الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحي-جيجل-

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الألي

قسم الرياضيات

***مذكـــرة التخرج لنيل شهادة ماستر رياضيات أساسية***

# كثيرات الحدود المتعامدة والتوابع التناظرية

**إعداد:**


سهيلة بوغابة


## لجنة المناقشة:

| | | |
|---|---|---|
| أ.موسى أحمية | رئيسا | جامعة جيجل |
| أ.علي بوسعيود | مشرفا | جامعة جيجل |
| أ. مراد شلغام | ممتحنا | جامعة جيجل |

السنة الجامعية 2017/2016

# شكــر و عرفــان

الحمد لله الذي علّم بالقلم، علّم الإنسان ما لم يعلم، و الصلاة و السّلام على المبعوث رحمة للعالمين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

أوّلا و قبل كل شيء أشكر الله العلي القدير الذي وفقني و أعانني على إنجاز و إتمام هذا العمل من غير حول منّي ولا قوة، فهو الذي له الفضل أوّلا و آخرا .

أتقدم بجزيل الشكر و عظيم الإمتنان إلى سر وجودي و أنوار حياتي وسندي المتين في جميع مراحلي التعليمية " **أمي و أبي** " حفظهما الله و رعاهما .

أتقدم بجزيل الشكر و العرفان و خالص الإمتنان و التقدير إلى أستاذي الفاضل و مشرفي في هذا البحث الأستاذ" **علي بوسعيود** " الذي أعطاني من وقته وعلمه الكثير و رافقني طيلة فترة إنجاز هذا العمل بتوجيهاته القيمة ونصائحه الثّمينة جزاه الله عنّي كل خير .

كما أتوجه بجزيل الشكر إلى السادة الأساتذة أعضاء اللجنة المناقشة كل من الأستاذ "**موسى أحمية**" والأستاذ "**مراد شلغام**" على إقتطاعهم جزءا من وقتهم الثمين من أجل الإطلاع على هذه المذكرة .

كما يسرني أن أوجه أسمى آيات الشكر و العرفان لكل من علّمني حرفا، و أخص بالشكر و التقدير أساتذة الماستر " **رياضيات أساسية**" سائلة المولى عزّ و جل أن يجعل ما قدموه لنا في ميزان حسناتهم.

**سهـــــــيلة**

# إهــــداء

إلى التي كانت سببا في وجودي التي ربتني و أنارت دربي

بدعواتها المباركة فكانت لي سندا طول الحياة

**"أمـــي الغـالــية"**

إلى من علّمني حب العمل و الكفاح لبلوغ النجاح

إلى من أنار دربي و عمل بكد في سبيلي فأوصلني إلى ما أنا عليه الآن

**"أبـــي الغــالــي"**

إلى من تتلمذت على أياديهم، وأمدوني بنصائحهم و توجيهاتهم

**" أســاتذتي"**

**إلى أخواتي**

**إلى كل أفراد دفعتي دون إستثناء**

**إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة هذا الجهد المتواضع**

# الفــهرس

**مقدمة** ........................................................................................................أ

**1 مفاهيم عامة**

1.1 السلاسل الشكلية.............................................................................9

1.1.1 حلقة السلاسل الشكلية.......................................................................9

2.1.1 العمليات على السلاسل الشكلية..............................................................10

3.1.1 السلاسل القابلة للقلب.......................................................................10

.

2.1 العلاقات التراجعية.............................................................................11

1.2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة.......................................................11

2.2.1 الحل العام للعلاقات التراجعية لأعداد $k$- فيبوناتشي و$k$ - لوكاس،$k$ - بال و

k - بال-لوكاس...................................................................................13

3.1 كثيرات الحدود المتعامدة.......................................................................15

4.1 الدوال المولدة..................................................................................16

1.4.1 الدوال المولدة العادية .......................................................................16

2.4.1 الدوال المولدة المرفقة بكثيرات الحدود المتعامدة..........................................18

5.1 الخاتمة..........................................................................................21

المراجع ...........................................................................................22

**2 التوابع التناظرية**

1.2 المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية...........................................................25

1.1.2 دراسة قابلية تقطيرالمصفوفة M ...........................................................25

2.2 التوابع التناظرية...............................................................................27

1.2.2 التوابع التناظرية الأولية.......................................................................27

2.2.2 التوابع التناظرية التامة........................................................................30

3.2 بعض خصائص التوابع التناظرية.............................................................30

4.2 تطبيقات على التوابع التناظرية التامة........................................................................32
5.2 الخاتمة........................................................................................................37

المراجع............................................................................................................38

**3 الدوال المولدة لجداءات $k$ -فيبوناتشي مع كثيرات الحدود لتشيبيتشاف**

1.3 نتائج أساسية...................................................................................................41
2.3 تطبيقات على التوابع المولدة..............................................................................43
1.2.3 الحالة $A=\{1\}$ ، $E=\{e_1,-e_2\}$ ..................................................43
2.2.3 الدوال المولدة لأعداد $k$...........................................................................43
3.2.3 الدوال المولدة لكثيرات الحدود المتعامدة..................................................45
4.2.3 الحالة $A=\{a_1,-a_2\}$ ، $E=\{e_1,-e_2\}$ ..........................................47
5.2.3 الحالة $A=\{a_1,-a_2\}$ ، $E=\{2e_1,-2e_2\}$ ......................................50
6.2.3 الحالة $A=\{2a_1,-2a_2\}$ ، $E=\{2e_1,-2e_2\}$......................................53

4.3 الخاتمة .........................................................................................................56

المراجع............................................................................................................57

**الخاتمة ........................................................................................................ 60**

# مقدمة

قام العديد من الباحثين بدراسة أعداد فيبونــاتشي و لوكــاس لفترة طويلة مما أدى إلى التوصل إلى عدة نظريات جوهرية. حيث تجدر الإشارة أن لهذه الأعداد تطبيقات عديدة في العديد من المجالات البحثية مثل الفيزياء، الهندسة المعمارية و غيرها.

تحتل التوابع التناظرية مكانا هاما في مجال التركيبات الجبرية حيث يتم حساب بعض النتائج المتماثلة في الرياضيات و الفيزياء بإستعمال نظريات التحليل التوافقي.

نهتم في هذه المذكرة بدراسة التوابع التناظرية و ذلك بإستعمال تأثيرالمؤثر $\delta_{e_1e_2}^{-k}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)e_1^j z^j$ و هذا بهدف الحصول على دوال مولدة جديدة وأخرى تم الحصول عليها من طرف بعض الباحثين بطرق مختلفة.

على سبيل المثال في سنة 2009 قام الباحث "Istvan Mezo" في مقاله:

« Several Generating Functions for Second-Order Recurrence Sequences »

الحصول على العديد من الدوال المولدة لكل من أعداد فيبوناتشي، لوكـاس، بـال و بـال-لوكاس و مربع و جداء هذه الأعداد كذلك، و ذلك بإستعمال نظريتين الأولى تم التطرق إليها في الفصل الأول (نظرية 1.4) و الثانية تم التطرق لها في مقاله [10. ص3] ،حيث قام بتلخيص هذه الدوال في جدول موسع.

من جهة أخرى في سنة 2013 قامت الباحثة "Paula Catarino" في مقالها:

«On Some Identities and Generating Functions for *k*-Pell Numbers »

بالتعريف بأعداد $k$-بال و $k$-بال لوكاس ثم البحث عن الدوال المولدة لها( بإستعمال الدوال المولدة العادية).

تجدر الإشارة من خلال إعدادنا لهذه المذكرة أنه تم التوصل إلى كل النتائج السالفة الذكر و ذلك بإستعمال التطبيقات على التوابع التناظرية.

تم تقسيم هذه المذكرة إلى ثلاث فصول، الفصل الأول: يتناول بعض المفاهيم العامة حول السلاسل النوعية، العلاقات التراجعية، الدوال المولدة وفي الأخير تطرقنا إلى بعض كثيرات الحدود المتعامدة.

أما في الفصل الثاني فعرّفنا التوابع التناظرية و تطرقنا إلى بعض خصائصها و في الأخير بعض التطبيقات على التوابع التناظرية التامة.

أما الفصل الثالث والأخير فكان الهدف منه هو الحصول على دوال مولدة جديدة و ذلك بالإعتماد على المؤثر التناظري $\delta_{e_1e_2}^{-k}$ المطبق على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)e_1^j z^j$ والذي يسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لكل من أعداد $k$-فيبوناتشي، $k$-لوكاس، $k$-بال، $k$-بال لوكاس و جداءات $k$-فيبوناتشي و بال المتوالية، إضافة إلى ذلك تم الحصول على الدوال المولدة لكثيرات الحدود لفيبوناتشي،لوكاس، بال، بال- لوكاس و كذلك جداءات $k$-فيبوناتشي مع كثيرات الحدود لتشيبيتشاف، و ذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.1 حيث مكنتنا من الحصول على بعض الدوال المولدة الجديدة و أخرى تم الحصول عليها سابقا.

# الفصل الأول

## مفاهيم عامة

سنتطرق في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم العامة. حيث نستهل الفصل بتقديم تعريف للسلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية لأعداد $k$-فيبوناشي، $k$-لوكاس ، $k$- بال و $k$- بال لوكاس، بعد ذلك نقوم بتعريف كثيرات الحدود المتعامدة لكل من تشيبيتشاف من النوع الأول والثاني ، فيبوناتشي، لوكاس ،بال و بال -لوكاس ، و في الأخير نقدم مفهوما للتوابع المولدة العادية ، ثم كيفية إيجاد الدوال المولدة لأعداد $k$-فيبوناتشي، $k$-بال، $k$-لوكاس و $k$-بال لوكاس و كذلك الدوال المولدة لكثيرات الحدود المتعامدة السالف ذكرها.

# 1.1 السلاسل الشكلية

## 1.1.1 حلقة السلاسل الشكلية

ليكن $(A,+,.)$ حقل تبديلي ($A = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) .

**تعريف 1.1:**

عناصر المجموعة $A[[X]] = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i,\ a_i \in A \right\}$ تسمى السلاسل الشكلية بمعاملات في $A$ . من أجل $i \in \mathrm{N}$، $x^i$ يسمى وحيد الدرجة $i$ و $a_i$ هي معاملات من $A$ .

- المعامل $a_0$ يدعى بالحد الثابت للسلسلة الشكلية $u = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ .

**تعريف 2.1:**

لتكن $u = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ و $v = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$ سلسلتين شكليتين.

نعرف مجموعهما و جداءهما بالتالي :

$$u + v = \sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i)\ x^i , \tag{1.1}$$

$$u.v = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i \quad / \quad c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} . \tag{1.2}$$

## 2.1.1 العمليات على السلاسل الشكلية

**1) الضرب في سلمي:**

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty} k a_i x^i$ هي ناتج ضرب السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ في السلمي $k$.

