République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatiques
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques.

Spécialité : probabilités et statistiques.

Thème

Étude comparative des méthodes d'estimation du processus AR(p)

Présenté par :

- Boutaleb Bouchra.
– Boughalem Nada.

Devant le jury :

Présidente	: Abdi Zineb	Maître Assistante Université de Jijel
Encadreur	: Sellami Nawel	Maître Assistante Université de Jijel
Examinatrice	: Ghouil Djoweyda	Maître Assistante Université de Jijel
Examinatrice	:Dr Chekraoui Laoudj Farida	Maîtresse de conférence A Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Table des matières

Liste des tableaux

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Dieu qui nous a permi de comprendre une infirme partie de sa science.

Nous présentons nos sincères remerciements à notre encadreur Madame Sellami Nawel, pour la confiance et la sympathie qu'elle nous a accordé . merci de nos avoir guidé, encouragé et conseillé tout au long de ce travail

Nous tenons à remercier en particulier notre Madame Abdi Zineb qui nous a honoré et accepté de présider ce jury .

Nous tenons à remercier aussi les membres du jury madame Ghouil Djoweyda et Chekraoui Laoudj Farida d'avoir jugé ce travail.

Nous nous inclinons respectueusement devant les deux êtres à qui nous devant notre existence, nos pères et nos mères. Nous leurs exprimons nos profonds signes de reconnaissance et d'obéissance pour tous les efforts qu'ils ont fournis et tous les sacrifices qu'il ont généreusement fait, pour que nous grandissons dans de parfaites conditions d'amour, de satisfaction et d'épanouissement. C'est à eux que nous dédions le résultat de notre travail ainsi qu'à la mémoire de tous nos frères et sœurs.

Enfin nous n'oublions pas de remercier toute personne qui nous a aimé, aidé, soutenu. avec eux, nous avons partagé des moments agréables et inoubliables.

Résumé

L'objectif du présent mémoire consiste à étudier les problèmes de l'estimation des paramètres de processus linéaire gaussien auto-régressif à partir d'une suite de n observation. L'un des problèmes rencontrés est celui d'exprimer la fonction de vraisemblance . Pour cela, on élabore deux méthodes.

La première, utilisant la décomposition de Cholesky qui nous a permis de trouver la forme analytique de l'estimateur.

La deuxième méthode utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz, basée essentiellement sur le calcul de l'inverse de la matrice d'auto-covariance et son déterminant.

Et enfin, on valide les résultats par des programmes de simulation. Une étude comparative entre les performances des estimateurs du maximum de vraisemblance développés dans ce mémoire et ceux de Yule-Walker sera mis en œuvre.

Mots-clés :

Séries chronologiques- Processus aléatoires- Processus AR(p)- Matrice de Toeplitz- La fonction de vraisemblance- Estimateur de maximum de vraisemblance- Décomposition de Cholesky- La méthode de yule-walker.

Abstract

The purpose of This Work Is to present the different methods for expressing the likelihood of a self-regressive Gaussian linear process for use in estimating model parameters from a series of n observations. we know that the calculation of the likelihood function is never simple. For it, two methods are developed.

The first, using the Cholesky decomposition that allowed us to find the analytic form of the estimator.

The second method using the inverse of the Toeplitz matrix, based on essentially on the calculation of the inverse of the auto-covariance matrix and its determinant.

finally, we validate the results by simulation programs. A comparative study between the performances of the maximum likelihood developed in this memoir and those of Yule-Walker will be implemented.

Keywords :

Time Series - Random Processes - AR(p) process - Matrix of Toeplitz- The likelihood function- Maximum likelihood estimator- Cholesky decomposition - yule-walker method.

Introduction générale

l'un des axes de recherche fondamentale en statistique est la création des modèles pour expliquer le comportement de phénomènes aléatoires, comprendre le hasard et réduire les incertitudes. Les processus aléatoires ont ainsi fourni des modèles pour analyser de nombreuses données issues de l'économie(1971), la biologie(1960), la théorie du signal (1963), la météorologie(1968) et l'astronomie (1906).

Le travail que nous présentons dans le cadre de cette étude, concerne une classe particulière de processus linéaires stationnaires auto-régressifs très employée. Cette classe construit à partir de l'idée que l'observation au temps t s'explique linéairement par les observations précédentes. Nous nous intéressons principalement au problème d'estimation des paramètres de processus linéaire gaussien auto-régressif AR(p) à partir d'une suite de n observations. Diverses méthodes d'estimations des paramètres inconnus peuvent être utilisées. Parmi ces méthodes, Yule-Walker et le Maximum de Vraisemblance. Yule-Walker est une méthode auto-régressive qui consiste à reprendre les équations de Yule-Walker en inversant les relations, pour exprime les coefficients en fonction des auto-covariances. Maximum de Vraisemblance est consiste à chercher les valeurs pour ces paramètres qui maximisent la fonction de vraisemblance. Mais cette méthode est délicate car la fonction de vraisemblance est très complexe et n'a pas de dérivée analytique à cause du calcul de l'inverse de la "grosse" matrice d'auto-covariance et son déterminant.

Le premier chapitre est intitulée " présentation des notions de base en séries chronologiques" par la suite nous donnons des propriétés mathématiques des modèles auto-régressifs, la définition de la matrice de Toeplitz et l'étude de ces propriétés. On a suggéré aussi une méthode de Xiao-Guang Lv, Ting-zhu Huang, qui propose l'inverse d'une matrice de Toeplitz et l'Algorithme de cholesky .

Le seconde chapitre intitulé "estimation des paramètres d'un modèle auto-régressif, nous avons abordé l'étude de l'estimation obtenue à partir de la vraisemblance exacte,premièrement il s'agit de construire les équations de Yule-Walker,elle sont utiles pour estimer les paramètres. deuxièmement il s'agit de construire la fonction de vraisemblance , puis on trouver l'estimateur qui maximise cette fonction de vraisemblance, mais la maximisation et même le calcul de cette vraisemblance étaient relativement difficile, en particulier à cause du calcul de l'inverse de la matrice d'auto-covariance et son déterminant, surtout lorsque n devient relativement grand. Pour résoudre ce problème, on utilise deux méthodes :

1. La méthode utilisant la décomposition de Cholesky qui nous a permis de trouver la forme analytique de l'estimateur.

2. La méthode utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz basée essentiellement sur le calcul de l'inverse de la matrice d'auto-covariance, nous utilisons le théorème de Xiao-Guang Lv, Ting-zhu Huang, et avec cette dernière nous obtenons l'expression explicite de la fonction de vraisemblance est la même de celle de Cholesky, mais la maximisation de la vraisemblance étant réalisée par des méthodes numériques.

Dans le dernier chapitre on propose une illustration numérique sur un exemple, à partir d'un échantillon aléatoire simple d'une loi normale, à partir de 5 réalisations. Par la suite nous étudions les propriétés asymptotiques de l'estimateur obtenu de chaque méthode et une étude comparative entre les performances des estimateurs du maximum de vraisemblance et ceux de Yule-Walker seront mis en œuvre.

Chapitre 1

Préliminaires

Une série chronologique est un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, où t représente le temps. Dans ce chapitre, plusieurs concepts importants liés à l'analyse de séries chronologiques seront abordés. Parmi ceux-ci, on retrouve les notions d'auto-corrélation[9], de stationnarité[20] et de bruit blanc[13]. On énoncera également l'étude d'une famille de processus linéaires stationnaires plus précisément la classe des processus auto-régressifs, nous nous intéressons aux propriétés et la forme théorique des différents moments d'un processus AR(p), et aussi on donne la définition de la matrice de Toeplitz.on présentera également la méthode, proposée par Xiao-Guanglv et Ting-Zhu Hang [21] de l'inversion d'une matrice de Toeplitz. Enfin on donne la définition de la matrice de cholesky et son Algorithme.

1.1 Notions de base en séries chronologiques

1.1.1 La fonction d'auto-covariance

Définition 1.1. *La fonction d'auto-covariance mesure la covariance entre deux valeurs X_t et X_{t+h}, elle fournit des informations sur l'évaluation de la série et sur la liaison temporelle pouvant exister entre les différentes composantes de la série. La fonction d'auto-covariance $\gamma(h)$ d'un processus stationnaire X_t est définie comme suit :*

$$\forall h \in Z : \gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) = E[(X_{t+h} - E(X_{t+h}))(X_t - E(X_t))] \tag{1.1}$$

Propriétés 1.2. *La fonction d'auto-covariance vérifie les propriétés suivantes :*
i) $\gamma(0) = cov(X_t, X_t) = E[(X_t - E(X_t)^2)] = var(X_t) \geq 0.$
ii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ *(L'inégalité Cauchy-Shwartz).*
iii) $\gamma(h) = \gamma(-h)$ *(symétrique, fonction paire).*

1.1.2 La fonction d'auto-corrélation

1.1.2.1 La fonction d'auto-corrélation simple

Définition 1.3. *La fonction d'auto-corrélation d'un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$*, notée* ρ_h*, et définie par :*

$$\begin{aligned}\forall h \in Z : \rho_h &= Corr(X_{t+h}, X_t)\\ &= \frac{Cov(X_{t+h}, X_t)}{\sqrt{V(X_{t+h})V(X_t)}}\end{aligned} \tag{1.2}$$

Qui mesure le lien entre les valeurs du processus à deux dates distantes de h. Pour un processus stationnaire, ρ_h *prend une forme plus simple*

$$\begin{aligned}\rho_h &= \frac{Cov(X_{t+h}, X_t)}{\sqrt{V(X_t)}\sqrt{V(X_t)}}\\ &= \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \qquad avec \quad \rho_h \in [-1, 1]\end{aligned} \tag{1.3}$$

Remarque 1. *On peut tracer la courbe* $\rho_h = f(h)$ *qui est appelée corrélogramme.*

1.1.2.2 La fonction d'auto-corrélation partielle

Définition 1.4. *De même, on définit l'auto-corrélation partielle de retard h comme la corrélation entre* $(X_t - X_t^*)$ *et* $(X_{t-h} - X_{t-h}^*)$ *où* X_t^* *désigne la régression de* X_t *sur les (h-1) valeurs* $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-h+1}\}$ *:*

$$\begin{aligned}\tau_h &= Corr(X_t - X_t^*, X_{t-h} - X_{t-h}^*)\\ &= \frac{Cov(X_t - X_t^*, X_{t-h} - X_{t-h}^*)}{\sqrt{V(X_t - X_t^*)}\sqrt{V(X_{t-h} - X_{t-h}^*)}}\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$avec : X_t^* = \sum_{k=1}^{h-1} \alpha_k X_{t-k} \qquad , \qquad X_{t-h}^* = \sum_{k=1}^{h-1} \beta_k X_{t-k}$$

Où les α_k *et les* β_k *sont les coefficients des régressions.*

Corollaire 1.5. *La fonction d'auto-corrélation partielle d'un processus stationnaire* $(X_t)_{t\in Z}$ *satisfait la relation :*

$$\phi_{hh} = \frac{|\rho_h^*|}{|\rho_h|}, \quad \forall h \in N$$

avec

$$\rho_h = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_h^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \dots & \rho_h \end{pmatrix}$$

Remarque 2. *Les trois premières auto-corrélations partielles sont donc déterminées par les relations suivantes :*

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2) + \rho_3(1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}$$

Remarque 3. *En pratique, les* ρ_h *sont évidemment inconnues, mais sur une série* $\{X_t, 1 \leq t \leq n\}$, *on peut les estimer avec la formule naturelle suivante :*

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n}(X_t - \overline{X})(X_{t-h} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} \tag{1.5}$$

Où $\overline{X}$ *représente la moyenne des valeurs observées.*

1.1.3 La stationnarité

La stationnarité est une caractéristique d'une série chronologique, qui implique que le comportement de la série ne dépend pas du temps. En particulier, on dit q'une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stable si elle ne comporte pas de tendance et de saisonnalité. On distingue deux types de stationnarité : **La stationnarité stricte** et **la stationnarité faible**.

1.1.3.1 La stationnarité stricte

Si pour toute suite d'instants $t_1, t_2, ..., t_n$ il existe un entier h quelconque tel que la fonction de probabilité jointe f de $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ est identique à la fonction de probabilité jointe de $(X_{t_{1+h}}, X_{t_{2+h}}, ..., X_{t_{n+h}})$, telle que

$$f(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = f(X_{t_{1+h}}, X_{t_{2+h}}, ..., X_{t_{n+h}}).$$

1.1.3.2 La stationnarité faible

Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit stationnaire ou second ordre s'il vérifie les propriétés suivantes :
i) $\forall t \in \mathbb{Z} : E(X_t^2) < \infty.$
ii) $\forall t \in \mathbb{Z} : E(X_t) = \mu.$ indépendant de t .
iii) $\forall (t, h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : cov(X_{t+h}, X_t) = E[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)] = \gamma(h).$
Les deux premières propriétés signifient que la moyenne et la variance du processus sont indépendantes de l'instant auquelles elles mesurées, la troisième propriété signifie que la covariance ne dépend que du seul retard h.

