

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT LMD

en MATHÉMATIQUES

Présentée par

Imane DEKKAR

Thème

Variations sur les équations aux différences (non) autonomes

Composition du jury

Président :	Mr. A. BOUCHAIR	MCA	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Rapporteur :	Mr. N. TOUAFEK	Prof.	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examineurs :	Mr. T. ZERZAIHI	Prof.	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
	Mr. M. S. ABDELOUAHAB	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila
	Mr. A. ARDJOUNI	MCA	U. Souk-Ahras

Remerciements

Par ces quelques lignes je voudrais exprimer mes sincères gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Mes premières remerciements vont certainement à mon professeur et mon directeur de thèse Mr. Nouressadat Touafek qui m'a permis de bénéficier de ses conseils et son aide tout au long de cette expérience, et je le remercie tout spécialement, pour la liberté d'action et la confiance qu'il m'avait accordées et vraiment je suis très honorée qu'il était mon encadreur.

Je remercie également l'ensemble des membres de mon jury, Mr. Abderrahmane Bouchair, Mr. Tahar Zerzaihi, Mr. Mohamed-Salah Abdelouahab et Mr. Abdelouaheb Ardjouni pour accepter de juger ce travail et je les adresse mes sentiments les plus respectueux.

J'exprime aussi ma gratitude aux responsables de la formation doctorale «Mathématiques et applications» de l'université de Jijel, et plus généralement je remercie les doctorants que j'ai eu le plaisir de les connaître et de partager beaucoup de choses ensemble durant ces trois années de recherche.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, un chaleureux merci à toute ma famille, et en particulier ma chère maman, pour qui je dédie cette thèse.

Résumé

Variations sur les équations aux différences (non) autonomes

Cette thèse est dédiée à l'étude du comportement qualitative de quelques classes d'équations et systèmes d'équations aux différences non-linéaires, certaines autonomes et d'autres non-autonomes. Plus précisément, on s'intéresse à un modèle d'écologie, trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur, deux problèmes ouverts concernant des familles d'équations aux différences à coefficients périodiques et on propose à étudier aussi un système fonctionnel de type max.

Plusieurs résultats sont alors présentés sur la permanence des solutions, la stabilité asymptotique des équilibres, l'oscillation, l'existence des solutions périodiques, l'attractivité globale ainsi que de nombreuses simulations permettent de confirmer et mettre en évidence nos contributions.

Mots-clés : Equations aux différences non-autonomes, Systèmes d'équations aux différences, Stabilité asymptotique, Permanence, Périodicité, Equations aux différences de type max.

Abstract

Variations on (non) autonomous difference equations

This thesis is devoted to the study of qualitative behavior of some classes of non-linear difference equations and systems of difference equations, some of them autonomous and others non-autonomous. More precisely, we are interested on an ecological model, three systems of higher-order difference equations, two open problems concerning two families of difference equations with periodic coefficients and we propose to study also a functional max-type system.

Several results are then presented about the permanence of solutions, the asymptotic stability of equilibrium points, oscillation, existence of periodic solutions, global attractivity in addition to numerous simulations which allow to confirm and bring out our contributions.

Keywords : Non-autonomous difference equations, Systems of difference equations, Asymptotic stability, Permanence, Periodicity, Max-type difference equations.

ملخص

هذه الأطروحة تتمحور حول دراسة السلوك النوعي لمجموعة معادلات و جمل معادلات فرقية غير خطية، ذاتية و أخرى غير ذاتية. أكثر دقة، نهتم بنموذج بيئي، ثلاث جمل معادلات ذات رتب عليا، مسألتين مفتوحتين تخص عائلتين من المعادلات الفرقية ذات معاملات دورية، و نقترح كذلك جملة معادلات فرقية دالية من النوع ماكس.

عدة نتائج اذن نعرضها حول محدودية الحلول، الاستقرار المقارب لنقاط التوازن، التذبذب، وجود الحلول الدورية، الجذب، بالإضافة الى العديد من الأمثلة التي تعزز و تبرز مساهماتنا.

الكلمات الأساسية: المعادلات الفرقية الغير ذاتية، جمل المعادلات الفرقية، الاستقرار المقارب، المحدودية، الدورية، المعادلات الفرقية من النوع ماكس.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
1 Quelques préliminaires et étude de certains systèmes d'équations aux différences autonomes	6
1.1 Quelques préliminaires	6
1.1.1 Définitions	6
1.1.2 A propos de la stabilité	9
1.1.3 Autres théorèmes utiles	13
1.2 Sur un modèle Herbivore-Plante	16
1.3 Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur	19
1.3.1 Analyse du premier système	25
1.3.2 Analyse du deuxième système	32
1.3.3 Analyse du troisième système	38
2 Sur deux problèmes ouverts : Comportement des solutions pour des classes d'équations aux différences rationnelles à coefficients périodiques	45
2.1 Introduction	45

TABLE DES MATIÈRES

2.2	Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques	47
2.2.1	Solutions oscillatoires	48
2.2.2	Permanence des solutions	53
2.2.3	Stabilité uniforme	56
2.2.4	Attractivité globale du point d'équilibre	60
2.3	Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2	62
2.3.1	Permanence des solutions	63
2.3.2	Stabilité linéaire	65
2.3.3	Stabilité globale	68
2.3.4	Un résultat d'oscillation	73
2.3.5	La périodicité des solutions	76
2.3.6	L'ordre de convergence	79
2.3.7	Simulations numériques	81
2.4	Quelques réponses pour les problèmes ouverts	85
3	Existence et attractivité globale des solutions périodiques pour un système d'équations aux différences non-autonomes de type max	87
3.1	Introduction	87
3.2	Existence et unicité d'une solution périodique	88
3.3	Attractivité globale de la solution périodique	95
3.4	Exemples	98
3.5	Les systèmes de type min et ceux mixtes analogues au Système (3.1) . .	103
	Conclusion générale et perspectives	105
A	Calcul des polynômes caractéristiques associés aux systèmes linéarisés des Systèmes (1.19), (1.26) et (1.34)	107
A.1	Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.19)	107

TABLE DES MATIÈRES

A.2 Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)	110
A.3 Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)	118
Bibliographie	125

Introduction générale

L'ancienneté, la richesse ainsi que la flexibilité appréciable d'utilisation, ont permis aux équations aux différences d'être un sujet attractif ces derniers temps au milieu des chercheurs et des scientifiques de différentes disciplines. En fait, le concept de récurrence, qui est la base de ce genre d'équations, est apparu à l'époque et il a été utilisé par des anciennes civilisations comme les Babyloniens au cours de leurs études des nombres, et elles ont connu plusieurs équations aux différences (ou suites récurrentes comme certains l'appellent), et une des plus célèbres équation aux différences (linéaire) est celle qui décrit «le problème des lapins» apparu dans le *Liber Abaci* de Leonardo de Pise (en 1202), dite «Suite de Fibonacci». Cependant, la théorie des équations aux différences n'a connu aucun développement jusqu'à le 18^{ème} siècle, grâce aux mathématiciens De Moivre, Euler, Lagrange, Poincaré, Laplace et autres. Ensuite, elles ont été utilisées beaucoup avec les tentatives de fournir des méthodes de discrétisations pour les équations différentielles afin d'obtenir des solutions approximatives pour ces dernières, et dans cette démarche, de nombreux problèmes concernant les flux de fluides dépendants du temps, la diffusion et transport des neutrons, les flux de radiations, les réactions thermo-nucléaires et d'autres impliquant des équations différentielles aux dérivées partielles ont été résolus en utilisant les équations aux différences. La modélisation mathématique a ouvert aussi de nouvelles portes pour les équations aux différences lorsqu'elle avait conféré un tas de modèles discrets qui

traduisent des phénomènes de la vie réelle, surtout ceux qui viennent de l'écologie, et plus précisément la dynamique des populations, dont les équations aux différences représentent des bonnes candidates pour la description et l'explication des différentes variations au cours du temps dans les populations où il n'y a pas des générations successives imbriquées, comme par exemple la croissance et l'extinction des espèces, l'issue de compétition, les épidémies, ... etc. Dès lors, le champs d'applications des équations aux différences avait connu une diversité qui touche des domaines comme l'économie ([25]), la médecine et la biologie ([5]- [7], [12], [15] - [17], [39], [58]), ... etc. Maintenant, elles font partie des concepts qui assurent remarquablement la relation entre les mathématiques et les autres sciences.

L'étude des équations aux différences adresse une question fondamentale qui est de comprendre le comportement qualitative de ces dernières. La théorie des équations aux différences linéaires se base principalement sur les propriétés de l'algèbre linéaire qui offrent des méthodes simples pour résoudre ces équations, on peut trouver des parties entièrement dévolues à cette théorie classique dans la bibliographie suivante [4], [19], [35], [41], [43]. Néanmoins, pour les équations non-linéaires, en général on ne peut pas prévoir de trouver une forme explicite pour la solution. Au lieu de ça, on cherche d'autres techniques afin de répondre à cette question, et dans ce contexte, les deux méthodes connues pour analyser la stabilité des équations différentielles ont été adaptées pour les équations aux différences. La linéarisation au voisinage des équilibres est la première méthode et sans doute la plus utilisable, elle nous permet de déduire la stabilité locale asymptotique de l'équation non-linéaire à partir de la stabilité asymptotique de l'équation linéarisée (cela marche également au cas d'instabilité). Concernant la deuxième méthode, appelée la méthode directe ou la seconde méthode de Liapunov, se base sur la notion «Fonction de Liapunov». Cette méthode est très élégante mais ce qui n'est pas bon est que la détermination de telle fonction constitue toujours une difficulté majeure.

Les équations aux différences non-autonomes forment une classe spéciale d'équations aux différences, dont les coefficients sont variables. En comparant avec ceux à coeffi-

cients constants (dites aussi autonomes), leur étude semble plus difficile et compliquée et il n'y a pas beaucoup de travaux en ce sens. Dans la nature parfois, les conditions vitales dans un phénomène varient, ce qui explique bien la considération des modèles discrets représentés par des équations aux différences non-autonomes, et en particulier le cas périodique, comme par exemple, le modèle Beverton-Holt ([20], [39]) et le modèle de Ricker ([29], [30]).

C'est dans cet axe de recherche que s'inscrivent nos travaux présentés dans cette thèse qui ont pour objectif de faire une étude qualitative du comportement des solutions de certaines équations et systèmes d'équations aux différences autonomes et non-autonomes.

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler les outils dont on aura besoin dans ce projet de thèse. Ensuite, on donne une petite touche afin d'améliorer l'étude du modèle « Herbivore- plante » faite dans [17]. Plus précisément, on s'intéresse à savoir si les solutions sont bornées dans un cas proposé comme un problème ouvert dans [40]. Ce modèle est représenté par le système d'équations aux différences d'ordre 1

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta x_n + e^{y_n}}, \quad y_{n+1} = \gamma(x_n + 1)y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in (0, \infty)$, $\gamma \in (0, 1)$ et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels positifs. Nous allons montrer que la solution de ce dernier est toujours bornée quand $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$. Ce résultat, en plus de son importance elle-même, pourra aider à étudier la convergence globale de ce système.

Ensuite, motivé par [45], nous étudions dans la dernière partie la stabilité asymptotique globale des trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + y_{n-p}}, \quad y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + x_{n-p}},$$

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + x_{n-p}}, \quad y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + y_{n-p}},$$

et

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-x_{n-i}}}{A + y_{n-p}}, \quad y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-y_{n-i}}}{B + x_{n-p}},$$

où $n, k, p \in \mathbb{N}$, les paramètres A, B sont des constantes strictement positifs et $\alpha, \xi, \beta_i, \gamma_i$, pour $i = 0, 1, \dots, k$, ainsi que les valeurs initiales $x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_0, y_{-s}, y_{-s+1}, \dots, y_0$, avec $s = \max\{k, p\}$, sont des nombres réels positifs arbitraires.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à deux problèmes ouverts proposés par les deux mathématiciens E. Camouzis et G. Ladas dans [10], où ils ont suggéré l'investigation du comportement global des deux équations non-linéaires

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

du seconde et troisième ordre respectivement, avec $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite périodique de nombres réels strictement positifs de période $\omega \geq 2$. Ces deux équations sont des équations aux différences non-autonomes et comme souligné dans ce qui précède, il n'y a pas de méthodes générales à suivre pour étudier ce genre d'équations. Dans ce chapitre, nous donnons quelques réponses à ces problèmes, seulement, notre étude sera sur des classes d'équations plus générales.

Dans une première partie, nous étudions l'équation

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite périodique de nombres réels strictement positifs de période $\omega \geq 1$ et $k \geq 1$ un entier naturel. Il est clair que pour $k = 1, 2$ on obtient les deux dernières équations.

Dans la deuxième partie, on généralise l'équation d'ordre 3 précédente dans un autre sens en passant au système

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{q_n + x_n}{q_n + x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et en prenant $\{p_n\}_{n \geq 0}$ et $\{q_n\}_{n \geq 0}$ des suites périodiques de nombres réels strictement positifs de période 2. L'idée d'étude ici est de transformer ce système non-autonome en un système autonome équivalent d'ordre 4 et discuter le comportement de ce dernier

en commençant par la stabilité asymptotique locale, l'attractivité globale ou autrement dit la convergence globale vers un point d'équilibre, ainsi que donner des résultats de périodicité et d'oscillation.

Dans le dernier chapitre, on considère le système fonctionnel non-autonome de type max

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max\{f_1(n, x_n), g_1(n, y_n)\} \\ y_{n+1} = \max\{f_2(n, x_n), g_2(n, y_n)\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels, les fonctions

$$f_i, g_i : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

sont ω -périodiques en n avec $\omega \geq 1$ un entier naturel et \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels. Dans un premier temps, on utilise le théorème de point fixe de Banach pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution périodique de période ω . On prouve après que toutes les solutions de ce système convergent vers cette solution périodique. Enfin, on donne des exemples pour illustrer nos résultats obtenus.

CHAPITRE 1

Quelques préliminaires et étude de certains systèmes d'équations aux différences autonomes

1.1 Quelques préliminaires

Cette première partie regroupe des notions générales des équations aux différences, de la stabilité avec ses deux méthodes célèbres : la linéarisation et la méthode directe de Liapunov, ainsi que quelques théorèmes qui nous seront utiles pour la suite de notre thèse. Pour ces éléments préliminaires, nous renvoyons aux ouvrages [10], [18], [19], [27], [37], [41], [46] et [49].

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Une équation aux différences autonome d'ordre $(k + 1)$ est une équation de la forme*

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

1.1. Quelques préliminaires

où $f : I^{k+1} \longrightarrow I$ est une fonction continue, I est un sous-ensemble de \mathbb{R} et $y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0 \in I$ sont les valeurs initiales avec $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1.1 • Si la fonction f dépend aussi de n , l'équation

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (1.2)$$

de valeurs initiales $y_{n_0-k}, y_{n_0-k+1}, \dots, y_{n_0} \in I$, est appelée une équation aux différences non-autonome, où

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 \text{ entier naturel}\},$$

avec $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$.

- L'Equation (1.2) admet une et une seule solution $\{y_n\}_{n \geq n_0-k}$ une fois fixées les $(k+1)$ valeurs initiales.
- Une équation aux différences est dite linéaire d'ordre $(k+1)$ si elle est de la forme

$$y_{n+1} + p_1(n)y_n + p_2(n)y_{n-1} + \dots + p_{k+1}(n)y_{n-k} = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

où $g(n), p_i(n), i = 1, 2, \dots, k+1$, sont des fonctions réelles avec $p_{k+1}(n) \neq 0$, pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 1.1.2 (Expression sous forme d'un système) L'équation aux différences (1.2) peut se transformer en un système comme suit :

Si on pose $y_1(n) = y_{n+k}, y_2(n) = y_{n+k-1}, \dots, y_{k+1}(n) = y_n$, pour tout $n \geq n_0$, on obtient alors le système

$$\begin{cases} y_1(n+1) &= f(n, y_1(n), y_2(n), \dots, y_{k+1}(n)) \\ y_2(n+1) &= y_1(n) \\ &\vdots \\ y_{k+1}(n+1) &= y_k(n) \end{cases}$$

Définition 1.1.2 (Point d'équilibre) Un point d'équilibre de (1.2) est un nombre $\bar{y} \in I$ vérifiant

$$\bar{y} = f(n, \bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}), \quad \text{pour tout } n \geq n_0 - k.$$

En particulier, $\bar{y} \in I$ est dit un point d'équilibre de (1.1) s'il vérifie l'équation

$$\bar{y} = f(\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}).$$

Définition 1.1.3 (Permanence) Une solution $\{y_n\}_{n \geq n_0 - k}$ de l'Equation (1.2) est dite permanente s'il existe P et Q deux constantes réelles telles que $0 < P \leq Q < \infty$, et pour toutes valeurs initiales $y_{n_0 - k}, y_{n_0 - k + 1}, \dots, y_{n_0} \in I$, il existe $N \geq n_0 - k$ tel que

$$P \leq y_n \leq Q, \text{ pour tout } n \geq N.$$

Définition 1.1.4 (Oscillation) Une solution $\{y_n\}_{n \geq n_0 - k}$ de l'Equation (1.2) est dite non-oscillatoire autour du point d'équilibre \bar{y} s'il existe $N \geq n_0 - k$ tel que, soit

$$y_n \geq \bar{y}, \text{ pour tout } n \geq N,$$

ou

$$y_n \leq \bar{y}, \text{ pour tout } n \geq N.$$

Autrement, la solution $\{y_n\}_{n \geq n_0 - k}$ est dite oscillatoire autour de \bar{y} .

Définition 1.1.5 (Périodicité) Une solution $\{y_n\}_{n \geq n_0 - k}$ de l'Equation (1.2) est dite périodique de période ω (ou ω -périodique) s'il existe un entier $\omega \geq 1$ tel que

$$y_{n+\omega} = y_n, \text{ pour tout } n \geq n_0 - k.$$

Une solution $\{y_n\}_{n \geq n_0 - k}$ de l'Equation (1.2) est dite éventuellement périodique de période ω s'il existe un entier $N \geq n_0 - k$ tel que $\{y_n\}_{n \geq N}$ est périodique de période ω , c'est-à-dire,

$$y_{n+\omega} = y_n, \text{ pour tout } n \geq N.$$

Le lemme suivant décrit quand une solution de l'Equation (1.2) converge vers une solution périodique. Voir [27].

Lemme 1.1.1 Soit $\{y_n\}_{n \geq n_0 - k}$ une solution de l'Equation (1.2). Supposons qu'il existe des nombres réels $l_0, l_1, \dots, l_{\omega-1}$, tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\omega n + j} = l_j, \text{ pour tout } j = 0, 1, \dots, \omega - 1,$$

et soit $\{\tilde{y}_n\}_{n \geq n_0 - k}$ une suite ω -périodique de nombres réels telle que pour tout entier j avec $0 \leq j \leq \omega - 1$,

$$\tilde{y}_{\omega n + j} = l_j, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Alors, on a

- $\{\tilde{y}_n\}_{n \geq n_0 - k}$ est une solution ω -périodique de l'Equation (1.2),
- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\omega n + j} = \tilde{y}_j$, pour $j = 0, 1, \dots, \omega - 1$.

1.1.2 A propos de la stabilité

Le concept de stabilité comme celui de périodicité est au coeur de notre étude. Ce critère est tellement important qu'il faudrait beaucoup d'attentions et connaissait une large application dans divers domaines et pas seulement les sciences mathématiques. Dans ce paragraphe nous allons présenter les points essentielles de cette donnée qui vont nous servir dans la suite.

Etant donné le système d'équations aux différences non-autonomes

$$Y_{n+1} = F(n, Y_n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (1.3)$$

avec $F : \mathbb{N}_{n_0} \times M \rightarrow M$, où $M \subset \mathbb{R}^k$ et $k \in \mathbb{N}$, est une fonction continue par rapport au deuxième argument.

Définition 1.1.6 *Un point d'équilibre \bar{Y} de (1.3) est dit*

(i) *Stable si, pour tout $\epsilon > 0$ et $n_0 \geq 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon, n_0)$, tel que si $\|Y_{n_0} - \bar{Y}\| < \delta$ alors*

$$\|Y_n - \bar{Y}\| < \epsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme vectorielle. Autrement, le point d'équilibre \bar{Y} est dit instable.

(ii) *Uniformément stable s'il est stable et δ peut être choisi indépendamment de n_0 .*

(iii) *Attractif s'il existe $\mu(n_0) > 0$, tel que si $\|Y_{n_0} - \bar{Y}\| < \mu$ alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \bar{Y}.$$

(iv) *Uniformément attractif s'il est attractif et μ peut être choisi indépendamment de n_0 .*

(v) *Asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

(vi) *Uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et uniformément attractif.*

(vii) *Exponentiellement stable s'il existe $\delta > 0$, $a > 0$ et $\eta \in (0, 1)$, tels que si $\|Y_{n_0} - \bar{Y}\| < \delta$ alors*

$$\|Y_n - \bar{Y}\| \leq a \|Y_{n_0} - \bar{Y}\| \eta^{n-n_0}.$$

Remarque 1.1.3 Notons que

- Si dans les parties (iii)-(vi) $\mu = \infty$, ou dans la partie (vii) $\delta = \infty$, la propriété de la stabilité qui correspond est dite globale.
- Si \bar{Y} est exponentiellement stable alors il est uniformément asymptotiquement stable.
- Pour le système autonome

$$Y_{n+1} = F(Y_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

on a les équivalences suivantes pour le point d'équilibre \bar{Y} ,

1. Stable \Leftrightarrow Uniformément stable.
2. Asymptotiquement stable \Leftrightarrow Uniformément asymptotiquement stable.
3. Attractif \Leftrightarrow Uniformément attractif.

Supposons de plus que la fonction F est de classe C^1 au voisinage de \bar{Y} .

Définition 1.1.7 On appelle système linéaire associé au Système (1.4) (où système linéarisé) au point d'équilibre \bar{Y} le système

$$Z_{n+1} = F_J Z_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $Z_n = Y_n - \bar{Y}$, F_J est la matrice Jacobiennne de la fonction F calculée en ce point, et son polynôme caractéristique associé est donné par

$$P(\lambda) = \det(F_J - \lambda I_k),$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k .

Le résultat suivant est un théorème de base de la stabilité linéaire pour les équations aux différences non-autonomes ([19], [41]).

Théorème 1.1.1 Considérons l'équation aux différences non-linéaire

$$Y_{n+1} = A(n)Y_n + g(n, Y_n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (1.5)$$

où $A(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, est une matrice $k \times k$ et $g : \mathbb{N}_{n_0} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction continue telle que $g(n, 0) = 0$ et $g(n, y) = o(\|y\|)$ uniformément quand $\|y\| \rightarrow 0$. Alors, si la solution nulle de l'équation linéaire

$$Y_{n+1} = A(n)Y_n, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

1.1. Quelques préliminaires

est uniformément asymptotiquement stable alors la solution nulle de l'équation non-linéaire (1.5) est exponentiellement stable.

Pour le cas des systèmes autonomes on a le Théorème (1.1.2) qui est une conséquence du précédent.

Théorème 1.1.2 *Soit \bar{Y} un point d'équilibre du Système (1.4). Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

- (i) *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne F_J sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre \bar{Y} est asymptotiquement stable.*
- (ii) *Si au moins une des valeurs propres de F_J est de module supérieur à 1, alors \bar{Y} est instable.*

Le Théorème (1.1.3) est pris de [10] et il donne une condition nécessaire et suffisante pour que les racines d'un polynôme de degré 3 soient dans le disque unité $|\lambda| < 1$.

Théorème 1.1.3 *Supposons que a_0, a_1 et a_2 sont des nombres réels. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de l'équation*

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{1.6}$$

soient à l'intérieur du disque unité est

$$|a_2 + a_0| < 1 + a_1, \quad |a_2 - 3a_0| < 3 - a_1 \quad \text{et} \quad a_0^2 + a_1 - a_0a_2 < 1.$$

Rappelons maintenant un théorème célèbre de l'analyse complexe qui nous aidera également à l'étude de la stabilité locale des points d'équilibres au cas autonome.

Théorème 1.1.4 (Théorème de Rouché, [18]) *Soient D un ouvert du plan complexe \mathbb{C} , f, g deux fonctions holomorphes sur D et K un compact à bord contenu dans D . Si*

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \text{pour tout } z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $f + g$ dans K est égal au nombre de zéros de f dans K .

Ensuite, on présente le concept de la fonction de Lyapunov. Soit $V(n, y)$ une fonction définie sur $\mathbb{N}_{n_0} \times M$ et qui prend des valeurs dans \mathbb{R}_+ , l'ensemble des nombres réels positifs. On suppose aussi que cette fonction est continue par rapport à son deuxième argument et on définit la variation de V relativement à (1.3) comme suit

$$\Delta V(n, y) = V(n + 1, F(n, y)) - V(n, y)$$

et

$$\Delta V(n, Y_n) = V(n + 1, F(n, Y_n)) - V(n, Y_n) = V(n + 1, Y_{n+1}) - V(n, Y_n),$$

la fonction V est dite de Lyapunov, et en plus, pour ces fonctions nous avons besoin des deux définitions suivantes.

Définition 1.1.8 Une fonction $V : \mathbb{N}_{n_0} \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite définie positive (resp. définie négative) s'il existe une fonction réelle ϕ continue sur $[0, a)$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, strictement croissante et $\phi(0) = 0$ telle que

$$\phi(\|y\|) \leq V(n, y) \text{ (resp. } V(n, y) \leq -\phi(\|y\|)),$$

pour tout $(n, y) \in \mathbb{N}_{n_0} \times M$.

Définition 1.1.9 ([41]) Une fonction $V : \mathbb{N}_{n_0} \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite décroissante (decreasing function) s'il existe une fonction réelle ϕ continue sur $[0, a)$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, strictement croissante et $\phi(0) = 0$ telle que

$$V(n, y) \leq \phi(\|y\|),$$

pour tout $(n, y) \in \mathbb{N}_{n_0} \times M$.

L'utilisation de ces fonctions fournit des critères qui permettent de conclure à la stabilité ou à la stabilité asymptotique des points d'équilibre. Dans cet axe, on cite dans le Théorème (1.1.5) des résultats qui concernent la stabilité uniforme de la solution nulle pour les systèmes de la forme (1.3). Pour une démonstration le lecteur pourra se référer à [41].

Théorème 1.1.5 Considérons le Système (1.3) avec $F(n, 0) = 0$, pour tout $n \geq n_0$. Alors, les affirmations suivantes sont vraies.

1.1. Quelques préliminaires

- *S'il existe une fonction définie positive et décroissante V , telle que $\Delta V(n, Y_n) \leq 0$, alors $\bar{Y} = 0$ est uniformément stable.*
- *S'il existe une fonction définie positive et décroissante V , telle que ΔV est définie négative, alors $\bar{Y} = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.*

1.1.3 Autres théorèmes utiles

Commençons par rappeler la version du principe de comparaison pour les équations aux différences non-autonomes, voir [41].

Théorème 1.1.6 *Soit $y \geq 0$ un nombre réel, $g(n, y)$ une fonction croissante par rapport à y pour tout nombre naturel fixé $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $n \geq n_0$, les inégalités*

$$u_{n+1} \leq g(n, u_n),$$

$$v_{n+1} \geq g(n, v_n),$$

sont vérifiées. Alors,

$$u_{n_0} \leq v_{n_0}$$

implique que

$$u_n \leq v_n, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Rappelons aussi un théorème de convergence de [27].

Théorème 1.1.7 *Considérons l'Equation (1.1) où $f : [a, b]^{k+1} \rightarrow [a, b]$ une fonction continue, $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{N}$. Supposons de plus que f vérifie les conditions suivantes*

1. *Pour tout entier i avec $1 \leq i \leq k + 1$, la fonction $f(z_1, z_2, \dots, z_{k+1})$ est monotone en z_i pour $z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{k+1}$ fixés.*
2. *Si (m, M) est une solution du système*

$$m = f(m_1, m_2, \dots, m_{k+1}) \text{ et } M = f(M_1, M_2, \dots, M_{k+1}),$$

alors $m = M$, où pour tout $i = 1, 2, \dots, k + 1$, on a

$$m_i = \begin{cases} m & \text{si } f \text{ est croissante en } z_i, \\ M & \text{si } f \text{ est décroissante en } z_i, \end{cases}$$

et

$$M_i = \begin{cases} M & \text{si } f \text{ est croissante en } z_i, \\ m & \text{si } f \text{ est décroissante en } z_i. \end{cases}$$

Alors, il existe exactement un seul point d'équilibre \bar{y} pour l'Equation (1.1) et toute solution de cette équation converge vers \bar{y} .

Le théorème de point fixe de Banach (ou le principe de l'application contractante) va jouer un rôle important dans le chapitre 3.

Théorème 1.1.8 (Théorème de point fixe de Banach) Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet non vide, et soit $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ une application contractante, i.e., il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{X}$. Alors, T admet un seul point fixe z dans \mathbb{X} , i.e., $f(z) = z$.

Le théorème de point fixe de Brouwer apparaîtra aussi dans une de nos démonstrations.

Théorème 1.1.9 (Théorème de point fixe de Brouwer, [9]) Toute application continue d'une boule fermée de \mathbb{R}^n dans elle-même admet un point fixe.

Nous aurons besoin également du théorème suivant.

Théorème 1.1.10 ([37]) Pour $i = 1, 2, \dots, m$ supposons que

$$p_i \in (0, \infty) \text{ et } k_i \in \mathbb{N} \text{ avec } \sum_{i=1}^m (p_i + k_i) \neq 1.$$

Soit $\{P_i(n)\}_{i=1}^m$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_i(n) \geq p_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m.$$

Supposons que l'inégalité aux différences linéaire

$$z_{n+1} - z_n + \sum_{i=1}^m P_i(n)z_{n-k_i} \leq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

admet une solution éventuellement positive. Alors, on a

(a) L'équation

$$\lambda - 1 + \sum_{i=1}^m p_i \lambda^{-k_i} = 0$$

a une racine strictement positive.

(b) L'équation aux différences

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^m p_i x_{n-k_i} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

a une solution strictement positive.