**2) الاشتقاق:**

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)a_{i+1}x^i$ هي نتيجة اشتقاق السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ بالنسبة إلى $x$ .

**3) المكاملة :**

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$ هي ناتج مكاملة السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ بالنسبة إلى $x$.

## 3.1.1 السلاسل القابلة للقلب

**تعريف 3.1:**

نقول أنّ السلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ قابلة للقلب إذا و فقط إذا وجدت سلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ حيث:

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i\right)=1. \tag{3.1}$$

**أمثلـــة:**

1- السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} x^i$ قابلة للقلب و مقلوبها $v=1-x$ .

2- السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i x^i$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=1+x$ .

3- السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{x^i}{i!}$.

**خاصية 1.1:[8]**

السلسلة الشكلية $u=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $a_0 \neq 0$ .

# 2.1 العلاقات التراجعية

## 1.2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة

نركز في هذه الفقرة إهتمامنا على البحث عن الحلول للعلاقات التراجعية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

**تعريف 1.2:**

نسمي علاقة تراجعية خطية متجانسة من الرتبة $k$ ذات معاملات ثابتة كل علاقة من الشكل:

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \ldots + d_k u_{n-k} = 0, \qquad (2.1)$$

حيث أنّ: $d_1, d_2, \ldots, d_k$ عبارة عن معاملات ثابتة و $d_k \neq 0$.

**نظرية 1.2: [1]**

يوجد حل وحيد للعلاقة التراجعية (2.1) بحيث:

$u_0 = b_0\,,\ u_1 = b_1, \ldots,\ u_{k-1} = b_{k-1}$ و $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ ثوابت معطاة.

**ملاحظة 1.2:**

من الواضح أن $u_n = 0$ هو حل للمعادلة (2.1) ويسمى الحل الصفري (التافه).

**ملاحظة 2.2:**

إذا كان $u_n = \alpha^n$ حلا غير تافه للمعادلة (2.1) فإنه يحقق :

$$\alpha^n + d_1 \alpha^{n-1} + d_2 \alpha^{n-2} + \ldots + d_k \alpha^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \alpha^k + d_1 \alpha^{k-1} + d_2 \alpha^{k-2} + \ldots + d_k = 0 .$$

ومنه تقودنا الملاحظة 2.2 إلى التعريف التالي:

**تعريف 2.2:** (كثير الحدود المميز)

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \ldots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة تراجعية خطية ذات معاملات ثابتة، كثير الحدود المميز المرفق لها هو:

$$P(x) = x^k + d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + \ldots + d_k . \qquad (2.2)$$

**ملاحظة 3.2:**

لمّا $P(x)=0$ تدعى هذه العلاقة بالمعادلة المميزة (المساعدة) للمعادلة التراجعية وتسمى جذورها بالجذور المميزة.

**نظرية 2.2:** (الحلول مختلفة)

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة تراجعية خطية ذات معاملات ثابتة وجذورها المميزة هي: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ مختلفة عن بعضها البعض، عندئذ من أجل كل مجموعة من الثوابت $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ فإنّ:

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n . \qquad (2.3)$$

عبارة عن حل للعلاقة التراجعية.

**ملاحظة 4.2:**

تسمى عبارة الحل (2.3) بالحل العام للعلاقة التراجعية.

**تعريف 3.2:**

نعرف أعداد $k$ - فيبوناتشي بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} F_{k,n} = k\,F_{k,n-1} + F_{k,n-2} \quad , \ \forall n \geq 2,\ k \in \mathrm{N} \\ F_{k,0} = 1,\ F_{k,1} = k \end{cases} . \qquad (2.4)$$

**ملاحظة 5.2:**

بوضع $k = 1$ في العلاقة (2.4) نتحصل عل العلاقة التراجعية لأعداد فيبونـاتشي.

**تعريف 4.2:**

نعرف أعداد $k$ - لـوكاس بالعلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} L_{k,n} = k\,L_{k,n-1} + L_{k,n-2} \ , \ \forall n \geq 2,\ k \in \mathrm{N} \\ L_{k,0} = 2,\ L_{k,1} = k \end{cases} . \qquad (2.5)$$

**ملاحظة 6.2:**

بوضع $k = 1$ في العلاقة (2.5) نتحصل عل العلاقة التراجعية لأعداد لـوكاس.

**تعريف 5.2:**

نعرف أعداد $k$ ـ بال بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2} \quad , \quad \forall n \geq 2,\ k \in \mathrm{N} \\ P_{k,0} = 0,\ P_{k,1} = k \end{cases} . \qquad (2.6)$$

**ملاحظة 7.2:**

بوضع $k = 1$ في العلاقة $(2.6)$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد بـال.

**تعريف 6.2:**

نعرف أعداد $k$ ـ بـال لوكـاس بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2} \quad , \quad \forall n \geq 2,\ k \in \mathrm{N} \\ Q_{k,0} = 2,\ Q_{k,1} = 2 \end{cases} . \qquad (2.7)$$

**ملاحظة 8.2:**

بوضع $k = 1$ في العلاقة $(2.7)$ نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد بـال- لوكـاس.

## 2.2.1 الحل العام للعلاقات التراجعية لأعداد $k$ ـ فيبونـاتشي و $k$ ـ لـوكاس، $k$ ـ بـال و $k$ ـبـال لوكـاس

**1-** المعادلة المميزة المرفقة **بأعداد $k$ ـ فيبونـاتشي و $k$ ـ لوكـاس** تعطى بـ:

$$p(x) = x^2 - kx - 1.$$

المعادلة تقبل جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \ , x_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} ,$$

ومنه الحل العام يكتب على الشكل: $c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$

لدينـا من الشروط الابتدائية $F_{k,0} = 1, F_{k,1} = k$ نجد أن:

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1x_1+c_2x_2=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2\sqrt{k^2+4}} \\ c_2=\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2\sqrt{k^2+4}} \end{cases}.$$

ومنه الحل العام لأعداد $k$ ـ فيبونـاتشي هو:

$$F_{k,n}=\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left[\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

من جهة أخرى لدينـا من الشروط الابتدائية $L_{k,0}=2, L_{k,1}=k$ نجد أن :

$$\begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1x_1+c_2x_2=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=1 \end{cases}.$$

ومنه الحل العام لأعداد $k$ ـ لوكاس يعطى بالعلاقة التالية :

$$L_{k,n}=\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n}.$$

**2-** المعادلة المميزة المرفقة **بأعداد $k$ ـ بـال و $k$ ـ بـال لوكـاس** هي:

$$p(x)=x^2-2x-k.$$

المعادلة تقبل جذرين مختلفين هما:

$$x_1=1+\sqrt{1+k} \quad , x_2= \quad 1-\sqrt{1+k} \ .$$

ومنه الحل العام يكتب على الشكل: $c_1x_1^n+c_2x_2^n$

لدينـا من الشروط الابتدائية $P_{k,0}=0, P_{k,1}=k$ نجد أن :

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1x_1+c_2x_2=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{k}{2\sqrt{k+1}} \\ c_2=\frac{-k}{2\sqrt{k+1}} \end{cases}.$$

ومنه الحل العام لأعداد $k$ ـ بـال يعطى بـ:

$$P_{k,n}=\frac{k}{2\sqrt{k+1}}\left(\left(1+\sqrt{k+1}\right)^n-\left(1-\sqrt{k+1}\right)^n\right).$$

من جهة أخرى لدينا من الشروط الابتدائية $Q_{k,0}=2,\ Q_{k,1}=2$ نجد أن :

$$\begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1x_1+c_2x_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=1 \end{cases}.$$

ومنه الحل العام لأعداد $k$ ـ بـال لوكـاس يعطى بالعلاقة التالية هو:

$$Q_{k,n}=\left(1+\sqrt{k+1}\right)^n+\left(1-\sqrt{k+1}\right)^n.$$

## 3.1 كثيرات الحدود المتعامدة

**توطئة 1.3: [23]**

كل علاقة تراجعية لمتتالية كثيرات الحدود $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ من الرتبة الثانية عبارة عن كثيرات حدود متعامدة .

**تعريف 1.3:**

نعرف كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x) \quad , \forall n\geq 2 \\ T_0(x)=1,\ T_1(x)=x \end{cases}. \tag{3.1}$$

**تعريف 2.3:**

نعرف كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x) \quad , \forall n\geq 2 \\ U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x \end{cases}. \tag{3.2}$$

**تعريف 3.3:**

نعرف كثيرات الحدود لفيبونـاتشي بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x) \quad , \forall n\geq 2 \\ F_0(x)=1,\ F_1(x)=x \end{cases}. \tag{3.3}$$

**تعريف 4.3:**

نعرف كثيرات الحدود للوكـاس بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) & , \forall\, n \geq 2 \\ L_0(x) = 2,\ L_1(x) = x \end{cases} . \qquad (3.4)$$

**تعريف 5.3:**

نعرف كثيرات الحدود لبـال بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) & , \forall\, n \geq 2 \\ P_0(x) = 0,\ P_1(x) = 1 \end{cases} . \qquad (3.5)$$

**تعريف 6.3:**

نعرف كثيرات الحدود لبـال-لوكـاس بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x) & , \forall\, n \geq 2 \\ Q_0(x) = 2,\ Q_1(x) = 2x \end{cases} . \qquad (3.6)$$

# 4.1 الدوال المولدة

## 1.4.1 الدوال المولدة العادية

**تعريف 1.4:**

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية، نرفق بهذه المتتـالية السلسلة المولدة العادية (SGO) التالية:

$$S(u)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n . \qquad (4.1)$$

الدالة المعرفة بهذه السلسلة تسمّى الدالة المولدة العـادية المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**نظرية 1.4:**

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} & , \forall\, n \geq 2 \\ u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \end{cases} ,$$

حيث $p, q, \alpha, \beta \in A$ .

الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(x)=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)x}{1-px-qx^2}. \tag{4.2}$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= u_0+u_1x+\sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \alpha+\beta x+\sum_{n=2}^{+\infty}(pu_{n-1}+qu_{n-2})x^n \\ &= \alpha+\beta x+p\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1}x^n+q\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2}x^n \\ &= \alpha+\beta x+px\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n+qx^2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \alpha+\beta x+px\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n-\alpha\right)+qx^2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \alpha+\beta x-px\alpha+pxg(x)+qx^2g(x), \end{aligned}$$

و منه ينتج لنا:

$$g(x)=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)x}{1-px-qx^2}.$$

و هو المطلوب.

