REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohammed Seddik Ben Yahia Jijel

N° d'ordre: …..
Série : …..

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité: Mathématiques
Option: Analyse

Par

HADDAD Touma

THÈME

CONTRIBUTIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES MULTIVOQUES

Soutenue le: 04 / 07 /2017 devant le jury:

Président	: A. Bouchair	MCA	Université M. S. B de Jijel
Rapporteur	: T. Haddad	Professeur	Université M. S. B de Jijel
Examinateur	: A. Djoudi	Professeur	Université de Annaba
Examinateur	: S. Hamani	Professeur	Université de Mostaganem
Examinateur	: A. Debbouche	Professeur	Université de Guelma

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Concepts de base et résultats préliminaires **6**

1.1 Notations 6

1.2 Sous différentiel et cône normal 7

1.3 Multifonctions et continuité 8

1.4 Quelques Théorèmes du point fixe. 11

1.5 Quelques résultats de compacité 12

2 Equation différentielle multivoque gouvernée par le cône normal **14**

2.1 Introduction 14

2.2 Résultats auxiliaires 16

2.3 Résultat principal 18

2.4 Inégalité quasi-variationnelle d'évolution 24

3 Equations différentielles multivoques avec retard **26**

3.1 Introduction 26

3.2 Existence de solutions 28

3.3 Propriétés topologiques d'ensembles de solutions 36

4 Equation différentielle multivoque avec des conditions aux limites anti-périodiques **41**

4.1 Introduction 41

4.2 Résultats préliminaires 42

4.3 Existence de solutions anti-périodiques 45

4.4 Résultat d'unicité 51

4.5 Application aux équations aux dérivées partielles 54

Conclusion et perspectives **56**

Bibliographie **58**

Introduction générale

La théorie des équations différentielles multivoques est aujourd'hui bien connue. Cette théorie a été introduite dans les années quarante pour l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires et des problèmes issus de la mécanique. Aujoud'hui, cette théorie est devenue plus importante et plus attirante. Son champ d'application s'est considérablement développé, et s'est avéré fructueuse dans de nombreux domaines comme : la mécanique unilatérale, l'économie mathématique, les Sciences de l'ingénieurs (circuit électrique non régulier), etc... plus récemment, elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution, principalement celles gouvernées par le cône normal.

Cette thèse est consacrée d'une part à une étude de l'existence de solutions pour les équations différentielles multivoques associées au cône normal avec et sans retard de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(u(t)) + Au(t) + f(t) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ u(t) \in C(u(t)), \text{ pour tout } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases} \tag{1}$$

concernant le problème sans retard, où A est un opérateur linéaire bornée, f est une fonction continue uniformément bornée et le convexe C dépend de u, et

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)u) \quad \text{p.p. sur } [0,T], \\ u(t) \in C(t, u(t)), \text{ pour tout } \ t \in [0,T], \\ u(s) = \mathcal{T}(0), \quad u(s) = \varphi(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in [-\tau, 0], \\ \varphi(0) = a \in u(0,a), \end{cases} \tag{2}$$

concernant le problème avec retard, où $F : [0,T] \times \mathcal{C}_\tau \rightrightarrows H$ est une multifonction à valeurs convexes faiblement compactes. Elle établit d'autre part des résultats d'existence et d'unicité de solutions anti-périodiques d'équations différentielles multivoques d'ordre trois gouvernées par le sous différentiel d'une fonction convexe de la forme

$$\begin{cases} u'''(t) \in \partial\varphi(u'(t)) + F(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T), u''(0) = -u''(T). \end{cases} \tag{3}$$

Kunze et Marques (voir[39]), ont fait une étude originale pour l'équation différentielle multivoque (1) avec $A \equiv 0$ et $f \equiv 0$ en utilisant un algorithme de projection implicite. Cette étude à été généralisé par Castaing, C, Ibrahim, A.G. et Yarou, M (voir[18]). Ils ont prouvé un résultat d'existence pour le problème avec retard (2) via un algorithme de projection implicite basé sur un théorème du point fixe en supposant que la multifonction F est scalairement semi-continue supérieurement à valeurs non vide convexes faiblement compactes dans un espace de Hilbert.

Dans [3] A. R. Aftabizadeh, Y. K. Huang et N.H. Pavel ont introduit et ont étudié l'équation différentielle multivoque (3) avec $F(t, u(t)) = \{f(t)\}$ où φ est une fonction convexe paire et semi-continue inférieurement. Ils ont établi un résultat d'existence et d'unicité en utilisant la théorie des opérateurs maximaux monotones.

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Le premier est consacré à des notions de bases et quelques résultats auxiliaires que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Dans le chapitre 2, on donne un résultat d'existence de solutions de l'équation différentielle multivoque (1) dans le cadre de dimension infinie et en supposant que A est un opérateur linéaire borné, f est une fonction continue uniformément bornée et le convexe C dépend de l'état u. Ce résultat repose sur l'utilisation d'un nouvel algorithme de projection semi-implicite. Après, on présente une application du théorème d'existence pour démontrer l'existence de solutions pour une classe d'inégalité quasi-variationnelle d'évolution.

Le but du chapitre 3 est double. Le premier est de montrer un résultat d'existence pour l'équation différentielle multivoque avec retard (2). On développe une technique de discrétisation basée sur un algorithme de projection. Cette étude donne une nouvelle preuve pour l'existence de solutions de (2) différente à celle donnée dans [18] (sans utiliser un théorème du point fixe). Le deuxième objectif est de tirer du résultat d'existence précédent des propriétés topologiques d'ensembles de solutions pour le problème (2).

Enfin dans le chapitre 4, on développe des méthodes de résolutions du problème (3). L'objectif de la section 2, est l'étude de l'existence de solutions anti-périodique pour le problème (3) où F est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs convexes et dépend de l'état u. Cette étude généralise le résultat de A. R. Aftabizadeh, Y. K. Huang et N.H. Pavel (voir [3]).
Dans la troisième section, on donne un résultat d'existence et d'unicité d'une solution anti-périodique pour (3) dans le cas où la perturbation F est univoque. Nous terminons ce chapitre par une application aux équations aux dérivées partielles, où sera utilisé le résultat d'existence et d'unicité démontré dans la section précédente.

Une partie du chapitre 3 et le chapitre 4 font l'objet des articles [30] et [32] parus dans Electronic Journal of Differential Equations et Journal of Nonlinear Sciences and Applications. Les résultats du chapitre 2 ont été publiés dans Springer Proceedings in Mathematics and Statistics [31]. Une autre partie du chapitre 3 a été l'objet d'un article accepté dans Applicable Analysis [33].

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les multifonctions (multi-application), des théorèmes du point fixe, des théorèmes principaux concernant la convergence et la compacité.

1.1 Notations

Soit H un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la norme associée $\|\cdot\|$.

On note par

- $\overline{\mathbb{B}}$ ou $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ la boule unité fermée de H.

- Si A est un sous ensemle de H alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.

- coA l'enveloppe convexe de A.

-$\mathcal{L}([0,T])$ σ-algèbre de Lebesgue sur $[0,T]$.

-$\mathcal{B}(X)$ La tribu de Borel, la plus petit tribu contenant la topologie de E.

-$\delta(\cdot, A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- La fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$ appelée aussi fonction support de A, est la fonction $\delta^*(\cdot, A)$, définie sur H par

$$\delta^*(\xi, A) = \sup_{x \in A} \langle \xi, x \rangle \,, \ \ \forall \xi \in H.$$

Soit S un sous ensemble fermé de H.

On note par $d_S(\cdot)$, la fonction distance au sous ensemble S, i.e.,

$$d_S(x) := \inf_{u \in S} \|x - u\| \,, \forall x \in H.$$

On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour tout $x \in H$

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

1.2 Sous différentiel et cône normal

Donnons dans ce qui suit quelques définitions. Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i), et soit x un point de H où f est finie.

- Le sous différentiel de f au sens d'analyse convexe au point x est définie par

$$\partial f(x) = \{\xi \in H : \ \langle \xi, h - x \rangle \leq f(h) - f(x), \forall h \in H\}.$$

Soit A un sous ensemble convexe fermé de H.

On note par :

- $Proj_A(x)$, la projection de $x \in H$ sur A, définie par

$$y = Proj_A(x) \Leftrightarrow y \in A \text{ et } \ \langle x - y, y - a \rangle \geq 0, \, \forall a \in A \Leftrightarrow d_A(x) = \|x - y\| \,.$$

avec

$$d_A(x) := \inf_{a \in A} \|x - a\|,$$

est la distance du point x à l'ensemble A.

- $N_A(y)$, le cône normal à A au point y (il s'agit du cône des normales sortantes), définie

par

$$\xi \in N_A(y) \Leftrightarrow y \in A \text{ et } \langle \xi, y \rangle = \delta^*(\xi, A) \Leftrightarrow y \in A \text{ et } \xi \in \partial\delta(y, A),$$

et nous avons

$$y = Proj_A(x) \Leftrightarrow x - y \in N_A(y).$$

1.3 Multifonctions et continuité

Définition 1.1 *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d_B(a),$$

avec

$$d_B(a) = \inf_{b \in B} d(a, b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires :

1) $e(A, \varnothing) = \infty$ si $A \neq \varnothing$,

2) $e(\varnothing, B) = 0$,

3) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,

4) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$, C un sous ensemble de X,

5) $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

6) $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$.

- Si $A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, alors

$$A = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}.$$

Rappelons que la $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$, c'est à dire l'ensemble des limites des suites $(x_{\acute{n}})$ telles que $x_{\acute{n}} \in A_{\acute{n}}$.

Définition 1.2 *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multifonction (ou multi-application) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*

Le domaine, le graphe et l'image de la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X / F(x) \neq \varnothing\},$$

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y /\ x \in D(F), y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{x\in D(F)} F(x).$$

$$\text{Si } A \subset X \text{ alors } F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x).$$

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction définie entre deux espaces topologiques X et Y.

