(t_{k+1}^n) f_k^n(.,v_2)\right\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-\tau,0]} \left\| f_k^n\left(s + \frac{(k+1)T}{n}, v_1\right) - f_k^n\left(s + \frac{(k+1)T}{n}, v_2\right)\right\| \\ &= \sup_{s\in\left[-\tau+\frac{(k+1)T}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| f_k^n(s,v_1) - f_k^n(s,v_2)\right\|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{T}(t_{k+1}^n) g_k^n(.,u_1) - \mathcal{T}(t_{k+1}^n) g_k^n(.,u_2)\right\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-\tau,0]} \left\| g_k^n\left(s + \frac{(k+1)T}{n}, u_1\right) - g_k^n\left(s + \frac{(k+1)T}{n}, u_2\right)\right\| \\ &= \sup_{s\in\left[-\tau+\frac{(k+1)T}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| g_k^n(s,u_1) - g_k^n(s,u_2)\right\|. \end{aligned}$$

On distingue deux cas : (1) Si $-\tau + \frac{(k+1)T}{n} < \frac{kT}{n}$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{s\in\left[-\tau+\frac{(k+1)T}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| f_k^n(s,v_1) - f_k^n(s,v_2)\right\| &= \sup_{s\in\left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| f_k^n(s,v_1) - f_k^n(s,v_2)\right\| \\ &= \sup_{\frac{kT}{n} \le s \le \frac{(k+1)T}{n}} \left\| \frac{n}{T}\left(s - \frac{kT}{n}\right)(v_1 - v_2)\right\| = \|v_1 - v_2\|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{s\in\left[-\tau+\frac{(k+1)T}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| g_k^n(s,u_1) - g_k^n(s,u_2)\right\| &= \sup_{s\in\left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| g_k^n(s,u_1) - g_k^n(s,u_2)\right\| \\ &= \sup_{\frac{kT}{n} \le s \le \frac{(k+1)T}{n}} \left\| \frac{n}{T}\left(s - \frac{kT}{n}\right)(u_1 - u_2)\right\| = \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

(2) Si $\frac{kT}{n} \le -\tau + \frac{(k+1)T}{n} \le \frac{(k+1)T}{n}$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{s\in\left[-\tau+\frac{(k+1)T}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| f_k^n(s,v_1) - f_k^n(s,v_2)\right\| &= \sup_{s\in\left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]} \left\| f_k^n(s,v_1) - f_k^n(s,v_2)\right\| \\ &= \sup_{\frac{kT}{n} \le s \le \frac{(k+1)T}{n}} \left\| \frac{n}{T}\left(s - \frac{kT}{n}\right)(v_1 - v_2)\right\| = \|v_1 - v_2\|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{s\in\left[-\tau+\frac{(k+1)T}{n},\frac{(k+1)T}{n}\right]}\left\|g_k^n(s,u_1)-g_k^n(s,u_2)\right\| &= \sup_{s\in\left[\frac{kT}{n},\frac{(k+1)T}{n}\right]}\left\|g_k^n(s,u_1)-g_k^n(s,u_2)\right\| \\ &= \sup_{\frac{kT}{n}\leq s\leq\frac{(k+1)T}{n}}\left\|\frac{n}{T}\left(s-\frac{kT}{n}\right)(u_1-u_2)\right\|=\left\|u_1-u_2\right\|.\end{aligned}$$

Donc l'application $(v,u)\to(\mathcal{T}(t_{k+1}^n)f_k^n(.,v),\mathcal{T}(t_{k+1}^n)g_k^n(.,u))$ définie sur $H\times H$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0$ est 1-lipschitzienne. Par conséquent, la multifonction $G_k^n:[0,T]\times H\times H\rightharpoondown H$ définie par $G_k^n(t,v,u)=G(\mathcal{T}(t_{k+1}^n)f_k^n(.,v),\mathcal{T}(t_{k+1}^n)g_k^n(.,u))$ est scalairement semi-continue supérieurement sur $[0,T]\times H\times H$ à valeurs non vides convexes faiblement compactes. Comme dans le cas précédent, on peut aisément vérifier que G_k^n satisfait la condition de croissance

$$G_k^n(t,v,u)\subset(1+\|v\|+\|u\|),\ \forall(t,v,u)\in[0,T]\times H\times H.$$

Par application du Théorème 2.3.1, il existe deux applications absolument continues $u_k^n:\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]\to H$ et $v_k^n:\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]\to H$ telles que

$$\begin{cases} v_k^n(t)=b+\int_0^t u_k^n(s)\,ds, & \forall t\in\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]; \\ u_k^n(t)=a+\int_0^t \dot{u}_k^n(s)\,ds, & \forall t\in\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]; \\ \text{avec } \dot{u}_k\in L^\infty\left(\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right],H\right)\text{ et } u_k^n(t)\in C(t,v_k^n(t)) & \forall t\in\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]; \\ -\dot{u}_k^n(t)\in N^P_{C(t,v_k^n(t))}(u_k^n(t))+G(t,\mathcal{T}(t_{k+1}^n)f_k^n(.,v_k^n(t)),\mathcal{T}(t_{k+1}^n)g_k^n(.,u_k^n(t))) & \text{p.p. sur }\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]; \\ v_k^n(t_k^n)=v_n(t_k^n); \end{cases}$$

avec

$$\|u_k^n(t)\|\leq\beta;\ \ \|\dot{u}_k^n(t)\|\leq N.$$

Par conséquent, il existe $h_k^n\in L^1\left(\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right],H\right)$ telle que

$$h_k^n(t)=h(t_k^n,v_n(t_k^n),u_n(t_k^n))$$

$$\begin{cases} h_k^n(t)\in G(t,\mathcal{T}(t_{k+1}^n)f_k^n(.,v_k^n(t)),\mathcal{T}(t_{k+1}^n)g_k^n(.,u_k^n(t))) & \text{p.p. sur }\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]; \\ 0\in\dot{u}_k^n(t)+N^P_{C(t,v_k^n(t))}(u_k^n(t))+h_k^n(t) & \text{p.p. sur }\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]; \\ v_k^n(t_k^n)=v_n(t_k^n); \\ u_k^n(t)\in C(t,v_k^n(t)) & \forall t\in\left[t_k^n,t_{k+1}^n\right]. \end{cases}$$

D'où, par récurrence, on peut construire deux applications continues $v_n:[-\tau,T]\to H\times H$ définie par $v_n=\varphi_0$ sur $[-\tau,0]$ et $u_n:[-\tau,T]\to H\times H$ définie par $u_n=\psi_0$ sur $[-\tau,0]$ telles que leurs restriction sur chaque intervalle $\left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$ est solution du problème

$$\begin{cases} v(t) = b + \int_0^t u(s)\,ds, & \forall t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]; \\ u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s)\,ds, & \forall t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]; \\ \text{avec } \dot{u} \in L_H^\infty([0,T]) \text{ et } u(t) \in C(t, v(t)), & \forall t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]; \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,v(t))}^P(u(t)) + G(t, \mathcal{T}(t_{k+1}^n) f_k^n(., v_k^n(t)), \mathcal{T}(t_{k+1}^n) g_k^n(., u_k^n(t))) & \text{p.p. sur } \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]; \\ v(t_k^n) = v_n(t_k^n). \end{cases}$$

En effet : posons

$$v_n(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0]; \\ v_0^n(t) & \forall t \in]0, t_1^n]; \\ \ldots \\ v_k^n(t) & \forall t \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]; \end{cases}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} \psi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0]; \\ u_0^n(t) & \forall t \in]0, t_1^n]; \\ \ldots \\ u_k^n(t) & \forall t \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]; \end{cases}$$

et $h_n(t) = h_k^n(t)$ sur $\left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]$. On pose $\theta_n(t) = t_{k+1}^n$ et $\delta_n(t) = t_k^n$, pour tout $t \in \left]t_k^n, t_{k+1}^n\right]$. On obtient

$$\begin{cases} h_n(t) \in G(t, \mathcal{T}(\theta_n(t)) f^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., v_n(t)), \mathcal{T}(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., u_n(t))) & \text{p.p. sur } [0,T]; \\ 0 \in \dot{u}_n(t) + N^P_{C(t, v_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) + h_n(t) & \text{p.p. sur } [0,T]; \\ v_n(0) = b = \varphi_0(0),\ u_n(0) = a = \psi_0(0) \in C(0,b); \\ u_n(t) \in C(t, v_n(\theta_n(t))), & \forall t \in [0,T]; \end{cases} \tag{2.3}$$

avec pour presque tout $t \in [0,T]$

$$G(t, \mathcal{T}(\theta_n(t)) f^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., v_n(t)), \mathcal{T}(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., u_n(t))) \subset (1 + \|v_n(t)\| + \|u_n(t)\|).$$

Etape2 : Convergence de (v_n) **et** (u_n). Nous affirmons que $\mathcal{T}(\theta_n(t)) f^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., v_n(t))$ (respect. $\mathcal{T}(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., u_n(t))$) convergeant simplement vers $\mathcal{T}(t)v$ (respect. $\mathcal{T}(t)u$) dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_0$. La preuve est similaire à celle donnée par le Théorème 2.1 dans [29]. De plus, comme $\|u_n(t)\| \le \delta \exp(\Lambda + 4) = \beta$, donc

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(t, v_n(\theta_n(t))) \overline{B}_H(0, \beta)$$

et la suite $(v_n(\theta_n(t))) \in \overline{B}_H(0, N)$, et par suite $(u_n(\theta_n(t)))$ est également relativement compacte. Ainsi $(u_n(.))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T], H)$. Par conséquent, en vertu du Théorème 1.2.4, on doit supposer que $(\dot{u}_n)$ est $\sigma\left(L^\infty\left([0,T],H\right), L^1\left([0,T],H\right)\right)$ convergente dans $L^\infty\left([0,T],H\right)$ vers une fonction z vérifiant $\|z(t)\| \leq N$ $(N = \Lambda(1+\beta) + 2(1+2\beta+\|b\|+\|a\|))$ pour presque tout $t \in [0,T]$, et (u_n) converge dans $\mathcal{C}\left([0,T],H\right)$ vers une fonction absolument continue

$$u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s)\,ds, \ \forall t \in [0,T] \text{ avec } \dot{u} = z.$$

On déduit, de la convergence de (u_n), que (v_n) converge uniformément vers une fonction absolument continue v satisfaisant

$$v(t) = b + \int_0^t u(s)\,ds.$$

Etape3 : Existence de solution. On a pour presque tout t

$$h_n(t) \in G(t, \mathcal{T}(\theta_n(t)) f^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., v_n(t)), \mathcal{T}(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., u_n(t))),$$

$$\begin{aligned}\|h(\delta_n(t), v_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t)))\| &\leq 1 + \|v_n(\delta_n(t))\| + \|u_n(\delta_n(t))\| \\ &\leq 1 + \|b\| + \|a\| + 2\beta \,(:= M),\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0,T]$, on conclut de l'estimation précédente, que h_n converge faiblement dans $L^\infty([0,T],H)$ vers une fonction h vérifiant $\|h(t)\| \leq M$ et comme la multifonction G est scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes, en appliquant un théorème classique de fermeture, Théorème 1.1.10, on en déduit que $h(t) \in G(t, \mathcal{T}(t)v, \mathcal{T}(t)u)$.

Démontrons maintenant que

$$0 \in \dot{u}(t) + N^P_{C(t,v(t))}(u(t)) + G(t, \mathcal{T}(t)v, \mathcal{T}(t)u) \text{ presque partout sur } [0,T].$$

Montrons d'abord que

$$u(t) \in C(t, v(t)).$$

En effet, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned} d(u_n, C(t, v(t))) &\leq \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\| + d(u_n(\theta_n(t)), C(t, v(t))) \\ &\leq \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\| + \mathcal{H}(C(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))), C(t, v(t))) \\ &\leq \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\| + \Lambda(|\theta_n(t) - t| + \|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\|).\end{aligned}$$

Comme $C(t, v(t))$ est fermé, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| = 0$, et en passant à la limite quand $n \to \infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient donc $u(t) \in C(t, v(t))$.

