REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT LMD

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par

Haddad Nabila

Thème

Solutions de quelques systèmes d'équations aux différences non linéaires

Soutenue le 22 Mai 2017 devant le jury composé de :

Présidente :	Mme. D. **Azzam-Laouir**	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Rapporteur :	Mr. N. **Touafek**	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examinateurs :	Mr. A. **Gasmi**	Prof	U. Mohamed Boudiaf, M'sila
	Mr. M. S. **Abdelouahab**	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila
	Mr. A. **Bouchair**	MCA	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Remerciements

Tout d'abort, mes remerciements vont à **Allah** le tout Puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donnée pour terminer cette thèse.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Prof. **Touafek Nouressadat** de m'avoir fait confiance en me proposant le sujet de cette thèse, pour sa disponibilité, son soutien, ses conseils, ses encouragements et surtout sa patience tout au long de ces cinqs années. Il m'a apporté une compréhension plus approfondie des différents aspects de la recherche.

Je remercie Madame **Azzam-Laouir Dalila** pour qui j'ai une grande estime et beaucoup de respect pour avoir été mon enseignante et encadreur en master, d'avoir accepter de présider le jury. Merci également à messieurs **Gasmi Abdelkader, Mohammed Salah Abdelouahab** et **Bouchair Abderahmane**, pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie particulièrement les membres des laboratoires LMAM et LMPA, mes collègues de la salle des doctorants pour leur encouragements et leur aide, mes remerciment vont aussi aux enseigments du déparetement de Mathématiques qui ont participé à ma formation autant qu'étudiante en licence et master.

J'adresse aussi ma gratitude la plus sincère à mes parents, pour leur aide, leur bienveillance et surtout leur confiance et leur amour. Mes remerciements à mon frère, mes soeurs, ma grande famille et mes amies.

Résumé

Le but de cette thèse est l'étude de quelques systèmes d'équations aux différences de type rationnels.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité locale et globale des points d'équilibre et l'existence des solutions non-bornées d'un système de k-équations aux différences.

Dans chacun des trois autres chapitres, et comme généralisation de certains résultats existants dans la littérature, nous donnons les formes explicites des solutions de trois systèmes et on se serve de ces formes pour étudier le caractère périodique et le comportement asymptotique des solutions.

Mots-clés : Équations aux différences, Systèmes d'équations aux différences, Stabilité, Périodicité.

Abstract

In this thesis we study some systems of rational differences equations.

In the first chapter, we investigate the locale and the global stability of the equilibrium points, and the existence of unbounded solutions of a system of k difference equations.

In the second, the third and the fourth chapters, we solve in closed form three systems of difference equations. We use the obtained formulas to study the periodicity and the asymptotic behavior of the solutions.

Keywords : Difference equation, Systems of difference equations, Stability, Periodicity.

Arab

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **8**

1 Sur le comportement des solutions d'un système d'ordre 1 de k-équations aux différences **11**

1.1 Rappels 11

1.2 Le comportement qualitatif d'un système de k-équations aux différences d'ordre 1 16

1.2.1 Stabilité locale et globale des points d'équilibre 18

1.2.2 Oscillation et existence des solutions non bornées 23

2 Sur les solutions du système d'équations aux différences $x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta$, $y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha$ **28**

2.1 La forme des solutions du système (2.1) 29

2.2 Comportement asymptotique et périodicité des solutions du système (2.1) avec $a = b$ 36

2.3 Exemples Numériques 41

3 La forme et le comportement des solutions du système d'équations aux différences d'ordre supérieur $x_{n+1} = \frac{x^p_{n-k+1} y_n}{a y^p_{n-k} + b y_n}$, $y_{n+1} = \frac{y^p_{n-k+1} x_n}{\alpha x^p_{n-k} + \beta x_n}$ **46**

3.1 La forme des solutions du système (3.2) 47

3.2 Le comportement des solutions du système (3.2) avec $p = 1$ 54
3.3 Exemples Numériques 70

4 Forme des solutions du système d'équations aux différences $x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)}\left(a_n+b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)}$, $y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)}\left(\alpha_n+\beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}$ **77**
4.1 La forme des solutions du système (4.1). 78
4.2 Sur la périodicité des solutions du système (4.1) avec coefficients constants 83

Conclusion et perspectives **87**

Bibliographie **89**

Introduction

Les équations aux différences est un sujet ancien et très fréquent dans plusieurs branches de la science. Les équations aux différences se manifestent comme outil indispensable dans la modélisation de plusieurs phénomènes de la vie réelle, par exemple dans l'étude des populations. En analyse numérique, plusieurs méthodes de discrétisation d'équations différentielles ordinaires ou à dérivées partielles, méthode d'Euler, Crank-Nicolson, Runge-Kutta, ... , nous ramène à des équations aux différences.

Récemment, un intérêt qui ne cesse d'augmenter est accordé aux équations aux différences (non) linéaires par plusieurs chercheurs, voir par exemple les références [1]-[44]. Principalement cette ligne de recherche va dans deux directions : la première focalise sur la stabilité des solutions en utilisant la méthode de stabilité par linéarisation (de Lyapunov) et l'autre consiste à trouver la forme fermée des solutions.
En général, résoudre une équation aux différences non linéaire est une tache très difficile. La raison principale de cette difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode systématique à suivre pour traiter ce genre d'équations. Cependant dans centaines cas, et en transformant au type linéaire, voir par exemple [17]–[19]) et [27]–[33]), plusieurs équations aux différences ont été résolues.

Dans notre thèse nous résolvant explicitement trois systèmes d'équations aux différences non linéaires de type rationnel, mais aussi on étudiera la stabilité des points d'équilibre d'un système à k-équations aux différences de type rationnel.

La thèse se compose d'une introduction et quatre chapitres.
Dans la première partie du premier chapitre nous donnons un bref rappel sur quelques définitions et résultats connus utiles pour notre travail. Le comportement des solutions des systèmes d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + cy_n}, \; y_{n+1} = \frac{y_n}{b + dx_n}, \quad n = 0, 1, ...,$$

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{1 + y_n^p}, \; y_{n+1} = \frac{By_n}{1 + x_n^p}, \quad n = 0, 1, ...,$$

a été étudié respectivement dans [2] et [44]. Inspiré par ces études, dans la deuxième partie de ce chapitre et comme généralisation de ces systèmes, on étudiera le comportement des solutions du système de $k-$équations aux différences suivant, voir [16].

$$y_{n+1}^{(1)} = \frac{a_1 y_n^{(1)}}{b_1 + c_1 (y_n^{(2)})^{p_1}}, \; y_{n+1}^{(2)} = \frac{a_2 y_n^{(2)}}{b_2 + c_2 (y_n^{(3)})^{p_2}}, \dots,$$

$$y_{n+1}^{(k-1)} = \frac{a_{k-1} y_n^{(k-1)}}{b_{k-1} + c_{k-1} (y_n^{(k)})^{p_{k-1}}}, y_{n+1}^{(k)} = \frac{a_k y_n^{(k)}}{b_k + c_k (y_n^{(1)})^{p_k}}, \quad n \in \mathbb{N}, \, k = 2, 3, \cdots .$$

Dans [6], les auteurs s'intéressent particulièrement à la forme des solutions de l'équation

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{x_n - 1} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Motivé par cette équation, la forme, la périodicité et le comportement des solutions du système d'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{a x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \;\; y_{n+1} = \frac{b x_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N},$$

feront l'objet du deuxième chapitre, voir [17].
Dans le troisième chapitre, voir aussi [18], on s'intéresse à la forme explicite et à l'étude du comportement des solutions du système d'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k+1}^p y_n}{a y_{n-k}^p + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-k+1}^p x_n}{\alpha x_{n-k}^p + \beta x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \; p, k \in \mathbb{N}^*.$$

Cette étude est une généralisation des résultats exposés dans [38].

Le dernier chapitre est consacré au système d'équations aux différences d'ordre supérieur avec coefficients variables (non autônome) suivant, voir [19].

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)}\left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)}, \quad y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)}\left(\alpha_n + \beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette étude a été motivé par les travaux de Elsayed et Ibrahim [13] et Ibrahim [22].

CHAPITRE 1

Sur le comportement des solutions d'un système d'ordre 1 de k-équations aux différences

1.1 Rappels

Dans cette partie, on rappelle quelques définitions et résultats utiles pour le reste de la thèse. Pour plus de détails et de résultats nous renvoyons aux références [7, 15, 23, 24].

Définition 1.1.1 *Une équation aux différences (non autônome) linéaire d'ordre $k+1$, $k \in \mathbb{N}$, est une équation de la forme*

$$y_{n+1} + p_0(n)y_n + p_1(n)y_{n-1} + \cdots + p_k(n)y_{n-k} = g(n), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

où $g(n), p_i(n), i = 0, 1, ..., k$, sont des fonctions réelles avec $p_k(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et y_{-k}, $y_{-k+1}, \ldots, y_0 \in \mathbb{R}$ sont les valeurs initiales.

Remarque 1.1.1 *i) Une suite* $\{y_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est dite solution de l'équation* (1.1) *si elle satisfait cette équation.*

ii) Si on fixe les valeurs initiales $y_{-k}, \ldots, y_0$, *alors l'équation aux différences* (1.1) *admet une et une seule solution.*

iii) Si g *et* p_i, $i = 0, 1, ..., k$ *ne dépendent pas de* n, *alors l'équation* (1.1) *est dite autônome.*

Le lemme suivant sera très utile pour la suite de la thèse.

Lemme 1.1.1 *Soient* $\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\{b_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *deux suites dans* $\mathbb{R}$. *Considérons l'équation aux différences linéaire du premier ordre (non autônome)*

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$y_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r.$$

En outre, si a_n *et* b_n *sont constants (c-à-d* $a_n = a$ *et* $b_n = b$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*), et dans ce cas, l'équation est dite autônome, on a*

$$y_n = \begin{cases} y_0 + bn, & a = 1, \\ a^n y_0 + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) b, & a \neq 1. \end{cases} , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le corollaire suivant est une conséquence du lemme précédent.

Corollaire 1.1.1 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$, *Considérons l'équation aux différences linéaire du deuxième ordre autônome suivante*

$$y_{n+2} = a y_n + b, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{2n} = \begin{cases} y_0 + bn, & a = 1, \\ a^n y_0 + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) b, & sinon, \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{2n+1} = \begin{cases} y_1 + bn, & a = 1, \\ \\ a^n y_1 + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) b, & sinon, \end{cases}$$

Maintenant on donne une définition plus générale d'une équation aux différences. Soit G une partie de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, et soit

$$f : \mathbb{N} \times G^{k+1} \longrightarrow G$$

une fonction continue.

Définition 1.1.2 *Une équation aux différences (non autônome) d'ordre* $(k+1)$ *est une équation de la forme*

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

avec $x_0,\ x_{-1}, ...,\ x_{-k} \in G$*, sont les valeurs initiales.*

Remarque 1.1.2 *i) Si f ne dépend pas de n, i.e.,*

$$f : G^{k+1} \longrightarrow G$$

alors l'équation (1.2) *est dite autônome et on écrit*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}).$$

ii) Si l'équation (1.2) *prend la forme* (1.1) *on dit que c'est une équation aux différences linéaire.*

Définition 1.1.3 *Un système (non autônome) d'ordre* $(k+1)$ *de deux équations aux différences est un système de la forme*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-k}), \\ y_{n+1} = g(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-k}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

avec $k \in \mathbb{N}$ *et*

$$f, g : \mathbb{N} \times G^{2k+2} \longrightarrow G$$

sont deux fonctions continues et $x_0, x_{-1}, ..., x_{-k}, y_0, y_{-1}, ..., y_{-k} \in G$*, sont les valeurs initiales.*

Remarque 1.1.3 *i) Si f et g ne dépendant pas de n le système est dite autônome.*

ii) Le système (1.3) *est dit linéaire si f et g s'écrivent*

$f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) = \alpha_0(n)x_n + \alpha_1(n)x_{n-1} + \ldots + \alpha_k(n)x_{n-k} + \beta_0(n)y_n + \beta_1(n)y_{n-1} + \ldots + \beta_k(n)y_{n-k} + \gamma(n)$

et

$g(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, y_{n-k}) = \hat{\alpha}_0(n)x_n + \hat{\alpha}_1(n)x_{n-1} + \ldots + \hat{\alpha}_k(n)x_{n-k} + \hat{\beta}_0(n)y_n + \hat{\beta}_1(n)y_{n-1} + \ldots + \hat{\beta}_k(n)y_{n-k} + \hat{\gamma}(n)$.

avec α_i, $\hat{\alpha}_i$, β_i, $\hat{\beta}_i$, $i = 0, 1, \cdots, k$ et γ, $\hat{\gamma}$ sont des fonctions réels, tels que, l'une des fonctions α_k, β_k, $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$ ne s'annule pas dans $\mathbb{N}$.

Définition 1.1.4 (Périodicité) *i) Une suite $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est dite éventuellement périodique de période p, $p \in \mathbb{N}^*$, s'il existe $n_0 \geq -k$, tel que*

$$x_{n+p} = x_n, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Si $n_0 = -k$, la suite $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est dite périodique.

ii) Une solution $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ du système (1.3) *est dite éventuellement périodique (resp. périodique) de période p, $p \in \mathbb{N}^*$, si les deux suites $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ et $\{y_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ sont éventuellement périodique (resp. périodique) de période p.*

Maintenant nous donnons quelques éléments de la notion de stabilité par linéairisation. Considérons le système d'équations aux différences non linéaire (autônome)

$$X_{n+1} = F(X_n), \ n = 0, 1, \ldots, \tag{1.4}$$

avec

$$F : \ G^k \longrightarrow G^k,$$

où $G \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ est une fonction continue et $X_0 \in G^k \subset \mathbb{R}^k$ le vecteur initial.

Définition 1.1.5 *Un point $\overline{X} \in G^k$ est dit point d'équilibre du système* (1.4) *si*

$$\overline{X} = F(\overline{X}).$$

Remarque 1.1.4 *1) Le système* (1.4) *est dit linéaire (autônome), s'il s'écrit*

$$X_{n+1} = AX_n,$$

avec A est une matrice constante carrée d'ordre k.

2) Si F dépend aussi de n, i.e.,

$$F: \ \mathbb{N} \times G^k \longrightarrow G^k,$$

le système est dit non autônome et on écrit :

$$X_{n+1} = F(n, X_n), \ n = 0, 1, \ldots,$$

ce dernier est dit linéaire (non autônome) s'il s'écrit

$$X_{n+1} = A(n)X_n,$$

avec $A(n)$ est une matrice variable carrée d'ordre k.

Supposons que la fonction F est de classe C^1. Alors, le système linéaire associée au système (1.4) autour du point d'équilibre $\overline{X}$ est donnée par :

$$Y_{n+1} = AY_n, \ n = 0, 1, \ldots,$$

avec $Y_n \in \mathbb{R}^k$ et A la matrice Jacobienne de F évaluer au point $\overline{X}$.

Définition 1.1.6 *Soient $\overline{X}$ un point d'équilibre du système* (1.4) *et $\| \, . \, \|$ une norme sur $\mathbb{R}^k$.*

1. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit stable (localement stable) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\| X_0 - \overline{X} \| < \delta$ implique $\| X_n - \overline{X} \| < \epsilon$ pour $n \geq 0$.*
2. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit asymptotiquement stable (localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe $\gamma > 0$ tel que,$\| X_0 - \overline{X} \| < \gamma$ implique*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = \overline{X}.$$

3. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit globalement attractif, si pour tout X_0,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = \overline{X}.$$

4. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit globalement (asymptotiquement) stable s'il est localement stable et globalement attractif.*
5. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Le résultat suivant établit des conditions suffisantes pour la stabilité ou l'instabilité d'un point d'équilibre du système (1.4).

Théorème 1.1.1 1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ du système* (1.4) *est asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ du système* (1.4) *est instable.*

1.2 Le comportement qualitatif d'un système de k-équations aux différences d'ordre 1

Le comportement des solutions des systèmes d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + cy_n},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{b + dx_n}, \quad n = 0, 1, ...,$$

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{1 + y_n^p},\ y_{n+1} = \frac{By_n}{1 + x_n^p}, \quad n = 0, 1, ...,$$

où a, b, c, d, A et B sont des nombres réels, ont été étudié respectivement dans [2] et [44]. Dans cette partie et comme généralisation de ces systèmes, on va étudier le comportement des solutions du système d'équations aux différences

$$y_{n+1}^{(1)} = \frac{a_1 y_n^{(1)}}{b_1 + c_1 (y_n^{(2)})^{p_1}},\ y_{n+1}^{(2)} = \frac{a_2 y_n^{(2)}}{b_2 + c_2 (y_n^{(3)})^{p_2}}, \dots,$$

$$y_{n+1}^{(k-1)} = \frac{a_{k-1} y_n^{(k-1)}}{b_{k-1} + c_{k-1} (y_n^{(k)})^{p_{k-1}}}, y_{n+1}^{(k)} = \frac{a_k y_n^{(k)}}{b_k + c_k (y_n^{(1)})^{p_k}}, \quad n \in \mathbb{N}, k = 2, 3, \cdots, \tag{1.5}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{N}^*$, les paramètres a_i, b_i, c_i, $i = 1, \ldots, k$, sont dans $]0, +\infty[$, les valeurs initiales $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots, y_0^{(k)}$ sont des nombres réels positifs.

Par le changement de variable

$$x_n^{(i)} = \left(\frac{c_{i-1}}{b_{i-1}}\right)^{\frac{1}{p_{i-1}}} y_n^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

avec $c_0 = c_k$, $b_0 = b_k$, $p_0 = p_k$, le système (1.5) se réduit au système

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha_i x_n^{(i)}}{1 + (x_n^{(i+1)})^{p_i}}, \quad i = 1, \ldots, k, \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

avec la convention $x_n^{(k+1)} = x_n^{(1)}$.

Soit $\mathbf{X}_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)})^T$, alors le système (1.6) peut s'écrire sous la forme

$$X_{n+1} = \mathbf{F}(X_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où **F** est la fonction

$$\mathbf{F} : [0, \infty[^k \rightarrow [1, \infty[^k$$

tel que

$$\mathbf{F}(X_n) = (f_1(X_n), \ldots, f_k(X_n))^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec les fonctions $(f_i)_{i=1,\ldots,k}$

$$f_i : [0, \infty[^k \rightarrow [0, \infty[$$

sont définies par

$$f_i(X_n) = \frac{\alpha_i x_n^{(i)}}{1 + (x_n^{(i+1)})^{p_i}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.2.1 *Un point $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k) \in [0, \infty[^k$ est dit point d'équilibre pour le système* (1.6) *si*

$$\bar{x}_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k) = \frac{\alpha_i \bar{x}_i}{1 + (\bar{x}_{i+1})^{p_i}}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Il est clair que $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) \in [0, \infty[^k$ est un point d'équilibre du système (1.6) *si et seulement si*

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}).$$

$\bar{\mathbf{X}} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k) = (0, 0, \ldots, 0) := \mathbf{0}$ est toujours point d'équilibre du système (1.6). De plus, si $\alpha_i > 1$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, le système (1.6) admet aussi le point d'équilibre

$$\bar{\mathbf{X}}^+ := \left((\alpha_k - 1)^{\frac{1}{p_k}}, (\alpha_1 - 1)^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, (\alpha_{k-1} - 1)^{\frac{1}{p_{k-1}}}\right) \in]0, \infty[^k.$$

1.2.1 Stabilité locale et globale des points d'équilibre

Dans les théorèmes suivants nous examinons la stabilité locale et globale du point d'équilibre trivial $\mathbf{0}$.

Théorème 1.2.1 *i) Si $\alpha_i < 1$, pour tout $i = 1, \ldots, k$, alors le point d'équilibre trivial est localement asymptotiquement stable.*

ii) Si il existe un $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\alpha_{i_0} > 1$, alors le point d'équilibre trivial est instable.

Preuve. Le système d'équations aux différences linéaire associé au système (1.6) autour du point d'équilibre trivial est donné par

$$Y_{n+1} = \mathtt{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) Y_n, \; n = 0, 1, \ldots,$$

où $Y_n \in \mathbb{R}^k$ et $\mathtt{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ est la matrice diagonale avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont les éléments de la diagonale. Ainsi, son polynôme caractéristique est donnée par

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_k).$$

Alors les racines de $P(\lambda)$ sont les $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$. Donc par le Théorème (1.1.1), on a les résultats souhaités.

■

Théorème 1.2.2 *Supposons que $\alpha_i < 1$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, alors le point d'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{\mathbf{X}_n\}_{n=0}^{\infty}$ une solution du système (1.6). Par le théorème précédent $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ est localement asymptotiquement stable, alors il suffit de prouver que le point d'équilibre trivial $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{0},$$

ce qui équivalent à

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Nous avons

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha_i x_n^{(i)}}{1 + (x_n^{(i+1)})^{p_i}} \leq \alpha_i x_n^{(i)},\ i = 1, \ldots, k.$$

Ainsi, par récurrence, nous obtenons

$$x_n^{(i)} \leq \alpha_i^n x_0^{(i)}, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

■

Exemple 1.2.1 *Considérons le système* (1.6) *avec*

k	α_1	α_2	α_3	p_1	p_2	p_3
3	1/2	2/3	3/4	4	3	1

Supposons que $x_0^{(1)} = 45$, $x_0^{(2)} = 18$ *et* $x_0^{(3)} = 22$. *Des figures* (1.1), (1.2) *et* (1.3)*), on voit que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} = \lim_{n\to+\infty} x_n^{(2)} = \lim_{n\to+\infty} x_n^{(3)} = 0.$$

Définition 1.2.1 *Un polynôme $P(x)$ de degré n s'écrit sous sa forme la plus générale :*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

où les coefficients a_i, $i = 0, \cdots, n$, sont des nombres complexes.