Définition 1.3 *:*
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ Une multifonction. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant

$$f(x) \in F(x), \forall x \in X.$$

Théorème 1.1 *(Théorème d'existence de sélections mesurables) (Voir [21]).*
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multifonction $\Sigma-$mesurable à valeurs fermées.
Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Définition 1.4 *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V, \forall x \in U$.*
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Enonçons les propriétés suivantes, et pour plus de détails on peut se référer à [8].

(1) Le graphe d'une multifonction s.c.s à valeurs fermées est fermé. Donc si F est s.c.s à valeurs fermées, $\limsup_{\acute{x}\to x} F(\acute{x}) \subset F(x)$.

(2) Si Y est compact, F à valeurs compactes et $gph(F)$ est fermé dans $X \times Y$ alors F est s.c.s.

(3) Soient H un espace de Hilbert réel séparable et $F : H \rightrightarrows H$ à valeurs convexes faiblement compactes. On dit que F est scalairement s.c.s si pour tout y dans H, $\delta^*(\xi, F(\cdot))$ est s.c.s. Si F est s.c.s alors F est scalairement s.c.s.

Définition 1.5 *On dit que F est semi-continue inférieuremnet (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(U) \cap V \neq \varnothing$.*
On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Définition 1.6 *([21])*
La multifonction $F : X \rightrightarrows H$ convexe faiblement compact définie sur l'espace topologique X est scalairement semi-continue supérieurement si pour chaque $x \in H$, la fonction scalaire $\delta^*(x, F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur X .

Définition 1.7 *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est continue (resp. lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$), si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$\lim_{\acute{x}\to x} \mathcal{H}(F(x), F(\acute{x})) = 0$$

(resp. pour tous $x, \acute{x} \in X$ nous avons

$$\mathcal{H}(F(x), F(\acute{x})) \leq \lambda d_X(x, \acute{x})).$$

$\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff et d_X la métrique de X.

Rappelons la définition d'une fonction absolument continue.

Définition 1.8 *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to H$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$$

Théorème 1.2 *Une fonction $f : [a, b] \to H$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, c'est à dire*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse. Nous terminons cette section par l'énoncé d'un théorème de fermeture pour les multifonction s.c.s.

Théorème 1.3 *(Théorème VI.4 Chap 3 [21]).*
Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multifonction définie sur $[0, T] \times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0, T]$ fixé, $\Phi(t, \cdot)$ est s.c.s. Soient (x_n), x des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans E.
Supposons que
a) $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, *p.p sur* $[0, T]$,
b) (y_n) *converge vers* y $\sigma(L^1([0, T], E), L^\infty([0, T], E))$,
c) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$, *p.p sur* $[0, T]$.
Alors $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, *p.p sur* $[0, T]$.

1.4 Quelques Théorèmes du point fixe.

On donne dans cette section quelques Théorèmes du point fixe qui nous seront utiles dans les démonstrations de nos Théorèmes d'existence. (Voir [38]).

Théorème 1.4 *(Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan).*
Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multifonction s.c.s à valeurs non vides convexes fermées. Alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.

Le corollaire suivant du Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan nous donne la forme faible de ce dernier.

Théorème 1.5 *:*
Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multifonction faiblement-faiblement s.c.s et à valeurs non vides convexes faiblement compactes. Alors F admet un point fixe dans S.

1.5 Quelques résultats de compacité

Théorème 1.6 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà) (voir [24])*
Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathbf{C}(J,Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec

$$H(x) = \{f(x) / \quad f \in H\}.$$

Le Théorème suivant est une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.7 *(Théorème 4 chap 2 [8])*
Soient J un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes
1) $\forall t \in J$, *$(f_n(t))$ est un sous ensemble relativement compact de E,*
2) *il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_E(J)$ telle que*

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t), p.p\, sur J.$$

Alors il existe une sous suite de (f_n) (qu'on note aussi (f_n)) qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to E$ au sens suivant

a) *(f_n) converge uniformément ver f,*

b) *$(\dot{f}_n)$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $L^1_E(J)$, c'est à dire $(\dot{f}_n)$ converge vers $\dot{f}$ $\sigma(L^1_E, L^\infty_E)$.*

Théorème 1.8 *(Théorème de Mazur)([21]).*
Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Théorème 1.9 *(Théorème de Banach-Mazur)([21]).*
Soit E un espace de Banach réel. Soit $(x_n) \subset E$ et $x \in E$ tel que $x_n \to x$ faiblement dans E, quand $n \to \infty$. On pose $C_n = co\{x_m, m \geq n\}$(c'est à dire l'ensemble des combinaisons convexes des $x_m, m \geq n$). Alors, nous avons
i) *$x \in \overline{C_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
ii) *Il existe $(y_n) \subset E$ telle que $y_n \in co\{x_m, m \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y_n \to x$ quand $n \to \infty$.*

Chapitre 2

Equation différentielle multivoque gouvernée par le cône normal

2.1 Introduction

Les outils de l'analyse non lisse (non différentiable) interviennent dans de nombreuses applications de l'analyse variationnelle, notamment l'étude des équations différentielles multivoques où apparaît un cône normal, problèmes connus sous le nom de processus de rafle ou processus de rafle perturbé.

L'équation différentielle multivoque du processus de rafle se présente sous la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ u(t) \in C(t), \text{ pour tout } \ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

et le processus de rafle perturbé correspond à

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(t, u(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ u(t) \in C(t), \text{ pour tout } \ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

J.J. Moreau [40] a étudié le problème de rafle lorsque l'ensemble C dépend de t. Plusieurs extensions du processus de rafle ont été faites (voir par exemple [1, 9, 10, 18, 27, 28, 29, 34, 39, 41]).

Dans [39], Kunze et Monteiro Marques ont étudié l'existence de solutions pour l'équation différentielle multivoque suivante

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ u(t) \in C(t,u(t)), \text{ pour tout } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0,u_0), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $C : [0,T] \rightrightarrows H$ est une multifonction de $[0,T]$ ($T > 0$) à valeurs convexes fermées dans l'espace de Hilbert H. $N_{C(t,u(t))}(\cdot)$ dénotes le cône normal, au sens d'analyse convexe, à $C(t,u(t))$ au point $u(t)$. Le problème (2.1) s'appelle processus de rafle avec contrainte sur l'état (state dependent sweeping process en anglais) du premier ordre.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une classe des équations différentielles multivoques de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(u(t)) + Au(t) + f(t) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ u(t) \in C(u(t)), \text{ pour tout } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases} \tag{2.2}$$

où A est un opérateur linéaire bornée, f est une fonction continue uniformément bornée et le convexe C dépend de u.

Le problème (2.2) inclut comme un cas spécial l'inégalité quasi-variationnelle d'évolution suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : I \to H, u(0) = u_0 \in C(u_0), \\ \text{tel que } u(t) \in C(u(t)) \quad \text{pour tout } t \in [0,T], \\ \langle l(t), w - u(t)\rangle \leq \langle \dot{u}(t), w - u(t)\rangle + a(u(t), w - u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0,T] \end{cases} \tag{2.3}$$

pour tout $w \in C(u(t))$,

où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, bornée et elliptique sur $H \times H$; $l \in W^{1,2}([0,T];H)$ et $C(u) \subset H$ est l'ensemble des contraintes. L'inégalité variationnelle de type (2.3) modélise l'évolution des systèmes elasto plastique (voir [25]).

2.2 Résultats auxiliaires

Nous rappellons maintenant des résultats concernant le sous différentiel de la fonction distance à un ensemble S dont nous aurons besoin pour la suite(voir [10, 45]).

Proposition 2.1 *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H et $x \in S$. Alors*

$$\partial d_S(x) = N_S(x) \cap \overline{\mathbb{B}}.$$

Proposition 2.2 *Soit $C : H \rightrightarrows H$ une multifonction Hausdorff-continue à valeurs non vide fermées convexes. Alors la fonction*

$$(x,y) \mapsto \partial d_{C(x)}(y)$$

est à valeurs fermées convexes satisfaisant la propriété de la semi-continuité supérieure suivantes :
Soit (x_n) une suite dans H convergeant vers $x \in H$, et (y_n) une suite dans H avec $y_n \in C(x_n)$ pour tout n, convergeant vers $y \in C(x)$, alors pour chaque $\xi \in H$, nous avons

$$\limsup_n \delta^*(\partial d_{C(x_n)}(y_n),\xi)) \leq \delta^*(\partial d_{C(x)}(y),\xi),$$

où

$$\delta^*(\partial d_{C(x)}(y),\xi) := \sup_{p\in\partial d_{C(x)}(y)} \langle p,\xi\rangle$$

représente la fonction support de $\partial d_{C(x)}(y)$ à ξ.

Maintenant, soit B un ensemble borné d'un espace normé $\mathbb{E}$, alors la mesure de noncompacité de Kuratowski de B, $\alpha(B)$, est définie par

$$\alpha(B) = \inf\{d > 0 : B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i \text{ pour certain } m \text{ et } B_i \text{ avec } diam(B_i) \leq d\}.$$

Ici $diam(A)$ étant le diamètre de A donné par $diam(A) := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$. Dans le lemme suivant nous rappelons (voir Proposition 9.1 dans [23]) des propriétés utiles pour la mesure de noncompacité α.

Lemme 2.1 *Soient H un espace de Banach réel de dimension infinie et D_1, D_2 deux sous-ensembles bornés de H.*
(i) $\alpha(D_1) = 0 \Longleftrightarrow D_1$ *est relativement compact ;*
(ii) $\alpha(\lambda D_1) = |\lambda| \, \alpha(D_1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *;*
(iii) $D_1 \subset D_2 \Longrightarrow \alpha(D_1) \leq \alpha(D_2)$ *;*
(iv) $\alpha(D_1 + D_2) \leq \alpha(D_1) + \alpha(D_2)$ *;*
(iv) *Si $x_0 \in H$ et r est un nombre réel positif alors $\alpha(x_0 + r\mathbb{B}) = 2r$.*

2.3 Résultat principal

Le but principal de cette section et de donner une nouvelle démonstration pour l'existence de solutions de (2.2) différente à celle donné dans [18]. La différence consiste sur la proposition d'un nouvel algorithme de projection explicite qui converge vers la solution du problème (2.2).