1.1.4 Le processus Bruit Blanc

Le bruit blanc fait partie de la classe des processus stationnaires. Spécifiquement $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc si :
i) $E(\varepsilon_t) = 0.$
ii) $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty.$
iii) $\gamma_h = cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = 0$, pour tout $h \geq 1.$

1.1.5 Opérateur de retard

L'opérateur B décale le processus d'une unité de temps vers le passé, pour un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ l'opérateur de retard, noté B est défini par : $BX_t = X_{t-1}$ si on applique h fois cet opérateur, on décale le processus de h unités de temps :
$\underbrace{B(B(...B(X_t...)))}_{h\ fois} = B^h(X_t) = X_{t-h}.$

1.2 Présentation des processus auto-régressifs

Un processus auto-régressif est un processus de régression pour séries chronologiques dans lequel la série est expliquée par ses valeur passées, il n'est généralement pas nécessaire de prendre en compte tout le passé de la série et on peut le plus souvent se limiter à p valeurs.

1.2.1 Processus auto-régressif AR(1)

On appelle processus auto-régressif d'ordre 1, noté AR(1) un processus X_t vérifiant une relation du type :

$$P(B)X_t = C + \varepsilon_t \tag{1.6}$$

Où C est un constant et ε_t est un processus d'innovations qui satisfait les conditions $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ et P(B) est appelé polynôme caractéristique du degré 1 du processus X_t défini tel que :

$$P(B) = 1 - \phi B$$

En outre, l'équation (1.6) peut être écrite sous la forme suivante :

$$X_t = C + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1.7}$$

1.2.1.1 Les caractéristiques :

La stationnarité :
Le processus AR(1) est stationnaire si : toutes les racines du polynôme P(B) sont strictement supérieures à 1 en module 1.

La moyenne et la variance :
On a : $E(X_t) = E(X_{t-1}) = \mu$ et $X_t = C + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$
Alors :
$E(X_t) = \frac{C}{1-\phi_1}$ et $V(X_t) = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$
Par la suite, et uniquement pour simplifier les écritures, nous retirerons les écritures sur réalisations centrées (*ie* : $E(X_t) = 0$)

1.2.1.2 Auto-corrélation

Par itération On a :

$$\begin{aligned} X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t &= \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \vdots \\ &= \phi^h X_{t-h} + \sum_{k=0}^{h-1} \phi^k \varepsilon_{t-k} \end{aligned} \tag{1.8}$$

La fonction d'auto-covariance est :

$$\gamma_h = cov(X_t, X_{t-h}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h})))$$

Alors :
$\gamma_h = \phi^h E(X_{t-h}^2) = \phi^h V(X_{t-h})$
la fonction d'auto-corrélation est :

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \phi^h$$

1.2.2 Processus auto-régressif AR(2)

On appelle processus auto-régressif centré d'ordre 2, noté AR(2) un processus X_t vérifiant une relation du type :

$$P(B)X_t = \varepsilon_t \tag{1.9}$$

Où ε_t est un processus d'innovations qui satisfait les conditions $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ et P(B) est appelé polynôme caractéristique du degré 2 du processus X_t défini tel que :

$$P(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

En outre, l'équation (1.9) peut être écrite sous la forme suivante :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{1.10}$$

1.2.2.1 Les caractéristiques

La stationnarité :

Le processus AR(2) est stationnaire si :

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ -\phi_1 + \phi_2 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$$

Il est naturellement possible de travailler directement sur le processus AR(2) de moyenne nulle : $E(X_t) = 0$ et de variance : $V(X_t) = \sigma_X^2 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)((1-\phi_2)^2-\phi_1^2)}$

1.2.2.2 Auto-covariance

On a :

$$\gamma(h) = Cov(X_t X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) \tag{1.11}$$

On sait que

$E(X_t) = E(X_{t+h}) = 0$

Alors :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E((\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)X_{t+h}) \\ &= \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) \\ &= \begin{cases} \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2 & , \textit{pour} \quad h = 0 \\ \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) & , \textit{pour} \quad h = 1 \\ \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0) & , \textit{pour} \quad h = 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.12}$$

La résolution du système(1.12) nous donne :

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma(0)$$
$$\gamma(2) = \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2}\gamma(0)$$

Et on a :

$$\gamma(0) = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)((1-\phi_2)^2 - \phi_1^2)}$$

1.2.2.3 Auto-corrélation

On a :

$$\begin{aligned}\rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & h = 1 \\ \frac{\phi_1^2+\phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2} & h = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

1.2.3 Processus auto-régressif AR(p)

On appelle processus auto-régressif centré d'ordre p, noté AR(p) un processus X_t est centré vérifiant une relation du type :

$$P(B)X_t = \varepsilon_t \tag{1.13}$$

Où ε_t est un processus d'innovations qui satisfait les conditions $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ et P(B) est appelé polynôme caractéristique du degré p du processus X_t défini tel que :

$$\begin{aligned}P(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_P B^p \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k B^k\end{aligned}$$

En outre, l'équation (1.13) peut être écrite sous la forme suivante :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_P X_{t-p} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k (B^k X_t) \tag{1.14}$$

1.2.3.1 Les caractéristique

Condition de stationnarité :

Un processus AR(p) est stationnaire Si les racines de son équation caractéristique sont strictement supérieures à 1 en valeur absolue .

Les moments :

Les différents moments d'un processus stationnaire sont :

$E(X_t) = 0$

$V(X_t) = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = \phi_1\gamma_{h-1} + \phi_2\gamma_{h-2} + ... + \phi_p\gamma_{h-p}$

1.2.3.2 Auto-corrélation

On montre que les auto-corrélations sont solutions des équations Yule-Walker

$$\rho_h - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \rho_{h-k} = 0 \tag{1.15}$$

1.2.3.3 Auto-corrélation partielle

Dans au tel processus X_t et X_{t-p+1} sont indépendants conditionnellement aux valeurs intermédiaires $X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-p}$ et donc si $h > p \Longrightarrow \rho_h = 0$.
La valeur à la date t dépend des p dates précédentes et pas des autres . Cette propriété sert à l'identification des modèles et à déterminer l'ordre p d'un processus AR(p).

1.2.3.4 causalité des processus AR(p)

Définition 1.6. *Un processus AR(p) est dit causal lorsqu'il existe une suite de nombres k telle que :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty \quad et \quad X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t-k} \tag{1.16}$$

Nous pouvons à présent retenir de notre développement une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus AR(1) soit stationnaire et causal si $|\phi| < 1$: Observons également que la situation $|\phi| = 1$ ne fournit pas de solution stationnaire.
Le résultat suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité et de causalité des modèles auto-régressifs sur le comportement de l'opérateur P.

Proposition 1.7. *Le processus auto-régressif (1.13) est causal et stationnaire si et seulement si le polynôme en $z = P(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k z^k$ ("polynôme générateur") est tel que :$P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$. Les coefficients α_k apparaissant dans la représentation(1.16), sont déterminés par : $1 - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j = \frac{1}{P(z)} \quad , \quad |z| < 1$*

1.3 Les matrices de Toeplitz

Définition 1.8. *On appelle matrice de Toeplitz une matrice carrée T_n d'ordre $n \geq 1$ à coefficients réels telle que : $T_n(i.j)$ ne dépend que de $|i-j|$ et $T_n(i.j)$ est définie positive.*

En algèbre linéaire, une matrice de Toeplitz [9] *ou matrice à diagonales constantes est une matrice dont les coefficients sur une diagonale descendant de gauche à droite sont les mêmes.*[16]

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{1-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Si l'élément suite à l'intersection des ligne i et colonne j de T est noté $T_{i,j}$ alors on a :

$$T_{i,j} = a_{i-j}$$

Remarque 4. *La matrice d'auto-covariance d'un processus stationnaire est une matrice de Toeplitz.*

Propriétés 1.9.
i) La matrice de Toeplitz d'un processus stochastique stationnaire est hermitienne ; ie :$T^t = T$ *.*
ii) Si T *inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz .*
iii) Si une matrice de Toeplitz vérifie de plus $a_i = a_{i-n}$ *pour tout* $i = 1, ..., n-1$*, alors c'est une matrice circulante.*

1.3.1 L'inverse de la matrice de Toeplitz

Lemme 1.10. *Soit* $T = (a_{i-j})_{i,j=1}^{n}$ *une matrice de Toeplitz d'ordre* $(n \times n)$*. la matrice vérifie la formule suivante :*

$$K \times T - T \times K = f \times e_n^t - e_1 \times f^t \times J \tag{1.17}$$

Avec :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{n-1} - a_{-1} \\ \vdots \\ a_2 - a_{-n+2} \\ a_1 - a_{-n+1} \end{pmatrix}$$

Théorème 1.11. *Soit $T = (a_{i-j})_{i,j=1}^{n}$ est une matrice de Toeplitz d'ordre $(n \times n)$. Si chacun des systèmes suivants : $Tx = f$, $Ty = e_1$ a une solution $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$. Alors :*

1. *T est inversible .*
2. *$T^{-1} = T_1U_1 + T_2U_2$.*

Où :

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \dots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \dots & y_2 & y_1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_n & \dots & -x_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_n \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & x_n \\ x_n & \dots & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_n & \dots & y_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la démonstration voir [21]

Remarque 5. *soit la matrice de Toeplitz $T = (a_{i-j})_{i,j=1}^{n}$ on dit que T est circulante si seulement si les éléments de la matrice $T = (a_{i-j})_{i,j=1}^{n}$ sont de la forme suivante :$a_i = a_{i-1}$ pour tout $i = 1, ..., n-1$ ll est facile de voir que $f = 0$ ainsi $x = T^{-1}f = 0$. De (2) du* *théorème 1.11, nous obtenons.*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \dots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \dots & y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

Nous concluons que les inverses des matrices de Toeplitz circulantes sont des matrices de Toeplitz circulantes.

1.4 La décomposition de cholesky- Newbold

La factorisation de cholesky, nommée d'après **André-louis cholesky**, consiste pour une matrice symétrique définie positive V, a déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que : $V = LL^t$ à éléments positifs sont le diagonale .cette décomposition permet notamment de calculer la matrice inverse V^{-1} et de calculer le déterminant de V^{-1}

Théorème 1.12. *Si V est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que : $V = LL^t$, On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous positifs et la factorisation correspondante est alors unique.*

Algorithme :
On cherche la matrice L, telle que :

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

de l'égalité $V = LL^t$ et puisque $L_{pq} = 0 \quad si \quad 1 \leq p \leq q \leq n$ on déduit :
$v_{ij} = (LL^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}L_{jk} = \sum_{k=n}^{min(i,j)} L_{ik}L_{jk} \ , \quad 1 \leq i, j \leq n$
La matrice V étant symétrique, il suffit que les relations au-dessus soient vérifiées pour $i \leq j$. c'est-à-dire que les éléments L_{ij} de la matrice V doivent satisfaire :
$v_{ij} = \sum_{k=1}^{i} L_{ik}L_{jk} \quad , \quad 1 \leq i \leq j \leq n$
Pour $i = 1$, on détermine la première colonne de L
$v_{11} = L_{11}L_{11} \quad , \quad L_{11} = \sqrt{v_{11}}$

$v_{1j} = L_{11}L_{j1} \quad , \quad L_{j1} = \frac{v_{1j}}{L_{11}} \quad , \quad 2 \leq j \leq n$

On détermine la i-ème colonne de L $(2 \leq i \leq n)$, après avoir calculé les $(i-1)$ premières colonnes :

$v_{ii} = L_{i1}L_{i1} + ... + L_{ii}L_{ii} \quad , \quad L_{ii} = \sqrt{v_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$

$v_{ij} = L_{i1}L_{j1} + ... + L_{ii}L_{ji} \quad , \quad L_{ji} = \frac{v_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}L_{jk}}{L_{ii}} \quad , \quad i+1 \leq j \leq n$

Il résulte du théorème précédent qu'il est possible de choisir tous les éléments $L_{ii} > 0$ en assurant que toutes les quantités $v_{11}, ..., v_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2, ...$ sont positives . Après la présentation des notions de base, nous allons présenter le biais du paramètres estimés puis la racine de l'erreur quadratique moyenne :

1.5 Le biais

On définit le biais de la façon suivante :

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}_n) - \theta \tag{1.18}$$

On dit qu'un estimateur est sans biais si $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ et un estimateur sera asymptotiquement non biaisé si $\lim_{n \longrightarrow \infty} B(\hat{\theta}) = 0$

1.6 La racine de L'erreur quadratique moyenne

Elle permet de définir la qualité de l'estimateur au second degré.

$$REQM(\hat{\theta}_n) = \sqrt{EQM(\hat{\theta}_n)} = \sqrt{E((\hat{\theta}_n - \theta)^2)} \tag{1.19}$$

Si $\lim_{n \longrightarrow \infty}(REQM)$ alors l'estimateur est asymptotiquement consistant. Et le lien entre les trois mesures est :

$$REQM(\hat{\theta}_n) = \sqrt{Var(\hat{\theta}_n) + B(\hat{\theta}_n)^2} \tag{1.20}$$

Remarque 6. *Quand les deux expressions explicites pour*$REQM(\hat{\theta})$,$B(\hat{\theta})$ *ne sont pas disponibles, comme c'est le cas ici, on les estime par :*

$$B(\hat{\theta}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{\theta}_n^i - \theta \tag{1.21}$$

$$\widehat{REQM}(\hat{\theta}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} (\hat{\theta}_n^i - \theta)^2 \tag{1.22}$$

où $\hat{\theta}_n^1, ..., \hat{\theta}_n^r$ sont les estimateurs obtenus des différentes réalisations.