Etant donné le système d'équations aux différences

$$Y_{n+1} = (A + B_n) Y_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

où Y_n est un vecteur de dimension k , $A \in C_{k \times k}$, où $C_{k \times k}$ est l'ensemble des matrices constantes, et $B : \mathbb{N} \rightarrow C_{k \times k}$ est une fonction matricielle satisfaisant

$$\|B_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme matricielle. Donnons dans ce qui suit deux théorèmes (voir [19, 46]) qui concernent l'ordre de convergence des solutions du Système (1.7).

Théorème 1.1.11 (Premier théorème de Perron) *Supposons que la condition (1.8) est vérifiée.*

Si Y_n est une solution de (1.7), alors ou bien $Y_n = 0$ pour tout n assez grand, ou bien

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Y_{n+1}\|}{\|Y_n\|} \quad (1.9)$$

existe et il est égal au module d'une des valeurs propres de la matrice A .

Théorème 1.1.12 (Deuxième théorème de Perron) *Supposons que la condition (1.8) est vérifiée. Si Y_n est une solution de (1.7), alors ou bien $Y_n = 0$ pour tout n assez grand, ou bien*

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|Y_n\|)^{1/n} \quad (1.10)$$

existe et il est égal au module d'une des valeurs propres de la matrice A .

Pour terminer ces rappels, donnons un résultat concernant l'équation aux différences non-autonome du premier ordre

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.11)$$

Celui a été prouvé dans [49] et il nous servira dans le chapitre 2 pour démontrer le Théorème (2.2.2) et qui y sera présenté.

Lemme 1.1.2 *Considérons l'Equation (1.11) de valeur initiale réelle strictement positive y_0 . Supposons aussi que $\{a_n\}_{n \geq 0}$ est une suite périodique dans $(0, 1]$ de période ω avec $\omega \geq 1$ un entier naturel, $\{a_n\}_{n \geq 0} \not\equiv \{1\}$, et $\{b_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels positifs périodique de période ω . Alors, l'Equation (1.11) admet une unique solution périodique $\{\tilde{y}_n\}_{n \geq 0}$ de période ω et toute solution $\{y_n\}_{n \geq 0}$ de cette équation converge vers $\{\tilde{y}_n\}_{n \geq 0}$.*

1.2 Sur un modèle Herbivore-Plante

Dans cette partie, nous nous intéressons à un modèle *Herbivore-Plante* de la dynamique des populations qui décrit l'interaction de la pyrale pomme brindille (apple twig borer), un insecte ravageur des vignes, et les raisins dans les hautes plaines du Texas. Ce dernier est représenté par le système d'équations aux différences d'ordre 1

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta x_n + e^{y_n}} \\ y_{n+1} = \gamma(x_n + 1)y_n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.12)$$

avec $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in (0, \infty)$, $\gamma \in (0, 1)$ et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels positifs. Ce modèle a été développé et étudié pour la première fois par Allen et al. dans [5], voir aussi [6], [7] et une bref étude dans [37]. Le Système (1.12) admet trois points d'équilibres : le point $(0, 0)$ qui est instable, le deuxième est $(\frac{\alpha-1}{\beta}, 0)$, et sous la condition

$$\alpha + \beta \geq 1 + \frac{\beta}{\gamma} \quad (1.13)$$

il possède aussi un troisième point d'équilibre qui est $(\frac{1}{\gamma} - 1, \ln(\alpha + \beta - \frac{\beta}{\gamma}))$. Dans leur étude, ces chercheurs ont pu démontrer que le point $(\frac{\alpha-1}{\beta}, 0)$ est globalement asymptotiquement stable au cas où $\alpha + \beta < 1 + \frac{\beta}{\gamma}$, et le comportement du système quand la condition (1.13) est vérifiée restait en question. Celle ci a été proposée ensuite comme un problème ouvert dans [40]. En fait, la difficulté dans ce dernier cas était liée au permanence des solutions, ce qui gêne l'étude du comportement global. Notons qu'il est très important pour que toute solution du Système (1.12) soit bornée en tant que les populations des espèces x_n et y_n ne peuvent pas croître d'une façon infinie du fait que

les ressources sont limitées. Récemment, ce problème fut étudié dans [17] où l'auteur a traité le comportement global de ce système après avoir montré que la solution est bornée sous une hypothèse un peu sévère. Ici, on donne un autre résultat sur ce sujet que nous pensons plus meilleur.

Théorème 1.2.1 *Considérons le Système (1.12) avec*

$$\alpha \in (1, \infty), \beta \in (0, \infty), \gamma \in (0, \frac{1}{2}] \quad (1.14)$$

et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels positifs. Supposons aussi que (1.13) est vérifiée. Alors, Toute solution de ce système est bornée.

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ une solution du Système (1.12). Evidemment, on a $x_0 = 0$ si et seulement si $x_n = 0$, pour tout $n \geq 0$. De cela on obtient, lorsque $x_0 = 0$, que

$$0 \leq y_n = \gamma^n y_0 \leq y_0, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

ce qui signifie que la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ est bornée. Maintenant, supposons que $x_0 \neq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$ on a

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta x_n + e^{y_n}} \leq \frac{\alpha x_n}{\beta x_n} \leq \frac{\alpha}{\beta},$$

c'est à dire

$$x_n \leq \frac{\alpha}{\beta} \text{ pour tout } n \geq 1,$$

donc la suite $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est bornée. On montre à présent que $\{y_n\}_{n \geq 0}$ est bornée aussi. Pour cela, distinguons les cas suivants : lorsque la suite $(x_n - 1)$ est positive, le cas où elle est négative et le troisième cas est lorsque (x_n) oscille autour de 1.

Cas 1 : Supposons que $x_n \geq 1$, pour tout $n \geq 0$. On a de (1.12)

$$x_{n+1}(\beta x_n + e^{y_n}) = \alpha x_n,$$

ceci s'écrit

$$e^{y_n} = \frac{\alpha x_n - \beta x_n x_{n+1}}{x_{n+1}},$$

alors

$$e^{y_n} \leq \frac{\alpha x_n}{x_{n+1}} \leq \alpha x_n \leq \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

De (1.13) et (1.14), on a

$$\beta \leq 1 + \beta\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \leq \alpha \leq \alpha^2,$$

d'où

$$y_n \leq \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right), \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

ce qui signifie que $\{y_n\}_{n \geq 0}$ est bornée.

Cas 2 : Supposons que $x_n \leq 1$, pour tout $n \geq 0$. De (1.12) on a

$$y_{n+1} = \gamma(x_n + 1)y_n \leq 2\gamma y_n.$$

Puisque $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$, alors on obtient que $y_{n+1} < y_n$, c'est à dire, la suite $\{y_n\}_{n \geq 0}$ est décroissante et comme $y_n \geq 0$, pour tout $n \geq 0$. Alors, la suite $\{y_n\}_{n \geq 0}$ est bornée.

Cas 3 : Supposons maintenant que la suite $\{x_n\}_{n \geq 0}$ oscille autour de 1. Alors, il existe une suite croissante $\{n_s\}_{s \geq 1}$ d'entiers positifs tels que $x_{n_l} \geq 1$, pour un certain $n_1 \geq 1$, et pour tout $l = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} x_n < 1, & \text{pour } n_{2l-1} < n \leq n_{2l}, \\ x_n \geq 1, & \text{pour } n_{2l} < n \leq n_{2l+1}. \end{cases}$$

On a pour tout $l \geq 1$, $x_{n_{2l-1}} \geq 1$. Donc, raisonnons comme dans le premier cas

$$e^{y_{n_{2l-1}-1}} = \frac{\alpha x_{n_{2l-1}-1} - \beta x_{n_{2l-1}-1} x_{n_{2l-1}}}{x_{n_{2l-1}}} \leq \frac{\alpha x_{n_{2l-1}-1}}{x_{n_{2l-1}}} \leq \alpha x_{n_{2l-1}-1} \leq \frac{\alpha^2}{\beta},$$

ce qui implique que

$$y_{n_{2l-1}-1} \leq \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right),$$

et par suite, on trouve

$$\begin{aligned} y_{n_{2l-1}} &= \gamma(x_{n_{2l-1}-1} + 1)y_{n_{2l-1}-1} \leq \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)y_{n_{2l-1}-1} \\ &\leq \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)\ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right). \end{aligned}$$

De plus, pour $n_{2l-1} < n \leq n_{2l}$, on a

$$y_{n+1} = \gamma(x_n + 1)y_n < 2\gamma y_n < y_n,$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} y_{n_{2l+1}} < y_{2l} < y_{n_{2l}-1} < \dots < y_{n_{2l-1}+1} &= \gamma(x_{n_{2l-1}} + 1)y_{n_{2l-1}} \\ &\leq \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)y_{n_{2l-1}} \\ &\leq \gamma^2\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)^2 \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, pour $n_{2l} < n \leq n_{2l+1}$, on a $x_n \geq 1$. Raisonons également comme dans le premier cas, on trouve

$$y_n \leq \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right), \quad \text{pour tout } n_{2l} \leq n < n_{2l+1},$$

et par suite

$$y_{n_{2l+1}} = \gamma(x_{n_{2l+1}-1} + 1)y_{n_{2l+1}-1} \leq \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)y_{n_{2l+1}-1} \leq \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right).$$

En conclusion, prenons

$$c = \max \left\{ \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right), \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right), \gamma^2\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)^2 \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right) \right\},$$

alors on a pour tout $l = 1, 2, \dots$,

$$y_n \leq c, \quad \text{pour tout } n_{2l-1} \leq n \leq n_{2l+1}.$$

C'est à dire,

$$y_n \leq c, \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

Donc $\{y_n\}_{n \geq 0}$ est bornée dans ce cas aussi, ce qui finit la démonstration. ■

1.3 Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

Les équations aux différences non-linéaires d'ordre supérieur ont une importance primordiale dans les applications, où la $(n + 1)^{\text{ème}}$ génération (ou état) d'un système dépend des k générations (ou états) précédentes. Pour cette raison, elles sont très considérables et font l'objet de plusieurs ouvrages (on peut se référer à [37], qui contient

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

une mine de résultats en ce sens avec applications). Dans ce qui suit, nous allons aborder les trois systèmes d'équations aux différences non-linéaires de forme exponentielle et d'ordre supérieur

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + y_{n-p}}, & y_{n+1} &= \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + x_{n-p}}, \\ x_{n+1} &= \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + x_{n-p}}, & y_{n+1} &= \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + y_{n-p}}, \\ x_{n+1} &= \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-x_{n-i}}}{A + y_{n-p}}, & y_{n+1} &= \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-y_{n-i}}}{B + x_{n-p}}, \end{aligned}$$

où $n, k, p \in \mathbb{N}$, les paramètres A, B sont des constantes strictement positifs et $\alpha, \xi, \beta_i, \gamma_i$, pour $i = 0, 1, \dots, k$, ainsi que les valeurs initiales $x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_0, y_{-s}, y_{-s+1}, \dots, y_0$, avec $s = \max\{k, p\}$, sont des nombres réels positifs arbitraires. En fait, ces derniers systèmes peuvent considérés comme des extensions pour les systèmes d'ordre 2

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + y_{n-1}}, & y_{n+1} &= \frac{\delta + \epsilon e^{-x_n}}{\xi + x_{n-1}}, \\ x_{n+1} &= \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + x_{n-1}}, & y_{n+1} &= \frac{\delta + \epsilon e^{-x_n}}{\xi + y_{n-1}}, \\ x_{n+1} &= \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + y_{n-1}}, & y_{n+1} &= \frac{\delta + \epsilon e^{-y_n}}{\xi + x_{n-1}}, \end{aligned}$$

c'est à dire lorsque $k = 0$ et $p = 1$, et qui ont été étudié par Papaschinopoulos et al. dans [45]. Cette dernière partie de ce chapitre se compose de trois paragraphes, où dans chacun on étudie un système séparément et on s'intéresse essentiellement à la permanence des solutions, l'existence des points d'équilibres, leur stabilité asymptotique ainsi que l'attractivité globale. Mais pour réaliser ça, arrêtons-nous un instant sur un théorème fondamental de convergence et qui nous servira dans nos démonstrations.

Théorème 1.3.1 *Considérons le système d'équations aux différences d'ordre supérieur*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s}) \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s}) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.15)$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

où

$$f : I^{s+1} \times J^{s+1} \longrightarrow I, \quad g : I^{s+1} \times J^{s+1} \longrightarrow J$$

sont deux fonctions continues et $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2]$ sont deux intervalles de nombres réels avec $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. Supposons aussi que les affirmations suivantes sont vraies,

1. f et g sont décroissantes en chacun de ses arguments.
2. Si (m, M, r, R) est une solution du système

$$\begin{aligned} m &= f(M, M, \dots, M, R, R, \dots, R), & M &= f(m, m, \dots, m, r, r, \dots, r), \\ r &= g(M, M, \dots, M, R, R, \dots, R), & R &= g(m, m, \dots, m, r, r, \dots, r), \end{aligned}$$

alors $m = M$ et $r = R$.

Alors, il existe un seul point d'équilibre pour le système (1.15) et toute solution de ce système qui vérifie

$$x_{n_0}, x_{n_0-1}, \dots, x_{n_0-s} \in I \text{ et } y_{n_0}, y_{n_0-1}, \dots, y_{n_0-s} \in J, \text{ pour un certain } n_0 \in \mathbb{N}, \quad (1.16)$$

converge vers ce point d'équilibre.

Preuve. Par le théorème de point fixe de Brouwer, la fonction

$$F : I^{s+1} \times J^{s+1} \longrightarrow I^{s+1} \times J^{s+1} \quad (1.17)$$

définie par

$$F = (f_0, f_1, \dots, f_s, g_0, g_1, \dots, g_s),$$

où

$$f_0 = f, \quad g_0 = g$$

et pour tout $(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) \in I^{s+1} \times J^{s+1}$,

$$f_1(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = u_0,$$

$$f_2(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = u_1,$$

⋮

$$f_s(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = u_{s-1}$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

et

$$g_1(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = v_0,$$

$$g_2(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = v_1,$$

⋮

$$g_s(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = v_{s-1},$$

admet au moins un point fixe dans $I^{s+1} \times J^{s+1}$. En outre, si $(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s)$ est un point fixe de F , c'est à dire

$$(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s) = F(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s),$$

alors

$$\bar{u}_0 = f(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s), \bar{u}_1 = \bar{u}_0, \bar{u}_2 = \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s = \bar{u}_{s-1}$$

et

$$\bar{v}_0 = g(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s), \bar{v}_1 = \bar{v}_0, \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s = \bar{v}_{s-1}.$$

Posons

$$\bar{x} = \bar{u}_0 = \bar{u}_1 = \dots = \bar{u}_s, \bar{y} = \bar{v}_0 = \bar{v}_1 = \dots = \bar{v}_s,$$

donc on a

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}), \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}), \end{cases}$$

ce qui veut dire que le point (\bar{x}, \bar{y}) est un point d'équilibre du Système (1.15).

Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ une solution du Système (1.15) telle que (1.16) est vérifiée. Il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Prenons $m^0 = a_1, M^0 = b_1, r^0 = a_2, R^0 = b_2$ et pour tout $i \geq 0$,

$$m^{i+1} = f(M^i, M^i, \dots, M^i, R^i, R^i, \dots, R^i), \quad M^{i+1} = f(m^i, m^i, \dots, m^i, r^i, r^i, \dots, r^i),$$

$$r^{i+1} = g(M^i, M^i, \dots, M^i, R^i, R^i, \dots, R^i), \quad R^{i+1} = g(m^i, m^i, \dots, m^i, r^i, r^i, \dots, r^i).$$

Alors

$$m^0 = a_1 \leq f(M^0, M^0, \dots, M^0, R^0, R^0, \dots, R^0) \leq f(m^0, m^0, \dots, m^0, r^0, r^0, \dots, r^0) \leq M^0 = b_1$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

et

$$r^0 = a_2 \leq g(M^0, M^0, \dots, M^0, R^0, R^0, \dots, R^0) \leq g(m^0, m^0, \dots, m^0, r^0, r^0, \dots, r^0) \leq R^0 = b_2$$

et donc

$$m^0 \leq m^1 \leq M^1 \leq M^0 \text{ et } r^0 \leq r^1 \leq R^1 \leq R^0.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} m^1 = f(M^0, M^0, \dots, M^0, R^0, R^0, \dots, R^0) &\leq f(M^1, M^1, \dots, M^1, R^1, R^1, \dots, R^1) \\ &\leq f(m^1, m^1, \dots, m^1, r^1, r^1, \dots, r^1) \\ &\leq f(m^0, m^0, \dots, m^0, r^0, r^0, \dots, r^0) = M^1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r^1 = g(M^0, M^0, \dots, M^0, R^0, R^0, \dots, R^0) &\leq g(M^1, M^1, \dots, M^1, R^1, R^1, \dots, R^1) \\ &\leq g(m^1, m^1, \dots, m^1, r^1, r^1, \dots, r^1) \\ &\leq g(m^0, m^0, \dots, m^0, r^0, r^0, \dots, r^0) = R^1, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$m^1 \leq m^2 \leq M^2 \leq M^1 \text{ et } r^1 \leq r^2 \leq R^2 \leq R^1.$$

Par induction il résulte que pour tout $i \geq 0$,

$$a_1 = m^0 \leq m^1 \leq \dots \leq m^{i-1} \leq m^i \leq M^i \leq M^{i-1} \leq \dots \leq M^1 \leq M^0 = b_1$$

et

$$a_2 = r^0 \leq r^1 \leq \dots \leq r^{i-1} \leq r^i \leq R^i \leq R^{i-1} \leq \dots \leq R^1 \leq R^0 = b_2.$$

De plus, pour tout $n \geq n_0 - s$, on a

$$m^0 = a_1 \leq x_n \leq b_1 = M^0 \text{ et } r^0 = a_2 \leq y_n \leq b_2 = R^0,$$

d'où, pour tout $n \geq n_0$,

$$f(M^0, M^0, \dots, M^0, R^0, R^0, \dots, R^0) \leq x_{n+1} \leq f(m^0, m^0, \dots, m^0, r^0, r^0, \dots, r^0)$$

et

$$g(M^0, M^0, \dots, M^0, R^0, R^0, \dots, R^0) \leq y_{n+1} \leq g(m^0, m^0, \dots, m^0, r^0, r^0, \dots, r^0),$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

c'est à dire

$$m^1 \leq x_{n+1} \leq M^1 \text{ et } r^1 \leq y_{n+1} \leq R^1, \text{ pour tout } n \geq n_0,$$

ou alors

$$m^1 \leq x_n \leq M^1 \text{ et } r^1 \leq y_n \leq R^1, \text{ pour tout } n \geq n_0 + 1.$$

Ensuite, pour tout $n \geq n_0 + s + 1$, on a

$$m^2 = f(M^1, M^1, \dots, M^1, R^1, R^1, \dots, R^1) \leq x_{n+1} \leq f(m^1, m^1, \dots, m^1, r^1, r^1, \dots, r^1) = M^2$$

et

$$r^2 = g(M^1, M^1, \dots, M^1, R^1, R^1, \dots, R^1) \leq y_{n+1} \leq g(m^1, m^1, \dots, m^1, r^1, r^1, \dots, r^1) = R^2,$$

d'où

$$m^2 \leq x_n \leq M^2 \text{ et } r^2 \leq y_n \leq R^2, \text{ pour tout } n \geq n_0 + s + 2.$$

Et par induction on obtient que

$$m^i \leq x_n \leq M^i \text{ et } r^i \leq y_n \leq R^i, \text{ pour tout } n \geq n_0 + (i - 1)(s + 1) + 1. \quad (1.18)$$

Puisque les suites $\{m^i\}_{i \geq 0}$ et $\{r^i\}_{i \geq 0}$ (resp. $\{M^i\}_{i \geq 0}$ et $\{R^i\}_{i \geq 0}$) sont des suites croissantes (resp. décroissantes) et bornées, alors elles sont convergentes. Soient

$$m = \lim_{i \rightarrow \infty} m^i, M = \lim_{i \rightarrow \infty} M^i, r = \lim_{i \rightarrow \infty} r^i, R = \lim_{i \rightarrow \infty} R^i$$

et

$$l_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, L_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, l_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n, L_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Alors de (1.18), quand $i \rightarrow \infty$ et par suite $n \rightarrow \infty$, on trouve

$$m \leq L_1 \leq M, m \leq l_1 \leq M, r \leq l_2 \leq R \text{ et } r \leq L_2 \leq R.$$

La continuité des fonctions f et g nous permet de déduire que

$$\begin{aligned} m &= f(M, M, \dots, M, R, R, \dots, R), & M &= f(m, m, \dots, m, r, r, \dots, r), \\ r &= g(M, M, \dots, M, R, R, \dots, R), & R &= g(m, m, \dots, m, r, r, \dots, r). \end{aligned}$$

D'où, par hypothèse

$$m = M, R = r,$$

et par conséquent

$$l_1 = L_1 = \bar{x} \text{ et } l_2 = L_2 = \bar{y}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Afin de simplifier les notations, on introduit les constantes

$$\beta = \sum_{i=0}^k \beta_i, \gamma = \sum_{i=0}^k \gamma_i, \delta = \frac{\alpha + \beta}{A}, \eta = \frac{\xi + \gamma}{B}.$$

1.3.1 Analyse du premier système

Considérons le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + y_{n-p}}, \quad y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + x_{n-p}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.19)$$

de valeurs initiales $x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_0, y_{-s}, y_{-s+1}, \dots, y_0 \in \mathbb{R}_+$, avec $s = \max\{k, p\}$ et $k, p \in \mathbb{N}$, les paramètres $A, B \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\alpha, \xi, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 0, 1, \dots, k$.

Commençons par étudier la permanence des solutions de ce système.

Proposition 1.3.1 *Toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ du Système (1.19) est permanente.*

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ une solution arbitraire du Système (1.19). On peut facilement voir que

$$x_n \leq \delta \text{ et } y_n \leq \eta, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

et par suite, on trouve du Système (1.19) que

$$x_n \geq \frac{\alpha + \beta e^{-\eta}}{A + \eta} \text{ et } y_n \geq \frac{\xi + \gamma e^{-\delta}}{B + \delta}, \text{ pour tout } n \geq s + 1.$$

Ce qui fait la démonstration. ■

On définit les fonctions f et g comme suit

$$f(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-v_i}}{A + v_p}, \quad (1.20)$$

$$g(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-u_i}}{B + u_p}, \quad (1.21)$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

avec $(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) \in I_1^{s+1} \times J_1^{s+1}$, où

$$I_1 = \left[\frac{\alpha + \beta e^{-\eta}}{A + \eta}, \delta \right], J_1 = \left[\frac{\xi + \gamma e^{-\delta}}{B + \delta}, \eta \right].$$

Nous sommes amenés à différencier deux cas afin de pouvoir calculer les dérivées partielles de f et g .

- Si $k < p$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\beta_i e^{-v_i}}{A+v_p}, \text{ pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, \text{ pour } k < i < p, \\ \frac{\partial f}{\partial v_p}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-v_i}}{(A+v_p)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, \text{ pour } 0 \leq i \leq p \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\gamma_i e^{-u_i}}{B+u_p}, \text{ pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, \text{ pour } k < i < p, \\ \frac{\partial g}{\partial u_p}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-u_i}}{(B+u_p)^2}, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, \text{ pour } 0 \leq i \leq p. \end{cases}$$

- Si $k \geq p$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\beta_i e^{-v_i}}{A+v_p}, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, k, i \neq p, \\ \frac{\partial f}{\partial v_p}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\beta_p e^{-v_p}(A+v_p) + \alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-v_i}}{(A+v_p)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ pour } 0 \leq i \leq k \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\gamma_i e^{-u_i}}{B+u_p}, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, k, i \neq p, \\ \frac{\partial g}{\partial u_p}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\gamma_p e^{-u_p}(B+u_p) + \xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-u_i}}{(B+u_p)^2}, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ pour } 0 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Voyons que dans les deux cas les fonctions f et g sont décroissantes en chacun de ses arguments. En utilisant le Théorème (1.3.1) et en montrant comme dans [45], on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.3.2 *Supposons que*

$$\beta < B \text{ et } \gamma < A. \tag{1.22}$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

Alors, le Système (1.19) admet un seul point d'équilibre (\bar{x}_1, \bar{y}_1) et toute solution de ce système tend vers ce point quand $n \rightarrow \infty$.

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ une solution arbitraire du Système (1.19). Tout d'abord, notons que d'après la Proposition (1.3.1) on a pour tout $n \geq s + 1$, $x_n \in I_1$ et $y_n \in J_1$, ce qui montre que la propriété (1.16) est vérifiée. Ensuite, soient m, M, r, R des nombres positifs tels que $m \leq M, r \leq R$, et

$$M = \frac{\alpha + \beta e^{-r}}{A + r}, m = \frac{\alpha + \beta e^{-R}}{A + R}, R = \frac{\xi + \gamma e^{-m}}{B + m}, r = \frac{\xi + \gamma e^{-M}}{B + M}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} M - m &= \frac{\alpha + \beta e^{-r}}{A + r} - \frac{\alpha + \beta e^{-R}}{A + R} \\ &= \frac{\alpha A + \alpha R + A\beta e^{-r} + R\beta e^{-r} - \alpha A - \alpha r - A\beta e^{-R} - r\beta e^{-R}}{(A + r)(A + R)} \\ &= \frac{\alpha(R - r) + A\beta(e^{-r} - e^{-R}) + \beta(Re^{-r} - re^{-R})}{(A + r)(A + R)} \\ &= \frac{\alpha(R - r) + A\beta(e^{-r} - e^{-R}) + \beta(Re^{-r} - Re^{-R} + Re^{-R} - re^{-R})}{(A + r)(A + R)} \\ &= \frac{\alpha(R - r) + A\beta(e^{-r} - e^{-R}) + \beta R(e^{-r} - e^{-R}) + \beta e^{-R}(R - r)}{(A + r)(A + R)} \\ &= \frac{(\alpha + \beta e^{-R})(R - r) + \beta(A + R)(e^{-r} - e^{-R})}{(A + r)(A + R)} \\ &= \frac{(\alpha + \beta e^{-R})(R - r) + \beta(A + R)e^{-r-R}(e^R - e^r)}{(A + r)(A + R)}. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $r < \theta < R$ tel que

$$e^R - e^r = e^\theta(R - r).$$

D'où

$$\begin{aligned} M - m &= (R - r) \frac{\alpha + \beta e^{-R} + \beta(A + R)e^{\theta-r-R}}{(A + r)(A + R)} = (R - r) \frac{m + \beta e^{\theta-r-R}}{A + r} \\ &< (R - r) \left(\frac{m + \beta}{A + r} \right). \end{aligned}$$

En procédant de même,

$$R - r < (M - m) \left(\frac{r + \gamma}{B + m} \right),$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

ce qui implique que

$$\left(1 - \left(\frac{m + \beta}{A + r}\right)\left(\frac{r + \gamma}{B + m}\right)\right)(M - m) < 0.$$

D'après (1.22) la quantité $1 - \left(\frac{m + \beta}{A + r}\right)\left(\frac{r + \gamma}{B + m}\right)$ est strictement positive. Donc, on a nécessairement $M = m$ et par suite $R = r$. Ce qui conclut la preuve par application du Théorème (1.3.1).

■

Maintenant qu'on a montré l'existence d'un point d'équilibre pour le Système (1.19), allons y analyser la stabilité asymptotique de ce dernier en suivant la méthode de linéarisation. Le Système (1.19) est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + y_{n-p}} \\ x_n = x_n \\ \vdots \\ x_{n-s+1} = x_{n-s+1} \\ y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + x_{n-p}} \\ y_n = y_n \\ \vdots \\ y_{n-s+1} = y_{n-s+1} \end{array} \right. , \quad n \in \mathbb{N},$$

qui est de la forme (1.4) avec $Y_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s})^t$, où v^t désigne la transposé de v , et F est la fonction définie dans (1.17) où f et g sont données par (1.20) et (1.21) respectivement. Or, la matrice Jacobienne de F au point (\bar{x}_1, \bar{y}_1) est de la forme

$$F_J^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_s & a_s \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

où pour tout $i = 0, 1, \dots, s$,

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial v_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_1), \quad b_i = \frac{\partial g}{\partial u_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_1)$$

et le polynôme caractéristique associé est donné par

$$P_1(\lambda) = \det(F_J^{(1)} - \lambda I_{2s+2}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{s-1} & a_s \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Après calcul (voir l'annexe, Proposition (A.1.1)), on trouve que

$$P_1(\lambda) = \lambda^{2s+2} - \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_i b_j \lambda^{2s-i-j}.$$

Dans le théorème qui suit on donne une condition suffisante pour que le point d'équilibre du Système (1.19) soit globalement asymptotiquement stable.

Théorème 1.3.3 *Supposons que (1.22) est vérifiée. Si*

$$\frac{1}{AB} [\beta\gamma + (\beta + \gamma)e^{-1} + \delta\eta] < 1, \quad (1.24)$$

alors, l'unique point d'équilibre (\bar{x}_1, \bar{y}_1) du Système (1.19) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. D'après le Théorème (1.3.2), (\bar{x}_1, \bar{y}_1) est globalement attractif. Donc il nous suffit juste de montrer qu'il est asymptotiquement stable, et pour ce faire on utilise le théorème de Rouché.