Théorème 2.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $C : H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides fermées convexes satisfaisant les hypothèses suivantes*
($\mathcal{H}_1$) *C est lipschitz-continue de rapport $0 < L < 1$, c-à-d, pour tous $x, u, v \in H$ nous avons*

$$|d_{C(u)}(x) - d_{C(v)}(x)| \leq L\|u - v\|;$$

($\mathcal{H}_2$) *il existe un ensemble fortement compact S tel que $C(u) \subset S$ pour tout $u \in H$. Soient $A : H \to H$ un opérateur linéaire borné et $f : [0, T] \to H$ une fonction continue uniformément bornée, c-à-d, il existe $\beta > 0$ tel que $\|f(t)\| \leq \beta$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors pour chaque $u_0 \in C(u_0)$, il existe au moins une solution lipschitzienne pour (2.2).*

Preuve.

La démonstration se fait en trois étapes.

Etape 1. *Construction des suites approximantes :*

Soit $\rho > 0$ tel que $C(u) \subset S \subset \rho\mathbb{B}$ pour tout $u \in H$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition suivante de l'intervalle $I := [0, T]$

$$I_{i+1}^n :=]t_i^n, t_{i+1}^n], \quad t_i^n := i\mu_n, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad I_0^n := \{t_0^n\}.$$

Algorithme 1. Posons $\mu_n := \frac{T}{n}$. Fixons $n \geq 2$. On définit par induction

- $u_0^n = u_0 \in C(u_0)$, et $f_0^n = f(t_0^n)$;
- $0 \leq i \leq n-1 : u_{i+1}^n = \text{Proj}_{C(u_i^n)}(u_i^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n)$;
- $f_{i+1}^n = f(t_{i+1}^n)$.

La convexité et la fermeture de C assurent l'existence de la projection, et donc l'algorithme est bien défini.

Maintenant, nous utilisons les suites discretes (u_i^n) et (f_i^n) pour construire les suites de fonctions u_n et f_n de $[0,T]$ à H en prenant leurs restrictions sur chaque intervalle I_i^n comme suit :

Pour $t \in I_0^n$, posons $f_n(t) = f_0^n$ et $u_n(t) = u_0$;

pour $t \in I_{i+1}^n$ $(0 \leq i \leq n-1)$, posons $f_n(t) = f_i^n$, et

$$u_n(t) = u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\frac{(t - t_i^n)}{\mu_n} \tag{2.4}$$

C'est clair par construction que l'application u_n est continue sur $[0,T]$ et donc différentiable sur $[0,T]\backslash\{t_i^n\}$ avec

$$\dot{u}_n(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n}, \quad \forall t \in [0,T]\backslash\{t_i^n\}. \tag{2.5}$$

Par l'Algorithm 1, nous avons

$$u_{i+1}^n = \mathrm{Proj}_{C(u_i^n)}(u_i^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n),$$

et donc par la caractérisation du cône normal, on obtient, pour p.p. $t \in [0,T]$

$$u_i^n - u_{i+1}^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n \in N_{C(u_i^n)}(u_{i+1}^n),$$

or

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n} - A u_i^n - f_i^n \in N_{C(u_i^n)}(u_{i+1}^n). \tag{2.6}$$

On cherche une estimation pour l'expression $\| -\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n} - A u_i^n - f_i^n \|$.

Maintenant, pour $i \geq 0$, nous avons par l'Algorithme 1

$$\|f_i^n\| \leq \beta \text{ et } u_{i+1}^n \in C(u_i^n) \subset \rho\mathbb{B},$$

donc

$$\|u_i^n\| \leq \rho.$$

Le comportement lipschitzien de C donne

$$\begin{aligned} \|u_i^n - u_{i+1}^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n\| &= d_{C(u_i^n)}(u_i^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n) \\ &\leq d_{C(u_i^n)}(u_i^n) - d_{C(u_{i-1}^n)}(u_i^n) + \mu_n\|A\|\|u_i^n\| + \mu_n\|f_i^n\| \\ &\leq L\|u_i^n - u_{i-1}^n\| + \mu_n(\rho\|A\| + \beta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|u_i^n - u_{i-1}^n\| &= \|u_i^n - u_{i-1}^n + \mu_n A u_{i-1}^n + \mu_n f_{i-1}^n - \mu_n A u_{i-1}^n - \mu_n f_{i-1}^n\| \\ &\leq \|u_{i-1}^n - u_i^n - \mu_n A u_{i-1}^n - \mu_n f_{i-1}^n\| + \mu_n\|A\|\|u_{i-1}^n\| + \mu_n\|f_{i-1}^n\| \\ &= d_{C(u_{i-1}^n)}(u_{i-1}^n - \mu_n A u_{i-1}^n - \mu_n f_{i-1}^n) + \mu_n\|A\|\|u_{i-1}^n\| + \mu_n\|f_{i-1}^n\| \\ &\leq d_{C(u_{i-1}^n)}(u_{i-1}^n) - d_{C(u_{i-2}^n)}(u_{i-1}^n) + 2\mu_n\|A\|\|u_{i-1}^n\| + 2\mu_n\|f_{i-1}^n\| \\ &\leq L\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| + 2\mu_n(\rho\|A\| + \beta). \end{aligned}$$

Par induction nous avons

$$\begin{aligned} \|u_i^n - u_{i-1}^n\| &\leq 2\mu_n(\rho\|A\| + \beta) + L\Big(2\mu_n\|A\|\rho + 2\mu_n\beta + L\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\|\Big) \\ &= 2\mu_n(\rho\|A\| + \beta)\big(1 + L\big) + L^2\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\| \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\leq 2\mu_n(\rho\|A\| + \beta)\big(1 + L + L^2 + \cdots + L^{i-2}\big) + L^{i-1}\|u_1^n - u_0^n\|. \end{aligned}$$

La condition initial $u_0 \in C(u_0)$, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \|u_1^n - u_0^n\| &\leq \|u_0^n - u_1^n - \mu_n A u_0^n - \mu_n f_0^n\| + \mu_n\|A\|\|u_0^n\| + \mu_n\|f_0^n\| \\ &\leq d_{C(u_0^n)}(u_0^n - \mu_n A u_0^n - \mu_n f_0^n) + \mu_n\|A\|\rho + \mu_n\beta \\ &\leq d_{C(u_0^n)}(u_0^n) + 2\mu_n\|A\|\rho + 2\mu_n\beta \\ &= 2\mu_n(\rho\|A\| + \beta). \end{aligned}$$

Il résulte

$$\|u_i^n - u_{i-1}^n\| \;\leq\; 2\mu_n(\rho\|A\| + \beta)\big(1 + L + L^2 + \cdots + L^{i-1}\big). \tag{2.8}$$

Par conséquent (2.7) et (2.8) impliquent

$$\|u_i^n - u_{i+1}^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n\| \;\leq\; \mu_n(2\rho\|A\| + 2\beta)\big(1 + L + L^2 + \cdots + L^i\big).$$

Maintenant, nous utilisons le fait que $L < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|u_i^n - u_{i+1}^n - \mu_n A u_i^n - \mu_n f_i^n\| \;&\leq\; \mu_n(2\rho\|A\| + 2\beta)\big(\tfrac{1-L^{i+1}}{1-L}\big)\\ &\leq\; \left(\tfrac{2\|A\|\rho+2\beta}{1-L}\right)\mu_n,\end{aligned}$$

or

$$\| - \tfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n} - A u_i^n - f_i^n\| \;\leq\; \left(\tfrac{2\|A\|\rho+2\beta}{1-L}\right). \tag{2.9}$$

L'inclusion (2.6) et la proposition 2.1 donnent

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n} - A u_i^n - f_i^n \in \left(\frac{2\|A\|\rho + 2\beta}{1-L}\right)\partial d_{C(u_i^n)}(u_{i+1}^n). \tag{2.10}$$

Maintenant, soient θ_n, η_n définies de $[0,T]$ vers $[0,T]$ par

$$\begin{aligned}&\theta_n(t) = t_i^n; && t \in I_{i+1}^n,\\ &\eta_n(t) = t_{i+1}^n; && t \in I_{i+1}^n,\\ &\theta_n(0) = \eta_n(0) = 0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Alors on obtient par (2.4), (2.5), (2.10) et (2.11)

$$-\dot{u}_n(t) - A u_n(\theta_n(t)) - f_n(t) \in \left(\frac{2\|A\|\rho + 2\beta}{1-L}\right)\partial d_{C(u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\eta_n(t))) \text{ p.p. sur } [0,T]. \tag{2.12}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n(t) = t$, la continuité de f assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\theta_n(t)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$ uniformément sur $[0,T]$.

Etape 2. *Convergence des suites :*

Nous allons montrer que la suite (u_n) admet une sous-suite convergente.