Chapitre 2

Estimation des paramètres d'un modèle auto-régressif

L'estimation des paramètres d'un modèle AR(p) lorsque l'ordre p est supposé connu peut se réaliser par différentes méthodes dans le domaine temporel. Dans ce chapitre nous abordons deux méthodes, celle de Yulle-Walker et de Maximum de Vraisemblance Exacte. Nous nous intéressons principalement à la méthode du Maximum de Vraisemblance basée sur deux étapes, il s'agit d'abord de construire la fonction de log-vraisemblance, ensuite de trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance qui maximise cette fonction de log-vraisemblance, mais la difficulté majeure dans l'évaluation de log-vraisemblance, réside dans la nécessite d'inverser la matrice de variance-covariance (Γ) de taille ($n \times n$), et de calculer son déterminant, qui n'est pas aussi simple, on est alors conduit à utiliser deux méthodes dans le cas où le modèle auto-régressif d'ordre 1 :

1. La méthode utilisant la décomposition de Cholesky :Newbold a proposé une autre expression de cette vraisemblance plus facile à calculer et qui nous a permis de trouver la forme analytique de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

2. La méthode utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz basée sur le théorème de (Xiao-Guang Lv, Ting-zhu Huang)[21]. Une fois l'inverse calculée, ainsi que son déterminant, on l'injecte dans l'expression de la fonction log-vraisemblance afin de calculer les estimateurs des paramètres d'un modèle AR(1).

2.1 La méthode de Yule-Walker

Les équations de Yule-Walker établissent une correspondance directe entre les paramètres du modèle et ses auto-covariances. Elles sont utiles pour déterminer la fonction d'auto-corrélation ou estimer les paramètres [5]. Considérons tout d'abord un processus auto-régressif d'ordre p causal et de moyenne nulle :

$$X_t = \sum_{k=1}^{p} \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t \qquad , \quad \varepsilon_t \sim W.N(0, \sigma^2) \tag{2.1}$$

En multipliant chaque membre de cette équation par X_{t-h}, $(h = 0, ..., p)$ et en prenant l'espérance de chaque côté, on obtient, pour le premier membre, la fonction d'auto-covariance :

$$E(X_t X_{t-h}) = \gamma(h) \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \phi_k E(X_{t-k} X_{t-h}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p} \gamma(k-h)\phi_k & si \quad h = 1, ..., p \\ \sum_{k=1}^{p} \gamma(k-h)\phi_k + \sigma^2 & si \quad h = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Car, par l'hypothèse de causalité du processus, on montre que $E(\varepsilon_t X_{t-h})$ s'annule sauf pour $h = 0$. En égalant (2.2) et (2.3), on a pour $h > 0$, la relation (2.4)

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p} \gamma(k-h)\phi_k & si \quad h = 1, ..., p \\ \sum_{k=1}^{p} \gamma(k-h)\phi_k + \sigma^2 & si \quad h = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle : en notant $\gamma(p)$ le vecteur colonne de longueur p défini par : $\gamma(p) = (\gamma(1), \gamma(2), ..., \gamma(p))^t$, en notant ϕ le vecteur colonne $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)^t$, et en formant la matrice $(p \times p)$, dont l'élément (i, j) vaut $[\gamma(i-j)]_{i,j=0}^{p}$ c'est-à-dire :

$$\Gamma_{(p,p)} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma(1) \\ \gamma(p-1) & \dots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Alors le système (2.4) peut se réécrire matriciellement comme :

$$\begin{cases} \gamma(p) = \Gamma_P.\phi_P \\ \gamma(0) = \phi_P^t.\Gamma_P + \sigma^2 \end{cases} \tag{2.6}$$

Ces équations sont appelées équations de Yule-Walker. Elles relient les paramètres ϕ du processus auto-régressif à la fonction d'auto-covariance théorique qui définit γ_p et Γ_p : Si on veut estimer les paramètres $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ du modèle, on peut se servir des équations de Yule-Walker en utilisant la fonction dauto-covariance empirique $\hat{\gamma}_p$ comme un estimateur de γ_p :

On construit alors le vecteur colonne $\hat{\gamma}(p) = (\hat{\gamma}(1), \hat{\gamma}(2), ..., \hat{\gamma}(p))^t$ et la matrice $\hat{\Gamma}(p)$ construite en substituant γ_p par $\hat{\gamma}_p$ dans (2.6). Les relations trouvées ci-dessus entre ϕ, γ_p, et Γ_p permettent donc de trouver un estimateur $\hat{\phi}$ de ϕ et un estimateur $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 à travers le système de Yule-Walker suivant, à résoudre en $\hat{\phi}$ et $\hat{\sigma}^2$:

$$\begin{cases} \hat{\gamma(p)} = \hat{\Gamma}_P.\hat{\phi}_P \\ \hat{\gamma}(0) = \hat{\phi}_P^t.\hat{\Gamma}_P + \hat{\sigma}^2 \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour obtenir un estimateur de ϕ il faut donc résoudre la première équation de système (2.7) en inversant la matrice

$$\hat{\phi} = \hat{\Gamma}_p^{-1}.\hat{\gamma}_p \tag{2.8}$$

Puis en calculant :

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\phi}^t.\hat{\gamma}_p \tag{2.9}$$

Remarque 7. *On a que* $\sqrt{T}(\hat{\phi}_p - \phi_p) \xmapsto{L} N_p(0, \sigma^2.\Gamma_p^{-1})$ *lorsque* $T \longrightarrow \infty$ *(normalité asymptotique)*

Exemple 2.1. *Soit le processus AR(2) est centré et causal de la forme :*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t \tag{2.10}$$

En multipliant l'équation par X_{t-1} *et* X_{t-2} *puis en prenant l'espérance de ces équations et enfin en divisant par* $\gamma(0)$

On obtient les équations de Yule-Walker

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(1) & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \hat{\rho}(1)^2} \begin{pmatrix} \hat{\rho}(1)(1 - \hat{\rho}(2)) \\ \hat{\rho}(2) - \hat{\rho}(1)^2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer σ^2*, En multipliant l'équation par* X_t *puis en prenant l'espérance on obtient :*

$\gamma(0) - \phi_1\gamma(1) - \phi_2\gamma(2) = E(\varepsilon_t X_t)$

Mais

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t X_t) &= E(\varepsilon_t(\varepsilon_t + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2})) \\ &= \sigma^2 + \phi_1 E(\varepsilon_t X_{t-1}) + \phi_2 E(\varepsilon_t X_{t-2}) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

d'où : $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\phi}_1\hat{\gamma}(1) - \hat{\phi}_2\hat{\gamma}(2)$

2.2 La méthode du maximum de vraisemblance

L'estimation du Maximum de Vraisemblance est une méthode statistique courante utilisée pour inférer les paramètres de la distribution de probabilité d'un échantillon donné. Cette méthode a été développée par le statisticien R.A,[1] entre 1912 et 1922.

2.2.1 Le principe de la méthode

Soit une famille paramétrée de distributions de probabilités p_θ dans les éléments sont associés soit a une densité de probabilité connue (distribution continue), soit a une fonction de masse connue (distribution discrète), notée f_θ. On tire un échantillon de n valeurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de la distribution, et l'on calcule la densité de probabilité associée aux données observées f_θ $(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$ Ceci étant une fonction de θ avec $(x_1, x_2, ..., x_n)$ fixés, c'est une vraisemblance,telle que :

$$F(\theta) = f_\theta(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) \tag{2.11}$$

Lorsque θ n'est pas observable, la méthode du Maximum de Vraisemblance utilise les valeurs de θ qui maximisent $F(\theta)$ estimateur de θ : c'est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est noté $\hat{\theta}$.

Définition 2.2. *Soit X une variable aléatoire réelle quelconque, dont on veut estimer le paramètre inconnu θ. Alors on définit une fonction f telle que :*

$$f(x,\theta) = \begin{cases} f_\theta(x) & \text{si } X \text{ est une v.a continue} \\ P_\theta(X = x) & \text{si } X \text{ est une v.a discrete} \end{cases} \tag{2.12}$$

$f_\theta(x)$(respectivement $P_\theta(X = x)$) représente la densité de probabilité (respectivement la probabilité) de X où θ apparait .

On appelle vraisemblance de θ au vu des observations $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'un échantillon indépendamment et identiquement distribué selon la loi P_θ, le quantité :

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \times f(x_2, \theta) \times ... \times f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \tag{2.13}$$

Définition 2.3. *On appelle estimateur du maximum de vraisemblance, une valeur $\hat{\theta}$ solution du problème de maximisation*

$$\hat{\theta} = Arg\ max\ F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) \tag{2.14}$$

On cherche à trouver le maximum de cette vraisemblance pour que les probabilités des réalisations observées soient maximums. Ceci est un problème d'optimisation. On utilise généralement le fait que si F est dérivable (ce qui n'est pas toujours le cas) et si F admet un maximum global en une valeur $\theta = \hat{\theta}$, alors la première dérivée s'annule en $\theta = \hat{\theta}$ et que la seconde dérivée est négative. Réciproquement, si la première dérivée s'annule en $\theta = \hat{\theta}$ et que la seconde dérivée est négative en $\theta = \hat{\theta}$, alors $\theta = \hat{\theta}$ est un maximum de $F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$.
La vraisemblance étant positive et le logarithme népérien une fonction croissante, il est équivalent et souvent plus simple de maximiser le logarithme népérien de la vraisemblance (le produit se transforme en somme, ce qui est plus simple à dériver). Ainsi en pratique :
La condition nécessaire :

$$\frac{\delta F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\delta\theta} = 0 \quad ou \quad \frac{\delta ln F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\delta\theta} = 0 \tag{2.15}$$

permet de trouver la valeur $\theta = \hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ est un estimateur si la condition suffisante est vérifiée.

$$\frac{\delta^2 F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\delta^2\theta} < 0 \quad ou \quad \frac{\delta^2 ln F(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\delta^2\theta} < 0 \tag{2.16}$$

2.3 Application la méthode du maximum de vraisemblance au modèle auto-régressif AR(1)

Considérons le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de la classe AR(1) admettant l'équation suivante :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad ou \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{2.17}$$

considérons la série chronologique $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^t$ génère par ce processus AR(1). Le problème statistique posé est celui de l'estimation des paramètres $\theta = (\phi, \sigma^2)$. Puisque le processus stochastique qui génère la série chronologique est gaussien, la loi de probabilité du vecteur X est normale, de moyenne nulle et la matrice de auto-covariance Γ de dimension $(n \times n)$ telle que : :

$$\Gamma_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} E(X_1)^2 & E(X_1X_2) & \dots & E(X_1X_n) \\ E(X_2X_1) & E(X_2)^2 & \dots & E(X_2X_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E(X_nX_1) & E(X_nX_2) & \dots & E(X_n)^2 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Cette hypothèse nous permettra d'écrire simplement la fonction de vraisemblance du modèle qui est la probabilité d'observer $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^t$ sous l'hypothèse gaussienne :

$$f_X(x, \theta) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} (\det \Gamma)^{\frac{-1}{2}} \exp(\frac{-1}{2} X^t \Gamma^{-1} X) \tag{2.19}$$

La fonction de log- vraisemblance s'écrit :

$$L(\theta) = \frac{-n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(det\Gamma)^{-1} - \frac{1}{2} X^t \Gamma^{-1} X \tag{2.20}$$

L'élément générale de la matrice variance-covariance écrit sous la forme :

$$E(X_t X_{t-j}) = \frac{\sigma^2 \phi^j}{1 - \phi^2} \tag{2.21}$$

la matrice (2.18) devienne : $\Gamma = \sigma^2 \times V$ où

$$V = \frac{1}{1-\phi^2} \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part :
$\det(\Gamma)^{-1} = \det(\Gamma^{-1})$, en effet :

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} \times \Gamma = I_d &\Longrightarrow \det(\Gamma^{-1} \times \Gamma) = \det(I_d) \\ &\Longrightarrow \det(\Gamma^{-1}) \times \det(\Gamma) = 1 \\ &\Longrightarrow \det(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\det(\Gamma)} = \det(\Gamma)^{-1} \end{aligned}$$

Donc la vraisemblance (2.20) s'écrit sous la forme suivante :

$$L(\theta) = \frac{-n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(det\Gamma^{-1}) - \frac{1}{2} X^t \Gamma^{-1} X \tag{2.22}$$

La maximisation et même le calcul de cette vraisemblance sont relativement difficiles, en particulier à cause du calcul l'inverse de la matrice auto-covariance et de son déterminant, surtout lorsque n devient relativement grand. Pour résoudre ce problème on a proposé deux méthodes :

1- La méthode utilisant la décomposition de cholesky.