Rappelons que

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) \in N^P_{C(t, v_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))$$

avec

$$h_n(t) \in G(t, \mathcal{T}(\theta_n(t)) f^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., v_n(t)), \mathcal{T}(\theta_n(t)) g^n_{\frac{n}{T}\theta_n(t)-1}(., u_n(t))),$$

et

$$\|\dot{u}_n(t) + h_n(t)\| \leq N + M \,(:= L).$$

Alors la Proposition 2.2.1 implique pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} -\dot{u}_n(t) - h_n(t) &\in N^P_{C(t, v_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) L\overline{B}_H(0,1) \\ &= L\partial^P d(u_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Grâce à (2.4) et la convergence faible de $(\dot{u}_n + h_n)$ vers $\dot{u} + h$, on déduit par intégration et par application du Lemme de Fatou

$$\begin{aligned} \int_A \langle \varepsilon, -\dot{u}(t) - h(t) \rangle \, dt &= \lim_n \int_A \langle \varepsilon, -\dot{u}_{n,}(t) - h_n(t) \rangle \, dt \\ &\leq \limsup_n \int_A L\delta^* \left(\varepsilon, \partial^P d(u_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))) \right) dt \\ &\leq \int_A L \limsup_n \delta^* \left(\varepsilon, \partial^P d(u_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))) \right) dt \end{aligned}$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset [0, T]$ et tout $\varepsilon \in H$. Comme la multifonction

$$t \to L\partial^P d(u(t), C(t, v(t)))$$

est mesurable et à valeurs convexes faiblement compactes (voir [81], [82]), D'après la Proposition 1.1.4 il s'ensuit que

$$-\dot{u}(t) - h(t) \in L\partial^P d(u(t), C(t, v(t))) \text{ p.p.}$$

puisque H est separable. D'où, en vertu de la Proposition 2.2.1, on conclut que

$$-\dot{u}(t) - h(t) \in N^C_{C(t,v(t))}(u(t)) = N^P_{C(t,v(t))}(u(t)) \text{ p.p.}$$

d'où

$$-\dot{u}(t) \in N^P_{C(t,v(t))}(u(t)) + h(t)$$

avec $h(t) \in G(t, \mathcal{T}(t)v, \mathcal{T}(t)u)$ p.p. ce qui achève la démonstration.

■

CHAPITRE 3

Inclusions différentielles gouvernées par le sous différentiel d'une fonction pln

3.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude d'une inclusion différentielle du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + h(t, x(t)) & p.\ p.\ \ t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où F est une multifonction semi-continue supérieurement et h une fonction de Caratheodory. Il est bien connu que le problème sans perturbation ($h \equiv 0$) admet une solution quand F est à valeurs convexes (voir par exemple [3]). En l'absence de convexité des valeurs de F plusieurs résultats ont été établis dans le cas où $F(x) \subset \partial f(x)$, pour quelques fonctions convexes propres semi-continues inférieurement (voir [20]). Ce résultat a connu plusieurs généralisations, on se réfère à [2, 31, 64, 80]. L' auteur dans [8] a étudié le même problème en remplaçant l'hypothèse de f convexe par f régulière. Cette classe de fonctions est d'une grande importance dans l'analyse non lisse et l'optimisation, le problème en dimension finie a été également étudié.
Une autre classe de fonctions qui est d'une importance cruciale en analyse variationnelle et en optimisation, et celle qu'on appelle fonctions primal lower nice (pln en abrégé). Cette classe de fonctions englobe toutes les fonctions convexes et les fonctions convexes composites qualifiées, et possède des caractéristiques remarquables telles la liaison de ces fonctions avec leurs enveloppes de Moreau. Quelques propriétés de régularité locale de l'enveloppe de Moreau et de l'application

proximale associée au fonction $r-prox$ régulières et des fonctions pln dans un espace de Hilbert on été établies par [13] et [56]. Cette classe de fonctions a été étudiée initialement par Poliquin [67] en dimension finie. Le travail de Poliquin a révélé des propriétés fondamentales de ces fonctions, telles la coïncidence de leur sous différentiel proximal avec celui de Clarke. Le but de ce travail est d'établir un résultat d'existence de solution pour le problème (3.1) quand f est semi-continue inférieurement et pln.
La démonstration fait appel à un théorème d'existence dû à Marcellin [56] pour le problème

$$\begin{cases} 0 \in \dot{x}(t) + \partial f(x(t)) \text{ p.p. sur } [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

ainsi qu'un théorème de fermeture de sous différentiel d'une fonction pln. On résout le problème en dimension finie, puis on généralise notre résultat au cadre d'un espace de dimension infinie.

3.2 Quelques définitions et théorèmes fondamentaux

Nous introduisons dans la définition suivante le concept des fonctions Φ-convexes. Rappelons que les résultats obtenus par Marcellin [56] pour les fonctions pln sont dans la ligne de ceux établis par Tosques [85] pour les fonctions "Φ-convexes d'ordre 2" dont les fonctions pln font partie, mais par des développements beaucoup plus simples que ceux utilisés par cet auteur.

Définition 3.2.1. *[42] Soit Ω un sous ensemble ouvert de H, $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i et $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue.*

- *On dit que la fonction f possède un sous différentiel* ***Φ-monotone****, si*

$$\langle u - v, y - z \rangle \geq -(\Phi(y, f(y), \|u\|) + \Phi(z, f(z), \|v\|))\|y - z\|^2$$

  quelques soient $y, z \in dom\partial^F f$, $u \in \partial^F f(y)$, $v \in \partial^F f(z)$.
- *Si $p \geq 1$, on dit que f possède un sous différentiel* ***Φ-monotone d'ordre*** *p, si*

$$\langle u - v, y - z \rangle \geq -\chi(y, z, f(y), f(z))(1 + \|u\|^p + \|v\|^p)\|y - z\|^2$$

  pour tous $y, z \in dom\partial^F f$, $u \in \partial^F f(y)$, $v \in \partial^F f(z)$, où $\chi : \Omega^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

Supposons maintenant que $\Phi : \Omega^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ est continue

- *f est dite Φ-**convexe** si*

$$f(y) \geq f(z) + \langle v, y - z \rangle - \Phi(y, z, f(y), f(z), \|v\|)\|y - z\|^2$$

  pour tout $y \in domf$, tout $z \in dom\partial^F f$ et tout $v \in \partial^F f(z)$.

– *Etant donné $p \geq 1$, f est dite Φ-**convexe d'ordre** p s'il existe une fonction continue $\chi : \Omega^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $z \in dom\partial^F f$, $v \in \partial^F f(z)$ et tout $y \in domf$*

$$f(y) \geq f(z) + \langle v, y - z\rangle - \chi(y, z, f(y), f(z))(1 + \|v\|^p)\|y - z\|^2.$$

Pour plus de détails sur les fonctions Φ-**convexe**, on se réfère à [41, 42].

Définition 3.2.2. *([56, 73]) Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement. Soit λ et ε des nombres réels positifs. **L'enveloppe de Moreau** de f est la fonction définie de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ par*

$$e_\lambda f(x) := \inf_{y\in X}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\},\ x \in X,$$

*et **l'application proximale** associée est l'opérateur multivoque donné par*

$$P_\lambda f(x) := \underset{y\in X}{argmin}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\},\ x \in X.$$

***L'enveloppe de Moreau locale** de f associée à λ et ε est définie par*

$$e_{\lambda,\varepsilon} f(x) := \inf_{\|y\|\leq\varepsilon}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\},\ x \in X,$$

*et **l'application proximale locale***

$$P_{\lambda,\varepsilon} f(x) := \inf_{\|y\|\leq\varepsilon}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\},\ x \in X.$$

Notons que pour tout $\lambda > 0$, $e_\lambda f$ est l'infimum convolué de f et $\frac{1}{2\lambda}\|.\|^2$, i.e. $e_\lambda f = f\Box\frac{1}{2\lambda}\|.\|^2$. De plus, on peut écrire pour tous $\lambda, \varepsilon > 0$ et $x \in X$

$$e_{\lambda,\varepsilon} f(x) := e_\lambda(f + \delta(., \overline{B}(0, \varepsilon))(x),$$

et

$$P_{\lambda,\varepsilon} f(x) := P_\lambda(f + \delta(., \overline{B}(0, \varepsilon))(x).$$

Lemme 3.2.1. *[39] Soit X un espace de Banach réflexif. Si l'infimum convolué*

$$(f\Box g)(a) = \inf_{y\in X}\{f(y) + g(a - y)\}$$

est atteint en un point $\bar{y}$, alors

$$\partial^F(f\Box g)(a) \subset \partial^F f(\bar{y})\partial^F g(a - \bar{y}).$$

Lemme 3.2.2. *[83] Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction telle que $f(\bar{x}) < \infty$, et f est minorée sur $\overline{B}(\bar{x}, s)$, où s un nombre positif. On définit*

$$F_\lambda = \inf_{y\in\overline{B}(\bar{x},s)}\{f(y) + \frac{\lambda}{2}\|x - y\|^2\}\ \text{pour tout } x \in X.$$

Donc il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour chaque $x \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{s}{4})$ et chaque $\lambda \geq \lambda_0$, l'infimum ci dessus est égale à l'infimum sur tous les points y dans la boule ouverte $B(\bar{x}, \frac{3s}{4})$ et l'infimum est atteint sur cette boule.

Proposition 3.2.3. *[10] Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i, pln en $0 \in dom f$ de paramètres ε, c, τ telle que $\varepsilon < c$ et f est minorée sur $\overline{B}(0, \varepsilon)$. Donc, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$*

$$P_{\frac{1}{r},\varepsilon} f = (I + \frac{1}{r} T_{t_r})^{-1} \text{ sur } B(0, \frac{\varepsilon}{4}), \tag{3.3}$$

où $t_r := r\varepsilon$ et pour $t > 0$, T_t est la troncature du graphe, définie par

$$gph T_t := \{(x, x^*) \in gph \partial f : \|x\| < \varepsilon \text{ et } \|x^*\| \leq t\}.$$

De plus, les applications dans la Proposition 3.2.3 sont non vides, univoques, et lipschitziennes sur $B(0, \frac{\varepsilon}{4})$.

Lemme 3.2.4. *Soient $\bar{r} \in [0, +\infty[$ et $T : H \to H$ telle que $(\bar{r} I + T)$ est monotone. Donc pour tout $r > \bar{r}$, $(I + r^{-1} T)^{-1}$ est monotone, univoque, et lipschitzienne de rapport $\frac{r}{r - \bar{r}}$ sur son domaine.*

Proposition 3.2.5. *[56] Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i minorée par une fonction quadratique. Considérons $\lambda > 0$ et soit U un sous ensemble ouvert de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$e_\lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans U,*
2. *$P_\lambda f$ est non vide, univoque et continue dans U. De plus, $\nabla e_\lambda f = \lambda^{-1}(I - P_\lambda f)$ dans U.*

Proposition 3.2.6. *[56] Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i. Supposons que f est pln en $u_0 \in dom f$ de constantes s_0, c_0, Q_0, telle que*

$$\inf\{f(x) : x \in \overline{B}(u_0, s_0)\} \in \mathbb{R} \text{ et } s_0 < c_0.$$

Considérons $(x_0, y_0) \in gph \partial f$ avec $\|x_0 - u_0\| < \frac{s_0}{16}$. Définissons

$$\bar{f}(.) := f(.) + \delta(., \overline{B}(x_0, \frac{s_0}{2}),\ Q = \max(2\|y_0\| c_0^{-1}; Q_0) \text{ et } c := c_0 - \|y_0\| Q^{-1}.$$

Alors, il existe $\bar{\lambda}_0 \in]0, \frac{s_0}{32(\|y_0\|)+1)}[$ dépendant de u_0, tel que pour tout $\lambda \in]0, \bar{\lambda}_0[$

1. *$e_\lambda \bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{1,+}$ dans $B(u_0, \frac{s_0}{32})$,*
2. *$P_\lambda \bar{f}$ est non vide, univoque, et lipchitzienne de rapport $\bar{k}$ sur $B(u_0, \frac{s_0}{32})$ telle que $\bar{k} := (1 - \frac{s_0}{2c})^{-1}$,*
3. *$P_\lambda \bar{f}(x_0 + \lambda y_0) = x_0$,*

4. $e_\lambda \bar{f} = \lambda^{-1}(I - P_\lambda \bar{f})$ *dans* $B(u_0, \frac{s_0}{32})$,
5. $\|\nabla e_\lambda \bar{f}(x_0)\| \leq (1 - \frac{s_0}{2c})^{-1}\|y_0\|$,
6. $P_\lambda \bar{f}(B(u_0, \frac{s_0}{32})) \subset B(u_0, \frac{7}{16}s_0)$,
   De plus, pour $x \in B(u_0, \frac{s_0}{32})$
7. $\nabla e_\lambda \bar{f}(x) \in \partial f(P_\lambda \bar{f}(x))$,
8. $\|x - x_0\| \geq [1 - \lambda(Q_0 + c_0^{-1}((1 - \frac{s_0}{2c})^{-1}\|y_0\| + \|\nabla e_\lambda \bar{f}(x)\|))]\|P_\lambda \bar{f}(x) - P_\lambda \bar{f}(x_0)\|$.

