République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahya - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Modes de convergence de suites de variables aléatoires

Présenté par :

- Wafa Boutaghane.
- Roummaissa Abibes.

Devant le jury :

Président	: Salami Nawel	M.A.A
Encadreur	: Madi Meriem	M.A.A
Examinateur	: Gharda Mabrouk	M.A.A

Promotion **2017/2018**

Table des matières

Remerciement

Nous remercions Allah Tout-Puissant, qui nous a donné la foi, la force, et la puissance pour aller jusqu'au bout de ce travail.

Nous tenons à remercier, bien sûr, en priorité, notre encadreur, Mademe : ***Madi Meriem*** pour ses conseils, son suivi minutieux de notre travail.

Nous remercions également les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont attribué en acceptant d'évaluer et de juger ce modeste travail.

Et en fin nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce travail

A **mes parents**, tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que je vous porte, ni la profonde gratitude que je vous témoigne pour tous ses efforts. que dieu tout puissant vous garde et vous procure santé, bonheur et longue vie.

A mes sœurs : **Saida, Nabila, Soraya, Asma, Chayma,** vous étiez toujours présentes par vos conseilles, vos encouragements tout au long de mes études, merci à vous.

A mon frère **Issam**, je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, et de réussite.

Je veux présente aussi mes compliments a tout ma famille surtout mes oncles et mes cousines

A mes amies : **Saly, Yamina, Warda, Abir, Laram, Salima, Amel, Rim, Fouzia, Radia, Lamia,...** pour ses soutiens moral et matériel.

Son oublier mes prof : **Gharda Mabrouk, Farida Laouaj, Warda jab elkhir,** pour sa disponibilité continuelle et son soutien.

Merci d'être toujours à mes cotés dans mes moments les plus difficiles.

Wafa

dédicace

Nous remercions **DIEUX** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté d'achever ce travail et sans lequel il n'aurait jamais été accompli.

Nous remercions notre encadreur Mme : **Madi Meriem** pour ses orientations et ses conseils de nous avoir encadrée pendant tout ce semestre.

Je consacre cet humble travail à : Pour **mes parents**, les riches ne peuvent pas vivre jusqu'au niveau d'amour qu'ils continuent à me remplir. Dieu lui a donné une bonne santé et une longue vie.

A qui j'aime et qui m'a soutenu tout au long de ce projet : ma sœur **Maria**, et bien sûr à mes frères **Soheib** et **Rami**, sans oublier **ma grand-mère** que j'aime.

Pour tous les membres de ma famille surtout **mes tantes** , et mes amis **Rahima, Amira ,Asma ,Dalel et Wisam** et pour **ma fiancée**, soutenez-moi tout au long de ce projet.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à rendre ce projet possible, merci

Nous voudrions également remercier tous les membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner ce travail ainsi que tous les enseignants qui nous ont accompagnés activement le long de nos années d'étude à l'université.

Roumaissa

Introduction

La convergence de variables aléatoires est une notion essentielle en probabilités et mène à certains résultats fondamentaux (loi des grande nombres, théorème de la limite centrale). A titre d'exemple introductif, notons que lors d'un jeu de pile ou face ou on lance une pièce dont la fréquence d'apparition de pile est p, la fréquence observée du nombre de pile obtenu après n lancers est «proche » de p, pourvu que n soit « assez grand ». Donc, si p est inconnue, cette observation offre un moyen d'approximer p en comptant les fréquences de pile pour un grand nombre de lancers. En probabilité, plusieurs modes de convergence sont possibles, ils sont introduits dans ce mémoire, la convergence en loi, la convergence en probabilité, la convergence dans L^p, la convergence presque sure et aussi la convergence complète et dans lequel les suites de variables aléatoires sont supposées construites sur un espace de probabilité (Ω, A, P) et on peut parfois lire dans la presse générale que la courbe en cloche représente la loi du hasard, ce qui n'a pas grande signification. Le succès sans égal de la loi de Gauss est la conséquence directe du théorème de la limite centrale et il est renforcé par la commodité relative d'utilisation de cette loi. En elle-même, la convergence vers la loi normale de nombreuses sommes de variables aléatoires lorsque leur nombre tend vers l'infini n'intéresse que le mathématicien. Pour simplifier on ne considère que des variables aléatoires réelles, mais les énoncés et les résultats restent vrais pour des vecteurs aléatoires à valeurs dans R^d. (On peut même les adapter pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique).

Chapitre 1

Modes de convergences des variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on étudie les modes de convergence de suite de variables aléatoires : convergence en loi, en probabilité, presque sûre et dans L^p, por $p \geq 1$, en donnant la définition, les propriétés et quelques applications. On s'intéresse aussi aux liens qui peuvent être existes entre ces quatre modes de convergence.

1.1 Convergence en probabilité (Convergence stochastique)

Considérons une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ et une autre variable aléatoire X toutes définies sur le même espace de probabilisé $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1. *La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité (ou converge stochastiquement) vers la variable aléatoire X ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, P(\mid X_n - X \mid > \varepsilon) \longrightarrow 0, \quad quand\ n \longrightarrow \infty.$$

Autrement dit :

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, P(\{\omega \in \Omega, \mid X(\omega) - X_n(\omega) \mid \geq \delta\}) \leq \varepsilon.$$

La convergence en probabilité de (X_n) vers X est notée par : $X_n \longrightarrow^P X$.

Remarque. *Remarquons que la condition* $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, *est équivalente à*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(| X_n - X |\leq \epsilon) = 1.$$

Exemple 1.2. *Soit* (X_n) *une suite de variable aléatoire réelle de loi définies par :*
$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ *et* $P(X_n = n) = \frac{1}{n}, n \geq 1.$
On à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle égale à* 0 *car :*
soit λ *un nombre positif quelconque :*

$$P(|X_n| > \lambda) = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda \geq n, \\ \frac{1}{n} & si \quad \lambda < n. \end{cases}$$

D'où : $P(|X_n| > \lambda) \leq \frac{1}{n}$ *et* $\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|X_n| > \lambda) = 0,$
ce qui établit la convergence en probabilité de la suite (X_n) *vers la variable aléatoire réelle* X *égale à* 0.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour avoir la convergence en probabilité vers une constante.

Proposition 1.3. *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires réelles dans* L^2, *si on a :* $\lim_{n\longrightarrow\infty} E(X_n) = a$ *et* $\lim_{n\longrightarrow\infty} var(X_n) = 0$. *Alors*

$$X_n \longrightarrow^P a.$$

Démonstration. Grâce à l'inégalité de Bienaymé-tchebychev on peut écrire :

$$pour \quad tout \quad \varepsilon > 0, \quad P(| X_n - a |> \epsilon) \leq (E(X_n - a)^2)/\varepsilon^2,$$

or , on sait que :

$$E(X_n - a)^2 = varX_n + (E(X_n) - a)^2,$$

d'ou :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad P(| X_n - a |> \varepsilon) \leq (var(X_n) + (E(X_n) - a)^2)/\varepsilon^2,$$

et on utilisant les deux hypothèses , on a bien :

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\longrightarrow\infty} P(| X_n - a |> \epsilon) = 0,$$

et donc : $X_n \longrightarrow^P a.$ ∎

Théorème suivant donne l'équivalence entre la convergence en probabilité celle est au sens de Cauchy. Rappelons que le critère de Cauchy est utilisé dans le cas oú il n'y a pas un candidat apriori pour la limite de (X_n).

Théorème 1.4 (Critère de Cauchy)**.** *La suite (X_n) converge en probabilité ssi*

$$\textit{pour} \quad \textit{tout} \quad \varepsilon > 0, \quad \lim_{n,m \longrightarrow \infty} P\{\mid X_m - X_n \mid > \varepsilon\} = 0.$$

C'est à dire toute suite qui converge en probabilité est une suite de Cauchy.

Démonstration.

1. Supposons que $(X_n)_{n\geq 1}$ est convergence en probabilité vers X et montrons que le critère de Cauchy est vérifié :

$$|X_m - X_n| = |X_m - X + X - X_n| \leq |X_m - X| + |X_n - X|,$$

ce si implique que,

$$P(|X_m - X_n| > \varepsilon) \leq P(|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}),$$

et

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} P(|X_m - X_n| > \varepsilon) \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} P(|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \lim_{n \longrightarrow \infty} +P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}),$$

D'où

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} P(|X_m - X_n| > \varepsilon) = 0.$$

2. Supposons que (X_n) vérifié de critère de Cauchy et montrons que (X_n) convergence en probabilité. La suite (X_n) est de Cauchy, alors il existe une sous suite $(X_{nk})_{k\geq 1}$ qui est $(p.s.)$ convergence, donc il existe une limite qui est une variable aléatoire avec,

$$\lim X_{nk} \to^{p.s.} X,$$

d'où

$$|X_n - X| \leq |X_n - X_{nk}| + |X_{nk} - X|,$$

et

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X_{nk}| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_{nk} - X| > \frac{\varepsilon}{2}),$$

et

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} (|X_n - X_{nk}| > \frac{\varepsilon}{2}) + \lim_{n\to\infty} P(|X_{nk} - X| > \frac{\varepsilon}{2}),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

■

On a définit la convergence en probabilité de suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, maintenant définissons ce type converge lorsque ces variables aléatoires sont à valeurs dans un espace métrique.

Convergence en probabilité dans un espace métrique

Une distance pour la convergence en probabilité

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles et soit $d(X,Y) = E(\mid X - Y \mid \wedge 1)$

On remarque que $d(X,Y) = 0$ ssi $X = Y p.s$ *et que* $d(X,Y) + d(Y,Z) \geq d(X,Z)$, alors d est une distance sur l'espace des variables aléatoires réelles.

Proposition 1.5. *La suite (X_n) converge en probabilité vers X ssi*

$$d(X_n, X) \longrightarrow_{n \longrightarrow \infty} 0.$$

Soit $(\mathbb{E}, r)$ un espace métrique et soit $X_1, X_2 ... X$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Définition 1.6. *La suite (X_n) est dite convergente vers X en probabilité, si la suite réelle des distances aléatoires $r(X_n, X)$ converge vers 0 en probabilité c'est à dire, si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_n P(r(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Remarque.