Nous allons distinguer les deux cas : $k < p$ et $k \geq p$. Premièrement, lorsque $k < p$ c'est à dire $s = p$, on a

$$P_1(\lambda) = \lambda^{2p+2} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i b_j \lambda^{2p-i-j} - \sum_{i=0}^k (b_p a_i + a_p b_i) \lambda^{p-i} - a_p b_p,$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

où

$$a_p = \frac{-\bar{x}_1}{A + \bar{y}_1}, b_p = \frac{-\bar{y}_1}{B + \bar{x}_1}$$

et

$$a_i = \frac{-\beta_i}{A + \bar{y}_1} e^{-\bar{y}_1}, b_i = \frac{-\gamma_i}{B + \bar{x}_1} e^{-\bar{x}_1}, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, k.$$

Posons

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2p+2}, \quad \phi(\lambda) = - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i b_j \lambda^{2p-i-j} - \sum_{i=0}^k (b_p a_i + a_p b_i) \lambda^{p-i} - a_p b_p,$$

ces fonctions sont des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} . De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$, on a

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda)| &\leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |a_i b_j| + \sum_{i=0}^k |b_p a_i + a_p b_i| + |a_p b_p| \\ &= \frac{\beta \gamma e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1}}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} + \frac{\beta \bar{y}_1 e^{-\bar{y}_1} + \gamma \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1}}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} + \frac{\bar{x}_1 \bar{y}_1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)}. \end{aligned}$$

On sait que $x e^{-x} < e^{-1}$ pour $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda)| &< \frac{\beta \gamma}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} + \frac{\beta e^{-1} + \gamma e^{-1}}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} + \frac{\delta \eta}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \\ &< \frac{1}{AB} \{ \beta \gamma + (\beta + \gamma) e^{-1} + \delta \eta \} \\ &< 1 = |\varphi(\lambda)|. \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Rouché φ et $P_1 = \varphi + \phi$ ont le même nombre de zéros dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et puisque φ admet comme racine $\lambda = 0$ de multiplicité $2p + 2$, alors toutes les racines de P_1 sont dans le disque $|\lambda| < 1$. Ainsi, par le Théorème (1.1.2) le point d'équilibre (\bar{x}_1, \bar{y}_1) est localement asymptotiquement stable.

Maintenant, si $k \geq p$, on a

$$P_1(\lambda) = \lambda^{2k+2} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i b_j \lambda^{2k-i-j},$$

où

$$a_p = -\frac{\bar{x}_1 + \beta_p e^{-\bar{y}_1}}{A + \bar{y}_1}, b_p = -\frac{\bar{y}_1 + \gamma_p e^{-\bar{x}_1}}{B + \bar{x}_1}$$

et

$$a_i = -\frac{\beta_i}{A + \bar{y}_1} e^{-\bar{y}_1}, b_i = -\frac{\gamma_i}{B + \bar{x}_1} e^{-\bar{x}_1}, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, k, i \neq p.$$

Dans ce cas on prend

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2k+2}, \quad \phi(\lambda) = - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i b_j \lambda^{2k-i-j}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$,

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda)| &\leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |a_i b_j| \\ &= \sum_{i=0, i \neq p}^k \sum_{j=0, j \neq p}^k |a_i b_j| + |a_p b_p| + \sum_{i=0, i \neq p}^k |b_p a_i + a_p b_i| \\ &= \sum_{i=0, i \neq p}^k \sum_{j=0, j \neq p}^k \frac{\beta_i \gamma_j e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1}}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} + \left(\frac{\bar{x}_1 + \beta_p e^{-\bar{y}_1}}{A + \bar{y}_1} \right) \left(\frac{\bar{y}_1 + \gamma_p e^{-\bar{x}_1}}{B + \bar{x}_1} \right) \\ &\quad + \sum_{i=0, i \neq p}^k \left[\left(\frac{\beta_i e^{-\bar{y}_1}}{A + \bar{y}_1} \right) \left(\frac{\bar{y}_1 + \gamma_p e^{-\bar{x}_1}}{B + \bar{x}_1} \right) + \left(\frac{\gamma_i e^{-\bar{x}_1}}{B + \bar{x}_1} \right) \left(\frac{\bar{x}_1 + \beta_p e^{-\bar{y}_1}}{A + \bar{y}_1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \left\{ \sum_{i=0, i \neq p}^k \sum_{j=0, j \neq p}^k \beta_i \gamma_j e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \left\{ \beta_p \gamma_p e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1} + \beta_p \bar{y}_1 e^{-\bar{y}_1} + \gamma_p \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1} + \bar{x}_1 \bar{y}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \left\{ \sum_{i=0, i \neq p}^k \beta_i e^{-\bar{y}_1} (\bar{y}_1 + \gamma_p e^{-\bar{x}_1}) + \gamma_i e^{-\bar{x}_1} (\bar{x}_1 + \beta_p e^{-\bar{y}_1}) \right\} \\ &= \frac{e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1}}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \left\{ \sum_{i=0, i \neq p}^k \sum_{j=0, j \neq p}^k \beta_i \gamma_j + \beta_p \gamma_p + \sum_{i=0, i \neq p}^k (\beta_i \gamma_p + \gamma_i \beta_p) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \left\{ \beta_p \bar{y}_1 e^{-\bar{y}_1} + \gamma_p \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1} + \sum_{i=0, i \neq p}^k \beta_i \bar{y}_1 e^{-\bar{y}_1} + \sum_{i=0, i \neq p}^k \gamma_i \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1} \right\} \\ &\quad + \frac{\bar{x}_1 \bar{y}_1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \\ &= \frac{1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \left\{ \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \beta_i \gamma_j e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1} + \sum_{i=0}^k \beta_i \bar{y}_1 e^{-\bar{y}_1} + \sum_{i=0}^k \gamma_i \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1} + \bar{x}_1 \bar{y}_1 \right\} \\ &= \frac{1}{(A + \bar{y}_1)(B + \bar{x}_1)} \{ \beta \gamma e^{-\bar{x}_1 - \bar{y}_1} + \beta \bar{y}_1 e^{-\bar{y}_1} + \gamma \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1} + \bar{x}_1 \bar{y}_1 \}. \end{aligned}$$

Donc, d'après (1.24) on a

$$|\phi(\lambda)| < \frac{1}{AB} [\beta \gamma + (\beta + \gamma)e^{-1} + \delta \eta] < 1 = |\varphi(\lambda)|.$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

D'où, par le théorème de Rouché, toutes les racines de P_1 sont dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et par suite le point (\bar{x}_1, \bar{y}_1) est localement asymptotiquement stable dans ce cas aussi, par application du Théorème (1.1.2). D'où le résultat. ■

Pour confirmer ces résultats, on considère un exemple numérique.

Exemple 1.3.1 Prenons $k = 1, p = 3, A = 4.8, B = 5.3, \alpha = 0.5, \xi = 0.75, \beta_1 = 5.1, \gamma_0 = 2$ et $\beta_0 = \gamma_1 = 0$. Ainsi, le Système (1.19) prend la forme

$$x_{n+1} = \frac{0.5 + 5.1e^{-y_{n-1}}}{4.8 + y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{0.75 + 2e^{-x_n}}{5.3 + x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.25)$$

Dans cet exemple les conditions (1.22) et (1.24) sont vérifiées. Donc, en utilisant le Théorème (1.3.3), ce système admet un seul point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.35, 1.15)$ qui est globalement asymptotiquement stable. La figure 1.1 représente le comportement de la solution du Système (1.25) de valeurs initiales $x_{-3} = 16, x_{-2} = 14, x_{-1} = 3, x_0 = 2, y_{-3} = 2, y_{-2} = 19.6, y_{-1} = 0.5$ et $y_0 = 4.5$.

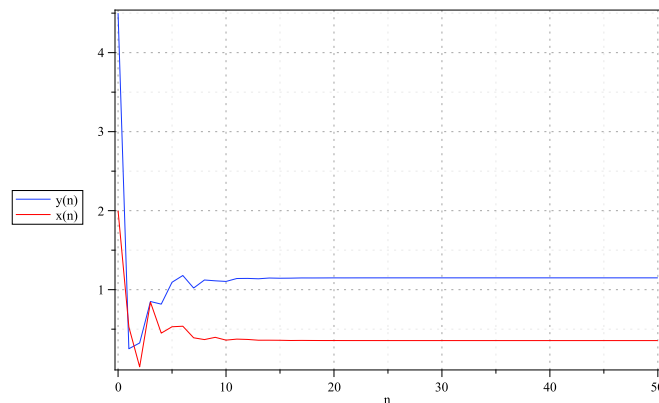


FIG. 1.1: Comportement de la solution du Système (1.25)

1.3.2 Analyse du deuxième système

Considérons le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + x_{n-p}}, \quad y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + y_{n-p}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.26)$$

de valeurs initiales $x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_0, y_{-s}, y_{-s+1}, \dots, y_0 \in \mathbb{R}_+$, avec $s = \max\{k, p\}$ et $k, p \in \mathbb{N}$, les paramètres $A, B \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\alpha, \xi, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 0, 1, \dots, k$.

Proposition 1.3.2 *Toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ du Système (1.26) est permanente.*

Preuve. Il suffit de voir que pour toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ du Système (1.26), on a

$$\frac{\alpha + \beta e^{-\eta}}{A + \delta} \leq x_n \leq \delta, \quad \frac{\xi + \gamma e^{-\delta}}{B + \eta} \leq y_n \leq \eta, \quad \text{pour tout } n \geq s + 1.$$

■

Dans cette partie, on définit les fonctions f et g comme suit

$$f(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-v_i}}{A + u_p}, \quad (1.27)$$

$$g(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-u_i}}{B + v_p}, \quad (1.28)$$

avec $(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) \in I_2^{s+1} \times J_2^{s+1}$, où

$$I_2 = \left[\frac{\alpha + \beta e^{-\eta}}{A + \delta}, \delta \right], \quad J_2 = \left[\frac{\xi + \gamma e^{-\delta}}{B + \eta}, \eta \right].$$

De plus, on a

- Si $k < p$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } 0 \leq i < p, \\ \frac{\partial f}{\partial u_p}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-v_i}}{(A + u_p)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\beta_i e^{-v_i}}{A + u_p}, & \text{pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } k < i \leq p \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\gamma_i e^{-u_i}}{B + v_p}, & \text{pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } k < i \leq p, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } 0 \leq i < p, \\ \frac{\partial g}{\partial v_p}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-u_i}}{(B + v_p)^2}. \end{cases}$$

- Si $k \geq p$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = 0, & \text{pour } i = 0, \dots, k, i \neq p, \\ \frac{\partial f}{\partial u_p}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-v_i}}{(A + u_p)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\beta_i e^{-v_i}}{A + u_p}, & \text{pour } 0 \leq i \leq k \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\gamma_i e^{-u_i}}{B+v_p}, \text{ pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ pour } i = 0, \dots, k, i \neq p, \\ \frac{\partial g}{\partial v_p}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-u_i}}{(B+v_p)^2}. \end{cases}$$

Il est clair que les fonctions f et g sont décroissantes en chacun de ses arguments. En considérant cette propriété importante on va utiliser le Théorème (1.3.1) pour montrer le résultat de convergence suivant.

Théorème 1.3.4 *Supposons que*

$$\beta\gamma < AB. \quad (1.29)$$

Alors, le Système (1.26) admet un unique point d'équilibre (\bar{x}_2, \bar{y}_2) et toute solution de ce système converge vers ce point.

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ une solution arbitraire du Système (1.26). D'après la Proposition (1.3.2) on a pour tout $n \geq s+1$, $x_n \in I_2$ et $y_n \in J_2$. Maintenant, soient m, M, r, R des nombres positifs tels que $m \leq M, r \leq R$ et

$$M = \frac{\alpha + \beta e^{-r}}{A + m}, m = \frac{\alpha + \beta e^{-R}}{A + M}, R = \frac{\xi + \gamma e^{-m}}{B + r}, r = \frac{\xi + \gamma e^{-M}}{B + R}.$$

Ces équations s'écrivent encore

$$\beta e^{-r} = M(A + m) - \alpha, \quad \beta e^{-R} = m(A + M) - \alpha,$$

$$\gamma e^{-m} = R(B + r) - \xi, \quad \gamma e^{-M} = r(B + R) - \xi.$$

En soustrayant la deuxième égalité de la première, nous obtenons

$$\beta e^{-r} - \beta e^{-R} = A(M - m),$$

et donc

$$M - m = \frac{\beta}{A}(e^{-r} - e^{-R}) = \frac{\beta}{A}e^{-r-R}(e^R - e^r) = \frac{\beta}{A}e^{\theta-r-R}(R - r),$$

où $r < \theta < R$ est obtenu en appliquant le théorème des accroissements finis.

Faisons de même avec la troisième et la quatrième égalité, on trouve

$$R - r = \frac{\gamma}{B}(e^{-m} - e^{-M}) = \frac{\gamma}{B}e^{-m-M}(e^M - e^m) = \frac{\gamma}{B}e^{\tau-m-M}(M - m),$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

où $m < \tau < M$. D'où,

$$M - m \leq \frac{\beta}{A}(R - r), \quad R - r \leq \frac{\gamma}{B}(M - m),$$

et alors

$$\left(1 - \frac{\beta\gamma}{AB}\right)(M - m) \leq 0, \quad \left(1 - \frac{\beta\gamma}{AB}\right)(R - r) \leq 0.$$

D'après l'hypothèse (1.29) on déduit que

$$m = M \text{ et } r = R,$$

et le résultat s'obtient en appliquant le Théorème (1.3.1). ■

Le Système (1.26) peut se transformer au système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-y_{n-i}}}{A + x_{n-p}} \\ x_n = x_n \\ \vdots \\ x_{n-s+1} = x_{n-s+1} \\ y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-x_{n-i}}}{B + y_{n-p}} \\ y_n = y_n \\ \vdots \\ y_{n-s+1} = y_{n-s+1} \end{array} \right. , \quad n \in \mathbb{N},$$

qui est de la forme (1.4) avec $Y_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-s})^t$ et F est la fonction définie dans (1.17) où f et g sont données par (1.27) et (1.28) respectivement.

De plus, la matrice Jacobienne de F au point d'équilibre (\bar{x}_2, \bar{y}_2) est donnée par

- Si $k < p$,

$$F_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_p & b_0 & \dots & b_k & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

- Si $k \geq p$,

$$F_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_p & \dots & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_p & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_p & \dots & c_{k-1} & c_k & 0 & \dots & d_p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

où

$$a_p = \frac{\partial f}{\partial u_p}(\bar{x}_2, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_2) = -\frac{\bar{x}_2}{A + \bar{x}_2},$$

$$d_p = \frac{\partial g}{\partial v_p}(\bar{x}_2, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_2) = -\frac{\bar{y}_2}{B + \bar{y}_2},$$

et pour tout $i = 0, 1, \dots, k$,

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial v_i}(\bar{x}_2, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_2) = -\frac{\beta_i e^{-\bar{y}_2}}{A + \bar{x}_2},$$

$$c_i = \frac{\partial g}{\partial u_i}(\bar{x}_2, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_2) = -\frac{\gamma_i e^{-\bar{x}_2}}{B + \bar{y}_2}.$$

Après calcul (voir l'annexe, Proposition (A.2.1)), le polynôme caractéristique associé dans les deux derniers cas est de la forme

$$P_2(\lambda) = \lambda^{2s+2} - (a_p + d_p)\lambda^{2s-p+1} + a_p d_p \lambda^{2(s-p)} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2s-i-j}.$$

Théorème 1.3.5 *Supposons que (1.29) est vérifiée. Si*

$$\delta B + \eta A + \delta \eta + \beta \gamma < AB, \quad (1.32)$$

alors, l'unique point d'équilibre (\bar{x}_2, \bar{y}_2) du Système (1.26) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. D'après le Théorème (1.3.4), (\bar{x}_2, \bar{y}_2) est globalement attractif, donc il reste à montrer que ce point est localement asymptotiquement stable et pour ce faire on utilise comme précédent le théorème de Rouché. Considérons les deux fonctions polynômiales

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2s+2}, \quad \phi(\lambda) = -(a_p + d_p)\lambda^{2s-p+1} + a_p d_p \lambda^{2(s-p)} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2s-i-j},$$

on a pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$,

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda)| &\leq |a_p| + |d_p| + |a_p d_p| + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |c_i b_j| \\ &= \frac{\bar{x}_2}{A + \bar{x}_2} + \frac{\bar{y}_2}{B + \bar{y}_2} + \frac{\bar{x}_2 \bar{y}_2}{(A + \bar{x}_2)(B + \bar{y}_2)} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \frac{\beta_i \gamma_j e^{-\bar{x}_2 - \bar{y}_2}}{(A + \bar{x}_2)(B + \bar{y}_2)} \\ &\leq \frac{\delta}{A} + \frac{\eta}{B} + \frac{\delta \eta}{AB} + \frac{\beta \gamma}{AB} \\ &< 1 = |\varphi(\lambda)|. \end{aligned}$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

Alors, d'après le théorème de Rouché, toutes les racines de P_2 sont dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et par conséquent le point (\bar{x}_2, \bar{y}_2) est localement asymptotiquement stable, d'après le Théorème (1.1.2). ■

Voici maintenant un exemple numérique.

Exemple 1.3.2 Si on prend $k = 4, p = 2, A = 4.5, B = 5.3, \alpha = 0.6, \xi = 0.7, \beta_4 = 5, \gamma_4 = 2.1$ et $\beta_i = \gamma_i = 0$, pour $0 \leq i \leq 3$. Alors, le Système (1.26) s'écrit

$$x_{n+1} = \frac{0.6 + 5e^{-y_{n-4}}}{4.5 + x_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{0.7 + 2.1e^{-x_{n-4}}}{5.3 + y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.33)$$

Les conditions (1.29) et (1.32) sont vérifiées pour ce système et alors d'après le Théorème (1.3.5), il admet un seul point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.5, 0.1)$ qui est globalement asymptotiquement stable. La figure 1.2 représente le comportement de sa solution de valeurs initiales $x_{-4} = 2, x_{-3} = 5, x_{-2} = 14, x_{-1} = 23, x_0 = 1.7, y_{-4} = 8, y_{-3} = 1, y_{-2} = 9.6, y_{-1} = 0.5$ et $y_0 = 0.85$.

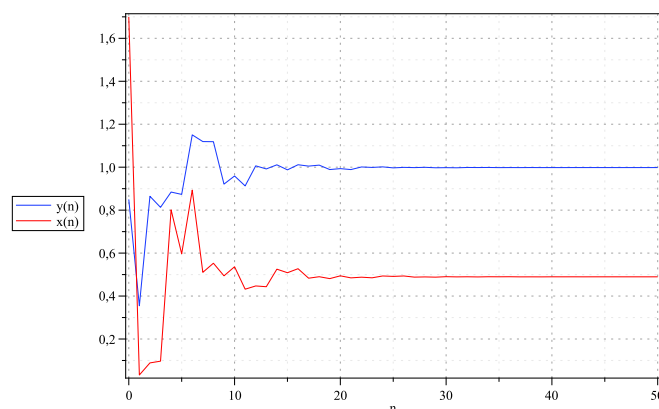


FIG. 1.2: Comportement de la solution du Système (1.33)

1.3.3 Analyse du troisième système

Considérons le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-x_{n-i}}}{A + y_{n-p}}, \quad y_{n+1} = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-y_{n-i}}}{B + x_{n-p}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.34)$$

de valeurs initiales $x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_0, y_{-s}, y_{-s+1}, \dots, y_0 \in \mathbb{R}_+$, avec $s = \max\{k, p\}$ et $k, p \in \mathbb{N}$, les paramètres $A, B \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\alpha, \xi, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 0, 1, \dots, k$.

Proposition 1.3.3 *Toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ du Système (1.34) est permanente.*

Preuve. Evidemment, si $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ est une solution du Système (1.34), on a

$$x_n \in \left[\delta, \frac{\alpha + \beta e^{-\delta}}{A + \eta} \right], \quad y_n \in \left[\eta, \frac{\xi + \gamma e^{-\eta}}{B + \delta} \right], \quad \text{pour tout } n \geq s + 1.$$

■

Pour traiter ce système on prend f et g comme suit

$$f(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = \frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-u_i}}{A + v_p},$$

$$g(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) = \frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-v_i}}{B + u_p},$$

avec $(u_0, u_1, \dots, u_s, v_0, v_1, \dots, v_s) \in I_3^{s+1} \times J_3^{s+1}$, où

$$I_3 = \left[\frac{\alpha + \beta e^{-\delta}}{A + \eta}, \delta \right], \quad J_3 = \left[\frac{\xi + \gamma e^{-\eta}}{B + \delta}, \eta \right].$$

En outre, on a

- Si $k < p$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\beta_i e^{-u_i}}{A + v_p}, & \text{pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } k < i \leq p, \\ \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } 0 \leq i < p, \\ \frac{\partial f}{\partial v_p}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-u_i}}{(A + v_p)^2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } 0 \leq i < p, \\ \frac{\partial g}{\partial u_p}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-v_i}}{(B + u_p)^2}, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = -\frac{\gamma_i e^{-v_i}}{B + u_p}, & \text{pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_p, v_0, v_1, \dots, v_p) = 0, & \text{pour } k < i \leq p. \end{cases}$$

- Si $k \geq p$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\beta_i e^{-u_i}}{A + v_p}, & \text{pour } 0 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial f}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = 0, & \text{pour } i = 0, 1, \dots, k, i \neq p, \\ \frac{\partial f}{\partial v_p}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i e^{-u_i}}{(A + v_p)^2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, k, i \neq p, \\ \frac{\partial g}{\partial u_p}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\xi + \sum_{i=0}^k \gamma_i e^{-v_i}}{(B+u_p)^2}, \\ \frac{\partial g}{\partial v_i}(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k) = -\frac{\gamma_i e^{-v_i}}{B+u_p}, \text{ pour } 0 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Observons que les fonctions f et g sont décroissantes en chacun de ses arguments, et cela nous aidera à utiliser le Théorème (1.3.1) pour démontrer le résultat de convergence qui suit.

Théorème 1.3.6 *Supposons que*

$$\beta < A, \gamma < B. \quad (1.35)$$

Alors, le Système (1.34) admet un seul point d'équilibre (\bar{x}_3, \bar{y}_3) et toute solution de ce système converge vers ce point.

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -s}$ une solution arbitraire du Système (1.34). D'après la Proposition (1.3.3) on a pour tout $n \geq s+1$, $x_n \in I_3$ et $y_n \in J_3$. Maintenant, soient m, M, r, R des nombres positifs tels que $m \leq M, r \leq R$ et

$$M = \frac{\alpha + \beta e^{-m}}{A+r}, m = \frac{\alpha + \beta e^{-M}}{A+R}, R = \frac{\xi + \gamma e^{-r}}{B+m}, r = \frac{\xi + \gamma e^{-R}}{B+M}.$$

Ces équations s'écrivent encore

$$\beta e^{-m} = M(A+r) - \alpha, \quad \beta e^{-M} = m(A+R) - \alpha,$$

$$\gamma e^{-r} = R(B+m) - \xi, \quad \gamma e^{-R} = r(B+M) - \xi.$$

En soustrayant la deuxième égalité du première et la quatrième du troisième, on obtient

$$\beta(e^{-m} - e^{-M}) = A(M-m) + Mr - mR,$$

$$\gamma(e^{-r} - e^{-R}) = B(R-r) + Rm - rM.$$

Sommant ensuite ces deux dernières, on trouve

$$\beta(e^{-m} - e^{-M}) + \gamma(e^{-r} - e^{-R}) = A(M-m) + B(R-r).$$

Ceci s'écrit

$$\beta e^{\tau-m-M}(M-m) + \gamma e^{\theta-r-R}(R-r) = A(M-m) + B(R-r),$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

avec $m < \tau < M$ et $r < \theta < R$ obtenus en appliquant le théorème des accroissements finis. Or

$$\beta e^{\tau-m-M}(M-m) + \gamma e^{\theta-r-R}(R-r) \leq \beta(M-m) + \gamma(R-r),$$

et alors

$$A(M-m) + B(R-r) \leq \beta(M-m) + \gamma(R-r),$$

c'est à dire

$$(A - \beta)(M - m) + (B - \gamma)(R - r) \leq 0.$$

De (1.35) on déduit que

$$m = M \text{ et } r = R.$$

Le résultat découle du Théorème (1.3.1). ■

Maintenant, on écrit la matrice Jacobienne $F_J^{(3)}$ au point d'équilibre (\bar{x}_3, \bar{y}_3) .

- Si $k < p$, alors

$$F_J^{(3)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_p & d_0 & \dots & d_k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

- Si $k \geq p$, alors

$$F_J^{(3)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_p & \dots & a_{k-1} & a_k & 0 & \dots & b_p & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_p & \dots & 0 & 0 & d_0 & \dots & d_p & \dots & d_{k-1} & d_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

où

$$b_p = \frac{\partial f}{\partial v_p}(\bar{x}_3, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_3) = -\frac{\bar{x}_3}{A + \bar{y}_3},$$

$$c_p = \frac{\partial g}{\partial u_p}(\bar{x}_3, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_3) = -\frac{\bar{y}_3}{B + \bar{x}_3},$$

et pour tout $i = 0, 1, \dots, k$,

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}_3, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_3) = -\frac{\beta_i e^{-\bar{x}_3}}{A + \bar{y}_3},$$

$$d_i = \frac{\partial g}{\partial v_i}(\bar{x}_3, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_3) = -\frac{\gamma_i e^{-\bar{y}_3}}{B + \bar{x}_3}.$$

Après calcul (voir l'annexe, Proposition (A.3.1)), le polynôme caractéristique associé est

$$P_3(\lambda) = \lambda^{2p+2} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2p-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2p-i-j} - c_p b_p, \quad \text{si } k \leq p,$$

et

$$P_3(\lambda) = \lambda^{2k+2} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2k-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2k-i-j} - c_p b_p \lambda^{2(k-p)}, \quad \text{si } k \geq p.$$

Théorème 1.3.7 *Supposons que (1.35) est vérifiée. Si*

$$\beta B + \gamma A + \beta\gamma + \delta\eta < AB, \quad (1.38)$$

alors, l'unique point d'équilibre (\bar{x}_3, \bar{y}_3) du Système (1.34) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Supposons que $k \leq p$, et notons que l'autre cas se traite de la même manière. Considérons les deux fonctions polynômiales

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2p+2}, \quad \phi(\lambda) = - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i)\lambda^{2p-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2p-i-j} - c_p b_p.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$, on a

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda)| &\leq \sum_{i=0}^k |a_i| + \sum_{i=0}^k |d_i| + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |a_i d_j| + |c_p b_p| \\ &= \frac{\beta e^{-\bar{x}_3}}{A + \bar{y}_3} + \frac{\gamma e^{-\bar{y}_3}}{B + \bar{x}_3} + \frac{\beta\gamma e^{-\bar{x}_3 - \bar{y}_3}}{(A + \bar{y}_3)(B + \bar{x}_3)} + \frac{\bar{x}_3 \bar{y}_3}{(A + \bar{y}_3)(B + \bar{x}_3)} \\ &\leq \frac{\beta}{A} + \frac{\gamma}{B} + \frac{\beta\gamma}{AB} + \frac{\delta\eta}{AB} \\ &< 1 = |\varphi(\lambda)|. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rouché on déduit que toutes les racines de P_3 sont dans le disque unité $|\lambda| < 1$. Donc, le Théorème (1.1.2) implique que le point (\bar{x}_3, \bar{y}_3) est localement asymptotiquement stable et ensuite le résultat découle du Théorème (1.3.6). ■

On termine par donner une simulation numérique.

Exemple 1.3.3 *Prenons $k = 1, p = 5, A = 7.5, B = 6, \alpha = 0, \xi = 0.7, \beta_1 = 3.25, \gamma_1 = 2.1$ et $\beta_0 = \gamma_0 = 0$. Donc le Système (1.34) prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{3.25 e^{-x_{n-1}}}{7.5 + y_{n-5}}, \quad y_{n+1} = \frac{0.7 + 2.1 e^{-y_{n-1}}}{6 + x_{n-5}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.39)$$

Il est clair que les conditions (1.35) et (1.38) sont vérifiées. Alors, d'après le Théorème (1.3.7), le Système (1.39) admet un seul point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.3, 0.7)$ qui est globalement asymptotiquement stable.

1.3. Stabilité globale de trois systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur

Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales $x_{-5} = 1.3$, $x_{-4} = 8$, $x_{-3} = 4$, $x_{-2} = 1$, $x_{-1} = 16.5$, $x_0 = 0.5$, $y_{-5} = 1$, $y_{-4} = 11$, $y_{-3} = 1.2$, $y_{-2} = 8.7$, $y_{-1} = 0.6$ et $y_0 = 0.27$ est représenté dans la figure 1.3 ci-dessous.

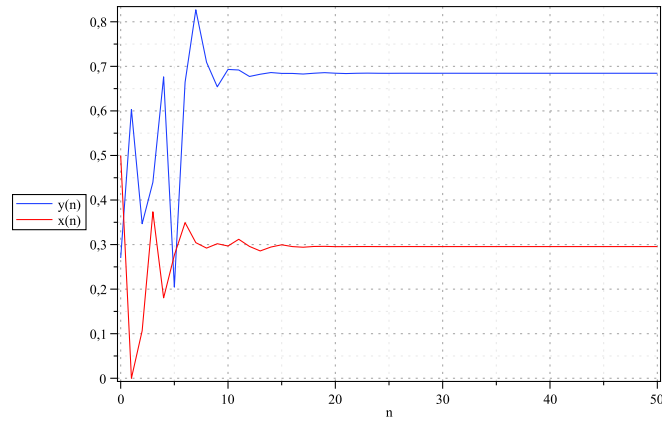


FIG. 1.3: Comportement de la solution du Système (1.39)

CHAPITRE 2

Sur deux problèmes ouverts : Comportement des solutions pour des classes d'équations aux différences rationnelles à coefficients périodiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous abordons deux problèmes ouverts proposés par E. Camouzis et G. Ladas dans leur célèbre ouvrage [10] (*Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*, 2008), dans lequel ces deux mathématiciens traitent le comportement asymptotique et global d'une grande famille d'équations aux différences rationnelles d'ordre au plus trois. Outre son importance elle-même, l'étude de ces équations rationnelles a offert des prototypes qui ont joué un rôle essentiel dans le développement de la théorie des équations aux différences non-linéaires. Récemment, un grand intérêt a été accordé à l'étude de l'équation aux

différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{A + Cx_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

avec ses différents cas particuliers, où les paramètres α, β, A, C sont des nombres réels strictement positifs et k un entier naturel (voir par exemple [10, 37, 38, 40]). Dans [10], les deux derniers chercheurs ont présenté des résultats obtenus dans [38] concernant l'équation

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + y_n}{\alpha + y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où les auteurs avaient montré que l'unique point d'équilibre $\bar{y} = 1$ de cette équation est globalement asymptotiquement stable. Ils ont considéré et étudié également l'équation de troisième ordre

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + y_n}{\alpha + y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et ils ont proposé ensuite l'investigation du comportement global pour des extensions des deux équations précédentes lorsque les coefficients sont périodiques, c'est à dire les familles d'équations

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

et

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

avec $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite périodique de nombres réels strictement positifs de période $\omega \geq 2$.