Remarque 1.2.2 *Le polynôme $P(x)$ admet exactement n racines sur $\mathbb{C}$ (d'aprés le théorème de d'Alembert-Gauss).*

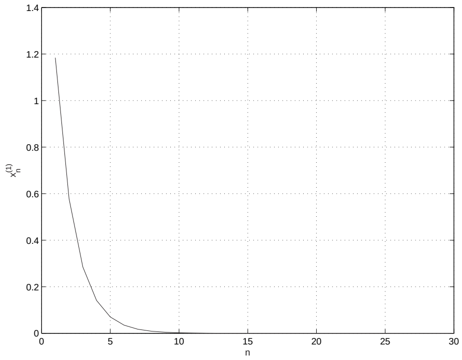

FIG. 1.1 – Graphique de $x_n^{(1)}$

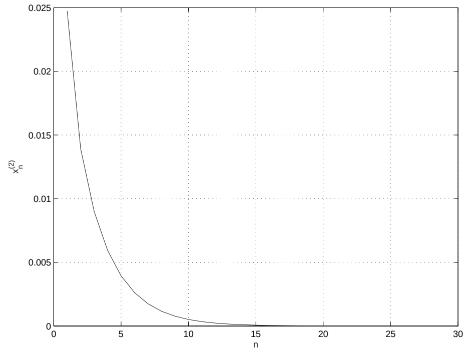

FIG. 1.2 – Graphique de $x_n^{(2)}$

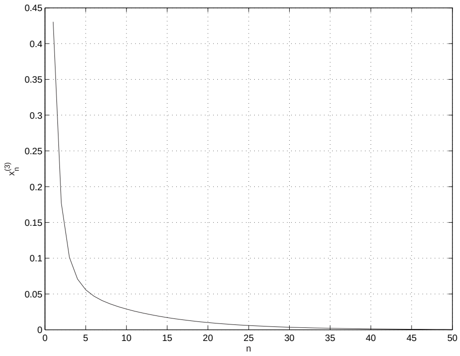

FIG. 1.3 – Graphique de $x_n^{(3)}$

Théorème 1.2.3 ***(Formule de Viète)*** *Soient P un polynôme défini comme ci-dessus et r_i, $i = 1, \cdots, n$, les n racines de P, éventuellement multiples. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = (-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Dans le résultat suivant, on démontre que le point d'équilibre $\bar{\mathbf{X}}^+$ du système (1.6) est instable.

Théorème 1.2.4 *Si $\alpha_i > 1$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Alors, le point d'équilibre positif $\bar{\mathbf{X}}^+$ du système* (1.6) *est instable.*

Preuve. Le système d'équations aux différences linéaire associée au système (1.6) autour du point d'équilibre $\bar{\mathbf{X}}^+$ est

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{B}\,\mathbf{Y}_n,\ n = 0, 1, \ldots,$$

où $\mathbf{Y}_n \in \mathbb{R}^k$ et

$$\mathbf{B} := [b_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i, \\ \dfrac{-p_i\bar{x}_i(\bar{x}_{i+1})^{p_i-1}}{\alpha_i}, & \text{si } j = i+1,\ i = 1, \dots, k-1, \\ \dfrac{-p_k\bar{x}_k(\bar{x}_1)^{p_k-1}}{\alpha_k}, & \text{si } i = k \text{ et } j = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la matrice **B** est donnée par

$$(1-\lambda)^k + (-1)^{k-1} b_{1\,2} b_{2\,3} \dots b_{k-1\,k} b_{k\,1} = 0,$$

ainsi

$$(1-\lambda)^k - \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i} = 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} b_{1\,2}b_{2\,3}\cdots b_{k-1\,k}b_{k\,1} &= (-1)^k \frac{p_1\bar{x}_1(\bar{x}_2)^{p_1-1}}{\alpha_1}\frac{p_2\bar{x}_2(\bar{x}_3)^{p_2-1}}{\alpha_2}\cdots\frac{p_{k-1}\bar{x}_{k-1}(\bar{x}_k)^{p_{k-1}-1}}{\alpha_{k-1}}\frac{p_k\bar{x}_k(\bar{x}_1)^{p_k-1}}{\alpha_k} \\ &= (-1)^k \frac{p_1p_2\cdots p_k(\bar{x}_1)^{p_k}(\bar{x}_2)^{p_1}\cdots(\bar{x}_k)^{p_{k-1}}}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} \\ &= (-1)^k \frac{p_1p_2\cdots p_k(\alpha_k-1)(\alpha_1-1)\cdots(\alpha_{k-1}-1)}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}. \end{aligned}$$

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = (1-x)^k - \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i},$$

alors

$$f'(x) = -k(1-x)^{k-1}.$$

On distingue deux cas possibles.

(i) $k = 2l,\ l \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est continue dans $[1, \infty[$, $f(1) = -\prod_{i=1}^{2l} \frac{p_i(\alpha_i-1)}{\alpha_i} < 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe $\lambda_1 > 1$ tel que $f(\lambda_1) = 0$. Il s'ensuit que le point d'équilibre $\bar{\mathbf{X}}^+$ est instable.

(ii) $k = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, comme f est strictement croissante, donc par la théorème des valeurs intermédiaires, il existe λ_1, réel unique, tel que $f(\lambda_1) = 0$.

Examinons si $|\lambda_1| > 1$, comme $f(1) = -\prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i} < 0$, alors, pour tout $x \in]1, +\infty[$ nous avons $f(x) < -\prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}$, c'est-à-dire $f(x) \neq 0$, ainsi, $\lambda_1 \notin]1, +\infty[$. D'autre part, nous avons $f(-1) = 2^{2l+1} - \prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}$, d'où, on a deux possibilités.

(1). Supposons que $2^{2l+1} < \prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}$, alors, $f(-1) < 0$ cela implique que, $\lambda_1 \in]-\infty, -1[$. Par le Théorème 1.1.1, il s'ensuit que le point d'équilibre $\bar{\mathbf{X}}^+$ est instable.

(2). Supposons que $2^{2l+1} \geq \prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}$, alors $f(-1) \geq 0$, d'où, $\lambda_1 \in]-1, 1[$ si $f(-1) > 0$ et λ_1 prend exactement la valeur -1 si $f(-1) = 0$ (i.e. $2^{2l+1} = \prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}$). D'autre part, sur $\mathbb{C}$, f admet $2l+1$ racines et puisque il y a une seule racine réelle λ_1, donc les $2l$ racines restantes de f sont complexes conjuguées (deux à deux), notons par $\{\lambda_j\}_2^{2l+1}$.

Considérons la fonction g définie par

$$g(y) = y^{2l+1} - \prod_{i=1}^{2l+1} \frac{p_i(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}.$$

Sur $\mathbb{C}$, g admet $2l+1$ racines. On note ces racines par $\{\beta_j\}_1^{2l+1}$. Alors, par la formule de Viète, nous avons

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \beta_j = 0.$$

Évidement, on a $\lambda_j = 1 - \beta_j$, $j = 1, \ldots, 2l+1$ (car $f(1-y) = g(y)$). D'où, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{2l+1} (1 - \beta_j) = 2l + 1 - \sum_{j=1}^{2l+1} \beta_j = 2l + 1.$$

Ainsi, comme $\lambda_1 < 1$ (la racine réelle de la fonction f), on a

$$\sum_{j=2}^{2l+1} \lambda_j > 2l.$$

En effet

$$\begin{aligned} \lambda_1 < 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{2l+1} \lambda_j < 1 + \sum_{j=2}^{2l+1} \lambda_j \\ &\Rightarrow \quad 2l + 1 < 1 + \sum_{j=2}^{2l+1} \lambda_j \\ &\Rightarrow \quad 2l < \sum_{j=2}^{2l+1} \lambda_j. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $\{\lambda_j\}_{j=2}^{2l+1}$ sont des racines complexes conjuguées deux à deux, alors on peut écrire $\lambda_{2j} = a_j + ib_j$ et $\lambda_{2j+1} = a_j - ib_j$, $j = 1, \ldots, l$, avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. D'où,

$$\sum_{j=2}^{2l+1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{l} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}) = \sum_{j=1}^{l} (a_j + ib_j + a_j - ib_j) = 2 \sum_{j=1}^{l} a_j.$$

En utilisant le fait que $\sum_{j=2}^{2l+1} \lambda_j > 2l$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{l} a_j > l,$$

donc, il existe au moins un $r \in \{1, \ldots, l\}$ tel que $a_r > 1$. D'où,

$$|\lambda_{2r}| = |\lambda_{2r+1}| = |a_r + ib_r| = |a_r - ib_r| > |a_r| > 1,$$

ainsi, par le théorème 1.1.1, le point d'équilibre $\bar{\mathbf{X}}^+$ est instable. ■

1.2.2 Oscillation et existence des solutions non bornées

Ici nous étudions l'oscillation et l'existence des solutions non bornées du système (1.6).

Définition 1.2.2 (Oscillation) *i) Une suite $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ est dite non oscillatoire par rapport au point $\bar{x}$, s'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, soit*

$$x_n \geq \bar{x} \quad \textit{pour tout} \quad n \geq n_0,$$

ou bien

$$x_n < \bar{x} \quad \textit{pour tout} \quad n \geq n_0.$$

Sinon, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *est dite oscillatoire.*

ii) *Une solution* $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty} = \{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \cdots, x_n^{(k)})\}_{n=0}^{+\infty}$ *du système* (1.6) *est dite non oscillatoire autour du point* $\bar{\mathbf{X}} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$, *si pour tout* $i = 1, \ldots, k$, *la suite* $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^{+\infty}$ *est non oscillatoire autour du point* $\bar{x}_i$.

Théorème 1.2.5 *Supposons que* $k = 2l$, $\alpha_i > 1$ *pour tout* $i = 1, \ldots, 2l$, *soit* $\{\mathbf{X}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(2l)})\}_0^{\infty}$ *une solution du système* (1.6) *telle que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée*

(H.1) $x_0^{(2j-1)} < \bar{x}_{2j-1}$ *et* $x_0^{(2j)} \geq \bar{x}_{2j}$, $j = 1, \ldots, l$,

(H.2) $x_0^{(2j-1)} \geq \bar{x}_{2j-1}$ *et* $x_0^{(2j)} < \bar{x}_{2j}$, $j = 1, \ldots, l$.

Alors, $\{\mathbf{X}_n\}_0^{\infty}$ *est non-oscillatoire par rapport au point d'équilibre* $\bar{\mathbf{X}}^+$

Preuve. Soit $\{\mathbf{X}_n\}_0^{\infty} = \{(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(2l)})\}_{n=0}^{\infty}$ une solution du système (1.6), tel que l'hypothèse (H.1) est vérifiée, alors pour tout $j = 1, \ldots, l$, on a

$$x_1^{(2j-1)} = \frac{\alpha_{2j-1} x_0^{(2j-1)}}{1 + (x_0^{(2j)})^{p_{2j-1}}} < \frac{\alpha_{2j-1} \bar{x}_{2j-1}}{1 + (\bar{x}_{2j})^{p_{2j-1}}} = \bar{x}_{2j-1},$$

et

$$x_1^{(2j)} = \frac{\alpha_{2j} x_0^{(2j)}}{1 + (x_0^{(2j+1)})^{p_{2j}}} > \frac{\alpha_{2j} \bar{x}_{2j}}{1 + (\bar{x}_{2j+1})^{p_{2j}}} = \bar{x}_{2j}.$$

Par récurrence, il est facile de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n^{(2j-1)} < \bar{x}_{2j-1} \qquad \text{et} \qquad x_n^{(2j)} > \bar{x}_{2j},$$

d'où $(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(2l)})$ est non-oscillatoire par rapport au point d'équilibre $\bar{\mathbf{X}}^+$. De même, si l'hypothèse (H.2) est vérifiée, nous obtenons

$$x_n^{(2j-1)} > \bar{x}_{2j-1},\ x_n^{(2j)} < \bar{x}_{2j},\ j = 1, \ldots, l,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

■

Théorème 1.2.6 *Supposons que* $k = 2l$*, et* $\alpha_i > 1$, $i = 1, \ldots, 2l$*, soit* $\{(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(2l)})\}_0^\infty$ *une solution du système* (1.6).

(i) Si $(x_0^{(2j)}, x_0^{(2j-1)}) \in]0, \bar{x}_{2j}[\times]\bar{x}_{2j-1}, \infty[$, $\forall j = 1, \ldots, l$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(2j)} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(2j-1)} = \infty, \quad j = 1, \ldots, l.$$

(ii) Si $(x_0^{(2j)}, x_0^{(2j-1)}) \in]\bar{x}_{2j}, \infty[\times]0, \bar{x}_{2j-1}[$, $\forall j = 1, \ldots, l$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(2j)} = \infty \quad et \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(2j-1)} = 0, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Preuve. Montrons *i*), le cas *ii*) se démontre d'une manière similaire.

Soit $\{(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(2l)})\}_0^\infty$ une solution du système (1.6). Supposons

$$(x_0^{(2j)}, x_0^{(2j-1)}) \in]0, \bar{x}_{2j}[\times]\bar{x}_{2j-1}, \infty[, \quad j = 1, \ldots, l,$$

alors par le théorème 1.2.5 (H.2), nous obtenons

$$x_n^{(2j-1)} > \bar{x}_{2j-1} \quad \text{et} \quad x_n^{(2j)} < \bar{x}_{2j},\ j = 1, \ldots, l,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où, pour $j = 1, \ldots, l$, on a

$$x_{n+1}^{(2j-1)} = \frac{\alpha_{2j-1} x_n^{(2j-1)}}{1 + (x_n^{(2j)})^{p_{2j}}} > \frac{\alpha_{2j-1} x_n^{(2j-1)}}{1 + (\bar{x}_{2j})^{p_{2j}}} = x_n^{(2j-1)},$$

et

$$x_{n+1}^{(2j)} = \frac{\alpha_{2j} x_n^{(2j)}}{1 + (x_n^{(2j+1)})^{p_{2j+1}}} < \frac{\alpha_{2j} x_n^{(2j)}}{1 + (\bar{x}_{2j+1})^{p_{2j+1}}} = x_n^{(2j)}.$$

Ainsi, les suites $(x_n^{(2j-1)})$, $j = 1, \ldots, l$, sont strictement croissantes et les suites $(x_n^{(2j)})_n$, $j = 1, \ldots, l$ sont strictement décroissantes. Alors, les suites $(x_n^{(2j)})_n$, $j = 1, \ldots, l$, sont convergentes vers une limite disant L_j, et les sous suites $(x_n^{(2j-1)})_n$, $j = 1, \ldots, l$ sont non bornées.

En effet, supposons que la suite $(x_n^{(2j-1)})$ est bornée, alors elle est convergente, soit T_j sa limite.

On a

$$x_{n+1}^{(2j-1)} = \frac{\alpha_{2j-1} x_n^{(2j-1)}}{1 + (x_n^{(2j)})^{p_{2j}}},$$

en prenant la limite dans les deux cotés de l'égalité ci-dessus, nous obtenons

$$T_j = \frac{\alpha_{2j-1}\, T_j}{1+(L_j)^{p_{2j}}},$$

de l'hypothèse (i) et le fait que (x_n^{2j-1}) est strictement croissante, on a $T_j \neq 0$, donc

$$L_j = \left(\alpha_{2j-1} - 1\right)^{\frac{1}{p_{2j}}} = \bar{x}_{2j},$$

ce qui encore impossible grâce à l'hypothèse (i) et le fait que $(x_n^{(2j)})$ est stricetement décroissante, alors $(x_n^{(2j-1)})$ est non bornée, d'où

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(2j-1)} = +\infty.$$

D'autre part,

$$x_{n+1}^{(2j)} = \frac{\alpha_{2j} x_n^{(2j)}}{1+(x_n^{(2j+1)})^{p_{2j+1}}},$$

en prenant la limite dans les deux cotés de l'égalité ci-dessus, nous obtenons

$$L_j = \frac{\alpha_{2j}\, L_j}{1+\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(2j+1)}\right)^{p_{2j+1}}}.$$

En utilisant le fait que $\lim_{n\to\infty} x_n^{(2j+1)} = +\infty$, il résulte que $L_j = 0$. ∎

Exemple 1.2.2 *Considérons le système* (1.6) *avec*

k	α_1	α_2	α_3	α_4	p_1	p_2	p_3	p_4
4	28	10	6	17	3	2	1	2

alors $\bar{\mathbf{X}}^{+} = (4, 3, 3, 5)$, *choisissons* $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)}, x_0^{(4)}) = (5, \frac{5}{2}, 4, \frac{9}{2})$. *D'aprés les Figures* (1.4) *et* (1.6)*), on voit que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} = \lim_{n\to+\infty} x_n^{(3)} = +\infty,$$

et des Figures (1.5) *et* (1.7)*), on voit que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(2)} = \lim_{n\to+\infty} x_n^{(4)} = 0.$$

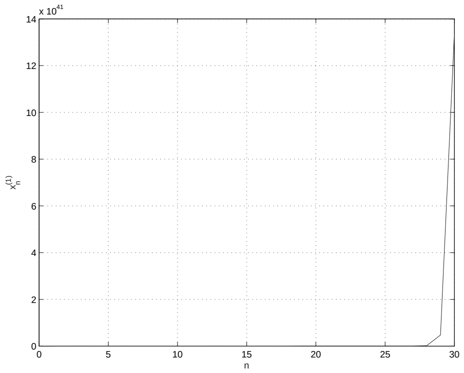

Fig. 1.4 – Graphique de $x_n^{(1)}$

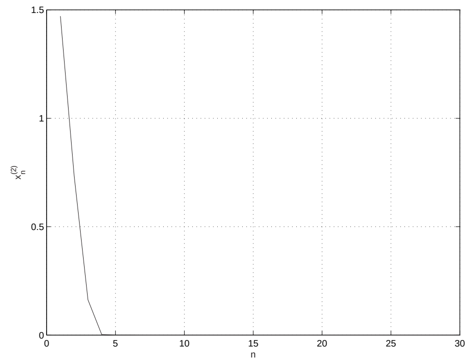

Fig. 1.5 – Graphique de $x_n^{(2)}$

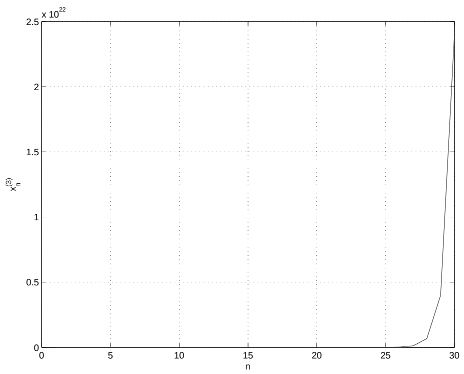

Fig. 1.6 – Graphique de $x_n^{(3)}$

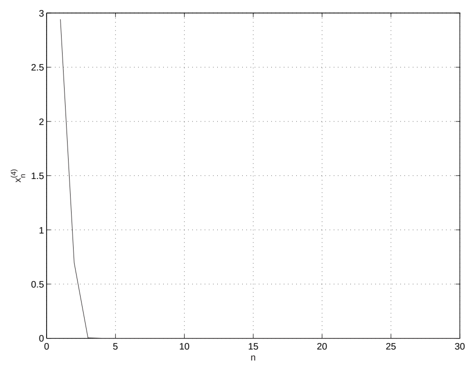

Fig. 1.7 – Graphique de $x_n^{(4)}$

CHAPITRE 2

Sur les solutions du système d'équations aux différences $x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta$, $y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

où les paramètres $a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ et les valeurs initiales $x_{-i},\ y_{-i},\ i = 0, 1$ sont des nombres réels non nuls.

Dans la première partie, nous donnons la forme des solutions bien définies du système (2.1). Dans la deuxième partie nous étudions le comportement asymptotique et la périodicité des solutions du système (2.1) avec $a = b$. Nous terminons ce chapitre par des exemples numériques. La motivation de cette étude est la référence [6].

2.1 La forme des solutions du système (2.1)

Notre objectif dans cette partie est de donner la forme explicite des solutions bien définies du système (2.1).

Définition 2.1.1 *Une solution du système* (2.1) *est dite bien définie si*

$$y_n - \alpha \neq 0, \quad x_n - \beta \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple, si on choisit les paramètres a, b, α, β et les valeurs initiales $x_{-1},\ y_{-1}$ strictement positive et les valeurs initiales $x_0,\ y_0$ vérifiant $x_0 > \beta$ et $y_0 > \alpha$, alors les solutions correspondantes seront bien définies.

Le Lemme suivant explique pourquoi nous avons choisit les valeurs initiales non nuls, et montre aussi qu'une solution bien définie ne s'annule jamais.

Lemme 2.1.1 *1) Si l'une des valeurs initiales x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 est nulle, la solution du système* (2.1) *n'est pas définie.*

2) Toute solution bien définie du système (2.1) *vérifie*

$$x_n \neq 0, \quad y_n \neq 0, \qquad \forall n \geq 1.$$

Preuve.

1) Si $x_{-1} = 0$, alors $y_1 = \dfrac{bx_{-1}y_0}{x_0 - \beta} + \alpha = \alpha$. Ainsi, x_2 n'est pas définie.

Si $x_0 = 0$, alors $x_1 = \dfrac{ax_0y_{-1}}{y_0 - \alpha} + \beta = \beta$. Ainsi, y_2 n'est pas définie.

Si $y_{-1} = 0$, alors $x_1 = \dfrac{ax_0y_{-1}}{y_0 - \alpha} + \beta = \beta$. Ainsi, y_2 n'est pas définie.

Si $y_0 = 0$, alors $y_1 = \dfrac{bx_{-1}y_0}{x_0 - \beta} + \alpha = \alpha$. Ainsi, x_2 n'est pas définie.

2) Supposons il existe un $n_0 \geq 1$ tel que $x_{n_0} = 0$, alors du système (2.1), nous obtenons

$$x_{n_0+1} = \frac{ay_{n_0-1}x_{n_0}}{y_{n_0} - \alpha} + \beta = \beta.$$

Ainsi, y_{n_0+2} n'est pas définie.

■

Le théorème suivant décrit la forme des solutions du système (2.1).