Le graphe du sous différentiel proximal d'une fonction pln possède quelques propriétés de fermeture très utiles.

Proposition 3.2.7. *[56] Soit* $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre semi-continue inférieurement, pln en* $u_0 \in dom f$. *Supposons que* f *est pln en* $y \in dom f$, *soit* $(y_n)_n \in \mathbb{N}$ *une suite qui converge fortement vers* $y \in H$ *et soit* $(v_n)_n \in \mathbb{N}$ *une suite convergeant faiblement vers* $v \in H$ *et* $v_n \in \partial^F f(y_n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand. Donc*

$$v \in \partial^P f(y) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = f(y).$$

Preuve. D'après la remarque 1.6.1, on a $\partial^P f(x_n) = \partial^F f(x_n)$ pour tout n. f est pln en x, donc il existe des nombres réels positifs s, c, et Q tels que

$$f(y) \geq f(x') + \langle z, y - x' \rangle - \frac{q}{2}\|y - x'\|^2, \tag{3.4}$$

quelques soient y, $x' \in \overline{B}(x, s)$, $q \geq Q$ et $z \in \partial^P f(x')$ avec $\|z\| \leq cq$. Il est clair que, pour n suffisamment grand on a $x_n \in \overline{B}(x, s)$ et il résulte de la convergence faible de $(v_n)_n \in \mathbb{N}$ que $K := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| < +\infty$. Par conséquent pour tout n et tout $y \in \overline{B}(x, s)$, en utilisant l'inégalité (3.4) on obtient

$$f(y) \geq f(x_n) + \langle v_n, y - x_n \rangle - \frac{1}{2}\max\{Q, Kc^{-1}\}\|y - x_n\|^2. \tag{3.5}$$

En passant à la limite inférieure quand $n \to \infty$ dans l'inégalité précédente, et en utilisant le fait que f est semi-continue inférieure, on aura

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle - \frac{1}{2}\max\{Q, Kc^{-1}\}\|y - x\|^2, \text{ pour tout } y \in \overline{B}(x, s). \tag{3.6}$$

Ce qui implique que $v \in \partial^P f(x)$. De plus, dans le cas particulier en posant $y = x$ dans la relation (3.5), on obtient

$$f(x) \geq f(x_n) + \langle v_n, x - x_n \rangle - \frac{1}{2}\max\{Q, Kc^{-1}\}\|x - x_n\|^2 \tag{3.7}$$

pour tout n grand. On en déduit que

$$f(x) \geq \limsup_{n\to+\infty} f(x_n).$$

En combinant çà avec la semi-continuité inférieure de f on obtient

$$f(x) \geq \limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

■

Proposition 3.2.8. *Soit $f : H \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction propre semi-continue inférieurement, pln en $u_0 \in domf$ de constantes $s_0,\ c_0,\ Q > 0$, et soient T_0, T, v_0, η_0 des nombres réels positifs tels que $T > T_0$ et $v_0 + \eta_0 = s_0$. Soient $v \in L^2([T_0,T],H)$ et $u(.)$ une application définie sur $[T_0,T]$ à valeurs dans H. Soient $(u_n(.))_n$ une suite d'applications définies sur $[T_0,T]$ à valeurs dans H et $(v_n(.))_n$ une suite de $L^2([T_0,T],H)$. Supposons que*

1. *$\{(u_n(t)),\ n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}(u_0,\eta_0)domf$ pour presque tout $t \in [T_0,T]$;*
2. *(u_n) converge presque partout vers une application u avec $u(t) \in domf$ pour presque tout $t \in [T_0,T]$;*
3. *(v_n) converge faiblement dans $L^2([T_0,T],H)$;*
4. *pour tout $n \geq 1$, $v_n(t) \in \partial f(u_n(t))$ pour presque tout $t \in [T_0,T]$, donc pour presque tout $t \in [T_0,T]$*

$$v(t) \in \partial f(u(t)).$$

Preuve. Supposons que 1, 2 et 4 sont vérifiées pour tout $t \in [T_0,T] - N$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (N un sous ensemble négligeable de $[T_0,T]$). En vertu de 3, la suite $(v_n(.))_{n\geq1}$ est une suite bornée dans $L^2([T_0,T]),H)$, c'est à dire $(\|v_n(.)\|_H)_{n\geq1}$ est bornée dans $L^2([T_0,T],\mathbb{R})$. Par conséquent, il existe un élément $g \in L^2([T_0,T],\mathbb{R})$ et une sous suite de $(v_n(.),\|v_n\|_H)$ convergeant faiblement dans $L^2([T_0,T]),H\times\mathbb{R})$ vers $(v(.),g(.))$. Donc le lemme de **Mazur** assure l'existence d'une suite de $L^2([T_0,T],H\times\mathbb{R})$ $(h_n(.))_n$ convergeant fortement vers $(v(.),g(.))$ dans $L^2([T_0,T]),H\times\mathbb{R})$ satisfaisant

$$h_n(.) \in co\{(v_k, \|v_k(.)\|_H) : k \geq n\}$$

pour chaque $n \geq 1$.

Autrement dit, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un ensemble fini
$K_n \subset \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ et une constante réelle $\alpha_{n,k} \geq 0$ pour tout $k \in K_n$, tels que
$\sum_{k\in K_n} \alpha_{n,k} = 1$ et

$$h_n(.) = \sum_{k\in K_n} \alpha_{n,k}(v_k(.),\|v_k(.)\|_H) \text{ dans } L^2([T_0,T]),H\times\mathbb{R}).$$

Il en résulte qu'il existe une application décroissante $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un ensemble négligeable $N_\sigma \subset [T_0, T]$ tels que pour tout $t \in [T_0, T] - N_\sigma$, la suite $(h_{\sigma(n)}(t))_{n\geq 1}$ converge fortement vers $(v(t), g(t))$ dans $H \times \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{N} = N_\sigma \cup N$, on obtient pour tout $t \in [T_0, T] - \mathcal{N}$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in K_{\sigma(n)}} \alpha_{\sigma(n),k} \|v_k(t)\|_H := S_t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $t \in [T_0, T] - \mathcal{N}$. En vertu de lhypothèse 2 et la semi-continuité inférieure de f en $u(t)$, il existe un entier naturel $n_{\varepsilon,t} \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_{\varepsilon,t}$

$$f(u_n(t)) \geq f(u(t)) - \varepsilon \text{ et } \|u_n(t) - u(t)\| \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

Fixons $n \geq n_{\varepsilon,t}$ arbitraire et $x \in \overline{B}$ ($\overline{B}$ est la boule unité fermée). D'après les conditions 1 et 4, et le fait que f est pln en u_0, on obtient

$$f(x) \geq f(u_{k(t)}) + \langle v_k(t), x - u_k(t)\rangle - \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1}\|v_k(t)\|)\|x - u_k(t)\|^2.$$

Il résulte de la relation (3.8)

$$f(x) \geq f(u(t)) - \varepsilon + \langle v_k(t), x - u(t)\rangle - \varepsilon\|v_k(t)\| - \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1}\|v_k(t)\|)(\|x - u(t)\|^2 + 2\varepsilon\|x - u(t)\| + \varepsilon^2).$$

En multipliant les deux dernières inégalités par $\alpha_{\sigma(n),k}$ et en additionnant, on trouve

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(u(t)) \quad &- \quad \varepsilon + \langle \sum_{k\in K_{\sigma(n)}} \alpha_{\sigma(n),k} v_k(t), x - u(t)\rangle - \varepsilon(\sum_{k\in K_{\sigma(n)}} \alpha_{\sigma(n),k}\|v_k(t)\| \\ &- \quad \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1}(\sum_{k\in K_{\sigma(n)}} \|v_k(t)\|))(\|x - u(t)\|^2 + 2\varepsilon\|x - u(t)\| + \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Il s'ensuit de (3.8) que

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(u(t)) \quad &+ \quad \langle \sum_{k\in K_{\sigma(n)}} \alpha_{\sigma(n),k} v_k(t), x - u(t)\rangle - \varepsilon - \varepsilon S_t \\ &- \quad \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1} S_t)\|x - u(t)\|^2 \\ &- \quad \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1} S_t)(2\varepsilon\|x - u(t)\| + \varepsilon^2), \end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_{\varepsilon,t}$. En faisant tendre n vers $+\infty$

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(u(t)) \quad &+ \quad \langle v(t), x - u(t)\rangle \\ &- \quad \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1} S_t)\|x - u(t)\|^2 \\ &- \quad \varepsilon(1 + S_t + \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1} S_t))(2\|x - u(t)\| + \varepsilon) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \overline{B}(u_0, s_0)$ et $\varepsilon > 0$. Enfin, quand $\varepsilon \downarrow 0$ on obtient

$$f(x) \geq f(u(t)) + \langle v(t), x - u(t) \rangle - \frac{1}{2}(Q_0 + c_0^{-1} S_t) \|x - u(t)\|^2 \tag{3.10}$$

pour tout $x \in \overline{B}(u_0, s_0)$. Pour conclure, rappelons qu'on déduit, de la condition 1 et 2, que $v(t) \in \partial^P f(u(t))$ quelque soit $t \in [T_0, T] - \mathcal{N}$, ce qui achève la démonstration.

■

Nous rappelons dans ce qui suit la définition d'une fonction régulière (fonctions plus générales que celles des fonctions pln) ainsi qu'une propriété importante du sous différentiel de ces fonctions.

Définition 3.2.3. *Soient E un espace de Banach séparable, et V une fonction localement lipschitzienne en $x \in E$. V est dite régulière en x si pour tout $v \in E$, la dérivée directionnelle $V'(x, v)$ existe et coïncide avec la dérivée directionnelle généralisée $V^0(x, v)$.*

Proposition 3.2.9. *[9] Soient Ω un convexe ouvert de E, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et lipschitzienne sur tout borné de Ω, et $x : I \to \Omega$ une fonction à variation bornée, telle que Dx ayant pour densité $\frac{Dx}{D\eta} \in L^1_E(I, \eta)$. Donc la fonction $V \circ x$ est à variation bornée sur I, $D(V \circ x)$ est absolument continue et pour η presque par tout*

$$\langle \partial V(x(t)), \frac{Dx}{d\eta}(t) \rangle := \{\langle x', \frac{Dx}{d\eta}(t) \rangle : \ x' \in \partial V(x(t))\} = \{\frac{D(V \circ x)}{d\eta}(t)\}.$$

La proposition suivante due à Thibault et Zagrodny [84], nous sera utile pour établir un résultat d'existence en dimension infinie.

Proposition 3.2.10. *[84] Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre semi-continue inférieurement, et pln en $\bar{x} \in domf$ de constantes $\varepsilon > 0$, $c > 0$, et $T > 0$. Supposons que f est majorée sur $B(\bar{x}, \varepsilon)$ et que ∂f est inclus dans le sous différentiel de Clarke. Donc la fonction f est lipschitzienne et DC (différence de fonctions convexes) sur $B(\bar{x}, \alpha\varepsilon)$, où $\alpha \in]0, 1[$.*

3.3 Résultat principal

Rappelons d'abord un résultat d'existence pour le sous differntiel d'une fonction pln dû à Marcellin [56].