**نتـــائج:**

إنطلاقا من النظرية 1.4 والفقرة الثانية نتحصل على النتـائج التالية:

1- الدالة المولدة لأعداد $k$-فيبونـاتشي هي:

$$g(x)=\frac{1}{1-k\,x-x^2}.$$

2- الدالة المولدة لأعداد $k$-لوكـاس هي :

$$g(x)=\frac{2-kx}{1-kx-x^2}.$$

3- الدالة المولدة لأعداد $k$-بـال هي:

$$g(x)=\frac{kx}{1-2x-kx^2}.$$

4- الدالة المولدة لأعداد $k$-بـال لوكـاس هي:

$$g(x)=\frac{2-2x}{1-2x-kx^2}.$$

**نظرية 2.4:** [1]

إذا كانت $g(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $h(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، يكون لدينا :

1- $c_1g(x)+c_2h(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(c_1a_n+c_2b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $c_2, c_1$ ثابتان.

2- $\dfrac{g(x)}{1-x}$ دالة مولدة للمتتالية $(a_0+a_1+\ldots+a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

3- $xg'(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $g'(x)$ هي مشتق $g$ .

4- $g(x)h(x)$ دالة مولدة للمتتالية الالتفاف $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)_{n\in\mathbb{N}}$ .

### 2.4.1 الدوال المولدة المرفقة بكثيرات الحدود المتعامدة

**نظرية 3.4:**

لتكن $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات حدود متعامدة معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} P_n(x)=pxP_{n-1}(x)+qP_{n-2}(x) & , \ \forall\ n\geq 2 \\ P_0(x)=\alpha,\ P_1(x)=\beta x \end{cases}.$$

حيث $p,q,\alpha,\beta\in A$ .

الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(z)=\frac{\alpha+(\beta x-\alpha p)z}{1-pxz-qz^2}. \tag{4.3}$$

**البرهان:**

لدينا

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= P_0(x) + P_1(x) z + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= \alpha + \beta xz + \sum_{n=2}^{+\infty} \left( pxP_{n-1}(x) + qP_{n-2}(x) \right) z^n \\
&= \alpha + \beta xz + px \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-1}(x) z^n + q \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-2}(x) z^n \\
&= \alpha + \beta xz + pxz \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(x) z^n + qz^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= \alpha + \beta xz + pxz \left( \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n - \alpha \right) + qz^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= \alpha + \beta xz - p\alpha xz + pxzg(z) + qz^2 g(z),
\end{aligned}$$

و منه ينتج لنا:

$$g(z) = \frac{\alpha + (\beta x - \alpha p) z}{1 - pxz - qz^2}.$$

و هو المطلوب.

**نتـائج:**

إنطلاقا من النظرية 3.4 والفقرة الثالثة نتحصل على النتـائج التالية:

1- الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبيتشـاف من النوع الأول هي:

$$g(z) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}.$$

2- الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبيتشـاف من النوع الثاني هي :

$$g(z) = \frac{1}{1 - 2xz + z^2}.$$

3- الدالة المولدة لكثيرات الحدود لفيبونـاتشي هي:

$$g(z)=\frac{1}{1-xz-z^2}.$$

4- الدالة المولدة لكثيرات الحدود للوكـاس هي:

$$g(z)=\frac{2-xz}{1-xz-z^2}.$$

5- الدالة المولدة لكثيرات الحدود لبـال-لوكـاس هي:

$$g(z)=\frac{2-2xz}{1-2xz-z^2}.$$

**توطئة 1.4:**

الدالة المولدة لكثيرات الحدود لبـال هي:

$$g(z)=\frac{z}{1-2xz-z^2}.$$

**البرهان:**

لدينـا:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= P_0(x)+P_1(x)z+\sum_{n=2}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= z+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2xP_{n-1}(x)+P_{n-2}(x)\right)z^n \\
&= z+2xz\sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x) z^n+z^2\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\
&= z+2xzg(z)+z^2g(z),
\end{aligned}$$

و منه:

$$g(z)=\frac{z}{1-2xz-z^{2}}.$$

و هو المطلوب.

## الخاتمة:

ختاما فإننا قمنا في هذا الفصل بإعطاء بعض المفاهيم العامة التي سنلجأ إليها في الفصول القادمة. حيث تم التطرق إلى بعض التعريفات الخاصة بأعداد $k$-فيبوناتشي، لوكاس، بال وبعض كثيرات الحدود المشهورة، وكذا الدوال المولّدة المرفقة لكل منها.

## المـــــــــــراجع:

### المراجع باللغة العربية:

[1] أ. حميد شراري، م.عبد العزيز الزهيري، مقدمة في نظرية التركيبات، مطبوعات جامعة سعود، المملكة العربية السعودية، 2010.

### المراجع باللغة الأجنبية:

**[2]** A. Benoit, AlgorithmiqueSemi-Numérique Rapide deSérieTchebych-ev, Thèse Doctorat, Ecole doctorale de Mathématiques et Informatiques de Bordeaux, 2012.

**[3]** A. Boussayoud, M. Kerada, M. Boulyer, A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int.J.Pure App.Math*. 108, 503-511 , 2016.

**[4]** A. Boussayoud, N.Harrouche, Complete symetric functions and k-Fib-onacci numbers, *Commun.Appl.Anal*. 20, 457-465, 2016.

**[5]** A. Dujella, Abijective proof of Riordan's theorem on powers of Fibon-acci numbers, *Disc .Math*. 199, 217-220, 1999.

**[6]** A.D. Godse , M.B.Dhakne, On the proprties of k-Fibonacci and k-Luc-as numbers, *Int.J.Math.And mech*. 2, 100-106, 2014.

**[7]** A. Necer, Séries Formelles et Produit de Hadamard, *J. Théor. Nombres Bordx*. 9, 319-335, 1997.

**[8]** D. Foata, G. Han, Principes de Combinatoire Classique, Université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématiques, 2008.

**[9]** H. Kayaba, The applications of $k-$Fibonacci sequences, Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Science, Ms Thesis, 2006.

**[10]** I. Mezo", Several Generating Functions for second-order recurrence se- quences, *J. Integer Seq*. 12, 2009.

**[11]** J. Ramirez, On convolved generalized Fibonacci and Lucas polynomials, *Appl.Math.Comput*. 229, 208-213, 2014.

**[12]** M. Mignotte, Intersection des images de certaines suites récurrentes linéaires, *Theor. Comput. Sci*. 7, 117–121, 1978.

**[13]** M. Singh, O.sikhwal, V.Parsai, Y.K.Gupta, Genaralized Fibonacci-Lucas polynomials, *International Journal of advanced mathematicals sceinces*. 2, 81-87, 2014.

**[14]** P. Catarino, On some identities and genarating functions for k-Pell numbers, *Int.J.Math.Anal*. 7, 1877-1884, 2013.

**[15]** P. Catarino, On generating matrices of k-Pell sequences, *Pure Math.sci*. 3, 71-77, 2014.

**[16]** P. Maroni, L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supé rieur à deux, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*.10, 105-139, 1989.

**[17]** S. Falcon, A.Plaza, On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, *Chaos Solitons Fractals*. 39, 1005-1019, 2009.

**[18]** S. Falcon, A. Plaza, k–Fibonacci sequences modulo m, *Chaos Solitons Fractals*. 41, 497 – 504, 2009.

**[19]** S. Falcon, On the k-Lucas numbres of arithmetic indexes, *Appl.Math*. 3, 1202-1206, 2012.

**[20]** T. Mansour. A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, *Australas. J. Comb*.30, 207-212, 2004.

**[21]** T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbera with Applications, Wiley-Interscience Publications, 2001.

**[22]** T. Koshy, Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, Springer, 2014.

**[23]** T.S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomails, Gordon Breach, Science Publishers, Inc, 1978.

# الفصل الثـاني

# التوابع التناظرية

نتناول في هذا الفصل العناصر الأساسية لنظرية التوابع التناظرية، حيث سنتطرق في الفقرة الأولى إلى المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية، وفي الفقرة الثانية نقدّم بعض التعاريف حول التوابع التناظرية الأولية والتامة، وفي الأخير نتطرق إلى بعض خصائص التوابع التناظرية مع بعض التطبيقات على التوابع التناظرية التامة.

## 1.2. المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية $x^2 - kx - 1 = 0$ ، لدينا العلاقة التالية:

$\lambda_1 + \lambda_2 = k$ و $\lambda_1\lambda_2 = -1$ حيث $\lambda_1$ و $\lambda_2$ جذرا المعادلة السالفة.

لتكن المصفوفة $M = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، تسمى هذه المصفوفة "المصفوفة المرافقة" لكثير الحدود:

$$P_M\left(\lambda\right) = \lambda^2 - tr\left(M\right)\lambda + \det M ,$$

و عليه يمكن تعريف متتالية $k$-فيبونـاتشي $(F_{k,n})_{n\geq 1}$ بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{pmatrix} F_{k,\,n+1} \\ F_{k,\,n} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_{k,\,n} \\ F_{k,\,n-1} \end{pmatrix};\ F_{k,\,0} = 1,\ F_{k,\,1} = k\,, k \in \mathrm{N} \qquad (1.1)$$

من العلاقة $(1.1)$ تنتج لنا العلاقتين التاليتين:

$$\begin{cases} F_{k,n+1} = k\,F_{k,n} + F_{k,n-1} & , \quad \forall\, n \geq 1,\ k \in \mathrm{N} \\ F_{k,0} = 1,\ F_{k,1} = k \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$\begin{pmatrix} F_{k,\,n+1} \\ F_{k,\,n} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} F_{k,\,1} \\ F_{k,\,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

### 1.1.2 دراسة قابلية تقطير المصفوفة $M$

#### أ- تعيين القيم الذاتية:

لتكن $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $M$. يعطى كثير الحدود المميز للمصفوفة $M$ بالعلاقة التالية:

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2) = \lambda^2 - k\lambda - 1 \qquad (1.4)$$

هذا الأخير ينعدم من أجل: $\lambda_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ و $\lambda_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ ، وهما القيمتين الذاتيتين للمصفوفة M و أيضا جذرين للمعادلة الأولى.

**ب- الأشعة الذاتية المرفقة لـ $\lambda_2, \lambda_1$ :**

ليكن $V_i$ شعاعا ذاتيا مرفقا للقيمة الذاتية $\lambda_i$ إذن: $MV_i = \lambda_i V_i \,;\, (i = \overline{1,2})$

أي:

$$\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \ \left(i = \overline{1,2}\right), \qquad (1.5)$$

و منه:

$$\begin{cases} kx + y = \lambda_i x \\ \quad x = \lambda_i y \end{cases}, \qquad (1.6)$$

من المعادلتين السابقتين ينتج لنا: $x = \lambda_i y$.