(2.5) et (2.9) donnent

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \left(\frac{2\|A\|\rho + 2\beta}{1-L}\right) + \|A\|\rho + \beta := \gamma, \tag{2.13}$$

et c'est clair que la suite $(u_n(t))$ est équi-Lipschitzienne avec la constante γ. Maintenant nous montrons que pour tout $t \in [0,T]$ l'ensemble $\mathcal{X}(t) = \{u_n(t)|n \geq 2\}$ est relativement compacte dans H. De la définition de (u_n) nous avons pour tout $t \in [0,T]$ et pour $n \geq 2$, $u_n(\eta_n(t)) \in C(u_n(\theta_n(t))) \subset S$. Par conséquent l'ensemble $\{u_n(\eta_n(t))|n \geq 2\}$ est relativement compact dans H pour tout $t \in [0,T]$, et par le lemme 2.1 on obtient

$$\alpha(u_n(\eta_n(t))|n \geq 2\}) = 0.$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on a $\mathcal{X}(t) = \{u_n(t)|n \geq 2\} = \{u_n(t) - u_n(\eta_n(t)) + u_n(\eta_n(t))|n \geq 2\}$, alors le lemme 2.1 donne

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{X}(t)) &\leq \alpha(\{u_n(t) - u_n(\eta_n(t))|n \geq 2\}) + \alpha(\{u_n(\eta_n(t))|n \geq 2\}) \\
&\leq \alpha\left(\left\{\int_t^{\eta_n(t)} \dot{u}_n(s)ds|n \geq 2\right\}\right) + 0 \\
&\leq \alpha\left(B\left(0, \frac{T}{n}\gamma\right)\right) \\
&= 2\gamma\frac{T}{n} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{X}(t)$ est fortement relativement compacte dans H.

Alors les hypothèses du théorème1.6 sont satisfaites et donc, il existe une application Lipschitzienne $u : [0,T] \to H$ de rapport γ telle que

- (u_n) converge uniformément vers u sur $[0,T]$, c-à-d, $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\| = 0$;
- $(\dot{u}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^1([0,T], H)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n(t) = t$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n(\theta_n(t)) &= \lim_{n\to+\infty} u_n(\eta_n(t)) \\
= \lim_{n\to+\infty} u_n(t) &= u(t)
\end{aligned}$$

uniformément sur $[0,T]$.

Maintenant, le caractère Lipschitzien de C et le fait que

$u_n(\eta_n(t)) \in C(u_n(\theta_n(t)))$, $\forall t \in [0,T]$, pour tout $n \geq 2$, donnent

$$\begin{aligned}
d(u(t), C(u(t))) &= d_{C(u(t))}(u(t)) - d_{C(u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\eta_n(t))) \\
&\leq \|u_n(\eta_n(t)) - u(t)\| + L\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \\
&\leq (1+L)\|u_n - u\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

La fermeture de l'ensemble $C(u(t))$ assure que $u(t) \in C(u(t))$ pour tout $t \in [0,T]$.

Etape 3. *Existence de solutions :*

Maintenant nous allons prouver que

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(u(t)) + A(u(t)) + f(t) \quad \text{pour presque tout } t \in [0,T].$$

Appliquons la technique de Castaing (voir par exemple [13]).

La convergence uniforme de u_n vers u, la convergence faible de $\dot{u}_n$ vers $\dot{u}$ dans $L^1([0,T],H)$, et la convergence uniforme de f_n vers f, assurent par le lemme de Mazur que pour presque tout $t \in [0,T]$

$$-\dot{u}(t) - Au(t) - f(t) \in \bigcap_n \overline{\text{co}}\{-\dot{u}_k(t) - A(u_k(t)) - f_k(t) | k \geq n\}.$$

Fixons un tel $t \in [0,T]$ et pour chaque $\xi \in H$, la dernière relation donne

$$\langle \xi, -\dot{u}(t) - Au(t) - f(t)\rangle \leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle \xi, -\dot{u}_k(t) - A(u_k(t)) - f_k(t)\rangle.$$

De (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \xi, -\dot{u}(t) - Au(t) - f(t)\rangle &\leq \limsup_n \delta^*\Big(\Big(\frac{2\|A\|\rho + 2\beta}{1-L}\Big)\partial d_{C(u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\eta_n(t))), \xi\Big) \\
&\leq \delta^*\Big(\Big(\frac{2\|A\|\rho + 2\beta}{1-L}\Big)\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)), \xi\Big).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle de la Proposition 2.2.

D'autre part, on sait que $\partial d_{C(u(t))}(u(t))$ est un convexe fermé (Voir Proposition 2.2) et donc la dernière inégalité donne

$$-\dot{u}(t) - Au(t) - f(t) \in \Big(\frac{2\|A\|\rho + 2\beta}{1-L}\Big)\partial d_{C(u(t))}(u(t)) \subset N_{C(u(t))}(u(t)),$$

puisque $u(t) \in C(u(t))$. Ainsi,

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(u(t)) + Au(t) + f(t) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]$$

ce qui complète la démonstration.

□

2.4 Inégalité quasi-variationnelle d'évolution

Comme une application directe de notre théorème principal nous obtenons un résultat d'existence pour l'inégalité quasi-variationnelle d'évolution (voir [25]) :

Trouver $u : I \to H, u(0) = u_0 \in C(u_0)$, tel que $u(t) \in C(u(t))$ pour tout $t \in [0,T]$, et

$$\langle l(t), w - u(t)\rangle \leq \langle \dot{u}(t), w - u(t)\rangle + a(u(t), w - u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0,T] \tag{2.14}$$

pour tout $w \in C(u(t))$,

où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, bornée et elliptique sur $H \times H$, $l \in W^{1,2}((0,T);H)$ et $C(u) \subset H$ est l'ensemble des contraintes.

Proposition 2.3 *Supposons que $C : H \rightrightarrows H$ est Lipschitz-continue de rapport $0 < L < 1$ à valeurs non vides convexes tel que $C(u) \subset S$ pour tout $u \in H$ pour un ensemble fortement compact $S \subset H$. Supposons que l est uniformément borné, i.e., il existe $\beta > 0$ tel que $\|l(t)\| \leq \beta$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors, pour chaque $u_0 \in C(u_0)$, il existe au moins une solution lipschitzienne de (2.14).*

Preuve.

Soit A un opérateur linéaire borné sur H associé avec $a(\cdot,\cdot)$, c-à-d, $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ pour tout $u, v \in H$. Posons $f(t) = -l(t)$, pour tout $t \in [0,T]$. Comme C est à valeurs convexes, l'inégalité quasi-variationnelle de type (2.14) peut être réecrit sous la forme (2.2) comme suit :

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + Au(t) + f(t) \quad \text{p.p. sur } [0,T],$$

avec $u(0) = u_0 \in C(u_0)$.

Par l'injection $W^{1,2}((0,T);H) \hookrightarrow C((0,T);H)$, on conclut que f est continue.

Par conséquent toutes les conditions du Théorème 2.1 sont vérifiées et donc la démonstration est complète.

$\square$

Chapitre 3

Equations différentielles multivoques avec retard

3.1 Introduction

Les équations différentielles multivoques avec retard (mémoire) sont des équations différentielles multivaluées où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Si une équation différentielle multivoque exprime qu'à tout instant, la vélocité du système dépend de son état à tout instant, les équations différentielles multivoques avec retard expriment que la vélocité dépend non seulement de l'état du système à cet instant mais aussi de l'histoire de la trajectoire j'usqu'à cet instant. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [8].

Dans la suite, H est un espase de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont la norme associée et notée $\| \cdot \|$, I est un interval de $\mathbb{R}$ et τ un scalaire positif. On note par $\mathcal{C}(I, H)$ l'espace de Banach des fonctions continues de I dans l'espace de Hilbert H. On introduit pour tout $T > 0$ et $\tau > 0$, l'espace de Banach $\mathcal{C}([-\tau, 0])$, muni de la norme $\|\varphi\|_\tau := \max\limits_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\|$.

Pour $T > 0$, $x \in \mathcal{C}([\tau, T], H)$ et pour chaque $t \in [0, T]$, on définit la fonction $\mathcal{T}(t)$ de

$\mathcal{C}([-\tau, T], H)$ dans $\mathcal{C}_\tau$ comme suit

$$\mathcal{T}(t)x := (x)_t,\ (x)_t(s) = x(t+s), \quad \text{pour tout } s \in [-\tau, 0].$$

$\mathcal{T}(t)x$ représente l'historique de l'état de l'instant $t - \tau$ j'usqu'à l'instant présent t.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la question d'existence de solutions pour l'équation différentielle multivoque gouvernée par le cône normal :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)u) \quad \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(t) \in C(t, u(t)),\ \text{pour tout } \ t \in [0, T], \\ u(s) = \mathcal{T}(0)u(s) = \varphi(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in [-\tau, 0], \\ \varphi(0) = a \in C(0, a), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une multifonction à valeurs convexes dans l'espace de Hilbert H et $F : [0, T] \times \mathcal{C}_\tau \rightrightarrows H$ est une multifonction à valeurs convexes faiblement compactes. On note par $N_{C(t,u(t))}(u(t))$ le cône normal convexe à $C(t, u(t))$ au point $u(t)$.

Les problèmes avec retard dont la perturbation est semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes ont été étudiés dans le cas où C ne dépend pas de l'état $u \in H$ par plusieur auteurs (voir [19, 20, 26, 46]).

Récemment, dans [18], les auteurs ont obtenu un résultat d'existence pour (3.1) (i.e C dépend du temp $t \in [0, T]$ et de l'état $u \in H$) via une technique de discrétisation implicite basée sur un Théorème du point fixe.

L'objectif de ce chapitre est de prouver un résultat d'existence de solutions pour le problème avec retard (3.1) sans passer par le point fixe. Ensuite, on applique ce résultat d'existence pour déduire les propriétés topologiques d'ensembles de solutions.

Le problème (3.1) est motivé par quelques applications dans l'économie, mécaniques et la théorie du contrôle (voir [2, 15, 17, 35, 37, 40, 41]).

3.2 Existence de solutions

Le théorème d'existence suivant établit notre premier résultat dans ce chapitre. Le résultat est prouvé en montrant qu'un nouvel algorithme de projection explicite converge vers la solution de (3.1).