1. *pour $E = R$, prenons $r(x,y) = \mid x - y \mid$.*
2. *la distance défini précédemment est en effet $d(X,Y) = E(r(X,Y) \wedge 1)$.*

Propriétés de la convergence en probabilité

Théorème 1.7. *Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires réelles qui convergent en probabilité respectivement vers X et Y alors*

1. $X_n + Y_n \longrightarrow^P X + Y$.
2. $X_n - Y_n \longrightarrow^P X - Y$.
3. $X_n Y_n \longrightarrow^P XY$.
4. $\frac{X_n}{Y_n} \longrightarrow^P \frac{X}{Y}$ *à condition* $Y_n \neq 0$ *et* $Y \neq 0$ *p.s.*
5. *La limite en probabilité si elle existe elle est unique.*

6. *Continuité et convergence en probabilité,*

   (a) *Soit $f : R \longrightarrow R$ une fonction continue, alors on a*

$$X_n \longrightarrow^P X \Rightarrow f(X_n) \longrightarrow^P f(X).$$

   (b) *Soit $f = R \longrightarrow R$ une fonction bornée continue, alors on a*

$$X_n \longrightarrow^P X \Rightarrow E(f(X_n)) \longrightarrow^P E(f(X)).$$

La loi faible des grand nombres

Théorème 1.8 (Cas L^2). *Si les variables aléatoires réelles $X_n \in L^2$ sont centrées et nom corrélées, et si :*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ n \longrightarrow \infty,$$

alors

$$\bar{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \longrightarrow^{L^2} 0 \ \textit{quand} \ n \longrightarrow \infty.$$

En particulier :

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \longrightarrow^{P} 0 \ \textit{quand} \ n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration. La preuve est très simple. Notons d'abord que, les variables aléatoires réelles étant centrées et non corrélées, elles sont orthogonales dans L^2, donc :

$$\| \bar{X_n} \|_2^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \| X_k \|_2^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0.$$

■

Théorème 1.9 (Cas particulier). *Si les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont deux à deux non covariées, de même loi, d'espérance μ de variance σ^2, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow^P \mu.$$

Exemple 1.10. *Considérons une suite d'expérience de Bernoulli, où la n.ieme étant caractérisée par la variable aléatoire X_n, avec*

$$P(X_n = 1) = p \ \textit{et} \ P(X_n = 0) = 1 - p = q, p \in]o, 1[$$

Soit la suite (Y_n) définie par $Y_n = \frac{X_1+X_2+...+X_3}{n}$. Y_n représente la "fréquence des succès" au cours des n premières épreuves on a $E(Y_n) = p$ et $var(Y_n) = \frac{pq}{n}$, car pour toute n, les *variables aléatoires $X_1...X_n$ sont indépendantes. Étudions la convergence en probabilité de Y_n vers p. On a*

$$P(|Y_n - p| \geq \lambda\sigma(Y_n)) \leq \frac{1}{\lambda^2} \qquad \textit{(par inégalité de Tchebycheff),}$$

Posons

$$\lambda.\sqrt{\frac{pq}{n}} = \delta,$$

il vient alors

$$P[|y_n - p| \geq \delta] \leq \frac{pq}{n\delta^2},$$

et lorsque $n \to \infty$

$$P[|y_n - p| \geq \delta] = 0,$$

C'est à dire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la constant p.

Passons maintenant à un autre mode de convergence plus forte que celle en probabilité, c'est à dire à la convergence avec probabilités égale à 1 où la converge presque sûre.

1.2 Convergence presque sûre (Convergence avec probabilité 1)

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité sur le quel sont définies les variables aléatoires $X_1, ..., X_n, ..., X$.

Définition 1.11. *On dit que la suite (X_n) converge vers X presque sûrement, s'il existe un ensemble Ω_0 négligeable pour P tel que pour tout $\omega \notin \Omega_0$,*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

On utilise la notation $X_n \longrightarrow^{p.s.} X$ pour la convergence p.s. de (X_n) vers X.

Une autre définition de la convergences presque sûre mais un sens des suites numérique.

Définition 1.12. *La suite des variables aléatoires réelles (X_n) est dite presque sûrement convergente si la suite numérique $(X_n(\omega))$ est convergente pour presque tout ω, elle est dite convergente vers X, si X est presque sûrement une variable aléatoire réelle et*

$$\lim X_n(\omega) = X(\omega) \textit{ pour presque tout } \omega.$$

Remarque. *Comme* $\liminf X_n$ *et* $\limsup X_n$ *sont des variables aléatoires, l'ensemble* $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : \liminf X_n(\omega) = \limsup X_n(\omega) \in R\}$ *est un événement. Et la suite* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est presque sûrement convergente ssi* $P(\Omega_0) = 1$ *presque sûrement. De plus si on pose* $X(\omega) = \lim X_n(\omega)$ *pour* $\omega \in \Omega_0$ *et* $X(\omega) = 0$ *pour* $\omega \notin \Omega_0$ *on obtient une variable aléatoire réelle* X *telle que* $X_n \longrightarrow^{p.s} X$*. Bien sûr, si* X' *est une autre variable aléatoire telle que* $X = X'$ *p.s , alors* $X_n \longrightarrow X' p.s.$

Théorème de caractérisation

Donnons un théorème qui caractérise la convergence $p.s.$

Théorème 1.13. *La suite* $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* X *presque sûrement ssi ,pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_n i_{\varepsilon_0} \mid X_n - X \mid < \infty \ p.s.$$

Démonstration. 1. Supposons que $X_n \longrightarrow^{p.s} X$,

soit Ω_0 l'ensemble sur lequel la convergence de X_n vers $X p.s$ est satisfaite et soit $Y_n = |X_n - X|$ alors pour chaque $\omega \in \Omega_0$, on a d'après le résultat de l'appendice

$$Y_n \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_n i_\varepsilon(Y_n(n)) < 0 \ \textit{pour tout}\ \varepsilon > 0,$$

par conséquent, pour $\varepsilon > 0$, fixé $\sum_n i_\varepsilon(Y_n(n)) < 0$ et vraie

2. supposons que, pour tout $\varepsilon > 0, \sum_n i_\varepsilon(Y_n(n))$ est satisfaite et montrons la convergence $p.s$ de la suite (X_n) vers X.

■

Lemmes de Borel-Cantelli

La proposition suivante fourni les conditions suffisantes pour la converger $p.s$, elle est réalisé comme lemme de Borel-Cantelli, car elle est basée sur le résultat classique suivant appelé lemme de Borel-Cantelli.

Lemme 1.14. *Soit* (A_n) *une suit d'événements, alors*

$$\sum_n P(A_n) < \infty \Rightarrow \sum_n I_{A_n} < \infty \ p.s.$$

où

$$I_{A_n} = \begin{cases} 1 & si \quad A_n \quad vrifier \\ 0 & sinom. \end{cases}$$

Proposition 1.15. *1. Supposons que $\sum_n P(| X_n - X |> \varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$ alors $X_n \longrightarrow X$ p.s.*

2. Supposons qu'il existe une suite (ε_n) décroissante vers 0 telle que

$$\sum_n P(| X_n - X |> \varepsilon_n) < \infty,$$

alors $X_n \longrightarrow Xp.s.$

3. Supposons qu'il existé une suite (ε_n) de nombre réels strictement positifs tels que

$$\sum_n \varepsilon_n < \infty, \sum_n P\{|X_{n+1} - X_n|> \varepsilon_n\} < \infty,$$

alors, (X_n) converge presque sûrement.

Démonstration. (Voir [10]) ∎

Théorème 1.16 (Critère de Cauchy)**.** *La suite (X_n) est convergente presque sûrement ssi*

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} |X_n - X_m|= 0 \quad p.s.$$

Remarque. *Soit $Y_n(\omega) = \sup_{i,j\geq n} |X_i - X_j|$ et $Z_n = \sup_k |X_{n+k} - X_n| \longrightarrow 0$ on a $Z_n \leq Y_n \leq 2Z_n$. Le critère de Cauchy signifie que $(X_n(\omega))$ est de Cauchy ssi*

$$Z_n(\omega) = \sup_k |X_{n+k} - X_n| \longrightarrow 0, \;\; et \;\; Y_n(\omega) \longrightarrow 0.$$

d'ou on a le lemme suivante.

Lemme 1.17. *On a l'équivalence suivante, (X_n) converge presque surement*
$\Leftrightarrow (Y_n)$ converge vers 0 p.s
$\Leftrightarrow (Z_n)$ converge vers 0 p.s

Proposition 1.18. *Supposons que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \lim_{m\longrightarrow\infty} P\{\sup_{k<m} | X_{n+k} - X_n |> \varepsilon\} = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Alors, (X_n)est convergente presque sûrement.

Convergence presque sûrement dans un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique et $X_1, ...X$ des variables aléatoires à valeurs dans E.

Définition 1.19. *On dit que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X si les variables aléatoires $d(X_n, X)$ converge ver 0 p.s.*

Propriétés de la convergence presque sûre

Soit $(X_n), (Y_n)$ deux suite de variables aléatoires réelles, X et Y deux variables aléatoires réelles et $a, b \in R$, on a :

1. si $\forall n, X_n = a$, alors $X_n \longrightarrow^{p.s.} a$.
2. la limite en probabilité si elle existe et unique $p.s.$.
3. si $X_n \longrightarrow^{ps} X$ et $Y_n \longrightarrow^{p.s.} Y$ et si $(a, b) \in R^2$ alors :
   (a) $aX_n + bY_n \longrightarrow^{p.s.} aX + bY$,
   (b) $X_nY_n \longrightarrow^{p.s.} XY$.
   (c) Si g est une fonction continue, alors $X_n \longrightarrow^{p.s} X \Rightarrow g(X_n) \longrightarrow^{p.s} g(X)$.

Loi forte des grands nombres

Théorème 1.20 (Cas général)**.** *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de variance finie,*

1. *Si $E(X_n) = \mu_n$ avec $\lim \mu_n = \mu$,*
2. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(X_n)}{n} < +\infty$. Alors $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \mu$ p.s. dans les cas particulier oú les (X_n) ont la même loi.*

Théorème 1.21. *Si les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont mutuellement indépendantes de même loi, d'espérance μ, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow^{p.s} \mu.$$

Passant maintenant à l'étude de la convergence de suites de variables aléatoires réelles dans l'espace L^p pour $p \geq 1$.

1.3 Convergence dans L^p

Soit $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace L^p est défini comme suit : $L^p = \{X, X$ est une variable aléatoire réelle telle que : $E \mid X \mid^P < \infty\}$,
la norme dans L^p est

$$\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}.$$

(l'espace $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé).

Définition 1.22. *Soit (X_n) et X des variables aléatoires réelles dans L^p, définies sur le même espace $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$, on dit que :*

1. *Pour $p = 1$, (X_n) converge dans L^1 (en moyenne) vers une variable aléatoire réelle X si :*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0,$$
et on note $X_n \longrightarrow^{L^1} X$.
2. *Pour $p = 2$, (X_n) converge dans L^2 (en moyenne quadratique) vers une variable aléatoire réelle X si :*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0,$$
et on note $X_n \longrightarrow^{L^2} X$.
3. *Pour $p > 2$, (X_n) converge dans L^P (en moyenne d'ordre p) vers une variable aléatoire réelle X si :*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E(|X_n - X|^P) = 0,$$
et on note $X_n \longrightarrow^{L^P} X$.