Théorème 2.1.1 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie du système* (2.1). *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{2n} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t+1} d\right)x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t+1} d\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{r+1}\frac{x_0-\beta}{x_{-1}} + 1\right)\beta,$$

$$x_{2n-1} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t} d\right)x_{-1} + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t} d\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{r}\frac{ay_{-1}}{y_0-\alpha} + 1\right)\beta,$$

$$y_{2n} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t+1}\frac{ab}{d}\right)y_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t+1}\frac{ab}{d}\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{r+1}\frac{y_0-\alpha}{y_{-1}} + 1\right)\beta,$$

$$y_{2n-1} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t}\frac{ab}{d}\right)y_{-1} + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t}\frac{ab}{d}\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{r}\frac{bx_{-1}}{x_0-\beta} + 1\right)\beta,$$

avec

$$d = \frac{ay_{-1}(x_0-\beta)}{x_{-1}(y_0-\alpha)}.$$

Preuve. Réecrivons le système (2.1) comme suit

$$\frac{x_{n+1}-\beta}{x_n} = \frac{a\ y_{n-1}}{y_n-\alpha}, \quad \frac{y_{n+1}-\alpha}{y_n} = \frac{b\ x_{n-1}}{x_n-\beta}.$$

Posons

$$v_n := \frac{x_n-\beta}{x_{n-1}}, \quad u_n := \frac{y_n-\alpha}{y_{n-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

nous obtenons

$$v_{n+1} = \frac{a}{u_n}, \quad u_{n+1} = \frac{b}{v_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

ainsi

$$v_{n+2} = \frac{a}{b}v_n, \quad u_{n+2} = \frac{b}{a}u_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{2n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n v_0, \quad v_{2n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1, \quad u_{2n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n u_0, \quad u_{2n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1. \tag{2.4}$$

Réorganisons (2.2) comme suit

$$x_n = v_nx_{n-1} + \beta, \quad y_n = u_ny_{n-1} + \alpha. \tag{2.5}$$

Remplaçons n par $2n$ (respectivement par $2n+1$) dans (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= v_{2n}x_{2n-1} + \beta, && n \in \mathbb{N},\\
x_{2n+1} &= v_{2n+1}x_{2n} + \beta, && n \in \mathbb{N},\\
y_{2n} &= u_{2n}y_{2n-1} + \alpha, && n \in \mathbb{N},\\
y_{2n+1} &= u_{2n+1}y_{2n} + \alpha, && n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

Des relations (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n v_0x_{2n-1} + \beta, && n \in \mathbb{N},\\
x_{2n+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1x_{2n} + \beta, && n \in \mathbb{N},\\
y_{2n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n u_0y_{2n-1} + \alpha, && n \in \mathbb{N},\\
y_{2n+1} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1y_{2n} + \alpha, && n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$x_{2n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} v_0v_1x_{2n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1\beta + \beta, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

$$x_{2n+2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} v_0v_1x_{2n} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} v_0\beta + \beta, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

$$y_{2n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} u_0u_1y_{2n-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1\alpha + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

$$y_{2n+2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} u_0u_1y_{2n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} u_0\alpha + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Posons,

$$K_n = x_{2n-1}, \quad L_n = x_{2n}, \quad R_n = y_{2n-1}, \quad S_n = y_{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.10}$$

Alors, les équations (2.6)-(2.9), deviennent des équations aux différences non homogènes linéaires du premier ordre suivantes

$$K_{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} v_0v_1\ K_n + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n} v_1 + 1\right)\beta, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$L_{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} v_0v_1\ L_n + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} v_0 + 1\right)\beta, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$R_{n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} u_0u_1\ R_n + \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{n} u_1 + 1\right)\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$S_{n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} u_0u_1\ S_n + \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} u_0 + 1\right)\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Du Lemme (1.1.1), nous obtenons

$$K_n = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t} v_0v_1\right)K_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t} v_0v_1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{r} v_1 + 1\right)\beta,$$
$$L_n = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t+1} v_0v_1\right)L_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t+1} v_0v_1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{r+1} v_0 + 1\right)\beta,$$
$$R_n = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t} u_0u_1\right)R_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t} u_0u_1\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{r} u_1 + 1\right)\beta,$$
$$S_n = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t+1} u_0u_1\right)S_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t+1} u_0u_1\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{r+1} u_0 + 1\right)\beta,$$

Des relations (2.10), il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{2n-1} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t} v_0v_1\right)x_{-1} + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t} v_0v_1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{r} v_1 + 1\right)\beta,$$
$$x_{2n} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t+1} v_0v_1\right)x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2t+1} v_0v_1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{r+1} v_0 + 1\right)\beta,$$
$$y_{2n-1} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t} u_0u_1\right)y_{-1} + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t} u_0u_1\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{r} u_1 + 1\right)\beta,$$
$$y_{2n} = \left(\prod_{t=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t+1} u_0u_1\right)y_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{t=r+1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2t+1} u_0u_1\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{r+1} u_0 + 1\right)\beta.$$

De (2.2) et (2.3), il résulte que

$$v_0 = \frac{x_0 - \beta}{x_{-1}},\ u_0 = \frac{y_0 - \alpha}{y_{-1}},\ v_1 = \frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha},\ u_1 = \frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta},$$

Soit $d = v_0 v_1$, donc

$$d = \frac{ay_{-1}(x_0-\beta)}{x_{-1}(y_0-\alpha)}, \qquad et \qquad u_0u_1 = \frac{bx_{-1}(y_0-\alpha)}{y_{-1}(x_0-\beta)} = \frac{ab}{d}.$$

Remplaçons ces quantités dans les formules ci-dessus, nous arrivons au résultat désiré.
■

La forme des solutions bien définie du système (2.1) avec $a = b$ est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.1 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -1}$ *une solution du système* (2.1) *avec* $a = b$. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *nous avons*

$$x_{2n-1} = \begin{cases} x_{-1} + h_1\beta n, & d = 1, \\ d^n x_{-1} + \left(\dfrac{d^n-1}{d-1}\right)h_1\beta, & sinon. \end{cases}, \tag{2.11}$$

$$x_{2n} = \begin{cases} x_0 + h_0\beta n, & d = 1, \\ d^n x_0 + \left(\dfrac{d^n-1}{d-1}\right)h_0\beta, & sinon. \end{cases}, \tag{2.12}$$

$$y_{2n-1} = \begin{cases} y_{-1} + t_1\alpha n, & d = a^2, \\ \left(\dfrac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + \left[\dfrac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\frac{a^2}{d}-1}\right]t_1\alpha, & sinon. \end{cases}, \tag{2.13}$$

$$y_{2n} = \begin{cases} y_0 + t_0\alpha n, & d = a^2, \\ \left(\dfrac{a^2}{d}\right)^n y_0 + \left[\dfrac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\frac{a^2}{d}-1}\right]t_0\alpha, & sinon. \end{cases}, \tag{2.14}$$

avec

$$h_0 = \frac{x_0-\beta}{x_{-1}} + 1,\ h_1 = \frac{ay_{-1}}{y_0-\alpha} + 1,\ t_0 = \frac{y_0-\alpha}{y_{-1}} + 1,\ t_1 = \frac{bx_{-1}}{x_0-\beta} + 1.$$

Preuve. Comme $a = b$, d'après le théorème (2.1.1), on a

$$x_{2n} = d^n x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} d^{n-r-1}\left(\frac{x_0-\beta}{x_{-1}} + 1\right)\beta,$$

$$x_{2n-1} = d^n x_{-1} + \sum_{r=0}^{n-1} d^{n-r-1}\left(\frac{ay_{-1}}{y_0-\alpha} + 1\right)\beta,$$

$$y_{2n} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{a^2}{d}\right)^{n-r-1}\left(\frac{y_0-\alpha}{y_{-1}} + 1\right)\beta,$$

$$y_{2n-1} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{a^2}{d}\right)^{n-r-1}\left(\frac{bx_{-1}}{x_0-\beta} + 1\right)\beta,$$

ainsi

$$x_{2n} = d^n x_0 + \left(\frac{x_0-\beta}{x_{-1}} + 1\right)\beta\sum_{r=0}^{n-1} d^r,$$

$$x_{2n-1} = d^n x_{-1} + \left(\frac{ay_{-1}}{y_0-\alpha} + 1\right)\beta\sum_{r=0}^{n-1} d^r,$$

$$y_{2n} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_0 + \left(\frac{y_0-\alpha}{y_{-1}} + 1\right)\beta\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{a^2}{d}\right)^r,$$

$$y_{2n-1} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + \left(\frac{bx_{-1}}{x_0-\beta} + 1\right)\beta\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{a^2}{d}\right)^r.$$

Le résultat découle du fait que

$$\sum_{r=0}^{n-1} d^r = \begin{cases} \dfrac{d^n-1}{d-1}, & \text{si } d \neq 1, \\ n, & \text{si d=1.} \end{cases}$$

et

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{a^2}{d}\right)^r = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\frac{a^2}{d} - 1}, & \text{si } d \neq a^2, \\ n, & \text{si } d = a^2. \end{cases}$$

■

La remarque suivante fournit une observation concernant le cas unidimensionnel du système (2.1).

Remarque 2.1.1 *Supposons $a = b$ et $\alpha = \beta$. Si nous choisissons les valeurs initiales tel que $x_{-i} = y_{-i}$, $i = 0, 1$, alors le système* (2.1) *sera réduit à l'équation aux différences*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n x_{n-1}}{x_n - \alpha} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Dans ce cas,

$$d = \frac{ay_{-1}(x_0 - \beta)}{x_{-1}(y_0 - \alpha)} = a,\ h_0 = \frac{x_0 - \alpha}{x_{-1}} + 1,\ h_1 = \frac{ax_{-1}}{x_0 - \alpha} + 1,$$

d'où, par le Corolaire (2.1.1)*, nous obtenons*

$$x_{2n-1} = \begin{cases} x_{-1} + h_1 \alpha n, & si\ a = 1, \\ a^n x_{-1} + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) h_1 \alpha, & sinon. \end{cases}, n \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$

$$x_{2n} = \begin{cases} x_0 + h_0 \alpha n, & si\ a = 1, \\ a^n x_0 + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) h_0 \alpha, & sinon. \end{cases}, n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Dans [6], les auteurs, s'intéressent particulièrement à la forme des solutions de l'équation

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{x_n - 1} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette équation est un cas particulier de l'équation (2.15)*, avec $a = \alpha = 1$. Il est claire que les formules des solutions de cette equation se déduisent de* (2.16) *et* (2.17)*. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= x_{-1} + h_1 n \\ &= x_{-1} + \left(\frac{x_{-1}}{x_0 - 1} + 1\right)n, \\ &= x_{-1} + \frac{x_{-1}}{x_0 - 1} + 1 + \frac{(x_{-1} + x_0 - 1)(n - 1)}{x_0 - 1}, \\ &= 1 + \frac{x_0 x_{-1} - x_{-1} + x_{-1}}{x_0 - 1} + \frac{(x_{-1} + x_0 - 1)(n - 1)}{x_0 - 1}, \\ &= 1 - \frac{(x_{-1} + x_0 - 1)(n - 1) + x_0 x_{-1}}{1 - x_0}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= x_0 + h_0 n \\
&= x_0 + (\frac{x_0 - 1}{x_{-1}} + 1)n, \\
&= x_0 + n - 1 + 1 + \frac{(x_0 - 1)n}{x_{-1}}, \\
&= 1 + \frac{(x_0 + n - 1)x_{-1}(x_0 - 1)n}{x_{-1}}, \\
&= 1 - \frac{n(1 - x_0) - (n-1)x_{-1} - x_0 x_{-1}}{x_{-1}}.
\end{aligned}$$

Les formules ainsi obtenus pour (x_{2x}) et (x_{2x+1}) sont exactement ceux dans [6].

2.2 Comportement asymptotique et périodicité des solutions du système (2.1) avec $a = b$

Cette partie est consacré à l'étude de la périodicité et le comportement asymptotique des solutions bien définies du système (2.1) avec $a = b$.

Théorème 2.2.1 *Soit $(x_n, y_n)_{n\geq -1}$ une solution du système (2.1) avec $a = b$. Les assertions suivantes sont vraies.*

(a) Si $(d-1)x_0 + h_0\beta \neq 0$, alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \dfrac{h_0\beta}{d-1}, & si\ |d| < 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} |x_{2n}| = +\infty, & si\ |d| > 1. \end{cases}$$

Sinon, si $(d-1)x_0 + h_0\beta = 0$ et $d \neq 1$, nous obtenons $x_{2n} = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Supposons $d = 1$. Si $x_0 + x_{-1} \neq \beta$ (i.e. $h_0 \neq 0$), alors $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{2n}| = +\infty$. Sinon, nous obtenons $x_{2n} = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $(d-1)x_{-1} + h_1\beta \neq 0$, alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \dfrac{h_1\beta}{d-1}, & |d| < 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} |x_{2n-1}| = \infty, & |d| > 1. \end{cases}$$

Sinon, si $(d-1)x_1 + h_1\beta = 0$ *et* $d \neq 1$*, nous obtenons* $x_{2n-1} = x_{-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(d) *Supposons* $d = 1$*. Si* $ay_{-1} + y_0 \neq \alpha\,(i.e.\, h_1 \neq 0)$*, alors* $\lim_{n\to\infty} |x_{2n-1}| = +\infty$*. Sinon, nous obtenons* $x_{2n-1} = x_{-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(e) *Si* $(\frac{a^2}{d} - 1)y_0 + t_0\alpha \neq 0$*, alors*

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} |y_{2n}| = +\infty, & |d| < a^2, \\ \lim_{n\to\infty} y_{2n} = \dfrac{t_0\alpha d}{d-a^2}, & |d| > a^2. \end{cases}$$

Sinon, si $(\frac{a^2}{d} - 1)y_0 + t_0\alpha = 0$ *et* $d \neq a^2$*,nous obtenons* $y_{2n} = y_0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(f) *Supposons* $d = a^2$*. Si* $y_0 + y_{-1} \neq \alpha\,(i.e.\, t_0 \neq 0)$*, alors* $\lim_{n\to\infty} |y_{2n}| = +\infty$*. Sinon, nous obtenons* $y_{2n} = y_0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(g) *Si* $(\frac{a^2}{d} - 1)y_{-1} + t_1\alpha \neq 0$*, alors*

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} |y_{2n-1}| = +\infty, & |d| < a^2, \\ \lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \dfrac{t_1\alpha d}{d-a^2}, & |d| > a^2. \end{cases}$$

Sinon, si $(\frac{a^2}{d} - 1)y_{-1} + t_1\alpha = 0$ *et* $d \neq a^2$*, nous obtenons* $y_{2n-1} = y_{-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(h) *Supposons* $d = a^2$*. Si* $ax_{-1} + x_0 \neq \beta\,(i.e.\, t_1 \neq 0)$*, alors* $\lim_{n\to\infty} |y_{2n-1}| + \infty$*. Sinon, nous obtenons* $y_{2n-1} = y_{-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Nous allons prouver les cas (a) et (b). Les autres cas se démontrent d'une manière similaire. Tout d'abord, on peut écrire x_{2n} comme suit

$$x_{2n} = \frac{(d-1)x_0 + h_0\beta}{d-1} d^n + \frac{h_0\beta}{1-d}.$$

Supposons que $(d-1)x_0 + h_0\beta \neq 0$. Il est évident que, si $|d| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} d^n = 0$, et si $|d| > 1$, on a $\lim_{n\to\infty} |d|^n = +\infty$. Donc, nous obtenons

Si $|d| > 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |x_{2n}| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(d-1)x_0 + h_0\beta}{d-1} d^n + \frac{h_0\beta}{1-d} \right| \\ &= \left| \frac{(d-1)x_0 + h_0\beta}{d-1} \lim_{n\to\infty} d^n + \frac{h_0\beta}{1-d} \right| \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Si $|d| < 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(d-1)x_0+h_0\beta}{d-1}d^n + \frac{h_0\beta}{1-d}\right)\\
&= \frac{(d-1)x_0+h_0\beta}{d-1}\lim_{n\to\infty} d^n + \frac{h_0\beta}{1-d}\\
&= \frac{h_0\beta}{1-d}
\end{aligned}$$

D'autre part, si $(d-1)x_0 + h_0\beta = 0$ et $d \neq 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{(d-1)x_0+h_0\beta}{d-1}d^n + \frac{h_0\beta}{1-d}\\
&= \frac{h_0\beta}{1-d}\\
&= x_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Cela prouve (a). Maintenant, prouvons (b). Pour cela, supposons que $d = 1$. Si $x_0 + x_{-1} \neq \beta$ (*i.e.* $h_0 \neq 0$), alors de (2.12) nous obtenons

$$x_{2n} = x_0 + \left(\frac{x_0 + x_{-1} - \beta}{x_{-1}}\right)\beta n,$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} |x_{2n}| = +\infty.$$

D'autre part, si $x_0 + x_{-1} = \beta$ (*i.e.* $h_0 = 0$), alors

$$x_{2n} = x_0 + \left(\frac{x_0 + x_{-1} - \beta}{x_{-1}}\right)\beta n = x_0 + 0\cdot\beta n = x_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Corollaire 2.2.1 *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -1}$ une solution du système (2.1) avec $a = b$. Alors les assertions suivantes sont vraies*

(a) Si $d = -1$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases}
x_{4n-1} &= x_{-1},\\
x_{4n} &= x_0,\\
x_{4n+1} &= -x_{-1} + h_1\beta,\\
x_{4n+2} &= -x_0 + h_0\beta.
\end{cases}$$

i.e., la suite $(x_n)_{n\geq -1}$ est périodique de période 4.

(b) *Si $d = -a^2$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

$$\begin{cases} y_{4n-1} &= y_{-1}, \\ y_{4n} &= y_0, \\ y_{4n+1} &= -y_{-1} + t_1\alpha, \\ y_{4n+2} &= -y_0 + t_0\alpha. \end{cases}$$

i.e., la suite $(y_n)_{n\geq -1}$ est périodique de période 4.

(c) *Si $a = 1$, $\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha\beta$ et $x_{-1} + x_0 \neq \beta$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

$$\begin{cases} x_{2n-1} &= x_{-1}, \\ x_{2n} &= x_0, \\ y_{2n-1} &= y_{-1}, \\ y_{2n} &= y_0. \end{cases}$$

i.e., la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -1}$ est périodique de période 2.

Preuve.

(a) Puisque $d = -1$, nous obtenons de (2.11) et (2.12).

$$x_{2n-1} = (-1)^n x_{-1} + \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right) h_1\beta, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$x_{2n} = (-1)^n x_0 + \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right) h_0\beta, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Selon la parité de n, nous trouvons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{4n-1} &= (-1)^{2n} x_{-1} + \left(\frac{1-(-1)^{2n}}{2}\right) h_1\beta &= x_{-1}, \\ x_{4n+1} &= (-1)^{2n+1} x_{-1} + \left(\frac{1-(-1)^{2n+1}}{2}\right) h_1\beta &= -x_{-1} + h_1\beta, \\ x_{4n} &= (-1)^{2n} x_0 + \left(\frac{1-(-1)^{2n}}{2}\right) h_0\beta &= x_0, \\ x_{4n+2} &= (-1)^{2n+1} x_0 + \left(\frac{1-(-1)^{2n+1}}{2}\right) h_0\beta &= -x_0 + h_0\beta. \end{cases}$$

(b) Puisque $d = -a^2$, alors, de (2.13) et (2.14), nous obtenons

$$y_{2n-1} = (-1)^n y_{-1} + \frac{(-1)^n - 1}{-2} t_1\alpha, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$y_{2n} = (-1)^n y_0 + \frac{(-1)^n - 1}{-2} t_0\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Selon la parité de n, nous trouvons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} y_{4n-1} &= (-1)^{2n} y_{-1} + \left(\dfrac{1-(-1)^{2n}}{2}\right) t_1\alpha &= y_{-1}, \\ y_{4n+1} &= (-1)^{2n+1} y_{-1} + \left(\dfrac{1-(-1)^{2n+1}}{2}\right) t_1\alpha &= -y_{-1} + t_1\alpha, \\ y_{4n} &= (-1)^{2n} y_0 + \left(\dfrac{1-(-1)^{2n}}{2}\right) t_0\alpha &= y_0, \\ y_{4n+2} &= (-1)^{2n+1} y_0 + \left(\dfrac{1-(-1)^{2n+1}}{2}\right) t_0\alpha &= -y_0 + t_0\alpha. \end{cases}$$

(c) Puisque $a = 1$ et $\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha\beta$, nous obtenons

$$d - 1 = \frac{\beta - x_{-1} - x_0}{x_{-1}x_0}\beta, \ \ h_1 = \frac{x_{-1} - \beta}{x_0} + 1 \ \text{ et } \ t_0 = \frac{x_0}{x_{-1} - \beta} + 1,$$

d'où il résulte que $(d-1)x_0 + h_0\beta$, $(d-1)x_{-1} + h_1\beta$, $(1-d)y_0 + t_0\alpha d$ et $(1-d)y_{-1} + t_1\alpha d$ sont égaux à zéro. D'autre part, comme $x_{-1} + x_0 \neq \beta$, nous obtenons d'aprés les cas (a), (c), (e) et (g) du Théorème (2.2.1) que

$$x_{2n-1} = x_{-1}, \quad x_{2n} = x_0, \quad y_{2n-1} = y_{-1}, \quad y_{2n} = y_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Le résultat suivant est une conséquence directe du Théorème (2.2.1) et du Corollaire (2.2.1).

Corollaire 2.2.2 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -1}$ *une solution du système* (2.1) *avec* $a = b$. *Alors les assertions suivantes sont vraies*

(a) Si $|a| = 1$ *et* $ay_{-1}(x_0 - \beta) = x_{-1}(\alpha - y_0)$ *(c-à-d ,* $d = -1$*), alors la solution est périodique de période 4.*

(b) Si $a = 1$, $x_{-1} + x_0 = \beta$ *et* $y_{-1} + y_0 = \alpha$ *(c-à-d,* $d = 1$*), alors la solution est périodique de période 2.*

(c) *Si $a = 1$, $x_{-1} + x_0 \neq \beta$ et $\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha\beta$, alors la solution est périodique de période 2.*

2.3 Exemples Numériques

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples numériques qui représentent les différents types du comportement asymptotique et de la périodicité des solutions bien définies du système (2.1) avec $a = b$.

Exemple 2.3.1 *(a) Considérons les paramètres*

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1	1	1	1/2	−5/12	1/4	5/4	1/4

Nous avons $d = -1 = -a^2$. Ainsi,Des cas (a) et (b) du Corollaire 2.2.1, la solution est périodique de période 4 et prend la forme

$$\left\{(\frac{-5}{12},\frac{5}{4}),(\frac{1}{4},\frac{1}{4}),(\frac{1}{12},\frac{17}{12}),(\frac{11}{20},\frac{3}{20}),(\frac{-5}{12},\frac{5}{4}),(\frac{1}{4},\frac{1}{4}),(\frac{1}{12},\frac{17}{12}),(\frac{11}{20},\frac{3}{20}),\ldots\right\}.$$

Voir, Figure (2.1) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (2.2) *pour le comportement de* (y_n) .