Théorème 3.3.1. *Soient $T_0 \in [0, +\infty[$ et $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre semi-continue inférieurement, et pln en $x_0 \in domf$ de constantes s_0, c_0, Q_0. Donc, il existe un nombre $T \in]T_0, +\infty[$ et une unique application absolument continue $x : [T_0, T] \to B(x_0, s_0)$*

solution du problème :

$$\begin{cases} 0 \in \dot{x}\,(t) + \partial f\,(x\,(t)) \;\; p.p. \;\, sur \;\, [T_0, T]\,, \\ x\,(T_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.11}$$

avec

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\| &\leq \|\partial^0 f(x_0)\| exp[(1 - \frac{s_0^{'}}{2c})^{-2}(Q_0(t-T_0) + 2c_0^{-1}(t-T_0)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}})], \quad (3.12) \\ c &:= c_0 - \|\partial^0 f(x_0)\| \max(Q_0, 2\|\partial^0 f(x_0)\| c_0^{-1})^{-1} \quad (3.13) \\ K &:= f(x_0) - \inf\{f(x) : x \in \overline{B}(x_0, s_0^{'})\}, \\ s_0^{'} &\in \,]0, s_0]. \end{aligned}$$

De plus, dans le cas particulier $x_0 \in dom\ \partial f$, *la solution* $x\,(.)$ *est lipschitzienne et vérifie :*

1. $f \circ x\,(.)$ *est lipschitzienne sur* $[T_0, T]\,,$
2. *pour presque tout* $t \in [T_0, T]\,,$ *la dérivée* $(f \circ x)'\,(t)$ *existe et on a*

$$(f \circ x)'\,(t) = -\,\|\dot{x}\,(t)\|^2\,,$$

et pour tout $T_0 \leq s \leq t \leq T$:

$$f\,(x(t)) - f(x(s)) = -\int_s^t \|\dot{x}\,(\tau)\|^2\, d\tau.$$

Remarque 3.3.1. *L'obtention d'une solution locale dans le théorème ci-dessus est consécutive à un processus d'approximation de l'inclusion différentielle par des équations différentielles ordinaires de la forme*

$$\begin{cases} \dot{u}_\lambda(t) + \nabla e_\lambda \bar{f}(u_\lambda(t)) = 0, \;\; t \in [T_0, T_\lambda[\\ u_\lambda(T_0) = u_0, \end{cases}$$

où $e_\lambda \bar{f}(.)$, $\lambda \in]0, \lambda_0]$ *désigne une enveloppe de Moreau locale de* f. *Il s'ensuit par un passage à la limite quand* $\lambda \to 0$, *en invoquant des propriétés de fermeture du graphe du sous différentiel de la fonction* f, *inhérentes au caractère pln de* f *en* u_0.

3.3.1 Résultat en dimension finie

Maintenant, nous sommes sur le point d'établir un résultat d'existence pour le problème (3.1) en dimension finie.

Théorème 3.3.2. *Sous les hypothèses*
(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert et* $F : \Omega \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ *une multifonction semi-continue supérieurement à*

valeurs non vides compactes,
(H_2) $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction semi-continue inférieurement, pln en* $x_0 \in Dom\, \partial f$ *de constantes* s_0, c_0, Q_0 *telle que*

$$F(x) \subset \partial f(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

(H_3) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de Carathéodory, i e. pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$,
$h(.,x)$ *est mesurable,* $h(t,.)$ *est continue, et il existe* $m(.) \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$ *tel que :*

$$\|h(t,x)\| \leq (1 + \|x\|)\, m(t), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ p.p. \ t \in \mathbb{R}.$$

Donc, il existe $T > 0$, *et une fonction absolument continue* $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *solution de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + h(t,x(t)) \ p.p. \ sur \ [0,T], \\ \qquad\qquad x(0) = x_0. \end{cases}$$

Preuve. Comme Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que l'ensemble compact $K = \overline{B}(x_0, r)$ est inclus dans Ω. De plus, d'après l'hypothèse (H_1) et la Proposition 1.1.6, $F(K) = \underset{x \in K}{\cup} F(x)$ est un compact, et par suite il existe M tel que :

$$\sup \{\|u\|, \ u \in F(x), \ x \in K\} \leq M. \tag{3.14}$$

f est pln en x_0, donc $\forall x \in \overline{B}(x_0, s_0)$, pour tout $q \geq Q_0$ et tout $u \in \partial^P f(x)$, avec $\|u\| \leq c_0 q$ on a

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle - \frac{q}{2} \|y - x\|^2$$

pour chaque $y \in \overline{B}(x_0, s_0)$.
Choisissons $T' > 0$ tel que

$$\int_0^{T'} (M + \alpha m(t)) dt < \frac{r}{2},$$

où $\alpha = 1 + \|x_0\| + \frac{r}{2}$.
Posons $r_0 = \min(\frac{r}{2}, s_0)$, $T = \min(\frac{r_0}{M}, T')$ et $I = [0,T]$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour $0 \leq i \leq n-1$, on pose $t_n^i = \frac{iT}{n}$; $I_n^i = [t_n^i, t_n^{i+1}[$, et pour tout $t \in I_n^i$, on définit

$$x_n(t) = x_n^i + \left(t - t_n^i\right) u_n^i + \int_{i\frac{T}{n}}^{t} h(s, x_n^i) ds, \tag{3.15}$$

où $x_n(0) = x_n^0 = x_0$ et

$$x_n(t_n^i) = x_n^i = x_n^{i-1} + \frac{T}{n} u_n^{i-1} \ \text{ pour tout } \ i \in \{1, 2, ..., n\}, \tag{3.16}$$

$$u_n^i \in F(x_n^i), \ \text{ pour tout } \ i \in \{0, 1, 2, ..., n\}. \tag{3.17}$$

(x_n) est bien définie sur $[0,T]$. Il est clair que $\forall i \in \{1,2,......,n\}$

$$\begin{aligned}\|x_n^i - x_n^0\| &= \frac{T}{n}(u_n^0 + u_n^1 + ... + u_n^{i-1}) \\ &\leq \frac{T}{n}(\|u_n^0\| + \|u_n^1\| + \|u_n^2\| + \ldots + \|u_n^{i-1}\| \\ &\leq \frac{iTM}{n} \leq \frac{r}{2},\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$x_n(t_n^i) = x_n^i \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2}). \tag{3.18}$$

On obtient de (3.14) et (3.15), pour tout $t \in [t_n^i, t_n^{i+1}[$

$$\begin{aligned}\left\|x_n(t) - x_n(t_n^i)\right\| &\leq \int_{t_n^i}^t (M + \left(1 + \|x_0\| + \frac{r}{2}\right) m(\tau))d\tau \\ &\leq \int_{t_n^i}^t (M + \alpha m(\tau))d\tau < \frac{r}{2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

En vertu de (3.18) et (3.19), on déduit que

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - x_0\| &\leq \left\|x_n(t) - x_n(t_n^i)\right\| + \left\|x_n(t_n^i) - x_0\right\| \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,\end{aligned}$$

et donc

$$x_n(t) \in \overline{B}(x_0, r), \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{3.20}$$

En dérivant dans (3.15) on obtient

$$\dot{x}_n(t) = u_n^i + h(t, x_n(t)) \ \forall t \in \left]t_n^i, t_n^{i+1}\right[, \tag{3.21}$$

la dernière égalité plus (3.14) assure que

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq M + \alpha m(t) \quad \text{p.p. } \ t \in [0,T], \tag{3.22}$$

donc

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq \int_0^T (M + \alpha m(t))^2 dt,$$

et par suite, la suite $(\dot{x}_n)_n$ est bornée dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ pour tous t, $s \in [0,T]$, $0 \leq s < t \leq T$

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| = \left\|\int_s^t \dot{x}_n(\tau)d\tau\right\| \tag{3.23}$$

$$\leq \int_s^t (M + \alpha m(\tau))d\tau, \tag{3.24}$$

en appliquant le Théorème 1.2.4, il existe une sous suite, notée aussi $(x_n)_n$ et une fonction absolument continue, $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, telles que $(x_n)_n$ converge uniformément dans $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$

vers x et $(\dot{x}_n)_n$ converge faiblement dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers $\dot{x}$. Soit θ_n définie de $[0,T]$ vers $[0,T]$ par $\theta_n(t) = t_n^i$ pour tout $t \in [t_n^i, t_n^{i+1}[$, $\theta_n(T) = T$, alors des relations (3.15), (3.17), et (3.21) on obtient

$$\dot{x}_n(t) - h(t, x_n(t)) \in F(x_n(\theta_n(t)) \subset \partial f(x_n(\theta_n(t)), \tag{3.25}$$

et par (3.18), $x_n(\theta_n(t)) \in \overline{B}(x_0, r)$, pour tout $t \in [0,T]$. On a $|\theta_n(t) - t| \leq \frac{T}{n}$ pour tout $t \in [0,T]$, donc $\theta_n(t) \to t$ uniformément sur $[0,T]$. De plus, on conclut de la convergence uniforme de (x_n) et (θ_n), que $x_n(\theta_n(t)) \to x(t)$. En utilisant (H_2) et la Proposition 3.2.8, on obtient

$$\dot{x}(t) - h(t, x(t)) \in \partial f(x(t)). \tag{3.26}$$

D'après le Théorème 3.3.1, les fonctions $t \to x(t)$ et $t \to f(x(t))$ sont lipschitziennes, donc par application de la Proposition 3.2.9

$$\frac{d}{dt} f(\dot{x}(t)) = \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) - h(t, x(t)) \rangle$$

pour presque tout $t \in [0,T]$, d'où

$$f(x(T)) - f(x(0)) = \int_0^T \|\dot{x}(\tau)\|^2 \, d\tau - \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), h(\tau, x(\tau)) \rangle \, d\tau. \tag{3.27}$$

D'autre part, comme

$$\dot{x}_n(t) - h(t, x_n(t_n^i) \in F(x_n(t_n^i)) \subset \partial f(x_n(t_n^i)), \ \forall t \in \left]t_n^i, t_n^{i+1}\right[,$$

et en utilisant le fait que f est pln en x_0, il résulte pour tout $q \geq \max(Q_0, \frac{M}{c_0})$

$$\begin{aligned}
f(x_n(t_n^{i+1}) - f(x_n(t_n^i)) &\geq \left\langle \dot{x}_n(t) - h(t, x_n(t_n^i)), x_n(t_n^{i+1}) - (x_n(t_n^i) \right\rangle \\
&- \frac{q}{2} \left\| x_n(t_n^{i+1}) - x_n(t_n^i) \right\|^2 \\
&\geq \left\langle \dot{x}_n(t) - h(t, x_n(t_n^i)), \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \dot{x}_n(t) dt \right\rangle \\
&- \frac{q}{2} \left\| x_n(t_n^{i+1}) - x_n(t_n^i) \right\|^2 \\
&\geq \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \| \dot{x}(t) \|^2 \, dt - \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \left\langle h(t, x_n(t_n^i)), \dot{x}_n(t) \right\rangle dt \\
&- \frac{q}{2} \left\| x_n(t_n^{i+1}) - x_n(t_n^i) \right\|^2 \\
&\geq \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \| \dot{x}(t) \|^2 \, dt - \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \left\langle h(t, x_n(t_n^i)), \dot{x}_n(t) \right\rangle dt \\
&- \frac{q}{2} (\frac{T^2}{n^2} \left\| u_n^i \right\|^2) \\
&\geq \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \| \dot{x}(t) \|^2 \, dt - \int_{t_n^i}^{t_n^{i+1}} \left\langle h(t, x_n(t_n^i)), \dot{x}_n(t) \right\rangle dt \\
&- \frac{q}{2} (\frac{T^2}{n^2} M^2).
\end{aligned}$$

Par addition, on obtient,

$$f(x_n(T)) - f(x_0) \geq \int_0^T \| \dot{x}_n(t) \|^2 \, dt - \int_0^T \left\langle h(t, x_n(t_n^i)), \dot{x}_n(t) \right\rangle dt - \frac{qT^2 M^2}{2n^2}, \tag{3.28}$$

comme $n \to +\infty$, $\frac{qT^2M^2}{2n^2} \to 0$, la convergence de $(x_n(.))$ dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ en norme et la convergence faible de $(\dot{x}_n)$ dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ implique

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \left\langle h(t, x_n(t_n^i)), \dot{x}_n(t) \right\rangle dt = \int_0^T \langle h(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle \, dt.$$

Par passage à la limite supérieure dans (3.28) et de la continuité de f, on obtient

$$f(x(T)) - f(x_0) \geq \limsup_{n \to +\infty} \int_0^T \| \dot{x}_n(t) \|^2 \, dt - \int_0^T \langle h(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle \, dt, \tag{3.29}$$

d'après la relation (3.27)

$$\| \dot{x}(t) \|_{L^2}^2 \geq \limsup_{n \to +\infty} \| \dot{x}_n(t) \|_{L^2}^2 ,$$

par la semi-continuité inférieure de la norme

$$\| \dot{x}(t) \|_{L^2}^2 \leq \liminf_{n \to +\infty} \| \dot{x}_n(t) \|_{L^2}^2 ,$$

par conséquent

$$\|\dot{x}(t)\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to+\infty} \|\dot{x}_n(t)\|_{L^2}^2 .$$

Comme

$$\dot{x}_n(t) - h(t, x_n(t) \in F(x_n(\theta_n(t)), \quad \text{p. p.}$$

et l'hypothèse (H_1) assure que le graphe de F est fermé et pour presque tout $t \in [0, T]$, $(x_n(t), \dot{x}_n(t) - h_n(t, x_n(t)))$ converge vers $(x(t), \dot{x}(t) - h(t, x(t)))$, on en conclut que

$$\dot{x}(t) - h(t, x(t)) \in F(x(t)), \ \text{p.p. sur } [0, T],$$

ce qui achève la démonstration.