Propriétés de la convergence dans L^P

Théorème 1.23. *Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires réelles qui convergent dans L^P respectivement vers X et Y alors*

1. $X_n + Y_n \longrightarrow^{L^P} X + Y$.
2. $X_n - Y_n \longrightarrow^{L^P} X - Y$.
3. $X_n Y_n \longrightarrow^{L^P} XY$.
4. $\frac{X_n}{Y_n} \longrightarrow^{L^P} \frac{X}{Y}$ *à condition $Y_n \neq 0$ et $Y \neq 0$ dans L^P.*

Proposition 1.24. *Soit p et q des réels tels que $1 \leq p \leq q$ si (X_n) converge dans L^p vers X, alors la convergence a également lieu dans L^q.*

Remarque. 1. *Si (X_n) converge dans L^p, alors la limite X est une unique, c'est à dire que si Y est une autre variable aléatoire telle que $X_n \longrightarrow Y$ dans L^p, alors $X = Y$ p.s, en effet par l'inégalité de Minkowscki*
$$\|X - Y\|_p \leq \|X - X_n\|_p + \|X_n - Y\|_p \longrightarrow_{n \longrightarrow \infty} 0.$$
2. *Si la suite (X_n) converge vers X dans L^p, alors elle converge vers la même variable aléatoire X en probabilité. En effet par l'inégalité de Markov pour tout $\varepsilon > 0$*
$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq (1/\varepsilon)^p E|X_n - X|^p \longrightarrow_{n \longrightarrow \infty} 0.$$

Définition 1.25. *La suite (X_n) dans L^1 est dite converge faiblement dans L^1 vers X si*

$$\lim E(X_nY) = E(XY), \forall Y \text{ variable aléatoire bornée.}$$

et si cette équation et vraie pour tout $Y p.s$ bornée, alors elle est vraie pour tout $Y \in L^\infty$.

1.4 L'uniformément intégrabilité

Définition 1.26. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite uniformément intégrable (U.I.en abrégé) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall n : \int_{\{|X_n|>\alpha\}} |X_n| dp < \varepsilon.$$

Une autre façons, équivalente, pour exprimer l'uniformément intégrabilité en utilisant la fonction de répartition est : $(X_n)_{n\geq 1}$ est U.I si

$$\int_{|X|>a} |X| dF_{X_n}(x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Le théorème suivante donne une autre définition de l'uniformément intégrabilité.

Théorème 1.27. *La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite uniformément intégrable ssi*

1. $\sup_n E|X_n| < \infty$,
2. *pour tout $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que pour tout $A \in \mathbb{A}$, avec $\mathbb{P}(A) < \delta_i$*

$$\int_A |X_n| dp < \varepsilon.$$

Et voici quelques propriétés de l'uniformément intégrabilité.

Théorème 1.28. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires :*

1. *Supposons que $\sup_n E|X_n|^p < \infty$, pour $p > 1$, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ et U.I. en particulier $(|X_n|^p)_n \geq 0$ est U.I. pour $p > 1$.*
2. *Supposons que $|X_n| \leq Y$ $p.s, \forall n$, où Y est une variable aléatoire positive intégrable. Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est U.I.*
3. *Supposons que $|X_n| \leq Y_n$ $p.s$ pour tout n, où $Y_1, Y_2, ...$ sont des variables aléatoires positives intégrables. Si $(Y_n)_{n\geq 1}$ est U.I, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ l'est aussi.*
4. *Si $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont U.I, alors $\{X_n + Y_n\}_{n\geq 1}$ est U.I.*

5. *Soit* $p, q > 1$ *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Si* $\{|X_n|^p\}_{n\geq 1}$ *et* $\{|Y_n|^q\}_{n\geq 1}$ *sont U.I., alors* $\{X_n.Y_n\}_{n\geq 1}$ *sont U.I.*

Exposons maintenant la relation entre l'uniformément intégrabilité et les différents modes de convergence de suites de variables aléatoires.

D'abord un résultat essentiel qu'est le lemme de Fatou.

Théorème 1.29 (lemme de Fatou). *Soit* X *et* $(X_n)_{n\geq 1}$ *deux variables aléatoires. On supposons que* $X_n \longrightarrow^{p.s} X$ *(resp* $X_n \longrightarrow^{P} X, X_n \longrightarrow^{L} X$*) lorsque* $n \longrightarrow \infty$. *Alors*

$$E|X| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf E|X_n|.$$

Théorème 1.30. *Soit* X *et* $(X_n)_{n\geq 1}$ *deux variables aléatoires. On suppose que* $X_n \longrightarrow^{p.s} X$ *(resp.* $X_n \longrightarrow^{P} X$*) lorsque* $n \longrightarrow \infty$ *: soit* $p > 0$*, on a l'équivalence entre*

1. $\{|X_n|^p\}_{n>1}$ *et U.I,*
2. $X_n \longrightarrow^{L^p} X$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$*,*
3. $E|X_n|^p \longrightarrow E|X|^p$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$.

Démonstration. (voir [1]) ■

Proposition 1.31. *Soit* X *et* (X_n) *des variable aléatoire. Alors*

$$X_n \longrightarrow^{P} X \text{ quand } n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration. On a $\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)_{n\geq 1}$ est borné par $1, \forall n \geq 1$, d'ou $\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)_{n\geq 1}$ et $U.I$ donc on a l'équivalence

$$\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \longrightarrow^{P}_{n\longrightarrow\infty} 0 \Leftrightarrow E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0,$$

d'autre part,on a

$$P\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} > \varepsilon\right) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right),$$

et donc

$$\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \longrightarrow^{P}_{n\longrightarrow\infty} 0 \Leftrightarrow |X_n - X| \longrightarrow^{P} 0, n \longrightarrow \infty.$$

■

Théorème 1.32. *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires réelle, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (X_n) *converge dans* L^1,
2. (X_n) *converge en probabilité et elle est uniformément intégrable,*
3. (X_n) *est de Cauchy pour la convergence dans* L^1*, alors*

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} E \mid X_m - X_n \mid = 0.$$

Proposition 1.33. *Si la suite* (X_n) *converge vers* X *dans* L^1*, alors*

$$\lim E(X_nY) = E(\lim X_nY) = E(XY),$$

pour tout variable aléatoire bornée Y.

Démonstration. Supposes que $|Y|\leq b$ si $X_n \longrightarrow X$ dans L^1, alors,

$$|E(X_nY) - E(XY)|\leq E|X_n - XY|\leq bE|X_n - X|\longrightarrow 0.$$

$\blacksquare$

Théorème 1.34. *Supposons que* (X_n) *convergence vers* X *en probabilité, alors on a l'équivalence entre :*

1. (X_n)*converge vers* X *dans* L^1,
2. (X_n) *est uniformément intégrable.*
3. (X_n) *est une suit dans* L^1*, et* $X \in L^1$*, et* $E|X_n|\longrightarrow E|X|$.

Théorème 1.35. *Pour* $p \in [1, \infty[$ *et* (X_n) *une suite de variable aléatoire dans* L^p*, on a l'équivalence*

1. (X_n) *converge dans* L^p,
2. (X_n) *est une suite de Cauchy dans* L^p*, c'est à dire*

$$E|X_m - X_n|^p_{n,m\longrightarrow\infty} \longrightarrow 0,$$

3. (X_n) *converge en probabilité et* (X_n^p) *est uniformément intégrable.*

1.5 Convergence en loi

La convergence en loi est la forme la plus faible de convergence de suite de variable aléatoire, au sens où, en général, elle n'implique pas les autres formes de convergence de variable aléatoire, alors que ces autre formes l'implique.

Soit $\mu_1, \mu_2, ..., \mu$ des mesures de probabilités sur l'espace (Ω, A, P).

Définition 1.36. *La suite (μ_n) est dite converge faiblement vers μ si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu_n f = \mu f \quad \textit{pour tout} \quad f \in C^b.$$

où C^b c'est l'espace des fonctions continues bornés.

Définition 1.37. *On dit que la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers X ssi pour toute fonctions réelles bornée et continue ψ de $\mathbb{R}^{\ltimes}$ dans $\mathbb{R}$ on a :*

$$\lim_{n \to \infty} E[\psi(X_n)] = E[\psi(X)]$$

et on note :

$$X_n \longrightarrow^L X.$$

Remarque. *Les variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 0}$ et X ne sont pas nécessairement définies sur les même espace de probabilité, mais peuvent être définies sur des espaces de probabilité tous différents, par exemple (Ω_n, A_n, P_n), car la convergence en loi est en réalité la convergence d'une suite de lois de probabilités des variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 0}$ vers la loi de probabilité de variable aléatoire X.*

Théorème 1.38. *Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire alors on a :*

1. *$X_n \longrightarrow^L X \Leftrightarrow F_{X_n} \to F_X$ en tout points de continuité de F,*
   ou $(F_{X_n})_{n \geqslant 0}$ et (F_X) sont des fonctions des répartitions de $(X_n)_{n \geqslant 0}$ et X respectivement.
2. *$X_n \longrightarrow^L X \Leftrightarrow \Phi_{X_n} \longrightarrow \Phi_X$; et Φ_X continue en 0, ou $(\Phi_{X_n})_{n \geqslant 0}$ et Φ_X sont des fonctions caractéristiques de $(X_n)_{n \geqslant 0}$ et X respectivement.*
3. *$X_n \longrightarrow^L X \Leftrightarrow G_{X_n} \longrightarrow G_x$ ou $(G_{X_n})_{n \geqslant 0}$ et G_X sont les fonctions génératrices de $(X_n)_{n \geqslant 0}$ et X respectivement.*

Propriétés de la convergence en loi

Soit $(X_n)_{n \in N}$ et $(Y_n)_{n \in N}$ deux suites de variables aléatoires et X, Y deux autre variables aléatoire et C une constante

1. si $X_n \longrightarrow^L X \;\; et \;\; Y_n \longrightarrow^L Y$, supposons que (X_n) et (Y_n) sont indépendantes et que X et Y sont aussi indépendantes, pour tout n : $X_n + Y_n \longrightarrow^L X + Y$.
2. si $X_n \longrightarrow^L X \Longrightarrow a + bX_n \longrightarrow^L a + bX$,
3. $\forall C \in R \;\; X_n \longrightarrow^L X \;\; et \;\; Y_n \longrightarrow^L C \Longrightarrow$

(a) $X_n + Y_n \longrightarrow^L X + C$, et

(b) $X_n Y_n \longrightarrow^L XC$, et

(c) $\frac{X_n}{Y_n} \longrightarrow^L \frac{X}{C}$; $C \neq 0$.