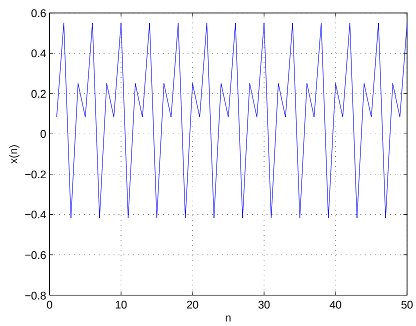

FIG. 2.1 –

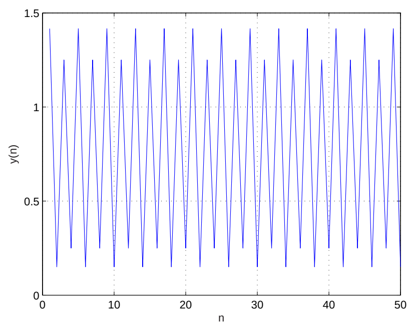

FIG. 2.2 –

(b) Considérons les paramètres

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1	1	1	1/2	$-\frac{61}{150}$	1/4	5/4	1/4

Nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le cas (a) sauf pour x_{-1} nous avons pris la valeur $-\frac{61}{150} = \frac{-5}{12} + \frac{1}{100}$. D'après la Figure (2.3) (comportement de (x_n)), Figure (2.4) (comportement de (y_{2n+1}))et Figure (2.5)(comportement de (y_{2n})), nous pouvons voir que

$$\lim_{n\to\infty} |x_{2n}| = \lim_{n\to\infty} |x_{2n+1}| = +\infty$$

and

$$\lim_{n\to\infty} |y_{2n}| \simeq 0.2 \simeq |\frac{t_0 \alpha d}{d - a^2}| = \frac{50}{247}, \lim_{n\to\infty} |y_{2n+1}| \simeq 1.33 \simeq |\frac{t_1 \alpha d}{d - a^2}| = \frac{985}{741}.$$

Cela est justifié par le fait que $|d| = \frac{125}{122} > 1 = a^2$, voir Théorème 2.2.1.

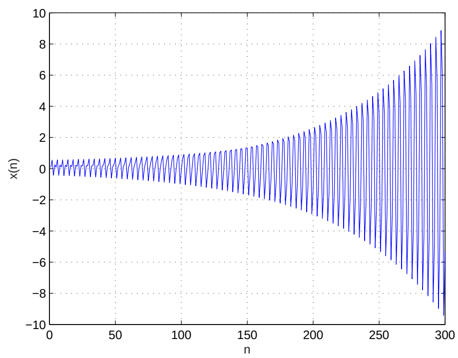

FIG. 2.3 –

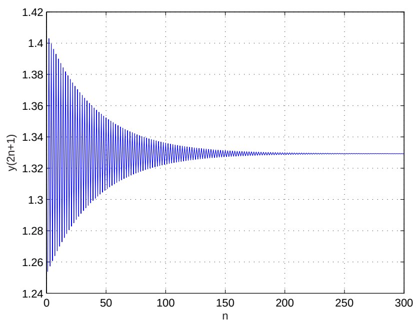

FIG. 2.4 –

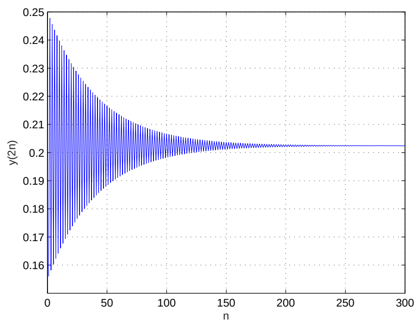

FIG. 2.5 –

(c) Considérons les paramètres

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1	1	1	1/2	$-\frac{32}{75}$	1/4	5/4	1/4

Nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le cas (a) sauf pour x_{-1} *nous avons pris la valeur* $-\frac{32}{75} = \frac{-5}{12} - \frac{1}{100}$. *D'après la Figure* (2.6)*(comportement de* (y_n)*), Figure* (2.7)*(comportement de* (x_{2n})*) et Figure* (2.8) *(comportement de* (x_{2n+1})*), nous pouvons voir que*

$$\lim_{n\to\infty} |y_{2n}| = \lim_{n\to\infty} |y_{2n+1}| = \infty$$

et

$$\lim_{n\to\infty} |x_{2n}| \simeq 0.4 \simeq |\frac{h_0\beta}{d-1}| = \frac{203}{506}, \lim_{n\to\infty} |x_{2n+1}| \simeq 0.17 \simeq |\frac{h_1\beta}{d-1}| = \frac{128}{759}.$$

Cela est justifié par le fait que $|d| = \frac{125}{128} < 1 = a^2$, *voir Théorème 2.2.1.*

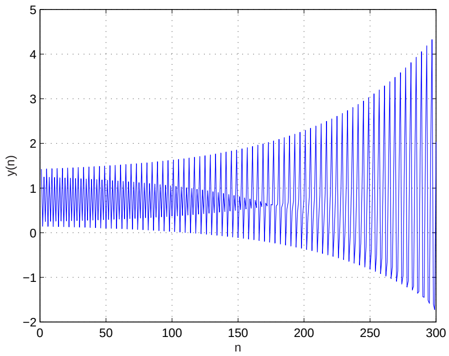

FIG. 2.6 –

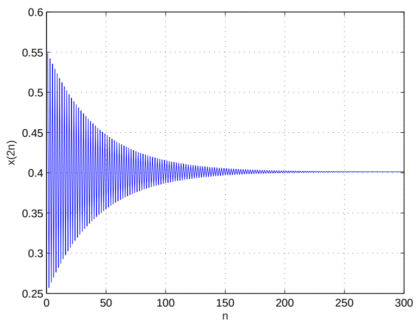

FIG. 2.7 –

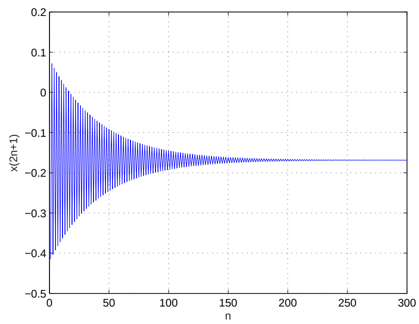

FIG. 2.8 –

Exemple 2.3.2 *Considérons les paramètres*

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1	1	3	5	−10	10	9	−3

Nous avons

$$x_{-1} + x_0 \neq \beta,\ \alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha\beta.$$

Ainsi, par le cas (c) du Corollaire 2.1.1, la solution est périodique de la période 2 et prend la forme

$$\{(-10, 9), (10, -3), (-10, 9), (10, -3), ...\}.$$

Voir, Figures (2.9) *(comportement de* (x_n)*)et Figure* (2.10) *(comportement de* (y_n)*).*

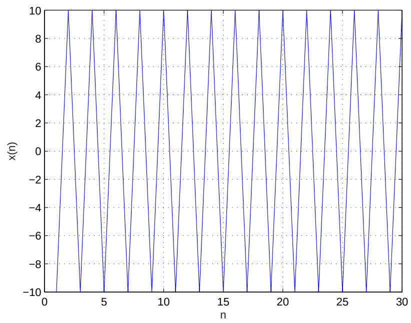

FIG. 2.9 –

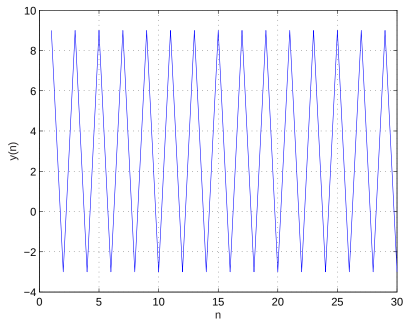

FIG. 2.10 –

Exemple 2.3.3 *Considérons les paramètres*

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1/2	1/2	2	1	1	2	1	3

Nous avons $\frac{1}{4} = a^2 < |d| = \frac{1}{2} < 1$ *et nous pouvons voir à partir de la Figure* (2.11) *(comportement de* (x_{2n})*), Figure* (2.12) *(comportement de* (x_{2n+1})*), Figure* (2.13) *(comportement de* (y_{2n})*)et Figure* (2.14) *(comportement de* (y_{2n+1})*)que les sous-suites* (x_{2n}), (x_{2n+1}), (y_{2n}) *et* (y_{2n+1}) *sont convergentes. Ceci confirme notre résultat énoncé dans le théorème 2.2.1, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = |\frac{h_0\beta}{d-1}| = 4,\ \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = |\frac{h_1\beta}{d-1}| = 3,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = |\frac{t_0\alpha d}{d-a^2}| = 8,\ \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = |\frac{t_1\alpha d}{d-a^2}| = 6.$$

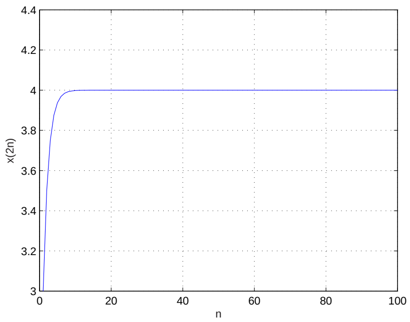

FIG. 2.11 –

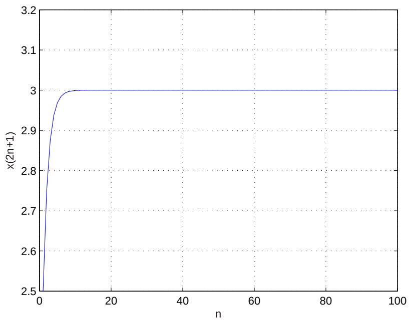

FIG. 2.12 –

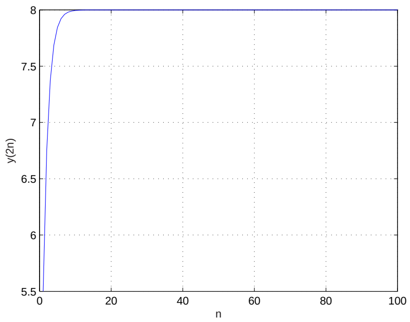

FIG. 2.13 –

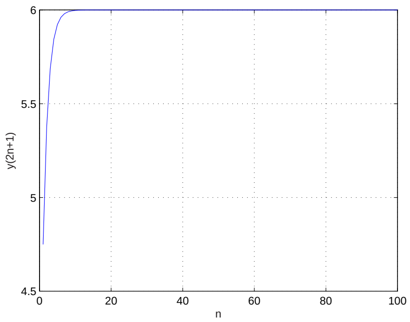

FIG. 2.14 –

CHAPITRE 3

La forme et le comportement des solutions du système d'équations aux différences d'ordre supérieur $x_{n+1} = \frac{x^p_{n-k+1} y_n}{a y^p_{n-k} + b y_n}, \; y_{n+1} = \frac{y^p_{n-k+1} x_n}{\alpha x^p_{n-k} + \beta x_n}$

Dans [38], les auteurs ont donné la forme des solutions des systèmes d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} y_n}{y_{n-2} \pm y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} x_n}{x_{n-2} \pm x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

avec les valeurs initiales x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1} et y_0 sont des nombres réels non nuls.

Dans ce chapitre, nous allons généralisé les résultats exposés dans [38], pour cela, considérons le système d'équations aux différences d'ordre supérieur

$$x_{n+1} = \frac{x^p_{n-k+1} y_n}{a y^p_{n-k} + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y^p_{n-k+1} x_n}{\alpha x^p_{n-k} + \beta x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \; p, k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.2}$$

où, les paramètres a, b, α, β et les valeurs initiales $x_{-i}, y_{-i}, i = 0, 1, \ldots, k$ sont des nombres réels non nuls.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la forme des solutions bien définies du système d'équations aux différences (3.2). Dans la deuxième partie nous étudions la bornitude, la périodicité et le comportement asymptotique des solutions du système (3.2) avec $p = 1$. Ce chapitre se termine par des exemples numériques qui représentent les différents types du comportement asymptotique et de la périodicité des solutions bien définies du système (3.2) avec $p = 1$.

Remarque 3.0.1 1. *Une solution du système* (3.2) *est dite bien définie si*

$$\left(ay^p_{n-k} + by_n\right)\left(\alpha x^p_{n-k} + \beta x_n\right) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *Si on choisit a, b, α, β et les valeurs initiales $x_{-i}, y_{-i}, i = 0, 1, \ldots, k$ strictement positive, alors les solutions correspondantes seront bien définies.*
3. *Les solutions de l'équation aux différences*

$$x_{n+1} = \frac{x^p_{n-k+1}x_n}{ax^p_{n-k} + bx_n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ p, k \in \mathbb{N}^*.$$

se déduit de ceux du système (3.2), *en prenant $\alpha = a$, $\beta = b$, $y_{-i} = x_{-i}, i = 0, 1, \ldots, k$.*

3.1 La forme des solutions du système (3.2)

Dans cette partie, nous déterminons la forme des solutions bien définies du système d'équations aux différences (3.2).

Théorème 3.1.1 *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ une solution du système* (3.2). *Alors :*

(a) Si $k = 1$, *nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$x_{2n} = \frac{x_{-1}^{p^{2n+1}}}{\left(\prod_{i=0}^{n} u_{2i}^{p^{2(n-i)}}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2i+1}^{p^{2(n-i)-1}}\right)}, \qquad x_{2n+1} = \frac{x_{-1}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2i}^{p^{2(n-i)+1}} u_{2i+1}^{p^{2(n-i)}}},$$

$$y_{2n} = \frac{y_{-1}^{p^{2n+1}}}{\left(\prod_{i=0}^{n} v_{2i}^{p^{2(n-i)}}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2i+1}^{p^{2(n-i)-1}}\right)}, \qquad y_{2n+1} = \frac{y_{-1}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2i}^{p^{2(n-i)+1}} v_{2i+1}^{p^{2(n-i)}}}.$$

(b) Si $k = 2l, l \in \mathbb{N}^*$, *nous avons pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$x_{2(ln+r)} = \frac{x_{2(r-l)}^{p^{n+1}}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2(li+r)}^{p^{(n-i)}}}, \qquad x_{2(ln+r)+1} = \frac{x_{2(r-l)+1}^{p^{n+1}}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2(li+r)+1}^{p^{(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l-1},$$

$$y_{2(ln+r)} = \frac{y_{2(r-l)}^{p^{n+1}}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2(li+r)}^{p^{(n-i)}}}, \qquad y_{2(ln+r)+1} = \frac{y_{2(r-l)+1}^{p^{n+1}}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2(li+r)+1}^{p^{(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l-1}.$$

(c) Si $k = 2l+1, l \in \mathbb{N}^*$, *nous avons pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$x_{2((2l+1)n+r)} = \frac{x_{2(r-l)-1}^{p^{2n+1}}}{\left(\prod_{i=0}^{n} u_{2((2l+1)i+r)}^{p^{2(n-i)}}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2((2l+1)i+l+r)+1}^{p^{2(n-i)-1}}\right)}, \quad r = \overline{0, l},$$

$$x_{2((2l+1)n+r)+1} = \frac{x_{2(r-l)}^{p^{2n+1}}}{\left(\prod_{i=0}^{n} u_{2((2l+1)i+r)+1}^{p^{2(n-i)}}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} u_{2((2l+1)i+l+r+1)}^{p^{2(n-i)-1}}\right)}, \quad r = \overline{0, l-1},$$

$$x_{2((2l+1)n+l+r)+1} = \frac{x_{2(r-l)-1}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2((2l+1)i+r)}^{p^{2(n-i)+1}} u_{2((2l+1)i+l+r)+1}^{p^{2(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l},$$

$$x_{2((2l+1)n+l+r+1)} = \frac{x_{2(r-l)}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2((2l+1)i+r)+1}^{p^{2(n-i)+1}} u_{2((2l+1)i+l+r+1)}^{p^{2(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l-1},$$

$$y_{2((2l+1)n+r)} = \frac{y_{2(r-l)-1}^{p^{2n+1}}}{\left(\prod_{i=0}^{n} v_{2((2l+1)i+r)}^{p^{2(n-i)}}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2((2l+1)i+l+r)+1}^{p^{2(n-i)-1}}\right)}, \quad r = \overline{0, l},$$

$$y_{2((2l+1)n+r)+1} = \frac{y_{2(r-l)}^{p^{2n+1}}}{\left(\prod_{i=0}^{n} v_{2((2l+1)i+r)+1}^{p^{2(n-i)}}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} v_{2((2l+1)i+l+r+1)}^{p^{2(n-i)-1}}\right)}, \quad r = \overline{0, l-1},$$

$$y_{2((2l+1)n+l+r)+1} = \frac{y_{2(r-l)-1}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2((2l+1)i+r)}^{p^{2(n-i)+1}} v_{2((2l+1)i+l+r)+1}^{p^{2(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l},$$

$$y_{2((2l+1)n+l+r+1)} = \frac{y_{2(r-l)}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2((2l+1)i+r)+1}^{p^{2(n-i)+1}} v_{2((2l+1)i+l+r+1)}^{p^{2(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l-1},$$

avec

$$u_{2n} = \begin{cases} \dfrac{x^p_{-k} + (a\beta + b)\, n x_0}{x_0}, & a\alpha = 1, \\[2ex] \dfrac{(a\alpha)^n\, x^p_{-k} + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(a\beta + b)\, x_0}{x_0}, & a\alpha \neq 1, \end{cases}$$

$$u_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{a y^p_{-k} + b y_0 + (a\beta + b)\, n y_0}{y_0}, & a\alpha = 1, \\[2ex] \dfrac{(a\alpha)^n\, (a y^p_{-k} + b y_0) + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(a\beta + b)\, y_0}{y_0}, & a\alpha \neq 1, \end{cases}$$

$$v_{2n} = \begin{cases} \dfrac{y^p_{-k} + (\alpha b + \beta)\, n y_0}{y_0}, & a\alpha = 1, \\[2ex] \dfrac{(a\alpha)^n\, y^p_{-k} + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(\alpha b + \beta)\, y_0}{y_0}, & a\alpha \neq 1, \end{cases}$$

et

$$v_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^p_{-k} + \beta x_0 + (\alpha b + \beta)\, n x_0}{x_0}, & a\alpha = 1, \\[2ex] \dfrac{(a\alpha)^n\, (\alpha x^p_{-k} + \beta x_0) + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(\alpha b + \beta)\, x_0}{x_0}, & a\alpha \neq 1. \end{cases}$$

Preuve. Premièrement, nous réorganisons le système (3.2) comme suit

$$\frac{x^p_{n-k+1}}{x_{n+1}} = a\frac{y^p_{n-k}}{y_n} + b, \qquad \frac{y^p_{n-k+1}}{y_{n+1}} = \alpha\frac{x^p_{n-k}}{x_n} + \beta.$$

Par les changements de variable

$$u_n := \frac{x^p_{n-k}}{x_n}, \qquad v_n := \frac{y^p_{n-k}}{y_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

on obtient

$$u_{n+1} = a v_n + b, \qquad v_{n+1} = \alpha u_n + \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$u_{n+2} = a\alpha u_n + a\beta + b, \qquad v_{n+2} = a\alpha v_n + \alpha b + \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, d'après le Corollaire 1.1.1, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{2n+i} = \begin{cases} u_i + (a\beta + b)\, n, & a\alpha = 1, \\ (a\alpha)^n u_i + \left(\dfrac{(a\alpha)^n - 1}{(a\alpha) - 1}\right)(a\beta + b)\,, & a\alpha \neq 1, \end{cases} \ , \ i = 0, 1 \tag{3.4}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ v_{2n+i} = \begin{cases} v_i + (\alpha b + \beta)\, n, & a\alpha = 1, \\ (a\alpha)^n v_i + \left(\dfrac{(a\alpha)^n - 1}{(a\alpha) - 1}\right)(a\beta + b)\,, & a\alpha \neq 1. \end{cases} \ , \ i = 0, 1 \tag{3.5}$$

A partir des équations (3.3)-(3.5), il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = \begin{cases} \dfrac{x^p_{-k} + (a\beta + b)\, n x_0}{x_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n x^p_{-k} + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(a\beta + b)\, x_0}{x_0}, & a\alpha \neq 1, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$u_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{a y^p_{-k} + b y_0 + (a\beta + b)\, n y_0}{y_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n (a y^p_{-k} + b y_0) + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(a\beta + b)\, y_0}{y_0}, & a\alpha \neq 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$v_{2n} = \begin{cases} \dfrac{y^p_{-k} + (\alpha b + \beta)\, n y_0}{y_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n y^p_{-k} + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(\alpha b + \beta)\, y_0}{y_0}, & a\alpha \neq 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

et

$$v_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^p_{-k} + \beta x_0 + (\alpha b + \beta)\, n x_0}{x_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n (\alpha x^p_{-k} + \beta x_0) + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(\alpha b + \beta)\, x_0}{x_0}, & a\alpha \neq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Maintenant, en réarrangeant le système (3.3), nous obtenons

$$x_n = \frac{x^p_{n-k}}{u_n}, \qquad y_n = \frac{y^p_{n-k}}{v_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En remplaçant n par $kn + s$ avec $s = 0, 1, \ldots, k-1$, nous trouvons

$$x_{kn+s} = \frac{x^p_{k(n-1)+s}}{u_{kn+s}} \quad \text{et} \quad y_{kn+s} = \frac{y^p_{k(n-1)+s}}{v_{kn+s}},$$

ainsi

$$x_{kn+s} = \frac{x^{p^2}_{k(n-2)+s}}{u_{kn+s}\, u^p_{k(n-1)+s}}, \quad y_{kn+s} = \frac{y^{p^2}_{k(n-2)+s}}{v_{kn+s}\, v^p_{k(n-1)+s}},$$

donc

$$x_{kn+s} = \frac{x^{p^3}_{k(n-3)+s}}{u_{kn+s}\, u^p_{k(n-1)+s}\, u^{p^2}_{k(n-2)+s}}, \quad y_{kn+s} = \frac{y^{p^2}_{k(n-3)+s}}{v_{kn+s}\, v^p_{k(n-1)+s}\, v^{p^2}_{k(n-2)+s}}.$$

D'où, par récurrence

$$x_{kn+s} = \frac{x^{p^{n+1}}_{s-k}}{\prod_{i=0}^n u^{p^{(n-i)}}_{ki+s}}, \qquad y_{kn+s} = \frac{y^{p^{n+1}}_{s-k}}{\prod_{i=0}^n v^{p^{(n-i)}}_{ki+s}}, \quad \forall s = \overline{0, k-1}. \tag{3.10}$$