Dans notre premier travail de ce chapitre, nous considérons l'équation générale

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite périodique de nombres réels strictement positifs de période $\omega \geq 1$ et $k \geq 1$ un entier naturel. Il est clair que pour $k = 1, 2$ on obtient les deux dernières équations (2.2) et (2.3). Notre discussion commencera sur l'oscillation (Théorème (2.2.1)), ensuite nous nous intéresserons de savoir si les solutions sont permanentes (Théorème (2.2.2) et Théorème (2.2.3)). Nous analyserons après la stabilité de l'équation (Théorème (2.2.4)) et enfin l'attractivité globale (Théorème (2.2.5)).

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Dans une autre direction, on généralise l'Equation (2.3) dans la troisième partie en considérant le système

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{q_n + x_n}{q_n + x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $\{p_n\}_{n \geq 0}$ et $\{q_n\}_{n \geq 0}$ des suites périodiques de nombres réels strictement positifs de période 2. En faisant une étude totalement différente de celle du premier travail, nous atteindrons notre objectif qui est toujours d'avoir des résultats sur le comportement des solutions et qui constitue essentiellement la permanence, la stabilité locale et globale des équilibres, l'oscillation et aussi l'existence des solutions périodiques.

A la fin de ce chapitre, nous concluons en donnant quelques réponses pour les problèmes ouverts proposés au départ.

2.2 Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Dans cette section, nous considérons l'équation aux différences non-autonome d'ordre $(k + 1)$ suivante

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

avec $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite périodique de nombres réels strictement positifs de période $\omega \geq 1$, $k \geq 1$ un entier naturel et les valeurs initiales $y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0$ sont des nombres réels positifs. Généralement, la difficulté que nous sommes confrontés en premier lors de l'étude des équations non-autonomes est de trouver les points d'équilibres, et il n'ya pas de résultats générales qui garantissent l'existence de ces solutions idéales comme nous l'avons vu dans le premier chapitre (Théorème (1.3.1)) à propos des équations autonomes, mais heureusement il n'est pas le cas pour la présente équation qui admet évidemment un seul point d'équilibre $\bar{y} = 1$ et ceci nous conduira à concentrer sur ce point et étudier le comportement qualitatif des solutions autour de lui.

2.2.1 Solutions oscillatoires

En utilisant une idée présentée dans [37], où les auteurs ont donné des résultats d'oscillation pour l'Equation (2.1), nous établissons dans ce qui suit une condition suffisante pour que les solutions de l'Equation (2.4) soient oscillatoires autour du point d'équilibre $\bar{y} = 1$. Commençons par l'observation suivante

Lemme 2.2.1 *Si $\{y_n\}_{n \geq -k}$ est une solution de l'Equation (2.4) qui n'est pas oscillatoire autour du point d'équilibre $\bar{y} = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}$.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n \geq -k}$ une solution de l'Equation (2.4) qui n'est pas oscillatoire autour de $\bar{y} = 1$, c'est à dire, il existe $N \geq -k$ tel que

$$y_n \geq 1, \text{ pour tout } n \geq N, \quad (2.5)$$

ou

$$y_n \leq 1, \text{ pour tout } n \geq N, \quad (2.6)$$

Supposons que (2.5) est vérifiée, donc on a pour tout $n \geq N$

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} = \frac{y_n \left(\frac{\alpha_n}{y_n} + 1 \right)}{\alpha_n + y_{n-k}} \leq y_n \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n + y_{n-k}},$$

d'où,

$$y_{n+1} \leq y_n, \text{ pour tout } n \geq N + k,$$

ce qui veut dire que la suite $\{y_n\}_{n \geq N+k}$ est décroissante. De même manière, si (2.6) est vérifiée alors pour tout $n \geq N + k + 1$, on a

$$y_{n+1} = \frac{y_n \left(\frac{\alpha_n}{y_n} + 1 \right)}{\alpha_n + y_{n-k}} \geq y_n \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n + y_{n-k}} \geq y_n,$$

c'est à dire, la suite $\{y_n\}_{n \geq N+k+1}$ est croissante. Dans les deux cas, on déduit que la solution $\{y_n\}_{n \geq -k}$ est convergente et on note sa limite l . Ainsi, toutes ses sous-suites $\{y_{\omega n+i}\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$, qui vérifient

$$y_{\omega n+i+1} = \frac{\alpha_i + y_{\omega n+i}}{\alpha_i + y_{\omega n+i-k}}, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1. \quad (2.7)$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

convergent aussi vers l . D'où, en prenant les limites des deux cotés dans l'Equation (2.7) on trouve que

$$l = \frac{\alpha_i + l}{\alpha_i + l} = 1,$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Prenons les notations

$$\alpha_{\max} = \max_{0 \leq n \leq \omega-1} \alpha_n, \quad \alpha_{\min} = \min_{0 \leq n \leq \omega-1} \alpha_n.$$

Théorème 2.2.1 *Considérons l'Equation (2.4) avec*

$$\frac{(\alpha_{\max} + 1)^k}{(1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min})^{k+1}} > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \quad (2.8)$$

Alors, toute solution non triviale de cette équation est oscillatoire autour du point d'équilibre $\bar{y} = 1$.

Preuve. Pour avoir une contradiction on suppose que l'Equation (2.4) admet une solution non triviale $\{y_n\}_{n \geq -k}$ qui n'est pas oscillatoire autour de 1. En premier lieu, on suppose que (2.5) est vérifiée et prenons le changement de variables $z_n = y_n - 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} = y_{n+1} - 1 &= \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} - 1 \\ &= \frac{y_n - y_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{y_n - 1 - y_{n-k} + 1}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{z_n - z_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}}, \end{aligned}$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

ainsi,

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} - z_n &= \frac{z_n - z_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}} - z_n \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} - 1 \right) z_n - \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= \frac{1 - \alpha_n - y_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= -\frac{\alpha_n + z_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= -\frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{z_n + 1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= -\frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k}.
 \end{aligned}$$

En posant

$$P_1(n) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}}, \quad P_k(n) = \frac{y_n}{\alpha_n + y_{n-k}},$$

on obtient une équation de la forme

$$z_{n+1} - z_n + P_1(n)z_n + P_k(n)z_{n-k} = 0. \quad (2.9)$$

De plus, on a

$$P_1(n) \geq \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max} + y_{n-k}}, \quad P_k(n) \geq \frac{y_n}{\alpha_{\max} + y_{n-k}}.$$

Alors,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_1(n) \geq \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max} + 1} = p_1$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_k(n) \geq \frac{y_n}{\alpha_{\max} + 1} = p_k.$$

Par le Théorème (1.1.10), l'équation

$$\lambda - 1 + p_1 + p_k \lambda^{-k} = 0$$

a une racine strictement positive. Etant donné le polynôme de degré $(k + 1)$

$$F(\lambda) = \lambda^{k+1} + (p_1 - 1)\lambda^k + p_k,$$

d'une part, F admet une racine strictement positive de ce qui précède. D'autre part,

$$F'(\lambda) = \lambda^{k-1} \left[(k+1)\lambda - k \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right) \right].$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Il est clair que F' a deux racines réelles : $\lambda = 0$, $\lambda = \lambda_0$, où $\lambda_0 = \frac{k}{k+1} \left(\frac{1+\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{1+\alpha_{\max}} \right)$. On peut aussi confirmer facilement que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $(0, \lambda_0]$ et strictement croissante sur $[\lambda_0, +\infty)$. De plus, on a

$$F(0) = \frac{1}{1 + \alpha_{\max}} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(\lambda) = +\infty$$

et

$$\begin{aligned} F(\lambda_0) &= \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k+1} \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right)^{k+1} - \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right) \left(\frac{k}{k+1} \right)^k \\ &\quad \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right)^k + \frac{1}{1 + \alpha_{\max}} \\ &= \left(\frac{k}{k+1} \right)^k \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right)^{k+1} \left(\frac{k}{k+1} - 1 \right) + \frac{1}{1 + \alpha_{\max}} \\ &= - \left[\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \right] \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right)^{k+1} + \frac{1}{1 + \alpha_{\max}} \\ &> - \left[\frac{(1 + \alpha_{\max})^k}{(1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min})^{k+1}} \right] \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{1 + \alpha_{\max}} \right)^{k+1} + \frac{1}{1 + \alpha_{\max}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que F ne peut jamais avoir une racine strictement positive, ce qui est une contradiction.

Pour le cas où (2.6) est vérifiée, on prend le changement $z_n = 1 - y_n$. Donc, on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} = 1 - y_{n+1} &= 1 - \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{y_{n-k} - y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{y_{n-k} - 1 - y_n + 1}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{z_n - z_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}}, \end{aligned}$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

et alors

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} - z_n &= \frac{z_n - z_{n-k}}{\alpha_n - y_{n-k}} - z_n \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} - 1 \right) z_n - \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= \frac{1 - \alpha_n - y_{n-k}}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= \frac{z_{n-k} - \alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= -\frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n + \frac{z_n - 1}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k} \\
 &= -\frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_n - \frac{y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} z_{n-k}.
 \end{aligned}$$

Cela veut dire que dans ce cas aussi z_n vérifie l'Equation (2.9), et donc en repétant les mêmes étapes on obtient la même contradiction. ■

Remarque 2.2.1 Si $\alpha_{\max} - \alpha_{\min} \leq k$ alors toute solution de l'Equation (2.4) est oscillatoire autour de $\bar{y} = 1$. En effet, On a

$$\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{k + 1} \leq \frac{1 + \alpha_{\max}}{k + 1} < \frac{1 + \alpha_{\max}}{k},$$

et comme $\alpha_{\max} - \alpha_{\min} \leq k$, alors

$$\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{k + 1} \leq 1,$$

ce qui implique que

$$\left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{k + 1} \right)^{k+1} \leq \left(\frac{1 + \alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{k + 1} \right)^k < \left(\frac{1 + \alpha_{\max}}{k} \right)^k.$$

D'où, (2.8) est vérifiée et le résultat découle par le Théorème (2.2.1).

Evidemment, si $\{\alpha_n\}_{n \geq 0} \subset (0, 1]$, alors toute solution de l'Equation (2.4) est oscillatoire autour de 1.

Exemple 2.2.1 Prenons $k = 3$ et $\omega = 3$. Dans ce cas, l'Equation (2.4) s'écrit

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

où la suite $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ est donnée par

$$\alpha_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = 3k, \\ b, & \text{si } n = 3k + 1, \\ c, & \text{si } n = 3k + 2, \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $a, b, c > 0$ et $a \neq b \neq c$.

En prenant $a = 0.7$, $b = 0.08$, $c = 0.003$ et les valeurs initiales $y_{-3} = 0.05$, $y_{-2} = 0.009$, $y_{-1} = 1.8$ et $y_0 = 2$, cette solution est oscillatoire autour du point d'équilibre $\bar{y} = 1$, voir la figure ci-dessous.

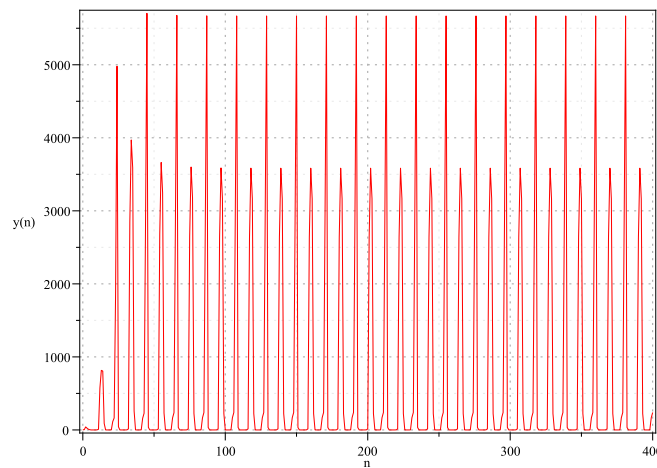


FIG. 2.1: Une solution oscillatoire pour l'Equation (2.10)

2.2.2 Permanence des solutions

Ici, on discute la permanence des solutions de l'Equation (2.4). On commence par le résultat suivant

Théorème 2.2.2 *Considérons l'Equation (2.4) avec $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels dans $[1, +\infty)$, périodique de période ω et $\{\alpha_n\}_{n \geq 0} \not\equiv \{1\}$. Alors, toute solution $\{y_n\}_{n \geq -k}$ de l'Equation (2.4) est permanente.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n \geq -k}$ une solution de l'Equation (2.4). Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \leq y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha_n} y_n.$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Considérons l'équation aux différences

$$z_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n} z_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.11)$$

de valeur initiale $z_0 > y_0$. Alors, par le théorème de comparaison (1.1.6) on a

$$y_n \leq z_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

De plus, en utilisant le Lemme (1.1.2), il existe des nombres réels strictement positifs $l_0, l_1, \dots, l_{\omega-1}$ tels que la suite $\{\tilde{z}_n\}_{n \geq 0}$ où

$$\tilde{z}_{\omega n+i} = l_i, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1, n \geq 0,$$

est une solution de l'Equation (2.11) et si $\{z_n\}_{n \geq 0}$ est une autre solution de cette équation alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{\omega n+i} = l_i, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1.$$

Mais, de (2.12)

$$y_{\omega n+i} \leq z_{\omega n+i}, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1, n \geq 0,$$

ainsi,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} y_{\omega n+i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_{\omega n+i} = l_i, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1.$$

Donc, pour n suffisamment grand, autrement dit, pour un certain $n_i \in \mathbb{N}$ grand, on a

$$y_{\omega n+i} \leq l_i, \quad \text{pour tout } n \geq n_i,$$

pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$.

Posons

$$N = \max_{0 \leq i \leq \omega-1} n_i \quad \text{et} \quad l = \max_{0 \leq i \leq \omega-1} l_i,$$

alors, il résulte que

$$y_n \leq l, \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

De plus,

$$y_n \geq \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max} + l}, \quad \text{pour tout } n \geq N + k + 1.$$

D'où le résultat. ■

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Il est naturel de poser la question pour savoir si les solutions sont bornées dans les autres cas, c'est à dire, lorsque la suite $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ a des termes dans l'intervalle $(0, 1)$, et quand elle est exactement la suite constante $\{1\}$. Le théorème suivant porte une réponse pour cette question, en notant que ce résultat est une généralisation du cas ($\omega = 1$ et $k = 1, 2$) qui a été étudié dans [10].

Théorème 2.2.3 *Considérons l'Equation (2.4), où $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels périodique de période ω avec*

$$\omega = 1 \text{ ou } k = z\omega, \text{ avec } z \geq 1 \text{ un entier naturel.} \quad (2.13)$$

Alors, toute solution de l'Equation (2.4) est permanente.

Preuve. Premièrement, on a par induction

$$y_n = \sum_{i=1}^k \alpha_{n-i} \prod_{j=1}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \prod_{i=2}^{k+1} (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1}, \quad n \geq 1, \quad (2.14)$$

En effet, pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} + \frac{y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} + \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} \left[\sum_{i=1}^k \alpha_{n-i} \prod_{j=1}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \prod_{i=2}^{k+1} (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \right] \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_n + y_{n-k}} + \sum_{i=1}^k \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} \prod_{i=2}^{k+1} (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} \prod_{i=2}^{k+1} (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \alpha_{n-k} \prod_{i=0}^k (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_n + y_{n-k}} \prod_{i=2}^{k+1} (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \left(\alpha_{n-k} + \frac{\alpha_{n-1} + y_{n-k-1}}{\alpha_{n-k-1} + y_{n-2k-1}} \right) \prod_{i=0}^k (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \end{aligned}$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

En ce point, l'hypothèse (2.13) implique que

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \left(\alpha_{n-k} + \frac{\alpha_{n-k-1} + y_{n-k-1}}{\alpha_{n-k-1} + y_{n-2k-1}} \right) \prod_{i=0}^k (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + (\alpha_n + y_{n-k}) \prod_{i=0}^k (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i} \prod_{j=0}^i (\alpha_{n-j} + y_{n-k-j})^{-1} + \prod_{i=1}^k (\alpha_{n-i} + y_{n-k-i})^{-1},
 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{n-i+1} \prod_{j=1}^i (\alpha_{n-j+1} + y_{n-k-j+1})^{-1} + \prod_{i=2}^{k+1} (\alpha_{n-i+1} + y_{n-k-i+1})^{-1}.$$

Il résulte de (2.14) que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 y_n &\leq \sum_{i=1}^k \alpha_{n-i} \prod_{j=1}^i \alpha_{n-j}^{-1} + \prod_{i=2}^{k+1} \alpha_{n-i}^{-1} \\
 &= \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^{i-1} \alpha_{n-j}^{-1} + \prod_{i=2}^{k+1} \alpha_{n-i}^{-1} \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \alpha_{\min}^{-(i-1)} + \alpha_{\min}^{-k} = \sum_{i=0}^k \alpha_{\min}^{-i}.
 \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \geq 2$, on a

$$y_n \geq \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max} + \sum_{i=0}^k \alpha_{\min}^{-i}},$$

ce qui achève la démonstration. ■

2.2.3 Stabilité uniforme

Définissons l'ensemble

$$D = \{(y_0, y_1, \dots, y_k) \in [1, +\infty)^{k+1} : y_i \leq y_{i+1}, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, k\}.$$

Dans cette partie, on considère l'Equation (2.4) où les valeurs initiales $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-k}) \in D$ et on discute la stabilité asymptotique uniforme du point d'équilibre $\bar{y} = 1$, mais

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

d'abord, on transforme l'Equation (2.4) en un système équivalent comme suit

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}} \\ y_n = y_n \\ \vdots \\ y_{n-k+1} = y_{n-k+1} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ce système est de la forme (2.18) avec $Y_n = (y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})^t$ et la fonction

$F : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ est définie par

$$F(n, y_0, y_1, \dots, y_k) = \left(\frac{\alpha_n + y_0}{\alpha_n + y_k}, y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \right), \quad \text{pour tout } (y_0, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}_+^k.$$

Le système linéarisé du système précédent est

$$X_{n+1} = A(n)X_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $X_n = (x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))^t$, $x_i(n) = y_{n-i} - 1$, pour tout $i = 0, 1, \dots, k$, et $A(n)$ est la matrice Jacobienne de F au point $(1, 1, \dots, 1)$, et elle est de la forme

$$A(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\alpha_n+1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire, on a

$$\begin{cases} x_0(n+1) = \frac{1}{\alpha_n+1}x_0(n) - \frac{1}{\alpha_n+1}x_k(n) \\ x_1(n+1) = x_0(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ \vdots \\ x_k(n+1) = x_{k-1}(n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Lemme 2.2.2 Soit $\{(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))\}_{n \geq 0}$ une solution du système linéaire (2.15). Alors, pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, on a

$$x_i(n) \leq x_{i+1}(n), \quad \text{pour tout } n \geq 0. \quad (2.16)$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Preuve. D'abord, on peut voir facilement que

$$0 \leq x_0(0) \leq x_1(0) \leq \dots \leq x_k(0).$$

On montre (2.16) par récurrence. En effet, pour $i = 0$, on a de (2.15)

$$x_0(n+1) = \frac{1}{\alpha_n + 1} x_0(n) - \frac{1}{\alpha_n + 1} x_k(n) \leq x_0(n), \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Donc,

$$x_0(n) \leq x_0(n-1) = x_1(n), \text{ pour tout } n \geq 1,$$

et puisque $x_0(0) \leq x_1(0)$, alors

$$x_0(n) \leq x_1(n), \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Supposons que $i > 0$ et que la propriété est vraie pour $i - 1$, c'est à dire, $x_{i-1}(n) \leq x_i(n)$, pour tout $n \geq 0$, et montrons pour i .

De (2.15) et l'hypothèse de récurrence on a

$$x_i(n+1) - x_i(n) = x_{i-1}(n) - x_i(n) \leq 0, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

alors

$$x_i(n) \leq x_i(n-1), \text{ pour tout } n \geq 1,$$

ce qui donne

$$x_{i+1}(n) = x_i(n-1) \geq x_i(n), \text{ pour tout } n \geq 1,$$

et comme $x_{i+1}(0) \geq x_i(0)$, alors

$$x_i(n) \leq x_{i+1}(n), \text{ pour tout } n \geq 0.$$

■

Proposition 2.2.1 *La solution nulle $\bar{X} = 0$ du Système (2.15) est uniformément asymptotiquement stable.*

Preuve. On définit la fonction $V : \mathbb{R}_+^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que,

$$V(x_0, x_1, \dots, x_k) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2, \text{ pour tout } (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{k+1}.$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

Soit $\phi(x) = (k+1)x^2$ et $\nu(x) = x^2$ deux fonctions croissantes et continues sur $[0, +\infty)$ avec $\phi(0) = \nu(0) = 0$. Prenons la norme max sur \mathbb{R}^{k+1} , qui est définie par

$$\|(x_0, x_1, \dots, x_k)\| = \max_{0 \leq i \leq k} |x_i|, \text{ pour tout } (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

Alors, on a

$$\phi(\|(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))\|) = \phi(\max_{0 \leq i \leq k} |x_i(n)|) = \phi(x_k(n)) = (k+1)x_k^2(n)$$

et

$$\nu(\|(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))\|) = \nu(\max_{0 \leq i \leq k} |x_i(n)|) = \nu(x_k(n)) = x_k^2(n).$$

Observons que

$$\nu(\|(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))\|) \leq V(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n)) \leq \phi(\|(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))\|).$$

ce qui montre que V est définie positive et décroissante. Maintenant, on montre que ΔV est définie négative. Pour cela, soit $\chi(x) = (1 - \frac{1}{(\alpha_{\min} + 1)^2})x$ qui est une fonction croissante et continue sur $[0, \infty)$ avec $\chi(0) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \Delta V(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n)) &= \frac{1}{(\alpha_n + 1)^2} (x_0(n) - x_k(n))^2 - x_k^2(n) \\ &\leq -\left(1 - \frac{1}{(\alpha_n + 1)^2}\right) x_k^2(n) \\ &\leq -\left(1 - \frac{1}{(\alpha_{\min} + 1)^2}\right) x_k^2(n) = -\chi(\|(x_0(n), x_1(n), \dots, x_k(n))\|). \end{aligned}$$

D'où, le résultat découle par le Théorème (1.1.5). ■

Comme conséquence de la Proposition (2.2.1) et le Théorème (1.1.1), on a

Théorème 2.2.4 *L'unique point d'équilibre $\bar{y} = 1$ de l'Equation (2.4) est uniformément asymptotiquement stable.*

2.2.4 Attractivité globale du point d'équilibre

Concernant l'attractivité globale du point d'équilibre de l'Equation (2.4) on donne le résultat suivant

Théorème 2.2.5 *Considérons l'Equation (2.4) où $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ est une suite ω -périodique de nombres réels positifs. Supposons aussi que $\alpha_i \geq 2$, pour tout $i = 0, 1, \dots, \omega$ et $k = z\omega$ avec $z \geq 1$ un entier naturel. Alors, l'unique point d'équilibre de l'Equation (2.4) est globalement attractif.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n \geq -k}$ une solution arbitraire de l'Equation (2.4) et soient

$$\Lambda_i = \limsup_{n \rightarrow \infty} y_{\omega n + i}, \quad \lambda_i = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_{\omega n + i}, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1.$$

D'après le Théorème (2.2.3), on a

$$0 \leq \lambda_i \leq \Lambda_i < \infty, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1,$$

et à partir de (2.4) on dérive que pour tout $i = 0, 1, \dots, \omega - 1$,

$$\lambda_{i+1} \geq \frac{\alpha_i + \lambda_i}{\alpha_i + \Lambda_{i-k}} = \frac{\alpha_i + \lambda_i}{\alpha_i + \Lambda_i}, \quad \Lambda_{i+1} \leq \frac{\alpha_i + \Lambda_i}{\alpha_i + \lambda_{i-k}} = \frac{\alpha_i + \Lambda_i}{\alpha_i + \lambda_i}. \quad (2.17)$$

Posons

$$m_i = \lambda_i + \alpha_i, \quad M_i = \Lambda_i + \alpha_i, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1.$$

Alors

$$m_{i+1} \geq \frac{m_i}{M_i} + \alpha_i, \quad M_{i+1} \leq \frac{M_i}{m_i} + \alpha_i,$$

d'où

$$M_{i+1} - m_{i+1} \leq \frac{m_i + M_i}{m_i M_i} (M_i - m_i),$$

et par induction, on a

$$\begin{aligned} M_{i+1} - m_{i+1} &\leq \left(\prod_{s=i-\omega+1}^i \frac{m_s + M_s}{m_s M_s} \right) (M_{i-\omega+1} - m_{i-\omega+1}) \\ &= \left(\prod_{s=i}^{i+\omega-1} \frac{m_s + M_s}{m_s M_s} \right) (M_{i+1} - m_{i+1}), \end{aligned}$$

2.2. Sur la dynamique d'une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur à coefficients périodiques

ainsi

$$\left\{ 1 - \left(\prod_{s=i}^{i+\omega-1} \frac{m_s + M_s}{m_s M_s} \right) \right\} (M_{i+1} - m_{i+1}) \leq 0.$$

Par ailleurs, on a

$$m_s + M_s = \lambda_s + \Lambda_s + 2\alpha_s < \alpha_s^2 + \alpha_s(\Lambda_s + \lambda_s) + \lambda_s \Lambda_s = m_s M_s,$$

car $\alpha_s \geq 2$, pour tout $i \leq s \leq i + \omega - 1$, et par suite

$$\prod_{s=i}^{i+\omega-1} \frac{m_s + M_s}{m_s M_s} < 1.$$

Donc, on déduit que

$$m_{i+1} = M_{i+1}, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1,$$

d'où

$$\lambda_i = \Lambda_i, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1,$$

et de (2.17), on trouve

$$\lambda_i = \Lambda_i = 1, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1.$$

ce qui implique que les sous-suites $\{y_{n\omega+i}\}$, $i = 0, 1, \dots, \omega - 1$ sont convergentes et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n\omega+i} = 1, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, \omega - 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Du Théorème (2.2.4) et Théorème (2.2.5) on obtient le suivant

Théorème 2.2.6 *Considérons l'Equation (2.4) où $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ est une suite ω -périodique de nombres réels positifs telle que $\alpha_i \geq 2$, pour tout $i = 0, 1, \dots, \omega$, $k = z\omega$ avec $z \geq 1$ un entier naturel et les valeurs initiales $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-k}) \in D$.*

Alors, l'unique point d'équilibre de l'Equation (2.4) est globalement asymptotiquement stable .

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Pour confirmer ce résultat, nous considérons un exemple numérique.

Exemple 2.2.2 *Considérons le même cas que dans l'exemple (2.2.1) et prenons $a = 2.07$, $b = 2$, $c = 2.3$ et les valeurs initiales $y_{-3} = 11$, $y_{-2} = 7.02$, $y_{-1} = 3.008$ et $y_0 = 1.5$. D'après le Théorème (2.2.6), le point d'équilibre $\bar{y} = 1$ de l'Equation (2.10) est globalement uniformément asymptotiquement stable et ceci apparait dans la figure ci-dessous.*

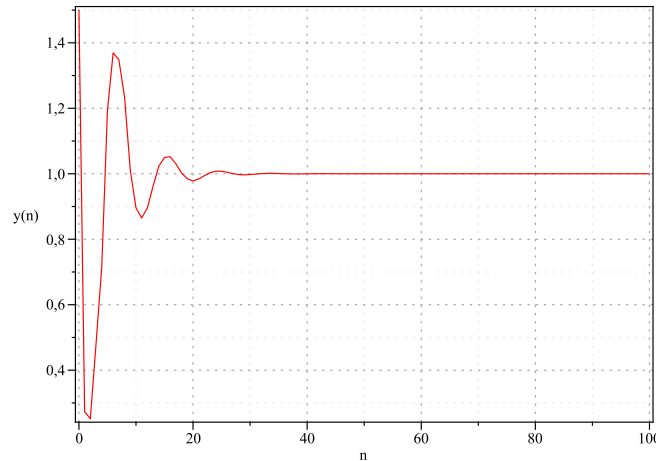


FIG. 2.2: La solution $\{y_n\}_{n \geq -3}$ de l'Equation (2.10) pour $a = 2.07$, $b = 2$, $c = 2.3$, $y_{-3} = 11$, $y_{-2} = 7.02$, $y_{-1} = 3.008$ et $y_0 = 1.5$.

2.3 Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Considérons le système d'équations aux différences rationnelles d'ordre 3

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{q_n + x_n}{q_n + x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.18)$$

tel que $\{p_n\}_{n \geq 0}$ et $\{q_n\}_{n \geq 0}$ sont deux suites périodiques de nombres réels positifs de période 2, et les valeurs initiales x_{-i} , $y_{-i} \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 0, 1, 2$.

Posons,

$$p_n = \begin{cases} \alpha, & \text{si } n \text{ pair,} \\ \beta, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} \gamma, & \text{si } n \text{ pair,} \\ \lambda, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

où $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ sont des nombres réels positifs avec $\alpha \neq \beta$ et $\gamma \neq \lambda$. Voyons que le Système (2.18) admet un unique point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

Lemme 2.3.1 *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2}$ une solution éventuellement constante du Système (2.18). Alors, $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2}$ est la solution triviale*

$$(x_n, y_n) = (1, 1), \quad n \geq -2.$$

On va transformer le Système (2.18) en un système autonome. Pour cela, posons

$$u_n = x_{2n-1}, \quad v_n = x_{2n}, \quad t_n = y_{2n-1}, \quad w_n = y_{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

alors, pour tout $n \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha + w_n}{\alpha + w_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{\gamma + v_n}{\gamma + v_{n-1}}, \\ v_{n+1} &= \frac{\beta + t_{n+1}}{\beta + t_n} = \frac{\beta\gamma + \gamma + \beta v_{n-1} + v_n}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} \end{aligned}$$

et

$$w_{n+1} = \frac{\lambda + u_{n+1}}{\lambda + u_n} = \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1} + w_n}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)}.$$

Donc, le Système (2.18) est équivalent au système

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{\alpha + w_n}{\alpha + w_{n-1}} \\ v_{n+1} &= \frac{\beta\gamma + \gamma + \beta v_{n-1} + v_n}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)}, \\ t_{n+1} &= \frac{\gamma + v_n}{\gamma + v_{n-1}} \\ w_{n+1} &= \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1} + w_n}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$$

où les valeurs initiales sont $u_0 = x_{-1}, v_{-1} = x_{-2}, v_0 = x_0, t_0 = y_{-1}, w_{-1} = y_{-2}$ et $w_0 = y_0$. Evidemment, le Système (2.19) admet un seul point d'équilibre $E = (1, 1, 1, 1)$. Pour commencer l'étude de ce système, on traite la permanence de ses solutions dans le paragraphe qui suit.