Remarque. *Pour (X_n) et (Y_n) des suites quelconques,*

$$X_n \longrightarrow^L X \text{ et } Y_n \longrightarrow^L Y \nRightarrow X_n + Y_n \to^L X + Y.$$

Exemple 1.39. *On considère la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 0}$ tel que pour tout les n la variable aléatoire réelle X_n ait pour loi*

$$P(X_n = 2 + \frac{1}{n}) = 1,$$

ie : la loi de X_n est la Dirac en $2 + \frac{1}{n}(P_{X_n} = \delta_{2+\frac{1}{n}})$ en raison de la convergence de la suite $(2 + \frac{1}{n})$ vers 2 on à :

$$\forall x > 2 \quad \exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ (2 + \frac{1}{n}) < x$$

$$\forall x > 2 \quad \exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ F_n(x) = P(X_n \leq x) = 1$$

par ailleurs pour tout $x \leq 2$, on à :

$$F_n(x) = P(X_n \leq 2) = 0,$$

définissons alors : X la variable aléatoire réelle de loi δ_2, sa fonction de répartition est :

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x < 2 \\ 1 & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$$

on remarque F_X est continue sur $R - \{2\}$ et que sur cet ensemble on à :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F_n(x) = F(x),$$

donc la convergence de X_n vers X.

Remarque. *Il faut noté que la convergence des fonctions de répartition n'a pas lieu au point de discontinuité de F puisque l'on a pour tout n :*

$$F_n(2) = 0 \neq F(2) = 1.$$

Maintenant pour la convergence en loi, on le théorème suivant

Théorème 1.40. *Soit X et $X_1, X_2, ...$ des variables aléatoires, on supposons que $X_n \longrightarrow^L X$ lorsque $n \longrightarrow \infty$*

1. Si, pour $p > 0, \{|X_n|^p\}_{n\geq 1}$ est U.I, alors

$$E|X_n|^p \longrightarrow E|X|^p \quad quand\, n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration. (Voir [1]) ∎

1.5.1 Théorème limite centrale

Le théorème central limite est un résultat sur la convergence en probabilités d'une suite de variables aléatoires.
Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Il admet plusieurs généralisations qui donnent la convergence de cette somme sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Ces généralisations ne nécessitent pas des lois identiques mais font appel à des conditions qui assurent qu'aucune des variables n'exerce une influence significativement plus importante que les autres. Telles sont la condition de Lindeberg et la condition de Lyapounov. D'autres généralisations autorisent même une dépendance «faible». De plus, une généralisation due à Gnedenko et Kolmogorov stipule que la somme d'un certain nombre de variables aléatoires avec une queue de distribution décroissante selon $1/|x|^{\alpha+1}$ avec $0 < \alpha < 2$ (ayant donc une variance infinie) tend vers une loi de Lévy tronquée symétrique et stable quand le nombre de variables augmente. Cet article se limitera au théorème de la limite centrale concernant les lois à variance finie. Ainsi, ce théorème et ses généralisations offrent une explication à l'omniprésence de la loi normale dans la nature : de nombreux phénomènes sont dus à l'addition d'un grand nombre de petites perturbations aléatoires.

L'intérêt de ce théorème : on peut parfois lire dans la presse générale que la courbe en cloche représente la loi du hasard, ce qui n'a pas grande signification. Le succès sans égal de la loi de Gauss est la conséquence directe du théorème de la limite centrale et il est renforcé par la commodité relative d'utilisation de cette loi. En elle-même, la convergence vers la loi normale de nombreuses sommes de variables aléatoires lorsque leur nombre tend vers l'infini n'intéresse que le mathématicien. Pour le praticien, il est intéressant de s'arrêter un peu avant la limite : la somme d'un grand nombre de ces variables est presque gaussienne, ce qui fournit une approximation souvent plus facilement utilisable que la loi exacte. En s'éloignant encore plus de la théorie, on peut dire que bon nombre de phénomènes naturels sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. Il en résulte que la loi normale les représente de manière raisonnablement efficace. À l'inverse, on peut dire qu'aucun phénomène concret n'est vraiment gaussien car il ne peut dépasser certaines limites, en particulier s'il est à valeurs positives.

Théorème 1.41. *Soit $X_1, X_2, ...$ une suite de variables aléatoires définies sur le même*

espace de probabilité, suivant la même loi D et indépendantes. Supposons que l'espérance μ et l'écart-type σ de D existent et soient finis ($\sigma \neq 0$). Considérons la somme $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors l'espérance de S_n est $n\mu$ et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$. De plus, pour parler de manière informelle, la loi de S_n tend vers la loi normale $N(n\mu, n\sigma^2)$ quand n tend vers l'infini. Afin de clarifier cette idée de convergence, nous allons poser de $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. de sorte que l'espérance et l'écart-type de Z_n valent respectivement 0 et 1 : la variable est ainsi dite centrée et réduite.
Alors la loi de Z_n converge vers la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ lorsque n tend vers l'infini (il s'agit de la convergence en loi). Cela signifie que si ϕ est la fonction de répartition de $N(0,1)$, alors pour tout réel z :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \phi(z),$$

ou de façon équivalente :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z) = \phi(z),$$

ou $\bar{X} = S_n/n = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$.

Démonstration. Pour un théorème d'une telle importance en statistiques et en probabilité appliquée, il existe une démonstration particulièrement simple utilisant les fonctions caractéristiques. Cette démonstration ressemble à celle d'une des lois des grands nombres. Pour une variable aléatoire Y d'espérance 0 et de variance 1, la fonction caractéristique de Y admet le développement limité :

$$\varphi_Y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + 0(t^2), \;\; t \longrightarrow \infty.$$

Si Y_i vaut $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$, il est facile de voir que la moyenne centrée réduite des observations $X_1, X_2, ..., X_n$ est simplement :

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sqrt{n}}.$$

D'après les propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques, la fonction caractéristique de Z_n est

$$[\varphi_Y(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n = [1 - \frac{t^2}{2n} + 0(\frac{t^2}{n})]^n \longrightarrow \exp^{-t^2/2} \;\; lorsque \;\; n \longrightarrow +\infty.$$

Mais cette limite est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$, d'où l'on déduit le théorème de la limite centrale grâce au théorème de continuité de Lévy, qui affirme que la convergence des fonctions caractéristiques implique la convergence en loi. ■

Théorème limite centrale généralisée

Le théorème de la limite centrale généralisée admet plusieurs généralisations qui donnent la convergence en loi de la suite de sommes finies, normalisées, de variable aléatoires vers une loi de probabilité normale sous des hypothèses plus faible. Ces généralisations n'exigent pas que les variables aléatoires à sommer suivant la même loi, mais font appel à d'autres conditions.

Théorème limite centrale de Lyapounov

Soit X_n une séquence de variables définies sur le même espace de probabilité. Supposons que X_n ait une espérance finie μ_n et un écart-type fini σ_n . Nous définirons

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Supposons que les moments centrés d'ordre 3

$$r_n^3 = \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|^3)$$

soient finis pour tout n et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = 0.$$

(C'est la condition de Lyapounov).
Considérons de nouveau la somme $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. L'espérance mathématique de S_n est $m_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et son écart-type s_n . Si nous normalisons S_n en posant $Z_n = \frac{S_n - m_n}{s_n}$ alors la loi de Z_n converge vers la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ comme ci-dessus.

Théorème limite centrale de Lindeberg

Avec les mêmes définitions et les mêmes notations que précédemment, nous pouvons remplacer la condition de Lyapounov par la suivante qui est plus faible (Lindeberg 1920). Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E(\frac{(X_i - \mu_i)^2}{s_n^2} / |X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n) = 0,$$

où $E(U : V > c)$ représente l'espérance conditionnelle : l'espérance de U sous la condition $V > c$. Alors la loi de Z_n converge vers la loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

Remarque. *Il existe quelques théorèmes qui traitent le cas de sommes de variables dépendantes, par exemple le théorème de la limite centrale m-dépendante, le théorème de la limite centrale des martingales et le théorème de la limite centrale pour les processus de mélange.*

Intéressons maintenant au liens qui peuvent être existe entre les différents modes de convergence de suite de variables aléatoires.

1.6 Liens entre les modes de convergence

1.6.1 Liens entre convergence dans L^p et convergence en probabilité

Proposition 1.42. *Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tel que $q \geq p$ on a $L^q(\Omega, A, P) \subset L^p(\Omega, A, P) \subset L^1(\Omega, A, P)$*

1. *Si une suite $(X_n)_n$ de $L^q(\Omega, A, P)$ converge vers X dans L^q alors elle converge vers X dans L^p et converge aussi vers X en probabilité ($\| \, . \, \|_q \Rightarrow \|.\|_p \Rightarrow P$).*
2. *Si la suite (X_n) converge vers X dans L^q vers X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.*

Exemple 1.43. *On se place sur $([0.1], B([0.1]), \lambda)$ pour tout $m \geq 0$ on défini les variables aléatoires $f_m = X_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}$ pour $m = 2^n + k$, $0 \leq k \leq 2^n$ alors $f_m \longrightarrow^{\|\cdot\|_p} 0$ mais f_m ne converge pas vers 0 presque sure.*

Théorème 1.44. *La convergence dans L^1 entraine celle en probabilité.*

Démonstration. Remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned}
\| X_n - X \|_{L^1} &= E \mid X_n - X \mid \\
&= \int\limits_{|X_n - X| > \xi} \mid X_n - X \mid dp + \int\limits_{|X_n - X| \leq \xi} \mid X_n - X \mid dp \\
&\geq \int\limits_{|X_n - X| > \xi} \mid X_n - X \mid dp \\
&\geq \xi P(\mid X_n - X \mid > \xi).
\end{aligned}$$

La convergence de (X_n) vers X dans L^1 entraîne alors que pour tout ε strictement positif on a :

$$P(\mid X_n - X \mid > \xi) \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0,$$

ce qui est bien le résultat annoncé. ■

Théorème 1.45. *Si la suite (X_n) converge vers X dans $L^p(\Omega, \mathbb{F}, P)$, alors (X_n) converge vers X en probabilité.*