On distingue trois cas possibles

(i) : $k = 1$ Dans ce cas, $s = 0$, alors le système (3.10) devient

$$x_n = \frac{x^{p^{n+1}}_{-1}}{\prod_{i=0}^n u^{p^{(n-i)}}_i}, \qquad y_n = \frac{y^{p^{n+1}}_{-1}}{\prod_{i=0}^n v^{p^{(n-i)}}_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'où, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{2n} = \frac{x^{p^{2n+1}}_{-1}}{\left(\prod_{i=0}^n u^{p^{2(n-i)}}_{2i}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} u^{p^{2(n-i)-1}}_{2i+1}\right)}, \qquad x_{2n+1} = \frac{x^{p^{2n+2}}_{-1}}{\prod_{i=0}^n u^{p^{2(n-i)+1}}_{2i}\, u^{p^{2(n-i)}}_{2i+1}}$$

et

$$y_{2n} = \frac{y^{p^{2n+1}}_{-1}}{\left(\prod_{i=0}^n v^{p^{2(n-i)}}_{2i}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1} v^{p^{2(n-i)-1}}_{2i+1}\right)}, \qquad y_{2n+1} = \frac{y^{p^{2n+2}}_{-1}}{\prod_{i=0}^n v^{p^{2(n-i)+1}}_{2i}\, v^{p^{2(n-i)}}_{2i+1}}.$$

(ii) : $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}^*$. Alors, le système (3.10) devient

$$x_{2(ln)+s} = \frac{x^{p^{n+1}}_{-2l+s}}{\prod_{i=0}^n u^{p^{(n-i)}}_{2(li)+s}}, \qquad y_{2(ln)+s} = \frac{y^{p^{n+1}}_{-2l+s}}{\prod_{i=0}^n v^{p^{(n-i)}}_{2(li)+s}}, \quad s = \overline{0, 2l-1}. \tag{3.11}$$

En écrivant $s = 2r + j$, $j = 0, 1$, dans le système (3.11), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{2(ln+r)} = \frac{x^{p^{n+1}}_{2(r-l)}}{\prod_{i=0}^n u^{p^{(n-i)}}_{2(li+r)}}, \qquad y_{2(ln+r)} = \frac{y^{p^{n+1}}_{2(r-l)}}{\prod_{i=0}^n v^{p^{(n-i)}}_{2(li+r)}}, \quad r = \overline{0, l-1},$$

et

$$x_{2(ln+r)+1} = \frac{x^{p^{n+1}}_{2(r-l)+1}}{\prod_{i=0}^n u^{p^{(n-i)}}_{2(li+r)+1}}, \qquad y_{2(ln+r)+1} = \frac{y^{p^{n+1}}_{2(r-l)+1}}{\prod_{i=0}^n v^{p^{(n-i)}}_{2(li+r)+1}}, \quad r = \overline{0, l-1}.$$

(iii) : $k=2l+1,\ l\in\mathbb{N}^*$. Alors, le système (3.10) devient

$$x_{(2l+1)n+s}=\frac{x^{p^{n+1}}_{s-2l-1}}{\prod_{i=0}^{n}u^{p^{(n-i)}}_{(2l+1)i+s}},\qquad y_{(2l+1)n+s}=\frac{y^{p^{n+1}}_{s-2l-1}}{\prod_{i=0}^{n}v^{p^{(n-i)}}_{(2l+1)i+s}},\quad s=\overline{0,2l},\tag{3.12}$$

selon la parité de n, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\forall s=\overline{0,2l}:\begin{cases}x_{(2l+1)(2n)+s}=\dfrac{x^{p^{2n+1}}_{s-2l-1}}{\left(\prod_{i=0}^{n}u^{p^{2(n-i)}}_{(2l+1)(2i)+s}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}u^{p^{2(n-i)-1}}_{(2l+1)(2i+1)+s}\right)}\\[2ex] x_{(2l+1)(2n+1)+s}=\dfrac{x^{p^{2n+2}}_{s-2l-1}}{\prod_{i=0}^{n}u^{p^{2(n-i)+1}}_{(2l+1)(2i)+s}u^{p^{2(n-i)}}_{(2l+1)(2i+1)+s}}\end{cases}\tag{3.13}$$

et

$$\forall s=\overline{0,2l}:\begin{cases}y_{(2l+1)(2n)+s}=\dfrac{y^{p^{2n+1}}_{s-2l-1}}{\left(\prod_{i=0}^{n}v^{p^{2(n-i)}}_{(2l+1)(2i)+s}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}v^{p^{2(n-i)-1}}_{(2l+1)(2i+1)+s}\right)}\\[2ex] y_{(2l+1)(2n+1)+s}=\dfrac{y^{p^{2n+2}}_{s-2l-1}}{\prod_{i=0}^{n}v^{p^{2(n-i)+1}}_{(2l+1)(2i)+s}v^{p^{2(n-i)}}_{(2l+1)(2i+1)+s}}\end{cases}.\tag{3.14}$$

En écrivant $s=2r+j,\ j=0,1$, dans le système (3.14), on obtient

$$x_{2((2l+1)n+r)}=\frac{x^{p^{2n+1}}_{2(r-l)-1}}{\left(\prod_{i=0}^{n}u^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+r)}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}u^{p^{2(n-i)-1}}_{2((2l+1)i+l+r)+1}\right)},\quad r=\overline{0,l},$$

$$x_{2((2l+1)n+r)+1}=\frac{x^{p^{2n+1}}_{2(r-l)}}{\left(\prod_{i=0}^{n}u^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+r)+1}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}u^{p^{2(n-i)-1}}_{2((2l+1)i+l+r+1)}\right)},\quad r=\overline{0,l-1},$$

$$x_{2((2l+1)n+l+r)+1}=\frac{x^{p^{2n+2}}_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n}u^{p^{2(n-i)+1}}_{2((2l+1)i+r)}u^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+l+r)+1}},\quad r=\overline{0,l},$$

$$x_{2((2l+1)n+l+r+1)}=\frac{x^{p^{2n+2}}_{2(r-l)}}{\prod_{i=0}^{n}u^{p^{2(n-i)+1}}_{2((2l+1)i+r)+1}u^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+l+r+1)}},\quad r=\overline{0,l-1}$$

$$y_{2((2l+1)n+r)}=\frac{y^{p^{2n+1}}_{2(r-l)-1}}{\left(\prod_{i=0}^{n}v^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+r)}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}v^{p^{2(n-i)-1}}_{2((2l+1)i+l+r)+1}\right)},\quad r=\overline{0,l},$$

$$y_{2((2l+1)n+r)+1}=\frac{y^{p^{2n+1}}_{2(r-l)}}{\left(\prod_{i=0}^{n}v^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+r)+1}\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}v^{p^{2(n-i)-1}}_{2((2l+1)i+l+r+1)}\right)},\quad r=\overline{0,l-1},$$

$$y_{2((2l+1)n+l+r)+1}=\frac{y^{p^{2n+2}}_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n}v^{p^{2(n-i)+1}}_{2((2l+1)i+r)}v^{p^{2(n-i)}}_{2((2l+1)i+l+r)+1}},\quad r=\overline{0,l},$$

et

$$y_{2((2l+1)n+l+r+1)} = \frac{y_{2(r-l)}^{p^{2n+2}}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2((2l+1)i+r)+1}^{p^{2(n-i)+1}} v_{2((2l+1)i+l+r+1)}^{p^{2(n-i)}}}, \quad r = \overline{0, l-1}.$$

■

Remarque 3.1.1 *Il est facile de vérifier que la forme des solutions dans [38], s'obtient directement du Théorème* (3.1.1). *En effet, pour $k = 2$, $p = 1$ et $a\alpha = 1$ nous avons du Théorème* (3.1.1)

$$x_{2n} = \frac{x_{-2}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2i}}, \quad x_{2n+1} = \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n} u_{2i+1}}, \quad y_{2n} = \frac{y_{-2}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2i}}, \quad y_{2n+1} = \frac{y_{-1}}{\prod_{i=0}^{n} v_{2i+1}}, \ n = 0, 1, ...,$$

avec

$$u_{2n} = \frac{x_{-2} + (\beta + b)\, n x_0}{x_0}, \qquad u_{2n+1} = \frac{y_{-2} + b y_0 + (\beta + b)\, n y_0}{y_0},$$

et

$$v_{2n} = \frac{y_{-2} + (b + \beta)\, n y_0}{y_0}, \qquad v_{2n+1} = \frac{x_{-2} + \beta x_0 + (b + \beta)\, n x_0}{x_0}.$$

Choisissons $b = \beta = 1$, alors

$$u_{2n} = \frac{x_{-2} + 2n x_0}{x_0}, \qquad u_{2n+1} = \frac{y_{-2} + (1 + 2n) y_0}{y_0},$$

et

$$v_{2n} = \frac{y_{-2} + 2n y_0}{y_0}, \qquad v_{2n+1} = \frac{x_{-2} + (1 + 2n) x_0}{x_0},$$

d'où

$$x_{2n} = \frac{x_{-2} x_0^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n} (x_{-2} + 2i x_0)} = \frac{x_0^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n} (x_{-2} + 2i x_0)},$$

donc

$$x_{2n} = \frac{x_0^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_{-2} + (2i + 2) x_0)}. \tag{3.15}$$

De même :

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-1} y_0^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n} (y_{-2} + (2i + 2) y_0)},$$

ainsi

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-1}y_0^n}{\prod_{i=0}^{n-1}(y_{-2}+(2i+2)y_0)}. \tag{3.16}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$y_{2n} = \frac{y_0^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n-1}(y_{-2}+(2i+2)y_0)}, \tag{3.17}$$

et

$$y_{2n+1} = \frac{y_{-1}x_0^n}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_{-2}+(2i+2)x_0)}. \tag{3.18}$$

Il est clair que les formules (3.15)-(3.18) *sont les mêmes que ceux donné dans le théorème 2.1 dans [38]. D'une manière similaire, on peut obtenir les formules donnés dans les théorèmes 2.2, 2.3 et 2.4 dans [38].*

3.2 Le comportement des solutions du système (3.2) avec $p = 1$

Dans cette partie, on s'intéresse à un cas particulier du système (3.2), qui est le cas où $p = 1$, c'est à dire, le système

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k+1}y_n}{ay_{n-k}+by_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_{n-k+1}x_n}{\alpha x_{n-k}+\beta x_n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.19}$$

En particulier, nous examinons la bornitude, la périodicité et le comportement asymptotique des solutions du système (3.19).

Tout au long de cette partie, nous supposons également que les paramètres a, b, α, β et les valeurs initiales $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ sont strictement positifs (pour les quelles les solutions sont bien définies).

Nous commençons par le théorème suivant qui concerne la bornitude des solutions du système (3.19).

Théorème 3.2.1 *Considérons le système* (3.19) *tel que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :*

(H.1) $\min\{b, \beta\} \geq 1$,

(H.2) $\min\{a, \alpha\} \geq 1$, $ay_{-k} \geq y_0$ *et* $\alpha x_{-k} \geq x_0$.

Alors, toute solution est bornée.

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ une solution du système (3.19).

Si l'hypothèse (H.1) est satisfaite, c'est à dire, si $\min\{b, \beta\} \geq 1$, alors il découle du système (3.19) que

$$x_{n+1} \leq \frac{x_{n-k+1}}{b} \leq x_{n-k+1} \quad \text{et} \quad y_{n+1} \leq \frac{y_{n-k+1}}{\beta} \leq y_{n-k+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc les sous-suites $\{x_{kn-i}\}_{n\geq 0}$ et $\{y_{kn-i}\}_{n\geq 0}$, $i = 0, \ldots, k-1$, sont décroissantes. De plus, nous avons

$$x_n \leq \max_{i=\overline{0,k-1}} \left\{\frac{x_{-i}}{b}\right\} \quad \text{et} \quad y_n \leq \max_{i=\overline{0,k-1}} \left\{\frac{y_{-i}}{\beta}\right\} \quad \text{pour tous } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi, la solution est bornée.

Si l'hypothèse (H.2) est satisfaite. C'est à dire, si $\min\{a, \alpha\} \geq 1$, $ay_{-k} \geq y_0$ et $\alpha x_{-k} \geq x_0$, alors il résulte du système (3.19) que pour $n = 0$, on obtient

$$x_1 \leq \frac{x_{-k+1}y_0}{ay_{-k}} \leq x_{-k+1} \quad \text{et} \quad y_1 \leq \frac{y_{-k+1}x_0}{\alpha x_{-k}} \leq y_{-k+1}.$$

En utilisant ces inégalité et le fait que $\min\{a, \alpha\} \geq 1$, nous obtenons pour $n = 1$

$$x_2 \leq \frac{x_{-k+2}y_1}{ay_{-k+1}} \leq x_{-k+2} \quad \text{et} \quad y_2 \leq \frac{y_{-k+2}x_1}{\alpha x_{-k+1}} \leq y_{-k+2}.$$

Par récurrence, on obtient, pour $n = k-1$,

$$x_k \leq \frac{x_0 y_{k-1}}{ay_{-1}} \leq x_0 \quad \text{et} \quad y_k \leq \frac{y_0 x_{k-1}}{\alpha x_{-1}} \leq y_0.$$

Il s'ensuit par récurrence que les sous-suites $\{x_{kn-i}\}_{n\geq 0}$ et $\{y_{kn-i}\}_{n\geq 0}$, $i = 0, \ldots, k-1$, sont décroissantes. Ainsi, nous avons

$$x_n \leq \max_{i=\overline{0,k-1}} \{x_{-i}\} \quad \text{et} \quad y_n \leq \max_{i=\overline{0,k-1}} \{y_{-i}\} \quad \text{pour tous } n \in \mathbb{N}_0.$$

D'où, la solution est également bornée. ■

Dans le théorème suivant, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions du système (3.19) soient périodiques de période k.

Théorème 3.2.2 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ *une solution du système* (3.19). *Alors,*

$$(x_n, y_n) = (x_{n-k}, y_{n-k}),\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_0, y_0) = (x_{-k}, y_{-k})\, et\, a + b = \alpha + \beta = 1.$$

Preuve. Premièrement, supposons que, $(x_n, y_n) = (x_{n-k}, y_{n-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, nous avons $(x_0, y_0) = (x_{-k}, y_{-k})$ et

$$x_{-k+1} = x_1 = \frac{x_{-k+1}y_0}{ay_{-k} + by_0} \quad \text{et} \quad y_{-k+1} = y_1 = \frac{y_{-k+1}x_0}{\alpha x_{-k} + \beta x_0}.$$

Ces égalités implique que

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{\alpha+\beta} = 1 \quad \text{i.e.,} \quad a + b = \alpha + \beta = 1$$

Inversement, supposons que, $(x_0, y_0) = (x_{-k}, y_{-k})$ et $a + b = \alpha + \beta = 1$. Alors, du système (3.19) nous obtenons

$$x_1 = \frac{x_{-k+1}y_0}{ay_{-k} + by_0} = \frac{x_{-k+1}}{a+b} = x_{-k+1}, \qquad y_1 = \frac{y_{-k+1}x_0}{\alpha x_{-k} + \beta x_0} = \frac{y_{-k+1}}{\alpha+\beta} = y_{-k+1}.$$

Encore, de ces égalités et du système (3.19), nous obtenons

$$x_2 = \frac{x_{-k+2}y_1}{ay_{-k+1} + by_1} = \frac{x_{-k+2}}{a+b} = x_{-k+2}, \qquad y_2 = \frac{y_{-k+2}x_1}{\alpha x_{-k+1} + \beta x_1} = \frac{y_{-k+2}}{\alpha+\beta} = y_{-k+2}.$$

Ainsi, par récurrence,

$$x_k = \frac{x_0 y_{k-1}}{ay_{-1} + by_{k-1}} = \frac{x_0}{a+b} = x_0, \qquad y_k = \frac{y_0 x_{k-1}}{\alpha x_{-1} + \beta x_{k-1}} = \frac{y_0}{\alpha+\beta} = y_0.$$

D'où, la solution est périodique du période k. ■

Les résultats suivants fournissent le comportement asymptotique des solutions du système (3.19).

Théorème 3.2.3 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ *une solution du système* (3.19), *on a*

(a) *Si* $a\alpha > 1$, *alors* $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

(b) *Si* $a\alpha = 1$, *alors* $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

(c) *Si* $a\alpha < 1$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & A > 1, \\ +\infty, & A < 1. \end{cases} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & B > 1, \\ +\infty, & B < 1. \end{cases},$$

avec $A := \dfrac{a\beta + b}{1 - a\alpha}$ *et* $B := \dfrac{\alpha b + \beta}{1 - a\alpha}$.

Preuve. Tout d'abord, lorsque $p = 1$, le système (3.10) devient

$$x_{kn+s} = \frac{x_{s-k}}{\prod_{i=0}^{n} u_{ki+s}}, \qquad y_{kn+s} = \frac{y_{s-k}}{\prod_{i=0}^{n} v_{ki+s}}, \quad \forall s = \overline{0, k-1}. \tag{3.20}$$

où les expressions des u_n et v_n sont données par

$$u_{2n} = \begin{cases} \dfrac{x_{-k} + (a\beta + b)\, n x_0}{x_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n x_{-k} + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1} (a\beta + b)\, x_0}{x_0}, & a\alpha \neq 1. \end{cases}, \tag{3.21}$$

$$u_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{a y_{-k} + b y_0 + (a\beta + b)\, n y_0}{y_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n (a y_{-k} + b y_0) + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1} (a\beta + b)\, y_0}{y_0}, & a\alpha \neq 1. \end{cases}, \tag{3.22}$$

$$v_{2n} = \begin{cases} \dfrac{y_{-k} + (\alpha b + \beta)\, n y_0}{y_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n y_{-k} + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1} (\alpha b + \beta)\, y_0}{y_0}, & a\alpha \neq 1. \end{cases} \tag{3.23}$$

et

$$v_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_{-k} + \beta x_0 + (\alpha b + \beta)\, n x_0}{x_0}, & a\alpha = 1, \\ \dfrac{(a\alpha)^n (\alpha x_{-k} + \beta x_0) + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1} (\alpha b + \beta)\, x_0}{x_0}, & a\alpha \neq 1. \end{cases}. \tag{3.24}$$

Notons que du système (3.20), la limite de x_{kn+s} quand $n \to \infty$ dépend de la limite de u_{kn+s} quand $n \to \infty$, qui elle même dépend de la valeur de $a\alpha$. Alors, on a les trois cas possibles suivantes

(a) Si $a\alpha > 1$, alors $\dfrac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Ainsi, de (3.21) et (3.22), nous avons $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Donc, du système (3.20), $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. De la même manière, on montre que $y_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(b) Si $a\alpha = 1$, alors de (3.21) et (3.22) nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(a\beta + b)n = +\infty.$$

Ainsi, de (3.20), nous avons $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$. De la même manière, nous prouvons que $y_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

(c) Si $a\alpha < 1$, alors $(a\alpha)^n \to 0$ quand $n \to \infty$. Ainsi, de (3.21) et (3.22), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \frac{a\beta + b}{1 - a\alpha} = A,$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_{2n} = \lim_{n\to\infty} v_{2n+1} = \frac{\alpha b + \beta}{1 - a\alpha} = B.$$

Soit $s \in \{0, \ldots, k-1\}$ fixé. Si $A > 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{m=0}^{n} u_{km+s} = +\infty.$$

D'où , $\lim\limits_{n\to\infty} x_{kn+r} = 0$, ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. D'autre part, si $A < 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{kn+r}}\right) = \lim_{n\to\infty}(1/u_n) = \frac{1}{A} > 1.$$

Par conséquent, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{m=0}^{n} (1/u_{km+r}) = +\infty.$$

D'où, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{kn+r} = \infty$, ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. De la même manière, nous prouvons que, si $B > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ et si $B < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Ceci termine la preuve du théorème.

■

Maintenant, dans ce qui suit, nous étudions le comportement des solutions du système (3.19) dans le cas où $A = 1$ (resp. $B = 1$).

Théorème 3.2.4 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ *une solution du système* (3.19) *avec* $k = 2l$ ($l = 1, 2, \ldots$). *Supposons que* $a\alpha < 1$. *Donc, on a les assertions suivantes*

(a) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$) et $x_{-2l} \neq x_0$ (resp. $y_{-2l} \neq y_0$), alors, pour tout $r = \overline{0, l-1}$, les sous-suites (x_{2ln+2r}) (resp. (y_{2ln+2r})) sont convergentes.*

(b) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$) et $x_{-2l} = x_0$ (resp. $y_{-2l} = y_0$), alors $x_{2ln+2r} = x_{2r-2l}$ (resp. $y_{2ln+2r} = y_{2r-2l}$) pour tout $r = \overline{0, l-1}$.*

(c) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$) et $ay_{-2l} \neq (1-b)y_0$ (resp. $\alpha x_{-2l} \neq (1-\beta)x_0$), alors, pour tout $r = \overline{0, l-1}$, les sous-suites $(x_{2ln+2r+1})$ (resp. $(y_{2ln+2r+1})$), sont convergentes.*

(d) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$) et $ay_{-2l} = (1-b)y_0$ (resp. $\alpha x_{-2l} = (1-\beta)x_0$), alors $x_{2ln+2r+1} = x_{2r-2l+1}$ (resp. $y_{2ln+2r+1} = y_{2r-2l+1}$) pour tout $r = \overline{0, l-1}$.*

Preuve. Nous allons prouver ces résultats seulement pour les sous-suites (x_{2ln+2r}) et $(x_{2ln+2r+1})$. Les résultats sur les sous-suites (y_{2ln+2r}) et $(y_{2ln+2r+1})$ se démontre d'une manière similaire.

Tout d'abord, notons que dans le cas où $A = 1$, c'est à dire, $a\beta + b = 1 - a\alpha$, les deux sous-suites de (u_n) prennent la forme

$$u_{2n} = \frac{(a\alpha)^n(x_{-2l} - x_0)}{x_0} + 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{(a\alpha)^n[ay_{-2l} + (b-1)y_0]}{y_0} + 1.$$

Aussi, dans le cas où $B = 1$, c'est à dire, $\alpha b + \beta = 1 - a\alpha$, les deux sous-suites de (v_n) prennent la forme

$$v_{2n} = \frac{(a\alpha)^n(y_{-2l} - y_0)}{y_0} + 1 \quad \text{et} \quad v_{2n+1} = \frac{(a\alpha)^n[\alpha x_{-2l} + (\beta-1)x_0]}{x_0} + 1.$$

(a) Par le Théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2(ln+r)} = \frac{x_{2r-2l}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l} - x_0)}{x_0}\right)}.$$

On distingue deux cas possibles.