2- La méthode utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz .

2.3.1 La méthode utilisant la décomposition de Cholesky

Comme il semble utopique d'espérer obtenir analytiquement les estimateurs du maximum de vraisemblance exact des paramètres nous utilisons la méthode qui a proposé Newbold(1974) qui a introduit un artifice supplémentaire qui est en fait la décomposition de Cholésky de V sous la forme $V = LL^t$, telle que L est une matrice triangulaire inférieure, à éléments positifs sur la diagonale. Cette dernière transformation facilite à nouveau l'évaluation des formules Γ^{-1} et $\det(\Gamma^{-1})$. Ceci nous permettra non seulement de déterminer la fonction log-vraisemblance de modèle (2.22), mais encore de trouver la forme analytique de ces estimateurs, ([8],[15])

2.3.1.1 La fonction de vraisemblance d'un modèle auto-régressif AR(1)

D'après (2.18) la matrice auto-covariance s'écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma_{(n\times n)} = \sigma^2 \times V = \sigma^2 \times \frac{1}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Où :

$$V_{(n\times n)} = \frac{1}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Alors

$$\Gamma_{(n\times n)}^{-1} = \frac{1-\phi^2}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.25}$$

donc

$$V_{(n\times n)}^{-1} = (1-\phi^2)\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.26}$$

D'après la décomposition de cholesky, on a :

$V = LL^t \Longrightarrow V^{-1} = (L^t)^{-1}L^{-1}$

D'après l'algorithme de Cholesky on a :

$$L_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\phi}{\sqrt{1-\phi^2}} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\phi^2}{\sqrt{1-\phi^2}} & \phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\phi^{n-1}}{\sqrt{1-\phi^2}} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \phi^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Et

$$L^t_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}} & \frac{\phi}{\sqrt{1-\phi^2}} & \frac{\phi^2}{\sqrt{1-\phi^2}} & \dots & \frac{\phi^{n-1}}{\sqrt{1-\phi^2}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

On peut calculer l'inverse de la matrice (2.27), telle que :

$$L^{-1}_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\phi^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

d'ou

$$(L^{-1})^t_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\phi^2} & -\phi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\phi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

La forme de la matrice V^{-1} est :

$$V^{-1}_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & 0\dots & 0 & \\ -\phi & 1+\phi^2 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & 1+\phi^2 & -\phi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Il est facile de montrer que

$V^{-1}V = I_d \quad et \quad \Gamma^{-1} = \sigma^{-2}V^{-1}$

On remplace $\Gamma^{-1} = \sigma^{-2}V^{-1}$ dans(2.22) on trouve la fonction de log-vraisemblance d'un processus AR(1) sous la forme suivante :

$$L(\theta) = \frac{-n}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log\left[\det(\sigma^{-2}\times(L^{-1})^t\times L^{-1})\right] - \frac{1}{2\sigma^2}X^t(L^{-1})^t\times L^{-1}X \tag{2.32}$$

Pour déterminer la fonction de log vraisemblance, il ne reste plus maintenant qu'à calculer la forme quadratique $[-\frac{1}{2\sigma^2}X^t(L^{-1})^t\times L^{-1}X]$ et le déterminant $[\det(\sigma^{-2}(L^{-1})^t\times L^{-1})]$

$*$ **Calcul le déterminant** :

$$\begin{aligned} \det(\sigma^{-2}L^{-1}L^{-1}) &= (\sigma^{-2})^n\det((L^{-1})^t\times L^{-1}) \\ &= \sigma^{-2n}\det((L^{-1})^t)\times\det(L^{-1}) \\ &= \sigma^{-2n}[\sqrt{1-\phi^2}]\times\sqrt{1-\phi^2} \\ &= \sigma^{-2n}(1-\phi^2) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\,log\,\left[\det(\sigma^{-2}(L^{-1})^t\times L^{-1})\right] = \frac{-n}{2}\,\log\,\sigma^2 + \frac{1}{2}\,\log\,(1-\phi^2) \tag{2.34}$$

$*$**Calcul de La forme quadratique** :

$$L^{-1} \times X = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\phi^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\phi^2}x_1 \\ x_2 - \phi x_1 \\ x_3 - \phi x_2 \\ \vdots \\ x_n - \phi x_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Et on a

$(L^{-1}X)^t = (\sqrt{1-\phi^2}x_1, x_2 - \phi x_1, x_3 - \phi x_2, \dots, x_n - \phi x_{n-1})$

Par conséquent :

$$-\frac{1}{2\sigma^2}X^t(L^{-1})^t \times L^{-1}X = -\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{1-\phi^2}x_1, x_2 - \phi x_1, x_3 - \phi x_2, \dots, x_n - \phi x_{n-1}) \begin{pmatrix} \sqrt{1-\phi^2}x_1 \\ x_2 - \phi x_1 \\ x_3 - \phi x_2 \\ \vdots \\ x_n - \phi x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ce qui équivalent à :

$$-\frac{1}{2\sigma^2}X^t(L^{-1})^t \times L^{-1}X = -\frac{1}{2\sigma^2}[(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2] \tag{2.36}$$

Si on remplace (2.33) et (2.36) dans (2.32), la fonction de log-vraisemblance d'un processus AR(1) est donnée par :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log(\sigma^{-2n}(1-\phi^2)) - \frac{1}{2\sigma^2}[(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2] \\ &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 + \frac{1}{2}\log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2] \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.3.1.2 Les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres de modèle auto-régressif :

Dans ce paragraphe nous recherchons quelles sont les valeurs des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres de processus auto-régressif AR(1) qui maximisent le log-vraisemblance (2.37) ? Il va de soit que les estimateurs du maximum de vraisemblance sont ici : $\theta = (\phi; \sigma^2)$; les deux estimateurs sont obtenus donc par résolution du système

$$\begin{cases} \frac{\delta L(\theta)}{\delta \sigma^2} = 0 \\ \frac{\delta L(\theta)}{\delta \phi} = 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

Par dérivation de (2.38) par rapport à σ^2 on trouve :

$$\frac{\delta L(\theta)}{\delta \sigma^2} = 0 \Longleftrightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}[(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(X_i - \phi x_{i-1})^2] = 0$$

Alors :

$$\hat{\sigma^2} = \frac{[(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2]}{n} \tag{2.39}$$

Par dérivation de (2.38) par rapport à ϕ on trouve :

$$\frac{\delta L(\theta)}{\delta \phi} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{-2\phi}{1-\phi^2}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(-2\phi x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n}\phi^2 x_{i-1}^2 - \sum_{i=2}^{n} 2x_i x_{i-1}\phi) = 0$$

Donc :

$$\frac{1}{\sigma^2}(\phi x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}(x_i - \phi x_{i-1})) = \frac{\phi}{1-\phi^2}$$

Alors le système (2.38) devient :

$$\begin{cases} \hat{\sigma^2} = \frac{\left[(1-\hat{\phi^2})x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \hat{\phi} x_{i-1})^2\right]}{n} \\ \frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi^2}} = \frac{1}{\hat{\sigma^2}}\left[\hat{\phi} x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}(x_i - \hat{\phi} x_{i-1})^2\right] \end{cases} \tag{2.40}$$

En remplaçant la valeur de $\hat{\sigma^2}$ dans la deuxième équation du système (2.40) , on aura :

$$\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi^2}} = \frac{n(\hat{\phi} x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}(x_i - \hat{\phi} x_{i-1})^2)}{(1-\hat{\phi^2})x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \hat{\phi} x_{i-1})^2}$$

On obtient :

$$\hat{\phi}^3(n-1)[x_1^2 - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}^2] + \hat{\phi}^2(n-2)[\sum_{i=2}^{n} x_{i-1}x_i] + \hat{\phi}[(1-n)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i^2 + n x_{i-1}^2)] - n\sum_{i=2}^{n} x_{i-1}x_i = 0 \tag{2.41}$$

On suppose :
$$\begin{cases} \alpha = (n-1)(x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1}^2) \\ \beta = (n-2)(\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i) \\ \gamma = (1-n)x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i^2 + nx_{i-1}^2) \\ C = n\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i \end{cases}$$
Donc l'équation (2.41) devient :

$$\alpha\hat{\phi}^3 + \beta\hat{\phi}^2 + \gamma\hat{\phi} + C = 0 \tag{2.42}$$

L'équation (2.42) est un polynôme du troisième degré en fonction de $\hat{\phi}$, pour trouver les racines de ce polynôme, on applique la méthode de Cardon [19].

On pose : $\hat{\phi} = t - \frac{b}{3a}$

Nous obtenons une équation de la forme :

$$t^3 + pt + q = 0 \tag{2.43}$$

où :
$$\begin{cases} p = \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha^2} \\ q = \frac{2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\alpha^2 C}{27\alpha^3} \end{cases}$$
posons : t=u+v, alors l'équation (2.43) devienne

$$\begin{aligned} (2.43) &\iff (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + (3uv+p) + q = 0 \\ &\iff \begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \end{aligned}$$

Donc u^3,v^3 sont les solution de l' équation

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{2.44}$$

On calcule le discriminant de l'équation (2.44)

$\Delta = q^2 - 4 \times 1 \times (-\frac{p^3}{27}) = q^2 - \frac{4p^3}{27}$

On obtient 3 cas :

$$\begin{cases} si \quad \Delta > 0\ ,\ u^3 = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\ et\ v^3 = \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2} \\ si \quad \Delta < 0\ ,\ u^3 = \frac{-q+i\sqrt{\Delta}}{2}\ et\ v^3 = \frac{-q-i\sqrt{\Delta}}{2} \\ si \quad \Delta = 0\ ,\ u^3 = v^3 = -\frac{q}{2} \end{cases} \tag{2.45}$$

donc :

$$(2.45) \Longleftrightarrow \begin{cases} si \quad \Delta > 0\ ,\ u = \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}\ et\ v = \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} \\ si \quad \Delta < 0\ ,\ u = \sqrt[3]{\frac{-q+i\sqrt{\Delta}}{2}}\ et\ v = \sqrt[3]{\frac{-q-i\sqrt{\Delta}}{2}} \\ si \quad \Delta = 0\ ,\ u = v = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \end{cases}$$

Remarque 8. *On prend que la solution réelle, car ϕ est un réel, nous distinguerons alors deux cas selon que Δ est positif ou nul. Par exemple si $\Delta > 0$ on prend la couple $(u,v) = (\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}, \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}})$ et si $\Delta = 0$ on prend la couple $(u,v) = (-\sqrt[3]{\frac{q}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{q}{2}})$*