Démonstration. Soit (X_n) convergeant vers X dans L^P, alors

$$\lim_n \int |X - X_n|^P dp = 0$$

Soit $\delta > 0$:

$$\int |X - X_n|^P dp = \int_{|[X-X_n|\geq\delta]} |X - X_n|^P dp + \int_{|[X-X_n|<\delta]} |X - X_n|^P dp.$$

alors

$$\int |X - X_n|^P dp \geq \int_{|[X-X_n|\geq\delta]} |X - X_n|^P dp \geq \delta^P.P[|X - X_n| \geq \delta],$$

et

$$0 \leq \lim_n P[|X - X_n| \geq \delta] \leq \lim_n \frac{1}{\delta^p} \int |X - X_n|^P dp = o,$$

donc (X_n) converge vers X en probabilité. ■

Théorème 1.46. *Si (X_n) convergence en probabilités vers X et $U.I$, alors (X_n) converge dans L^1.*

Démonstration. Converge probabilité + $U.I \Longrightarrow$ convergence dans L^1 Soit (X_n) uns suite $U.I$ et est convergence en probabilité vers X. D'abord on a

$$\int |X|dp \leq \liminf_n \int |X_n|dp \leq \sup_n \int |X_n|dp < \infty (car (X_n) \ est \ U.I),$$

Ce que implique que

$$X \in L^1(\Omega),$$

soit $\varepsilon > 0$

$$\int |X_n - X|dp = \int_{\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}} |X_n - X|dp + \int_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}} |X_n - X|dp,$$

Or

$$\int_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}} |X_n - X|dp \leq \varepsilon P(|X_n - X| < \varepsilon) \leq \varepsilon,$$

et

$$\int_{\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}} |X_n - X|dp \leq \int_{\{|X-X_n|\geq\varepsilon\}} |X|dp + \int_{\{|X-X_n|\geq\varepsilon\}} |X_n|dp,$$

alors

$$\int |X_n-X|dp \leq \delta + \int_{\{|X-X_n|\geq\varepsilon\}} |X|dp + \int_{\{X-X_n|\geq\varepsilon,|X_n|<M\}} |X_n|dp + \int_{\{|X-X_n|\geq\varepsilon,|X_n|\geq M\}} |X_n|dp,$$

Pour $M > 0$ il vient

$$\int |X_n - X|dp \leq \delta + \int_{\{|X-X_n|\geq\varepsilon\}} |X|dp + MP[|X_n - X| \geq \varepsilon] + \int_{\{|X_n|\geq M\}} |X_n|dp,$$

Soit $\delta > 0$, et comme (x_n) est $U.I.$,$\exists M$ tel que

$$\forall n \int_{\{X_n\}\geq M} |X_n|dp \leq \frac{\delta}{4}$$

et choisissais $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4}$,alors $\exists\mu$ tel que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mu \Longrightarrow \begin{cases} |X|dp \leq \frac{\delta}{4} \\ |X_n - x| \geq \varepsilon \end{cases}$ et d'après la convergence en probabilité

$$\exists n_\delta \ \ telque \ \ n \geq n_\delta, P[|X_n - X| \geq \varepsilon] \leq \mu \ \ et \ \ P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\delta}{4M},$$

pour

$$\delta > 0, \exists n_\delta \ \ telque \ \ \forall n \geq n_\delta \int |X_n - X|dp \leq \varepsilon,$$

c'est à dire (X_n) convergence vers X dans L^1 . ■

Remarque. *La réciproque est fausse :la convergence en probabilité seule n'implique pas la convergence (par exemple) dans L^1 :*

Exemple 1.47. *Soit X_n la loi donnée par $P(|X_n = 0|) = 1 - \frac{1}{n}$ et $P(X_n = a_n) = \frac{1}{n}$. On a $X_n \longrightarrow^p X = 0$ puisque*

$$P(|X_n| \geq \varepsilon) = P(X_n = a_n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Puis $E\|X_n - X\| = E\|X_n\| = \frac{|a_n|}{n}$, qui ne tend pas vers en général : par exemple si $a_n = 2n$ alors $E|X_n| = 2 \longrightarrow 2$, si $a_n = n^2$ alors $E|X_n| \longrightarrow \infty$.

1.6.2 Liens entre convergence en probabilité et convergence en loi

Théorème 1.48. *La convergence en probabilité entraine la convergence en loi, c'est à dire si (X_n) converge en probabilité vers X alors (X_n) converge aussi vers X en loi, ie :*

$$X_n \longrightarrow^P X \Longrightarrow X_n \longrightarrow^L X.$$

Démonstration. Pour montrer que (X_n) converge en loi vers X il suffit de démontrer que pour toute fonction continue φ tendant vers zéro à l'infini :

$$\lim_n \int \varphi(x)p(x).P_{X_n}(dx) = \int \varphi(x).P_X(dx).$$

Soit alors φ satisfaisant aux hypothèses ci-dessus : remarquons que φ est nécessairement uniformément continue sur R^P. Soit $\delta > 0$ arbitraire ; alors :

$$\begin{aligned}\left|\int(\varphi(X)-\varphi(X_n))\right| &\leq \int_{[|X-X_n|\geq\delta]}|\varphi(X)-\varphi(X_n)|dp + \int_{[|X-X_n|<\delta]}|\varphi(X)-\varphi(X_n)|dp\\ &\leq 2\|\varphi\|.P[|X_n-X|\geq\delta] + \int_{[|X-X_n|<\delta]}|\varphi(X)-\varphi(X_n)|dp,\end{aligned}$$

ou

$$\|\varphi\| = \sup_{x\in R^P}|\varphi(x)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$; φ étant uniformément continue nous pouvons choisir δ tel que

$$\forall n \quad |X-X_n| < \delta \Rightarrow |\varphi(X)-\varphi(X_n)| < \varepsilon/2$$

La convergence en probabilité entraîne que pour Ie δ ci-dessus choisi

$$\exists N \quad n > N \Rightarrow P[|X-X_n|\geq\delta] \leq \varepsilon/4\|\varphi\|.$$

En définitive, étant donné , il existe N :

$$n > N \Rightarrow \left|\int(\varphi(X)-\varphi(X_n))dP\right| \leq \varepsilon,$$

et la suite (X_n) converge en loi vers X. ∎

Remarque. *La réciproque est fausse en général : la convergence en loi n'entraine pas la convergence en probabilités.*

Proposition 1.49. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variable aléatoire réelle convergeant en loi vers une constante α dans R, alors elle converge également en probabilité on note :*

$$X_n \longrightarrow^L \alpha \Leftrightarrow X_n \longrightarrow^P \alpha.$$

Démonstration. Notons F_n la fonction de répartition de variable aléatoire réelle X_n pour tout n et F celle de variable aléatoire X déterministe égale α on a $P(X=\alpha)=1$ et $F_X(x) = I_{[\alpha,\infty]}(x)$. Notons que la fonction F est continue sur $R-\{\alpha\}$ est comme X_n

converge en loi vers X, on à : $\lim_{n\to\infty} = F(x)$

pour tout X différent de α or pour tout ε strictement positif, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(|X_n - \alpha| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < X_n - \alpha < \varepsilon) \\ &= P(X_n < (\alpha + \varepsilon)) - P(X_n < (\alpha - \varepsilon)) \\ &\leq P(X_n \leq (\alpha + \varepsilon)) - P(X_n \leq (\alpha - \varepsilon)) \\ &= F_n(\alpha + \varepsilon) - F_n(\alpha - \varepsilon). \end{aligned}$$

d'après la convergence (F_n) vers F sur $R - \{\alpha\}$ on à :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

Toujours pour tout ε strictement positif, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque. *la convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité même si les variable aléatoire sont défini sur le même espace de probabilité c'est illustré par le contre exemple suivant : soit* $(\Omega, F, P) = ([0,1], B([0,1]), \lambda_{[0.1]})$ *et*

$$X_n(w) = \begin{cases} 0 & si \quad n \quad est \quad pair \quad et \quad w < 1/2 \\ 1 & si \quad n \quad est \quad impair \quad et \quad w < 1/2 \\ 0 & si \quad n \quad est \quad pair \quad et \quad w \geq 1/2 \\ 1 & si \quad n \quad est \quad impair \quad et \quad w \geq 1/2 \end{cases}$$

la loi de X_n *est toujours la même* $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ *donc* X_n *converge en loi vers* X_1 *mais pas en probabilité puisque* $P(|X_n - X_1| = 1) = 1$ *quand* n *est paire.*

Théorème 1.50 (Gramer ou Shutsly)**.** *Soient* $(X_n)_{n>1}$ *et* $(y_n)_{n>1}$ *deux suites de variable aléatoires,* X *une variable aléatoires et* $a \in \mathbb{R}$ *on a*

1. *Si* $X_n \to^l X$ *et* $Y_n \to_p a$*, alors*
   (a) $X_n + Y_n \to^l x + a$*,*
   (b) $X_n - Y_n \to^l x - a$*,*
   (c) $X_n Y_n \to^l xa$*,*
   (d) $\frac{X_n}{Y_n} \to^l \frac{X}{a}$*, pour* $a \neq 0$*.*

1.6.3 Liens entre convergence presque sûre et convergence en probabilité

Théorème 1.51. *La convergence presque sûre pour une suite de variables aléatoires* (X_n) *implique la convergence en probabilité.*

Démonstration. Soit une suite (X_n) convergeant presque sûrement vers X alors :

$$\forall \omega \notin \Omega_0 \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists n : \forall r \geq n \qquad |X_r(\omega) - X(\omega)| \leq \delta,$$

ou encore

$$\forall \delta > 0 \qquad \forall \omega \notin \Omega_0 \qquad \exists n : \omega \in A_n^\delta \{\omega | \forall r \geq n : |X_r(\omega) - X(\omega)| \leq \delta\},$$

nous pouvons écrire

$$A_n^\delta = \bigcap_{r \geq n} [|X_r - X| \leq \delta],$$

donc δ étant donné, l'hypothèse se traduit par :

$$\Omega_0^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\delta$$

ou

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} CA_n^\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{r \leq n} [|X_n - x| > \delta] \right] \subseteq \Omega_0,$$

d'oú

$$0 \leq P \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} CA_n^\delta \right] \leq P(\Omega_0) = 0$$

La suite d'ensembles A_n^δ est une suite décroissante dont l'intersection est de probabilité nulle,donc : $\lim_n P(CA_n^\delta) = 0$, mais $[|X_n - x| > \delta] \subset CA_n^\delta$ d'ou, δ étant donné :

$$0 \leq \lim_n P[|X_n - x| > \delta] \leq \lim_n P(CA_n^\delta) = 0,$$

La suit (X_n) converge vers X en probabilité. ■

Théorème 1.52. *Si la suite (X_n) converge en probabilité vers X, il existe une sous suite $(X_{nk})_k$ de (X_n) qui converge presque sûrement vers X. C'est à dire si $X_n \longrightarrow^p X$ on peut extraire de (X_n) une sous suite (X_{nk}) telle que $\lim_k X_{nk} = Xp.s.$*

Démonstration. $\forall m \in N$ on peut, par hypothèse, déterminer une sous-suite (n_k) telle que $P[|X_{n_k} - X| \leq 1] \geq 1 - \frac{1}{2^k}$.