(i) <u>$Si\, x_{-2l} > x_0$:</u> alors

$$x_{2(ln+r)} = \frac{x_{2r-2l}}{\exp \sum_{i=0}^{n} \ln\left[1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l} - x_0)}{x_0}\right]}.$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a\alpha)^n = 0$ et par l'utilisation d'une propriété du logarithme ($\ln(1+x) \sim_0 x$), nous avons

$$\ln\left[1+\frac{(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}{x_0}\right]\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}{x_0}.$$

Maintenant, puisque $\sum\limits_{n\geq 0}(a\alpha)^n$ est une série géométrique, et comme $a\alpha < 1$, alors la série

$$\sum_{i\geq 0}\frac{x_{-2l}-x_0}{x_0}(a\alpha)^{li+r}$$

est convergente, ainsi le résultat souhaité est obtenu.

(ii) <u>*Si* $x_{-2l} < x_0$:</u> alors

$$\begin{aligned}
x_{2(ln+r)} &= x_{2r-2l}\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{x_0}{x_0+(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}\right)\\
&= x_{2r-2l}\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^{li+r}(x_0-x_{-2l})}{x_0+(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}\right)\\
&= x_{2r-2l}\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{li+r}(x_0-x_{-2l})}{x_0+(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{li+r}(x_0-x_{-2l})}{x_0+(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}\right)\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{li+r}(x_0-x_{-2l})}{x_0+(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)},$$

et

$$\frac{(a\alpha)^{li+r}(x_0-x_{-2l})}{x_0+(a\alpha)^{li+r}(x_{-2l}-x_0)}\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{li+r}(x_0-x_{-2l})}{x_0},$$

mais la série

$$\sum_{i\geq 0}\frac{x_0-x_{-2l}}{x_0}(a\alpha)^{li+r}$$

est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(b) Le résultat est immédiat puisque $u_{2n} = 1$ dans ce cas.

(c) La preuve est semblable à celle de (a). Par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2(ln+r)+1} = \frac{x_{2r-2l+1}}{\prod\limits_{i=0}^{n}\left[1+\frac{(a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}{y_0}\right]}.$$

On distingue deux cas possibles.

(i) <u>Si $ay_{-2l} > (1-b)y_0$:</u> alors

$$x_{2(ln+r)+1} = \frac{x_{2r-2l+1}}{\exp \sum_{i=0}^{n} \ln \left[1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}{y_0}\right]}.$$

On a

$$\ln\left[1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}{y_0}\right] \sim_\infty \frac{(a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}{y_0}.$$

comme $a\alpha < 1$, la série

$$\sum_{i\geq 0} \frac{ay_{-2l}+(b-1)y_0}{y_0}(a\alpha)^{li+r}$$

est convergente, ainsi le résultat souhaité est obtenu.

(ii) <u>Si $ay_{-2l} < (1-b)y_0$:</u> alors

$$\begin{aligned}
x_{2(ln+r)+1} &= x_{2r-2l+1} \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{y_0}{y_0 + (a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}\right), \\
&= x_{2r-2l+1} \prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}(-ay_{-2l}+(1-b)y_0)}{y_0 + (a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}\right), \\
&= x_{2r-2l+1} \exp \sum_{i=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}((1-b)y_0 - ay_{-2l})}{y_0 + (a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1 + \frac{(a\alpha)^{li+r}((1-b)y_0 - ay_{-2l})}{y_0 + (a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)}\right) \sim_\infty \frac{(a\alpha)^{li+r}((1-b)y_0 - ay_{-2l})}{y_0 + (a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)},$$

et

$$\frac{(a\alpha)^{li+r}((1-b)y_0 - ay_{-2l})}{y_0 + (a\alpha)^{li+r}(ay_{-2l}+(b-1)y_0)} \sim_\infty \frac{(a\alpha)^{li+r}((1-b)y_0 - ay_{-2l})}{y_0},$$

mais la série

$$\sum_{i\geq 0} \frac{(1-b)y_0 - ay_{-2l}}{y_0}(a\alpha)^{li+r}$$

est convergente, d'où le résultat.

(d) Le résultat est immédiat puisque $u_{2n+1} = 1$ dans ce cas.

■

Théorème 3.2.5 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ *une solution du système* (3.19) *avec* $k = 1$. *Supposons que* $a\alpha < 1$. *Donc, on a les assertions suivantes*

(a) *Si* $A = 1$ *(resp.* $B = 1$*),* $x_{-1} \neq x_0$ *(resp.* $y_{-1} \neq y_0$*) et* $ay_{-1} \neq (1-b)y_0$ *(resp.* $\alpha x_{-1} \neq (1-\beta)x_0$*), alors, les sous-suites* x_{2n}, x_{2n+1} *(resp.* y_{2n}, y_{2n+1}*) sont convergentes.*

(b) *Si* $A = 1$ *(resp.* $B = 1$*),* $x_{-1} = x_0$ *(resp.* $y_{-1} = y_0$*) et* $ay_{-1} \neq (1-b)y_0$ *(resp.* $\alpha x_{-1} \neq (1-\beta)x_0$*), alors, les sous-suites* x_{2n}, x_{2n+1} *(resp.* y_{2n}, y_{2n+1}*) sont convergentes.*

(c) *Si* $A = 1$ *(resp.* $B = 1$*),* $x_{-1} \neq x_0$ *(resp.* $y_{-1} \neq y_0$*) et* $ay_{-1} = (1-b)y_0$ *(resp.* $\alpha x_{-1} = (1-\beta)x_0$*), alors, les sous-suites* x_{2n}, x_{2n+1} *(resp.* y_{2n}, y_{2n+1}*) sont convergentes.*

(d) *Si* $A = 1$ *(resp.* $B = 1$*),* $x_{-1} = x_0$ *(resp.* $y_{-1} = y_0$*) et* $ay_{-1} = (1-b)y_0$ *(resp.* $\alpha x_{-1} = (1-\beta)x_0$*), alors,* $x_{2n} = x_{2n+1} = x_{-1}$ *(resp.* $y_{2n} = y_{2n+1} = y_{-1}$*).*

Preuve. Nous allons prouver ces résultats seulement pour la sous-suite (x_{2n}). Les résultats sur les sous-suites (x_{2n+1}), (y_{2n}) et (y_{2n+1}) se démontre d'une manière similaire.

Tout d'abord, notons que dans le cas où $A = 1$, c'est à dire, $a\beta + b = 1 - a\alpha$, les deux sous-suites de (u_n) prennent la forme

$$u_{2n} = \frac{(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}{x_0} + 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{(a\alpha)^n[ay_{-1}+(b-1)y_0]}{y_0} + 1.$$

Aussi, dans le cas où $B = 1$, c'est à dire, $\alpha b + \beta = 1 - a\alpha$, les deux sous-suites de (v_n) prennent la forme

$$v_{2n} = \frac{(a\alpha)^n(y_{-1}-y_0)}{y_0} + 1 \quad \text{et} \quad v_{2n+1} = \frac{(a\alpha)^n[\alpha x_{-1}+(\beta-1)x_0]}{x_0} + 1.$$

(a) Par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2n} = \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}$$

On distingue quatre cas possibles.

(i) <u>*Si* $x_{-1} > x_0$ *et* $ay_{-1}+(b-1)y_0 > 0$:</u> alors

$$x_{2n} = \frac{x_{-1}}{\exp\left[\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)+\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)\right]}.$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)\sim_\infty\frac{(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}{x_0}$$

et

$$\ln\left[1+\frac{(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right]\sim_\infty\frac{(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}.$$

Mais les deux séries

$$\sum_{i\geq 0}\frac{x_{-1}-x_0}{x_0}(a\alpha)^i \qquad et \qquad \sum_{i\geq 0}\frac{ay_{-1}+(b-1)y_0}{y_0}(a\alpha)^i$$

sont convergentes, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(ii) *Si* $x_{-1} > x_0$ *et* $ay_{-1} + (b-1)y_0 < 0$: alors

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{y_0}{y_0+(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
&= \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)}\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{-(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0+(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
&= \frac{x_{-1}}{\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)}\exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0+(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}{x_0}\right)\sim_\infty\frac{(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}{x_0}$$

et

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0+(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right)\sim_\infty\frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0+(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)},$$

aussi

$$\frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0+(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\sim_\infty\frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0},$$

mais la série

$$\sum_{n\geq 0}(a\alpha)^n$$

est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(iii) Si $x_{-1} < x_0$ et $ay_{-1} + (b-1)y_0 > 0$: alors

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{x_0}{x_0+(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}\right),\\
&= \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}\right),\\
&= \frac{x_{-1}}{\exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^n(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}\right) \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)} \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n(x_0-x_{-1})}{x_0}$$

et

$$\ln\left[1+\frac{(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right] \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n(ay_{-1}+(b-1)y_0)}{y_0}.$$

mais la série

$$\sum_{n\geq 0}(a\alpha)^n$$

est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(iiii) Si $x_{-1} < x_0$ et $ay_{-1} + (b-1)y_0 < 0$: alors

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= x_{-1}\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{x_0}{x_0+(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{y_0}{y_0+(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
&= x_{-1}\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^i((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0+(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
&= x_{-1}\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^i(x_{-1}-x_0)}\right)\exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^i((1-b)y_0-ay_{-1})}{y_0+(a\alpha)^i(ay_{-1}+(b-1)y_0)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^n(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)}\right) \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n(x_0-x_{-1})}{x_0+(a\alpha)^n(x_{-1}-x_0)} \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n(x_0-x_{-1})}{x_0}$$

et

$$\ln\left(1 + \frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0 - ay_{-1})}{y_0 + (a\alpha)^n(ay_{-1} + (b-1)y_0)}\right) \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0 - ay_{-1})}{y_0 + (a\alpha)^n(ay_{-1} + (b-1)y_0)},$$

d'autre part

$$\frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0 - ay_{-1})}{y_0 + (a\alpha)^n(ay_{-1} + (b-1)y_0)} \sim_\infty \frac{(a\alpha)^n((1-b)y_0 - ay_{-1})}{y_0},$$

mais la série

$$\sum_{n\geq 0}(a\alpha)^n$$

est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(b) Dans ce cas $u_{2n} = 1$, ainsi par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2n} = \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{(a\alpha)^i(ay_{-1} + (b-1)y_0)}{y_0}\right)},$$

le résultat découle en démontrant de la même manière que dans (a), et en distinguant les deux cas $ay_{-1} + (b-1)y_0 > 0$ et $ay_{-1} + (b-1)y_0 < 0$.

(c) Dans ce cas $u_{2n+1} = 1$, ainsi par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2n} = \frac{x_{-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{(a\alpha)^i(x_{-1} - x_0)}{x_0}\right)},$$

le résultat découle en démontrant de la même manière que dans (a), et en distinguant les deux cas $x_{-1} > x_0$ et $x_{-1} < x_0$.

(d) Le résultat est immédiat puisque $u_{2n} = u_{2n+1} = 1$ dans ce cas.

■

Théorème 3.2.6 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -k}$ *une solution du système* (3.19) *avec* $k = 2l+1$ $(l = 1, 2, \ldots)$. *Supposons que* $a\alpha < 1$. *Donc, on a les assertions suivantes :*

(a) *Si* $A = 1$ *(resp.* $B = 1$*),* $x_{-2l-1} \neq x_0$ *(resp.* $y_{-2l-1} \neq y_0$*) et* $ay_{-2l-1} \neq (1-b)y_0$ *(resp.* $\alpha x_{-2l-1} \neq (1-\beta)x_0$*), alors, tous les sous-suites de* x_n *(resp.* y_n*) sont convergentes.*

(b) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$), $x_{-2l-1} = x_0$ (resp. $y_{-2l-1} = y_0$) et $ay_{-2l-1} \neq (1-b)y_0$ (resp. $\alpha x_{-2l-1} \neq (1-\beta)x_0$), alors, tous les sous-suites de x_n (resp. y_n) sont convergentes.*

(c) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$), $x_{-2l-1} \neq x_0$ (resp. $y_{-2l-1} \neq y_0$) et $ay_{-2l-1} = (1-b)y_0$ (resp. $\alpha x_{-2l-1} = (1-\beta)x_0$), alors, tous les sous-suites de x_n (resp. y_n) sont convergentes.*

(d) *Si $A = 1$ (resp. $B = 1$), $x_{-2l-1} = x_0$ (resp. $y_{-2l-1} = y_0$) et $ay_{-2l-1} = (1-b)y_0$ (resp. $\alpha x_{-2l-1} = (1-\beta)x_0$), alors, x_n (resp. y_n) sont périodiques de période $2l+1$.*

Preuve. Nous allons prouver ces résultats seulement pour les sous-suites $(x_{2[(2l+1)n+r]})$, $r = \overline{0,l}$. Les résultats sur les sous-suites $(x_{2[(2l+1)n+r]+1})$, $r = \overline{0,l-1}$, $(x_{2[(2l+1)n+l+r]+1})$, $r = \overline{0,l}$, $(x_{2[(2l+1)n+l+r+1]})$, $r = \overline{0,l-1}$, $(y_{2[(2l+1)n+r]})$, $r = \overline{0,l}$, $(y_{2[(2l+1)n+r]+1})$, $r = \overline{0,l-1}$, $(y_{2[(2l+1)n+l+r]+1})$, $r = \overline{0,l}$ et $(y_{2[(2l+1)n+l+r+1]})$, $r = \overline{0,l-1}$ se démontre d'une manière similaire.

Tout d'abord, notons que dans le cas où $A = 1$, c'est à dire, $a\beta + b = 1 - a\alpha$, les deux sous-suites de (u_n) prennent la forme

$$u_{2n} = \frac{(a\alpha)^n(x_{-2l-1} - x_0)}{x_0} + 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{(a\alpha)^n[ay_{-2l-1} + (b-1)y_0]}{y_0} + 1.$$

Aussi, dans le cas où $B = 1$, c'est à dire, $\alpha b + \beta = 1 - a\alpha$, les deux sous-suites de (v_n) prennent la forme

$$v_{2n} = \frac{(a\alpha)^n(y_{-2l-1} - y_0)}{y_0} + 1 \quad \text{et} \quad v_{2n+1} = \frac{(a\alpha)^n[\alpha x_{-2l-1} + (\beta-1)x_0]}{x_0} + 1.$$

Soit $r \in \overline{0,l}$ fixé.

(a) Par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2((2l+1)n+r)} = \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1} - x_0)}{x_0}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1} + (b-1)y_0)}{y_0}\right)}$$

On distingue quatre cas possibles.

(i) <u>Si $x_{-2l-1} > x_0$ et $ay_{-2l-1} + (b-1)y_0 > 0$:</u> alors

$$x_{2((2l+1)n+r)} = \frac{x_{2(r-l)-1}}{\exp\left[\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1 + \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1} - x_0)}{x_0}\right) + \sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1 + \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1} + (b-1)y_0)}{y_0}\right)\right]}.$$

On a
$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}\right)\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}$$
et
$$\ln\left[1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right]\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}.$$
Mais les deux séries
$$\sum_{i\geq 0}\frac{x_{-2l-1}-x_0}{x_0}(a\alpha)^{(2l+1)i+r} \qquad et \qquad \sum_{i\geq 0}\frac{ay_{-2l-1}+(b-1)y_0}{y_0}(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}$$
sont convergentes, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(ii) <u>*Si* $x_{-2l-1} > x_0$ *et* $ay_{-2l-1}+(b-1)y_0 < 0$:</u> alors

$$\begin{aligned}
x_{2((2l+1)n+r)} &= \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}\right)}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{y_0}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
&= \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}\right)}\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{-(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
&= \frac{x_{2(r-l)-1}\exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right)}{\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{2l-1}-x_0)}{x_0}\right)}.
\end{aligned}$$

On a
$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}\right)\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}$$
et
$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right)\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)},$$
aussi
$$\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0},$$
mais la série
$$\sum_{n\geq 0}(a\alpha)^n$$
est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(iii) Si $x_{-2l-1}<x_0$ et $ay_{-2l-1}+(b-1)y_0>0$: alors

$$\begin{aligned}
x_{2((2l+1)n+r)} &= \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{x_0}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right),\\
&= \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right),\\
&= \frac{x_{2(r-l)-1}\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right)}{\exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)}.
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right)\sim_\infty\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\sim_\infty\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0}$$

et

$$\ln\left[1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right]\sim_\infty\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}.$$

mais la série

$$\sum_{n\geq 0}(a\alpha)^n$$

est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(iiii) Si $x_{-1}<x_0$ et $ay_{-2l-1}+(b-1)y_0<0$: alors

$$\begin{aligned}
x_{2((2l+1)n+r)} =& x_{2(r-l)-1}\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{x_0}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{2l-1}-x_0)}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{y_0}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
=& x_{2(r-l)-1}\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right)\\
&\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{-(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right),\\
=& x_{2(r-l)-1}\exp\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right)\\
&\exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\right)\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_0-x_{-2l-1})}{x_0}$$

et

$$\ln\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\right)\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}$$

d'autre part

$$\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0+(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}\sim_\infty \frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}((1-b)y_0-ay_{-2l-1})}{y_0}$$

mais la série

$$\sum_{n\geq 0}(a\alpha)^n$$

est convergente, d'où le résultat souhaité est obtenu.

(b) Dans ce cas $u_{2n} = 1$, ainsi par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2((2l+1)n+r)} = \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+l+r}(ay_{-2l-1}+(b-1)y_0)}{y_0}\right)},$$

le résultat découle en démontrant de la même manière que dans (a), et en distinguant les deux cas $ay_{-2l-1}+(b-1)y_0 > 0$ et $ay_{-2l-1}+(b-1)y_0 < 0$.

(c) Dans ce cas $u_{2n+1} = 1$, ainsi par le théorème (3.1.1), nous avons

$$x_{2((2l+1)n+r)} = \frac{x_{2(r-l)-1}}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{(a\alpha)^{(2l+1)i+r}(x_{-2l-1}-x_0)}{x_0}\right)},$$

le résultat découle en démontrant de la même manière que dans (a), et en distinguant les deux cas $x_{-2l-1} > x_0$ et $x_{-2l-1} < x_0$.

(d) Le résultat est immédiat puisque $u_{2n} = u_{2n+1} = 1$ dans ce cas, et

$$x_{2((2l+1)n+r)} = x_{2(r-l)-1} = x_{2((2l+1)n+l+r)+1},\ r=\overline{0,l},$$

$$x_{2((2l+1)n+r)+1} = x_{2(r-l)} = x_{2((2l+1)n+l+r+1)},\ r=\overline{0,l-1},$$

■

3.3 Exemples Numériques

Dans le but d'illustrer les résultats obtenus sur le système (3.19) avec $p = 1$, nous donnons les exemples numériques suivants

Exemple 3.3.1 *Considérons les paramètres*

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	1/2	1/2	2/3	1/3	5	20	17	25	5	8	12	9	18	8

On a $a + b = \alpha + \beta = 1$, $x_{-4} = x_0$ *et* $y_{-4} = y_0$, *ainsi, d'après le théorème 3.2.2, la solution* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -4}$ *est périodique de période 4 et prend la forme*

$$\{(5,8),(20,12),(17,9),(25,18),(5,8),(20,12),(17,9),(25,18),...\}.$$

Voir, Figure (3.1) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (3.2) *pour le comportement de* (y_n).

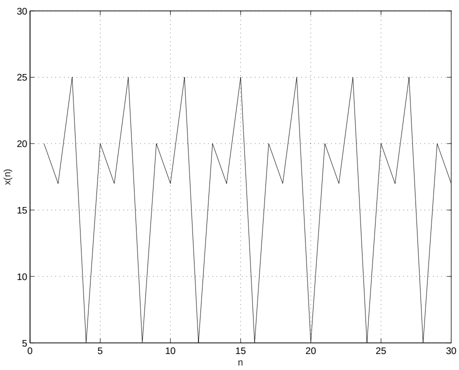

FIG. 3.1 –

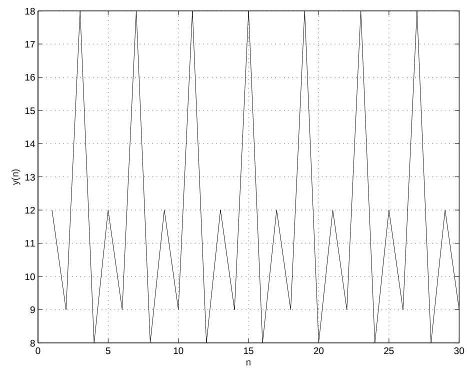

FIG. 3.2 –

Exemple 3.3.2 *(a) Considérons les paramètres*

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	1	2	2	3	90	18	49	52	15	67	36	63	27	2

Nous avons $a\alpha > 1$, *ainsi, d'après le cas (a) du Théorème 3.2.3,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Voir, Figure (3.3) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (3.4) *pour le comportement de* (y_n).

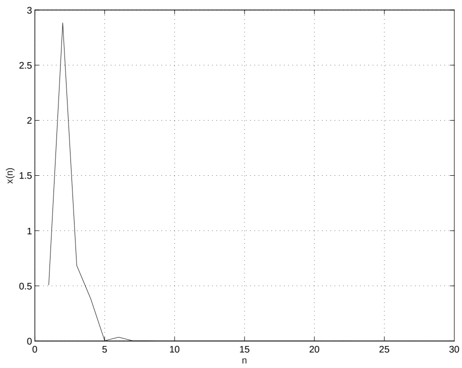

FIG. 3.3 –

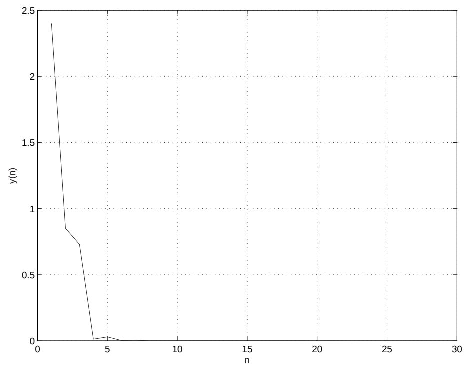

FIG. 3.4 –

(b) Considérons les paramètres

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	2	2	1/2	1	9	3	4	12	18	25	9	5	21	2

Nous avons $a\alpha = 1$, *ainsi d'après le cas (b) du Théorème 3.2.3,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Voir, Figure (3.5) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (3.6) *pour le comportement de* (y_n).