•*si* $\Delta > 0$, alors $\hat{\theta} = (\hat{\phi}, \hat{\sigma}^2)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2 = \frac{[(1-\hat{\phi}^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\phi}x_{i-1})^2]}{n} \\ \hat{\phi} = \sqrt[3]{\frac{-\left(\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma+27\alpha^2C}{27\alpha^3}\right)+\sqrt{\left(\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma+27\alpha^2C}{27\alpha^3}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha\gamma-\beta^2}{3\alpha^2}\right)^3}}{2}} + \\ \sqrt[3]{\frac{-\left(\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma+27\alpha^2C}{27\alpha^3}\right)-\sqrt{\left(\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma+27\alpha^2C}{27\alpha^3}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha\gamma-\beta^2}{3\alpha^2}\right)^3}}{2}} - \frac{\beta}{3\alpha} \end{cases} \quad (2.46)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \alpha = (n-1)(x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1}^2) \\ \beta = (n-2)(\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i) \\ \gamma = (1-n)x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i^2 + nx_{i-1}^2) \\ C = n\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i \end{cases}$$

•*Si* $\Delta = 0$, alors $\hat{\theta} = (\hat{\phi}, \hat{\sigma^2})$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{\sigma^2} = \frac{\left[(1-\hat{\phi}^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\phi}x_{i-1})^2\right]}{n} \\ \hat{\phi} = -2\sqrt[3]{\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma+27\alpha^2C}{54\alpha}} - \frac{\beta}{3\alpha} \end{cases}$$

Tel que :

$$\begin{cases} \alpha = (n-1)(x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1}^2) \\ \beta = (n-2)(\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i) \\ \gamma = (1-n)x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i^2 + nx_{i-1}^2) \\ C = n\sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i \end{cases}$$

2.3.2 La méthode utilisant l'inverse d'une matrice de Toeplitz

Nous rappelons que ces matrices d'après l'article de(Xiao-Guang Lv,Ting-Zhu Huang)[21] sont sous les formes suivantes :

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \dots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \dots & y_2 & y_1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_n & \dots & -x_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_n \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & x_n \\ x_n & \dots & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_n & \dots & y_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Telles que :

x= $(x_1, x_2, ..., x_n)^t$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$ sont des solutions des deux équations :

$$\begin{cases} Tx = f \\ Ty = e_1 \end{cases}$$

Avec :

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{1-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{n-1} - a_{-1} \\ \vdots \\ a_2 - a_{-n+2} \\ a_1 - a_{-n+1} \end{pmatrix}$$

2.3.2.1 Inverse de la matrice auto-covariance pour un processus auto-régressif AR (1)

On a la matrice auto-covariance Γ d'ordre $(n \times n)$ pour un processus auto-régressif AR(1)

$$\Gamma_{(n\times n)} = \sigma^2 \times \frac{1}{1-\phi^2} \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Alors l'inverse de la matrice auto-covariance est :

$$\Gamma^{-1}_{(n\times n)} = \frac{1-\phi^2}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

On pose :

$$T_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\Gamma^{-1} = \frac{(1-\phi^2)}{\sigma^2}T^{-1} \tag{2.47}$$

On remarque que la matrice T est une matrice de Toeplitz, pour calculer l'inverse de cette matrice on applique la méthode qui a été proposé par (Xiao-Guang Lv,Ting-Zhu Huang)[21]

On a :

$$T^{-1} = T_1U_1 + T_2U_2$$

Et pour déterminer les matrices T_1, U_1, T_2, U_2 il suffit de résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} Ty = e_1 & (A) \\ Tx = f & (B) \end{cases} \tag{2.48}$$

Tel que :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{n-1}-\phi \\ \vdots \\ \phi^{n-i}-\phi^i \\ \vdots \\ \phi-\phi^{n-1} \end{pmatrix}, i = 2, ..., n-2$$

⋆ Résolution du système(A) :

$$(A) \Longleftrightarrow Ty = e_1$$

$$(A) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 + \phi y_2 + \phi^2 y_3 + ... + \phi^{n-1} y_n = 1 & \dots(1) \\ \phi y_1 + y_2 + \phi y_3 + ... + \phi^{n-2} y_n = 0 & \dots(2) \\ \phi^2 y_1 + \phi y_2 + y_3 + ... + \phi^{n-3} y_n = 0 & \dots(3) \\ \phi^3 y_1 + \phi^2 y_2 + \phi y_3 + y_4 + ... + \phi^{n-4} y_n = 0 & \dots(4) \\ \vdots & \\ \phi^{n-2} y_1 + \phi^{n-3} y_2 + ... + y_{n-1} + \phi y_n = 0 & \dots(n-1) \\ \phi^{n-1} y_1 + \phi^{n-2} y_2 + ... + \phi y_{n-1} + y_n = 0 & \dots(n) \end{cases}$$

• pour déterminer y_1

$$\begin{cases} y_1 + \phi y_2 + \phi^2 y_3 + ... + \phi^{n-1} y_n = 1 & (1) \\ \phi y_1 + y_2 + \phi y_3 + ... + \phi^{n-2} y_n = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) - \phi \times (2) \Longleftrightarrow y_1 - \phi^2 y_1 = 1$

Alors la valeur de y_1 est :

$$y_1 = \frac{1}{1-\phi^2} \tag{2.49}$$

• pour déterminer y_2 :

$$\begin{cases} \phi y_1 + y_2 + \phi y_3 + ... + \phi^{n-2} y_n = 0 & (2) \\ \phi^2 y_1 + \phi y_2 + y_3 + ... + \phi^{n-3} y_n = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) - \phi \times (3) \Longleftrightarrow \phi y_1 - \phi^3 y_1 + y_2 - \phi^2 y_2$

On obtient :

$$y_2 = -\frac{y_1 \times (\phi - \phi^2)}{1-\phi^2} \tag{2.50}$$

Si l'on substitue (2.49) dans (2.50) ,on retrouve la valeur de y_2 :

$$y_2 = -\frac{\phi}{1-\phi^2} \tag{2.51}$$

• pour déterminer y_3 :

$$\begin{cases} \phi^2 y_1 + \phi y_2 + y_3 + \phi y_4 ... + \phi^{n-3} y_n = 0 & (3) \\ \phi^3 y_1 + \phi^2 y_2 + \phi y_3 + y_4 + ... + \phi^{n-4} y_n = 0 & (4) \end{cases}$$

$(3) - \phi \times (4) \Longleftrightarrow (\phi^2 - \phi^4)y_1 + (\phi - \phi^3)y_2 + (1-\phi)y_3 = 0$

On obtient :

$$y_3 = -\frac{(\phi^2 - \phi^4)y_1 + (\phi - \phi^3)y_2}{1-\phi} \tag{2.52}$$

Si l'on substitue (2.49)et(2.51) dans(2.52), on retrouve la valeur de y_3 :

$$y_3 = 0 \tag{2.53}$$

• pour déterminer y_4 :

$$\begin{cases} \phi^3 y_1 + \phi^2 y_2 + \phi y_3 + y_4 + \phi y_5 + ... + \phi^{n-4} y_n = 0 & (4) \\ \phi^4 y_1 + \phi^3 y_2 + \phi^2 y_3 + \phi y_4 + y_5 + ... + \phi^{n-5} y_n = 0 & (5) \end{cases}$$

$(4) - \phi \times (5) \Longleftrightarrow (\phi^3 - \phi^5)y_1 + (\phi^2 - \phi^4)y_2 + (\phi - \phi^3)y_3 + (1-\phi^2)y_4 = 0$

On obtient :

$$y_4 = -\frac{(\phi^3 - \phi^5)y_1 + (\phi^2 - \phi^4)y_2 + (\phi - \phi^3)y_3}{1-\phi^2} \tag{2.54}$$

Si l'on substitue (2.49), (2.51)et (2.53) dans (2.54),on retrouve la valeur de y_4

$$y_4 = 0 \tag{2.55}$$

On suit le même raisonnement jusqu'à ce que l'on retrouve la valeur de y_n :

$$y_n = 0 \tag{2.56}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{1-\phi^2} \\ y_2 = -\frac{\phi}{1-\phi^2} \\ y_i = 0 \qquad \textit{pour } i = 3, ..., n \end{cases}$$

Finalement la solution de système (A) est :

$$y = \left(\frac{1}{1-\phi^2}, -\frac{\phi}{1-\phi^2}, 0, ..., 0\right)^t \tag{2.57}$$

$\star$ Résolution du système (B)

$$(B) \Longleftrightarrow T \times x = f$$

$$(B) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{n-1} - \phi \\ \vdots \\ \phi^{n-i} - \phi^i \\ \vdots \\ \phi - \phi^{n-1} \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$(B) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + \phi x_2 + \phi^2 x_3 + ... + \phi^{n-1} x_n = 0 & \dots (1) \\ \phi x_1 + x_2 + \phi x_3 + ... + \phi^{n-2} x_n = \phi^{n-1} - \phi & \dots (2) \\ \phi^2 x_1 + \phi x_2 + x_3 + ... + \phi^{n-3} x_n = \phi^{n-2} - \phi^2 & \dots (3) \\ \phi^3 x_1 + \phi^2 x_2 + \phi x_3 + x_4 + ... + \phi^{n-4} x_n = \phi^{n-3} - \phi^3 & \dots (4) \\ \vdots & \\ \phi^{n-2} x_1 + \phi^{n-3} x_2 + ... + x_{n-1} + \phi x_n = \phi^2 - \phi n - 2 & \dots (n-1) \\ \phi^{n-1} x_1 + \phi^{n-2} x_2 + ... + \phi x_{n-1} + x_n = \phi - \phi n - 1 & \dots (n) \end{cases}$$

• pour déterminer x_1

$$\begin{cases} x_1 + \phi x_2 + \phi^2 x_3 + ... + \phi^{n-1} x_n = 0 & (1) \\ \phi x_1 + y_2 + \phi x_3 + ... + \phi^{n-2} x_n = \phi^{n-1} - \phi & (2) \end{cases}$$

$(1) - \phi \times (2) \Longleftrightarrow x_1 - \phi^2 x_1 = \phi^2 - \phi^n$

Alors la valeur de x_1 est :

$$x_1 = \frac{\phi^2 - \phi^n}{1 - \phi^2} \tag{2.58}$$

• pour déterminer x_2 :

$$\begin{cases} \phi x_1 + x_2 + \phi x_3 + ... + \phi^{n-2} x_n = \phi^{n-1} - \phi & (2) \\ \phi^2 x_1 + \phi x_2 + x_3 + ... + \phi^{n-3} x_n = \phi^{n-2} - \phi^2 & (3) \end{cases}$$

$(2) - \phi \times (3) \Longleftrightarrow x_1(\phi - \phi^3) + x_2(1 - \phi^2) = \phi^3 - \phi$

Si on remplace (2.58) dans cette dernière équation on retrouve la valeur de x_2 sous la forme suivante :

$$x_2 = \frac{\phi^{n+1} - \phi}{1 - \phi^2} \tag{2.59}$$

• pour déterminer x_3 :

$$\begin{cases} \phi^2 x_1 + \phi x_2 + x_3 + \phi x_4 ... + \phi^{n-3} x_n = \phi^{n-2} - \phi^2 & (3) \\ \phi^3 x_1 + \phi^2 x_2 + \phi x_3 + x_4 + ... + \phi^{n-4} x_n = \phi^{n-3} - \phi^3 & (4) \end{cases}$$

$(3) - \phi \times (4) \Longleftrightarrow x_1(\phi^2 - \phi^4) + x_2(\phi - \phi^3) + x_3(1 - \phi) = \phi^4 - \phi^2$

Si l'on substitue (2.58)et(2.59) dans cette dernière équation on retrouve la valeur de x_3 :

$$x_3 = 0 \tag{2.60}$$

On suit le même raisonnement jusqu'à ce que l'on retrouve la valeur de x_i pour $i = 4, ..., n-1$ on obtient $x_i = 0$ pour $i = 3, ..., n-1$

• pour déterminer la valeur de x_n :

Il suffit de remplacer les valeurs des x_i tel que $i = 1, ..., n-1$ dans la première équation de système (B) :

$$\begin{aligned} (1) &\Longleftrightarrow x_1 + \phi x_2 + \phi^2 x_3 + ... + \phi^{n-1} x_n = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{\phi^2 - \phi^n}{1 - \phi^2} + \phi \times \frac{\phi^{n+1} - \phi}{1 - \phi^2} + 0 + ... + 0 + \phi^{n-1} x_n = 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$x_n = \frac{\phi^n - \phi^{n+2}}{\phi^{n-1} - \phi^{n+1}} = \phi \tag{2.61}$$

Finalement la solution de système (B) est :

$$x = \left(\frac{\phi^2 - \phi^n}{1 - \phi^2}, \frac{\phi^{n+1} - \phi}{1 - \phi^2}, 0, ..., 0, \phi \right)^t \tag{2.62}$$

Dès qu'on retrouve les solutions de deux systèmes on a la forme des matrices suivantes : T_1, U_1 ,T_2, U_2.