2.3.1 Permanence des solutions

Théorème 2.3.1 *Toute solution $\{(u_n, v_n, t_n, w_n)\}$ du Système (2.19) est permanente.*

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Preuve. Soit $\{(u_n, v_n, t_n, w_n)\}$ une solution arbitraire du Système (2.19). Nous allons déterminer des bornes supérieures et inférieures pour chaque argument de cette suite.

Premièrement, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1} + w_n}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} \\
 &= \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1}}{\lambda\alpha + \lambda w_{n-1} + \alpha u_n + u_n w_{n-1}} + \frac{w_n}{\lambda\alpha + \lambda w_{n-1} + \alpha u_n + u_n w_{n-1}} \\
 &= \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1}}{\lambda\alpha + \lambda w_{n-1} + \alpha u_n + u_n w_{n-1}} + \frac{\lambda + u_n}{(\lambda + u_{n-1})(\lambda\alpha + \lambda w_{n-1} + \alpha u_n + u_n w_{n-1})} \\
 &\leq \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1}}{\lambda\alpha + \lambda w_{n-1}} + \frac{\lambda + u_n}{\lambda(\lambda\alpha + \alpha u_n)} \\
 &= 1 + \frac{\alpha}{\lambda\alpha + \lambda w_{n-1}} + \frac{1}{\lambda\alpha} \\
 &\leq 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\alpha}.
 \end{aligned}$$

c'est à dire, pour tout $n \geq 2$,

$$w_n \leq 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\alpha},$$

et par suite

$$u_{n+1} = \frac{\alpha + w_n}{\alpha + w_{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha} w_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda\alpha^2},$$

d'où, pour tout $n \geq 3$,

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda\alpha^2}.$$

D'autre part, pour tout $n \geq 3$, on a

$$w_{n+1} = \frac{\lambda + u_{n+1}}{\lambda + u_n} \geq \frac{\lambda}{\lambda + u_n} \geq \frac{\lambda}{\lambda + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda\alpha^2}} = \frac{\lambda^2\alpha^2}{\lambda^2\alpha^2 + \lambda\alpha^2 + \lambda\alpha + \alpha + 1},$$

c'est à dire que pour $n \geq 4$,

$$w_n \geq \frac{\lambda^2\alpha^2}{\lambda^2\alpha^2 + \lambda\alpha^2 + \lambda\alpha + \alpha + 1}.$$

De plus, pour tout $n \geq 3$, on a

$$u_{n+1} = \frac{\alpha + w_n}{\alpha + w_{n-1}} \geq \frac{\alpha}{\alpha + w_{n-1}} \geq \frac{\alpha}{\alpha + 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\alpha}} = \frac{\lambda\alpha^2}{\lambda\alpha^2 + \lambda\alpha + \alpha + 1},$$

ce qui implique que pour $n \geq 4$,

$$u_n \geq \frac{\lambda\alpha^2}{\lambda\alpha^2 + \lambda\alpha + \alpha + 1}.$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

De même, on obtient que

$$v_n \leq 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta\gamma}, \text{ pour tout } n \geq 2, \quad v_n \geq \frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \beta\gamma + \gamma + 1}, \text{ pour tout } n \geq 4$$

et

$$t_n \leq 1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma^2}, \text{ pour tout } n \geq 3, \quad t_n \geq \frac{\beta\gamma^2}{\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \gamma + 1}, \text{ pour tout } n \geq 4.$$

■

2.3.2 Stabilité linéaire

Dans cette partie, on va analyser la stabilité locale du point d'équilibre du Système (2.19) en utilisant la méthode de linéarisation. Pour cela, on écrit le Système (2.19) comme suit

$$Z_{n+1} = T(Z_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.20)$$

avec

$$Z_n = (u_n, v_n, v_{n-1}, t_n, w_n, w_{n-1})^t$$

et $T : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}_+^6$, tel que pour tout $U = (u, v_1, v_2, t, w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^6$,

$$T(U) = (f_1(U), f_2(U), v_1, g_1(U), g_2(U), w_1),$$

où

$$f_1(U) = \frac{\alpha + w_1}{\alpha + w_2}, \quad f_2(U) = \frac{\beta\gamma + \gamma + \beta v_2 + v_1}{(\gamma + v_2)(\beta + t)},$$

$$g_1(U) = \frac{\gamma + v_1}{\gamma + v_2}, \quad g_2(U) = \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_2 + w_1}{(\alpha + w_2)(\lambda + u)}.$$

Alors, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial w_1}(U) = \frac{1}{\alpha + w_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial w_2}(U) = -\frac{\alpha + w_1}{(\alpha + w_2)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v_1}(U) = \frac{1}{(\gamma + v_2)(\beta + t)}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_2}(U) = -\frac{\gamma + v_1}{(\gamma + v_2)^2(\beta + t)}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}(U) = -\frac{\gamma\beta + \gamma + \beta v_2 + v_1}{(\gamma + v_2)(\beta + t)^2},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v_1}(U) = \frac{1}{\gamma + v_2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial v_2}(U) = -\frac{\gamma + v_1}{(\gamma + v_2)^2},$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial u}(U) = -\frac{\alpha\lambda + \alpha + \lambda w_2 + w_1}{(\alpha + w_2)(\lambda + u)^2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w_1}(U) = \frac{1}{(\alpha + w_2)(\lambda + u)}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w_2}(U) = -\frac{\alpha + w_1}{(\alpha + w_2)^2(\lambda + u)}.$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Donc, la matrice Jacobienne de T au point d'équilibre $\bar{X} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & \frac{1}{(\gamma+1)(\beta+1)} & -\frac{1}{(\gamma+1)(\beta+1)} & -\frac{1}{\beta+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma+1} & -\frac{1}{\gamma+1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(\alpha+1)(\lambda+1)} & -\frac{1}{(\alpha+1)(\lambda+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec le polynôme caractéristique calculé en ce point

$$P(X) = P_1(X)P_2(X),$$

où

$$P_1(X) = X^3 - \frac{1}{(\beta+1)(\gamma+1)}X^2 + \frac{2}{(\beta+1)(\gamma+1)}X - \frac{1}{(\beta+1)(\gamma+1)}$$

et

$$P_2(X) = X^3 - \frac{1}{(\lambda+1)(\alpha+1)}X^2 + \frac{2}{(\lambda+1)(\alpha+1)}X - \frac{1}{(\lambda+1)(\alpha+1)}.$$

Théorème 2.3.2 (i) *Le point d'équilibre du Système (2.19) est localement asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\alpha\lambda + \alpha + \lambda > 1 \text{ et } \beta\gamma + \beta + \gamma > 1. \quad (2.21)$$

(ii) *Si $\alpha\lambda + \alpha + \lambda < 1$ ou $\beta\gamma + \beta + \gamma < 1$, alors le point d'équilibre du Système (2.19) est instable.*

Preuve. (i) Evidemment, $P_1(X)$ est de la forme (1.6) avec $a_2 = a_0 = -\frac{1}{(\beta+1)(\gamma+1)}$ et $a_1 = -2a_0$. On a $|a_2 + a_0| = |2a_0| = a_1 < 1 + a_1$, $|a_2 - 3a_0| = |-2a_0| = a_1$ et $a_0^2 + a_1 - a_0a_2 = a_1$. Comme $\beta\gamma + \gamma + \beta > 1$, alors $a_1 < 1$. Donc, Le Théorème (1.1.3) implique que la condition $\beta\gamma + \gamma + \beta > 1$ est nécessaire et suffisante pour que les racines du polynôme $P_1(X)$ soient à l'intérieur du disque d'unité. On montre de même manière pour $P_2(X)$.

(ii) Posons $\xi = \frac{1}{(\beta+1)(\gamma+1)}$. Donc, P_1 s'écrit

$$P_1(X) = X^3 - \xi X^2 + 2\xi X - \xi. \quad (2.22)$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Si $\beta\gamma + \beta + \gamma < 1$, alors $1 < (\beta + 1)(\gamma + 1) < 2$, d'où $\frac{1}{2} < \xi < 1$. De plus, on a

$$P'_1(X) = 3X^2 - 2\xi X + 2\xi.$$

On peut facilement vérifier que P'_1 n'admet pas des racines dans \mathbb{R} . Donc, $P'_1(X) > 0$, ce qui implique que P_1 est une application croissante. En outre, on a

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} P_1(X) = -\infty, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} P_1(X) = +\infty,$$

par conséquent, P_1 admet une seule racine réelle qu'on notera X_0 . Puisque $\xi > \frac{1}{2}$ alors

$$P_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{\xi}{4} < 0,$$

et comme $P_1(1) = 1 > 0$, on obtient que $\frac{1}{2} < X_0 < 1$. Par suite, P_1 admet deux racines complexes z et \bar{z} , $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. De (i) et le Théorème (1.1.3) on déduit que le polynôme P_1 admet au moins une racine qui n'est pas à l'intérieur du disque unité et puisque $\frac{1}{2} < X_0 < 1$, alors on a nécessairement $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 1$. On veut montrer que $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$. Pour cela, supposons que $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Le polynôme P_1 peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} P_1(X) &= (X - X_0)(X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + z\bar{z}) \\ &= (X - X_0)(X^2 - 2aX + 1) \\ &= X^3 - (2a + X_0)X^2 + (2aX_0 + 1)X - X_0. \end{aligned}$$

En comparant avec (2.22) on trouve

$$\begin{cases} 2a + X_0 &= \xi \\ 2aX_0 + 1 &= 2\xi \\ X_0 &= \xi \end{cases}$$

d'où, $a = 0$ et $\xi = X_0 = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Donc, on conclut que $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$. Ceci montre que P_1 admet deux racines complexes de module supérieur strictement à 1, d'où le résultat. Pour le cas $\alpha\lambda + \alpha + \lambda < 1$, on traite P_2 de la même manière. ■

2.3.3 Stabilité globale

Maintenant, on s'intéresse à la stabilité globale du Système (2.19), mais tout d'abord, on considère un théorème général de convergence.

Théorème 2.3.3 *Considérons le système*

$$x_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n, y_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.23)$$

Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres réels positifs tels que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. Supposons que

$$f : [a_2, b_2] \times [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1], \quad g : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_2, b_2] \rightarrow [a_2, b_2]$$

sont des applications continues telles que

- $f(v, w)$ est strictement croissante en v et strictement décroissante en w ,
- $g(u, v, w)$ est strictement croissante en v et strictement décroissante en u et w .

Supposons de plus que si (m, M, r, R) est une solution du système

$$m = f(r, R), \quad M = f(R, r),$$

$$r = g(M, r, R), \quad R = g(m, R, r),$$

alors $m = M$ et $r = R$.

D'où, il existe un seul point d'équilibre du Système (2.23) et toute solution de ce système qui vérifie

$$x_{n_0} \in [a_1, b_1], \quad y_{n_0-1}, y_{n_0} \in [a_2, b_2], \quad \text{pour un certain } n_0 \in \mathbb{N},$$

converge vers ce point d'équilibre.

Preuve. On a pour tout $n \geq 1$,

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n, y_{n-1}) = g(f(y_{n-1}, y_{n-2}), y_n, y_{n-1}) = G(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}).$$

Considérons alors l'équation aux différences d'ordre trois

$$y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.24)$$

de valeurs initiales y_0, y_{-1} et $y_{-2} = f(y_0, y_{-1})$. On peut facilement voir que G est une application continue de $[a_2, b_2]^3$ dans $[a_2, b_2]$. De plus, $G(u, v, w)$ est strictement croissante

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

en u et w et strictement décroissante en v . Soient maintenant r, R deux nombres réels positifs tels que $r < R$ et

$$r = G(r, R, r) = g(f(R, r), r, R),$$

$$R = G(R, r, R) = g(f(r, R), R, r).$$

En remplaçant $f(R, r)$ par M et $f(r, R)$ par m , on déduit à partir des hypothèses que $r = R$. D'où, par application du Théorème (1.1.7), l'Equation (2.24) admet un unique point d'équilibre \bar{y} et toute solution de cette équation tend vers \bar{y} . En outre, $\bar{x} = f(\bar{y}, \bar{y})$, et donc le fait que \bar{y} est unique implique l'unicité de \bar{x} . De plus, puisque f est continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n, y_{n-1}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}) = f(\bar{y}, \bar{y}) = \bar{x},$$

d'où le résultat. ■

Ce théorème de convergence nous aidera à établir une condition suffisante de la stabilité globale du point d'équilibre du Système (2.19) et qui est l'objectif du Théorème (2.3.4).

Théorème 2.3.4 *Supposons que $\alpha\lambda > 4$ et $\beta\gamma > 4$, alors le point d'équilibre du Système (2.19) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. On peut écrire le Système (2.19) en deux systèmes séparés comme suit

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{\alpha + w_n}{\alpha + w_{n-1}} \\ w_{n+1} = \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w_{n-1} + w_n}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

et

$$\begin{cases} t_{n+1} = \frac{\gamma + v_n}{\gamma + v_{n-1}} \\ v_{n+1} = \frac{\beta\gamma + \gamma + \beta v_{n-1} + v_n}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

On va montrer ci-après que toute solution $\{(u_n, w_n)\}$ du Système (2.25) tend vers $(1, 1)$ et de même toute solution $\{(t_n, v_n)\}$ du Système (2.26) tend vers $(1, 1)$. Soit

$$f(v, w) = \frac{\alpha + v}{\alpha + w}, \quad g(u, v, w) = \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda w + v}{(\alpha + w)(\lambda + u)}.$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

f est strictement croissante en v et strictement décroissante en w , g est strictement croissante en v et strictement décroissante en u et w . Soient (m, M, r, R) une solution du système

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha + r}{\alpha + R}, & M &= \frac{\alpha + R}{\alpha + r}, \\ r &= \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda R + r}{(\alpha + R)(\lambda + M)} = \frac{\lambda + m}{\lambda + M'}, & R &= \frac{\lambda\alpha + \alpha + \lambda r + R}{(\alpha + r)(\lambda + R)} = \frac{\lambda + M}{\lambda + m}. \end{aligned}$$

Supposons que $m \leq M$ et $r \leq R$. Alors,

$$\begin{aligned} M - m &= \frac{\alpha + R}{\alpha + r} - \frac{\alpha + r}{\alpha + R} = \frac{(\alpha + R)^2 - (\alpha + r)^2}{(\alpha + r)(\alpha + R)} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha R + R^2 - \alpha^2 - 2\alpha r - r^2}{(\alpha + r)(\alpha + R)} \\ &= \frac{2\alpha(R - r) + (R^2 - r^2)}{(\alpha + r)(\alpha + R)} \\ &= (R - r) \frac{2\alpha + R + r}{(\alpha + r)(\alpha + R)} \\ &= (R - r) \frac{(R + \alpha) + (r + \alpha)}{(\alpha + r)(\alpha + R)} \\ &= (R - r) \left(\frac{1}{\alpha + r} + \frac{1}{\alpha + R} \right) \\ &\leq \frac{2}{\alpha + r} (R - r) \\ &\leq \frac{2}{\alpha} (R - r). \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$R - r \leq \frac{2}{\lambda + m} (M - m) \leq \frac{2}{\lambda} (M - m).$$

Par conséquent, on trouve

$$\left(1 - \frac{4}{\lambda\alpha}\right)(M - m) \leq 0,$$

et comme $\lambda\alpha > 4$, alors $M = m$ et par suite $R = r$. D'où, du Théorème (2.3.3) on déduit que la solution $\{(u_n, w_n)\}$ du Système (2.25) converge vers $(1, 1)$, la démonstration pour $\{(t_n, v_n)\}$ la solution du Système (2.26) est similaire et donc elle sera omise. En conclusion, le point d'équilibre du Système (2.19) est globalement attractif.

En outre, par le Théorème (2.3.2), les conditions $\alpha\lambda > 4$ et $\beta\gamma > 4$ impliquent la stabilité locale asymptotique. D'où, le point d'équilibre du Système (2.19) est globalement asymptotiquement stable. ■

Voici un autre résultat qui porte sur la stabilité globale du point d'équilibre du Système (2.19).

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Théorème 2.3.5 *L'unique point d'équilibre du Système (2.19) est globalement asymptotiquement stable dans les cas suivants*

1. $\alpha, \beta, \gamma, \lambda > 1$,
2. $\beta, \gamma, \lambda > 1$ et $\alpha = 1$,
3. $\alpha, \beta, \lambda > 1$ et $\gamma = 1$,
4. $\alpha, \gamma, \lambda > 1$ et $\beta = 1$,
5. $\alpha, \beta, \gamma > 1$ et $\lambda = 1$,
6. $\beta, \lambda > 1$ et $\alpha = \gamma = 1$,
7. $\alpha, \gamma > 1$ et $\beta = \lambda = 1$.

Preuve. Remarquons que les conditions (1)-(7) impliquent la stabilité locale asymptotique d'après le Théorème (2.3.2). Donc, il reste à prouver que le point d'équilibre du Système (2.19) est globalement attractif. Prenons le Système (2.25) pour les cas : $\alpha, \lambda > 1$; $\alpha = 1, \lambda > 1$; et ; $\alpha > 1, \lambda = 1$. Soient $\{(u_n, w_n)\}$ une solution de ce système. Si on prend le changement de variables

$$r_n = u_n + \lambda, \text{ pour tout } n \geq 0, \quad s_n = w_n + \alpha, \text{ pour tout } n \geq -1,$$

alors la suite des nombres positifs $\{(r_n, s_n)\}$ est une solution du système

$$\begin{cases} r_{n+1} = \lambda + \frac{s_n}{s_{n-1}} \\ s_{n+1} = \alpha + \frac{r_{n+1}}{r_n} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

Donc, pour montrer que $\{(u_n, w_n)\}$ tend vers $(1, 1)$ il suffit de prouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lambda + 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha + 1. \quad (2.28)$$

Posons

$$S_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n, \quad S_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad I_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n, \quad I_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Il est clair que $0 < I_i \leq S_i < \infty$, pour $i = 1, 2$. De (2.27), on trouve

$$S_1 \leq \lambda + \frac{S_2}{I_2}, \quad I_1 \geq \lambda + \frac{I_2}{S_2}, \quad S_2 \leq \alpha + \frac{S_1}{I_1}, \quad I_2 \geq \alpha + \frac{I_1}{S_1},$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

qui peuvent s'écrire aussi

$$S_1 I_2 \leq \lambda I_2 + S_2, \quad S_2 I_1 \geq \lambda S_2 + I_2, \quad S_2 I_1 \leq \alpha I_1 + S_1, \quad S_1 I_2 \geq \alpha S_1 + I_1.$$

Ces relations impliquent que

$$\alpha S_1 + I_1 \leq \lambda I_2 + S_2, \quad \lambda S_2 + I_2 \leq \alpha I_1 + S_1,$$

d'où

$$\alpha S_1 + I_1 - \alpha I_1 - S_1 \leq \lambda I_2 + S_2 - \lambda S_2 - I_2,$$

c'est à dire

$$(\alpha - 1)(S_1 - I_1) \leq (1 - \lambda)(S_2 - I_2),$$

et donc

$$(\alpha - 1)(S_1 - I_1) + (\lambda - 1)(S_2 - I_2) \leq 0. \quad (2.29)$$

Il est clair de (2.29) que si $\alpha, \lambda > 1$, alors

$$S_1 = I_1, \quad S_2 = I_2.$$

D'où, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existent. De plus, de (2.27) on peut voir que (2.28) est vérifiée. Maintenant, si $\alpha = 1$ et $\lambda > 1$, alors de (2.29) on a $S_2 = I_2$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ existent, et par suite (2.28) est vérifiée. De même manière on déduit pour le cas : $\alpha > 1$ et $\lambda = 1$.

En suivant les mêmes étapes que ci-dessus, on peut avoir les mêmes résultats pour le Système (2.26) dans les cas : $\beta, \gamma > 1$; $\beta = 1, \gamma > 1$; et ; $\beta > 1, \gamma = 1$. ■

Après avoir étudié la permanence, la stabilité locale et globale du Système équivalent (2.19), nous pouvons maintenant déduire pour notre système originale (2.18). Les résultats sont formalisés par le Théorème (2.3.6).

Théorème 2.3.6 *Considérons le Système (2.18). Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

- *Toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2}$ du Système (2.18) est permanente.*
- *L'unique point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ du Système (2.18) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\alpha\lambda + \alpha + \lambda > 1 \quad \text{et} \quad \beta\gamma + \beta + \gamma > 1.$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

- Si $\alpha\lambda + \alpha + \lambda < 1$ ou $\beta\gamma + \beta + \gamma < 1$, alors le point d'équilibre du Système (2.18) est instable.
- Si un des cas suivants est vérifié,
 1. $\alpha\lambda > 4$ avec $(\alpha - 1)(\lambda - 1) < 0$; et ; $\beta\gamma > 4$ avec $(\beta - 1)(\gamma - 1) < 0$,
 2. $\alpha, \beta, \gamma, \lambda > 1$,
 3. $\beta, \gamma, \lambda > 1$ et $\alpha = 1$,
 4. $\alpha, \beta, \lambda > 1$ et $\gamma = 1$,
 5. $\alpha, \gamma, \lambda > 1$ et $\beta = 1$,
 6. $\alpha, \beta, \gamma > 1$ et $\lambda = 1$,
 7. $\beta, \lambda > 1$ et $\alpha = \gamma = 1$,
 8. $\alpha, \gamma > 1$ et $\beta = \lambda = 1$,

alors, le point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ du Système (2.18) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

2.3.4 Un résultat d'oscillation

Nous présentons dans cette partie un résultat concernant le comportement oscillatoire des solutions du Système (2.18). Rappelons qu'une solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2}$ du Système (2.18) est dite oscillatoire autour du point d'équilibre $(1, 1)$ si une de ses composantes est oscillatoire autour de 1.

Théorème 2.3.7 Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2}$ une solution du Système (2.18). Supposons qu'il existe $j_0 \in \{-1, 0\}$ tel que

$$(x_{-1} - 1)(y_{2j_0} - 1) > 0 \quad \text{ou} \quad (y_{-1} - 1)(x_{2j_0} - 1) > 0.$$

Alors, la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2}$ est oscillatoire autour du point d'équilibre $(1, 1)$.

Preuve. Tout d'abord, notons que notre démonstration repose toujours sur le système équivalent (2.19). Considérons alors le Système (2.25) et supposons qu'il existe $j_0 \in \{-1, 0\}$ tel que

$$(x_{-1} - 1)(y_{2j_0} - 1) > 0,$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

c'est-à-dire,

$$(u_0 - 1)(w_{j_0} - 1) > 0. \quad (2.30)$$

Dans ce qui suit on va prouver que la solution $\{(u_n, w_n)\}$ du Système (2.25) oscille autour de $(1, 1)$. De même manière, si on suppose qu'il existe $j_0 \in \{-1, 0\}$ tel que $(y_{-1} - 1)(x_{2j_0} - 1) > 0$, ou la condition équivalente $(t_0 - 1)(v_{j_0} - 1) > 0$, on peut montrer que la solution $\{(t_n, v_n)\}$ du Système (2.26) est oscillatoire autour de $(1, 1)$.

Pour avoir une contradiction, on suppose que $\{(u_n, w_n)\}$ n'oscille pas autour de $(1, 1)$, ce qui signifie que les suites $\{u_n\}$ et $\{w_n\}$ ne sont pas oscillatoire autour de 1. Voyons qu'on a ici quatre cas.

(a) Premièrement, supposons qu'il existe $N \geq 0$ tel que

$$u_n \geq 1 \text{ et } w_n \geq 1, \text{ pour tout } n \geq N. \quad (2.31)$$

Comme la solution $\{(u_n, w_n)\}$ est nontriviale alors il existe $N_1 \geq N$ tel que $u_{N_1} > 1$ ou $w_{N_1} > 1$. D'où, on a

$$\begin{aligned} w_{N_1+2} &= \frac{\lambda + u_{N_1+2}}{\lambda + u_{N_1+1}} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + u_{N_1+1}} + \frac{u_{N_1+2}}{\lambda + u_{N_1+1}} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + u_{N_1+1}} + \frac{\frac{\alpha + w_{N_1+1}}{\alpha + w_{N_1}}}{\lambda + u_{N_1+1}} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + u_{N_1+1}} + \frac{\alpha}{(\alpha + w_{N_1})(\lambda + u_{N_1+1})} + \frac{w_{N_1+1}}{(\alpha + w_{N_1})(\lambda + u_{N_1+1})} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + u_{N_1+1}} + \frac{\alpha}{(\alpha + w_{N_1})(\lambda + u_{N_1+1})} + \frac{\frac{\lambda + u_{N_1+1}}{\lambda + u_{N_1}}}{(\alpha + w_{N_1})(\lambda + u_{N_1+1})} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + u_{N_1+1}} + \frac{\alpha}{(\alpha + w_{N_1})(\lambda + u_{N_1+1})} + \frac{1}{(\lambda + u_{N_1})(\alpha + w_{N_1})} \\ &< \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\alpha}{(\alpha + 1)(\lambda + 1)} + \frac{1}{(\lambda + 1)(\alpha + 1)} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)(\lambda + 1)} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{1}{\lambda + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

qui est une contradiction avec (2.31).

(b) Deuxièmement, supposons qu'il existe $N \geq 0$ tel que

$$u_n \leq 1 \text{ et } w_n \leq 1, \text{ pour tout } n \geq N. \quad (2.32)$$

Donc, il existe $N_1 \geq N$ tel que $u_{N_1} < 1$ ou $w_{N_1} < 1$. Du cas précédent, on a

$$\begin{aligned} w_{N_1+2} &= \frac{\lambda}{\lambda + u_{N_1+1}} + \frac{\alpha}{(\alpha + w_{N_1})(\lambda + u_{N_1+1})} + \frac{1}{(\lambda + u_{N_1})(\alpha + w_{N_1})} \\ &> \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\alpha}{(\alpha + 1)(\lambda + 1)} + \frac{1}{(\lambda + 1)(\alpha + 1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction avec (2.32).

(c) Supposons maintenant qu'il existe $N \geq 0$ tel que

$$u_n \leq 1 \text{ et } w_n \geq 1, \text{ pour tout } n \geq N. \quad (2.33)$$

Plus précisément, prenons N le plus petit entier naturel tel que (2.33) est vérifiée.

Voyons que pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{\alpha + w_n}{\alpha + w_{n-1}} - 1 = \frac{\alpha + w_n - \alpha - w_{n-1}}{\alpha + w_{n-1}} = \frac{w_n - w_{n-1}}{\alpha + w_{n-1}} \quad (2.34)$$

et

$$w_{n+1} - 1 = \frac{\lambda + u_{n+1}}{\lambda + u_n} - 1 = \frac{\lambda + u_{n+1} - \lambda - u_n}{\lambda + u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\lambda + u_n}. \quad (2.35)$$

On va montrer que (2.33) ne peut pas être vraie pour toute valeur de N . Nous allons traiter d'abord le cas $N = 0$. Observons que nous avons deux cas de (2.30), si $(u_0 - 1)(w_0 - 1) > 0$, alors il est clair que (2.33) n'est pas vérifiée pour $N = 0$. Maintenant, supposons que $(u_0 - 1)(w_{-1} - 1) > 0$. On remarque qu'il y a ici deux possibilités : $u_0, w_{-1} > 1$ et $u_0, w_{-1} < 1$. Evidemment, lorsque $u_0 > 1$ alors (2.33) n'est pas vérifiée pour $N = 0$. Supposons donc que $u_0, w_{-1} < 1$ et $N = 0$. D'une part, on a $w_0 \geq 1$. D'autre part, comme $u_1 \leq 1$, alors (2.34) implique que $w_0 < w_{-1} < 1$, ce qui est une contradiction. Il résulte que (2.33) n'est pas vérifiée pour $N = 0$.

On considère, à présent, le cas $N \geq 1$. Selon la définition de N on a nécessairement

$$u_{N-1} > 1 \text{ ou } w_{N-1} < 1. \quad (2.36)$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Puisque $u_{N+1} \leq 1$ et $w_N \geq 1$, alors les relations (2.34) et (2.35) implique que

$$w_N \leq w_{N-1} \text{ et } u_N \geq u_{N-1}.$$

Comme $u_N \leq 1$ et $w_N \geq 1$, alors

$$u_{N-1} \leq 1 \text{ et } w_{N-1} \geq 1,$$

qui contredit (2.36). D'où le résultat.

(d) Le cas ou $u_n \geq 1$ et $w_n \leq 1$ est similaire à (c). ■

2.3.5 La périodicité des solutions

La richesse des équations aux différences en périodicité nous conduit souvent à penser de tester cette propriété lors de l'étude de ces dernières et surtout quand on a des coefficients périodiques. Le fait d'avoir ou non des solutions périodiques est donc une des questions que nous aimions beaucoup aborder pour le Système (2.18). Après un traitement numérique en utilisant l'ordinateur, nous sommes arrivés à prédire la possibilité d'existence des solutions périodiques quand les coefficients sont suffisamment petits, et de plus elles sont de périodes très grandes. Mais bien sûr ceci est juste une observation qui n'est pas facile à prouver et elle reste un problème ouvert. Analytiquement, nous avons pu démontrer les résultats suivants.