Đ'où

$$P(A_{n_k}^m) \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \quad et \quad P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^m\right) = 1.$$

Comme, pour la suite $(X_{n_k})_{k \in N}, \Omega_0^c = \bigcap_m \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^m$, on a Ie résultat. ■

Démonstration. Notons encore $\varepsilon_i = 2^i$ La convergence en probabilité de Y_n vers Y implique pour tout $i > 1$, la convergence de $P(\mid Y_n - Y \mid > \varepsilon_i)$ vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit l'existence d'une suite strictement croissante d'indices n_i telle que

$$\forall i \geq 1; P(\mid Y_{n_i} - Y \mid \geq \varepsilon_i) \leq 1/i^2,$$

Vérifions maintenant que

$$\forall \varepsilon > 0; \sum_{i=1}^{+\infty} P(|Y_{n_i} - Y| \geq \varepsilon) < +\infty,$$

En effet la convergence vers 0 de ε_i nous assure de l'existence d'un $i_0 = i_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $i \geq i_0$, $\varepsilon_i < \varepsilon$ Pour $i \geq i_0$ on a donc $\{|Yn_i - Y| \geq \varepsilon\} \subset \{|Y_{n_i} - Y| \geq \varepsilon_i\}$ et cette inclusion d'événements nous permet de majorer le terme général de la série ci-dessus par i^2 à partir du rang i_0 Ainsi la suite (Y_{n_i}) converge presque complètement vers Y donc aussi presque sûrement.
Le diagramme de la figure résume les relations entre les différents modes de convergence les flèches en trait plein représentent des implications (si la suite converge selon le mode de la case de départ, alors elle converge aussi selon celui de la case d'arrivée), les flèches en tirets signifient l'existence d'une sous-suite convergente selon le mode de la case d'arrivée La convergence en loi sera étudiée ultérieurement. ■

On à déjà parles de la limite de la somme de deux suite $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$, sous les différents modes de convergence étudié, dans ce chapitre, maintenant traitons la réciproque, c'est à dire si on a la limite la somme $(X_n + Y_n)_{n\geq 0}$ alors sous quel mode on la converge de (X_n) et (Y_n).

Théorème 1.53. *1. Supposons $X_1, X_2, ..., X_n$ et Y_n sont indépendant pour tout $n \geq 1$, si*

$$X_n + Y_n \to^{p.s.} a + b \ \ et \ \ Y_n \to^{p} b \ \ lorsque \ \ n \to \infty,$$

alors

$$X_n \to^{p.s.} a \ \ et \ \ Y_n \to^{p.s.} b, lorsque \ \ n \to \infty,$$

2. Supposons que X_n et Y_n sont indépendant pour tout $n \geq 0$ Si

$$X_n \longrightarrow^{p} Y_n \longrightarrow a + b \ \ et \ \ Y_n \longrightarrow^{p} b, n \longrightarrow \infty,$$

alors

$$X_n \longrightarrow^{p} a \ \ lorsque \ \ n \longrightarrow \infty.$$

Représentation presque sure de la convergence faible

Théorème 1.54. *La suite U_n converge faiblement vers U ssi il existe des variables aléatoires $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sur un espace de probabilité (Ω', A', P') telle que la distribution de Y_n et U_n pout tout n et celle de Y est U, et $(Y_n) \longrightarrow^{p.s} Y$ sur (Ω', A', P').*

Corollaire 1.55. *La suite (X_n) converge en loi ver X ssi $\exists$ des variables aléatoires $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sur un autre espace de probabilité telle que Y_n a la même distribution que X_n pour n et Y a la même distribution que X, et $(Y_n) \longrightarrow^{p.s} Y$.*

Proposition 1.56. *Supposons que (X_n) converge en loi ver X alors on a l'équivalence entre :*

1. *(X_n) est U.I,*
2. *X_n et X sont intégrable et $E|X_n| \longrightarrow E|X|$.*

Exemple 1.57. *Soit une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P), la loi de (X_n) étant donnée par : $P(X_n = 1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} = P(X_n = 1 + \frac{1}{n})$*

1. *La suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire réelle $X = 1$ car :*
   soit F_n et G les fonctions de répartition de X_n et X :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} & si \quad 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1 + \frac{1}{n}, \\ 1 & si \quad 1 + \frac{1}{n} < x. \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$$

Pour que (X_n) converge en loi vers X, il suffit qu'en tout point où G est continue, donc pour $X \neq 0$, on ait $\lim_{n\longrightarrow\infty} F_n(x) = G(x)$:

— *Soit x, tel que $x < 1$: pour tout $n > \frac{1}{1-x}$ on a $F_n(x) = 0$, donc*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} F_n(x) = G(x),$$

— *Soit x, tel que $x > 1$: pour tout $n > \frac{1}{1-x}$ on à $F_n(x) = 1$, donc*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} F_n(x) = G(x).$$

2. *La suite* (X_n) *converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle constante* $X = 1$ *car :*

   on a
$$(X_n) \longrightarrow^p 1 \Longleftrightarrow (X_n) \longrightarrow^L 1.$$

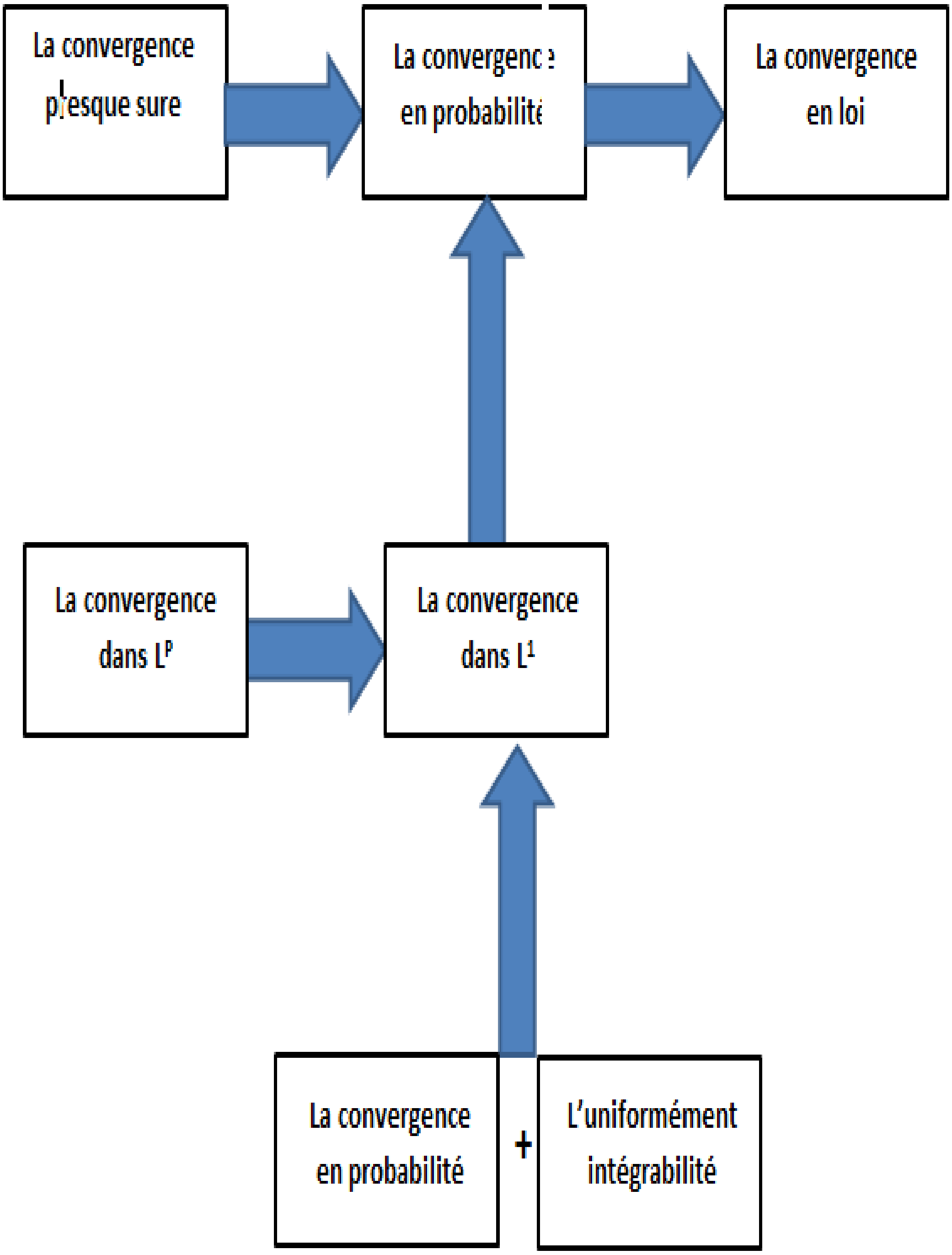
3. *La suite* (X_n) *converge en moyenne quadratique vers la variable aléatoire réelle* $X = 1$ *car :*
$$E(|X_n - 1|^2) = \frac{1}{2}(1 - (1 - \frac{1}{n}))^2 + \frac{1}{2}((1 + \frac{1}{n}) - 1)^2 = \frac{1}{n^2}.$$
   donc
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E(|X_n - 1|^2) = 0.$$

4. *La suite* (X_n) *converge en presque sûrment vers la variable aléatoire réelle* $X = 1$ *car :*

   soit $A = \{\omega \in \Omega / \lim_{n \longrightarrow \infty} X_n(\omega) = 1\}$. *il faut montrer que* $P(A) = 1$.
   Soit $B = \{\omega \in \Omega / |X_n(\omega) - 1| = \frac{1}{n}\}$. *On a P(B)=1.*
   Soit $\omega \in B$, *comme* $|X_n(\omega) - 1| = \frac{1}{n}$, *on a* $\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n(\omega) = 1$, *donc* $\omega \in A$.
   Ainsi $B \subset A$, *d'où* $1 = P(B) \leq P(A) \leq 1$ *et* $P(A) = 1$.

Résumé des liens

Ile se résument de la façon suivante :



— La convergence en probabilité $\Rightarrow$ la convergence presque sur pour une sous-suite,
— La convergence en probabilité $\Rightarrow$ la convergence dans L^1 sous l'uniformément intégrabilité,
— La convergence en loi $\Rightarrow$ la convergence en probabilité si $X_\infty = c$.

La convergence en loi est la seule qui ne fait intervenir que les lois des variables aléatoires.