■

3.3.2 Résultat en dimension infinie

Revenons maintenant à l'étude du problème (3.1) dans un espace de Hilbert de dimension infinie, en utilisant la même technique de démonstration utilisée par Yarou [87].

Théorème 3.3.3. *Sous les hypothèses suivantes*
(H_1) $\Omega \subset H$ *un ouvert et* $F : \Omega \rightharpoonup H$ *une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs non vides compactes,*
(H_2') $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction semi-continue inférieurement, pln en* $x_0 \in Dom\ \partial f$ *de constantes* s_0, c_0, Q_0 *telle que*

$$F(x) \subset \partial f(x) \ \ \forall x \in \Omega, \quad F(x) \subset (1 + \|x\|)K,$$

K *est un ensemble convexe compact et* f *est majorée sur* $\overline{B}(x_0, s_0)$.
(H_3') $h : \mathbb{R}^+ \times H \to H$ *est mesurable en* t *et lipschitzienne en* x*, et pour tout sous ensemble borné* $\mathcal{B}$ *de* H*, il existe un ensemble compact* K_1 *tel que* $h(t, x) \in K_1$ *pour tout* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$*. Donc, il existe* $T > 0$*, et une fonction absolument continue* $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *solution de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + h(t, x(t)) \ \textit{p.p. sur } [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Preuve. Comme Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r)$ est incluse dans Ω. f est une fonction pln, alors pour tout $x \in \overline{B}(x_0, s_0)$, pour tout $q \geq Q_0$ et tout $u \in \partial^P f(x)$, avec $\|u\| \leq c_0 q$, on a

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle - \frac{q}{2} \|y - x\|^2 .$$

La semi-continuité inférieure de f en x_0 implique que f est minorée sur $\overline{B}(x_0, s_0)$ (on peut choisir s_0 suffisamment petit). Fixons $\beta \in]0,1[$, D'après la Proposition 3.2.10, il existe $L > 0$ tel que $\partial^P f(x) \subset L\overline{B}$, quelque soit $x \in \overline{B}(x_0, \beta s_0)$. Par l'hypothèse (H_3'), il existe une constante m telle que

$$h(t,x) \in K_1 \subset mB \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{B}(x_0, r). \tag{3.30}$$

De plus, d'après l'hypothèse (H_2'), il existe une constante positive m_1 telle que pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$,

$$F(x) \subset (1 + \|x_0\| + r)\, K \subset m_1 B. \tag{3.31}$$

Choisissons T vérifiant

$$0 < T < \frac{r_0}{(m_1 + m)}, \tag{3.32}$$

où $r_0 = \min(\frac{r}{2}, \beta s_0)$. Soit $I = [0,T]$, pour chaque entier $n \geq 1$ et pour $0 \leq i \leq n-1$, on pose $t_n^i = \frac{iT}{n}$; $I_n^i = [t_n^i, t_n^{i+1}[$, et considérons la même discrétisation (3.15) , (3.16) et (3.17). On obtient (3.18) , (3.19) , et (3.20) .
En effet, on définit

$$x_n(t) = x_n^i + \left(t - t_n^i\right) u_n^i + \int_{i\frac{T}{n}}^{t} h(s, x_n^i) ds, \tag{3.33}$$

où $x_n(0) = x_n^0 = x_0$ et

$$x_n(t_n^i) = x_n^i = x_n^{i-1} + \frac{T}{n} u_n^{i-1} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., n\}, \tag{3.34}$$

$$u_n^i \in F(x_n^i), \text{ pour tout } i \in \{0, 1, 2, ..., n\}. \tag{3.35}$$

(x_n) est bien définie sur $[0,T]$. Il est clair que $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\begin{aligned} x_n^i - x_n^0 &= \frac{T}{n}(u_n^0 + u_n^1 + ... + u_n^{i-1}) \\ &\leq \frac{T}{n}(\|u_n^0\| + \|u_n^1\| + \|u_n^2\| + \ldots + \|u_n^{i-1}\| \\ &\leq \frac{iTM}{n} \leq \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$x_n(t_n^i) = x_n^i \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2}). \tag{3.36}$$

On obtient de $(3.30, 3.31, 3.32)$ et (3.33), pour tout $t \in [t_n^i, t_n^{i+1}[$

$$\left\|x_n(t) - x_n(t_n^i)\right\| \leq \frac{T}{n} m_1 + \frac{T}{n} m \tag{3.37}$$

$$= \frac{T}{n}(m_1 + m) < \frac{r}{2}. \tag{3.38}$$

En vertu de (3.36) et (3.38) on déduit que

$$\begin{aligned} \|x_n(t)-x_0\| &\leq \left\|x_n(t)-x_n(t_n^i)\right\| + \left\|x_n(t_n^i)-x_0\right\| \\ &\leq \frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r, \end{aligned}$$

et donc

$$x_n(t) \in \overline{B}(x_0,r), \text{ pour tout } t\in[0,T]. \tag{3.39}$$

En répétant les mêmes arguments de démonstration du Théorème 3.3.2, on obtient : pour tout $t,\ s\in[0,T]$, $0\leq s<t\leq T$

$$\begin{aligned} \|x_n(t)-x_n(s)\| &= \left\|x_0+\int_0^t \dot{x}_n(\tau)d\tau - x_0 - \int_0^s \dot{x}_n(\tau)d\tau\right\| \\ &= \left\|\int_s^t \dot{x}_n(\tau)d\tau\right\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{x}_n(\tau)\|\, d\tau \leq \int_s^t (m_1+m)d\tau \\ &\leq (m_1+m)\,|t-s|\,. \end{aligned} \tag{3.40}$$

La suite $(x_n)_n$ est donc un ensemble équi-lipschitzien de $\mathcal{C}_H([0,T])$, et l'ensemble $\{x_n(t) : n\in\mathbb{N}^*\}$ est relativement compact dans H pour tout $t\in[0,T]$ puisque

$$x_n(t)\in x_0+\left(K_1+(1+\|x_0\|+r)\,K\right)[0,T] := K_2.$$

En Appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut extraire une sous suite, encore notée $(x_n)_n$ et une fonction absolument continue, $x:[0,T]\to H$, telles que $(x_n)_n$ converge uniformément sur $\mathcal{C}([0,T],H)$ vers x. En outre, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(t)=u_n^i$, $t\in[t_n^i,t_n^{i+1}[$ est $\sigma(L^1([0,T],H),L^\infty([0,T],H))-$ relativement compacte, puisque l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n(t)\in(1+\|x_0\|+r)\,K. \tag{3.41}$$

D'où, en extrayant une sous suite, il existe $u\in L^1([0,T],H)$ telle que $u_n\to u$
$\sigma(L^1([0,T],H),L^\infty([0,T],H))$. On a également $h(.,x_n\ (\theta_n\,(.))\to h(.,x\ (.))$ en norme dans $L^1([0,T],H)$. Par conséquent, pour tout $t\in[0,T]$

$$x(t)=x_0+\lim_{n\to\infty}\int_0^t\left[h\left(s,x_n\left(\theta_n\left(s\right)\right)\right)+u_n\left(s\right)\right]ds = x_0+\int_0^t\left[h\left(s,x\left(s\right)\right)+u(s)\right]ds,$$

ce qui entraîne que

$$\dot{x}\left(t\right)=h\left(s,x\left(s\right)\right)+u(s) \text{ pour presque tout } t\in[0,T].$$

Comme u_n converge faiblement vers u, $\dot{x}_n$ converge faiblement vers $\dot{x}$.
Par construction, on a pour presque tout $t\in[0,T]$

$$\dot{x}_n\left(t\right)-h\left(s,x_n\left(\theta_n\left(t\right)\right)\right)=u_n\left(t\right)\in F\left(x_n\left(\theta_n\left(t\right)\right)\right),$$

et en utilisant $\left(H_2'\right)$,

$$\begin{aligned} u_n(t) &\in F\left(x_n\left(\theta_n(t)\right)\right) \subset \left(1 + \left\|x_n\left(\theta_n(t)\right)\right\|\right) K \\ &\subset \left(1 + \|x_0\| + r\right) K. \end{aligned}$$

$u_n(t)$ est donc, dans l'ensemble compact fixe $(1 + \|x_0\| + r)\,K$, par conséquent converge fortement vers $u(t)$ ce qui implique la convergence forte de $\dot{x}_n(t)$. Or le graphe de F est fermé, on obtient

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) + h(t, x(t)) \text{ p.p. sur } [0, T].$$

On conclut que, l'inclusion différentielle (3.1) admet une solution.
Ceci termine la démonstration.

$\blacksquare$

CHAPITRE 4

Résultat d'existence de solutions viables pour un problème gouverné par le sous différentiel d'une fonction pln

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons deux résultats d'existence de solutions viables pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par le sous différentiel d'une fonction pln. Nous résolvons d'abord le problème autonome qui se présente sous la forme

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \; x(0) = x_0 \in C, \tag{4.1}$$

où C est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$, $F : C \subset \mathbb{R}^m \rightharpoonup \mathbb{R}^m$ est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs non vides compactes telle que $F(x(t)) \in \partial V(x(t))$ dans $[0, T]$, avec V une fonction pln.

Bressan, Cellina et Colombo [20] ont prouvé l'existence de solutions du problème de Cauchy (4.1), où F est une multifonction semi-continue supérieurement cycliquement monotone à valeurs compactes. Rossi [78] a prouvé la viabilité du problème. Depuis, Benabdellah [8] a étudié le même problème en dimension finie, en remplaçant la convexité sur V par la régularité directionnelle, puis en dimension infinie en ajoutant des hypothèses supplémentaires dans [8, 9]. Ce problème a connu plusieurs extensions, citons entre autres les contributions des auteurs dans [1, 8, 14, 16, 61] à la résolution du problème avec perturbation univoque et perturbation multivoque en introduisant de nouvelles notions de régularité de fonctions telles la régularité uniforme. D'une manière abstraite, une solution viable est obtenue en ajoutant aux conditions entrainant l'existence de solutions, une hypothèse sur la direction du champ multivoque dite condition tangentielle. Dans le présent travail, la condition de tangence adoptée est la suivante :

$$F(x)T_C(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in C \quad \text{p.p. sur } [0, +\infty[\,, \tag{4.2}$$

où

$$T_C(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^m; \liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} d(x + hv, C) = 0 \right\}$$

est le cône contingent de C en $x \in C$. Les techniques de démonstration reposent sur la méthode d'Euler : nous construisons une suite de solutions approchées et, nous montrons que nous pouvons en extraire une sous suite qui, en appliquant un théorème de fermeture correspondant au sous différentiel des fonctions pln, converge vers une solution du problème. En suite, nous allons établir un résultat d'existence de solution pour le problème non autonome, en utilisant la même méthode utilisée par Cernea [32] et qui consiste à ramener le problème non autonome à un problème autonome. Nous résolvons le problème suivant :

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ x(0) = x_0 \in C. \tag{4.3}$$

4.2 Résultat principal

4.2.1 Cas autonome

Théorème 4.2.1. *Soit C un sous ensemble non vide fermé de $\mathbb{R}^m$. Soit F une multifonction définie sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs non vides compactes dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant les conditions suivantes :*
(H_1) F est semi-continue supérieurement, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\|x - x'\| \leq \delta$ alors $F(x') \subseteq F(x) + \varepsilon B$ où B est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^m$.
(H_2) Il existe une fonction semi-continue inférieurement, pln en $x_0 \in Dom\partial V$ de constantes s_0, c_0, Q_0 $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfaisant

$$F(x) \subset \partial V(x) \ \forall x \in \Omega, \tag{4.4}$$

(H_3) (Condition tangentielle)

$$F(x)T_C(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in C. \ p.p. \ sur \ [0, +\infty[\,, \tag{4.5}$$

où

$$T_C(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^m; \liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} d(x + hv, C) = 0 \right\}$$

est le cône contingent de C en $x \in C$. Alors, pour tout $x_0 \in C$, il existe $T > 0$ tel que le problème

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),\ x(0) = x_0 \ p.p. \ sur \ [0, T], \tag{4.6}$$

admet une solution sur $[0, T]$ vérifiant $x(t) \in C$, $\forall t \in [0, T]$.