Théorème 3.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $C : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides fermées convexes satisfaisant les hypothèses suivantes*
$(\mathcal{H}_1)$ C est lipschitz continue de rapport $L_1 \geq 0$ et $0 < L_2 < 1$, c-à-d, pour tous $t, s \in [0,T]$ et $x, u, v \in H$ nous avons

$$|d_{C(t,u)}(x) - d_{C(s,v)}(x)| \leq L_1|t-s| + L_2\|u-v\|;$$

$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout sous ensemble borné $A \subset H$, l'ensemble $C([0,T] \times A)$ est une boule compacte, c-à-d, l'intersection de $C([0,T] \times A)$ avec toute boule fermée de H est relativement compacte dans H.
Soit $F : [0,T] \times \mathcal{C}_\tau \rightrightarrows H$ une multifonction scalairement semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes faiblement compactes dans H telle que $F(t,\varphi) \subset \overline{\mathbb{B}}(0,L)$ pour tous $(t,\varphi) \in [0,T] \times \mathcal{C}_\tau$, pour un certain $L > 0$.
Alors, pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_\tau$ avec $\varphi(0) = u_0 \in C(0,u_0)$, il existe une application continue $u : [-\tau, T] \to H$ telle que :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u(t) = \mathcal{T}(0)u(t) = \varphi(t) \quad \textit{sur } [-\tau, 0], \\ u(t) = u_0 + \int\limits_0^t \dot{u}(s)ds, \ \forall t \in [0,T], \\ \textit{avec} \quad \dot{u} \in L^\infty_H([0,T]) \quad \textit{et} \quad u(t) \in C(t,u(t)) \quad \textit{pour tout } \ t \in [0,T], \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,\mathcal{T}(t)u) \quad \textit{p.p. sur } [0,T]. \end{cases}$$

Preuve.

On raisonne par discrétisation :

On définit la suite des applications continues (u_n) dans $\mathcal{C}([-\tau,T],H)$ telles qu'il existe une sous suite de (u_n) converge uniformément dans $[-\tau,T]$ vers une solution de $(\mathcal{P})$. La suite est définie via un nouvel algorithme de projection.

La démonstration se fait en trois étapes.

Etape 1. *Construction des suites approximantes :*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition suivante de $I := [0,T]$ par les points

$$t_i^n = i\mu_n;\ 0 \leq i \leq n-1, \mu_n := \frac{T}{n}.$$

On pose

$$T(0)u_n := \varphi \quad \text{sur} \quad [-\tau, 0]. \tag{3.2}$$

Soit $f : [0,T] \times \mathcal{C}_\tau \longrightarrow H$ une selection scalaire $\mathcal{B}([0,T] \times \mathcal{C}_\tau)$-mesurable de F.

Soit $u_0^n = u_0 = \varphi(0) \in C(t_0^n, u_0), t \in [t_0^n, t_1^n]$, posons

$$u_1^n = Proj_{C(t_1^n, u_0^n)}\Big(u_0^n - \mu_n f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n)\Big).$$

La convexité et la fermeture de C assurent l'existence et l'unicité de la projection.

Ici $\mathcal{T}(t_0^n)u_n := (u_n)_{t_0^n}$ où $(u_n)_{t_0^n}(s) = u_n(t_0^n + s) = \varphi(s)$ pour tout $s \in [-\tau, 0]$.

Alors $u_1^n \in \overline{\mathbb{B}}(u_0, \frac{L_1+2L}{1-L_2}\mu_n)$.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_1^n - u_0^n\| &\leq \|u_1^n - (u_0^n - \mu_n f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n)\| + \|\mu_n f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n)\| \\
&= d_{C(t_1^n, u_0^n)}\Big(u_0^n - \mu_n f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n)\Big) + \|\mu_n f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n)\| \\
&\leq d_{C(t_1^n, u_0^n)}(u_0^n) + 2\mu_n \|f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n)\|.
\end{aligned}$$

La condition initiale $u_0^n \in C(t_1^n, u_0^n)$ et $(\mathcal{H}_1)$, impliquent que

$$\begin{aligned}
\|u_1^n - u_0^n\| &\leq d_{C(t_1^n, u_0^n)}(u_0^n) - d_{C(t_0^n, u_0^n)}(u_0^n) + 2\mu_n L \\
&\leq L_1\mu_n + 2\mu_n L \\
&\leq \frac{L_1 + 2L}{1 - L_2}\mu_n.
\end{aligned}$$

Pour chaque $t \in [t_0^n, t_1^n]$, nous définissons

$$u_n(t) = u_0^n + \Big(\frac{u_1^n - u_0^n}{\mu_n}\Big)(t - t_0^n),$$

où $u_0^n = u_0 = \varphi(0) \in C(0, u_0)$. Par construction nous avons $u_1^n \in C(t_1^n, u_n(t_0^n))$ et pour p. p. $t \in [t_0^n, t_1^n[$,

$$-\dot{u}_n(t) = -\frac{u_1^n - u_0^n}{\mu_n} \in N_{C(t_1^n, u_n(t_0^n))}(u_n(t_1^n)) + f(t_0^n, \mathcal{T}(t_0^n)u_n) \tag{3.3}$$

avec

$$\|u_1^n - u_0^n\| \leq \frac{L_1 + 2L}{1 - L_2}\mu_n. \tag{3.4}$$

Par induction pour $0 \leq i \leq n-1$, on assure qu'il existe $u_{i+1}^n \in \overline{\mathbb{B}}(u_i^n, \frac{L_1+2L}{1-L_2}\mu_n)$ tel que

$$u_{i+1}^n = Proj_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}\Big(u_i^n - \mu_n f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n)\Big),$$

où $\mathcal{T}(t_i^n)u_n := (u_n)_{t_i^n}$ avec $(u_n)_{t_i^n}(s) = u_n(t_i^n + s)$ pour tout $s \in [-\tau, 0]$.

En effet, le caractère Lipschitzien de C assure que

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n + \mu_n f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n\| + \|\mu_n f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n)\| \\
&= d_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}\Big(u_i^n - \mu_n f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n)\Big) + \mu_n\|f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n)\| \\
&\leq d_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(u_i^n) - d_{C(t_i^n, u_{i-1}^n)}(u_i^n) + 2\mu_n\|f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n)\|. \\
&\leq L_1|t_{i+1}^n - t_i^n| + L_2\|u_i^n - u_{i-1}^n\| + 2\mu_n L. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|u_i^n - u_{i-1}^n\| &\leq \|u_i^n - u_{i-1}^n + \mu_n f(t_{i-1}^n, \mathcal{T}(t_{i-1}^n)u_n\| + \|\mu_n f(t_{i-1}^n, \mathcal{T}(t_{i-1}^n)u_n)\| \\
&= d_{C(t_i^n, u_{i-1}^n)}\Big(u_{i-1}^n - \mu_n f(t_{i-1}^n, \mathcal{T}(t_{i-1}^n)u_n)\Big) + \mu_n\|f(t_{i-1}^n, \mathcal{T}(t_{i-1}^n)u_n)\| \\
&\leq d_{C(t_i^n, u_{i-1}^n)}(u_{i-1}^n) - d_{C(t_{i-1}^n, u_{i-2}^n)}(u_{i-1}^n) + 2\mu_n\|f(t_{i-1}^n, \mathcal{T}(t_{i-1}^n)u_n)\| \\
&\leq L_1|t_i^n - t_{i-1}^n| + L_2\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| + 2\mu_n L.
\end{aligned}$$

Par induction nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|u_i^n - u_{i-1}^n\| &\leq L_1 u_n + 2\mu_n L + L_2\Big(2\mu_n L + L_1\mu_n + L_2\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\|\Big) \\
&= L_1\mu_n\big(1+L_2\big) + 2\mu_n L\big(1+L_2\big) + L_2^2\|u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\| \\
&\vdots \\
&\leq L_1\mu_n\big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-2}\big) \\
&\quad +2\mu_n L\big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-2}\big) + L_2^{i-1}\|u_1^n - u_0^n\|.
\end{aligned}$$

(3.4) implique

$$\begin{aligned}
\|u_i^n - u_{i-1}^n\| &\leq L_1\mu_n\Big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-2}+L_2^{i-1}\Big) \\
&+ 2\mu_n L\Big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-2}+L_2^{i-1}\Big) \\
&\leq \mu_n\big(L_1+2L\big)\Big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-2}+L_2^{i-1}\Big).
\end{aligned}$$

$$\leq \mu_n\big(L_1+2L\big)\Big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-2}+L_2^{i-1}\Big). \tag{3.6}$$

Par conséquent, (3.5) et (3.6) donnent

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq \mu_n\big(L_1+2L\big) \\
&+ \mu_n\big(L_1+2L\big)\Big(L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-1}+L_2^i\Big) \\
&= \mu_n\big(L_1+2L\big)\Big(1+L_2+L_2^2+\cdots+L_2^{i-1}+L_2^i\Big).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $L_2 < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq \mu_n\big(L_1+2L\big)\left(\tfrac{1-L_2^{i+1}}{1-L_2}\right). \\
&\leq \left(\tfrac{L_1+2L}{1-L_2}\right)\mu_n.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $0 \leq i \leq n-1$, nous définissons

$$u_n(t) = u_i^n + \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n}(t - t_i^n).$$

Alors pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, nous avons

$$-\dot{u}_n(t) = -\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n} \in N_{C\left(t_{i+1}^n, u_n(t_i^n)\right)}\big(u_n(t_{i+1}^n)\big) + f(t_i^n, \mathcal{T}(t_i^n)u_n),$$

avec l'estimation

$$\|\tfrac{u^n_{i+1}-u^n_i}{\mu_n}\| \;\leq\; \big(\tfrac{L_1+2L}{1-L_2}\big).$$

Maintenant, soient θ_n, δ_n définies de $[0,T]$ vers $[0,T]$ par

$$\begin{aligned}
&\theta_n(t) = t^n_i; && t \in]t^n_i, t^n_{i+1}],\\
&\delta_n(t) = t^n_{i+1}; && t \in]t^n_i, t^n_{i+1}],\\
&\theta_n(0) = \delta_n(0) = 0.
\end{aligned}$$

Posons $f_n(t) = f(\theta_n(t), \mathcal{T}(\theta_n(t))u_n)$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors nous avons

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{C\big(\delta_n(t),u_n(\theta_n(t)\big)}\big(u_n(\delta_n(t))\big) + f_n(t) \quad \text{p. p. sur } [0,T] \tag{3.7}$$

et

$$\|\dot{u}_n(t)\| \;\leq\; \big(\tfrac{L_1+2L}{1-L_2}\big) \quad \text{p. p. sur } [0,T]. \tag{3.8}$$

Etape 2. La convergence de (u_n) et (f_n).