Alors :

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \cdots & y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\phi^2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\phi}{1-\phi^2} \\ -\frac{\phi}{1-\phi^2} & \frac{1}{1-\phi^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\phi}{1-\phi^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\phi}{1-\phi^2} & \frac{1}{1-\phi^2} \end{pmatrix}$$

Ou plus explicitement

$$T_1 = \frac{1}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\phi \\ -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & x_n \\ x_n & \dots & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} \\ \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \phi \\ \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_n & \dots & -x_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi & \dots & \frac{\phi-\phi^{n+1}}{1-\phi^2} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_n & \dots & y_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{-\phi}{1-\phi^2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ou plus explicitement

$$U_2 = \frac{1}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -\phi \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on peut calculer la matrice Γ^{-1}

$\Gamma^{-1} = \frac{1-\phi^2}{\sigma^2} T^{-1}$ sachant que $T^{-1} = T_1U_1 + T_2U_2$

Alors :

$\Gamma^{-1} = \frac{1-\phi^2}{\sigma^2}[T_1U_1 + T_2U_2]$

$$\Gamma^{-1} = \frac{1-\phi^2}{\sigma^2}\left[\frac{1}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\phi \\ -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\phi & \dots & \frac{\phi-\phi^{n+1}}{1-\phi^2} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$+\frac{1-\phi^2}{\sigma^2}\left[\frac{1}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} \\ \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \phi \\ \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -\phi \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

On pose

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\phi \\ -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\phi & \dots & \frac{\phi-\phi^{n+1}}{1-\phi^2} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et aussi on pose :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} \\ \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \phi \\ \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -\phi \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors l'inverse de la matrice auto-covariance devient :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}[R+S] \tag{2.63}$$

puis nous calculons les deux matrices R et S :Telles que,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\phi \\ -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\phi & \frac{\phi-\phi^{n+1}}{1-\phi^2} & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$R_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\phi^3-\phi^{n+1}}{1-\phi^2} \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\phi^{n+2}-\phi^2}{1-\phi^2} \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} \\ \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} & \phi & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \phi \\ \phi & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi}{1-\phi^2} & \frac{\phi^2-\phi^n}{1-\phi^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -\phi \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$S_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi^3}{1-\phi^2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \frac{\phi^{n+1}-\phi^3}{1-\phi^2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\phi^2 \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

Si on remplace (2.64) et (2.65) dans (2.63) on retrouve la matrice Γ^{-1}

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\phi^3-\phi^{n+1}}{1-\phi^2} \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\phi^{n+2}-\phi^2}{1-\phi^2} \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\phi^{n+1}-\phi^3}{1-\phi^2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \frac{\phi^{n+1}-\phi^3}{1-\phi^2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\phi^2 \end{pmatrix}\right]$$

Finalement l'inverse de la matrice auto-covariance d'un modèle auto-régressif AR(1) est sous la forme suivante :

$$\Gamma^{-1}_{(n\times n)} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

2.3.2.2 La fonction de vraisemblance pour un processus auto-régressif AR(1)

La fonction de vraisemblance du modèle auto-régressif AR(1) avec la méthode de Toeplitz s'obtient par remplacement de (2.66) dans (2.22)

$$L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\left(\det \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}X^t \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} X \tag{2.67}$$

Pour déterminer l'expression explicite de la fonction de vraisemblance, il suffit de calculer la forme quadratique et le déterminant

$\star$ **Calcul du déterminant** :

$$\det(\Gamma^{-1}) = \det \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix}$$

On pose

$$B_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\det(\Gamma^{-1}) = \left(\frac{1}{\sigma^{2n}}\right)\det(B_{(n\times n)}) \tag{2.68}$$

$$\det(B_{(n\times n)}) = 1.\begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{vmatrix} - (-\phi)\begin{vmatrix} -\phi & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(B_{(n\times n)}) = \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{vmatrix} - \phi^2\begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\phi^2\begin{vmatrix} 0 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{vmatrix} \tag{2.69}$$

Tel que :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{vmatrix} = 0$$

On pose :

$$\Delta_{(n-1)} = \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{vmatrix}$$

Donc la relation (2.68) devienne :

$$\det(B_{(n\times n)}) = \Delta_{(n-1)} - \phi^2\Delta_{(n-2)} \tag{2.70}$$

Et d'autre part on a :

$$\Delta_{(n-1)} = \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix} + \phi \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\phi \end{vmatrix} \tag{2.71}$$

Et on a :

$$\begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\phi \end{vmatrix} = -\phi \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix} \tag{2.72}$$

Si l'on substitue (2.71) dans (2.70) , on retrouve la relation suivante :

$$\Delta_{(n-1)} = \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix} - \phi^2 \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix}$$

On pose :

$$\tilde{\Delta}_{(n-2)} = \det \begin{pmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\Delta_{(n-1)} = \tilde{\Delta}_{(n-2)} - \phi^2\tilde{\Delta}_{(n-3)} \tag{2.73}$$

0n remplaçant (2.73) dans (2.70),on trouve :

$$\det(B_{(n\times n)}) = \tilde{\Delta}_{(n-2)} - 2\phi^2\tilde{\Delta}_{(n-3)} + \phi^4\tilde{\Delta}_{(n-4)} \tag{2.74}$$

Pour déterminer $\det(B_{(n\times n)})$, on doit calculer $\tilde{\Delta}_{(i)}$ tel que $i \in \{n-2, n-3, n-4\}$ On a :

$$\tilde{\Delta}_{(n-2)} = \begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_{(n-2)} = (1+\phi^2)\begin{vmatrix} \phi^2+1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix} + \phi\begin{vmatrix} -\phi & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix}$$

On pose :

$$C = \begin{vmatrix} -\phi & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix}$$

Alors :

$$C = -\phi\begin{vmatrix} -\phi & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & \phi^2+1 \end{vmatrix} + \phi\begin{vmatrix} 0 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi^2+1 & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{vmatrix}$$

Ce qui implique

$$\tilde{\Delta}_{(n-2)} = (1+\phi^2)\tilde{\Delta}_{(n-3)} - \phi^2\tilde{\Delta}_{(n-4)} \tag{2.75}$$

On remarque que l'équation (2.75) est un polynôme de deuxième degré

$$(2.75) \Longleftrightarrow \tilde{\Delta}_{(n-2)} - (1+\phi^2)\tilde{\Delta}_{(n-3)} - \phi^2\tilde{\Delta}_{(n-4)} = 0$$

On pose : $Z = \tilde{\Delta}_{(n-3)}$, on obtient :

$$Z^2 - (1+\phi^2)Z + \phi^2 = 0$$

D'après le calcule du discriminant de ce polynôme on trouve deux racines :

$Z_1 = 1$ et $Z_2 = \phi^2$

Et on a :

$$\tilde{\Delta}_{(n-2)} = aZ_1^{(n-2)} + bZ_2^{(n-2)} \Longleftrightarrow \tilde{\Delta}_{(n-2)} = a + b\ \phi^{2(n-2)}$$

Il suffit de trouver les valeurs de a et b .

$$\begin{cases} si\ n = 3 : \tilde{\Delta}_{(1)} = a + b\ \phi^2 \\ si\ n = 4 : \tilde{\Delta}_{(2)} = a + b\ \phi^4 \end{cases} \tag{2.76}$$

Où

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{(1)} &= 1 + \phi^2 \\ \tilde{\Delta}_{(2)} &= \begin{vmatrix} 1+\phi^2 & -\phi \\ -\phi & 1+\phi^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 + \phi^2 + \phi^4 \end{aligned}$$

Alors :

$$(2.75) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 + \phi^2 = a + b\ \phi^2 \\ 1 + \phi^2 + \phi^4 = a + b\ \phi^4 \end{cases}$$

On trouve : $\begin{cases} a = \frac{1}{1-\phi^2} \\ b = -\frac{\phi^2}{1-\phi^2} \end{cases}$

ce qui implique que :

$\tilde{\Delta}_{(n-2)} = a + b\ \phi^{2(n-2)}$

$= \frac{1}{1-\phi^2}(1 - \phi^{2(n-2)+2})$

ce qui équivalent à

$\tilde{\Delta}_{(i)} = \frac{1}{1-\phi^2}(1 - \phi^{2(i)+2})$ tel que $i \in \{n-2, n-3, n-4\}$

D'après(2.74) Le déterminant de la matrice B est :

$$\det(B_{(n\times n)}) = \tilde{\Delta}_{(n-2)} - 2\phi^2\tilde{\Delta}_{(n-3)} + \phi^4\tilde{\Delta}_{(n-4)}$$
$$\det(B_{(n\times n)}) = \frac{1}{1-\phi^2}(1-\phi^{2n-2}) - \frac{2\phi^2}{1-\phi^2}(1-\phi^{2n-4}) + \frac{\phi^4}{1-\phi^2}(1-\phi^{2n-6})$$

D'après les calculs on obtient :

$$\det(B_{(n\times n)}) = 1 - \phi^2 \tag{2.77}$$

Finalement le déterminant de l'inverse de la matrice auto-covariance $\Gamma^{-1}_{(n\times n)}$ est :

$$\det(\Gamma^{-1}) = \left(\frac{1}{\sigma^{2n}}\right)\det(B_{(n\times n)})$$

Alors on a :

$$\det(\Gamma^{-1}) = \left(\frac{1}{\sigma^{2n}}\right)(1-\phi^2) \tag{2.78}$$

⋆ **Calcul de la forme quadratique :**

$$X^t\Gamma^{-1}X = \frac{1}{\sigma^2}(x_1, x_2, ..., x_n)^t \times \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & \phi^2+1 & -\phi & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -\phi & \phi^2+1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\phi & \phi^2+1 & -\phi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}[(x_1 - \Phi x_2)x_1 + (-\phi x_1 + (\phi^2+1)x_2 - \phi x_3)x_2 + \ldots + (-\phi x_{n-2} + (\phi^2+1)x_{n-1} \tag{2.79}$$

$$-\phi x_n)x_{n-1} + (-\phi x_{n-1} + x_n)x_n]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n-2}((-\phi x_i + (\phi^2+1)x_{i+1} - \phi x_{i+2})x_{i+1}) + x_1^2 + x_n^2 - \phi(x_1x_2 + x_{n-1}x_n)] \tag{2.80}$$

Si l'on substitue (2.78) et (2.79) dans (2.67), l'expression explicite de la fonction de log-vraisemblance d'un processus AR(1) gaussien est donnée par :

$$L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log[\frac{1}{\sigma^{2n}}(1-\phi^2)] - \frac{1}{2\sigma^2}[x_1^2 + x_n^2 - \phi(x_1x_2 + x_{n-1}x_n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-2}((-\phi x_i + (\phi^2+1)x_{i+1} - \phi x_{i+2})x_{i+1})] \tag{2.81}$$

Ou plus explicitement

$$
\begin{aligned}
(2.81) \iff L(\theta) &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[x_1^2 + x_n^2 - \phi x_1 x_2 \\
&- \phi x_{n-1}x_n - \phi \sum_{i=1}^{n-2} x_i x_{i+1} + (\phi^2+1)\sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}^2 - \phi \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+2}x_{i+1}] \\
&= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[(x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}^2) \\
&+ (-\phi \sum_{i=1}^{n-2} x_i x_{i+1} - \phi x_{n-1}x_n) + (-\phi \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+2}x_{i+1} - \phi x_1 x_2) + \phi^2 \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}^2] \\
&= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&- 2\phi \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + \phi^2 \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}^2] \\
&= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \\
&- 2\phi \sum_{i=2}^{n} x_i x_{i-1} + \phi^2 x_1^2 - \phi^2 x_1^2 + \phi^2 \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}^2] \\
&= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[x_1^2(1-\phi^2) + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \\
&- 2\phi \sum_{i=2}^{n} x_i x_{i-1} + \phi^2 \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}^2] \\
&= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[x_1^2(1-\phi^2) + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2 x_i]
\end{aligned}
$$

Finalement la fonction de log-vraisemblance d'un processus AR(1) gaussien est donnée par :

$$
L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) + \log(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}[(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2 x_i] \tag{2.82}
$$

2.3.2.3 Les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de modèle auto-régressif AR(1)

Nous remarquons que l'expression explicite de la fonction de vraisemblance est la même que celle de Cholesky.

Chapitre 3

Exemples et illustrations numériques

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude par simulation des propriétés asymptotiques à savoir la convergence, efficacité des estimateurs obtenus. Toutes les méthodes d'estimation ont été implantées à l'aide du logiciel R.
Nous présentons tout d'abord le modèle et les critères de performance utilisés. Nous considérons en suite les qualités de cet estimateur. Puis nous étudions les propriétés asymptotiques de l'estimateur obtenu de chaque méthode.