Lemme 2.3.2 *Le Système (2.18) n'a ni des solutions périodiques de période deux ni des solutions de période quatre.*

Preuve. Pour la première affirmation la preuve est simple et elle sera omise. Pour montrer que le Système (2.18) n'admet pas des solutions périodiques de période quatre il suffit de montrer que le Système (2.25) ou (2.27) n'admet pas de solutions périodiques de période deux. Supposons que

$$\dots, (a, A), (b, B), (a, A), (b, B), \dots$$

est une solution périodique du Système (2.27) de période deux. Donc, on a

$$a = \lambda + \frac{B}{A}, \quad b = \lambda + \frac{A}{B}, \quad A = \alpha + \frac{a}{b}, \quad B = \alpha + \frac{b}{a}. \quad (2.37)$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

En soustrayant b de a et B de A , on trouve

$$a - b = \frac{B}{A} - \frac{A}{B} = \frac{B^2 - A^2}{AB} = \frac{A + B}{AB}(B - A),$$

$$A - B = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{a + b}{ab}(a - b).$$

Ces relations impliquent que

$$a - b = \frac{(A + B)(a + b)}{abAB}(b - a),$$

et ainsi

$$\left\{ 1 + \frac{(A + B)(a + b)}{abAB} \right\} (a - b) = 0.$$

On obtient alors

$$a = b = \lambda + 1, \quad A = B = \alpha + 1.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.3.8 *Considérons le Système (2.18) avec une des conditions*

(i) $\alpha = \lambda,$

(ii) $\beta = \gamma.$

Alors, le Système (2.18) n'admet pas des solutions périodiques de période six.

Preuve. (i) Evidemment, si on peut montrer que le Système (2.27) n'admet pas des solutions périodiques de période trois alors le Système (2.25) n'admet pas aussi des solutions périodiques de période trois et donc (2.18) n'a pas des solutions périodiques de période six. Pour cela, supposons que le Système (2.27) a une solution périodique de période trois

$$\dots, (a, A), (b, B), (c, C), (a, A), (b, B), (c, C), \dots$$

Puisque $\alpha = \lambda$, alors on a de (2.27)

$$a = \alpha + \frac{C}{B}, \quad b = \alpha + \frac{A}{C}, \quad c = \alpha + \frac{B}{A}, \quad A = \alpha + \frac{a}{c}, \quad B = \alpha + \frac{b}{a}, \quad C = \alpha + \frac{c}{b}. \quad (2.38)$$

Ces égalités peuvent s'écrire aussi

$$aB = \alpha B + C, \quad bC = \alpha C + A, \quad cA = \alpha A + B, \quad Ac = \alpha c + a, \quad Ba = \alpha a + b, \quad Cb = \alpha b + c.$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Alors,

$$\alpha B + C = \alpha a + b, \quad \alpha C + A = \alpha b + c, \quad \alpha A + B = \alpha c + a,$$

c'est à dire

$$\alpha(B - a) = b - C, \quad \alpha(C - b) = c - A, \quad \alpha(A - c) = a - B. \quad (2.39)$$

On multiplie la première égalité par α et on utilise la deuxième dans (2.39) on trouve

$$\alpha^2(B - a) = \alpha(b - C) = A - c.$$

Multiplions une autre fois par α et utilisons la troisième relation de (2.39), nous obtenons

$$\alpha^3(B - a) = \alpha(A - c) = a - B,$$

il en résulte que

$$(\alpha^3 + 1)(B - a) = 0,$$

d'où

$$B = a,$$

et de (2.39) on trouve

$$A = c, \quad C = b.$$

Par suite, (2.38) se réduit à

$$a = \alpha + \frac{b}{\alpha'}, \quad b = \alpha + \frac{c}{\alpha'}, \quad c = \alpha + \frac{a}{\alpha'}.$$

On a

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{b}{\alpha} - \frac{c}{\alpha} = \frac{b^2 - ac}{ab} = \frac{b^2 - a^2 + a^2 - ac}{ab} = \frac{(b+a)(b-a) + a(a-c)}{ab}, \\ b - c &= \frac{c}{\alpha} - \frac{a}{\alpha} = \frac{c^2 - ba}{bc} = \frac{c^2 - b^2 + b^2 - ba}{bc} = \frac{(c+b)(c-b) + b(b-a)}{bc}, \\ c - a &= \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\alpha} = \frac{a^2 - cb}{ca} = \frac{a^2 - c^2 + c^2 - cb}{ca} = \frac{(a+c)(a-c) + c(c-b)}{ca}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\left(\frac{b}{\alpha} + b + 1\right)(a - b) = (a - c),$$

$$\left(\frac{c}{\alpha} + c + 1\right)(b - c) = (b - a),$$

$$\left(\frac{a}{\alpha} + a + 1\right)(c - a) = (c - b).$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

Par conséquent,

$$\left(\frac{a}{c} + a + 1\right)\left(\frac{b}{a} + b + 1\right)(a - b) = \left(\frac{a}{c} + a + 1\right)(a - c) = (b - c),$$

et alors

$$\left(\frac{c}{b} + c + 1\right)\left(\frac{a}{c} + a + 1\right)\left(\frac{b}{a} + b + 1\right)(a - b) = \left(\frac{c}{b} + c + 1\right)(b - c) = (b - a),$$

donc,

$$\left\{ \left(\frac{c}{b} + c + 1\right)\left(\frac{a}{c} + a + 1\right)\left(\frac{b}{a} + b + 1\right) + 1 \right\} (a - b) = 0,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$a = b = c = A = B = C = \alpha + 1.$$

(ii) Ce cas se fait en utilisant les mêmes arguments. ■

2.3.6 L'ordre de convergence

Soit $\{(u_n, v_n, t_n, w_n)\}$ une solution du Système (2.19) qui converge vers le point d'équilibre $E = (1, 1, 1, 1)$. Nous cherchons ici à déterminer la rapidité de convergence de $\{(u_n, v_n, t_n, w_n)\}$, appelée « l'ordre de convergence », et pour ce faire nous allons construire un système d'erreurs. On a

$$u_{n+1} - 1 = \frac{w_n - w_{n-1}}{\alpha + w_{n-1}} = \frac{1}{\alpha + w_{n-1}} (w_n - 1) - \frac{1}{\alpha + w_{n-1}} (w_{n-1} - 1),$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - 1 &= \frac{\gamma + v_n - (\gamma + v_{n-1}) t_n}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} \\ &= \frac{\gamma + v_{n-1} + v_n - v_{n-1} - (\gamma + v_{n-1}) t_n}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} \\ &= \frac{1}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} (v_n - 1) - \frac{1}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} (v_{n-1} - 1) - \frac{1}{\beta + t_n} (t_n - 1), \end{aligned}$$

$$t_{n+1} - 1 = \frac{v_n - v_{n-1}}{\alpha + v_{n-1}} = \frac{1}{\alpha + v_{n-1}} (v_n - 1) - \frac{1}{\alpha + v_{n-1}} (v_{n-1} - 1)$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

et

$$\begin{aligned} w_{n+1} - 1 &= \frac{\alpha + w_n - (\alpha + w_{n-1}) u_n}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} \\ &= \frac{\alpha + w_{n-1} + w_n - w_{n-1} - (\alpha + w_{n-1}) u_n}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} \\ &= \frac{1}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} (w_n - 1) - \frac{1}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} (w_{n-1} - 1) - \frac{1}{\lambda + u_n} (u_n - 1) \end{aligned}$$

pour $n \geq 0$. En posant

$$e_n^1 = u_n - 1, \quad e_n^2 = v_n - 1, \quad e_n^3 = t_n - 1, \quad e_n^4 = w_n - 1,$$

alors, les égalités précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned} e_{n+1}^1 &= \frac{1}{\alpha + w_{n-1}} e_n^4 - \frac{1}{\alpha + w_{n-1}} e_{n-1}^4, \\ e_{n+1}^2 &= \frac{1}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} e_n^2 - \frac{1}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} e_{n-1}^2 - \frac{1}{\beta + t_n} e_n^3, \\ e_{n+1}^3 &= \frac{v_n - v_{n-1}}{\alpha + v_{n-1}} = \frac{1}{\alpha + v_{n-1}} e_n^2 - \frac{1}{\alpha + v_{n-1}} e_{n-1}^2 \end{aligned}$$

et

$$e_{n+1}^4 = -\frac{1}{\lambda + u_n} e_n^1 + \frac{1}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} e_n^4 - \frac{1}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} e_{n-1}^4.$$

Notons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1.$$

Donc, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + w_{n-1}} &= \frac{1}{\alpha + 1} + b_1(n), \quad \frac{1}{(\gamma + v_{n-1})(\beta + t_n)} = \frac{1}{(\gamma + 1)(\beta + 1)} + b_2(n), \\ \frac{1}{\beta + t_n} &= \frac{1}{\beta + 1} + b_3(n), \quad \frac{1}{\alpha + v_{n-1}} = \frac{1}{\beta + 1} + b_4(n), \\ \frac{1}{\lambda + u_n} &= \frac{1}{\lambda + 1} + b_5(n), \quad \frac{1}{(\alpha + w_{n-1})(\lambda + u_n)} = \frac{1}{(\alpha + 1)(\lambda + 1)} + b_6(n), \end{aligned}$$

tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_i(n) = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, 6.$$

Alors, on obtient le système

$$E_{n+1} = (A + B_n)E_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

où $E_n = (e_n^1, e_n^2, e_{n-1}^2, e_n^3, e_n^4, e_{n-1}^4)^t$, la matrice constante A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} \\ 0 & \frac{1}{(\gamma+1)(\beta+1)} & \frac{-1}{(\gamma+1)(\beta+1)} & \frac{-1}{\beta+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma+1} & \frac{-1}{\gamma+1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(\alpha+1)(\lambda+1)} & \frac{-1}{(\alpha+1)(\lambda+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1(n) & -b_1(n) \\ 0 & b_2(n) & -b_2(n) & -b_3(n) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4(n) & -b_4(n) & 0 & 0 & 0 \\ -b_5(n) & 0 & 0 & 0 & b_6(n) & -b_6(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\|B_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi, les théorèmes de Perron nous permettent de formuler le théorème suivant

Théorème 2.3.9 Soient $\{(u_n, v_n, t_n, w_n)\}$ une solution du Système (2.19). Alors, le vecteur d'erreur $E_n = (e_n^1, e_n^2, e_{n-1}^2, e_n^3, e_n^4, e_{n-1}^4)^t$ pour toute solution du Système (2.19) satisfaisant les deux relations asymptotiques

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|E_{n+1}\|}{\|E_n\|}, \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|E_n\|)^{1/n},$$

où $e_n^1 = u_n - 1$, $e_n^2 = v_n - 1$, $e_n^3 = t_n - 1$, $e_n^4 = w_n - 1$ et ρ est égale au module d'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne A .

2.3.7 Simulations numériques

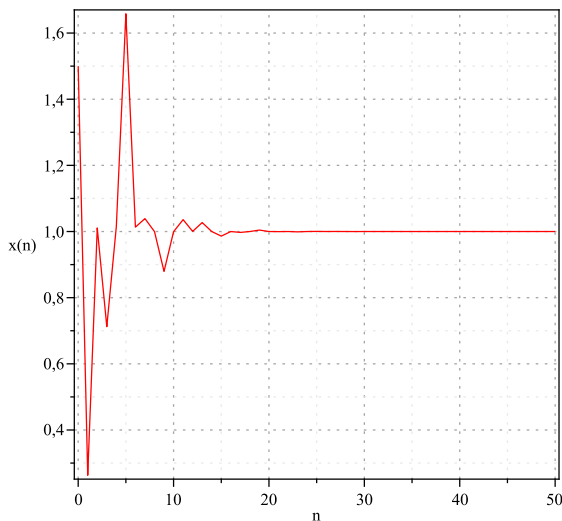
Dans cette partie, on vérifie notre discussion théorique à l'aide de quelques exemples numériques.

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

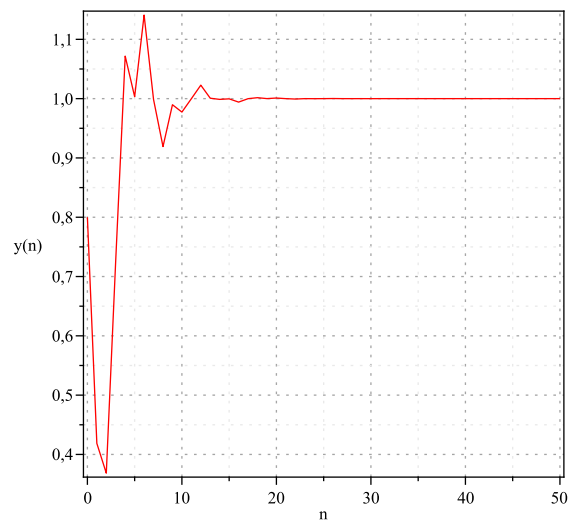
Exemple 2.3.1 Considérons le Système (2.18) avec les valeurs initiales $x_{-2} = 4$, $x_{-1} = 11$, $x_0 = 1.5$, $y_{-2} = 5$, $y_{-1} = 0.2$ et $y_0 = 0.8$. De plus, prenons les paramètres $\alpha = 0.7$, $\lambda = 6$, $\beta = 20$ et $\gamma = 0.3$, c'est à dire,

$$p_n = \begin{cases} 0.7, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 20, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0.3, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 6, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Dans ce cas le point d'équilibre $(1, 1)$ est globalement asymptotiquement stable car $\alpha\lambda = 4.2 > 4$ et $\beta\gamma = 6 > 4$. Les graphes de x_n et y_n sont présentés dans la figure 2.3.



(a) Graphe de x_n



(b) Graphe de y_n

FIG. 2.3 : Un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable

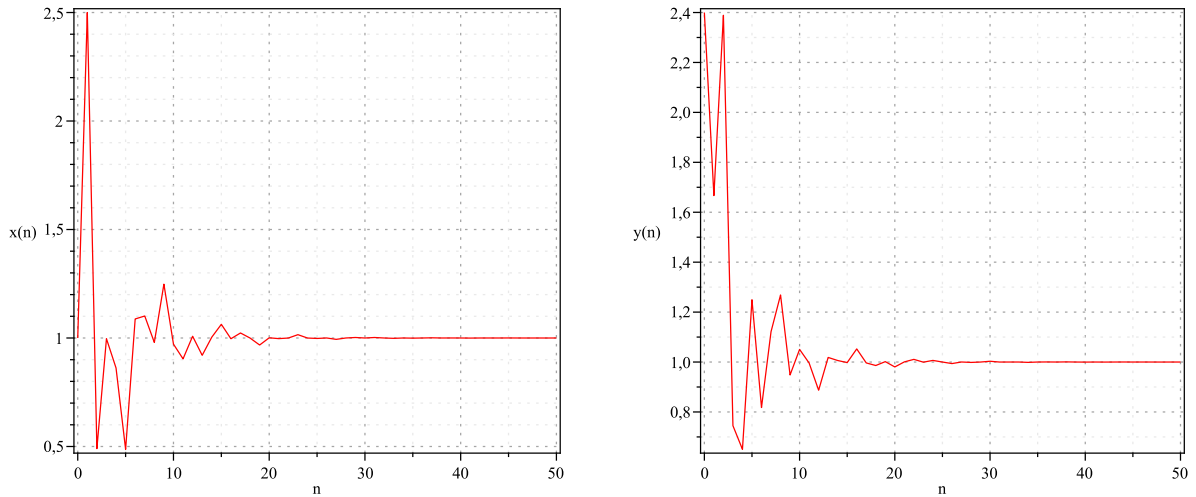
$$(\alpha\lambda > 4, \beta\gamma > 4 \text{ et } \alpha, \gamma < 1)$$

Exemple 2.3.2 Considérons le Système (2.18) avec les valeurs initiales $x_{-2} = 5$, $x_{-1} = 9.5$, $x_0 = 0.1$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 0.6$ et $y_0 = 0.7$. De plus, prenons les paramètres $\alpha = 2$, $\lambda = 1$, $\beta = 2.5$, $\gamma = 1.5$, c'est à dire,

$$p_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 2.5, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 1.5, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2

La condition (6) du Théorème (2.3.6) est vérifiée, et alors, le point d'équilibre $(1, 1)$ est globalement asymptotiquement stable. Voir les graphes (a) et (b) dans la figure 2.4.



(a) Graphe de x_n

(b) Graphe de y_n

FIG. 2.4 : Un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable

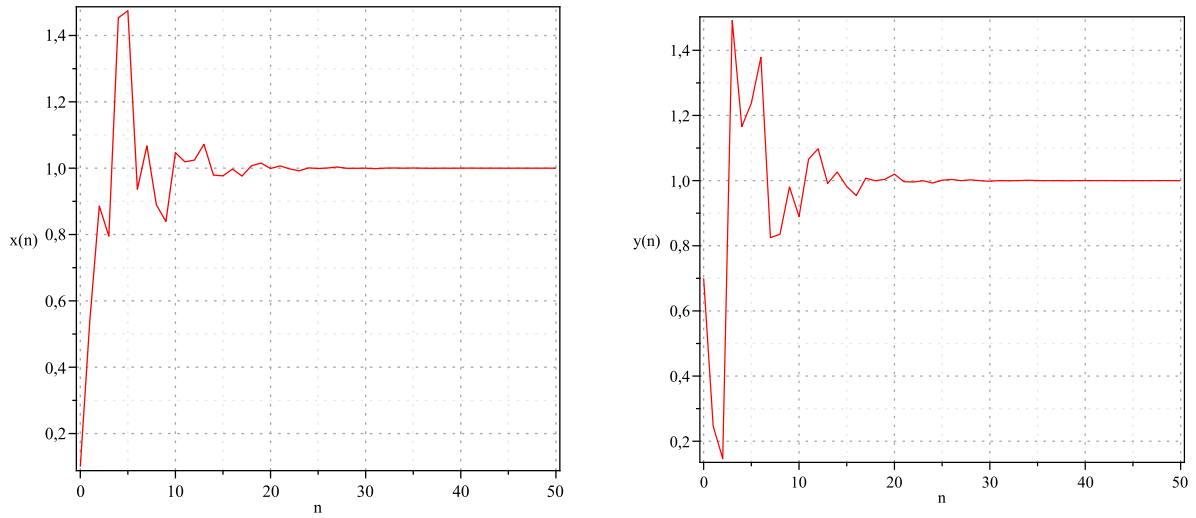
$$(\alpha, \beta, \gamma > 1 \text{ et } \lambda = 1)$$

Exemple 2.3.3 Considérons le Système (2.18) avec les valeurs initiales $x_{-2} = 0.2$, $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$, $y_{-2} = 0.36$, $y_{-1} = 8.6$ et $y_0 = 2.4$. De plus, prenons les paramètres $\alpha = 1$, $\lambda = 1.8$, $\beta = 5$ et $\gamma = 1$, c'est à dire,

$$p_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 5, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1.8, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Il est clair que la condition (7) du Théorème (2.3.6) est vérifiée. D'où, le point d'équilibre $(1, 1)$ est globalement asymptotiquement stable. Voir la figure 2.5.

2.3. Etude d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois à coefficients périodiques de période 2



(a) Graphe de x_n

(b) Graphe de y_n

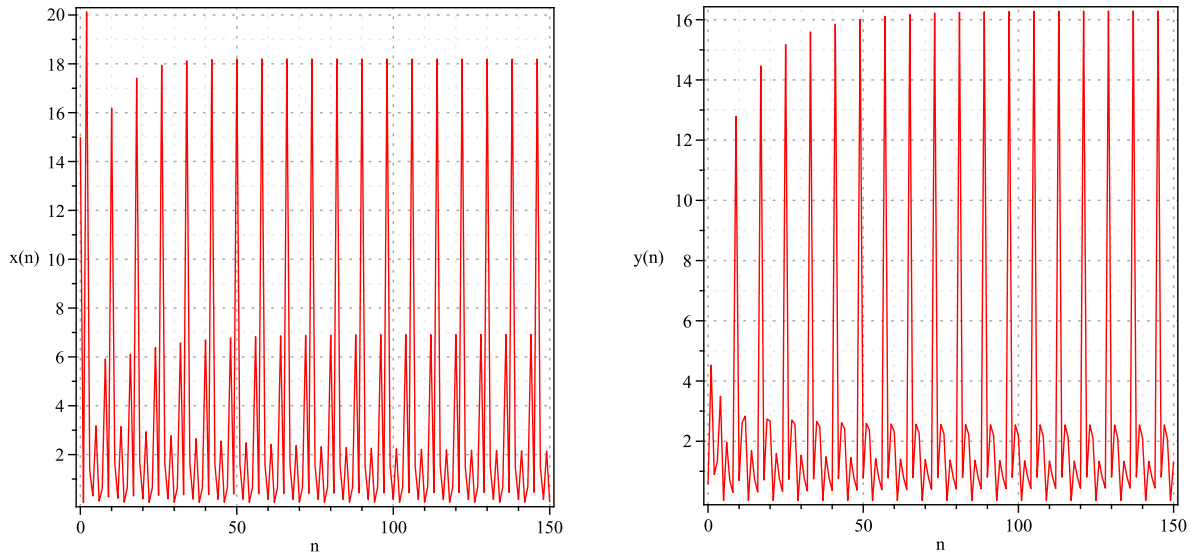
FIG. 2.5 : Un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable

$$(\beta, \lambda > 1 \text{ et } \alpha = \gamma = 1)$$

Exemple 2.3.4 *Considérons le Système (2.18) avec les valeurs initiales $x_{-2} = 3$, $x_{-1} = 0.1$, $x_0 = 15$, $y_{-2} = 24$, $y_{-1} = 0.13$ et $y_0 = 0.57$. De plus, prenons les paramètres $\alpha = 0.3$, $\lambda = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.4$, c'est à dire,*

$$p_n = \begin{cases} 0.3, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0.1, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0.4, & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0.5, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Dans ce cas on a $\alpha\lambda + \alpha + \lambda = 0.95 < 1$ et $\beta\gamma + \beta + \gamma = 0.54 < 1$. Alors, le point d'équilibre $(1, 1)$ est instable. Voir les graphes de x_n et y_n dans la figure ci-dessous.



(a) Graphe de x_n

(b) Graphe de y_n

FIG. 2.6 : Un point d'équilibre instable ($\alpha, \beta, \gamma, \lambda < 1$)

2.4 Quelques réponses pour les problèmes ouverts

En revenant aux deux problèmes ouverts proposés au départ concernant les deux équations (2.2) et (2.3), on peut avoir des informations sur le comportement de ces dernières à partir de l'étude faite dans la première partie de ce chapitre, en l'occurrence, une condition suffisante d'oscillation peut s'obtenir du Théorème (2.2.1), des résultats de permanence sont donnés par les Théorèmes (2.2.2) et (2.2.3), et d'autres indiquant la stabilité asymptotique uniforme locale (Théorème (2.2.4)) et celle globale (Théorème (2.2.5)).

Notre deuxième étude sur le Système (2.18) permet de déduire des résultats plus précises pour l'Equation (2.3) lorsque la suite $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ est de période $\omega = 2$, c'est à dire,

$$\alpha_n = \begin{cases} a, & \text{si } n \text{ pair,} \\ b, & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

avec $a \neq b$, sachant que le même cas a été étudié pour l'Equation (2.2) dans [33]. Ici, on résume notre contribution pour cette équation en énumérant les différents points

2.4. Quelques réponses pour les problèmes ouverts

suivants

- Toute solution $\{y_n\}_{n \geq -2}$ de l'Equation (2.3) est permanente.

- Si une des deux conditions suivantes est vérifiée

1. $\frac{(\max\{a,b\}+1)^2}{(1+\max\{a,b\}-\min\{a,b\})^3} > \frac{4}{27}$,

2. Il existe $j_0 \in \{-1, 0\}$, tel que $(x_{-1} - 1)(x_{2j_0} - 1) > 0$.

Alors, la solution $\{y_n\}_{n \geq -2}$ de l'Equation (2.3) est oscillatoire autour de $\bar{y} = 1$.

- L'unique point d'équilibre $\bar{y} = 1$ de l'Equation (2.3) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si

$$ab + a + b > 1.$$

- Si $ab + a + b < 1$, l'unique point d'équilibre de l'Equation (2.3) est instable.

- Si une des conditions suivantes est vérifiée

- (i) $ab > 4$ avec $(a - 1)(b - 1) < 0$,

- (ii) $a > 1$ et $b > 1$,

- (iii) $a = 1$ et $b > 1$,

- (vi) $a > 1$ et $b = 1$.

Alors, l'unique point d'équilibre $\bar{y} = 1$ de l'Equation (2.3) est globalement asymptotiquement stable.

CHAPITRE 3

Existence et attractivité globale des solutions périodiques pour un système d'équations aux différences non-autonomes de type max

3.1 Introduction

C'est un problème celui de savoir s'il existe des solutions périodiques pour les équations aux différences non-autonomes, et en particulier, ceux à coefficients périodiques. Ce type de questions avait eu récemment une grande attention, beaucoup de mathématiciens ont fait leurs recherches sur ce sujet et la plupart de leurs analyses ont été basées sur les théorèmes de point fixe comme le théorème de Schauder, le théorème de Krasnoselskii et autres (voir par exemple [8, 11, 42, 50, 51, 64–66]).

Un autre sujet qui a été abordé beaucoup dans les dernière décennies est l'investigation de ce qu'on appelle, les équations aux différences de type max et leurs systèmes.

Le problème de calculer le maximum et l'utilisation de l'opérateur max sont apparus dans certains modèles de la théorie de contrôle automatique ([47, 57]). Ensuite, la considération et l'étude de telle équations a suscité une attention accrue et elle a fait l'objet d'une littérature abondante, nous nous référons à [26, 36, 54–57, 60]. Cependant, la majorité des travaux publiés en ce sens étaient sur des équations et systèmes d'équations aux différences de type max (et d'autres de type min) spécifiques et il n'y a que quelques uns qui traitent des équations ou des systèmes généraux comme [52].

Le travail de ce chapitre est une combinaison de ces deux derniers axes de recherche dans le domaine des équations aux différences, en l'occurrence, on considère le système fonctionnel non-autonome de type max

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max \{f_1(n, x_n), g_1(n, y_n)\} \\ y_{n+1} = \max \{f_2(n, x_n), g_2(n, y_n)\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

où les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels, les fonctions

$$f_i, g_i : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

sont ω -périodiques en n avec $\omega \geq 1$ un entier naturel.

Dans toute la suite, on note par $[0, \omega - 1]$ l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, \omega - 1\}$. Supposons aussi que les fonctions $f_i, g_i, i = 1, 2$, sont contractantes, c'est-à-dire, il existe des constantes $L_i, K_i \in [0, 1), i = 1, 2$, telles que pour tous $u, v \in \mathbb{R}, n \in [0, \omega - 1]$,

$$|f_i(n, u) - f_i(n, v)| \leq L_i |u - v| \quad \text{et} \quad |g_i(n, u) - g_i(n, v)| \leq K_i |u - v|. \quad (3.2)$$

Dans ce qui suit, on va montrer que sous cette condition le Système (3.1) admet une unique solution périodique de période ω , et en plus, toute solution de ce système converge vers cette solution périodique.

3.2 Existence et unicité d'une solution périodique

Commençons par étudier l'existence des solutions périodiques du Système (3.1) en utilisant le théorème du point fixe de Banach. Pour cela, prenons \mathbb{X} l'ensemble de toutes

3.2. Existence et unicité d'une solution périodique

les suites ω -périodiques de \mathbb{R}^2 . On a

Lemme 3.2.1 *L'ensemble \mathbb{X} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension ω .*

Preuve. On vérifie aisément que \mathbb{X} est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^2)$, l'ensemble des fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{R}^2 , et que pour $i = 0, 1, \dots, \omega - 1$ la famille des suites

$$e_i(n) = \begin{cases} (1, 1), & \text{si } n = \omega k + i, \\ (0, 0), & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $n, k \in \mathbb{N}$ définie une base pour \mathbb{X} , c'est à dire, $\{e_0, e_1, \dots, e_{\omega-1}\}$ sont linéairement indépendantes et pour tout $(x, y) = \{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0} \in \mathbb{X}$, on a $(x, y) = \sum_{i=0}^{\omega-1} (x_i, y_i) e_i$. ■

De plus, on définit sur \mathbb{X} la norme max suivante

$$\|(x, y)\| = \max_{n \in [0, \omega-1]} |(x_n, y_n)|_0,$$

pour tout $(x, y) = \{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0} \in \mathbb{X}$, où $|\cdot|_0$ désigne la norme infinie de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire, $|(x_n, y_n)|_0 = \max\{|x_n|, |y_n|\}$. Comme tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, alors

Lemme 3.2.2 *$(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.*

Ensuite, on construit une application contractante T sur \mathbb{X} , et pour faire ça on utilise c , un nombre réel tel que

$$0 < c \leq \frac{1 - \max_{1 \leq i \leq 2} \{L_i, K_i\}}{2}, \quad (3.3)$$

où L_i, K_i , $i = 1, 2$, sont donnés par (3.2). Reécrivons la première équation du Système (3.1) comme suit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= cx_n + \max\{f_1(n, x_n), g_1(n, y_n)\} - cx_n \\ &= cx_n + \max\{f_1(n, x_n) - cx_n, g_1(n, y_n) - cx_n\} \end{aligned}$$

et de même

$$y_{n+1} = cy_n + \max\{f_2(n, x_n) - cy_n, g_2(n, y_n) - cy_n\}.$$

On définit deux applications, T_1 et T_2 , sur \mathbb{X} telles que

$$(T_1(x, y))(n) = \max\{f_1(n, x_n) - cx_n, g_1(n, y_n) - cx_n\}$$

3.2. Existence et unicité d'une solution périodique

et

$$(T_2(x, y))(n) = \max\{f_2(n, x_n) - cy_n, g_2(n, y_n) - cy_n\},$$

pour tous $(x, y) \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$.

En prouvant comme dans [64], nous obtenons le lemme suivant qui est très important pour notre étude.

Lemme 3.2.3 *Soit $(x, y) = \{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0} \in \mathbb{X}$. Alors, (x, y) est une solution du Système (3.1) si et seulement si*

$$x_n = (c^{-\omega} - 1)^{-1} \sum_{s=1}^{\omega} c^{-s} (T_1(x, y))(n + s - 1)$$

et

$$y_n = (c^{-\omega} - 1)^{-1} \sum_{s=1}^{\omega} c^{-s} (T_2(x, y))(n + s - 1),$$

pour tout $n \in [0, \omega - 1]$.