إذن الأشعة الذاتية المرافقة لـ $\lambda_2, \lambda_1$ هي : $V_1 = \begin{pmatrix} \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ و $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ على الترتيب.

إذن $M$ قابلة للتقطير ومنه توجد مصفوفة $P$ قابلة للقلب و مصفوفة $D$ قطرية حيث:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} & \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث $M = PDP^{-1}$ وعليه ينتج لنا : $M^n = PD^nP^{-1}$.

و عليه المصفوفة $M^n$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{k^2+4}} \\ \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{k^2+4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k,n} & F_{k,n-1} \\ F_{k,n-1} & F_{k,n-2} \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

## 2.2. التوابع التنـاظـرية

**تعريف 1.2:**

نقول عن التابع $f(x_1,\cdots,x_n)$ ذي $n$ متغير أنه متناظر إذا كان من أجل كل تبديلة $S$ من المجموعة $\{1,\cdots,n\}$ العلاقة التالية محققة:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_{s(1)},\cdots,x_{s(n)}).$$

### 1.2.2 التوابع التناظرية الأوليّة

نعتبر فيما يلي $n,k$ عددين صحيحين موجبين و $\lambda_1$، $\lambda_2$... ،$\lambda_n$ جذورمختلفة (حقيقية أو مركبة) لمعادلة من الدرجة $n$.

**تعريف 2.2:**

نعرف التابع المتناظر الأولي من الرتبة $k$ التابع المعرف بـ:

$$e_k^{(n)}=e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \qquad (2.1)$$

مـع: 0 أو $i_1,i_2,\ldots,i_n=1$ ،

و $e_k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ معدومة من أجل $k>n$ و $k<0$ .

**مثال 1.2 :**

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ( $n=2$ ، الجذور: $\lambda_2,\lambda_1$ ) لدينا :

$$\begin{cases} e_0^{(2)}=1 \\ e_1^{(2)}=\lambda_1+\lambda_2 \\ e_2^{(2)}=\lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

**قضية 2.1:**

لدينا العلاقات التالية:

1) $e_k^{(n+1)}=\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)}+e_k^{(n)}.$

2) $e_k^{(n)}=\lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\ldots+\lambda_{n-i}e_{k-1}^{(n-i-1)}+\ldots+\lambda_k e_{k-1}^{(k-1)}.$

**البرهان:**

1- لدينـــا:

$$\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)}+e_k^{(n)}=\lambda_{n+1}\left(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\right)+\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}$$
$$=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1}+\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}$$
$$=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n+1=k-1+1=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1}+\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}$$
$$=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}},\qquad i_{n+1}=0\vee 1.$$
$$=e_k^{(n+1)}.$$

وهو المطلوب.

2- لدينـــا:

$$\begin{aligned}e_k^{(n)}&=\lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+e_k^{(n-1)}\\&=\lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+e_k^{(n-2)}\\&=\lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\lambda_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)}+e_k^{(n-3)}\\&=\lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\lambda_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)}+e_k^{(n-3)}+\ldots+\lambda_{n-i}e_{k-1}^{(n-i-1)}+\ldots+\lambda_k e_{k-1}^{(k-1)}.\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

**قضية 2.2:**

نعرف التوابع التناظرية الأولية بأنها معاملات النشر في السلسلة:

$$E(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k^{(n)}z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z)\qquad(2.2)$$

**البرهان:**

نبرهن بالتراجع.

من أجل $n=2$ لدينا:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2}(1+\lambda_i z)&=(1+\lambda_1 z)(1+\lambda_2 z)\\&=1+(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2 z^2\\&=e_0^{(2)}+e_1^{(2)}z+e_2^{(2)}z^2\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{2} e_k^{(2)} z^k.$$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل $n$ أي:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i z).$$

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1+\lambda_i z).$$

لدينـــــــــا:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} (1+\lambda_i z) &= \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i z)(1+\lambda_{n+1} z) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k (1+\lambda_{n+1} z) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} e_{k-1}^{(n)} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} e_{k-1}^{(n)} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} \right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n+1)} z^k.
\end{aligned}$$

وهو المـــطلوب.

## 2.2.2 التوابع التناظرية التامة

**تعريف 3.2:**

نعرف التوابع التناظرية التامة بالنسبة للجذور بالعلاقة التالية :

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \ldots \lambda_n^{i_n}, \qquad (2.3)$$

مع : $i_1, i_2, \ldots, i_n \geq 0$ و $h_k^{(n)} = 0 , \forall k < 0$ .

**مثال 2.2:**

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ( $n=2$ ، الجذور: $\lambda_2,\lambda_1$ ) لدينا:

$$\begin{cases} h_0^{(2)}=1=e_0^{(2)} \\ h_1^{(2)}=\lambda_1+\lambda_2=e_1^{(2)} \\ h_2^{(2)}=\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2 \\ h_3^{(2)}=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 \\ \vdots \end{cases}$$

**قضية 3.2:[17]**

لدينا العلاقات التالية:

$$1)\quad h_k^{(n+1)}=\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)},$$

$$2)\quad h_k^{(n+1)}=\lambda_{n+1}^k+\lambda_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)}+\cdots+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+\lambda_k^n.$$

**قضية 4.2:[17]**

نعرف التوابع التناظرية التامة من الرتبة $k$ بأنها معاملات النشر في السلسلة:

$$H(z)=\sum_{k\geq 0}h_k^{(n)}z^k=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\lambda_i z\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

## 3.2. بعض خصائص التوابع التناظرية

إنطلاقا من المصفوفة $M^n$ المعطاة في الفقرة الأولـى بالعلاقة (7.1) وإعتمادا على التعريف 3.2 يمكن إعطاء التعريف التـالي للتوابع التناظرية.

**تعريف 1.3:**

نعتبر الأبجدية $E=\{e_1,e_2\}$ ، نعرف التابع المتناظر $S_j$ المرفق بالأبجدية $E$ بـ:

$$S_j(E)=S_j(e_1+e_2)=\frac{e_1^{j+1}-e_2^{j+1}}{e_1-e_2},\ j\in\mathrm{N}, \tag{3.1}$$

مـع:

$$S_0(E) = h_0^{(2)} = 1$$
$$S_1(E) = h_1^{(2)} = e_1 + e_2$$
$$S_2(E) = h_2^{(2)} = e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2$$
$$\vdots$$
$$S_j(E) = h_j^{(2)},$$

و $S_j(E) = 0$ من أجل $j < 0$.

**تعريف 2.3: [6,1]**

نعتبر المجموعتين $A$ و $B$ (أبجديتين منتهيتين)، نرمز بـ $S_j(A-B)$ لمعاملات السلسلة المعرفة بـ:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A-B)z^j = \frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{\prod_{a\in A}(1-az)}, \tag{3.2}$$

مـــع: $\forall\, j < 0 \quad S_j(A-B) = 0$.

**نتيجة 1.3:**

بوضع $A=\phi$ في العلاقة (3.2) نتحصل على:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-B)z^j = \prod_{b\in B}(1-bz). \tag{3.3}$$

**خاصية 1.3: [2,1]**

إذا كان $A=\phi$ أو $B=\phi$ فإنه ينتج لنا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A-B)z^j = \sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)z^j . \sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-B)z^j. \tag{3.4}$$

**ملاحظة 2.3:**

إذا كان $A = B$ من العلاقتين (3.2) و (3.4) نتحصل على:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)z^j . \sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-A)z^j = 1,$$

أي:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)z^j = \frac{1}{\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(-A)z^j}. \tag{3.5}$$

## 4.2.تطبيقات على التوابع التناظرية التامة

**تعريف 1.4:[3]**

نعرف المؤثر التناظري $\delta_{e_1e_2}^m$ بالعلاقة التالية:

$$\delta_{e_1e_2}^m f(e_1) = \frac{e_1^m f(e_1) - e_2^m f(e_2)}{e_1 - e_2},\ m \in \mathbb{N}.$$

**نظرية 1.4 :**

لتكن الأبجدية $E = \{e_1, e_2\}$ و $m$ عدد طبيعي غير معدوم لدينا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+m-1}(e_1,e_2)z^j = \frac{h_{m-1}(e_1,e_2) - e_1e_2h_{m-2}(e_1,e_2)z}{(1-e_1z)(1-e_2z)}. \tag{4.1}$$

**البرهان:**

بإدخال المؤثر $\delta_{e_1e_2}^m$ على السلسلة $\sum_{j=0}^{+\infty} e_1^j z^j$ الطرف الأيسر للعلاقة (4.1) يكتب كمايلي:

$$\begin{aligned}
\delta_{e_1e_2}^m \sum_{j=0}^{+\infty} e_1^j z^j &= \frac{e_1^m \sum_{j=0}^{+\infty} e_1^j z^j - e_2^m \sum_{j=0}^{+\infty} e_2^j z^j}{e_1 - e_2} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{+\infty} e_1^{j+m} z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} e_2^{j+m} z^j}{e_1 - e_2} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e_1^{j+m} - e_2^{j+m}}{e_1 - e_2} z^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+m-1}(e_1,e_2) z^j.
\end{aligned}$$

بإدخال المؤثر $\delta_{e_1e_2}^m$ على السلسلة $\frac{1}{1-e_1z}$، الطرف الأيمن للعلاقة (4.1) يكتب كمايلي:

$$\begin{aligned}
\delta_{e_1e_2}^m \left(\frac{1}{1-e_1z}\right) &= \frac{\frac{e_1^m}{1-e_1z} - \frac{e_2^m}{1-e_2z}}{e_1 - e_2} \\
&= \frac{e_1^m(1-e_2z) - e_2^m(1-e_1z)}{(e_1-e_2)(1-e_1z)(1-e_2z)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e_1^m - e_2^m - (e_2 e_1^m - e_1 e_2^m)z}{(e_1 - e_2)(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)}$$
$$= \frac{h_{m-1}(e_1 + e_2) - e_1 e_2 h_{m-1}(e_1 + e_2)}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)}.$$

و منه:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+m-1}(e_1, e_2) z^j = \frac{h_{m-1}(e_1, e_2) - e_1 e_2 h_{m-2}(e_1, e_2) z}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)}.$$

وهو المطلوب.