Enfin nous effectuons une comparaison avec les estimateurs obtenus, dans ce chapitre nous donnons brièvement quelques notations que nous allons utilisé durant notre travail.
•**MVC** : La méthode de Maximum de Vraisemblance utilisant la décomposition de Cholésky.
•**MVTP** : La méthode de Maximum de Vraisemblance utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz.
• **EYW** : La méthode des équations de Yull-Walker.
• **REQM** : Racine de l'erreur quadratique moyenne.
• **B** : Biais.

3.2 Modèle de performance

Le modèle simulé est un modèle auto-régressif d'ordre 1 :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad ou \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{3.1}$$

Ce modèle est réalisé à partir du générateur de nombres aléatoires issus de logiciel R, les simulations sont faites pour les différentes valeurs du paramètre auto-régressif $\phi = (0.1, -0.5, 0.9)$ avec différentes valeurs de la variance de l'innovation $\sigma = (1, 0.5)$. Pour valider les méthodes d'estimation, on a d'abord voulu vérifier si les paramètres du processus auto-régressif, sont bien estimés. Pour ce faire, la racine de l'erreur quadratique moyenne et le biais de chacun des paramètres ont été estimés à partir de r répétitions pour un échantillon de taille n générés du modèle auto-régressif d'ordre 1.

3.3 Analyse des qualités de l'estimateur EYW

La méthode de Yulle-Walker est une méthode d'estimation auto-régressive qui est la plus simple et la plus rapide pour analyser le comportement de l'estimateur (EYW), on a généré 5 réalisations pour plusieurs valeurs de la taille n de l'échantillon avec différentes valeurs de ϕ et σ^2 :

	n=50	n=100	n=1000
$\hat{\phi}_1$	0.2185	0.1613	0.1127
$\hat{\phi}_2$	0.3265	0.1435	0.0634
$\hat{\phi}_3$	0.3213	0.1698	0.1344
$\hat{\phi}_4$	0.2127	0.1466	0.1139
$\hat{\phi}_5$	0.2121	0.1959	0.1
$\hat{\sigma_2}$	0.8858	0.7652	1.006
$\hat{\sigma_2}$	1.008	0.9235	0.9785
$\hat{\sigma_3}$	0.8163	1.248	1.03
$\hat{\sigma_4}$	0.7056	0.815	0.9421
$\hat{\sigma_5}$	1.101	0.9411	1.041

TABLE :les estimateurs de $\phi = 0.1$ et $\sigma^2 = 1$ du EYW, estimées à l'aide de 5 répétitions.

Pour les autres valeurs on fait la même méthode.

3.3.1 Résultats numériques

Dans les tableaux(3.1), (3.2) et (3.3) nous donnons les résultats de la moyenne, le biais et $REQM$ de l'estimateur du EYW à partir de 5 réalisations pour les tailles d'échantillon $n = 50$, $n = 100$ et $n = 1000$

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.2582	0.9933	0.1633	0.9385	0.1048	0.9995
−0.5	1	−0.6010	0.9630	−0.5028	0.9383	−0.4989	0.989
0.9		0.8112	1.18	0.8639	1.1594	0.9008	0.9836
0.1		0.2621	0.2747	0.1580	0.2688	0.1077	0.2577
−0.5	0.5	−0.6039	0.2556	−0.5449	0.2688	−0.1077	0.2577
0.9		0.8029	0.3759	0.8403	0.2980	0.9048	0.2663

Table 3.1 – Les moyennes des estimateurs du EYW des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à l'aide de 5 répétitions.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.1582	−0.0966	0.0633	−0.0614	0.0048	−0.0004
−0.5	1	−0.1010	$-0.O369$	−0.0028	−0.0616	0.0010	−0.0108
0.9		−0.0888	0.18	−0.0361	0.1594	−0.0008	−0.0164
0.1		0.1621	−0.2252	0.0580	−0.2311	0.0077	−0.2422
−0.5	0.5	−0.1039	−0.2444	−0.0449	−0.2345	−0.0046	−0.2513
0.9		−0.0971	−0.1241	−0.0597	−0.202	0.0048	−0.2337

Table 3.2 – Le biais des estimateurs du EYW des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à l'aide de 5 répétitions.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.1670	0.1695	0.0661	0.1789	0.0239	0.0358
-0.5	1	0.1046	0.2034	0.0499	0.1383	0.0127	0.0483
0.9		0.1252	0.1886	0.0529	0.2306	0.0097	0.06
0.1		0.2150	0.2365	0.0585	0.2325	0.0233	0.2426
-0.5	0.5	0.1090	0.2471	0.0513	0.2361	0.0120	0.2513
0.9		0.3995	0.1540	0.0298	0.2078	0.0067	0.2340

Table 3.3 – La racine de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs du EYW du modèle AR(1), estimées à l'aide de 5 répétitions.

3.3.2 Interprétation des résultats

D'après les résultats des Tableaux (3.1), (3.2), (3.3) on remarque que :

- Le biais de $\hat{\phi}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont petites dans tous les cas considérés . On remarque aussi que les estimateurs deviennent davantage précis à mesure que n augmente en plus le biais se diminue jusqu'à ce qu'il s'annule. donc on peut dire que l'estimateur de EYW est asymptotiquement sans biais .

- Les REQM sont généralement très petites dans tous les cas considérés et plus n augmente plus la valeur $REQM$ diminue.

  Ces résultats montrent que l'estimateur de EYW est : asymptotiquement sans biais, converge vers la vrai valeur, et l'estimateur du paramètre auto-régressif est asymptotiquement distribué selon la loi normale.

3.4 Analyse des qualités de l'estimateur MVC

Pour évaluer la performance de la méthode du Maximum de Vraisemblance utilisant la décomposition de Cholesky (MVC) décrite au Chapitre 3, on estimera la moyenne, le Biais et la racine de l'erreur quadratique moyenne pour différentes tailles d'échantillon.

	n=50	n=100	n=1000
$\hat{\phi}_1$	0.3222	0.1384	0.108
$\hat{\phi}_2$	0.2223	0.1885	0.1417
$\hat{\phi}_3$	-0.205	-0.2466	0.1698
$\hat{\phi}_4$	-0.3075	0.1119	0.1047
$\hat{\phi}_5$	0.2286	0.2984	0.0474
$\hat{\sigma_2}$	1.435	0.8511	0.9897
$\hat{\sigma_2}$	0.6767	1.109	1.097
$\hat{\sigma_3}$	0.8122	1.051	1.015
$\hat{\sigma_4}$	1.003	1.136	1.031
$\hat{\sigma_5}$	1.038	1.09	0.059

TABLE :les estimateurs de $\phi = 0.1$ et $\sigma^2 = 1$ du MCV, estimées à l'aide de 5 répétitions.

Pour les autres valeurs on fait la même méthode

3.4.1 Résultats numériques

Les Tableaux (3.4), (3.5), (3.6) présentent les résultats de la moyenne, le biais et La racine de l'erreur quadratique moyenne estimé empiriquement de l'estimateur $\hat{\theta} = (\hat{\phi}, \hat{\sigma}^2)$ à partir de $r = 5$ réalisations selon la méthode de (MVC) et les tailles d'échantillons considérées furent n = 50, 100, 1000.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.0521	0.9929	0.0981	1.0474	0.1148	0.8383
-0.5	1	-0.4487	0.1158	-0.4986	0.8770	-0.5050	0.9892
0.9		0.8387	1.1047	0.8461	0.9700	0.8901	0.9956
0.1		0.041	0.2141	0.0807	0.2259	0.1044	0.2493
-0.5	0.5	-0.5031	0.2441	-0.4974	0.2525	-0.4997	0.2526
0.9		0.8822	0.2363	0.8913	0.2492	0.8953	0.2496

TABLE 3.4 – Les moyennes des estimateurs du MVC des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à l'aide de 5 répétitions.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$
0.1		-0.0479	-0.0071	0.0019	0.0474	0.0147	-0.1617
-0.5	1	0.0513	0.8842	0.0134	-0.1229	-0.0050	-0.0107
0.9		-0.06132	0.1047	-0.0539	-0.03	-0.0099	-0.0044
0.1		-0.03	-0.2858	-0.01	-0.2740	0.0044	-0.2506
-0.5	0.5	-0.0031	-0.2559	0.0026	-0.2474	0.0002	-0.2473
0.9		-0.0178	-0.26371	-0.0087	-0.2508	-0.0047	-0.2504

Table 3.5 – Le biais des estimateurs du MVC des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à l'aide de 5 répétitions.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.2607	0.4443	0.1838	0.2177	0.0435	0.4233
-0.5	1	0.0766	0.1804	0.0337	0.1351	0.0146	0.0455
0.9		0.0723	0.1781	0.0754	0.0417	0.0175	0.05
0.1		0.2482	0.2880	0.1430	0.2747	0.0167	0.2507
-0.5	0.5	0.0847	0.2582	0.0407	0.2490	0.0101	0.2183
0.9		0.0356	0.2687	0.0307	0.2514	0.0106	0.250

Table 3.6 – La racine de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs du MVC des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à laide de 5 répétitions.

3.4.2 Interprétation des résultats

A la vue des résultats des tableaux (3.4), (3.5), (3.6) on constate les points suivants :
- On remarque que le Biais de $\hat{\phi}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont petits dans tous les cas considérés. Plus n augmente le Biais de $\hat{\phi}$ et de $\hat{\sigma}^2$ diminu jusqu'à son annulation, donc on peut dire que l'estimateur du (MVC) est asymptotiquement sans biais.
- Les $REQM$ sont généralement petites dans tous les cas considérés.
- Les estimateurs des paramètres ϕ et σ^2 performent bien pour différents cas considérés. De

plus, ces estimateurs deviennent davantage précis à mesure que la taille des échantillons augmente, car les $REQM$ et le biais sont d'autant plus faibles que le nombre d'observations est grand.
- Également, on constate que la valeur du paramètre auto-régressif ϕ semble pas exercer une grande influence sur la précision de $\hat{\phi}$. Ce n'est pas le cas de la variance : en effet, les $REQM$ de $\hat{\sigma}^2$ sont beaucoup plus grandes pour $\sigma^2 = 1$ que pour $\sigma^2 = 0.5$.
Finalement ces résultats montrent également que la méthode d'estimation de (MVC) est efficace et donne d'excellents résultats, car l'estimateur de (MVC) admet des propriétés asymptotiques comme la convergence, la normalité asymptotiques et il est asymptotiquement sans biais.

3.5 Analyse des qualités de l'estimateur MVTP

Plusieurs simulations ont été réalisées pour étudier le comportement de l'estimateur du maximum de vraisemblance utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz $(MVTP)$, ces simulations sont faites pour les différentes valeurs du paramètre auto-régressif et la variance de l'innovation tel que $\phi = (0.1, -0.5, 0.9)$ avec $\sigma = (1, 0.5)$.
Nous utilisons 5 réalisations pour plusieurs valeurs de la taille n de l'échantillon,l'estimateur $\hat{\theta} = (\hat{\phi}, \hat{\sigma}^2)$ est calculé pour chaque réalisation et les résultats statistiques (la moyenne, le biais , $REMQ$) sont données ci-dessous.

3.5.1 Résultats numériques

Les Tableaux (3.7), (3.8) et (3.9) présentent les résultats de la moyenne, le biais et $REQM$ de l'estimateur du $MVTP$ à partir de 5 réalisations pour les tailles d'échantillon $n = 50$, $n = 100$ et $n = 1000$.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$	$E(\hat{\phi})$	$E(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.0856	0.9739	0.0945	0.9891	0.1071	0.9968
−0.5	1	−0.4795	0.9837	−0.4875	0.9971	−0.4938	0.9968
0.9		0.8688	0.9836	0.8879	0.9896	0.8985	0.9967
0.1		0.1058	0.7023	0.0940	0.7016	0.1042	0.5911
−0.5	0.5	−0.4673	0.8696	−0.4889	0.6967	−0.4944	0.0735
0.9		0.8669	0.7127	0.8862	0.6944	0.8870	0.5744

Table 3.7 – Les moyennes des estimateurs du $MVTP$ des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à l'aide de 5 répétitions.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$	$B(\hat{\phi})$	$B(\hat{\sigma^2})$
0.1		−0.0144	−0.0261	−0.0055	−0.0109	0.0071	−0.0032
−0.5	1	0.0205	−0.0163	0.0125	−0.0029	0.0062	−0.0032
0.9		−0.0312	−0.0164	−0.0121	−0.0104	−0.0015	−0.0033
0.1		0.0058	0.2023	−0.0060	0.2016	0.0042	0.0911
−0.5	0.5	0.0327	0.1896	0.0113	0.1967	0.0056	0.0735
0.9		−0.0331	0.2127	−0.0138	0.1944	−0.0013	0.0744

Table 3.8 – Le biais des estimateurs du $MVTP$ des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimés à l'aide de 5 répétitions.

		n=50		n=100		n=1000	
ϕ	σ^2	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$	$REQM(\hat{\phi})$	$REQM(\hat{\sigma^2})$
0.1		0.1412	0.1017	0.1073	0.0793	0.0320	0.0247
-0.5	1	0.1117	0.1016	0.0824	0.0736	0.0278	0.0247
0.9		0.0820	0.1006	0.0447	0.0656	0.0145	0.0247
0.1		0.1287	0.2128	0.0966	0.2058	0.0221	0.1963
-0.5	0.5	0.1375	0.2026	0.0873	0.2032	0.0250	0.1811
0.9		0.0754	0.2241	0.0329	0.2008	0.0105	0.1801

TABLE 3.9 – La racine de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs du $MVTP$ des paramètres du modèle auto-régressif d'ordre un, estimées à l'aide de 5 répétitions.