Soit $x_0 \in C$, comme C est localement compact, il existe $r > 0$ tel que l'ensemble $C_0 = CB(x_0, r)$ est compact.
Il résulte de la semi-continuité supérieure de F dans (H_1) et la Proposition 1.1.6 que $F(C_0) = \underset{x\in C_0}{\cup} F(x)$ est un compact, et par suite, il existe M tel que :

$$\sup\{\|u\|,\ u \in F(x),\ x \in C_0\} \leq M \tag{4.7}$$

On pose $r_0 = \min(\frac{r}{2}, s_0)$. Prenons $T \leq \frac{r_0}{(M+1)}$.

Enonçons d'abord un lemme qui est très utile dans la suite.

Lemme 4.2.2. *Supposons que F vérifie les conditions (H_1), (H_2), et (H_3). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ $(\eta < \varepsilon)$ possédant la propriété suivante :*
pour tout $x \in C_0$, il existe $u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T}$ et $h_x \in [\eta, \varepsilon]$ tels que

$$x + h_x u \in C.$$

Preuve. Soient $x \in C_0$ et $0 < \varepsilon < \inf(T, 1)$. Comme F est semi-continue supérieurement, il existe donc $\delta_x > 0$ tel que

$$F(y) \subset F(x) + \varepsilon B,\ \forall y \in B(x, \delta_x).$$

Soit $y \in C$. En vertu de la condition tangentielle, il existe $h_y \in [0, \varepsilon]$ et $v \in F(y)$ tels que

$$d(y + h_y v, C) < h_y \frac{\varepsilon}{4T}. \tag{4.8}$$

Considérons le sous ensemble

$$N(y) = \{z \in \mathbb{R}^m / d(z + h_y v, C) < h_y \frac{\varepsilon}{4T}\}.$$

En utilisant la continuité de $z \to d(z + h_y v, C)$, il s'ensuit que $N(y)$ est un ouvert. De plus, comme y appartient à $N(y)$, il existe une boule $B(y, \eta_y)$ de rayon $\eta_y < \delta_x$ contenue dans $N(y)$. Ce qui implique que le sous ensemble compact C_0 admet un recouvrement par q boules $B(y_i, \eta_{y_i})$. Pour simplifier, on pose $h_{y_i} = h_i,\ i = 1, ..., q$. Posons $\eta = \min_{i=1,\dots,q} h_i > 0$.

Comme $x \in C_0$, on a $x \in B(y_i, \eta_{y_i})$ qui est incluse dans $N(y_i)$, d'où il existe $x_i \in C$ et $u_i \in F(y_i)$ tels que

$$\|u_i - \frac{1}{h_i}(x_i - x)\| \leq \frac{1}{h_i} d(x + h_i u_i, C) + \frac{\varepsilon}{4T} \leq \frac{\varepsilon}{2T}. \tag{4.9}$$

Posons

$$u = \frac{1}{h_i}(x_i - x),$$

d'où

$$x_i := x + h_i u \in C,$$

et

$$\|u_i - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2T}.$$

Or

$$\|x - y_i\| < \eta_y < \delta_x,$$

ce qui entraine

$$F(y_i) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2T} B,$$

par conséquent

$$u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T} B.$$

Ceci termine la démonstration.

■

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème 4.2.1.

Preuve. Nous allons démontrer l'existence d'une solution viable pour le problème (4.6), définie sur l'intervalle $[0, T]$. Comme $x_0 \in C_0$, donc d'après le Lemme 4.2.2, il existe $h_0 \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_0 \in F(x_0) + \frac{\varepsilon}{T} B$ tels que

$$x_0 + h_0 u_0 \in C.$$

On définit

$$x_1 := x_0 + h_0 u_0, \tag{4.10}$$

On remarque que, si $h_0 < T$, on a

$$\|x_1 - x_0\| = h_0 \|u_0\| < h_0 (M + 1),$$

et par le choix de T on obtient

$$\|x_1 - x_0\| < r.$$

D'où $x_1 \in C_0$ et en utilisant le Lemme 4.2.2, il existe $h_1 \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_1 \in F(x_1) + \frac{\varepsilon}{T} B$ tels que

$$x_1 + h_1 u_1 \in C.$$

Supposons que $h_0 + h_1 < T$ et définissons

$$x_2 = x_1 + h_1 u_1. \tag{4.11}$$

Donc d'après les égalités (4.10) et (4.11) on a

$$x_2 := x_0 + h_0 u_0 + h_1 u_1,$$

et or $h_0 + h_1 < T$ et

$$\|x_2 - x_0\| \leq h_k^0 \|u_0\| + h_1 \|u_1\| < (h_0 + h_1)(M+1),$$

il s'ensuit que

$$\|x_2 - x_0\| < r,$$

Ainsi

$$x_2 \in C_0.$$

Par récurrence, comme h_i appartient à $[\eta, \varepsilon]$, alors il existe un entier s tel que $\sum\limits_{i=0}^{s-1} h_i < T < \sum\limits_{i=0}^{s} h_i$. Par conséquent, on construit les suites $(h_p)_p \subset [\eta, \varepsilon]$, $(x_p)_p \subset C_0$, et $(u_p)_p$ tels que pour tout $p = 0, ...s-1$, on a

$$\begin{aligned} & x_{p+1} = x_p + h_p u_p \in C_0 \\ & u_p \in F(x_p) + \frac{\varepsilon}{T} B. \end{aligned}$$

Par récurrence, pour tout $p \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} x_p &= x_0 + \sum_{i=0}^{i=p-1} h_i u_i \\ u_p &\in F(x_p) + \frac{\varepsilon}{T} B, \end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned} \|x_p - x_0\| &\leq h_0 \|u_0\| + h_1 \|u_1\| + ...h_{p-1} \|u_{p-1}\| \\ &< \sum_{i=0}^{p-1} h_i \, (M+1) \, . \end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{i=0}^{p-1} h_i < T$, on déduit que

$$\|x_p - x_0\| < r,$$

par conséquent $x_p \in C_0$.

Pour tout entier k non nul et pour tout entier $q = 0, ..., s$, On note par h_q^k un nombre réel associé à $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et $x = x_q$ donné par le Lemme 4.2.2, considérons la suite $(\tau_k^q)_k$ définie comme suit

$$\begin{aligned}
&\tau_k^0 = 0,\ \tau_k^s = T \\
&\tau_k^q = h_0^k + ... + h_{q-1}^k,
\end{aligned}$$

et on définit sur $[0, T]$ la suite de fonctions $(x_k(.))_k$

$$\begin{aligned}
&x_k(t) = x_{q-1} + (t - \tau_k^{q-1})u_{q-1},\ \forall t \in [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q] \\
&x_k(0) = x_0,
\end{aligned}$$

donc pour tout $t \in [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q]$

$$\dot{x}_k\,(t) = u_{q-1}.$$

Observons que la suite $(x_k(.))_k$ vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_k(t)\| &= \|u_{q-1}\| < M + 1, && (4.12) \\
\|x_k(t)\| &\leq \|x_{q-1}\| + \left(t - t_k^{p-1}\right) \|u_{q-1}\| \\
&< \|x_0\| + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
&< r. && (4.13)
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\dot{x}_k(t) = u_{q-1} \in F(x_k(\tau_k^{q-1}) + \frac{1}{kT}, \tag{4.14}$$

donc, en vertu de (4.12) et (4.14), on obtient $(\dot{x}_k)_k$ est bornée dans $L^2\left([0, T], \mathbb{R}^m\right)$, $(x_k)_k$ est bornée dans $\mathcal{C}\left([0, T], \mathbb{R}^m\right)$ et équi-lipschitzienne, il résulte, par application du théorème d'Ascoli-Arzelà, qu'il existe une sous suite (encore notée $(x_k)_k$) et une fonction absolument continue $x : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ telles que

i) $(x_k)_k$ converge uniformément vers x,

ii) $(\dot{x}_k)_k$ converge faiblement dans $L^2\left([0, T], \mathbb{R}^m\right)$ vers $\dot{x}$.

D'après (H_2) et la Proposition 3.2.8 on obtient

$$\dot{x}(t) \in \partial V(x(t)),\ \text{p.p. sur}\ [0, T].$$

D'après le Théorème 3.3.1, les fonctions $t \to x(t)$ et $t \to V(x(t))$ sont lipschitziennes, donc par application de la Proposition 3.2.9

$$\frac{d}{dt} V(\dot{x}(t)) = \|\dot{x}(t)\|^2$$

pour presque tout $t \in [0,T]$, d'où

$$V(x(T)) - V(x(0)) = \int_0^T \|\dot{x}(\tau)\|^2 \, d\tau. \tag{4.15}$$

D'autre part, comme pour tout $q = 1, ..., s$

$$\dot{x}_k \in \partial V\left(x_k(\tau_k^{q-1})\right) + \frac{1}{kT}B, \tag{4.16}$$

il existe $b_q \in B$ tel que

$$\dot{x}_k + \frac{1}{kT}b_q \in \partial V\left(x_k(\tau_k^{q-1})\right), \tag{4.17}$$

et donc les propriétés du sous différentiel des fonctions pln implique, pour tout $z \in \partial V\left(x_k(\tau_k^{q-1})\right)$

$$V(x_k(\tau_k^q)) - V(x_k(\tau_k^{q-1})) \geq \left\langle z, x_k(\tau_k^q) - x_k(\tau_k^{q-1})\right\rangle - \frac{Q_0}{2}\left\|x_k(\tau_k^q) - (x_k(\tau_k^{q-1})\right\|^2$$

pour $z = \dot{x}_k(t) + \frac{1}{kT}b_q$ on a :

$$\begin{aligned}
V(x_k(\tau_k^q)) - V(x_k(\tau_k^{q-1})) &\geq \left\langle \dot{x}_k(t) + \frac{1}{kT}b_q, x_k(\tau_k^q) - x_k(\tau_k^{q-1})\right\rangle - \frac{Q_0}{2}\left\|x_k(\tau_k^q) - (x_k(\tau_k^{q-1})\right\|^2 \\
&\geq \left\langle \dot{x}_k(t) + \frac{1}{kT}b_q, \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \dot{x}_k(s)ds\right\rangle - \frac{Q_0}{2}\left\|x_k(\tau_k^q) - (x_k(\tau_k^{q-1})\right\|^2 \\
&\geq \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(s), \dot{x}_k(s)\rangle \, ds + \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \left\langle \dot{x}_k(s), \frac{1}{kT}b_q\right\rangle ds \\
&- \frac{Q_0}{2}\left\|x_k(\tau_k^q) - (x_k(\tau_k^{q-1})\right\|^2.
\end{aligned}$$

En faisant la sommation, on obtient

$$\begin{aligned}
V(x_k(T)) - V(x_0) &\geq \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds + \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(s), b_q \rangle \, ds \\
&- \sum_{q=1}^{s} \frac{Q_0}{2} \left\| x_k(\tau_k^q) - (x_k(\tau_k^{q-1}) \right\|^2 . \\
&\geq \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds + \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(s), b_q \rangle \, ds \\
&- \frac{Q_0}{2} \sum_{q=1}^{s} |\tau_k^q - \tau_k^{q-1}|^2 \left\| u_{q-1} \right\|^2 . \\
&\geq \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds + \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(s), b_q \rangle \, ds \\
&- \frac{Q_0}{2} \sum_{q=1}^{s} |\tau_k^q - \tau_k^{q-1}|^2 M^2. \\
&\geq \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds + \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(s), b_q \rangle \, ds \\
&- \frac{Q_0}{2} \sum_{q=1}^{s} |h_{q-1}^k|^2 M^2. \\
&\geq \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds + \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(s), b_q \rangle \, ds \\
&- \frac{Q_0}{2} \frac{s}{k^2} M^2.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite pour $k \to \infty$, on obtient

$$V(x(T)) - V(x_0) \geq \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \|\dot{x}_k(t)\|^2 \, dt. \tag{4.18}$$

Donc, grâce à (4.15) et (4.18) ,

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt \geq \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \|\dot{x}_k(t)\|^2 \, dt,$$

et la convergence faible de $(\dot{x}_k)_k$ dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ vers $\dot{x}$, en utilisant la Proposition 1.2.1, on obtient $(\dot{x})_k$ converge fortement dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ vers $\dot{x}$, et par conséquent, une suite encore notée $(\dot{x}_k)_k$ converge simplement p.p. vers $\dot{x}$. Or, d'après (4.14)

$$\lim_{k\to\infty} d\left((x_k(t), \dot{x}_k(t)), graph(F)\right) = 0,$$

et en vertu de la condition (H_1) le graphe de F est fermé et sur le complémentaire d'un ensemble négligeable, $(x_n(t), \dot{x}_n(t))$ converge to $(x(t), \dot{x}(t))$. On conclut que

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ p.p. sur } [0,T].$$

Il reste à démontrer $x(t) \in C_0$, $\forall t \in [0,T]$. En effet, $t \in [0,T]$, il existe $(\tau_k^q)_k$ tel que $\lim_{k\to\infty} \tau_k^q = t$ pour tout $t \in [0,T]$. Comme

$$\lim_{k\to\infty} \|x(t) - x_k(\tau_k^q)\| = 0,$$

$x_k(\tau_k^q) \in C_0$, C_0 est fermé, par passage à la limite, on obtient que $x(t) \in C_0$, pour tout $t \in [0,T]$, ce qui achève la démonstration.