- بأخذ $m = 1$ في النظرية 1.4 تنتج لنا العلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_j (e_1, e_2) z^j = \frac{1}{1 - (e_1 + e_2) z + e_1 e_2 z^2}. \quad (4.2)$$

- بأخذ $m = 2$ في النظرية 1.4 تنتج لنا العلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+1} (e_1, e_2) z^j = \frac{e_1 + e_2 - e_1 e_2 z}{1 - (e_1 + e_2) z + e_1 e_2 z^2}. \quad (4.3)$$

**أولا:** بإستبدال $e_2$ بـ $(-e_2)$ في العلاقتين (4.2) و (4.3) نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_j (e_1, [-e_2]) z^j = \frac{1}{1 - (e_1 - e_2) z - e_1 e_2 z^2}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+1} (e_1, [-e_2]) z^j = \frac{e_1 - e_2 + e_1 e_2 z}{1 - (e_1 - e_2) z - e_1 e_2 z^2}. \quad (4.6)$$

**-1** بأخذ $\begin{cases} e_1 e_2 = 1 \\ e_1 - e_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقتين (4.5) و(4.6) نتحصل على:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_j (e_1, [-e_2]) z^j = \frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} F_j z^j, \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+1} (e_1, [-e_2]) z^j = \frac{1+z}{1 - z - z^2}. \quad (4.8)$$

العلاقة (4.7) تمثل الدالة المولدة لأعداد فيبونـاتشي حيث:

$$F_j = h_j(e_1, [-e_2]), \; e_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

- بضرب العلاقة (4.7) في العدد 3 و جمعها مع العلاقة (4.8) المضروبة في العدد (-1) نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(3h_j\left(e_1,[-e_2]\right)-h_{j+1}\left(e_1,[-e_2]\right)\right)z^j=\frac{2-z}{1-z-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}L_j z^j. \qquad (4.9)$$

وهي عبارة عن الدالة المولدة لأعداد لوكـاس .

**نتيجة 1.4:**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينـا:

$$L_j=3h_j\left(e_1,[-e_2]\right)-h_{j+1}\left(e_1,[-e_2]\right),\ e_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

**-2** بأخذ $\begin{cases} e_1e_2=1 \\ e_1-e_2=2 \end{cases}$ في العلاقتين (4.5) و(4.6) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}h_j\left(e_1,[-e_2]\right)z^j=\frac{1}{1-2z-z^2}. \qquad (4.10)$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}h_{j+1}\left(e_1,[-e_2]\right)z^j=\frac{2+z}{1-2z-z^2}. \qquad (4.11)$$

- إنطلاقا من العلاقة (4.10) تنتج لنا الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}h_{j-1}\left(e_1,[-e_2]\right)z^j=\frac{z}{1-2z-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}P_j z^j. \qquad (4.12)$$

وهي الدالة المولدة لأعداد بـال حيث:

$$P_j=h_{j-1}\left(e_1,[-e_2]\right),\ e_{1,2}=1\pm\sqrt{2}.$$

- بضرب العلاقة (4.10) في العدد 6 وجمعها مع العلاقة (4.11) المضروبة في العدد (-2) نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}6h_j\left(e_1,[-e_2]\right)-2h_{j+1}\left(e_1,[-e_2]\right))z^j=\frac{2-2z}{1-2z-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}Q_j z^j, \qquad (4.13)$$

وهي الدالة المولدة لأعداد بـال-لوكـاس.

**نتيجة 2.4:**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينـا:

$$Q_j = 6h_j(e_1,[-e_2]) - 2h_{j+1}(e_1,[-e_2]),\ e_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

**نظرية 2.4:**

الدالة المولدة الجديدة لجداءات بال غير متوالية هي:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2}P_j z^j = \frac{5z+4z^2-z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}. \quad (4.14)$$

**البرهان:**

نعلم أن:

$$h_{j-1}(e_1,[-e_2]) = \frac{e_1^{\,j} - (-e_2)^j}{e_1+e_2}.$$

وعليه:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2}P_j z^j &= \sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+1}(e_1,[-e_2])h_{j-1}(e_1,[-e_2])z^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} h_{j+1}(e_1,[-e_2])(\frac{(e_1z)^j - (-e_2z)^j}{e_1+e_2}) \\
&= \frac{1}{e_1+e_2}[\frac{2+e_1z}{1-2e_1z-e_1^2z^2} - \frac{2-e_2z}{1+2e_2z-e_2^2z^2}] \\
&= \frac{5z+4z^2-z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.
\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

**نظرية 3.4:**

الدالة المولدة لجداءات بال المتوالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1}P_j z^j = \frac{2z+2z^2}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}. \quad (4.15)$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2}P_j z^j = \sum_{j=0}^{+\infty}(2P_{j+1}+P_j)P_j z^j$$
$$= 2\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1}P_j z^j + \sum_{j=0}^{+\infty} P_j^2 z^j.$$

ونعلم أنّ [11]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_j^2 z^j = \frac{z-z^3}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

و منه:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1}P_j z^j = \frac{1}{2}(\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2}P_j z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} P_j^2 z^j)$$
$$= \frac{2z+2z^2}{1-4z-10z^2-4z^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

**ثانيا:** بإستبدال $e_1$ بـ$(2e_1)$ و $e_2$ بـ$(-2e_2)$ العلاقة (4.2) تكتب كمايلي:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_j\left(2e_1,[-2e_2]\right)z^j = \frac{1}{1-2(e_1-e_2)z-4e_1e_2z^2}. \tag{4.16}$$

- بأخذ $\begin{cases} 4e_1e_2=-1 \\ e_1-e_2=x \end{cases}$ في العلاقة (16.4) نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_j(2e_1,[-2e_2])z^j = \frac{1}{1-2xz+z^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} U_j(x)z^j. \tag{4.17}$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني حيث:

$$U_j(x) = h_j(2e_1,[-2e_2]).$$

- من العلاقة (17.4) ينتج لنا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(h_j(2e_1,[-2e_2]) - xh_{j-1}(2e_1,[-2e_2])\right)z^j = \frac{1-xz}{1-2xz+z^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} T_j(x)z^j. \tag{4.18}$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول .

**نتيجة 3.4:**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينـا:

$$T_j(x) = h_j(2e_1, [-2e_2]) - xh_{j-1}(2e_1, [-2e_2]).$$

## الخاتمة:

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا الفصل بإعطاء بعض التعاريف حول التوابع التناظرية، حيث تطرقنا إلى التوابع التناظرية الأولية و التامة و بعض خصائصها التي تساعدنا على إستنتاج الدوال المولدة لأعداد ($k$-فيبونـاتشي، $k$-لوكـاس،...) وكثيرات الحدود (فيبونـاتشي، لوكـاس،...) التي سيتم التطرق إليها في الفصل اللاحق.

## المـــــــــــــراجع:


**[1]** A. Abderrezzak, Généralisation de la Transformation d'Eler d'une Série Formelle, *Adv. Math*. 103, 180-195, 1994.

**[2]** A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, *Aequationes Math*. 49, 36-46, 1995.

**[3]** A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A Generalization of Some Orthogonal Polynomials, *Springer Proc Math Stat*. 41, 235-241, 2013.

**[4]** A. Boussayoud , M. Kerada, Symmetric and Generating Functions, Int. Electron. *J.Pure Appl. Math*. 7, 195-203, 2014.

**[5]** A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali, W. Rouibah, Some Applications on Generating Functions, *J.Concr .Appl .Math*. 12, 321-330, 2014.

**[6]** A. Boussayoud , M. Kerada, R. Sahali, Symmetrizing Operations on Some Orthogonal Polynomails, *Int. Electron .J .Pure Appl .Math*. 9, 191-199, 2015.

**[7]** A. Lascoux, Addition of ±1: Application to Arithmetic, Séminaire lothar ingien de Combinatoire 52, 2004.

**[8]** Amy M.Fu, A. Lascoux, Partition Analysis and Symmetrizing Operators, *J.Comb. Theory*, Ser. A.109, 339-343, 2005.

**[9]** G.A. Rempała, J. Wesołowski , Symmetric Functionals on Random Matrices and Random Matchings Problems, Springer, I.M.A, 2007.

**[10]** I.G. Macdonald, Schur Functions: theme and variations, in Seminaire Lotharingien de Combinatoire, Publ. I.R.M.A. Strasbourg. 498, 5-39, 1992.

**[11]** I.Mezo", Several Generating Functions for second-order recurrence sequences, *J. integer seq*. 12, 2009.

**[12]** I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomias, second edition, Oxford Mathematical Monographs,1995.

**[13]** I.G. Macdonald , Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials, Amirican Mathematica society, 1997.

**[14]** J.Cullinan, F. Hajir, On the Galois groups of Legendre polynomials, *Indag. Math*. 25, 534–552, 2014.

**[15]** L.Butler, Subgroup Lattices and Symmetric Functions, American Math - ematical society, 1994.

**[16]** L.Manivel, Cours Spécialisés, Fonctions Symétriques, Polynômes de Schuet et Lieux de Dégcnérexence, N3, Société Mathématiques de France, 1998.

**[17]** M.Boulyer, M.Guedjane, Les Fonctions symétriques pour la generalisa- tion des polynomes orthogonaux, Mémoire de master, Université de jijel, 2015.

**[18]** M. Merca, A Generalization of the symmetry between complete and elementary symmetric functions, *Indian J. Pure Appl. Math*. 45, 75-89, 2014.

**[19]** P. A. MacMahon, Combinatory Analysis. Two volumes (bound asone), Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

**[20]** T.Mansour. A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, *Australas. J. Comb*.30, 207-212, 2004.

# الفصل الثالث

## الدوال المولدة لجداءات $k$-فيبونـاتشي مع كثيرات الحدود لتشيبيتشاف

في هذا الفصل سنتطرق إلى دراسة تأثير المؤثر ${\delta^{-k}}_{e_1e_2}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(A)e_1^j z^j$ و الذي يسمح لنا بـالحصول على الدوال المولدة لكل من أعداد $k$-فيبونــاتشي، $k$-لوكـاس، $k$-بـال و $k$-بـال لوكـاس، وكذلك الدوال المولدة لكثيرات الحدود لكل من فيبونــاتشي، لوكـاس ،بـال و بـال-لوكـاس ، بـالإضافة إلى بعض الجداءات مثل جداءات $k$-فيبونــاتشي المتوالية، جداءات بـال...، وذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.1 المقترحة أدناه وهذا في حالة الأبجديتين $A=\{a_1,a_2\}$ و $E=\{e_1,e_2\}$ و التي تمكننا من الحصول على بعض الدوال المولدة الجديدة.