3.5.2 Interprétation des résultats

Selon les résultats des Tableaux (3.7), (3.8),(3.9) on voit que : - les estimateurs sont proches des vraies valeurs et cela pour les divers cas considérés et différentes tailles d'échantillon n, et plus n augmente plus les estimateurs s'améliorent et s'approchent de la vraie valeur des paramètres, et plus la valeur du biais diminue.

- Les $REQM$ sont généralement très petites. Également, on voit que la performance ($REQM$) des estimateurs a diminue lorsque la taille d'échantillon n augmente, donc on peut dire que l'estimateur du $MVTP$ est asymptotiquement consistant.

- la valeur du paramètre auto-régressif ϕ ne semble pas exercer une grande influence sur la précision de $\hat{\phi}$.Ce n'est pas le cas de la variance : en effet, la $REQM$ de $\hat{\sigma}^2$sont beaucoup plus grandes pour $\sigma^2 = 0.5$ que pour $\sigma^2 = 1$.

Ces simulations intensives confirment que la méthode du$MVTP$ donne des bons résultats, les propriétés asymptotiques générales sont vérifiées soit la convergence et la normalité asymptotique et aussi l'estimateur du $MVTP$ est asymptotique sans biais, mais l'inconvénient c'est qu'elle exige beaucoup de temps pour l'exécution à cause du calcul du déterminant de la matrice Γ^{-1}.

3.6 Étude comparative

Nous avons pu montrer des bonnes propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus de chaque méthode, telles que la convergence et la normalité asymptotique. Notons par ailleurs que l'estimation des paramètres d'un modèle auto -régressif AR(1) utilisant la méthode$MVTP$ donne de bons résultats, l'inconvénient est que sa mise en œuvre est complexe et lourde en temps de calcul. La méthode MVC donne presque les mêmes estimations que $MVTP$ et elle n'exige pas beaucoup de temps d'exécution, par contre la méthode de yule- walker est plus simple et la plus rapide mais également moins performante dans le cas de séries courtes.

Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons présenté une étude basée sur l'estimation des paramètres du processus linéaire gaussien auto-régressif AR(p) à partir d'une suite de n observations, et notre intérêt a été focalisé sur l'étude comparative des méthodes d'estimation du processus AR(p).

Les résultats de ce travail se résument principalement en les points suivants :

Dans le premier chapitre on présente une méthode proposée par Xiao-Guang Lv, Ting -zhu Huang qui nous a permis de calculer l'inverse de la matrice de Toeplitz

Dans le deuxième chapitre nous avons considéré l'estimation de Yule-Walker, puis le maximum de vraisemblance pour le modèle auto-régressif, nous avons construit les expressions explicites de la fonction de vraisemblance pour un modèle AR(1) et nous avons détecté l'EMV exact dans le cas d'un modèle auto-régressif d'ordre 1. Ce qui concerne le modèle AR(1) notre point de départ c'est d'utiliser deux méthodes :

1. La méthode de Maximum de Vraisemblance utilisant la décomposition de Cholesky qui nous a permis de trouver la forme analytique de l'EMV.
2. La méthode de Maximum de Vraisemblance utilisant l'inverse de la matrice de Toeplitz basée essentiellement sur le calcul de l'inverse de la matrice auto-covariance et son déterminant, mais avec cette dernière nous obtenons l'expression explicite de la fonction de vraisemblance est la même de celle de Cholesky, mais la maximisation de la vraisemblance étant réalisée par des méthodes numériques.

Dans le troisième chapitre nous avons validé les propriétés asymptotiques de l'estimateur obtenu de chaque méthode par une simulation numérique,puis nous avons effectuons une comparaison avec la méthode de Yule-Walker.

Nous avons constatoné que les deux méthodes MVC et MVTP donnent presque les mêmes estimations et des résultats trés satisfaisants, mais l'inconvénient de la méthode MVTP demande beaucoup de temps d'exécution de programme par rapport à MVC qu'elle est basée sur des formules explicites du l'EMV et facilement programmables pour des applications potentielles. La comparaison entre les méthodes (MVC, MVTP, EYW) montre la supériorité de la méthode de MVC notamment en terme de temps d'exécution par rapport à la méthode de MVTP et ces deux dernières sont bien meilleures que la méthode de Yule-Walker dans le cas de séries courtes .

Nous espérons qu'à travers ce mémoire nous avons pu répondre à la problématique posée et que cette étude a donnée les réponses espérées.

Annexe

Application de la méthode du maximum de vraisemblance exacte au modèle auto-régressif AR(p).

L'évaluation de la fonction de vraisemblance du modèle auto-régressif d'ordre p on se basant sur la relation unissant les fonctions de densité jointe,marginale et conditionnelle,[2]
Soit un processus AR(p) gaussien :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_P X_{t-p} + \varepsilon_t \qquad ou\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{3.2}$$

Le vecteur contenant les paramètres de la population à estimer est :

$$\theta = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p, \sigma^2) \tag{3.3}$$

Définissons X_p comme le vecteur de dimension $(p \times 1)$ qui contient les p premières observations de l'échantillon $(x_1, x_2, ..., x_p)$: De plus, nous savons que le processus AR(p) est centré . Définissons $\sigma^2 V_p$comme la matrice auto-covariance de $(X_1, X_2, ..., X_p)$:

$$\sigma^2 V_p = \begin{pmatrix} E(X_1)^2 & E(X_1X_2) & \dots & E(X_1X_p) \\ E(X_2X_1) & E(X_2)^2 & \dots & E(X_2X_p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E(X_pX_1) & E(X_pX_2) & \dots & E(X_p)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma(1) \\ \gamma(p-1) & \dots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

Où γ_j est l'auto-covariance d'ordre j pour un processus AR(p).
La densité des p premières observations est celle d'une variable qui suit une loi $N(0, \sigma^2 V_p)$ est :

$$f_{X_p}(x_1, x_2, ..., x_p, \theta) = (2\pi)^{\frac{-p}{2}} (\det \sigma^2 V_p)^{\frac{-1}{2}} \exp(\frac{-1}{2\sigma^2} X_p^t V_p^{-1} X_p) \tag{3.4}$$

Pour le reste des observations dans l'échantillon, $(x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n)$, il est possible d'utiliser la décomposition de l'erreur de prévision. Conditionnelle aux $t-1$ premières observations, l'observation t est gaussienne et de moyenne égale $\phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + ... + \phi_p x_{t-p}$

et de variance σ^2. Seuls les p observations les plus récentes sont prises en considération pour cette distribution. Alors,pour $t > p$

$$f_{X_t/X_{t-1},...,X_1}(x_t/x_{t-1},...,x_1,\theta) = f_{X_t/X_{t-1},...,X_{t-p}}(x_t/x_{t-1},...,x_{t-p},\theta)$$
$$f_{X_t/X_{t-1},...,X_1}(x_t/x_{t-1},...,x_1,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp[\frac{-(x_t-\phi_1 x_{t-1}-\phi_2 x_{t-2}-...-\phi_p x_{t-p})^2}{2\sigma^2}] \tag{3.5}$$

La fonction de vraisemblance pour la totalité de l'échantillon $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^t$ s'écrit :

$$f_X(x_n x_{n-1},...,x_1,\theta) = f_{X_p}(x_1,x_2,...,x_p,\theta) \times \prod_{t=p+1}^{n} f_{X_t/X_{t-1},...,X_{t-p}}(x_t/x_{t-1},...,x_{t-p},\theta)$$

Et la log-vraisemblance est alors :

$$L(\theta) = \log f_X(x_n x_{n-1},...,x_1,\theta) \tag{3.6}$$
$$L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 + \frac{1}{2}\log(\det V_p^{-1}) - \frac{1}{2\sigma^2}X_p^t V_p^{-1} X_p - \sum_{t=1+p}^{n}\frac{(X_t-\phi_1 X_{t-1}-\phi_2 X_{t-2}-...-\phi_p X_{t-p})^2}{2\sigma^2} \tag{3.7}$$

l'évaluation de (3.12) nécessite inversant la matrice V_p d'ordre $(p \times p)$,on note l'élément de V_p^{-1} de la colonne j et de ligne i par $v_{ij}(p)$.
Galbraith voir réf [11] montré que,

$$v_{ij}(p) = [\sum_{k=0}^{i-1}\phi_k\phi_{k+j-i}\sum_{k=p+1-j}^{p+i-j}\phi_k\phi_{k+j-i}\phi_k\phi_{k+j-i}] \qquad pour 1 \leq i \leq j \leq p \tag{3.8}$$

où $\phi_0 = -1$:Valeurs de $v_{ij}(p)$ pour $i > j$ on peut le déduire du fait que V_p^{-1} est symétrique $(v_{ij}(p) = v_{ji}(p))$.

Bibliographie

[1] Aldrich,J.(1990). R.A.*Fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922*, Statistical Science.

[2] Azencott,R, Dacunha-Castelle,D, (1986).*Series of irregular observa- tions, Springer Verlag, New York.*

[3] Box G.E.P.end Jenkins G.H.*Time séries analysis ,Forecasting and Control .Holden Day*, San Francisco(1976).

[4] Bourbaki,N.(2006).*ntroduction to Time Series and Forecasting.* Second Edition.

[5] Brockwell,PJ.and Davis,R.A.*Introduction to Time Series and Forecasting. Second Edition.*

[6] Cappe,O. Charbit,M. Moulines,E (2007),*Introduction aux series tem- porelles.*

[7] Charpentier,A,().*Introduction à la théorie des processus en temps discret Modèles ARIMA et méthode Box et Jenkins.*

[8] Davidson,R., MacKinnon,J.G.(1993).*Estimation and Inference in Econometrics. New York, Oxford University Press.*

[9] Daudin,J.J, et Duby,C et Trécourt,P. (1996).*Analyse de Séries Chronologiques. INA-PG, Mathématiques.*

[10] Deneire,L. (2008).*Estimation - Détection.*Notes de cours.

[11] Galbraith,R.F, and Galbraith,J.I. (1974).*On the Inverses of Some Pat- terned Matrices Arising in the Theory of Stationary Time Series. Jour- nal of Applied Probability 11 pp63-71.*

[12] Gentle,J.E.*Matrix algebra.*

[13] Girard,Y. (2011).*Séries chronologiques à une et plusieurs variables, synthèse des méthodes classiques et modèles à base de copules".*Mémoire présenté à l'université du Québec.

[14] Greene,W.H. (2005).*Econométrie.*Paris, Pearson Education.

[15] Hamilton,J.D (1954).*Time series analysis*

[16] Heinig,G et Rost, K. (1984).*Algebraic methods for Toeplitz-like matrices.and operators.*Birkhäuser Verlag, Bâle.

[17] Kestemont,R.M.*Sur l'evaluation de la fonction de vraisemblance du modèle ARMA stationnaire. Université catholique de Louvain.*

[18] Lavis,D.A, and Southern, B.W. (1996).*The inverse of asymmetric ban- ded Toeplitz matrix.*

[19] Perrin,D.*La méthode de cardon et les imaginaires.*

[20] Rainer von Sachs, Sébastien Van Bellegem.*Séries chronologiques. Insti- tut de statistique. Université catholique de Louvain.*

[21] Xiao-GuangLv and Ting-Zhu Huang. (2007).*A note on inversion of Toeplitz matrices. University of Electronic and Technology of China.*