Preuve. Supposons que $(x, y) = \{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ est une solution ω -périodique du système (3.1). On va faire la preuve pour la première égalité et la deuxième sera démontré de la même manière. On a

$$x_{n+1} = cx_n + (T_1(x, y))(n),$$

donc,

$$c^{-1}x_{n+1} - x_n = c^{-1}(T_1(x, y))(n),$$

$$c^{-2}x_{n+2} - c^{-1}x_{n+1} = c^{-2}(T_1(x, y))(n + 1),$$

...

$$c^{-\omega}x_{n+\omega} - c^{1-\omega}x_{n+\omega-1} = c^{-\omega}(T_1(x, y))(n + \omega - 1).$$

On trouve après addition

$$c^{-\omega}x_{n+\omega} - x_n = \sum_{s=1}^{\omega} c^{-s}(T_1(x, y))(n + s - 1),$$

et du fait que $x_{n+\omega} = x_n$, on a le résultat. ■

Etant donné l'application T définie sur \mathbb{X} comme suit

$$(T(x, y))(n) = (c^{-\omega} - 1)^{-1} \sum_{s=1}^{\omega} c^{-s} ((T_1(x, y))(n + s - 1), (T_2(x, y))(n + s - 1)), \quad (3.4)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est clair du lemme précédent qu'un point fixe de T est une solution périodique du Système (3.1).

Théorème 3.2.1 *L'application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est contractante.*

Preuve. D'abord, il faut noter que la périodicité des fonctions f_i, g_i , pour $i = 1, 2$, nous garantit que

$$(T_i(x, y))(n + \omega) = (T_i(x, y))(n), \text{ pour } i = 1, 2, n \in \mathbb{N},$$

d'où,

$$(T(x, y))(n + \omega) = (T(x, y))(n), n \in \mathbb{N},$$

autrement dit, T envoie l'espace \mathbb{X} dans lui-même.

Maintenant, pour montrer que T est une contraction, soient $(x, y) = \{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}, (z, t) = \{(z_n, t_n)\}_{n \geq 0} \in \mathbb{X}$. On a pour tout $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= |\max\{f_i(n, x_n) - cx_n, g_i(n, y_n) - cy_n\} - \\ &\quad \max\{f_i(n, z_n) - cz_n, g_i(n, t_n) - ct_n\}|, \end{aligned}$$

et ici, distinguons quatre cas

Case 1. Lorsque

$$\max\{f_i(n, x_n), g_i(n, y_n)\} = f_i(n, x_n)$$

et

$$\max\{f_i(n, z_n), g_i(n, t_n)\} = f_i(n, z_n),$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= |f_i(n, x_n) - cx_n - f_i(n, z_n) + cz_n| \\ &\leq |f_i(n, x_n) - f_i(n, z_n)| + c|x_n - z_n| \\ &\leq (L_i + c)|x_n - z_n| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \max_{n \in [0, \omega-1]} \{|x_n - z_n|, |y_n - t_n|\} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \max_{n \in [0, \omega-1]} \|(x_n, y_n) - (z_n, t_n)\|_0 \\ &= \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|. \end{aligned}$$

Case 2. Si

$$\max\{f_i(n, x_n), g_i(n, y_n)\} = f_i(n, x_n)$$

et

$$\max\{f_i(n, z_n), g_i(n, t_n)\} = g_i(n, t_n),$$

alors on obtient que

$$|(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| = |f_i(n, x_n) - cx_n - g_i(n, t_n) + cz_n|.$$

Dans ce cas nous distinguons aussi deux autres cas, quand

$$f_i(n, x_n) - cx_n \geq g_i(n, t_n) - cz_n$$

et lorsque

$$f_i(n, x_n) - cx_n \leq g_i(n, t_n) - cz_n.$$

Donc, ou bien

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= f_i(n, x_n) - cx_n - g_i(n, t_n) + cz_n \\ &\leq f_i(n, x_n) - cx_n - f_i(n, z_n) + cz_n \\ &\leq |f_i(n, x_n) - f_i(n, z_n)| + c|x_n - z_n| \\ &\leq (L_i + c)|x_n - z_n| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= g_i(n, t_n) - cz(n) - f_i(n, x_n) + cx_n \\ &\leq g_i(n, t_n) - cz(n) - g_i(n, y_n) + cx_n \\ &\leq |g_i(n, t_n) - g_i(n, y_n)| + c|x_n - z_n| \\ &\leq K_i|t_n - y_n| + c|x_n - z_n| \\ &\leq (K_i + c) \max_{n \in [0, \omega-1]} \{|x_n - z_n|, |y_n - t_n|\} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \max_{n \in [0, \omega-1]} |(x_n, y_n) - (z_n, t_n)|_0 \\ &= \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|. \end{aligned}$$

Case 3. Lorsque

$$\max\{f_i(n, x_n), g_i(n, y_n)\} = g_i(n, y_n)$$

et

$$\max\{f_i(n, z_n), g_i(n, t_n)\} = f_i(n, z_n),$$

on a

$$|(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| = |g_i(n, y_n) - cx_n - f_i(n, z_n) + cz_n|.$$

On va examiner également deux cas ici, quand

$$g_i(n, y_n) - cx_n \geq f_i(n, z_n) - cz_n$$

et quand

$$g_i(n, y_n) - cx_n \leq f_i(n, z_n) - cz_n.$$

Ainsi, ou bien on a

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= g_i(n, y_n) - cx_n - f_i(n, z_n) + cz_n \\ &\leq g_i(n, y_n) - cx_n - g_i(n, t_n) + cz_n \\ &\leq |g_i(n, y_n) - g_i(n, t_n)| + c|x_n - z_n| \\ &\leq K_i|y_n - t_n| + c|x_n - z_n| \\ &\leq (K_i + c) \max_{n \in [0, \omega-1]} \{|x_n - z_n|, |y_n - t_n|\} \\ &= \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= f_i(n, z_n) - cz_n - g_i(n, y_n) + cx_n \\ &\leq f_i(n, z_n) - cz_n - f_i(n, x_n) + cx_n \\ &\leq |f_i(n, z_n) - f_i(n, x_n)| + c|x_n - z_n| \\ &\leq (L_i + c)|x_n - z_n| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|. \end{aligned}$$

Case 4. Si

$$\max\{f_i(n, x_n), g_i(n, y_n)\} = g_i(n, y_n)$$

3.2. Existence et unicité d'une solution périodique

et

$$\max\{f_i(n, z_n), g_i(n, t_n)\} = g_i(n, t_n),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} |(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| &= |g_i(n, y_n) - cx_n - g_i(n, t_n) + cz_n| \\ &\leq |g_i(n, y_n) - g_i(n, t_n)| + c|x_n - z_n| \\ &\leq K_i|y_n - t_n| + c|x_n - z_n| \\ &\leq (K_i + c) \max_{n \in [0, \omega-1]} \{|x_n - z_n|, |y_n - t_n|\} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|. \end{aligned}$$

En conclusion, on a pour tout $i = 1, 2, n \in [0, \omega - 1]$,

$$|(T_i(x, y))(n) - (T_i(z, t))(n)| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\|.$$

Par suite, pour tout $i = 1, 2, n \in [0, \omega - 1]$,

$$\begin{aligned} &\left| (c^{-w} - 1)^{-1} \sum_{s=1}^w c^{-s} [(T_i(x, y))(n + s - 1) - (T_i(z, t))(n + s - 1)] \right| \\ &\leq |c^{-w} - 1|^{-1} \sum_{s=1}^w |c|^{-s} |(T_i(x, y))(n + s - 1) - (T_i(z, t))(n + s - 1)| \\ &\leq (c^{-w} - 1)^{-1} \left(\sum_{s=1}^w c^{-s} \right) \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\| \\ &= (c^{-w} - 1)^{-1} \frac{c^{-w} - 1}{1 - c} \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c \right) \|(x, y) - (z, t)\| \\ &= \frac{\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c}{1 - c} \|(x, y) - (z, t)\|. \end{aligned}$$

En prenant $k = \frac{\max_{1 \leq j \leq 2} \{L_j, K_j\} + c}{1 - c}$, alors on a

$$\|T(x, y) - T(z, t)\| \leq k \|(x, y) - (z, t)\|.$$

De plus, $k < 1$ d'après (3.3). D'où le résultat. ■

Par suite, en appliquant le théorème de point fixe de Banach on a

Théorème 3.2.2 *Le Système (3.1) admet une unique solution ω -périodique qu'on note $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$.*

3.3 Attractivité globale de la solution périodique

La discussion suivante concerne l'attractivité globale de la solution $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$ du Système (3.1).

Théorème 3.3.1 *Toute solution du Système (3.1) converge vers son unique solution ω -périodique $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$.*

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ une solution arbitraire du Système (3.1). On définit les suites

$$z_n = x_n - \tilde{x}_n, \quad t_n = y_n - \tilde{y}_n, \quad n \geq 0.$$

Evidemment, la suite $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ converge vers $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$ si et seulement si $\{(z_n, t_n)\}_{n \geq 0}$ tend vers $(0, 0)$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc, il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0.$$

La suite $\{(z_n, t_n)\}_{n \geq 0}$ vérifie les deux équations

$$z_{n+1} = \max\{f_1(n, z_n + \tilde{x}_n), g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)\} - \max\{f_1(n, \tilde{x}_n), g_1(n, \tilde{y}_n)\} \quad (3.5)$$

et

$$t_{n+1} = \max\{f_2(n, z_n + \tilde{x}_n), g_2(n, t_n + \tilde{y}_n)\} - \max\{f_2(n, \tilde{x}_n), g_2(n, \tilde{y}_n)\}. \quad (3.6)$$

En ce point on va montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$|z_{n+1}| \leq L_1 |z_n| \quad \text{ou} \quad |z_{n+1}| \leq K_1 |t_n|, \quad (3.7)$$

et de même manière on peut montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$|t_{n+1}| \leq L_2 |z_n| \quad \text{ou} \quad |t_{n+1}| \leq K_2 |t_n|. \quad (3.8)$$

De (3.5), nous distinguons quatre cas

Case 1. Quand

$$\max\{f_1(n, z_n + \tilde{x}_n), g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)\} = f_1(n, z_n + \tilde{x}_n)$$

et

$$\max\{f_1(n, \tilde{x}_n), g_1(n, \tilde{y}_n)\} = f_1(n, \tilde{x}_n),$$

3.3. Attractivité globale de la solution périodique

alors, (3.2) implique que

$$|z_{n+1}| = |f_1(n, z_n + \tilde{x}_n) - f_1(n, \tilde{x}_n)| \leq L_1 |z_n|.$$

Case 2. Quand

$$\max\{f_1(n, z_n + \tilde{x}_n), g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)\} = f_1(n, z_n + \tilde{x}_n)$$

et

$$\max\{f_1(n, \tilde{x}_n), g_1(n, \tilde{y}_n)\} = g_1(n, \tilde{y}_n),$$

c'est-à-dire

$$z_{n+1} = f_1(n, z_n + \tilde{x}_n) - g_1(n, \tilde{y}_n),$$

et ici on a aussi deux cas : $z_{n+1} \geq 0$ et $z_{n+1} < 0$. Premièrement, si $z_{n+1} \geq 0$, on a

$$z_{n+1} = f_1(n, z_n + \tilde{x}_n) - g_1(n, \tilde{y}_n) \leq f_1(n, z_n + \tilde{x}_n) - f_1(n, \tilde{x}_n),$$

D'où

$$|z_{n+1}| \leq |f_1(n, z_n + \tilde{x}_n) - f_1(n, \tilde{x}_n)| \leq L_1 |z_n|.$$

Ensuite, si $z_{n+1} < 0$, alors on a

$$-z_{n+1} = g_1(n, \tilde{y}_n) - f_1(n, z_n + \tilde{x}_n) \leq g_1(n, \tilde{y}_n) - g_1(n, t_n + \tilde{y}_n),$$

d'où

$$|z_{n+1}| \leq |g_1(n, \tilde{y}_n) - g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)| \leq K_1 |t_n|.$$

Case 3. Quand

$$\max\{f_1(n, z_n + \tilde{x}_n), g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)\} = g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)$$

et

$$\max\{f_1(n, \tilde{x}_n), g_1(n, \tilde{y}_n)\} = f_1(n, \tilde{x}_n),$$

c'est-à-dire

$$z_{n+1} = g_1(n, t_n + \tilde{y}_n) - f_1(n, \tilde{x}_n).$$

On a également deux cas ici : $z_{n+1} \geq 0$ et $z_{n+1} < 0$. Si $z_{n+1} \geq 0$, alors

$$z_{n+1} = g_1(n, t_n + \tilde{y}_n) - f_1(n, \tilde{x}_n) \leq g_1(n, t_n + \tilde{y}_n) - g_1(n, \tilde{y}_n),$$

3.3. Attractivité globale de la solution périodique

et par suite

$$|z_{n+1}| \leq |g_1(n, t_n + \tilde{y}_n) - g_1(n, \tilde{y}_n)| \leq K_1 |t_n|.$$

Si $z_{n+1} < 0$, alors

$$-z_{n+1} = f_1(n, \tilde{x}_n) - g_1(n, t_n + \tilde{y}_n) \leq f_1(n, \tilde{x}_n) - f_1(n, z_n + \tilde{x}_n),$$

ce qui implique que

$$|z_{n+1}| \leq |f_1(n, \tilde{x}_n) - f_1(n, z_n + \tilde{x}_n)| \leq L_1 |z_n|.$$

Case 4. Quand

$$\max\{f_1(n, z_n + \tilde{x}_n), g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)\} = g_1(n, t_n + \tilde{y}_n)$$

et

$$\max\{f_1(n, \tilde{x}_n), g_1(n, \tilde{y}_n)\} = g_1(n, \tilde{y}_n),$$

on obtient que

$$|z_{n+1}| = |g_1(n, t_n + \tilde{y}_n) - g_1(n, \tilde{y}_n)| \leq K_1 |t_n|.$$

En conclusion, (3.7) est vérifiée.

Maintenant, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des suites $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $\{b_n\}_{n \geq 0}$, $\{c_n\}_{n \geq 0}$, $\{d_n\}_{n \geq 0}$, $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$, $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ de nombres naturels telles que

$$a_n + b_n + c_n + d_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \lambda_n = n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

avec

$$|z_n| \leq L_1^{a_n} L_2^{b_n} K_1^{c_n} K_2^{d_n} \xi \tag{3.9}$$

et

$$|t_n| \leq L_1^{\alpha_n} L_2^{\beta_n} K_1^{\gamma_n} K_2^{\lambda_n} \rho, \tag{3.10}$$

où $\xi, \rho \in \{z_0, t_0\}$. Il est clair que le résultat est vrai pour $n = 0$. Maintenant, pour $n \geq 1$, supposons que les hypothèses sont vraies jusqu'à n et montrons pour $n + 1$. On a de (3.7) deux cas, ou bien

$$|z_{n+1}| \leq L_1 |z_n| \leq L_1^{a_n+1} L_2^{b_n} K_1^{c_n} K_2^{d_n} \xi,$$

3.4. Exemples

et en posant $a_{n+1} = a_n + 1$, $b_{n+1} = b_n$, $c_{n+1} = b_n$, $d_{n+1} = b_n$, on a

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} = a_n + 1 + b_n + c_n + d_n = n + 1$$

et

$$|z_{n+1}| \leq L_1^{a_{n+1}} L_2^{b_{n+1}} K_1^{c_{n+1}} K_2^{d_{n+1}} \xi$$

comme il est désiré. Ou bien,

$$|z_{n+1}| \leq K_1 |t_n| \leq L_1^{\alpha_n} L_2^{\beta_n} K_1^{\gamma_{n+1}} K_2^{\lambda_n} \rho,$$

et en posant $a_{n+1} = \alpha_n$, $b_{n+1} = \beta_n$, $c_{n+1} = \gamma_n + 1$, $d_{n+1} = \lambda_n$, on a

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + 1 + \lambda_n = n + 1$$

et pour $\xi = \rho$, on obtient

$$|z_{n+1}| \leq L_1^{a_{n+1}} L_2^{b_{n+1}} K_1^{c_{n+1}} K_2^{d_{n+1}} \xi.$$

De même manière on fait la preuve pour t_{n+1} en utilisant (3.8).

Remarquons que, quand $n \rightarrow +\infty$, au moins une des suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $\{b_n\}_{n \geq 0}$, $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et $\{d_n\}_{n \geq 0}$ tend vers l'infinie, et au moins une des suites $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$, $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ sa limite est aussi $+\infty$. Par suite, de (3.9) et (3.10) on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0.$$

D'où le résultat. ■

3.4 Exemples

Pour illustrer les résultats obtenus dans ce chapitre, nous considérons les trois exemples suivants

Exemple 3.4.1 *Considérons le système d'équations aux différences*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_n}{B_n + x_n}, e^{-\lambda_n y_n} \right\} \\ y_{n+1} = \max \left\{ e^{-\sigma_n x_n}, \frac{C_n}{D_n + y_n} \right\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

3.4. Exemples

où $\{A_n\}_{n \geq 0}$, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, $\{C_n\}_{n \geq 0}$, $\{D_n\}_{n \geq 0}$, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ sont des suites de nombres réels strictement positifs, périodiques de période $\omega \geq 1$, avec

$$\max_{n \in [0, \omega-1]} \left\{ \frac{A_n}{B_n^2}, \frac{C_n}{D_n^2}, \sigma_n, \lambda_n \right\} < 1$$

et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels positifs. Evidemment, ce système est de la forme (3.1) avec $f_1(n, u) = \frac{A_n}{B_n + u}$, $f_2(n, u) = e^{-\sigma_n u}$, $g_1(n, u) = e^{-\lambda_n u}$ et $g_2(n, u) = \frac{C_n}{D_n + u}$. Ces fonctions sont continues en u et on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(n, u) = -\frac{A_n}{(B_n + u)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}(n, u) = -\sigma_n e^{-\sigma_n u}$$

et

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}(n, u) = -\lambda_n e^{-\lambda_n u}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial u}(n, u) = -\frac{C_n}{(D_n + u)^2}.$$

Voyons que

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial u}(n, u) \right| \leq \frac{A_n}{B_n^2}, \quad \left| \frac{\partial f_2}{\partial u}(n, u) \right| \leq \sigma_n, \quad \left| \frac{\partial g_1}{\partial u}(n, u) \right| \leq \lambda_n, \quad \left| \frac{\partial g_2}{\partial u}(n, u) \right| \leq \frac{C_n}{D_n^2}.$$

Alors, par le théorème des accroissements finis on peut déduire que

$$|f_1(n, u) - f_1(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \left\{ \frac{A_n}{B_n^2} \right\} |u - v|, \quad |f_2(n, u) - f_2(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \{\sigma_n\} |u - v|$$

et

$$|g_1(n, u) - g_1(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \{\lambda_n\} |u - v|, \quad |g_2(n, u) - g_2(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \left\{ \frac{C_n}{D_n^2} \right\} |u - v|.$$

D'où, les théorèmes (3.2.2) et (3.3.1) impliquent que le Système (3.11) a une unique solution ω -périodique et toute solution de ce système converge vers cette solution périodique.

Exemple 3.4.2 Considérons le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max\{\alpha_n \cos(x_n), \beta_n \sin(y_n)\} \\ y_{n+1} = \max\{\gamma_n \sin(x_n), \lambda_n \cos(y_n)\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

où $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$, $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ sont des suites de nombres réels positifs, périodiques de période $\omega \geq 1$, avec

$$\max_{n \in [0, \omega-1]} \{\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \lambda_n\} < 1$$

3.4. Exemples

et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels. Il est clair que ce système est de la forme (3.1) avec $f_1(n, u) = \alpha_n \cos u$, $f_2(n, u) = \gamma_n \sin u$, $g_1(n, u) = \beta_n \sin u$ et $g_2(n, u) = \lambda_n \cos u$. On a aussi

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial u}(n, u) \right| \leq \alpha_n, \quad \left| \frac{\partial f_2}{\partial u}(n, u) \right| \leq \gamma_n, \quad \left| \frac{\partial g_1}{\partial u}(n, u) \right| \leq \beta_n, \quad \left| \frac{\partial g_2}{\partial u}(n, u) \right| \leq \lambda_n.$$

Donc, par le théorème des accroissements finis on a

$$|f_1(n, u) - f_1(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \{\alpha_n\} |u - v|, \quad |f_2(n, u) - f_2(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \{\gamma_n\} |u - v|$$

et

$$|g_1(n, u) - g_1(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \{\beta_n\} |u - v|, \quad |g_2(n, u) - g_2(n, v)| \leq \max_{n \in [0, \omega-1]} \{\lambda_n\} |u - v|.$$

D'où, le Système (3.12) a une unique solution ω -périodique et toute solution de ce système converge vers cette solution périodique.

Exemple 3.4.3 Considérons le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max\{\alpha_n, \beta_n y_n\} \\ y_{n+1} = \max\{\gamma_n x_n, \lambda_n\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.13)$$

où $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$, $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ sont des suites dans $[0, 1)$, ω -périodiques avec $\omega \geq 1$ et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels.

Supposons de plus que

$$\beta_n \lambda_{n-1} \leq \alpha_n, \quad \gamma_n \alpha_{n-1} \leq \lambda_n, \quad \text{pour tout } n \geq 1. \quad (3.14)$$

On peut voir facilement que le Système (3.13) vérifie les hypothèses des résultats principaux de ce chapitre, ce qui nous permet de déduire que ce système admet une unique solution périodique de période ω . En outre, toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ du Système (3.13) converge vers cette solution périodique.

Nous allons, à présent, écrire la forme explicite de cette solution ω -périodique. Tout d'abord, on a la propriété suivante

Lemme 3.4.1 Toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ du Système (3.13) qui vérifie

$$\gamma_{n_0} x_{n_0} \leq \lambda_{n_0}, \quad \beta_{n_0} y_{n_0} \leq \alpha_{n_0}, \quad \text{pour un certain } n_0 \geq 0, \quad (3.15)$$

3.4. Exemples

est éventuellement périodique de période ω et on a

$$\{(x_n, y_n)\}_{n \geq n_0+1} = \{(\alpha_{n-1}, \lambda_{n-1})\}_{n \geq n_0+1}. \quad (3.16)$$

Preuve. Montrons (3.16) par récurrence. Le cas $n = n_0 + 1$ est évident d'après (3.13) et (3.15). Pour $n > n_0 + 1$, supposons que (3.16) est vraie jusqu'à n . On a alors

$$x_{n+1} = \max\{\alpha_n, \beta_n y_n\} = \max\{\alpha_n, \beta_n \lambda_{n-1}\} = \alpha_n$$

et

$$y_{n+1} = \max\{\gamma_n x_n, \lambda_n\} = \max\{\gamma_n \alpha_{n-1}, \lambda_n\} = \lambda_n.$$

D'où, (3.16) est vraie pour $n + 1$ et donc elle est vraie pour tout $n \geq n_0 + 1$. ■

Par conséquent, la suite $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$, où

$$x_0 = \alpha_{\omega-1}, y_0 = \lambda_{\omega-1}$$

et

$$x_n = \alpha_{n-1}, y_n = \lambda_{n-1}, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

est l'unique solution ω -périodique du Système (3.13).

Pour confirmer ce résultat, on considère un exemple numérique. Soit $\omega = 3$, et prenons les suites

$$\alpha_n = \begin{cases} 0.6, & \text{si } n = 3k, \\ 0.9, & \text{si } n = 3k + 1, \\ 0.8, & \text{si } n = 3k + 2, \end{cases} \quad \beta_n = \begin{cases} 0.55, & \text{si } n = 3k, \\ 0.4, & \text{si } n = 3k + 1, \\ 0.35, & \text{si } n = 3k + 2, \end{cases}$$

et

$$\gamma_n = \begin{cases} 0.5, & \text{si } n = 3k, \\ 0.62, & \text{si } n = 3k + 1, \\ 0.85, & \text{si } n = 3k + 2, \end{cases} \quad \lambda_n = \begin{cases} 0.75, & \text{si } n = 3k, \\ 0.85, & \text{si } n = 3k + 1, \\ 0.96, & \text{si } n = 3k + 2, \end{cases}$$

avec $n, k \in \mathbb{N}$. Voyons que

$$\beta_n \leq \alpha_n < 1, \gamma_n \leq \lambda_n < 1, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

et par conséquent, (3.14) est vérifiée. D'où, l'unique solution périodique de période trois est

$$\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0} = \{(0.8, 0.96), (0.6, 0.75), (0.9, 0.85), (0.8, 0.96), (0.6, 0.75), (0.9, 0.85), \dots\}.$$

3.4. Exemples

On considère maintenant deux solutions arbitraires de ce système comme exemples. Prenons la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ de valeurs initiales $(x_0, y_0) = (19.6 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3)$, le tableau 1 décrit la convergence de cette dernière vers la solution périodique $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$. De même, si on prend la solution de valeurs initiales $(x_0, y_0) = (10, 56)$, la convergence dans ce cas est présentée dans le tableau 2.

n	$x_n - \tilde{x}_n$	$y_n - \tilde{y}_n$
0	19599.2	4999.04
1	2749.40	9799.25
2	3919.10	1704.1500
3	595.950000	3331.0400
4	1832.000000	297.6250000
5	118.4500000	1135.362000
6	396.8742000	100.4875000
7	55.19612500	198.0871000
8	78.63484000	33.74359750
9	11.30775912	66.64461400
10	36.58253770	5.303879560
11	1.521551824	22.20317337
12	7.268610680	1.098319050
13	0.532075478	3.284305340
14	0.713722136	0.
15	0.	0.411663816
16	0.1544150988	0.
17	0.	0.
18	0.	0.
19	0.	0.

Tableau 1.

n	$x_n - \tilde{x}_n$	$y_n - \tilde{y}_n$
0	9.2	55.04
1	30.20	4.25
2	1.10	18.2460
3	5.883600	0.7400
4	0.335000	2.5918000
5	0.43672000	0.
6	0.	0.176212000
7	0.0249166000	0.
8	0.	0.
9	0.	0.
10	0.	0.

Tableau 2.

3.5 Les systèmes de type min et ceux mixtes analogues au Système (3.1)

Les démonstrations de cette partie étant presque identiques à celles de la deuxième et la troisième, nous nous contentons d'énoncer les résultats avec quelques points essentiels de leurs preuves.

Proposition 3.5.1 *Considérons le système de type min*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \min\{f_1(n, x_n), g_1(n, y_n)\} \\ y_{n+1} = \min\{f_2(n, x_n), g_2(n, y_n)\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

avec $f_i, g_i, i = 1, 2$, sont des fonctions réelles ω -périodiques en n , et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels. Supposons aussi que (3.2) est vérifiée. Alors, le Système (3.17) admet une unique solution ω -périodique $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$, et de plus, toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ de ce système converge vers $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}_{n \geq 0}$.

– Quelques éléments de la démonstration.

Pour montrer l'existence et l'unicité, il suffit d'appliquer le théorème de Banach pour l'application

$$(T(x, y))(n) = (c^{-w} - 1)^{-1} \sum_{s=1}^w c^{-s} ((T_1(x, y))(n + s - 1), (T_2(x, y))(n + s - 1)),$$

avec

$$(T_1(x, y))(n) = \min\{f_1(n, x_n) - cx_n, g_1(n, y_n) - cx_n\}$$

et

$$(T_2(x, y))(n) = \min\{f_2(n, x_n) - cy_n, g_2(n, y_n) - cy_n\},$$

pour tous $(x, y) \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N}$, qui est une application contractante en prouvant exactement comme pour le Théorème (3.2.1) avec des modifications simples. Pour l'attractivité, elle découle en suivant la même procédure de la démonstration du Théorème (3.3.1) en tenant compte ce qui doit être changé.

Proposition 3.5.2 *Considérons les systèmes mixtes*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \min\{f_1(n, x_n), g_1(n, y_n)\} \\ y_{n+1} = \max\{f_2(n, x_n), g_2(n, y_n)\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \max\{f_1(n, x_n), g_1(n, y_n)\} \\ y_{n+1} = \min\{f_2(n, x_n), g_2(n, y_n)\} \end{cases} \quad (3.18)$$

avec $f_i, g_i, i = 1, 2$, sont des fonctions réelles ω -périodiques en n , et les valeurs initiales x_0, y_0 sont des nombres réels. Supposons aussi que (3.2) est vérifiée. Alors, chacun des deux systèmes (3.18) admet une unique solution ω -périodique $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}_{n \geq 0}$ et toute solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ de ce système converge vers $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}_{n \geq 0}$.

– **Quelques éléments de la démonstration.**

Ici, on prend pour tous $(x, y) \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N}$,

$$(T(x, y))(n) = (c^{-w} - 1)^{-1} \sum_{s=1}^w c^{-s} ((T_1(x, y))(n + s - 1), (T_2(x, y))(n + s - 1)),$$

avec

$$(T_1(x, y))(n) = \max\{f_1(n, x_n) - cx_n, g_1(n, y_n) - cy_n\}$$

et

$$(T_2(x, y))(n) = \min\{f_2(n, x_n) - cx_n, g_2(n, y_n) - cy_n\},$$

ou l'inverse pour le deuxième système mixte.