## 1.3. نتـائج أسـاسية

**تعريف 1.1:**

نعرف المؤثر التناظري $\delta_{e_1e_2}^{-k}$ بالعلاقة التالية:

$$\delta_{e_1e_2}^{-k} f(e_1) = \frac{e_2^k f(e_1) - e_1^k f(e_2)}{(e_1e_2)^k(e_1-e_2)},\ k \in \mathbb{N}.$$

**نظرية 1.1:**

لتكن $A$ و $E$ أبجديتين معرفتين على الترتيب بـ: $\{a_1,a_2\}$ و $\{e_1,e_2\}$ لدينا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+a_2)S_j(e_1+e_2)z^j = \frac{(a_1+a_2)^2 - a_1a_2 - a_1a_2(a_1+a_2)(e_1+e_2)z + e_1e_2(a_1a_2)^2z^2}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod_{a\in A}(1-ae_2z)}\ . \qquad (1.1)$$

**البرهـان:**

بإدخال المؤثر $\delta_{e_1e_2}^{-1}$ على السلسلة $f(e_1z)=\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)e_1^j z^j$ ، الطرف الأيسر للعلاقة (1.1) يكتب على الشكل التـالي:

$$\delta_{e_1e_2}^{-1} f(e_1z) = \frac{e_2\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)e_1^j z^j - e_1\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)e_2^j z^j}{e_1e_2(e_1-e_2)}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)e_2e_1^j z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)e_1e_2^j z^j}{e_1e_2(e_1-e_2)}$$

$$= \frac{-1}{e_1e_2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)\left(\frac{e_1e_2^j - e_2e_1^j}{e_1-e_2}\right)z^j\right)$$

$$= \frac{-1}{e_1e_2}\left(1+\sum_{j=2}^{+\infty} S_j(a_1+a_2)e_1e_2\left(\frac{e_2^{j-1} - e_1^{j-1}}{e_1-e_2}\right)z^j\right)$$

$$= \frac{-1}{e_1e_2}\left(1-e_1e_2z^2\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+a_2)S_j(e_1+e_2)z^j\right).$$

من جهة أخرى الطرف الأيمن للعلاقة (1.1) يكتب على الشكل:

$$\delta_{e_1e_2}^{-1} f(e_1z) = \delta_{e_1e_2}^{-1}\left(\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)}\right)$$

$$= \frac{\frac{e_2}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)} - \frac{e_1}{\prod_{a\in A}(1-ae_2z)}}{e_1e_2(e_1-e_2)}$$

$$= \frac{e_2\prod_{a\in A}(1-ae_2z) - e_1\prod_{a\in A}(1-ae_1z)}{e_1e_2(e_1-e_2)\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod_{a\in A}(1-ae_2z)}$$

$$= \frac{-1}{e_1e_2}\left(\frac{1-(a_1+a_2)(e_1+e_2)z + a_1a_2\left((e_1+e_2)^2 - e_1e_2\right)z^2}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod_{a\in A}(1-ae_2z)}\right).$$

إذن:

$$1-e_1e_2z^2\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+a_2)S_j(e_1+e_2)z^j = \frac{1-(a_1+a_2)(e_1+e_2)z + a_1a_2\left((e_1+e_2)^2 - e_1e_2\right)z^2}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod_{a\in A}(1-ae_2z)}.$$

ومنه تنتج لنا المساواة:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+a_2)S_j(e_1+e_2)z^j = \frac{(a_1+a_2)^2 - a_1a_2 - a_1a_2(a_1+a_2)(e_1+e_2)z + e_1e_2(a_1a_2)^2z^2}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod_{a\in A}(1-ae_2z)}.$$

و هو المطلوب.

## 2.3. تطبيقات على الدوال المولدة

### 1.2.3 الحالة $A=\{1,0\}$ ، $E=\{e_1,-e_2\}$

بإستبدال $e_2$ بـ $(-e_2)$ في العلاقة (1.1) نتحصل النتيجتين التاليتين:

**نتيجة 1.2 :**

نعتبر الأبجدية $E=\{e_1,-e_2\}$ ، لدينـــــــــــــا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(e_1+[-e_2])z^j=\frac{1}{1-(e_1-e_2)z-e_1e_2z^2}. \tag{2.1}$$

**نتيجة 2.2:**

نعتبر الأبجدية $E=\{e_1,-e_2\}$ ، لدينـــــــــــــا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+1}(e_1+[-e_2])z^j=\frac{e_1-e_2+e_1e_2z}{1-(e_1-e_2)z-e_1e_2z^2}. \tag{2.2}$$

### 2.2.3 الدوال المولدة لأعداد $k$

**-1** بأخذ $\begin{cases} e_1e_2=1 \\ e_1-e_2=k \end{cases}$ في العلاقتين (2.1) و (2.2) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(e_1+[-e_2])z^j=\frac{1}{1-k\,z-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\,j}z^j, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+1}(e_1+[-e_2])z^j=\frac{k+z}{1-kz-z^2}. \tag{2.4}$$

العلاقة (2.3) تمثل الدالة المولدة لأعداد $k$- فيبونــاتشي حيث:

$$F_{k,\,j}=S_j(e_1+[-e_2]),\ e_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}.$$

**ملاحظة 1.2 :**

بوضع $k=1$ في العلاقة (2.3) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد فيبونــاتشي.

- بضرب العلاقة (2.3) في العـدد $(2+k^2)$ و جمعها مع العلاقة (2.4) المضروبة في العدد $(-k)$، نتحصل على العلاقة التـالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\left(2+k^2\right)S_j\left(e_1+[-e_2]\right)-kS_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)\right)z^j=\frac{2-kz}{1-kz-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}L_{k,j}z^j, \qquad (2.5)$$

و هي الدالة المولدة لأعداد $k$ - لوكـاس.

**نتيجة 3.2:**

من أجل $k,j\in\mathbb{N}$ لدينـا:

$$L_{k,j}=(2+k^2)S_j(e_1+[-e_2])-kS_{j+1}(e_1+[-e_2]),\ e_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$$

**ملاحظة 2.2:**

بوضع $k=1$ في العلاقة (2.5) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد لوكـاس.

**-2** بأخذ $\begin{cases} e_1e_2=k \\ e_1-e_2=2 \end{cases}$ في العلاقتين (2.1) و (2.2) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_j\left(e_1+[-e_2]\right)z^j=\frac{1}{1-2z-kz^2}, \qquad (2.6)$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^j=\frac{2+kz}{1-2z-kz^2}. \qquad (2.7)$$

- بضرب العلاقة (2.6) في العـدد (2-) و جمعها مع العلاقة (2.7) نتحصل على الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(S_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)-2S_j\left(e_1+[-e_2]\right)\right)z^j=\frac{kz}{1-2z-kz^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}P_{k,j}z^j. \qquad (2.8)$$

و هي الدالة المولدة لأعداد $k$ - بـال.

**نتيجة 4.2:**

من أجل $k,j \in \mathbb{N}$ لدينـا:

$$P_{k,j} = S_{j+1}(e_1+[-e_2]) - 2S_j(e_1+[-e_2]),\ e_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+k}.$$

**ملاحظة 3.2:**

بوضع $k=1$ في العلاقة (2.8) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد بـال.

- من العلاقتين (2.6) و (2.7) تنتج لنا الدالة المولدة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(S_{j+1}(e_1+[-e_2]) - (k+2)S_{j-1}(e_1+[-e_2])\right)z^j = \frac{2-2z}{1-2z-kz^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} Q_{k,j} z^j. \qquad (2.9)$$

وهي الدالة المولدة لأعداد $k$- بـال لوكـاس.

**نتيجة 5.2:**

من أجل $k,j \in \mathbb{N}$ لدينـا:

$$Q_{k,j} = S_{j+1}(e_1+[-e_2]) - (k+2)S_{j-1}(e_1+[-e_2]),\ e_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+k}.$$

**ملاحظة 4.2:**

بوضع $k=1$ في العلاقة (2.9) نتحصل على الدالة المولدة لأعداد بـال لوكـاس.

### 3.2.3 الدوال المولدة لكثيرات الحدود المتعامدة

**1-** بأخذ $\begin{cases} e_1 e_2 = 1 \\ e_1 - e_2 = x \end{cases}$ في العلاقتين (2.1) و (2.2) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j(e_1+[-e_2])z^j = \frac{1}{1-xz-z^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} F_j(x) z^j, \qquad (2.10)$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+1}(e_1+[-e_2])z^j = \frac{x+z}{1-xz-z^2}. \qquad (2.11)$$

العلاقة (2.10) تمثل الدالة المولدة لكثيرات الحدود لفيبونــاتشي حيث:

$$F_j(x) = S_j(e_1+[-e_2]).$$

- بضرب العلاقة (2.10) في $\left(2+x^2\right)$ و جمعها مع العلاقة (2.11) المضروبة في $(-x)$ نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\left(2+x^2\right)S_j\left(e_1+[-e_2]\right)-xS_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)\right)z^j=\frac{2-xz}{1-xz-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}L_j(x)\,z^j. \qquad (2.12)$$

وهي الدالة المولدة لكثيرات الحدود للوكـاس.

**نتيجة 6.2:**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينا:

$$L_j(x)=\left(2+x^2\right)S_j\left(e_1+[-e_2]\right)-xS_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right).$$

**-2** بأخذ $\begin{cases} e_1e_2=1 \\ e_1-e_2=2x \end{cases}$ في العلاقتين (2.1) و (2.2) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_j\left(e_1+[-e_2]\right)z^j=\frac{1}{1-2xz-z^2}, \qquad (2.13)$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^j=\frac{2x+z}{1-2xz-z^2}. \qquad (2.14)$$

- بضرب العلاقة (2.13) في $(-2x)$ و جمعها مع العلاقة (2.14) نتحصل على الدالة المولدة التالية :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(S_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)-2xS_j\left(e_1+[-e_2]\right)\right)z^j=\frac{z}{1-2xz-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}P_j(x)z^j. \qquad (2.15)$$

وهي عبارة عن الدالة المولدة لكثيرات الحدود لبـال.

**نتيجة 7.2 :**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينا:

$$P_j(x)=S_{j+1}(e_1+[-e_2])-2xS_j(e_1+[-e_2]).$$

- بضرب العلاقة (2.13) في $\left(2+4x^2\right)$ وجمعها مع العلاقة (2.14) المضروبة في $(-2x)$

نتحصل على الـدالة المولـدة التـالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\left(2+4x^2\right)S_j\left(e_1+[-e_2]\right)-2xS_{j+1}\left(e_1+[-e_2]\right)\right)z^j=\frac{2-2xz}{1-2xz-z^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}Q_j(x)z^j. \quad (2.16)$$

وهي عبارة عن الدالة المولدة لكثيرات الحدود بـال- للوكـاس.