Selon (3.8), la suite $(u_n(t))$ est equi-lipschitz de rapport $\dfrac{L_1+2L}{1-L_2}$ et donc

$$\|u^n_i - u^n_{i-1}\| \;\leq\; \big(\tfrac{L_1+2L}{1-L_2}\big)\mu_n.$$

Pour $i = 1, 2, \cdots, n$, nous obtenons

$$\|u^n_i - u^n_0\| \;\leq\; \big(\tfrac{L_1+2L}{1-L_2}\big)i\mu_n,$$

et alors

$$\|u^n_i\| \;\leq\; \|u_0\| + \big(\tfrac{L_1+2L}{1-L_2}\big)T := \alpha. \tag{3.9}$$

Par construction

$$u_n(\delta_n(t)) \in C\big(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t))\big) \cap \overline{\mathbb{B}}(0,\alpha),$$

ce qui implique que $u_n(\delta_n(t)) \in C\big([0,T] \times \overline{\mathbb{B}}(0,\alpha)\big) \cap \overline{\mathbb{B}}(0,\alpha)$. Donc $u_n(\delta_n(t))$ est relativement compacte pour chaque $t \in [0,T]$ dans H selon $(\mathcal{H}_2)$.

Par ailleurs, (3.8) donne

$$\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| \leq \frac{L_1 + 2L}{1 - L_2}|\delta_n(t) - t|,$$

or

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| = 0. \tag{3.10}$$

(3.10) exprime que $(u_n(t))$ est relativement compacte. Le théorème 1.6 assure que $(u_n(\cdot))$ est relativement compacte dans $C([0,T],H)$.

Par conséquent, $(\dot{u}_n)$ converge $\sigma(L^1([0,T],H), L^\infty([0,T],H))$ dans $L^1([0,T],H)$ vers une fonction v avec $\|v(t)\| \leq \dfrac{L_1 + 2L}{1 - L_2}$ pour p. p. $t \in [0,T]$, et (u_n) converge dans $\mathcal{C}([-r,T],H)$ vers une fonction continue u tel que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

avec $\dot{u} = v$ et $u = \varphi$ sur $[-r,0]$.

Comme $\|f_n(t)\| \leq L$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,T]$, on peut supposer que la suite $f_n(t) = f(\theta_n(t), \mathcal{T}(\theta_n(t))u_n)$ converge $\sigma(L^1([0,T],H), L^\infty([0,T],H))$ vers une fonction $f \in L^1([0,T],H)$ avec $\|f(t)\| \leq L$ p. p. $t \in [0,T]$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n(t) = t$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n(\theta_n(t)) &= \lim_{n\to+\infty} u_n(\delta_n(t)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = u(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

uniformément sur $[0,T]$.

Etape 3. Existence de solutions.

Par construction nous avons

$$u_n(\delta_n(t)) \in C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t))),$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors, en vertu de $(\mathcal{H}_1)$, (3.7) et (3.11)

$$\begin{aligned} d_{C(t,u(t))}(u(t)) &= d_{C(t,u(t))}(u(t)) - d_{C(\delta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\delta_n(t))) \\ &= d_{C(t,u(t))}(u(t)) - d_{C(\delta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}\big(u_n(\delta_n(t)) - u(t) + u(t)\big) \\ &\leq \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\|_\infty + L_1|t-\delta_n(t)| \\ &+ L_2\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty, \end{aligned}$$

ainsi, la fermeture de l'ensemble $C(t,u(t))$ assure que

$$u(t) \in C(t,u(t)) \text{ pour tout } \ t \in [0,T].$$

Maintenant, nous montrons que $f(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u)$ p.p. $t \in [0,T]$.

Soit $t \in [0,T]$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\theta_n(t))u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} &\leq \|\mathcal{T}(t)u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} + \sup_{s\in[-r,0]} \|u_n(\theta_n(t)+s) - u_n(t+s)\| \\ &\leq \|\mathcal{T}(t)u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} + \sup_{\{s_1,s_2\in[-r,1],|s_1-s_2|\leq\mu_n\}} \|u_n(s_1) - u_n(s_2)\| \\ &\leq \|\mathcal{T}(t)u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} + \sup_{\{s_1,s_2\in[-r,0],|s_1-s_2|\leq\mu_n\}} \|u_n(s_1) - u_n(s_2)\| \\ &\quad + \sup_{\{s_1,s_2\in[0,1],|s_1-s_2|\leq\mu_n\}} \|u_n(s_1) - u_n(s_2)\| \\ &\leq \|\mathcal{T}(t)u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} + \sup_{\{s_1,s_2\in[-r,0],|s_1-s_2|\leq\mu_n\}} \|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)\| \\ &\quad + \sup_{\{s_1,s_2\in[0,1],|s_1-s_2|\leq\mu_n\}} \|u_n(s_1) - u_n(s_2)\| \\ &\leq \|\mathcal{T}(t)u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} + \sup_{\{s_1,s_2\in[-r,0],|s_1-s_2|\leq\mu_n\}} \|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)\| + \frac{L_1+2L}{1-L_2}\mu_n. \end{aligned}$$

La continuité de φ et la convergence uniforme de u_n vers u donnent

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}(\theta_n(t))u_n - \mathcal{T}(t)u\|_{\mathcal{C}_0} = 0. \tag{3.12}$$

Ainsi

$$f_n(t) = f(\theta_n(t), \mathcal{T}(\theta_n(t))u_n) \in F(\theta_n(t), \mathcal{T}(\theta_n(t))u_n).$$

Le théorème 1.3 assure que $f(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u)$ p.p. $t \in [0,T]$.

Rappelons que l'inclusion

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t)))}\big(u_n(\delta_n(t))\big) + f_n(t)$$

est equivalente à

$$\delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t)))\big) + \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\delta_n(t))\rangle \leq 0 \text{ p. p. t} \in [0,T]$$

En intégrant sur $[0,T]$ nous obtenons

$$\int_0^T \delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t)))\big)dt + \int_0^T \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\delta_n(t))\rangle dt \leq 0.$$

Comme les suites (f_n), $(\dot{u}_n)$ converge $\sigma(L^1([0,T],H), L^\infty([0,T],H))$ vers f et $\dot{u}$ respectivement, alors

$$\int_0^T \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t))\rangle dt = \int_0^T \langle \dot{u}(t) + f(t), u(t)\rangle dt.$$

Par ailleurs, en vertu de $(\mathcal{H}_1)$, nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}\int_0^T |\delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t)))\big) - \delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(t, u(t))\big)|dt \\ \leq \int_0^T \|-\dot{u}_n(t) - f_n(t)\|\big(L_1|\delta_n(t) - t| + L_2\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|\big)dt \\ \leq (\frac{L_1 + 2L}{1 - L_2} + \alpha)\int_0^T \big(L_1|\delta_n(t) - t| + L_2\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|\big)dt.\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque n tend vers ∞ dans l'estimation précédente et en tenant compte de (3.10) et (3.11), nous observons que

$$\int_0^T |\delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t)))\big) - \delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(t, u(t))\big)|dt$$

tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

En utilisant la semi-continuité inférieure d'une intégrante convexe (Voir[15], Théorème 8.1.6), nous obtenons

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(t, u(t))\big)dt \geq \int_0^T \delta^*\big(-\dot{u}(t) - f(t), C(t, u(t))\big)dt.$$

Par conséquent, on conclut que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \delta^*\big(-\dot{u}_n(t) - f_n(t), C(\delta_n(t), u_n(\theta_n(t)))\big)dt \geq \int_0^T \delta^*\big(-\dot{u}(t) - f(t), C(t, u(t))\big)dt$$

ainsi

$$\int_0^T \delta^*\big(-\dot{u}(t) - f(t), C(t, u(t))\big)dt + \int_0^T \langle \dot{u}(t) + f(t), u(t)\rangle dt \leq 0.$$

Comme $u(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in [0, T]$, on déduit que

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + f(t), \quad \text{p. p. t} \in [0, T].$$

Ainsi

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)u), \quad \text{p. p. t} \in [0, T],$$

ce qui complète la démonstration.

$\square$

3.3 Propriétés topologiques d'ensembles de solutions

Soit $\mathcal{K}$ un sous ensemble de $\mathcal{C}_\tau$ non vide compacte tel que $\varphi(0) \in C(0, \varphi(0))$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$. Pour chaque $\varphi \in \mathcal{K}$, on note par $\mathcal{S}_F(\varphi)$ l'ensemble des fonctions continues $u : [-\tau, T] \longrightarrow H$ telles que

$$\begin{cases} u(t) = \mathcal{T}(0)u(t) = \varphi(t) \quad \text{sur } [-\tau, 0], \\ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \forall t \in [0, T], \\ \text{avec} \quad \dot{u} \in L^\infty([0, T], H) \quad \text{et} \quad u(t) \in C(t, u(t)) \quad \text{pour tout } \ t \in [0, T], \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)u) \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \end{cases} \tag{3.13}$$

Lemme 3.1 *Soit $C : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vide convexes fermées satisfaisant $(\mathcal{H}_1)$ et $h \in L^\infty([0,T], H)$ avec $\|h(t)\| \leq L$, p.p. $t \in [0,T]$.*
Alors toute solution absolument continue u de l'équation différentielle multivoque

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + h(t) \quad \textit{p.p. sur } [0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)) \quad \textit{pour tout } \ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0,u_0) \end{cases} \tag{3.14}$$

est λ-Lipschitzienne avec $\lambda = \dfrac{L_1 + 2L}{1 - L_2}$.