■

4.2.2 Cas nonautonome

Le résultat suivant dû à C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [28] est une version multivoque du théorème de Scorza Dragoni et qui jouera un rôle important dans la preuve du Théorème 4.2.4.

Théorème 4.2.3. *[28] Soient $I = [0,T]$, $T > 0$ et λ la mesure de Lebesgue sur I. Soient X un espace polonais et Y un espace métrique compact. Soit $F : I \times X \rightharpoondown Y$ une multifonction à valeurs non vide fermées satisfaisant :*

1. *$\forall t > 0$, $gphF_t = \{(x,y) \in X \times Y / \ y \in F(t,x)\}$ est un fermé de $X \times Y$,*
2. *$\forall x \in X$, la multifonction $t \to F(t,x)$ admet une sélection $\mathcal{L}(I) \times \mathcal{B}(Y)$-mesurable,*

donc il existe une multifonction $F_0 : I \times X \rightharpoondown Y \cup \{\emptyset\}$ à valeurs non vides fermées, de graphe mesurable vérifiant les propriétés suivantes :

1. *il existe un ensemble N de mesure nulle indépendant de (t,x), tel que*

$$F_0(t,x) \subset F(t,x), \quad \forall t \notin N, \quad \forall x \in X,$$

2. *si $u : I \to X$ et $v : I \to Y$ sont deux fonctions mesurables tels que : $v(t) \in F(t,u(t))$ p.p., alors $v(t) \in F_0(t,u(t))$ p.p.,*
3. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous ensemble compacte $J_\varepsilon \subset I$ tel que $\lambda(I \setminus J_\varepsilon) < \varepsilon$, le graphe de la restriction $F_0 \backslash_{J_\varepsilon \times X}$ est fermé et $\emptyset \neq F_0(t,x) \subset F(t,x)$, $\forall (t,x) \in J_\varepsilon \times X$.*

Maintenant nous sommes sur le point d'établir un résultat d'existence pour le problème non autonome.

Théorème 4.2.4. *Soit $C \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble non vide fermé et soit*
$F : [0, +\infty[\times C \rightharpoondown \mathbb{R}^m$ *une multifonction satisfaisant :*

1. *F est bornée, mesurable en t, semi-continue supérieurement en x, à valeurs non vides fermées,*
2. *il existe une fonction propre semi-continue inférieurement $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que V est pln en $x_0 \in Dom\partial V$ de constantes s_0, c_0, Q_0 et*

$$F(t,x) \subset \partial V(x) \ \forall x \in C \ p.p. \ sur \ [0,+\infty[\,, \tag{4.19}$$

$$F(t,x) T_C(x) \neq \emptyset \ \forall x \in C. \ p.p. \ sur \ [0,+\infty[\,. \tag{4.20}$$

Alors, pour tout $x_0 \in C$ il existe $T > 0$ tel que le problème

$$\dot{x}(t) \in F(t,x), \ \ x(0) = x_0 \tag{4.21}$$

admet une solution sur $[0,T]$ vérifiant $x(t) \in C$, $\forall t \in [0,T]$.

Preuve. Soit $x_0 \in C$. Comme $C \subset \mathbb{R}^m$ est localement compact, il existe $r > 0$ tel que $C_0 = CB\left(x_0, r\right)$ est compact. Considérons

$$L := \sup_{(t,x)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}^m} \|F\left(t,x\right)\|\,,$$

on définit $T := \frac{r}{L+1}$ et prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < T$. On ramène le problème non autonome au cas autonome. En utilisant le Théorème 4.2.3 on peut trouver une famille dénombrable de sous intervalles disjoints
$]a_j, b_j[\subset [0,T]\,,\ j = 1, 2, ...$ de longueur totale inférieure à $\frac{1}{n}$ et une multifonction F_n définie sur $D := \left([0,T] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[\right) \times C$ qui est globalement semi-continue supérieurement et
$F_n(t,x) \subset F(t,x)$ pour tout $(t,x) \in D$. De plus, si $u\,(.)$ et $v\,(.)$ sont des fonctions mesurables sur $[0,T]$ tels que $u(t) \in F(t, v(t))$ p.p. sur $[0,T]$ donc pour presque tout $t \in D$ on a
$u(t) \in F_n(t, v(t))$. On prolonge F_n à $[0,T] \times C$ tout entier. On définit

$$\widetilde{F}_n(t,x) = \begin{cases} F_n(t,x) & \text{si} \quad t \in [0,T] \setminus \cup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j), \\ F_n(a_j,x) & \text{si} \quad a_j < t < \frac{a_j+b_j}{2}, \\ F_n(b_j,x) & \text{si} \quad \frac{a_j+b_j}{2} < t < b_j, \\ F_n(a_j,x) \cup F_n(b_j,x) & \text{si} \quad t = \frac{a_j+b_j}{2}, \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\widetilde{F}_n(.,.)$ vérifie encore la condition tangentielle (4.20). D'autre part, d'après le Lemme4 dans [52], $\widetilde{F}_n(.,.)$ est semi-continue supérieurement $[0,T] \times C$. En étendant l'espace de l'état de $\mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ on peut réduire notre problème au cas autonome. Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times C$ on définit

$$\widetilde{V}(t,x) = t + V(x).$$

Il est clair que, $\widetilde{V}(.,.)$ est une fonction propre semi-continue inférieurement pln et $(1,v) \in \partial^C \widetilde{V}(t,x)$ si et seulement si $v \in \partial^C V(x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times C$. En même temps, un argument dû à Cernea [32] montre que $(1,v) \in T_{([0,T]\times C)}(t,x)$ si et seulement si $v \in T_C(x)$. Donc, en vertu de la condition tangentielle (4.19) et (4.20), on obtient

$$\begin{aligned} \left(1, \widetilde{F}_n(t,x)\right) &\subset \partial^C \widetilde{V}(t,x) \neq \emptyset \;\; \forall (t,x) \in [0,T] \times C, \\ \left(1, \widetilde{F}_n(t,x)\right) T_{([0,T]\times C)}(t,x) &\neq \emptyset \;\; \forall (t,x) \in [0,T] \times C. \end{aligned}$$

D'où, par application du Théorème 4.2.1, on en déduit l'existence d'une fonction absolument continue $x_n(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ qui satisfait

$$(1, \dot{x}_n(t)) \in \left(1, \widetilde{F}_n(t, x_n(t))\right) \partial^C \widetilde{V}(t, x_n(t)) \text{ p.p. sur } [0,T], \quad x_n(0) = x_0 \tag{4.22}$$

et

$$(t, x_n(t)) \in [0,T] \times C \;\; \forall t \in [0,T].$$

Il s'ensuit que $x_n(.)$ vérifie

$$\dot{x}_n(t) \in F_n(t, x_n(t)) \partial^C V(x_n(t)) \text{ p.p. sur } [0,T], \; x_n(0) = x_0, \tag{4.23}$$

et

$$x_n(t) \in C, \forall t \in [0,T]. \tag{4.24}$$

Alors, d'après (4.23)

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq L. \tag{4.25}$$

D'autre part, grâce (4.24) $graph\,(x_n(.))$ est inclus dans $[0,T] \times C$ et $x_n(.)$ est aussi solution de l'inclusion (4.21) sauf pour un ensemble E_n de mesure ne dépassant pas $\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, d'après (4.25) et le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous suite (encore notée $x_n(.)$) et une fonction absolument continue $x(.) : [0,T] \to H$ telles que

$$\begin{aligned} &x_n(.) \text{ converge uniformément vers } x(.). \\ &\dot{x}_n(.) \text{ converge faiblement dans } L^2([0,T], H) \text{ vers } \dot{x}(.). \end{aligned}$$

Comme $graph\,(\partial V(.))$ est fermé et donc, en utilisant (4.23), on a

$$\dot{x}(.) \in \partial^C V(x(t)) \text{ p.p. sur } [0,T].$$

D'après le Théorème 3.3.1, les fonctions $t \to x(t)$ et $t \to V(x(t))$ sont lipschitzienne, donc par application de la Proposition 3.2.9

$$\frac{d}{dt}V(\dot{x}(t)) = \|\dot{x}(t)\|^2$$

pour presque tout $t \in [0,T]$, ce qui implique

$$V(x(T)) - V(x(0)) = \int_0^T \|\dot{x}(\tau)\|^2 \, d\tau.$$

D'autre part, d'après (4.23) on déduit que

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 \, dt = \int_0^T (V \circ \dot{x}_n)(t)dt = V\left(x_n\left(T\right)\right) - V(x_0).$$

Il résulte de la semi-continuité inférieure de V, qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 \, dt = V\left(x(t)\right) - V\left(x_0\right) = \int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 \, dt$$

et donc $\{\dot{x}_n\left(.\right)\}$ converge fortement dans $L^2\left([0,T], \mathbb{R}^m\right)$. Par suite, il existe une sous suite (notée aussi $\dot{x}_n\left(.\right)$) qui converge simplement presque partout vers $\dot{x}(.)$. En utilisant (4.23) et le fait que $graph\left(F\right)$ est fermé, on a

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. } sur\, [0,T],$$

et d'après (4.24) on conclut que $\forall t \in [0,T]$, $x(t) \in C$. Ceci termine la démonstration.

■

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aitalioubrahim and S. Sajid, *Viability problem with perturbation in Hilbert space*, Electronic journal of qualitative theory of differential equations. No. 7, 1-14, (2007).

[2] F. Ancona and G. Colombo, *Existence of the solutions for a class of nonconvex differential inclusions*, Rend. S Mat. Univ. Padova. Vol 83, (1990) 71-76.

[3] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities*, John Wiley, New York, 1984.

[5] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equation in Banach space*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest ; Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976.

[6] J. Bastien, *Systèmes dynamiques discrets avec frottement et Identification en biomécanique*, Mémoire d'habilitation,Univ Lyon1, 2013.

[7] H. Benabdellah, *Existence of solutions to the nonconvex sweeping processes*, J. Diff. Equations, vol. 164 (2000), N 2, pp. 286-295.

[8] H. Benabdellah, *Sur une classe d'équations différentielles multivoques semi-continues supérieurement à valeurs non convexes*, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier 1991, Exposé N°6.

[9] H. Benabdellah. C. Castaing and A. Salvadori, *Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems*, Atti. Sem. Mat. univ. Modena, XLV, (1997) 9-51.

[10] F. Bernard, *Etude des fonctions prox-régulière en dimension infinie*, Thèse de doctorat, Université Montpellier2, (2003).

[11] F. Bernard and L.Thibault, *Prox regular functions in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. 303, N 1, pp 1-14. (2005)

[12] F. Bernard and L.Thibault, *Prox regular functions in Banach spaces*, Set-valued analysis 12, pp.25-47 (2004).

[13] F. Bernard, L.Thibault and D. Zagrodny, *Integration of primal lower nice functions in Hilbert spaces*, Journal of optimisation theory and applications : Vol. ˜124, No 3, pp 561-579, march 2005.