**نتيجة 8.2:**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينا:

$$Q_j(x)=(2+4x^2)S_j(e_1+[-e_2])-2xS_{j+1}(e_1+[-e_2]).$$

### 4.2.3 الحـالة $A=\{a_1,-a_2\}$ ، $E=\{e_1,-e_2\}$

بإستبدال $a_2$ بـ $(-a_2)$ و $e_2$ بـ $(-e_2)$ في العلاقة (1.1) نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(e_1+[-e_2])z^j=\frac{(a_1-a_2)^2+a_1a_2+a_1a_2(a_1-a_2)(e_1-e_2)z-e_1e_2(a_1a_2)^2z^2}{(1-a_1e_1z)(1+a_1e_2z)(1+a_2e_1z)(1-a_2e_2z)}. \quad (2.17)$$

حيث:

$$\begin{aligned}(1-a_1e_1z)(1+a_1e_2z)(1+a_2e_1z)(1-a_2e_2z)=1-(a_1-a_2)(e_1-e_2)z-\Big[a_1a_2\big((e_1-e_2)^2+2e_1e_2\big)\\ +e_1e_2(a_1-a_2)^2\Big]z^2-e_1e_2a_1a_2(a_1-a_2)(e_1-e_2)z^3\\ +e_1^2e_2^2a_1^2a_2^2z^4.\end{aligned}$$

**أولا:** بأخذ $\begin{cases}a_1a_2=1\\ a_1-a_2=k\end{cases}$ و $\begin{cases}e_1e_2=1\\ e_1-e_2=k\end{cases}$ في العلاقة (2.17) نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(e_1+[-e_2])z^j=\frac{k^2+1+k^2z-z^2}{1-k^2z-2(k^2+1)z^2-k^2z^3+z^4}=\sum_{j=0}^{+\infty}F_{k,\,j+2}F_{k,\,j}z^j. \quad (2.18)$$

و التي تمثل الدالة المولدة الجديدة لجداءات $k$- فيبونـــاتشي حيث:

$$F_{k,\,j+2}F_{k,\,j}=S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(e_1+[-e_2]).$$

**نظرية 1.2:**

الدالة المولدة لأعداد $k$ - فيبونـــاتشي المتوالية تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}F_{k,\,j+1}F_{k,\,j}z^j=\frac{k+kz}{1-k^2z-2(k^2+1)z^2-k^2z^3+z^4}. \quad (2.19)$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+2} F_{k,\ j} z^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( k F_{k,\ j+1} + F_{k,\ j} \right) F_{k,\ j} z^j$$
$$= k \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+1} F_{k,j} z^j + \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j}^2 z^j.$$

و نعلم أنّ [2] :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j}^2 z^j = \frac{1-z^2}{1-k^2 z - 2(k^2+1) z^2 - k^2 z^3 + z^4}.$$

و منه:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+1} F_{k,\ j} z^j = \frac{1}{k}\left( \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+2} F_{k,\ j} z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j}^2 z^j \right) = \frac{k + kz}{1-k^2 z - 2(k^2+1) z^2 - k^2 z^3 + z^4}.$$

و هو المطلوب.

- إنطلاقا من العلاقتين (2.18) و (2.19) و بوضع $k = 2$ نتحصل على النتيجتين التاليتين:

### نتيجة 9.2:

الدالة المولدة الجديدة لجداءات أعداد بـال تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2} P_j z^j = \frac{5z + 4z^2 - z^3}{1 - 4z - 10z^2 - 4z^3 + z^4}. \tag{2.20}$$

### نتيجة 10.2:

الدالة المولدة لجداءات أعداد بـال المتوالية تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1} P_j z^j = \frac{2z + 2z^2}{1 - 4z - 10z^2 - 4z^3 + z^4}. \tag{2.21}$$

**ثانيا:** بأخذ $\begin{cases} a_1 a_2 = 1 \\ a_1 - a_2 = k \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 e_2 = 1 \\ e_1 - e_2 = x \end{cases}$ في العلاقة (2.17) نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1 + [-a_2]) S_j (e_1 + [-e_2]) z^j = \frac{k^2 + 1 + kxz - z^2}{1 - kxz - (k^2 + x^2 + 2) z^2 - kxz^3 + z^4} = \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+2} F_j(x) z^j. \tag{2.22}$$

و التي تمثل الدالة المولدة الجديدة لجداءات $k$ - فيبونــاتشي و كثيرات الحدود لفيبونــاتشي.

**نتيجة 11.2:**

من أجل $k,j \in \mathbb{N}$ لدينـا:

$$F_{k,\ j+2}F_j(x) = S_{j+2}(a_1 + [-a_2])S_j(e_1 + [-e_2]).$$

**نظرية 2.2:**

الدالة المولدة لجداء $k$- فيبونـاتشي كثيرات الحدود لفيبونـاتشي تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+1}F_j(x)z^j = \frac{k + xz}{1 - kxz - (k^2 + x^2 + 2)z^2 - kxz^3 + z^4}. \tag{2.23}$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+2}F_j(x)z^j &= \sum_{j=0}^{+\infty} (kF_{k,\ j+1} + F_{k,\ j})F_j(x)z^j \\ &= k\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+1}F_j(x)z^j + \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j}F_j(x)z^j.\end{aligned}$$

و نعلم أنّ [15]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j}F_j(x)z^j = \frac{1 - z^2}{1 - kxz - (k^2 + x^2 + 2)z^2 - kxz^3 + z^4}.$$

و منه:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+1}F_j(x)z^j = \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j+2}\, F_j(x)z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\ j}F_j(x)z^j\right) \\ &= \frac{k + xz}{1 - kxz - (k^2 + x^2 + 2)z^2 - kxz^3 + z^4}\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

- إنطلاقا من العلاقتين (2.22) و (2.23) و بوضع $k = 2$ نتحصل على النتيجتين التاليتين:

**نتيجة 12.2:**

الدالة المولدة الجديدة لجداء بـال و كثيرات حدود فيبونـــاتشي تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2}F_{j-1}(x)z^j = \frac{5z+2xz^2-z^3}{1-2xz-(x^2+6)z^2-2xz^3+z^4}. \quad (2.24)$$

**نتيجة 13.2:**

الدالة المولدة لجداء بـال و كثيرات الحدود لفيبونـــاتشي تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1}F_{j-1}(x)z^j = \frac{2z+xz^2}{1-2xz-(x^2+6)z^2-2xz^3+z^4}. \quad (2.25)$$

### 5.2.3 الحـالة $A=\{a_1,-a_2\}$ ، $E=\{2e_1,-2e_2\}$

بإستبدال $a_2$ بـ$(-a_2)$ ، $e_1$ بـ$(2e_1)$ و $e_2$ بـ$(-2e_2)$ في العلاقة $(1.1)$ نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j = \frac{(a_1-a_2)^2+a_1a_2+2a_1a_2(a_1-a_2)(e_1-e_2)z-4e_1e_2(a_1a_2)^2z^2}{(1-2a_1e_1z)(1+2a_1e_2z)(1+2a_2e_1z)(1-2a_2e_2z)}. \quad (2.26)$$

- بأخذ $\begin{cases} a_1a_2=1 \\ a_1-a_2=k \end{cases}$ و $\begin{cases} 4e_1e_2=-1 \\ e_1-e_2=x \end{cases}$ في العلاقة $(2.26)$ نجد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j &= \frac{k^2+1+2k\,x\,z+z^2}{1-2kxz-(4x^2-k^2-2)z^2+2kxz^3+z^4} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\,j+2}U_j(x)z^j. \end{aligned} \quad (2.27)$$

و التي تمثل الدالة المولدة الجديدة لجداء $k$ - فيبونـــاتشي و كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني.

**نتيجة 14.2:**

من أجل $k,j \in \mathbb{N}$ لدينـا:

$$F_{k,\,j+2}U_j(x) = S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(2e_1+[-2e_2]).$$

**نظرية 3.2:**

الدالة المولدة لجداء $k$- فيبونــاتشي و كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j+1} U_j(x) z^j = \frac{k+2xz}{1-2kxz-\left(4x^2-k^2-2\right)z^2+2kxz^3+z^4}. \tag{2.28}$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j+2} U_j(x) z^j &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(kF_{k,\, j+1}+F_{k,\, j}\right) U_j(x) z^j \\ &= k\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j+1} U_j(x) z^j + \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j} U_j(x) z^j.\end{aligned}$$

و نعلم أنّ [2]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j} U_j(x) z^j = \frac{1+z^2}{1-2kxz-\left(4x^2-k^2-2\right)z^2+2kxz^3+z^4}.$$

و منه:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j+1} U_j(x) z^j &= \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j+2} U_j(x) z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} F_{k,\, j} U_j(x) z^j\right) \\ &= \frac{k+2xz}{1-2kxz-\left(4x^2-k^2-2\right)z^2+2kxz^3+z^4}.\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

- إنطلاقا العلاقتين (2.27) و (2.28) و بوضع $k=2$ نتحصل على النتيجتين التاليتين:

**نتيجة 15.2:**

الدالة المولدة الجديدة لجداء بـال و كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+2} U_{j-1}(x) z^j = \frac{5z+4xz^2+z^3}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}. \tag{2.29}$$

**نتيجة 16.2:**

الدالة المولدة لجداء بـال و كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1} U_{j-1}(x) z^j = \frac{2z+2xz^2}{1-4xz-\left(4x^2-6\right)z^2+4xz^3+z^4}. \tag{2.30}$$

**نظرية 4.2:**

الدالة المولدة الجديدة لجداء فيبونـاتشي و كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية .

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+2} T_j(x) z^j = \frac{2-xz+(1-4x^2)z^2-xz^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}. \tag{2.31}$$

**البرهان:**

نعلم أن:

$$S_{j-1}(2e_1+[-2e_2]) = \frac{(2e_1)^j-(-2e_2)^j}{2(e_1+e_2)}.$$

و منه:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+2} T_j(x) z^j &= \sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])\left(S_j(2e_1+[-2e_2])-xS_{j-1}(2e_1+[-2e_2])\right)z^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j - x\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])S_{j-1}(2e_1+[-2e_2])z^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+2} U_j(x) z^j - \frac{x}{2(e_1+e_2)}\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])((2e_1)^j-(-2e_2)^j)z^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+2} U_j(x) z^j - \frac{x}{2(e_1+e_2)}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])(2e_1z)^j - \sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])(-2e_2z)^j\right),
\end{aligned}$$

و نعلم أن [3]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(a_1+[-a_2])z^j = \frac{2+z}{1-z-z^2}.$$

إذن:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+2}(a_1+[-a_2])T_j(x)z^j = \frac{2+2xz+z^2}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4} - \frac{x}{2(e_1+e_2)}\left(\frac{2+2e_1z}{1-2e_1z-4e_1^2z^2} - \frac{2-2e_2z}{1+2e_2z-4e_2^2z^2}\right)$$
$$= \frac{2-xz+(1-4x^2)z^2-xz^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}.$$

و هو المطلوب.