Chapitre 2

Convergence presque complète

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un autre mode de convergence plus forts que les modes étudiés dans le premier chapitre. On parle ici de la convergence presque complète introduit en 1947 par H.Robbins .

2.1 Convergence presque complète

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité sur lequel est défini des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X$

Définition 2.1. *On dit que $(X_n)_{n\in N}$ converge complètement (presque complètement) vers la variable aléatoire réelle X si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0 \sum_{n\in N} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty,$$

et la convergence presque complète de $(X_n)_{n\in N}$ à X est désignée par :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = Xc.c \qquad (\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = Xa.co, \quad ou \quad X_n \longrightarrow^{c.c} X.)$$

Remarque. *La convergence complète est plus forte que la convergence en probabilité puisque cette dernière nécessité seulement que pour chaque $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$, mais la convergence complète exige que pour tout $n \geq 1$, $P(|X_n - X| > \varepsilon)$ tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$, c'est à dire qu'elle exige une vitesse de convergence suffisante pour assurer que la somme infini*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \quad converge.$$

Par exemple, si $P(|X_n - X| > \varepsilon) = n^{-1}$ *alors la suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers* X*, mais pas complètement, lorsque* $n \longrightarrow \infty$.
Si $P(|X_n - X| > \varepsilon) = n^{-2}$ *alors la suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité et complètement à* X*, lorsque* $n \longrightarrow \infty$.

Exemple 2.2. *Soit* U *une variable aléatoire uniforme* $(0,1)$ *et définit une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 1}$ *tel que* $X_n = \delta\{U; (0, n^{-2})\}$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *alors*

$$P(X_n > \varepsilon) = \begin{cases} 0 & si \quad \varepsilon \geq 1 \\ n^{-2} & si \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

Par conséquent, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty,$$

d'ou $X_n \longrightarrow^c 0$ *comme* $n \longrightarrow \infty$.

Exemple 2.3. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires telles que* $E(X_n) = c$ *pour tout* $n \in N^*$ *où* $c \in R$ *est une constante qui ne dépend pas de* n. *Supposons en outre que* $V(X_n) = n^{-2}\tau$ *où* τ *est une constante positive fini ne dépend pas de* n. *Dans ces conditions, notez que pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - c| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} V(X_n) = n^{-2}\varepsilon^{-2}\tau$$

Par conséquent, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\varepsilon^{-2}\tau \leq \varepsilon^{-2}\tau \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$$

donc $X_n \longrightarrow^c c$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$

La convergence complète est suffisante pour assurer la convergence dans la probabilité, nous devons encore étudier la relation entre la convergence complète et la convergence presque certaine. Il s'avère que la convergence complète implique aussi une convergence presque certaine et constitue l'un des concepts les plus forts de la convergence des variables aléatoires.

Cette notion, que l'on peut parfois appeler plus simplement convergence complète est lié à d'autres modes de convergence stochastiques. La première partie de La proposition ci-dessous étudiera le lien entre la convergence presque complète et la convergence en probabilité. Ce dernier mode de convergence sera appelé désormais p convergence

Proposition 2.4.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X, P \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \longrightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,$$

La deuxième partie de la proposition fait la même chose mais avec convergence presque sûre. Ce dernier mode de convergence est défini par le propriété suivant :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X p.s \Leftrightarrow P(\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X) = 1.$$

Démonstration. (Voir[4]) ■

Proposition 2.5. *Si* $\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X c.c$ *alors nous avons :*

1. $\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X,\ p$
2. $\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X,\ p.s$

Démonstration. Sans perte de généralité, nous montrons le résultat pour $X = 0$

1. Ce point est évident.
2. Pour tous $\varepsilon > 0$ nous avons : $\sum_{n \in N} P(X_n > \varepsilon) < \infty$, selon Borel-cantelli il est vraie que

$$P(\overline{\lim_{n \longrightarrow \infty}} \{|X_n| > \varepsilon\}) = 0,$$

qui peut être réécrit comme $P(A(\varepsilon)) = 1$ ou

$$A(\varepsilon) = \{\exists n, \forall m > n |X_m| < \varepsilon\} = 1.$$

Notez que $(A(\varepsilon))$ est une séquence d'événements incorporés et donc la propriété :
$\forall \varepsilon > 0, P(A(\varepsilon)) = 1$, implique directement la convergence presque-sur à savoir :

$$P(\forall \varepsilon, \exists n, \forall m > n, |X_m| \leq \varepsilon) = 1.$$

Dans la littérature classique, le taux de convergence (vitesse de convergence) presque sûr à 0 pour un suite de variables aléatoires réelles est défini par la condition :

$$\begin{aligned} X_n - X = O(U_n) &\Leftrightarrow P(X_n - X = O(U_n)) = 1 \\ &\Leftrightarrow P(\exists C < \infty \exists n, \forall m > n, |X_n - X| \leq C U_m) = 1, \end{aligned}$$

Pendant que le taux de convergence en probabilité est défini par :

$$X_n - X = O_p(U_n) \Leftrightarrow \lim_{m} \overline{\lim_{n \longrightarrow \infty}} P(|X_n - X| < m U_n) = 1.$$

Précise la notion de vitesse de convergence pour la convergence complète. ■

Définition 2.6. *On dit que le taux de convergence presque complète de* $(X_n)_{n\in N}$ *à* X *est d'ordre un si et seulement si :*

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \sum_{n\in N} P(|X_n - X| > \varepsilon_O U_n) < \infty,$$

et nous écrivons :

$$X_n - X = O(u_n).$$

Proposition 2.7. *Supposons que* $X_n - X = O(U_n)$ *nous avons :*

1. $X_n - X = O_p(U_n)$,
2. $X_n - X = O_{p.s}(U_n)$.

Démonstration. Sans perte de généralité nous montrons les résultats pour $X = 0$

1. La définition de O_{cc} nous permet d'écrire :

$$\forall m_0, \forall m > m_0, \sum_n P(|X_n| > mU_n) < \infty,$$

et le lemme de Borel-Cantelli nous permet d'obtenir :

$$\exists m_0, \forall m > m_0, P(\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}}\{|X_n| > mU_n\}) = 0,$$

en appliquant maintenant le lemme de Fatou on obtient :

$$\exists m_0, \forall m > m_0, \overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} P(|X_n| > mU_n) = 0,$$

c'est à dire :

$$\exists m_0, \forall m > m_0, \underline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} P(|X_n| \leqslant mU_n) = 1,$$

ce qui implique directement $X_n = O_p(U_n)$.

2. Comme précédemment, en appliquent le lemme de Borel-Cantelli

$$P(\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}}\{|X_n| > \varepsilon_0 U_n\}) = 0.$$

cela peut également être écrit comme :

$$\exists \varepsilon_0,\ P(\exists n,\ m > n, |X_m| \leqslant \varepsilon_0 U_m) = 1,$$

et il vient directement $X_n = 0_{p.s}(U_n)$. ∎

La proposition suivante donne quelques règles de calcule concernant la convergence complète

Proposition 2.8. *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} U_n = 0, \lim_{n\to\infty} X_n = l_X c.c$ *et* $\lim_{n\to\infty} Y_n = l_Y$, l_X *et* l_Y *sont deux déterministes réels nombre,*

1. *Nous avons :*
   (a) $\lim_{n\to\infty} X_n + Y_n = l_X + l_Y c.c.$
   (b) $\lim_{n\to\infty} Y_n X_n = l_Y l_X$
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{l_Y} c.c$ *pour* $l_Y \neq 0$.
2. *Si* $X_n - l_X = O_{c.c}(U_n)$ *et* $Y_n - l_Y = O_{c.c}(U_n)$ *nous avons :*
   (a) $(X_n + Y_n) - (l_X + l_Y) = O_{c.c}(U_n)$
   (b) $X_n Y_n - l_X l_Y = O_{c.c}(U_n)$
   (c) $\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{l_Y} = O_{c.c}(U_n)$ *tant que* $l_Y \neq 0$.

Démonstration. (1.a) Cette preuve est évidente puisque nous avons

$$P(\mid X_n + Y_n - (l_X - l_Y) \mid > \varepsilon) \leq P(\mid X_n - l_X \mid > \varepsilon/2) + P(|Y_n - l_Y| > \varepsilon/2).$$

(1.b) Nous pouvons sans perte de généralité considérer uniquement le cas où $l_X = 0$ (sinon écrivez simplement la décomposition $Y_n X_n = Y_n(X_n - l_X) + Y_n l_X$) Alors supposons que $l_X = 0$ Pour $\varepsilon < 1/2$ on peut écrire

$$\begin{aligned} P(\mid Y_n X_n \mid > \varepsilon) &\leq P(\mid Y_n - l_Y \mid\mid X_n \mid > \varepsilon/2) + P(\mid l_Y X_n > \varepsilon/2) \\ &\leq P(\mid Y_n - l_Y \mid > \sqrt{\varepsilon/2}) + P(|X_n| > \sqrt{\varepsilon/2}) + P(|l_Y X_n| > \varepsilon/2) \\ &\leq P(\mid Y_n - l_Y \mid > \varepsilon/2) + P(|X_n| > \varepsilon/2) + P(|l_Y X_n| > \varepsilon/2). \end{aligned}$$

La convergence presque complète de $Y_n X_n$ à 0 suit en utilisant les propriétés de convergence presque complètes de X_n et Y_n.

(1.c) La convergence presque complète de Y_n à $l_Y \neq 0$, implique qu'il existe certains $\delta > 0$ (choisir par exemple $\delta = l_Y/2$) tels que, $\sum_{n\in N} P(|Y_n| \leq \delta) < \infty$. La preuve est effectuée selon les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} P(\mid \frac{1}{Y_n} - \frac{1}{l_Y} \mid > \varepsilon) &= P(\mid Y_n - l_Y \mid > \varepsilon \mid Y_n l_Y \mid) \\ &\leq P(\mid Y_n - l_Y \mid > \varepsilon \mid Y_n l_Y \mid et \mid Y_n \mid > \delta) + P(\mid Y_n \mid \leq \delta) \\ &\leq P(\mid Y_n - l_Y \mid > \epsilon\delta \mid l_Y \mid) + P(\mid Y_n \mid \leq \delta). \end{aligned}$$

(2.a) Appliquer la dernière inégalité avec $\varepsilon = \varepsilon_0 U_n$ un nous permet de conclure.

(2.b) Appliquer la dernière inégalité avec $\varepsilon = \varepsilon_0 U_n$ un nous permet de conclure directement en utilisant les taux de convergence de $X_n - l_X$ et $Y_n - l_Y$.

(2.c) Cette preuve découle directement de la dernière inégalité.