Conclusion générale et perspectives

La présente thèse rassemble quelques études réalisées sur le comportement de certaines classes d'équations et systèmes d'équations aux différences non-linéaires. Dans le premier chapitre, nous avons présenté des travaux que nous avons effectués lors de nos premiers pas dans ce domaine de recherche et qui traitent des systèmes d'équations aux différences autonomes. Après, nous avons orienté notre recherche aux équations non-autonomes, et plus particulièrement celles à coefficients périodiques, qui étaient l'objectif du deuxième et troisième chapitres. Dans ce cadre, nous avons étudié, motivés par deux problèmes ouverts proposés dans [10], l'équation d'ordre $(k + 1)$

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{\alpha_n + y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $k \geq 1$ un entier naturel, $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ une suite périodique de nombres réels strictement positifs de période quelconque $\omega \geq 1$, et aussi le système d'ordre 3

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{q_n + x_n}{q_n + x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\{p_n\}_{n \geq 0}$ et $\{q_n\}_{n \geq 0}$ sont des suites périodiques de nombres réels positifs de période 2. En les regardant, ces équations peuvent sembler simples dans leurs formes, mais en fait elles ne sont pas faciles à étudier. Nous avons essayé d'éclaircir le comportement des solutions dans le plus possible des cas quand la période est égale à deux. En plus, nous avons donné une série de résultats pour le cas général en espérant qu'elles pourront motiver au futur pour faire des études de ce genre pour les équations aux différences

non-autonomes qui ne sont pas assez abordés ces jours. Dans ce contexte, nous voulons travailler pour avoir plus de résultats sur l'attractivité globale de l'équation générale précédente dans les cas restants, et même de les généraliser pour des systèmes d'ordres supérieurs s'il est possible parceque j'usqu'à maintenant nous avons réussi d'étudier le système d'ordre 2 seulement. D'autre perspectives aussi sont de généraliser ces équations, ça soit par passer aux puissances en considérant des équations de la forme

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n^r}{\alpha_n + y_{n-k}^r}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pour $r \geq 2$ et leurs systèmes, ou de prendre des coefficients différents, comme par exemple l'équation

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_n + y_n}{A_n + y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comme nous pouvons encore considérer les suites $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ convergentes au lieu de les prendre périodiques.

Le dernier chapitre mérite une attention particulière puisqu'il traite un nouveau système d'équations aux différences non-autonomes de type max d'une façon différente en adaptant la méthode de point fixe pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution périodique et ensuite étudier l'attractivité de cette dernière.

Basé sur notre travail actuel, S. Stević dans [59] a donné très récemment une extension de la forme

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = \max_{1 \leq j \leq l_1} \{f_{1j}(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)})\} \\ x_{n+1}^{(2)} = \max_{1 \leq j \leq l_2} \{f_{2j}(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)})\} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq l_k} \{f_{kj}(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)})\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et en utilisant la même technique et en prenant une forme générale de l'opérateur (3.4) il a prouvé que nos résultats restent encore valables pour cette généralisation.

Comme perspectives dans cette piste nous allons essayer d'étudier au futur des équations non-autonomes de type max d'ordres supérieurs, autrement dit les équations de la forme

$$x_{n+1} = \max_{1 \leq j \leq m} \{f_{1j}(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p_j})\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ainsi que leurs systèmes.

ANNEXE A

Calcul des polynômes caractéristiques associés aux systèmes linéarisés des Systèmes (1.19), (1.26) et (1.34)

Cet annexe est dédié à calculer les polynômes caractéristiques des systèmes linéaires associés aux Systèmes (1.19), (1.26) et (1.34) étudiés dans le premier chapitre. Nous allons rappeler les résultats concernés sous forme de propositions suivies par leurs démonstrations détaillées.

A.1 Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.19)

Proposition A.1.1 *Considérons le Système (1.19), $F_j^{(1)}$ est la matrice Jacobiennne au point d'équilibre (\bar{x}_1, \bar{y}_1) donnée par (1.23). Alors, le polynôme caractéristique associé est de la forme*

$$P_{\{1,s\}}(\lambda) = \lambda^{2s+2} - \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_i b_j \lambda^{2s-i-j}, \quad (\text{A.1})$$

avec $s = \max\{p, k\}$.

A.1. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.19)

Preuve. Par récurrence, on va montrer que (A.1) est vraie pour tout $s \in \mathbb{N}$. D'abord, pour $s = p = k = 0$, on a

$$P_{\{1,0\}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_0 \\ b_0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_0 b_0,$$

donc la propriété est vérifiée. Maintenant, supposons que (A.1) est vraie pour s et montrons qu'elle est aussi vraie pour $s + 1$. Nous avons

$$P_{\{1,s+1\}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_s & a_{s+1} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{s+1} & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

en développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière colonne, on obtient

$$P_{\{1,s+1\}}(\lambda) = (-1)^{2s+5} a_{s+1} D_0 + (-1)^{4s+8} (-\lambda) D_1 = -a_{s+1} D_0 - \lambda D_1,$$

avec

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{s+1} & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & b_{s+1} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^{s+1+i} b_i (-\lambda)^{s+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^{s+1+i-2i} b_i (-\lambda)^{s+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{s+1} b_i \lambda^{s+1-i} \end{aligned}$$

A.1. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.19)

et

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{s-1} & a_s \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{s+1} & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Ensuite, en développant D_1 suivant les éléments de la colonne $(s + 2)$, on trouve

$$D_1 = (-1)^{2s+4}(-\lambda)D_{1,1} + (-1)^{2s+5}b_{s+1}D_{1,2} = -\lambda D_{1,1} - b_{s+1}D_{1,2},$$

où $D_{1,1}$ et $D_{1,2}$ sont donnés par

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{s-1} & a_s \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = P_{\{1,s\}}(\lambda)$$

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

et

$$D_{1,2} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{s-1} & a_s \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^s (-1)^{s+3+i} a_i (-\lambda)^{s-i} = - \sum_{i=0}^s a_i \lambda^{s-i}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_{\{1,s+1\}}(\lambda) &= -a_{s+1} \sum_{i=0}^{s+1} b_i \lambda^{s+1-i} + \lambda^2 P_{\{1,s\}}(\lambda) - \lambda b_{s+1} \sum_{i=0}^s a_i \lambda^{s-i} \\ &= -a_{s+1} \sum_{i=0}^{s+1} b_i \lambda^{s+1-i} + \lambda^2 \left(\lambda^{2s+2} - \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_i b_j \lambda^{2s-i-j} \right) - \lambda b_{s+1} \sum_{i=0}^s a_i \lambda^{s-i} \\ &= \lambda^{2s+4} - \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_i b_j \lambda^{2s+2-i-j} - \sum_{i=0}^s (a_{s+1} b_i + b_{s+1} a_i) \lambda^{s+1-i} - a_{s+1} b_{s+1} \\ &= \lambda^{2(s+1)+2} - \sum_{i=0}^{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} a_i b_j \lambda^{2(s+1)-i-j}. \end{aligned}$$

D'où, (A.1) est vraie pour $s + 1$ et donc elle est vraie pour tout $s \in \mathbb{N}$. ■

A.2 Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

Proposition A.2.1 *Considérons le Système (1.26), $F_j^{(2)}$ est la matrice Jacobienne au point d'équilibre (\bar{x}_2, \bar{y}_2) donnée par (1.30) et (1.31). Alors, le polynôme caractéristique associé est de la forme*

$$P_{\{2,s\}}(\lambda) = \lambda^{2s+2} - (a_p + d_p) \lambda^{2s-p+1} + a_p d_p \lambda^{2(s-p)} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2s-i-j}, \quad (\text{A.2})$$

avec $s = \max\{p, k\}$.

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

Preuve. Prouvons par récurrence que (A.2) est vraie pour tout $s \in \mathbb{N}$. Evidemment, pour $s = p = k = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 \\ c_0 & d_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_0 + d_0)\lambda + a_0d_0 - c_0b_0 = P_{\{2,0\}}(\lambda).$$

Supposons maintenant que cette propriété est vraie jusqu'à s et montrons qu'elle est aussi vraie pour $s + 1$.

Traitons en premier le cas $k < p$. On a alors

$$P_{\{2,p+1\}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{p+1} & b_0 & \dots & b_k & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & \dots & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{p+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

développons ce déterminant suivant la colonne $(p + 2)$, nous obtenons

$$P_{\{2,p+1\}}(\lambda) = (-1)^{p+3}a_{p+1}I_0 + (-1)^{2p+4}(-\lambda)I_1 = (-1)^{p+1}a_{p+1}I_0 - \lambda I_1,$$

où I_0 et I_1 sont les deux déterminants suivants

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

$$I_0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -\lambda & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & \dots & 0 & -\lambda & \ddots & 0 & \dots & 0 & d_{p+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \ddots & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

et

$$I_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_k & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & \dots & 0 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{p+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \ddots & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Ensuite, en développant I_0 par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$I_0 = (-1)^{3p+5} d_{p+1} I_{0,1} + (-1)^{4p+6} (-\lambda) I_{0,2} = (-1)^{p+1} d_{p+1} I_{0,1} - \lambda I_{0,2},$$

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

avec

$$I_{0,1} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -\lambda & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et

$$I_{0,2} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -\lambda & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & \dots & 0 & -\lambda & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{p+1}.$$

Développons aussi I_1 par rapport à la dernière colonne,

$$I_1 = (-1)^{3p+5} d_{p+1} I_{1,1} + (-1)^{4p+6} (-\lambda) I_{1,2} = (-1)^{p+1} d_{p+1} I_{1,1} - \lambda I_{1,2},$$

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

avec

$$I_{1,1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_k & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)^{p+1}$$

et

$$I_{1,2} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_k & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & \dots & 0 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = P_{\{2,p\}}(\lambda), \text{ avec } a_p = d_p = 0.$$

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 P_{\{2,p+1\}}(\lambda) &= a_{p+1}d_{p+1} + (-1)^{p+1}a_{p+1}(-\lambda)(-\lambda)^{p+1} + (-\lambda)(-1)^{p+1}d_{p+1}(-\lambda)^{p+1} + \lambda^2 P_{\{2,p\}}(\lambda) \\
 &= a_{p+1}d_{p+1} - a_{p+1}\lambda^{p+2} - d_{p+1}\lambda^{p+2} + \lambda^2 \left(\lambda^{2(p+1)} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2p-i-j} \right) \\
 &= \lambda^{2(p+1)+2} - (a_{p+1} + d_{p+1})\lambda^{p+2} + a_{p+1}d_{p+1} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2(p+1)-i-j},
 \end{aligned}$$

et comme désiré, la propriété est vraie pour $s + 1$ dans ce cas.

A présent, on prouve pour le cas $k \geq p$. On a

$$P_{\{2,k+1\}}(\lambda) = \begin{vmatrix}
 -\lambda & 0 & \dots & a_p & \dots & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_p & \dots & b_k & b_{k+1} \\
 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 c_0 & c_1 & \dots & c_p & \dots & c_k & c_{k+1} & -\lambda & \dots & d_p & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & -\lambda & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda
 \end{vmatrix},$$

en développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière colonne, on obtient

$$P_{\{2,k+1\}}(\lambda) = (-1)^{2k+5}b_{k+1}L_0 + (-1)^{4k+8}(-\lambda)L_1 = -b_{k+1}L_0 - \lambda L_1,$$

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

avec

$$L_0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_p & \dots & c_k & c_{k+1} & -\lambda & \dots & d_p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \\ c_0 & c_1 & \dots & c_k & c_{k+1} \end{vmatrix},$$

donc

$$L_0 = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+3+i} c_i (-\lambda)^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} c_i \lambda^{k+1-i}$$

et

$$L_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & a_p & \dots & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_p & \dots & b_k \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_p & \dots & c_k & c_{k+1} & -\lambda & \dots & d_p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Ensuite, en développant L_1 suivant les éléments de la colonne $(k+2)$, on trouve

$$L_1 = (-1)^{2k+4} (-\lambda) L_{1,1} + (-1)^{2k+5} c_{k+1} L_{1,2} = -\lambda L_{1,1} - c_{k+1} L_{1,2},$$

A.2. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.26)

où $L_{1,1}$ et $L_{1,2}$ sont donnés par

$$L_{1,1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & a_p & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_p & \dots & b_k \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_0 & c_1 & \dots & c_p & \dots & c_k & -\lambda & \dots & d_p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = P_{\{2,k\}}(\lambda)$$

et

$$L_{1,2} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & a_p & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_p & \dots & b_k \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^{k+3+i} b_i (-\lambda)^{k-i}$$

$$= - \sum_{i=0}^k b_i \lambda^{k-i}.$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

Alors

$$\begin{aligned}
P_{\{2,k+1\}}(\lambda) &= -b_{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} c_i \lambda^{k+1-i} + \lambda^2 P_{\{2,k\}}(\lambda) - \lambda c_{k+1} \sum_{i=0}^k b_i \lambda^{k-i} \\
&= -b_{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} c_i \lambda^{k+1-i} + \lambda^{2k+4} - (a_p + d_p) \lambda^{2k-p+3} + a_p d_p \lambda^{2(k-p)+2} - \\
&\quad \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2k-i-j+2} - c_{k+1} \sum_{i=0}^k b_i \lambda^{k+1-i} \\
&= \lambda^{2k+4} - (a_p + d_p) \lambda^{2k-p+3} + a_p d_p \lambda^{2(k-p)+2} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k c_i b_j \lambda^{2k-i-j+2} \\
&\quad - \sum_{i=0}^k (b_{k+1} c_i + c_{k+1} b_i) \lambda^{k+1-i} - b_{k+1} c_{k+1} \\
&= \lambda^{2(k+1)+2} - (a_p + d_p) \lambda^{2(k+1)-p+1} + a_p d_p \lambda^{2(k+1)-p} - \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} c_i b_j \lambda^{2(k+1)-i-j}.
\end{aligned}$$

D'où, la propriété est vraie pour $s + 1$ dans ce cas aussi. En conclusion, elle est vraie pour tout $s \in \mathbb{N}$. ■

A.3 Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

Proposition A.3.1 *Considérons le Système (1.34), $F_j^{(3)}$ est la matrice Jacobienne au point d'équilibre (\bar{x}_3, \bar{y}_3) donnée par (1.36) et (1.37). Alors, le polynôme caractéristique associé est de la forme*

$$P_{\{3,p\}}(\lambda) = \lambda^{2p+2} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2p-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2p-i-j} - c_p b_p, \quad \text{si } k \leq p, \quad (\text{A.3})$$

et

$$P_{\{3,k\}}(\lambda) = \lambda^{2k+2} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2k-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2k-i-j} - c_p b_p \lambda^{2(k-p)}, \quad \text{si } k \geq p. \quad (\text{A.4})$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

Preuve. Premièrement, supposons que $k \leq p$ et montrons par récurrence que (A.3) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour $p = k = 0$, on a

$$P_{\{3,0\}}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 \\ c_0 & d_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_0 + d_0)\lambda + a_0d_0 - c_0b_0.$$

Pour $p = 1$ et $k = 0$, on a

$$P_{\{3,1\}}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & d_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - (a_0 + d_0)\lambda^3 + a_0d_0\lambda^2 - c_1b_1.$$

Supposons maintenant que la propriété est vraie jusqu'à p et montrons qu'elle est aussi vraie pour $p + 1$. On a

$$P_{\{3,p+1\}}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & \dots & a_k & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{p+1} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{p+1} & d_0 - \lambda & \dots & d_k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière colonne, on obtient

$$P_{\{3,p+1\}}(\lambda) = (-1)^{2p+5}b_{k+1}H_0 + (-1)^{4p+8}(-\lambda)H_1 = -b_{k+1}H_0 - \lambda H_1,$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

avec

$$H_0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{p+1} & d_0 - \lambda & \dots & d_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = c_{p+1}$$

et

$$H_1 = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & \dots & a_k & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{p+1} & d_0 - \lambda & \dots & d_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Ensuite, en développant H_1 suivant les éléments de la colonne $(p + 2)$, on trouve

$$H_1 = (-1)^{2p+4}(-\lambda)H_{1,1} + (-1)^{2p+5}c_{k+1}H_{1,2} = -\lambda H_{1,1} - c_{k+1}H_{1,2},$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

où $H_{1,1}$ et $H_{1,2}$ sont donnés par

$$H_{1,1} = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & \dots & a_k & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_0 - \lambda & \dots & d_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = P_{\{3,p\}}(\lambda), b_p = c_p = 0$$

et

$$H_{1,2} = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & \dots & a_k & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\lambda & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_{\{3,p+1\}}(\lambda) &= -c_{p+1}b_{p+1} + \lambda^2 P_{\{3,p\}}(\lambda) \\ &= -c_{p+1}b_{p+1} + \lambda^2 \left(\lambda^{2p+2} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2p-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2p-i-j} \right) \\ &= \lambda^{2p+4} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2(p+1)-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2(p+1)-i-j} - c_{p+1}b_{p+1}, \end{aligned}$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

ce qui montre que (A.3) est vraie pour $p + 1$ et donc elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

A présent, on traite le cas $k > p$, c'est à dire on montre que que (A.4) est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 1$ et $p = 0$, on a

$$\begin{aligned}
 P_{\{3,1\}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & b_0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & d_0 - \lambda & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^4 - (a_0 + d_0)\lambda^3 - (a_1 + d_1)\lambda^2 + a_0d_0\lambda^2 + (a_1d_0 + a_0d_1)\lambda + a_1d_1 - c_0b_0\lambda^2 \\
 &= \lambda^4 - \sum_{i=0}^1 (a_i + d_i)\lambda^{3-i} + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_id_j\lambda^{2-i-j} - c_0b_0\lambda^2.
 \end{aligned}$$

Pour $k = 2$ et $p = 1$, on a

$$\begin{aligned}
 P_{\{3,2\}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & a_2 & 0 & b_1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_0 - \lambda & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^6 - (a_0 + d_0)\lambda^5 + (a_0d_0 - a_1 - d_1)\lambda^4 + (a_0d_1 + a_1d_0 - a_2 - d_2)\lambda^3 \\
 &\quad + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0 - c_1b_1)\lambda^2 + (a_1d_2 + a_2d_1)\lambda + a_2d_2 \\
 &= \lambda^6 - \sum_{i=0}^2 (a_i + d_i)\lambda^{5-i} + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_id_j\lambda^{4-i-j} - c_1b_1\lambda^2.
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour k et montrons qu'elle est aussi vraie pour $k + 1$. On a

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

$$P_{\{3,k+1\}} = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & \dots & a_p & \dots & a_k & a_{k+1} & 0 & \dots & b_p & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_p & \dots & 0 & 0 & d_0 - \lambda & \dots & d_p & \dots & d_k & d_{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En bref, en développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne et ensuite la colonne $(k + 2)$, on obtient

$$P_{\{3,k+1\}} = a_{k+1}d_{k+1} + (-1)^{k+1}(-\lambda)d_{k+1}J_0 + (-1)^{k+1}(-\lambda)a_{k+1}J_1 + \lambda^2P_{\{3,k\}}(\lambda),$$

avec

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_0 - \lambda)(-\lambda)^k + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+2} a_i (-\lambda)^{k-i} \\ &= (-\lambda)^{k+1} + \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i (-\lambda)^{k-i} \end{aligned}$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

et

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_p & \dots & 0 & d_0 - \lambda & \dots & d_p & \dots & d_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On calcule J_1 suivant les éléments de la ligne $(k+2)$ on trouve que

$$J_1 = (-1)^{k+p+3} c_p J_{1,1} + (-\lambda)^{k+1} + \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i (-\lambda)^{k-i},$$

où

$$J_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A.3. Calcul du polynôme caractéristique associé au système linéarisé du Système (1.34)

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P_{\{3,k+1\}}(\lambda) &= a_{k+1}d_{k+1} + (-1)^{k+1}(-\lambda)d_{k+1} \left((-\lambda)^{k+1} + \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i (-\lambda)^{k-i} \right) \\
&\quad + (-1)^{k+1}(-\lambda)a_{k+1} \left((-\lambda)^{k+1} + \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i (-\lambda)^{k-i} \right) + \lambda^2 P_{\{3,k\}}(\lambda) \\
&= a_{k+1}d_{k+1} - d_{k+1}\lambda^{k+2} + \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i+1} a_i d_{k+1} (-\lambda)^{k-i+1} - a_{k+1}\lambda^{k+2} \\
&\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i+1} a_{k+1} d_i (-\lambda)^{k-i+1} + \lambda^{2k+4} - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2k-i+3} \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2k-i-j+2} - c_p b_p \lambda^{2(k-p)+2} \\
&= a_{k+1}d_{k+1} - (d_{k+1} + a_{k+1})\lambda^{k+2} + \sum_{i=0}^k (a_i d_{k+1} + a_{k+1} d_i) \lambda^{k-i+1} + \lambda^{2(k+1)+2} \\
&\quad - \sum_{i=0}^k (a_i + d_i) \lambda^{2(k+1)-i+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_i d_j \lambda^{2(k+1)-i-j} - c_p b_p \lambda^{2(k-p+1)} \\
&= \lambda^{2(k+1)+2} - \sum_{i=0}^{k+1} (a_i + d_i) \lambda^{2(k+1)-i+1} + \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} a_i d_j \lambda^{2(k+1)-i-j} - c_p b_p \lambda^{2(k+1-p)}.
\end{aligned}$$

Alors, (A.4) est vraie pour $k + 1$ et donc elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Abo-Zeid, *Global attractivity of a higher-order difference equation*, Discrete Dyn. Nat. Soc., Article ID 930410 (2012), 11 pages.
- [2] R. Abo-Zeid, *Global behavior of a higher order difference equation*, Math. Slovaca, 64(2014), 931-940.
- [3] R. M. Abu-Saris, R. Devault, *Global stability of $y_{n+1} = \alpha + \frac{y_n}{y_{n-k}}$* , Appl. Math. Lett., 16(2003), 173-178.
- [4] R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities, theory, methods and applications*, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.
- [5] L. J. S. Allen, M. K. Hannigan, M. J. Strauss, *Mathematical analysis of a model for plant-herbivore system*, Bull. Math. Biol., 55(4)(1993), 847-864.
- [6] L. J. S. Allen, M.K. Hannigan, M. J. Strauss, *Development and analysis of mathematical model for a plant-herbivore system*, In proceeding of the first world congress on world congress of nonlinear analysts, WCNA92, 4(1995), 3723-3732.
- [7] L. J. S. Allen, M. J. Strauss, H. G. Tnorvilson, W. N. Lipe, *A preliminary mathematical model of the apple twig borer (Coleoptera :Bostricida) and grapes on the Texas high planes*, Ecol. Model., 58(1991), 369-382.
- [8] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Periodic solutions for nonlinear neutral difference equations with variable delay*, Electron. J. Math. Analysis Appl., 1(2013), 285-293.

- [9] V. Avanişşian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1996.
- [10] E. Camouzis, G. Ladas, *Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*, Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [11] J. Chu, D. O'Regan, *Positive periodic solutions of system of functional difference equations*, Commun. Appl. Anal., 12(2008), 235-244.
- [12] E. Y. Deeba, A. de Korvin, *Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO₂ level in the blood*, Appl. Math. Lett., 12(1999), 33-40.
- [13] I. Dekkar, N. Touafek , Y. Yazlik, *Global stability of a third-order nonlinear system of difference equations with period-two coefficients*, RACSAM, 111(2017), 325-347.
- [14] I. Dekkar, N. Touafek, *Existence and global attractivity of periodic solutions in a max-type system of difference equations*, Turk. J. Math., 41(2017), 412-425.
- [15] Q. Din, *Global stability of a population model*, Chaos, Soliton. Fract., 59(2014), 119-128.
- [16] Q. Din, *Dynamics of a discrete Lotka-Volterra model*, Adv. Difference Equ., Article 95(2013), 13 pages.
- [17] Q. Din, *Global behavior of a plant-herbivore model*, Adv. Difference Equ., Article 119(2015), 12 pages.
- [18] P. Dolbeault, *Analyse complexe, Collection maîtrise de mathématiques pures*, Masson, Paris, 1990.
- [19] S. Elaydi, *An introduction to difference equations, undergraduate texts in mathematics, 3rd edition*, Springer, New York, USA, 2005.
- [20] S. Elaydi, R. Sacker, *Periodic difference equations, population biology and theushing-henson conjectures*, Math. Biosci., 201(2006), 195-207.
- [21] E. M. Elabbasy, E. M. Elsayed, *On the global attractivity of difference equation of higher order*, Carpathian J. Math., 24(2)(2008), 45-53.
- [22] E. M. Elabbasy, S. M. Eleissawy, *Global behavior of a higher order rational difference equation*, Fasc. Math., 53(2014), 39-52.

- [23] E. M. Elsayed, *On the global attractivity and the periodic character of a recursive sequence*, Opuscula Math., 30(2010), 431-446.
- [24] E. M. Elsayed, *On the global attractivity and the solution of recursive sequence*, Stud. Sci. Math. Hung., 47(2010), 401-418.
- [25] H. El-Metwally, *Global behavior of an economic model*, Chaos, Soliton. Fract., 33(2007), 994-1005.
- [26] N. Fotiades, G. Papaschinopoulos, *On a system of difference equations with maximum*, Appl. Math. Comput. 221(2013), 684-690.
- [27] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Chapman & Hall/CRC, 2005.
- [28] D. D. Hai, C. Qian, *Global attractivity in nonlinear difference equations of higher order with a forcing term*, Appl. Math. Comput. 264(2015) 198-207.
- [29] Y. Hamaya, *Existence of almost periodic solutions of discrete Ricker delay models*, Int. J. Difference Equ., 9(2)(2014), 187-205.
- [30] Y. Hamaya, T. Tanaka, *Existence of periodic solutions of discrete Ricker delay models*, Int. J. Math. Analysis, 8(19)(2014), 939-950.
- [31] A. E. Hamza, A. M. Ahmed , A. M. Youssef, *On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{a+bx_n}{A+Bx_{n-1}^k}$* , Arab J. Math. Sci., 17(2011), 31-44.
- [32] L. X. Hu, W. S. He, H. M. Xia, *Global asymptotic behavior of a rational difference equation*, Appl. Math. Comput., 218(2012), 7818-7828.
- [33] L. X. Hu, H. M. Xia, *Global asymptotic stability of a second order rational difference equation*, Appl. Math. Comput., 233(2014), 377-382.
- [34] T. F. Ibrahim, *Boundedness and stability of a rational difference equation with delay*, Rev. Roum. Math. Pure A., 57(2012), 215-224.
- [35] W. G. Kelley, A. C. Peterson. *Difference equations, an introduction with applications*, Academic Press, New York, 1991.
- [36] C. M. Kent, M. A. Radin, *On the Boundedness of positive solutions of a reciprocal max-type difference equation with periodic parameters*, Int. J. Difference Equ., 8(2)(2013), 195-213.

- [37] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993..
- [38] V. L. Kocic, G. Ladas, L. W. Rodrigues , *On rational recursive sequences*, J. Math. Anal. Appl., 173(1993), 127-157.
- [39] V. L. Kocic, *A note on the nonautonomous delay Beverton-Holt model*, J. Biol. Dyn., 4(2)(2010), 131-139
- [40] M. R. S. Kulenovic, G. Ladas, *Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [41] V. Lakshmikantham, D. Trigiante. *Theory of difference equations, numerical methods and applications*, Marcel Dekker, Inc, 2002.
- [42] M. Mesliza, O. Osman. *Positive periodic solutions of singular first-order functional difference equation*, Int. J. Math. Anal. Ruse, 6(2012), 2665-2675.
- [43] R. E. Mickens, *Difference equations, theory and applications*, Van Nostrand, Rheinhold, 1990.
- [44] I. Ozturk, F. Bozkurt, S. Ozen, *On the difference equation $y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + y_{n-1}}$* , Appl. Math. Comput., 181(2006), 1387-1393.
- [45] G. Papashinopoulos, M. Radin, C. J. Shinas, *Study of the asymptotic behaviour of the solutions of three systems of difference equations of exponential form*, Appl. Math. Comput., 218(2012), 5310-5318.
- [46] M. Pituk, *More on Poincaré's and Peron's theorems for difference equations*, J. Difference Equ. Appl., 8(2002), 201-216.
- [47] E. P. Popov, *Automatic regulation and control*, (in Russian), Moscow, 1966.
- [48] C. Qian, *Global attractivity of periodic solutions in a higher order difference equations*, Appl. Math. Lett., 26(2013), 578-583.
- [49] C. Qian, *Global attractivity in a nonlinear difference equation and applications to a biological model*, Int. J. Difference Equ., 9(2014), 233-242.
- [50] Y. N. Raffoul, E. Yankson, *Positive periodic solutions in neutral delay difference equations*, Adv. Dyn. Syst. Appl., 5(2010), 123-130.

- [51] Y. N. Raffoul, C. C. Tisdell, *Positive periodic solutions of functional discrete systems and population models*, Adv. Difference Equ., 3(2005), 369-380.
- [52] T. Sauer, *Global convergence of max-type equations*, J. Difference Equ. Appl., 17(2011), 1-8.
- [53] H. Sedaghat, *Nonlinear difference equations : Theory with applications to social science models*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2003.
- [54] S. Stević, *On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\{c, x_n^p/x_{n-1}^p\}$* . Appl. Math. Lett., 21(2008), 791-796.
- [55] S. Stević, *Periodicity of a class of nonautonomous max-type difference equations*, Appl. Math. Comput., 217(2011), 9562-9566.
- [56] S. Stević, *Global stability of a difference equation with maximum*, Appl. Math. Comput., 210(2009), 525-529.
- [57] S. Stević, *On a generalized max-type difference equation from automatic control theory*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 72(2010), 1841-1849.
- [58] S. Stević, *On a discrete epidemic model*, Discrete Dyn. Nat. Soc., Article ID 87519 (2007), 10 pages.
- [59] S. Stević, *On periodic solutions of a class of k-dimensional systems of max-type difference equations*, Adv. Difference Equ., 251(2016), doi : 10.1186/s13662-016-0977-1
- [60] S. Stević, A. M. Alghamdi, A. Alotaibi, N. Shahzad, *Boundedness character of a max-type system of difference equations of second order*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Article 45(2014), 12 pages.
- [61] T. H. Thai, V. V. Khuong, *Global asymptotic stability of a second-order system of difference equations*, Indian J. Pure Appl. Math., 45(2)(2014), 185-198.
- [62] D. T. Tollu, Y. Yazlik, N. Taskara, *On fourteen solvable systems of difference equations*, Appl. Math. Comput., 233(2014), 310-319.
- [63] N. Touafek, *On a second order rational difference equation*, Hacet. J. Math. Stat., 41(2012), 867-874.

BIBLIOGRAPHIE

- [64] W. Wang, X. Yang, *Positive periodic solutions for neutral functional difference equations*, Int. J. Difference Equ., 7(2012), 99-109.
- [65] J. Wu, Y. Liu, *Two periodic solutions of neutral difference equations modelling physiological processes*, Discrete Dyn. Nat. Soc., Article ID 78145(2006), 12 pages.
- [66] H. Zhu, W. Wang, *Periodic solutions for a class of higher order difference equations*, Adv. Difference Equ., Article 66(2011), 7 pages.