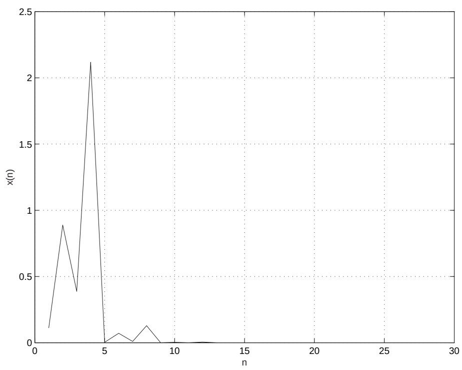

FIG. 3.5 –

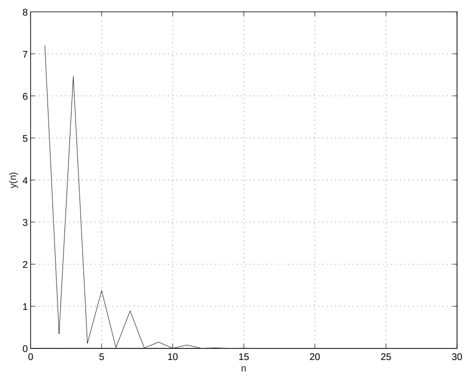

FIG. 3.6 –

Exemple 3.3.3 *(a) Considérons les paramètres*

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	4/5	1/5	1/4	1/2	9	18	6	12	15	25	16	5	21	2

Nous avons $a\alpha < 1$, $A < 1$ *et* $B < 1$. *Ainsi, d'après le cas (c) du Théorème 3.2.3,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Voir, Figure (3.7) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (3.8) *pour le comportement de* (y_n).

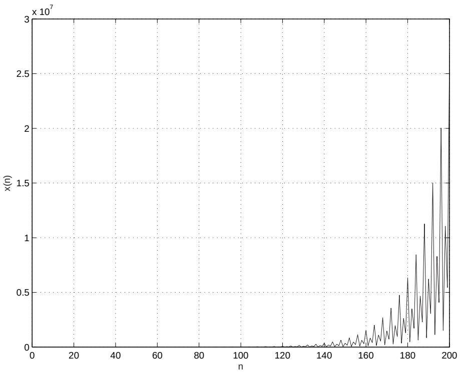

FIG. 3.7 –

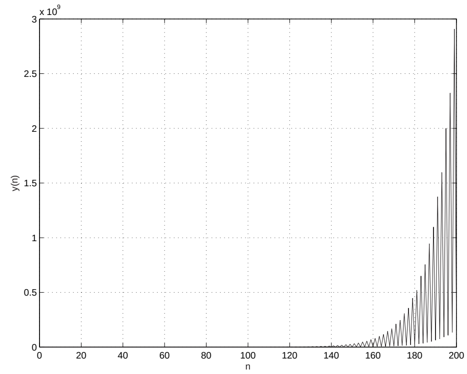

FIG. 3.8 –

(b) Considérons les paramètres

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	4/5	1	1/4	1/2	9	18	6	12	15	25	16	5	21	2

Nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le cas (a) sauf pour b nous avons pris la valeur 1. *Dans ce cas,* $A > 1$ *et* $B < 1$, *ainsi d'après le cas (c) du Théorème 3.2.3,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Voir, Figure (3.9) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (3.10) *pour le comportement de* (y_n).

(c) Considérons les paramètres

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	4/5	2	1/4	1/2	9	18	6	12	15	25	16	5	21	2

Nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le cas (a) sauf pour b nous avons pris la valeur 2. *Dans ce cas,* $A > 1$ *et* $B > 1$, *ainsi, d'après le cas (c) du Théorème 3.2.3,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Voir, Figure (3.11) *pour le comportement de* (x_n) *et Figure* (3.12) *pour le comportement de* (y_n).

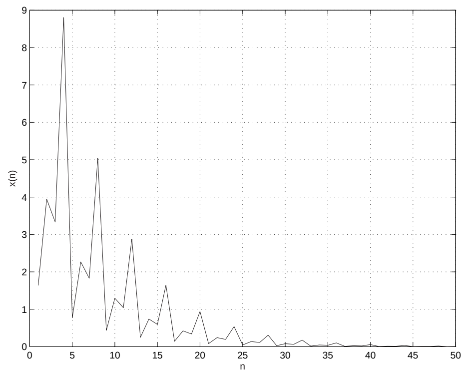

FIG. 3.9 –

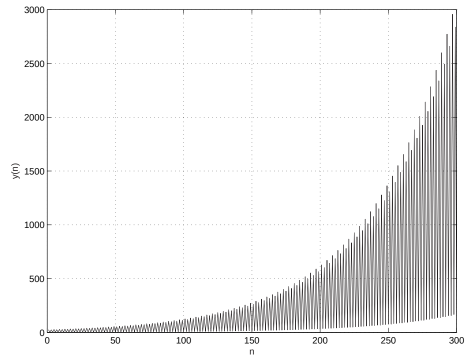

FIG. 3.10 –

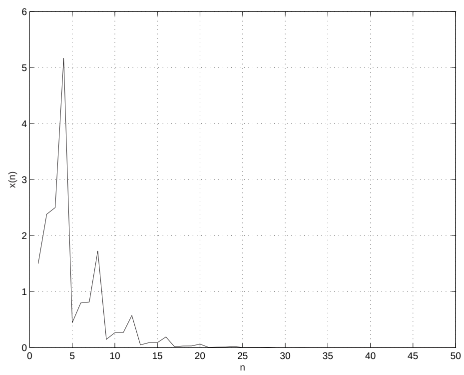

FIG. 3.11 –

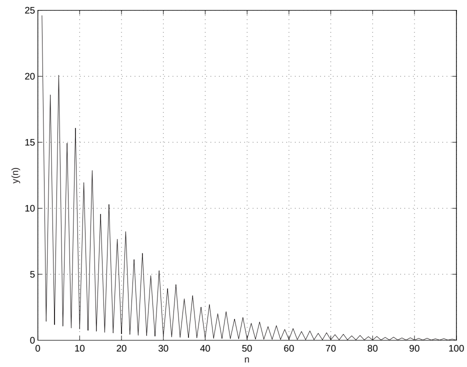

FIG. 3.12 –

Exemple 3.3.4 *(a) Considérons les paramètres*

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	4/5	2/5	1/4	1/2	228	79	106	152	65	75	86	48	27	2

Nous avons $a\alpha < 1$, $A = 1$, $B < 1$, $x_{-4} > x_0$ *et* $ay_{-4} > (1-b)y_0$. *Ainsi, d'après le cas (c) du Théorème 3.2.3 et les cas (a) et (c) du Théorème 3.2.4, les sous-suites* x_{4k+r}, $r = 0, \ldots, 3$ *sont convergentes et*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Voir, Figure (3.13) *(le comportement de* (x_{4n})*),Figure* (3.14) *(le comportement de* (x_{4n+1})*),Figure* (3.15) *(le comportement de* (x_{4n+2})*),Figure* (3.16) *(le comportement de* (x_{4n+3})*), Figure* (3.17) *(le comportement de* (y_n)*).*

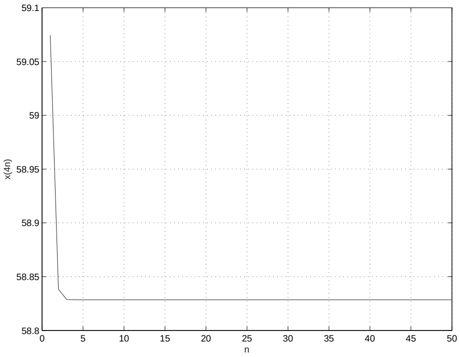

Fig. 3.13 –

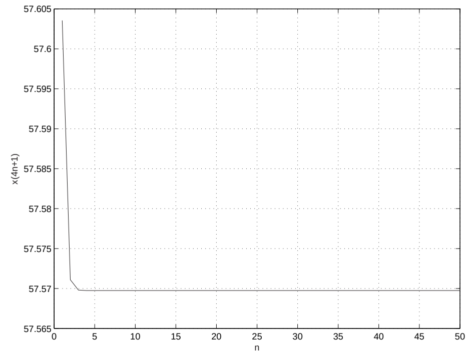

Fig. 3.14 –

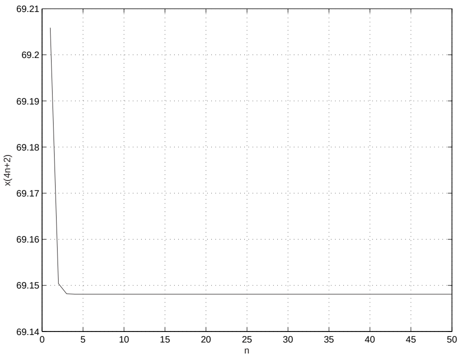

Fig. 3.15 –

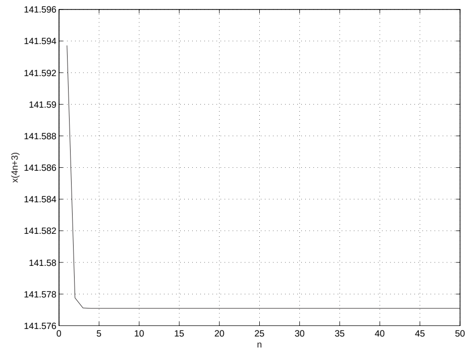

Fig. 3.16 –

(b) Considérons les paramètres

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	4/5	2/5	1/4	1/2	228	79	106	152	228	75	86	48	27	2

Nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le cas (a) sauf pour x_0 nous avons pris la valeur de $x_{-4} = 228$. Ainsi, d'après le cas (c) du Théorème 3.2.3 et les cas (b) et (c) du Théorème 3.2.4, la suite x_{2n} est périodique, les sous-suites x_{4n+1} et x_{4n+3} sont convergentes et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Voir, Figure (3.18) *(le comportement de* (x_{4n+1})*),Figure* (3.19) *(le comportement de* (x_{4n+3})*),Figure* (3.20) *(le comportement de* (x_{2n})*) et Figure* (3.21) *(le comportement de* (y_n)*).*

(c) Considérons les paramètres

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
4	4/5	2/5	1/4	1/2	228	79	106	152	228	75	86	48	27	2

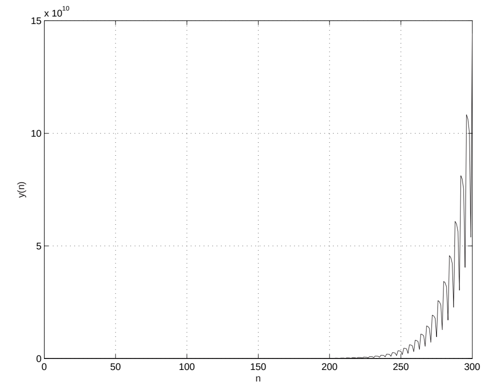

FIG. 3.17 –

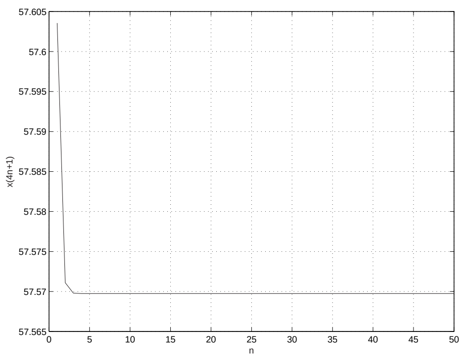

FIG. 3.18 –

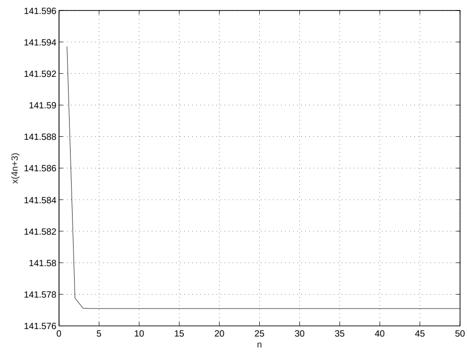

FIG. 3.19 –

Nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le cas (b) sauf pour y_0 nous avons pris la valeur de $\frac{a}{1-b}y_{-4} = 100$. Ainsi, d'après le cas (c) du Théorème 3.2.3 et les cas (b) et (d) du Théorème 3.2.4, x_n est périodique du période 4 et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Voir, Figure (3.22) *(le comportement de (x_n)) et Figure* (3.23) *(le comportement de (y_n)).*

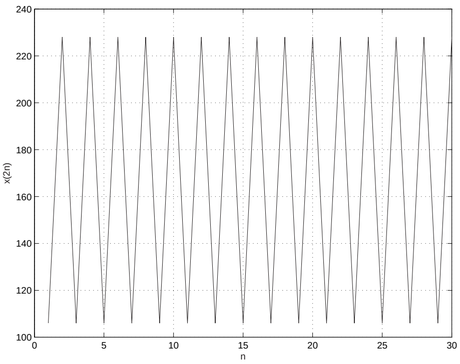

FIG. 3.20 –

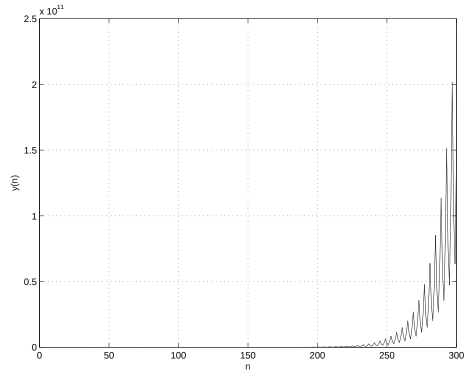

FIG. 3.21 –

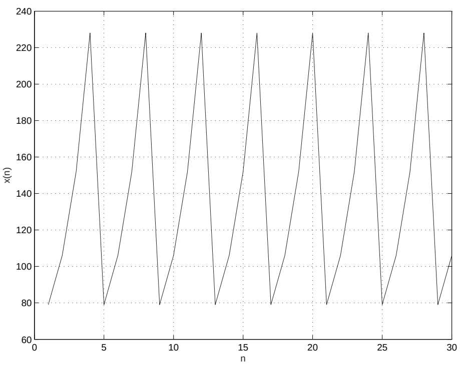

FIG. 3.22 –

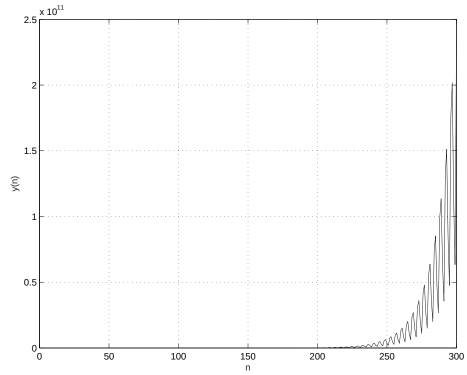

FIG. 3.23 –

CHAPITRE 4

Forme des solutions du système d'équations aux différences $x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)}\left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)}$, $y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)}\left(\alpha_n + \beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}$

Dans ce chapitre, et comme généralisation des résultats exposés dans [13] et [22], nous considérons le système d'équations aux différences d'ordre supérieur avec des coefficients variables (non autônome) suivant

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)}\left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)},$$

$$y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)}\left(\alpha_n + \beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

où $k \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réels, et les valeurs initiales $x_{-2k}, x_{-2k+1}, \ldots, x_0, y_{-2k}, y_{-2k+1}, \ldots, y_0$ sont des nombres réels non nuls.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la forme des solutions bien définies du système d'équations aux différences (4.1). Dans la deuxième partie, nous étudions la périodicité des solutions du système (4.1) dans le cas où les coefficients sont constantes.

Remarque 4.0.1 1. *Une solution du système* (4.1) *est dite bien définie si*

$$\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)}\left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)}\left(\alpha_n + \beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *Si on choisit tous les paramètres et tous les valeurs initiales strictement positive, alors les solutions correspondantes seront bien définies.*

3. *Comme les valeurs initiales sont non nuls, on montre, par récurence, que si*

$$\left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)\left(\alpha_n + \beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

alors toute solution du système (4.1) *satisfait*

$$x_n.y_n \neq 0, \ n \geq 1,$$

ainsi elle est bien définie.

4.1 La forme des solutions du système (4.1).

Dans le résultat suivant, nous déterminons la forme des solutions bien définies du système d'équations aux différences (4.1).

Théorème 4.1.1 *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -2k}$ une solution bien définie du système (4.1). Alors pour tout $n = 0, 1, ...,$*

$$x_{(2k+2)n+1} = \gamma \prod_{j=1}^{n} \frac{u_{2((k+1)j-1)+1}}{u_{2(k+1)j+1}},$$

$$x_{(2k+2)n+2i} = x_{2i-(2k+2)} \prod_{j=0}^{n} \frac{u_{2((k+1)j+i-1)}}{u_{2((k+1)j+i)}},\ i = 1, 2, ..., k+1,$$

$$x_{(2k+2)n+2i+1} = x_{2i-(2k+1)} \prod_{j=0}^{n} \frac{u_{2((k+1)j+i-1)+1}}{u_{2((k+1)j+i)+1}},\ i = 1, 2, ..., k,$$

$$y_{(2k+2)n+1} = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{v_{2((k+1)j-1)+1}}{v_{2(k+1)j+1}},$$

$$y_{(2k+2)n+2i} = y_{2i-(2k+2)} \prod_{j=0}^{n} \frac{v_{2((k+1)j+i-1)}}{v_{2((k+1)j+i)}},\ i = 1, 2, ..., k+1,$$

$$y_{(2k+2)n+2i+1} = y_{2i-(2k+1)} \prod_{j=0}^{n} \frac{v_{2((k+1)j+i-1)+1}}{v_{2((k+1)j+i)+1}},\ i = 1, 2, ..., k.$$

avec

$$\gamma = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{1-2j}\left(a_0 + b_0 \prod_{j=0}^{k} y_{-2j}\right)},\ \lambda = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{1-2j}\left(\alpha_0 + \beta_0 \prod_{j=0}^{k} x_{-2j}\right)},$$

et pour $s = 0, 1,$

$$u_{2n+s} = \left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(a_{2j+1+s}\alpha_{2j+s}\right)\right] u_s + \sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(a_{2i+1+s}\alpha_{2i+s}\right)\right]\left(a_{2j+1+s}\beta_{2j+s} + b_{2j+1+s}\right),$$

$$v_{2n+s} = \left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(a_{2j+s}\alpha_{2j+1+s}\right)\right] v_s + \sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(a_{2i+s}\alpha_{2i+1+s}\right)\right]\left(\alpha_{2j+1+s}b_{2j+s} + \beta_{2j+1+s}\right),$$

et si les coefficients sont constantes, i.e., $a_n = a$, $b_n = b$, $\alpha_n = \alpha$ et $\beta_n = \beta$, nous aurons

$$\gamma = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{1-2j}\left(a + b \prod_{j=0}^{k} y_{-2j}\right)},\ \lambda = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{1-2j}\left(\alpha + \beta \prod_{j=0}^{k} x_{-2j}\right)},$$

et pour $s = 0, 1,$

$$u_{2n+s} = \begin{cases} (a\alpha)^n u_s + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}\left(a\beta + b\right), & a\alpha \neq 1, \\ u_s + \left(a\beta + b\right) n, & a\alpha = 1, \end{cases}$$

$$v_{2n+s} = \begin{cases} (a\alpha)^n v_s + \frac{(a\alpha)^n - 1}{a\alpha - 1}(\alpha b + \beta), & a\alpha \neq 1, \\ \\ v_s + (\alpha b + \beta)n, & a\alpha = 1, \end{cases}$$

avec

$$u_0 = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}},\ u_1 = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} x_{1-2j}},\ v_0 = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}},\ v_1 = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} y_{1-2j}}$$

Preuve. Par le changement de variable

$$u_n = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}},\ v_n = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}},\ n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

le système (4.1) devient

$$u_{n+1} = a_n v_n + b_n,\ v_{n+1} = \alpha_n u_n + \beta_n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

ainsi

$$u_{n+2} = a_{n+1}\alpha_n u_n + a_{n+1}\beta_n + b_{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

$$v_{n+2} = \alpha_{n+1} a_n v_n + \alpha_{n+1} b_n + \beta_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$u_{2n+2} = a_{2n+1}\alpha_{2n} u_{2n} + a_{2n+1}\beta_{2n} + b_{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

$$u_{2n+3} = a_{2n+2}\alpha_{2n+1} u_{2n+1} + a_{2n+2}\beta_{2n+1} + b_{2n+2},\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

$$v_{2n+2} = \alpha_{2n+1} a_{2n} v_{2n} + \alpha_{2n+1} b_{2n} + \beta_{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

$$v_{2n+3} = \alpha_{2n+2} a_{2n+1} v_{2n+1} + \alpha_{2n+2} b_{2n+1} + \beta_{2n+2},\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Soient

$$A_n = a_{2n+1}\alpha_{2n},\ B_n = a_{2n+1}\beta_{2n} + b_{2n+1},\ w_n = u_{2n}, \tag{4.8}$$

$$C_n = a_{2n+2}\alpha_{2n+1},\ D_n = a_{2n+2}\beta_{2n+1} + b_{2n+2},\ z_n = u_{2n+1}, \tag{4.9}$$

$$E_n = \alpha_{2n+1} a_{2n},\ F_n = \alpha_{2n+1} b_{2n} + \beta_{2n+1},\ t_n = v_{2n}, \tag{4.10}$$

$$G_n = \alpha_{2n+2} a_{2n+1},\ H_n = \alpha_{2n+2} b_{2n+1} + \beta_{2n+2},\ r_n = v_{2n+1}., \tag{4.11}$$

alors, de (4.8)-(4.11), nous obtenons les équations aux différences du premier ordre suivantes

$$w_{n+1}=A_nw_n+B_n,\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.12}$$

$$z_{n+1}=C_nz_n+D_n,\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.13}$$

$$t_{n+1}=E_nt_n+F_n,\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.14}$$

$$r_{n+1}=G_nr_n+H_n,\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.15}$$

de (4.12) et le Lemme 1.1.1, nous avons

$$w_n=\left[\prod_{j=0}^{n-1}A_j\right]w_0+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}A_i\right]B_j. \tag{4.16}$$

Alors, par (4.8) nous obtenons

$$u_{2n}=\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(a_{2j+1}\alpha_{2j}\right)\right]u_0+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(a_{2i+1}\alpha_{2i}\right)\right]\left(a_{2j+1}\beta_{2j}+b_{2j+1}\right). \tag{4.17}$$