■

Proposition 2.9. *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, $X_n = O_{c.c}U_n$ $\lim_{n\longrightarrow\infty} Y_n = l_Y c.c$ *où* l_Y *est un nombre réel déterministe*

1. *Nous avons* $X_nY_n = O_{c.c.}(U_n)$.
2. *Nous avons* $\frac{X_n}{Y_n} = O_{c.c}(U_n)$ *tant que* $l_Y \neq 0$.

Démonstration. 1. La convergence presque complète de Y_n à l_Y implique que existe certains $\delta > 0$ tels que :

$$\sum_{n\in N} P(\mid Y_n \mid > \delta) < \infty.$$

Maintenant la preuve est effectuée comme suit :

$$\begin{aligned} P(|X_nY_n| > \varepsilon U_n) &= P(|X_nY_n| > \varepsilon U_n, \mid Y_n \mid \leq \delta) + P(|X_nY_n| > \varepsilon U_n, \mid Y_n \mid > \delta) \\ &\leq P(\mid X_n \mid > \varepsilon \delta^{-1} U_n) + P(\mid Y_n \mid > \delta) \end{aligned}$$

Ainsi, les deux inégalités précédentes avec l'hypothèse que $X_n = O_{c.c}(U_n)$ sont suffisants pour montrer que $X_nY_n = O_{c.c}(U_n)$.

2. C'est une conséquence directe de la partie 1 de cette proposition ensemble avec la partie (1.c) de la proposition.

■

Théorème 2.10. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *soit une suite de variables aléatoires indépendantes, et que* C *soit une vraie constante.Si* $X_n \longrightarrow^{p.s} C$, *comme* $n \longrightarrow \infty$ *alors* $X_n \longrightarrow^{c.c} C$

Démonstration. Supposons que $X_n \longrightarrow^{p.s} C$, comme $n \longrightarrow \infty$ où C est une constante réelle. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|X_m - C| \leq \varepsilon, Pour\, tout, m \geq n) = 1,$$

ou équivalent

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|X_m - C| > \varepsilon, pour\, au\, moins\, un, m \geq n) = 0,$$

Notez que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|X_m - C| > \varepsilon, pour\, au\, moins\, un, m \geq n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - C| > \varepsilon\}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_n - C| > \varepsilon\}\right) \\ &= P\left(\limsup_{n\longrightarrow\infty} P\{|X_n - C| > \varepsilon\}\right), \end{aligned}$$

où le fait que

$$\left\{ \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - C| > \varepsilon\} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Est une suite d'événements monotones et décroissants. Notez maintenant que depuis $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, il s'en suit que $(|X_n - C| > \varepsilon)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes pour chaque $\varepsilon > 0$. Alors

$$P\left(\limsup_{n\longrightarrow\infty} P\{|X_n - C| > \varepsilon\} \right) = 0$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) < \infty.$$

pour tout $\varepsilon > 0$ alors que $X_n \to^c C$ comme $n \to \infty$. Notez qu'on obtient une équivalence entre une convergence presque certaine et convergence en probabilité. Quand une séquence converge en probabilité à un rythme assez rapide à une constante, la convergence en probabilité et presque certaines convergences sont équivalentes. Un tel résultat était la principale motivation de Hsu et Robbins (1947). Si $X_n \longrightarrow^C X$ comme $n \longrightarrow \infty$, alors la suite n'est pas indépendante et on ne peut pas être appliqué à la suite d'événements $(|X_n - X| > \varepsilon)_{n\geq 1}$. Mais quand $X_n \longrightarrow^{c.c} C$ comme $n \longrightarrow \infty$, la suite est indépendante et on peut être appliqué. Comme avec les suite convergentes de nombres réels, les sous-suite de suite de variables aléatoires peuvent jouer un rôle important dans le développement de la théorie asymptotique. ■

Théorème 2.11. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ soit une suite de variables aléatoires convergentes en probabilité à une variable aléatoire X. Ensuite, il existe une non-décroissante suite d'entiers positifs $(n_k)_{k\geq 1}$ tel que $X_{n_k} \longrightarrow^{c.c} X$ et $X_{n_k} \longrightarrow^{a.c} X$ comme, $k \longrightarrow \infty$.*

Démonstration. (Voir [1]). ■

Exemple 2.12. *Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendant d'Uniforme $(0,1)$ et définir une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ comme $X_n = \delta\{U_n; (0, n^{-1})\}$ pour que $X_n \longrightarrow^p 0$, comme $n \longrightarrow \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et notez que lorsque $\varepsilon < 1$ il s'ensuite que $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = n^1$ et donc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} 1n^{-1} = \infty.$$

Par conséquent, X_n ne converge pas complètement à 0 comme $n \longrightarrow \infty$. Désignez maintenant un non décroissant séquence d'entiers positifs $n_k = k^2$. Dans ce cas

$P(|X_{n_k} - 0| < \varepsilon) = k^{-2}$ *et donc*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_{n_k} - 0| > \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Par conséquent $X_{n_k} \longrightarrow^c 0$, *comme* $k \longrightarrow \infty$. *Alors nous avons trouvé une sous-suite converge complètement à zéro. Il est important de noter que le théorème 2.11. n'est pas constructif en ce qu'il pas identifier une sous-suite particulière qui convergera complètement vers le variable aléatoire d'intérêt. Le théorème 2.11. est un résultat d'existence en ce qu'il garantit simplement l'existence d'au moins une sous-suite qui converge complètement. Un tel résultat peut ne pas être considéré comme utile au départ, mais sont plusieurs applications importantes de résultats tels que ceux-ci. C'est parfois possible de prouver des propriétés pour l'ensemble de la suite en travaillant avec des propriétés de la sous-suite.*

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons une étude approfondie sur les modes de convergences des variables aléatoires réelles et la convergence complète et en moment complète, on à les présentent et donner la relation entre eux .

Appendix

2.1.1 Convergence des suites réelles

Le but, ici, est de revoir le concept de converge dans $\mathbb{R}$ est de donner quelques réutilisations utiles. Soit (x_n) une suite en $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$,alors

$$\liminf x_n = \sup_m \inf_{n\geq m} x_n, \limsup x_n = \inf_m \sup_{n\geq m} X_n$$

Soit des nombre bien définis, qui peuvent être infinis. Si ces deux nombres sont égaux à le même valeur x, alors on écrit

$$\lim x_n = x \ si \ (x_n) \longrightarrow x.$$

Une suite (x_n) est dite convergence dans $\mathbb{R}$, si la limite existe et est un nombre réel.

2.1.2 caractérisation

On commence par introduire une notation pour des raisons de commodité typographique : pour ε dons $\mathbb{R}_+$ on laisse $i_{\varepsilon 0}$ être l'indicateur de intervalle (ε, ∞) c'est $i_\varepsilon(x_n) = 1_{(\varepsilon,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > \varepsilon \\ 0 & si \quad x \leq \varepsilon \end{cases}$

Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Elle convergence vers x ssi la suite de nombre positifs $|x_n - x|$ converge vers 0, quand on sait x, il est plus simple de travaille avec la suite de précédent suite mais de sa positivité. Soit (x_n) une suite positive. la déclaration classique de convergence (x_n) convergence vers 0, si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ il ya des exits k tel que $x_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq q$ dans d'autre mots, pour chaque $\varepsilon > 0$ le nombre de n pour qui $x_n > \varepsilon$ est fini donc,

$$x_n \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_n i_\varepsilon(x_n) < \infty$$

puisque chaque terme de la série sur la droite est soit 0 ou bien 1,

$$\sum_n i_\varepsilon(x_n) < \infty \Leftrightarrow \limsup_{n\longrightarrow\infty} i_\varepsilon(x_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_n i_\varepsilon(x_n) = 0.$$

2.1.3 Critère Cauchy

Ceci est utile sur tout quand il n'y a pas candidat apriori x pour la limite, on omet la preuve.

Proposition 2.13. *La suite (x_n) converge ssi*

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} |x_m - x_n| = 0,$$

C'est-à-dire, pour chaque $\varepsilon > 0$ il y a quelque que $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$, pour tout $m \geq k$ et $n \geq k$, le suivent utilise le critère de Cauchy avec quelque observation facile.

Proposition 2.14. *S'il y a une suite positive ε_n que*

$$\sum_n \varepsilon_n < \infty, \sum_n i_{\varepsilon_n}(|x_{n+1} - x_n|) < \infty,$$

alors (x_n) est converge.

Démonstration. Soit (ε_n) tel que, il ya k quelque $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon_n$ pour tout $n \geq k$, donc pour :

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + ... + |x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon_m + ... + \varepsilon_{n-1} \leq \sum_m^\infty \varepsilon_j.$$

Par la sommabilité supposée de (ε_n), le dernier membre tend à 0 ($m \longrightarrow \infty$) donc Critère Cauchy est vérifiai et (x_n) est converge.

■

2.1.4 Principe de sous suite

Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$ et (y_n) est dite sous suite de (x_n). S'il existe une suite $(k_n)_n \geq 1$ de $\mathbb{N}$ croissant avec $\lim_n k_n = +\infty$ tel que, $y_n = x_{k_n}$, pour tout n. On dit que $(x_n)_{n>N}$ converge sur N ver x si la sous suite $((a_n)n \in N)$ converge ver x.

Proposition 2.15. (x_n) *converge vers x ssi tous sous suite de (x_n) converge vers x.*

Bibliographie

[1] **Allan Gut**, *Probability : A Graduaté Course*, Springer, 2004.

[2] **Alan M.Plansky**, *Introduction to statistical limit theory*, 2011.

[3] **Bosq, D., Lecoutre, J.P**,*Théorie de l'estimation fo*,nctionnelle (in french), Economica (1987).

[4] **Erhan Cinlar**, *Probability and stochastics*, Springer, 2010.

[5] **Frédéric Ferraty, Filippe vieu**, *Non Paraetric Functional Data Analysis*, Springer, 2006.

[6] http ://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/central-limit-theorem/clt.html.

[7] http ://www.vias.org/simulations/simusoft-cenlimit.html.

[8] **Jiyanglin Li.Ze-chum Hu**, *Toeplitz Lemma, Complet Convergence and Complet Moment Convergence*, Nanjing University, Nanjungn, china, 2015.

[9] **M.Métivier**, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1972.

[10] **Ph. Barbe, M. Ledoux**, *Probabilité* Edition espace 34, Belin.

[11] **P.Hsu, H.Robbins**, *Complete convergence and the law of large numbers*, proc.Math.Acad.Sci.USA33 :25-31, 1947.

[12] **Y.S.Chaw**, *On therale of moment complet convergence of sample sums and extremes*, Bulletin of Institude of Mathematics A cademedea.