Preuve. On considère la fonction $u(\cdot)$ solution de (3.14). Pour tout $t \in [0,T], x \in H$, on pose

$$g(t) := \int_0^t h(s)\, ds \ , \ \ D(t,x) := C(t, x - g(t)) + g(t) \text{ et } v(t) := u(t) + g(t).$$

Il est clair que la multifonction $D(\cdot,\cdot)$ est à valeurs non vide convexes fermées.

Maintenant, soient $x, y, z \in H$ et $t, s \in [0,T]$. En vertu de $(\mathcal{H}_1)$ pour la multifonction $C(\cdot,\cdot)$, on a

$$\begin{aligned} &\left| d_{D(t,x)}(z) - d_{D(s,y)}(z) \right| \leq \left| d_{C(t,x-g(t))}(z - g(t)) - d_{C(s,y-g(s))}(z - g(s)) \right| \\ &\leq \|g(t) - g(s)\| + L_1 |t - s| + L_2 \|x - y + g(s) - g(t)\| \\ &\leq (1 + L_2) \|g(t) - g(s)\| + L_1 |t - s| + L_2 \|x - y\| \\ &\leq \big(L(1 + L_2) + L_1 \big) |t - s| + L_2 \|x - y\| \, . \end{aligned}$$

Donc $D(\cdot,\cdot)$ satisfait $(\mathcal{H}_1)$ avec les constantes $\alpha_1 := L(1 + L_2) + L_1 \geq 0$ et $\alpha_2 := L_2 < 1$.

On remarque que l'équation différentielle multivoque (3.14) est équivalente à

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) \in N_{D(t,v(t))}(v(t)) \quad \text{p.p. sur } [0,T], \\ v(t) \in D(t,v(t)) \quad \text{pour tout } \ t \in [0,T], \\ v(0) = u_0 \in D(0,u_0). \end{cases} \tag{3.15}$$

Autrement dit, v est solution de l'équation différentielle multivoque gouvernée par le cône normal (3.15). Il résulte de [29, 39] que v est nécessairement Lipschitzienne avec la constante $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} = \frac{L(1+L_2)+L_1}{1-L_2}$. La conclusion est évidente.

$\square$

Remarque 3.1 *En utilisant le Lemme 3.1, il est clair que toute $u \in \mathcal{S}_F$ est necessairement $\frac{L_1+2L}{1-L_2}$-Lipschitzienne sur $[0,T]$. En effet, d'après (3.13) il existe une application mesurable $h : [0,T] \to H$ telle que $h(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u)$ p.p. et que*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + h(t) \quad p.p.\ sur\ [0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)) \quad pour\ tout\ \ t \in [0,T], \\ u(t) = \mathcal{T}(0)u(t) = \varphi(t) \quad sur\ [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Comme $\|h(t)\| \leq L$, alors le Lemme 3.1 implique que u est $\frac{L_1+2L}{1-L_2}$ -Lipschitzienne sur $[0,T]$.

Proposition 3.1 *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites. Alors*

$$\mathcal{S}_F(\mathcal{K}) := \bigcup_{\varphi \in F} \mathcal{S}_F(\varphi)$$

est relativement compacte dans $C_T := \mathcal{C}([-\tau, T], H)$.

Preuve. D'après la remarque 3.1 chaque $u \in \mathcal{S}_F(\varphi)$ est $\left(\frac{L_1+2L}{1-L_2}\right)$ -Lipschitzienne sur $[0,T]$. De plus, pour chaque $t \in [0,T]$,

$$\|u(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \Big(\frac{L_1 + 2L}{1 - L_2}\Big)T := \beta.$$

On a aussi pour tout $t \in [0,T]$, $u(t) \in C([0,T] \times \overline{\mathbb{B}}(0,\beta)) \cap \overline{\mathbb{B}}(0,\beta)$ qui est un ensemble compacte de H par hypothèse. Il résulte d'après le Théorème d'Ascoli- Arzelà que les restrictions de $\mathcal{S}_F(\mathcal{K})$ sur $[0,T]$ forment un sous-ensemble relativement compacte de $\mathcal{C}([0,T], H)$. Comme la restriction de $\mathcal{S}_F(\mathcal{K})$ sur $[-\tau, 0]$ coincide avec $\mathcal{K}$, le résultat découle. $\square$

Proposition 3.2 *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites. Alors la multifonction $\mathcal{S}_F$ a un graphe fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{C}_T$*

Preuve. On considère les suites (φ_n) et (u_n) avec $\varphi_n \in \mathcal{K}$, $\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{K}$ uniformément, $u_n \in \mathcal{S}_F(\varphi_n)$ et $u_n \to u \in \mathcal{C}_T$ uniformément. D'après la Remarque 3.1, u est λ-Lipschitzienne sur $[0, T]$ avec $\lambda = \dfrac{L_1 + 2L}{1 - L_2}$. Il est clair que $u_n(t) \in C(t, u_n(t))$ implique que $u(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in [0, T]$. D'une façon similaire $T(0)u_n = \varphi_n$ implique que $T(0)u = \varphi$. Maintenant, on démontre que u vérifie

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)u) \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \tag{3.16}$$

Pour chaque n, il existe une selection mesurable h_n telle que

$$h_n(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u_n) \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \tag{3.17}$$

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) \in N_{C(t,u_n(t))}(u_n(t)) \quad \text{p.p. } \ t \in [0, T]. \tag{3.18}$$

Comme $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \lambda$ et $\|h_n(t)\| \leq L$ p. p. , on peut supposer, sans perdre de généralité, que $\dot{u}_n \to \dot{u}$ et $h_n \to h$ faiblement dans $L^1([0, T], H)$. Comme F est scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes, il résulte de (3.17) et le théorème classique de fermeture Théorème 1.3 que

$$h(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \tag{3.19}$$

Maintenant, par (3.18) et la Proposition 2.1, on a

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) \in (\lambda + L)\partial d_{C(t,u_n(t))}(u_n(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

Alors, en utilisant le lemme de Mazur et la Proposition 2.1, on conclut que

$$-\dot{u}(t) - h(t) \in (\lambda + L)\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)) \subset N_{C(t,u(t))}(u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

Ainsi, on trouve que

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)u) \quad \text{pour p.p. sur } [0,T], \tag{3.20}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Chapitre 4

Equation différentielle multivoque avec des conditions aux limites anti-périodiques

4.1 Introduction

L'existence et l'unicité d'une solution anti-périodique pour les équations différentielles multivoques gouvernées par le sous différentiel d'une fonction convexe paire et s.c.i, ont été étudiés par plusieurs auteurs (voir [4, 5, 6, 7, 14, 22, 36, 43]). Dans [42], Okochi a établi pour la première fois le caractère bien posé pour l'équation différentielle multivoque du premier ordre

$$\begin{cases} f(t) \in u^{'}(t) + \partial\varphi(u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T]; \\ u(0) = -u(T), \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $\partial\varphi$ est le sous différentiel d'une fonction convexe paire et s.c.i φ sur un espace de Hilbert réel H et $f \in L^2([0,T],H)$. Ensuite, A. R. Aftabizadeh, Y. K. Huang et N.H. Pavel [3] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution anti-périodique pour l'équation différentielle multivoque d'ordre 3

$$\begin{cases} u'''(t) \in \partial\varphi(u'(t)) + f(t) \quad p.p.\ t \in [0,T] \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T), u''(0) = -u''(T), \end{cases} \tag{4.2}$$

en utilisant la théorie des opérateurs maximaux monotones.

Le but principal de ce chapitre est d'étudier le problème (4.2) avec une perturbation non linéaire qui dépend de l'état u de la forme

$$\begin{cases} u'''(t) \in \partial\varphi(u'(t)) + F(t,u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T] \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T), u''(0) = -u''(T), \end{cases} \tag{4.3}$$

où $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est une fonction convexe paire et s.c.i, $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ est une multifonction à valeurs convexes compactes s.c.s majorée par une fonction $L^2([0,T],H)$. Nous montrons deux résultats d'existences et un résultat d'unicité quand F est univoque , c-à-d, $F(t,u(t)) := \{f(t,u(t))\}$.

4.2 Résultats préliminaires

Commençons par rappeler le résultat de fermeture classique suivant

Lemme 4.1 *([16])*
Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit φ une fonction convexe semi-continue inférieurement définie sur H à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ une suite des applications mesurables de $[0,T]$ dans H telle que $u_n \to u_\infty$ ponctuellement pour la topologie forte de H. Supposons que $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $L^2([0,T],H)$ satisfaisant

$$\xi_n(t) \in \partial\varphi(u_n(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T]$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et convergeant faiblement vers $\xi_\infty \in L^2([0,T],H)$. Alors nous avons

$$\xi_\infty(t) \in \partial\varphi(u_\infty(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

Le lemme suivant est une estimation de type Poincaré pour les fonctions périodiques.

Lemme 4.2 *([44])*
Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$ $2T$-périodique satisfaisant

$$\int_0^{2T} u(t)dt = 0,$$

alors

$$\|u\|_{L^2([0,2T],H)} \leq \frac{T}{\pi}\|u^{'}\|_{L^2([0,2T],H)}.$$

Maintenant, nous démontrons une extention du Lemme 4.2 pour les fonctions anti-périodiques

Proposition 4.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $u \in W^{3,2}([0,T], H)$ satisfaisant $u(0) = -u(T), u^{'}(0) = -u^{'}(T), u^{''}(0) = -u^{''}(T)$, alors*

a_1) $\|u\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u^{'}\|_{L^2([0,T],H)}$;

a_2) $\|u\|_{L^2([0,T],H)} \leq \frac{T}{\pi}\|u^{'}\|_{L^2([0,T],H)}$;

b_1) $\|u^{'}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u^{''}\|_{L^2([0,T],H)}$;

b_2) $\|u^{'}\|_{L^2([0,T],H)} \leq \frac{T}{\pi}\|u^{''}\|_{L^2([0,T],H)}$;

c) $\|u^{''}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u^{'''}\|_{L^2([0,T],H)}$.