De même, de (4.9)-(4.11), (4.13)-(4.15) et le Lemme 1.1.1, on a

$$u_{2n+1}=\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(a_{2j+2}\alpha_{2j+1}\right)\right]u_1+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(a_{2i+2}\alpha_{2i+1}\right)\right]\left(a_{2j+2}\beta_{2j+1}+b_{2j+2}\right), \tag{4.18}$$

$$v_{2n}=\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_{2j+1}a_{2j}\right)\right]v_0+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(\alpha_{2i+1}a_{2i}\right)\right]\left(\alpha_{2j+1}b_{2j}+\beta_{2j+1}\right), \tag{4.19}$$

$$v_{2n+1}=\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_{2j+2}a_{2j+1}\right)\right]v_1+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(\alpha_{2i+2}a_{2i+1}\right)\right]\left(\alpha_{2j+2}b_{2j+1}+\beta_{2j+2}\right). \tag{4.20}$$

Si les coefficients sont constantes, c-à-d, $a_n=a$, $b_n=b$, $\alpha_n=\alpha$ et $\beta_n=\beta$, alors les formules (4.17)-(4.20) deviennent

$$u_{2n}=\begin{cases}(a\alpha)^n u_0+\frac{(a\alpha)^n-1}{a\alpha-1}\left(a\beta+b\right), & a\alpha\neq 1,\\ \\ u_0+\left(a\beta+b\right)n, & a\alpha=1,\end{cases} \tag{4.21}$$

$$u_{2n+1}=\begin{cases}(a\alpha)^n u_1+\frac{(a\alpha)^n-1}{a\alpha-1}\left(a\beta+b\right), & a\alpha\neq 1,\\ \\ u_1+\left(a\beta+b\right)n, & a\alpha=1,\end{cases} \tag{4.22}$$

$$v_{2n}=\begin{cases}(a\alpha)^n v_0+\frac{(a\alpha)^n-1}{a\alpha-1}(\alpha b+\beta), & a\alpha\neq 1,\\ \\ v_0+(\alpha b+\beta)n, & a\alpha=1,\end{cases}\tag{4.23}$$

$$v_{2n+1}=\begin{cases}(a\alpha)^n v_1+\frac{(a\alpha)^n-1}{a\alpha-1}(\alpha b+\beta), & a\alpha\neq 1,\\ \\ v_1+(\alpha b+\beta)n, & a\alpha=1,\end{cases}\tag{4.24}$$

D'autre part, de (4.2), on a

$$x_{n+2}=\frac{u_n}{u_{n+2}}x_{n-2k},\ y_{n+2}=\frac{v_n}{v_{n+2}}y_{n-2k},\ n=0,1,...,\tag{4.25}$$

En remplaçant n par $(2k+2)n+i$, $i=1,2,\ldots,2k+2$, nous obtenons

$$x_{(2k+2)n+1}=\gamma\prod_{j=1}^{n}\frac{u_{2((k+1)j-1)+1}}{u_{2(k+1)j+1}},\tag{4.26}$$

$$x_{(2k+2)n+i}=x_{i-(2k+2)}\prod_{j=0}^{n}\frac{u_{(2k+2)j+i-2}}{u_{(2k+2)j+i}},\ i=2,3,...,2k+2,\tag{4.27}$$

$$y_{(2k+2)n+1}=\lambda\prod_{j=1}^{n}\frac{v_{2((k+1)j-1)+1}}{v_{2(k+1)j+1}},\tag{4.28}$$

$$y_{(2k+2)n+i}=y_{i-(2k+2)}\prod_{j=0}^{n}\frac{v_{(2k+2)j+i-2}}{v_{(2k+2)j+i}},\ i=2,3,...,2k+2,\tag{4.29}$$

avec

$$\gamma=\frac{\prod_{j=0}^{k}y_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k}x_{1-2j}\left(a_0+b_0\prod_{j=0}^{k}y_{-2j}\right)},\ \lambda=\frac{\prod_{j=0}^{k}x_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k}y_{1-2j}\left(\alpha_0+\beta_0\prod_{j=0}^{k}x_{-2j}\right)}.$$

Selon la parité de i, nous avons par (4.27) et (4.29)

$$x_{(2k+2)n+2i}=x_{2i-(2k+2)}\prod_{j=0}^{n}\frac{u_{2((k+1)j+i-1)}}{u_{2((k+1)j+i)}},\ i=1,2,...,k+1,$$

$$y_{(2k+2)n+2i}=y_{2i-(2k+2)}\prod_{j=0}^{n}\frac{v_{2((k+1)j+i-1)}}{v_{2((k+1)j+i)}},\ i=1,2,...,k+1,$$

$$x_{(2k+2)n+2i+1}=x_{2i-(2k+1)}\prod_{j=0}^{n}\frac{u_{2((k+1)j+i-1)+1}}{u_{2((k+1)j+i)+1}},\ i=1,2,...,k,$$

$$y_{(2k+2)n+2i+1}=y_{2i-(2k+1)}\prod_{j=0}^{n}\frac{v_{2((k+1)j+i-1)+1}}{v_{2((k+1)j+i)+1}},\ i=1,2,...,k.$$

■

Remarque 4.1.1 *Si nous prenons $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$, et les valeurs initiales sont tels que $x_{-i} = y_{-i}$, $i = 0, ..., 2k$, le système (4.1) devient l'équation aux différences suivante*

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)} \left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}.$$

4.2 Sur la périodicité des solutions du système (4.1) avec coefficients constants

Maintenant on s'intéresse à la périodicité des solutions bien définies du système (4.1) dans le cas où les coefficients sont constants, c'est à dire, le système

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)} \left(a + b \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)},$$

$$y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)} \left(\alpha + \beta \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.30}$$

où $k \in \mathbb{N}$, les coefficients a, b, α, β sont réels, et les valeurs initiales x_{-2k}, x_{-2k+1},..., x_0, y_{-2k}, y_{-2k+1},..., y_0 sont des nombres réels non nuls.

Théorème 4.2.1 *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2k}$ une solution du système* (4.30) *avec*

$$(a\beta + b)x_0x_{-2}...x_{-2k} = (\alpha b + \beta)y_0y_{-2}...y_{-2k} = 1 - a\alpha \quad et \quad (1 - a\alpha)(a\beta + b)(\alpha b + \beta) \neq 0.$$

Alors la solution est périodique de période $2k + 2$ *et elle prend la forme*

$$\left\{(x_{-2k}, y_{-2k}), (x_{-2k+1}, y_{-2k+1}), \ldots, (x_0, y_0), (\frac{x_0x_{-2} \ldots x_{-2k}}{x_{-1}x_{-3} \ldots x_{-2k+1}}, \frac{y_0y_{-2} \cdots y_{-2k}}{y_{-1}y_{-3} \cdots y_{-2k+1}}), (x_{-2k}, y_{-2k}), \ldots\right\}.$$

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -2k}$ une solution du système (4.30) avec

$$x_0x_{-2}...x_{-2k} = \frac{1 - a\alpha}{a\beta + b}, \quad y_0y_{-2}...y_{-2k} = \frac{1 - a\alpha}{\alpha b + \beta},$$

alors de (4.2), on a

$$u_0 = \frac{a\beta + b}{1 - a\alpha}, \quad v_0 = \frac{\alpha b + \beta}{1 - a\alpha}$$

ainsi, de (4.3), nous trouvons que

$$u_1 = av_0 + b = \frac{a\beta + b}{1 - a\alpha} = u_0, \quad v_1 = \alpha u_0 + \beta = \frac{\alpha b + \beta}{1 - a\alpha} = v_0,$$

donc, par récurrence

$$u_n = \frac{a\beta + b}{1 - a\alpha}, \quad v_n = \frac{\alpha b + \beta}{1 - a\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.31}$$

de (4.25) et (4.31), nous obtenons

$$x_{n+2} = x_{n-2k}, \quad y_{n+2} = y_{n-2k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où, la solution est périodique de période $2k + 2$ et elle prend la forme

$$\{(x_{-2k}, y_{-2k}), (x_{-2k+1}, y_{-2k+1}), \ldots, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_{-2k}, y_{-2k}), \ldots\}.$$

Calculons x_1 et y_1.

On a

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_0 y_{-2} \ldots y_{-2k}}{x_{-1}x_{-3}\ldots x_{-2k+1}(a + by_0 y_{-2} \ldots y_{-2k})}, \\ &= \frac{y_0 y_{-2} \ldots y_{-2k}}{x_{-1}x_{-3}\ldots x_{-2k+1}} \frac{\alpha b + \beta}{a\beta + b}, \\ &= \frac{y_0 y_{-2} \ldots y_{-2k}}{x_{-1}x_{-3}\ldots x_{-2k+1}} \frac{x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k}}{y_0 y_{-2} \ldots y_{-2k}}, \\ &= \frac{x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k}}{x_{-1}x_{-3}\ldots x_{-2k+1}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k}}{y_{-1}y_{-3}\ldots y_{-2k+1}(\alpha + \beta x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k})}, \\ &= \frac{x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k}}{y_{-1}y_{-3}\ldots y_{-2k+1}} \frac{a\beta + b}{\alpha b + \beta}, \\ &= \frac{x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k}}{y_{-1}y_{-3}\ldots y_{-2k+1}} \frac{y_0 y_{-2} \ldots y_{-2k}}{x_0 x_{-2} \ldots x_{-2k}}, \\ &= \frac{y_0 y_{-2} \ldots y_{-2k}}{y_{-1}y_{-3}\ldots y_{-2k+1}}. \end{aligned}$$

■

Remarque 4.2.1 *Si $a\alpha = 1$ alors*

$$a\beta + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha b + \beta = 0.$$

Théorème 4.2.2 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -2k}$ *une solution du système* (4.30) *avec*

$$a\alpha = 1,\ (a\beta + b) = 0,\ \alpha + \beta\, x_0 x_{-2}...x_{-2k} \neq 0 \quad et \quad a + b y_0 y_{-2}...y_{-2k} \neq 0.$$

Alors la solution est périodique de période $2k+2$ *et elle prend la forme*

$$\{(x_{-2k}, y_{-2k}), (x_{-2k+1}, y_{-2k+1}), \ldots, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_{-2k}, y_{-2k}), \ldots\},$$

avec

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{1-2j}\left(a + b\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}\right)}, \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{1-2j}\left(\alpha + \beta\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}\right)}\right).$$

Preuve. Supposons que

$$a\alpha = 1,\ (a\beta + b) = 0,\ \alpha + \beta\, x_0 x_{-2}...x_{-2k} \neq 0 \quad et \quad a + b y_0 y_{-2}...y_{-2k} \neq 0,$$

alors, de (4.21)-(4.24), nous avons

$$u_{2n} = u_0,\ u_{2n+1} = u_1,\ v_{2n} = v_0,\ v_{2n+1} = v_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De (4.25), nous obtenons

$$x_{n+2} = \frac{u_n}{u_{n+2}} x_{n-2k} = x_{n-2k}, \quad y_{n+2} = \frac{v_n}{v_{n+2}} y_{n-2k} = y_{n-2k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où, la solution est périodique de période $2k+2$ et elle prend la forme

$$\{(x_{-2k}, y_{-2k}), (x_{-2k+1}, y_{-2k+1}), \ldots, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_{-2k}, y_{-2k}), \ldots\},$$

avec

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{1-2j}\left(a + b\prod_{j=0}^{k} y_{-2j}\right)}, \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{1-2j}\left(\alpha + \beta\prod_{j=0}^{k} x_{-2j}\right)}\right).$$

■

Remarque 4.2.2 *En posant* $\alpha = a$, $\beta = b$, *et en choisissant les valeurs initiales telles que* $x_{-i} = y_{-i}$, $i = 0, ..., 2k$, *le système (4.30) sera réduit à l'équation aux différences suivante*

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)}\left(a + b\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}. \tag{4.32}$$

Des cas particuliers de l'équation (4.32) ont été étudié dans [22] ($k = 1$, $a = 1$, $b = \pm 1$ *ou* $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$) *et [13]* ($k = 2$, $a = \pm 1$ $b = \pm 1$). *Il est facile de vérifier que les formules des solutions dans [22], [13] sont des conséquences directes de nos formules.*

Exemple 4.2.1 *Si on prend*

k	a	b	α	β	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
2	1/3	1	2	2	1/90	25	2	11	9	1/9	4	3	14	1/4

Alors, on a :

$$x_0x_{-2}x_{-4} = \frac{1 - a\alpha}{a\beta + b}, \quad y_0y_{-2}y_{-4} = \frac{1 - a\alpha}{\alpha b + \beta}.$$

D'après le théorème (4.1.1)*, la solution est périodique de période 6 est prend la forme*

$$\left\{(\frac{1}{90}, \frac{1}{9}),\ (25, 4),\ (2, 3),\ (11, 14),\ (9, \frac{1}{4}),\ (\frac{1}{1375}, \frac{1}{672}), \ldots,\right\}$$

Voir, Figure (4.1) *et Figure* (4.2).

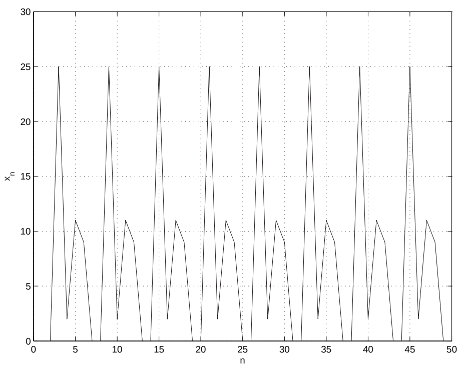

Fig. 4.1 – Comportement de x_n

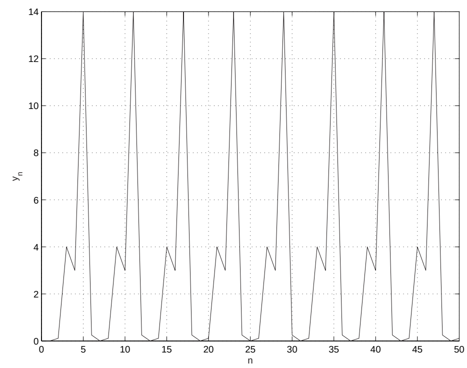

Fig. 4.2 – Comportement de y_n

Conclusion et perspectives

Cette thèse est consacrée à l'étude des solutions de quelques systèmes d'équations aux différences non linéaires.

Dans le premier chapitre nous nous sommes intéressé à l'étude de la stabilité locale et globale des points d'équilibres du système d'équations aux différences

$$y_{n+1}^{(1)} = \frac{a_1 y_n^{(1)}}{b_1 + c_1 (y_n^{(2)})^{p_1}},\ y_{n+1}^{(2)} = \frac{a_2 y_n^{(2)}}{b_2 + c_2 (y_n^{(3)})^{p_2}}, \ldots,$$

$$y_{n+1}^{(k-1)} = \frac{a_{k-1} y_n^{(k-1)}}{b_{k-1} + c_{k-1} (y_n^{(k)})^{p_{k-1}}}, y_{n+1}^{(k)} = \frac{a_k y_n^{(k)}}{b_k + c_k (y_n^{(1)})^{p_k}}, \quad n = 0, 1, ...,$$

Les chapitres deux, trois et quatres, ont été consacré à la recherche des formes explicites, la périodicité et le comportement asymptotique des solutions des trois systèmes d'équations aux différences suivants

$$x_{n+1} = \frac{a x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{b x_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k+1}^p y_n}{a y_{n-k}^p + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-k+1}^p x_n}{\alpha x_{n-k}^p + \beta x_n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ p, k \in \mathbb{N}^*,$$

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(2j-1)} \left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-2j}\right)}, \quad y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(2j-1)} \left(\alpha_n + \beta_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-2j}\right)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Comme perspective nous essayons d'élargir l'étude faite sur les systèmes d'équations aux différences (2.1), (3.2) et (4.1) au cas des systèmes de T équations aux différences ($T \geq 3$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abo-Zeid, Attractivity of two nonlinear third order difference equations, *J. Egyptian Math. Soc.*, *21* (2013), 241–247.

[2] D. Clark, M. R. S. Kulenovic, A couple system of rational difference equations, *Comput. Math. Appl.*, **43**(2002), 849–867.

[3] D. Clark, M. R. S. Kulenovic, J. F. Selgrade, Global asymptotic behavior of a two-dimensional difference equation modeling competition, *Nonlinear Anal.* **52** (2003), 1765–1776.

[4] Q. Din, On a system of fourth-order rational difference equations, Acta Univ. Apulensis, Math. Inform., **39**(2014), 137-150.

[5] Q. Din, Asymptotic behavior of an anti-competitive system of second-order difference equations, J. Egypt. Math. Soc., **24(1)**(2016), 37-43.

[6] E. M. Elabbasy, H. El-Metwally and E. M. Elsayed, Qualitative behavior of higher order difference equation, Soochow J. Math.,**33**(2007), 861-873.

[7] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer, New York, 1999.

[8] M. M. El-Dessoky, On the solutions and periodicity of some nonlinear systems of difference equations, J. Nonlinear Sci. Appl., **9**(2016), 2190-2207.

[9] E. M. Elsayed, Qualitative behavior of difference equation of order two, Math. Comput. Modelling, **50**(2009), 1130-1141.

[10] E. M. Elsayed, On the solutions of a rational system of difference equations, *Fasciculi Mathematici*, **45** (2010), 25–36.

[11] E. M. Elsayed and H. El-Metwally, On the solutions of some nonlinear systems of difference equations, *Adv. Diff. Equ.*, **2013**(161) (2013), 14 pages.

[12] E. M. Elsayed and T. F. Ibrahim, Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations, *Hacet. J. Math. Stat.*, **44**(6) (2015), 1361–1390.

[13] E. M. Elsayed, T. F. Ibrahim, Solutions and periodicity of a rational recursive sequences of order five, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, **38** (2015), 95-112.

[14] N. Fotiades and G. Papaschinopoulos, On a system of difference equations with maximum, Appl. Math. Comput., **221** (2013), 684-690.

[15] E. A. Grove and G. Ladas, Periodicities in Nonlinear Difference Equations, Advances in Discrete Mathematics and Applications, Volume 4, Chapman & Hall/CRC, 2005.

[16] N. Haddad, J. F. T. Rabago, Dynamic of a system of k-difference equations, *Electron. J. Math. Analysis Appl.*, 5(2) (2017), 242-249.

[17] N. Haddad, N. Touafek, J. F. T. Rabago, Well-defined solutions of a system of difference equations, *J. Appl. Math. Comput.*, DOI : 10.1007/s12190-017-1081-8.

[18] N. Haddad, N. Touafek, J. F. T. Rabago, Solution form of a higher-order system of difference equations and dynamical behavior of its special case, *Math. Methods Appl. Sci.*, DOI : 10.1002/mma.4248.

[19] N. Haddad, N. Touafek, E. M. Elsayed, A Note on a System of Difference Equations, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi, Mat.* , accepted.

[20] Y. Halim, N. Touafek, E. M. Elsayed, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, *Dynam. Cont. Dis. Ser. A*, **21**(6) (2014), 473–486.

[21] Y. Halim, N. Touafek and Y. Yazlik, Dynamic behavior of a second-order nonlinear rational difference equation, Turk. J. Math., **39**(2015), 1004-1018.

[22] T. F. Ibrahim, On the third order rational difference equation $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{x_{n-1}(a+bx_n x_{n-2})}$, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, **4** (2009),1321-1334.

[23] V. L. Kocic and G. Ladas, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[24] M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures, Chapman and Hall, CRC Press, 2001.

[25] A.S. Kurbanli, C. Çinar and I. Yalçinkaya, On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1}$, $y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1}$, Mathematical and Computer Modelling, **53** (2011), 1261-1267.

[26] G. Papaschinopoulos, N. Fotiades and C. J. Schinas, On a system of difference equations including negative exponential terms, J. Difference Equ. Appl., **20**(2014), 717-732.

[27] S. Stević, More on a rational recurrence relation, Appl. Math. E-Notes, **4**(2004), 80-85.

[28] S. Stević, On a system of difference equations, Appl. Math. Comput., **218**(2011), 3372-3378.

[29] S. Stević, On a system of difference equations with period two coefficients, Appl. Math. Comput., **218**(2011), 4317-4324.

[30] S. Stević, On the difference equation $x_n = \frac{x_{n-2}}{b_n + c_n x_n x_{n-2}}$, Appl. Math. Comput., **218**(2011), 4507-4513.

[31] S. Stević, On a third-order system of difference equations, Appl. Math. Comput., **218**(2012), 7649-7654.

[32] S. Stević, On some solvable systems of difference equations, Appl. Math. Comput., **218**(2012), 5010-5018.

[33] S. Stević, On the difference equation $x_n = \frac{x_{n-k}}{b+cx_{n-1}\dots x_{n-k}}$, Appl. Math. Comput., **218**(2012), 6291-6296.

[34] S. Stević, On the system of difference equations $x_n = \frac{c_n y_{n-3}}{a_n+b_n y_{n-1}x_{n-2}y_{n-3}}$, $y_n = \frac{\gamma_n x_{n-3}}{\alpha_n+\beta_n x_{n-1}y_{n-2}x_{n-3}}$, Appl. Math. Comput., **219**(2013), 4755-4764.

[35] S. Stević, On a solvable system of difference equations of k th order, Appl. Math. Comput., **219**(2013), 7765-7771.

[36] D. T. Tollu, Y. Yazlik and N. Taskara, The solutions of four Riccati difference equations associated with Fibonacci numbers, *Balkan J. Math.*, **2** (2014), 163–172.

[37] N. Touafek, On a second order rational difference equation, Hacet. J. Math. Stat., **41**(2012), 867- 874.

[38] N. Touafek, E. M. Elsayed, On a third order rational systems of difference equations, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat.*, **61** (2015), 367–380.

[39] Y. Yazlik, On the solutions and behavior of rational difference equations, J. Comput. Anal. Appl., **17(3)**(2014), 584-594.

[40] Y. Yazlik, E. M. Elsayed and N. Taskara, On the behaviour of the solutions the solutions of difference equation system, J. Comput. Anal. Appl., **16(5)** (2014), 932-941.

[41] Y. Yazlik, D. T. Tollu and N. Taskara, On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers, *Applied Mathematics*, **4**(12) (2013), 15–20.

[42] Y. Yazlik, D. T. Tollu and N. Taskara, On the behaviour of solutions for some systems of difference equations, J. Comput. Anal. Appl., **18(1)**(2015), 166-178.

[43] Y. Yang, L. Chen and Y. G. Shi, On solutions of a system of rational difference equations, *Acta Math. Univ. Comenianae*, **LXXX**(1) (2011), 63–70.

[44] L. Yang, J. Yang, Dynamics of a system of two nonlinear difference equations, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **6**(2011), 209–214.