[14] M. Bounkhel. *Existence results of nonconvex differential inclusions*, Portugaliae mathematica : Vol. 59 Fasc. 3 2002.

[15] M. Bounkhel. *General existence results for second order nonconvex sweeping process with unbounded perturbations*, Portugaliae Mathematica, 60 (3) (2003), 269-304.

[16] M. Bounkhel and T. Haddad, *Existence of viable solutions for nonconvex differential inclusions*. Electron. J. Diff. Equations, No. 50, 10 pp, 2005.

[17] M. Bounkhel and L. Thibault, *On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis*, Nonlinear Analysis, Vol. 48, N 2, 223-246 (2002).

[18] M. Bounkhel and L. Thibault, *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, v6, N 2, 359-374 (2005).

[19] M. Bounkhel and M.F. Yarou, *Existence results for first and second order nonconvex sweeping process with delay*, Portugaliae mathematica, vol 61 Fasc 2-2004.

[20] A. Bressan, A. Cellina and G. Colombo, *Upper semi-continuous differential inclusions without convexity*, Pro.AMS. 106 (1989), 771-775.

[21] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1983.

[22] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, N 5. Notas de Mathematica (50), North-Holland Publishing Co, Amsterdam-London, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[23] W. Brocks, S. Hao and D. Steglich, *Micromechanical modelling of the damage and toughness behaviour of nodular cast iron materials*. journal de physique IV Colloque C6, supplément au Journal de Physique m, Volume 6, octobre 1996.

[24] C. Castaing.*Quelques problèmes d'évolution du second ordre*, Sém. d'Anal. Convexe, Montpellier (1987), exposé n.12 (37 pages).

[25] C. Castaing, T.X. Duc Ha and M. Valadier *Evolution equations governed by the sweeping process*, set valued analysis, 1, 1993, 109-139.

[26] C. Castaing, A.G. Ibrahim and M. Yarou, Existence problems in second order evolution inclusions : discretization and variational approach, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol 12, No 6 (2008) 1435-1477.

[27] C. Castaing, A.G. Ibrahim and M.F. Yarou, *Some contributions to nonconvex sweeping process.*J. Nonlinear Convex Anal. 10, 1-20 (2009).

[28] C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques, *Evolution equations governed by the sweeping process*, Set-valued analysis, 1 (1993), 109-139.

[29] Castaing, C., A. Salvadori and L. Thibault, *Functional evolution equations governed by non-convex sweeping process*, J. Nonlinear Convex Anal. 2, 217-241 (2001).

[30] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes on Math. 580, Springer Verlag, Berlin (1977).

[31] A. Cellina and V. Staicu, *On evolution equations having monotonicities of opposite sign*, J. Diff. Equ. Vol 90, (1991) 71-80.

[32] A. Cernea : *A Note On Viable Solutions For a Nonautonomous Differential Inclusion Without Convexity,* Math. Reports 10(60), pp.11-16, 1 2008.

[33] N. Chemetov and M.D.P. Monteiro Marques, *Non-convex quasi-variational differential inclusions.* Set-Valued Anal. 15, 209–221 (2007).

[34] M. Chraibi Kaadoud, *Etude théorique et numérique de problèmes d'évolution en présence de liaisons unilatérales et de frottement.* P.H.D. thesis, Montpellier (1987).

[35] F.H. Clarke , *Generalized gradient and applications*, Trans. Am. math. Sec. 205, 247-262 (1975).

[36] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis.* John Wiley, New York (1983).

[37] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern and P.R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer Verlag, New York, 1998.

[38] C. Combari, A. Elhilali Alaoui, A.B. Levy, R.A. Poliquin and L. Thibault, *Convex composite functions in Banach spaces and the primal lower-nice property*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), no. 12, 3701-3708.

[39] R. Correa, A. Jofré and L. Thibault, *Charactérization of lower semicontinuous convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), no. 1, pp 67-72.

[40] R. Descombe, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[41] E. De Giorgi, M. Degiovanni, A. Marino and M. Tosques, *Evolution equations for a class of nonlinear operators*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 75 (1983), no. 1-2, 1-8 (1984).

[42] M. Degiovanni, A. Marino and M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity*, Nonlinear Anal. 9, N 12, PP.1401-1443, (1983).

[43] A. Faik and A. Syam, *Differential inclusions governed by a nonconvex sweeping process*, J. Nonlinear and convex analysis, Vol. 2, N 3, 2001, pp. 381-392.

[44] N. Fetouci and M. F. Yarou, *Existence results for differential inclusions with primal lower nice functions*, Electronic journal of differential equations, Vo 2016 (2016), N 48, pp. 1-9.

[45] M. Frigon. *Systems of first order differential inclusions with maximal monotone terms.* Nonlinear Anal., 66 (9) : 2064-2077, 2007.

[46] S. Guillaume, *Problèmes d'optimisation et d'évolution en analyse non convexe de type convexe composite*, Thèse de doctorat, Université de Montpellier2, (1996).

[47] S. Guillaume, *Evolution equations governed by the subdifferential of a convex composite function in finite dimentional spaces*, Discrete Contin. Dynam. Systems2, n1. PP.9-14. (1996).

[48] S. Guillaume, *Méthode de plus grande pente en analyse convexe composite (French) [Method of maximal slope in composite convex analysis]*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. 322, n 1, pp.9-14 (1996).

[49] S. Guillaume, *Subdifferential evolution inclusion in nonconvex analysis*, Positivity 4, N.4, pp.357-395. (2000).

[50] A.D. Ioffe. *Single-valued representation of set-valued mappings. II. Application to differential inclusions.* Siam J. Control Optim., 21(4) : 641-651, 1983.

[51] M. Ivanov and N. Zlateva., *On primal lower nice property*, compte rendu de l'académie bulgare des sciences, tome 54, N 11, 2001.

[52] Z. Kannai and P. Tallos, *Viable solutions to nonautonomous inclusions without convexity*, CEJOR Cent. Eur. J. Oper. Res, Vol. No. 11, pp. 47–55, 2003.

[53] M. Kisieliwicz, *Differential inclusions and optimal control*, PWN Polish Scientific Publishers, Tnarzana and Kluwer Academic Publishers 1991.

[54] M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques,*On parabolic quasi variational inequalities and state dependent sweeping processes*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 12, no. 1, 179-191 (1998).

[55] A.B. Levy, R.A. Poliquin and L. Thibault, *Partial extensions of Attouch's theorem with applications to proto-derivatives of subgradient mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 347(1995), no4, 1269-1294.

[56] S. Marcellin, *Intégration d'epsilon-sous-differentiels et problèmes d'évolution non convexes*, Thèse de Doctorat, Université de Monpellier 2,2004.

[57] S. Marcellin and L.Thibault ; *Evolution Problem Associated with Primal Lower Nice Functions*, J. Convex Anal. vol 13, No. 2, (2006), 385-421.

[58] M.D.P. Monteiro Marques, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems Shocks and Dry Friction*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1993.

[59] M.D.P. Monteiro Marques, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes*, Topo, Methods Nonlinear, Anal. 12. pp 179-191. (1998).

[60] R. Morchadi and S. Sajid, *A viability result for a first order differential inclusion*, Portugaliae mathematica, Vol. 63 Fasc.1, 2006.

[61] R. Morchadi and S. Gautier, *A viability result for a first order differential inclusion without convexity*, Preprint, University Pau (1995).

[62] J.J. Moreau, *Evolution problems associated with moving convex set in Hilbert space*, J. Diff. Eq. 26 (1977), P. 347-374.

[63] J.J. Moreau, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, nonsmooth mechanics, CISM courses and lecture, N. 302, Springer, 1988, 1-82.

[64] F. Papalini, *Existence of solutions for differential inclusions without convexity*, Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste. Vol 24, (1992) 193-206.

[65] A. Pazy, *Semigroups of operators in Banach spaces*, Equadiff 82 (Würzburg, 1982), 508-524, Lecture Notes in Math., 1017, Springer, Berlin, 1983.

[66] R.R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Second edition, Lecture Notes in Mathematics, 1364, Springer-Verlag, New York, 1983.

[67] R.A. Poliquin, *Integration of subdifferentials of nonconvex functions*, Nonlinear Anal.17(1991), no. 4, 385-398.

[68] R.A. Poliquin, *An extension of Attouch's theorem and its application to second order epi-differentiation of convexly composite functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 332(1992), no.2,861-874.

[69] R.A. Poliquin and R.T. Rockafellar, *Prox-regular functions in variational analysis*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 348, 1805-1838 (1996).

[70] R. Poliquin, R.T. Rockafellar, and L. Thibault, *Local differentiability of distance functions*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 352, No. 11, 5231-5249 (2000).

[71] D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (2), 7(3) : 265-315.

[72] R.T. Rockafellar, *First and second order epi-differentiability in nonlinear programing*, Trans. Amer. Math. Soc. 307, pp.75-107. (1988).

[73] R.T. Rockafellar and R.J.B. Wets, *Variational analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, [Fundamental Principles of Mathematical sciences], 317, Springer-Verlag, Berlin. 1998.

[74] P. Rossi,*Viability for upper semicontinuous inclusions without convexity*, Diff. Int. Eqs, Vol 5 (1992), pp.455-459.

[75] T. Rsezuchowski., *Scorza-Dragoni type theorems for upper semicontinuous multivalued functions*, Bull. Acad. Pol. Sci. ser. Math., 28 (1980),

[76] S. Saidi, L. Thibault and M.F. Yarou, *Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators,* Numer. Funct. Anal. Optim., 34 (10) (2013) 1156-1186.

[77] S. Saidi and M.F. Yarou, *Set-valued perturbation for time dependent subdifferential operator,* Topol. Methods Nonlinear Anal. 46 (1) (2015) 447-470.

[78] S. Saidi, and M.F. Yarou, *Control problems governed by time-dependent maximal monotone operators,* to appear in ESAIM Control Optim. Calc. Var.

[79] O.S. Serea and L. Thibault *Primal lower nice property of value functions in optimization and control problems*, Set Valued Anal, Vol 18(2010), pp. 569-600.

[80] A. Syam, *Contributions Aux Inclusions Différentielles*, PHD Thesis, Universite Montpellier II, 1993.

[81] L. Thibault, *Propriétés des sous-différentiels de fonctions localement Lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable.* Applications, thèse, Université Montpellier (1976).

[82] L. Thibault, *Sweeping Process with regular and non regular sets*, J. differential equations 193 (2003) (1-26).

[83] L. Thibault and D. Zagrodny, *Integration of subdifferentials of lower semicontinuous function on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 189. N 1, pp.33-58 (1995).

[84] L. Thibault and D. Zagrodny, *Subdifferential determination of essentially directionally smooth functions in Banach space*, Siam J. Optim. Vol 20, N°5, (2010) 2300-2326.

[85] M. Tosques, *Quazi-autonomous parabolic evolution equations associated with a class of nonlinear operateur*, Ricerche Mat. 38 (1989), no. 1, 63-92.

[86] X.D.H. Truong, *Existence of Viable solutions of nonconvex differential inclu sions*, Atti. Semi. Mat. Fis. Modena, XLVII (1999), 457-471.

[87] M.F. Yarou, *Discretization Methods For Nonconvex Differential Inclusions*, Electr. J. Qual. Theo. Diff. Equ. 12, (2009) 1-10.

ملخص

الهدف من هذا البحث هو دراسة بعض المسائل التطورية المحكومة بمؤثر غير قابل للتفاضل. ندرس أولا الحالة الخاصة للمسألة المعروفة بعملية المسح من الرتبة الثانية المتعلقة بمتغيرن،كما نقوم بدراسة وجود الحلول لمسألة من الرتبة الأولى محكومة بمؤثر تحت تفاضلي لدالة
" Primal lower nice".

Résumé : Notre travail est consacré à l'étude de quelques problèmes d'évolution gouvernés par un opérateur sous différentiel. Nous étudions en premier lieu le cas particulier du processus de rafle du second ordre dépendant de l'état avec une perturbation retardée. Nous établissons aussi des résultats d'existence de solutions et de solutions viables pour quelques problèmes d'évolution du premier ordre gouvernés par le sous différentiel d'une fonction

" primal lower nice ".

Abstract : Our work is devoted to study some evolution problems governed by the sub-differential operator. We study firstly, the particular case of the second order state depended sweeping process with delay. We also establish an existence result of solutions and viable solutions for some first order evolution problems governed by the sub-differential of a primal lower nice function.