### نظرية 5.2:

الدالة المولدة لجداء فيبونــاتشي و كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+1}T_j(x)z^j = \frac{1-2x^2z^2-xz^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}. \tag{2.32}$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+2}T_j(x)z^j = \sum_{j=0}^{+\infty}(F_{j+1}+F_j)T_j(x)z^j$$
$$= \sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+1}T_j(x)z^j + \sum_{j=0}^{+\infty} F_jT_j(x)z^j,$$

و نعلم أنّ [11]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_jT_j(x)z^j = \frac{1-xz-(1-2x^2)z^2}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4},$$

ومنه:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{j+1}T_j(x)z^j = \frac{1-2x^2z^2-xz^3}{1-2xz-(4x^2-3)z^2+2xz^3+z^4}.$$

### 6.2.3 الحــالة $A=\{2a_1,-2a_2\}$ ، $E=\{2e_1,-2e_2\}$

بإستبدال $a_1$ بـ $(2a_1)$ ، $a_2$ بـ $(-2a_2)$ ، $e_1$ بـ $(2e_1)$ و $e_2$ بـ $(-2e_2)$ في العلاقة (1.1) نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(2a_1+[-2a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j = \frac{4(a_1-a_2)^2+4a_1a_2+4a_1a_2(2a_1-2a_2)(2e_1-2e_2)z-4e_1e_2(4a_1a_2)^2z^2}{(1-4a_1e_1z)(1+4a_1e_2z)(1+4a_2e_1z)(1-4a_2e_2z)}. \tag{2.33}$$

- بوضع $\begin{cases} 4a_1a_2=-1 \\ a_1-a_2=x \end{cases}$ و $\begin{cases} 4e_1e_2=-1 \\ e_1-e_2=y \end{cases}$ في العلاقة (2.33) نجد:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_{j+2}(2a_1+[-2a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j = \frac{4x^2-1-4xyz+z^2}{1-4\,xyz+(4x^2+4y^2-2)z^2-4xyz^3+z^4} = \sum_{j=0}^{+\infty} U_{j+2}(x)U_j(y)z^j \quad (2.34)$$

وهي تمثل الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني.

**نتيجة 17.2:**

من أجل كل عدد طبيعي $j$ لدينا:

$$U_{j+2}(x)U_j(y)=S_{j+2}(2a_1+[-2a_2])S_j(2e_1+[-2e_2]).$$

**نظرية 6.2:[14]**

الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني المتتالية تعطى بـالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} U_{j+1}(x)U_j(y)z^j = \frac{2x-2yz}{1-4\,xyz+(4x^2+4y^2-2)z^2-4xyz^3+z^4}\ . \quad (2.35)$$

**نظرية 7.2:[14]**

الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوعين ذات الأدلة المختلفة تعطى بالعلاقة التالية.

$$\sum_{j=0}^{+\infty} T_{j+2}(x)U_j(y)z^j = \frac{-1+2x^2-2xyz+z^2}{1-4\,xyz+(4x^2+4y^2-2)z^2-4xyz^3+z^4}. \quad (2.36)$$

**نظرية 8.2: [14]**

الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول و الثاني تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} T_{j+1}(x)U_j(y)z^j = \frac{x-2yz+xz^2}{1-4\,xyz+(4x^2+4y^2-2)z^2-4xyz^3+z^4}\ . \quad (2.37)$$

**نظرية 9.2:**

الدالة المولدة الجديدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} T_{j+2}(x)T_j(y)z^j = \frac{2x^2-1-xy(4x^2-1)z+(4x^2y^2-2y^2+1)z^2-xyz^3}{1-4\,xyz+(4x^2+4y^2-2)z^2-4xyz^3+z^4}. \quad (2.38)$$

**البرهان:**

لدينا:

$$T_j(x)=S_j(e_1+[-e_2]-xS_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

و منه:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty}T_{j+2}(x)T_j(y)z^j &= \sum_{j=0}^{+\infty}(S_{j+2}(2a+[-2a_2]) \;-xS_{j+1}(2a_1+[-2a_2]))(S_j(2e_1+[-2e_2]) \;-yS_{j-1}(2e_1+[-2e_2]))z^j\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+2}(2a+[-2a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j - y\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+2}(2a+[-2a_2])S_{j-1}(2e_1+[-2e_2])z^j\\ &\quad -x\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+1}(2a_1+[-2a_2])S_j(2e_1+[-2e_2])z^j + xy\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+1}(2a_1+[-2a_2])S_{j-1}(2e_1+[-2e_2])z^j\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}U_{j+2}(x)U_j(y)z^j - \frac{y}{2(e_1+e_2)}\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+2}(2a+[-2a_2])((2e_1)^j-(2e_2)^j)z^j - x\sum_{j=0}^{+\infty}U_{j+1}(x)U_j(y)z^j\\ &\quad + xyz\sum_{j=0}^{+\infty}U_{j+2}(x)U_j(y)z^j.\end{aligned}$$

و نعلم أن[3]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}S_{j+2}(2a+[-2a_2])=\frac{4x^2-1-2xz}{1-2xz+z^2}.$$

و عليه:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}T_{j+2}(x)T_j(y)z^j=\frac{2x^2-1-xy(4x^2-1)z+(4x^2y^2-2y^2+1)z^2-xyz^3}{1-4\,xyz+\left(4x^2+4y^2-2\right)z^2-4xyz^3+z^4}. \tag{2.39}$$

وهوالمطلوب.

**نظرية 10.2:**

الدالة المولدة لجداءات كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول المتتالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}T_{j+1}(x)T_j(y)z^j=\frac{x-y(2x^2+1)z+x(2y^2+1)z^2-yz^3}{1-4\,xyz+\left(4x^2+4y^2-2\right)z^2-4xyz^3+z^4}. \tag{2.40}$$

**البرهان:**

لدينا:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} T_{j+2}(x)T_j(y)z^j = \sum_{j=0}^{+\infty}(2xT_{j+1}(x)-T_j(x))T_j(y)z^j$$
$$= 2x\sum_{j=0}^{+\infty} T_{j+1}(x)T_j(y) - \sum_{j=0}^{+\infty} T_j(x)T_j(y)z^j$$

و نعلم أن [16]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} T_j(x)T_j(y)z^j = \frac{1-3xyz+(2x^2+2y^2-1)z^2-xyz^3}{1-4\,xyz+\left(4x^2+4y^2-2\right)z^2-4xyz^3+z^4}.$$

و عليه:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} T_{j+1}(x)T_j(y)z^j = \frac{x-y(2x^2+1)z+x(2y^2+1)z^2-yz^3}{1-4\,xyz+\left(4x^2+4y^2-2\right)z^2-4xyz^3+z^4}.$$

وهوالمطلوب.

## الخاتمة

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا الفصل بحساب الدوال المولدة باستعمال التوابع التناظرية، وذلك باقتراح النظرية 1.1 بهدف الحصول على دوال مولدة جديدة و أخرى تم الحصول عليها من طرف بعض الباحثين بطرق مختلفة.

## المــــــــــــــراجع:


**[1]** A.Boussayoud, A. Abderrezzak, M. Kerada, Symmetric Functions of the $k$ -Fibonacci and Lucas, *Ars combinatorial*, (accepted).

**[2]** A.Boussayoud, N.Harrouche, Complete symmetric functions and k-Fibonacci numbers. *Commun.Appl.Anal*. 20, 457-465, 2016.

**[3]** A. Boussayoud, M.kerada, M, Boulyer, A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int.J.Pure Appl Math*. 108, 503-511, 2016.

**[4]** A. Boussayoud, M.Kerada, R.Sahali, Symmetrizing Operations on Some Orthogonal Polynomails, Int. Electron. *J. Pure Appl.Math*. 9, 191-199, 2015.

**[5]** A. Boussayoud, R.Sahali, The application of the operator $L_{b_1,b_2}^{-k}$ in the series $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j b_1^j z^j$ . *J. Adv. Res. Appl. Math*. 7, 68-75, 2015.

**[6]** A. Boussayoud, M.Kerada, Symmetric and Generating Functions, Int. Electron. *J. Pure Appl. Math*. 7, 195-203, 2014.

**[7]** A. Boussayoud, M.Kerada, R.Sahali, W.Rouibah, Some Applications on Generating Functions, *J.Concr.Appl.Math*. 12, 321-330, 2014.

**[8]** A.F Horadam, Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, *Duke Math. J*. 32, 437-446, 1965.

**[9]** A.F. Horadam, J.M. Mahon, Pell and Pell-Lucas Polynomials, *Fibonacci Quarterly*. 23, 7-20, 1985

**[10]** C. Bolat, H Kose, On the Properties of k-Fibonacci Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*. 5, 1097-1105, 2010.

**[11]** D. Foata and G-N. Han, Nombres de Fibonacci et Polynômes Orthog onaux, Leonardo Fibonacci : il tempo, le opere, l'eredità scientifica, 179-200, 1994.

**[12]** D.V Kruchinin, V.V. Kruchinin, Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials, *J. Math. Anal. Appl*. 404 , 161.171, 2013.

**[13]** I. Mezo", Several Generating Functions for second-order recurrence sequences, *J. Integer Seq*. 12, 2009.

**[14]** M.Boulyer , M. Guedjane, Les Fonctions symétriques pour la generalisation des polynomes orthogonaux, Mémoire de master, Université de jijel, 2015.

**[15]** M. Kerada, A. Boussayoud, S.Araci, Symmetric Functions of the k-Fibonacci and k-Lucas numbers, *Int. j. adv. appl. sci*. (accepted**).**

**[16]** R. Sahali, W. Rouibah, Certains Applications sur les Fonctions Symétriques, Mémoire de Master, Université de Jijel, 2013.

**[17]** S. Araci, Novel identities involving Genocchi numbers and polynomials arising from applications of umbral calculus, *Appl. Math. Comput.* 233, 599-607, 2014.

**[18]** S. Falcon, A. Plaza, On k - Fibonacci sequences and Polynomials and their derivatives, *Chaos, Sulutions & Fractals* 39, 1005-1019, 2009.

# الخـــاتمة

ختاما قمنا من خلال هذه المذكرة بحساب التوابع المولدة بإستعمال التوابع التناظرية خاصة المؤثر التناظري $\delta^{-k}_{e_1e_2}$ ، و ذلك بإقتراح نظرية في الفصل الثالث التي سمحت لنا بالحصول على الدوال المولدة لكل من أعداد $k$-فيبونـاتشي، $k$- لوكـاس،...، بالإضافة إلى جداء $k$ فيبونـاتشي مع كثيرات الحدود لفيبونـاتشي و تشيبيتشاف من النوعين.

و انطلاقا من النتائج المتوصل إليها من خلال هذه المذكرة، فإنه يمكننا الحصول على توابع مولدة جديدة كلما قمنا بتوسيع عناصر الأبجديتين $A$ و$E$.