Preuve.
a_1) Comme $u(t) = u(0) + \int_0^t u^{'}(s)ds$ et $u(t) = u(T) - \int_t^T u^{'}(s)ds$, $\forall t \in [0,T]$, par l'addition et l'anti-périodicité de u, on obtient

$$2u(t) = \int_0^t u^{'}(s)ds - \int_t^T u^{'}(s)ds, \ \forall t \in [0,T].$$

De plus

$$2\|u(t)\| \leq \int_0^t \|u^{'}(s)\|ds + \int_t^T \|u^{'}(s)\|ds = \int_0^T \|u^{'}(s)\|ds, \ \forall t \in [0,T],$$

ce qui assure d'après l'inégalité de Hölder que

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u^{'}\|_{L^2([0,T],H)}.$$

a_2) Pour ne pas allourdir beaucoup les notations, on note encore l'extention anti-périodique de $u(t), t \in [0,T]$, par $u(t), t \in \mathbb{R}$, c-à-d

$$u(t+T) = -u(t) \quad \text{et} \quad u^{'}(t+T) = -u^{'}(t), \text{ pour } \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors u est une fonction $2T-$périodique puisque

$$u(t+2T) = u(t+T+T) = -u(t+T) = u(t).$$

De plus, comme

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} u(t)dt &= \int_0^{T} u(t)dt + \int_T^{2T} u(t)dt \\ &= \int_0^{T} u(t)dt - \int_0^{T} u(t)dt = 0, \end{aligned}$$

alors, en vertu du lemme 4.2

$$\int_0^{2T} \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{\pi^2}\int_0^{2T} \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Observons que $\|u(t)\|^2$ et $\|u^{'}(t)\|^2$ sont T-périodique car

$\|u(t+T)\|^2 = \|-u(t)\|^2 = \|u(t)\|^2$. D'une façon similaire

$\|u^{'}(t+T)\|^2 = \|-u^{'}(t)\|^2 = \|u^{'}(t)\|^2$.

Par conséquent, on déduit que $\int_0^{2T} \|u(t)\|^2 dt = 2\int_0^{T} \|u(t)\|^2 dt$ et $\int_0^{2T} \|u^{'}(t)\|^2 dt = 2\int_0^{T} \|u^{'}(t)\|^2 dt$. Finalement, on obtient l'inégalité désirée

$$\int_0^{T} \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{\pi^2}\int_0^{T} \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

D'une façon similaire, on démontre b_1), b_2) et c), en utilisant $u^{'}(0) = -u^{'}(T)$, et $u^{''}(0) = -u^{''}(T)$ respectivement. $\square$

4.3 Existence de solutions anti-périodiques

A présent, nous pouvons établir notre premier résultat d'existence en dimension finie pour le problème (4.3).

Théorème 4.1 *Soit $H = \mathbb{R}^d$, $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement et paire. Soit $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs convexes compactes, mesurable sur $[0,T]$ et semi-continue supérieurement sur H satisfaisant :*
il existe $\alpha(\cdot) \in L^2([0,T], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$F(t,x) \subset \Gamma(t) := \overline{\mathbb{B}}_{\alpha(t)}(0) \quad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in [0,T] \times H.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} u^{'''}(t) \in \partial\varphi(u^{'}(t)) + F(t,u(t)) \quad \textit{p.p. } t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), u^{'}(0) = -u^{'}(T) \ \textit{ et } \ u^{''}(0) = -u^{''}(T), \end{cases}$$

admet au moins une solution anti-périodique dans $W^{3,2}([0,T], H)$.

Preuve.

Rappellons qu'une fonction $u : [0,T] \to H$ de l'espace $W^{3,2}([0,T], H)$ est une solution du problème ci-dessus s'il existe une fonction $h \in L^2([0,T]; H)$ telle que :

$$\begin{cases} u^{'''}(t) \in \partial\varphi(u^{'}(t)) + h(t) \quad p.p. \ t \in [0,T], \\ h(t) \in F(t,u(t)) \quad p.p. \ t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), u^{'}(0) = -u^{'}(T) \ \text{ et } \ u^{''}(0) = -u^{''}(T). \end{cases}$$

On note par S^2_Γ l'ensemble de toutes les $L^2([0,T]; H)$- selections de Γ, c-à-d

$$S^2_\Gamma := \{f \in L^2([0,T], H); f(t) \in \Gamma(t) \quad p.p. \ t \in [0,T]\}.$$

En vertu de ([3], theorem 2.1), pour tout $f \in S^2_\Gamma$, il existe une unique solution $u_f \in W^{3,2}([0,T], H)$ pour

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} u^{'''}_f(t) \in \partial\varphi(u^{'}_f(t)) + f(t) \quad p.p. \ t \in [0,T], \\ u_f(0) = -u_f(T), u^{'}_f(0) = -u^{'}_f(T) \text{ et } u^{''}_f(0) = -u^{''}_f(T), \end{cases}$$

telle que

$$\|u_f^{'''}\|_{L^2([0,T],H)} \leq \|f\|_{L^2([0,T],H)}. \qquad (*)$$

Pour chaque $f \in S^2_\Gamma$, on définit la multifonction suivante

$$\Psi(f) := \{g \in L^2([0,T],H); g(t) \in F(t, u_f(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T]\}.$$

Alors, il est clair que $\Psi(f)$ est un sous ensemble de S^2_Γ non vide (selon [21], théorème VI.4) convexe et faiblement compacte.

Maintenant, nous allons montrer que la multifonction $\Psi : S^2_\Gamma \rightrightarrows S^2_\Gamma$ à valeurs convexes et faiblement compactes admet un point fixe. En vertu du théorème 1.5 du point fixe de Kakutani-Ky Fan, il suffit de prouver que Ψ est semi-continue supérieurement quand S^2_Γ est muni de la topologie faible de $L^2([0,T],H)$.

Comme $L^2([0,T],H)$ est séparable et S^2_Γ est compacte métrisable pour la topologie faible de $L^2([0,T],H)$. Pour cela, nous montrons que le graphe $gph(\Psi)$ est sequentiellement faiblement fermé dans $S^2_\Gamma \times S^2_\Gamma$. Soit $(f_n, g_n)_n$ une suite des éléments de $gph(\Psi)$ convergeant faiblement vers $(f,g) \in S^2_\Gamma \times S^2_\Gamma$. D'après la définition de Ψ , on remarque que u_{f_n} est la solution unique dans $W^{3,2}([0,T],H)$ pour le problème

$$\begin{cases} u_{f_n}^{'''}(t) \in \partial\varphi(u_{f_n}^{'}(t)) + f_n(t) \quad p.p.\ t \in [0,T], \\ u_{f_n}(0) = -u_{f_n}(T), u_{f_n}^{'}(0) = -u_{f_n}^{'}(T) \text{ et } u_{f_n}^{''}(0) = -u_{f_n}^{''}(T), \end{cases}$$

avec $f_n \in S^2_\Gamma$ et $g_n(t) \in F(t, u_{f_n}(t))$ $\quad p.p.\ t \in [0,T]$. En tenant compte de l'anti-périodicité de u''_{f_n}, u'_{f_n}et u_{f_n}, la proposition 4.1 donne

$$\begin{cases} \|u''_{f_n}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u'''_{f_n}\|_{L^2([0,T],H)}, \\ \\ \|u'_{f_n}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} \leq \frac{T\sqrt{T}}{2\pi}\|u'''_{f_n}\|_{L^2([0,T],H)}, \qquad \text{pour tout } \ n \geq 1 \\ \\ \|u_{f_n}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} \leq \frac{T^2\sqrt{T}}{2\pi^2}\|u'''_{f_n}\|_{L^2([0,T],H)}. \end{cases}$$

En utilisant l'estimation (*), on obtient

$$\|u'''_{f_n}\|_{L^2([0,T],H)} \leq \|f_n\|_{L^2([0,T],H)} \leq \|\alpha\|_{L^2([0,T],R)} < +\infty,$$

et donc

$$\begin{cases} \sup\limits_{n\geq 1}\|u''_{f_n}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} < +\infty, \\ \\ \sup\limits_{n\geq 1}\|u'_{f_n}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} < +\infty, \\ \\ \sup\limits_{n\geq 1}\|u_{f_n}\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} < +\infty. \end{cases}$$

Nous pouvons supposer que (u'''_{f_n}) converge faiblement dans $L^2([0,T],H)$ vers une fonction $\gamma \in L^2([0,T],H)$ et (u''_{f_n}) converge ponctuellement vers w, ce qui entraine que

$$\begin{aligned} w(t) &:= \lim_{n\to+\infty} u''_{f_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}(u''_{f_n}(0) + \int_0^t u'''_{f_n}(s)ds) \\ &= \lim_{n\to+\infty} u''_{f_n}(0) + \int_0^t \gamma(s)ds, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} v(t) &:= \lim_{n\to+\infty} u'_{f_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}(u'_{f_n}(0) + \int_0^t u''_{f_n}(s)ds) \\ &= \lim_{n\to+\infty} u'_{f_n}(0) + \int_0^t w(s)ds, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &:= \lim_{n\to+\infty} u_{f_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}(u_{f_n}(0) + \int_0^t u'_{f_n}(s)ds) \\ &= \lim_{n\to+\infty} u_{f_n}(0) + \int_0^t v(s)ds, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

On conclut que $u \in W^{3,2}([0,T],H)$ avec $u' = v,\ u'' = w$ et $u''' = \gamma$ et vérifie les conditions d'anti périodicité $u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T)$ and $u''(0) = -u''(T)$. De plus, on observe que u'_{f_n} converge ponctuellement vers u' et u'''_{f_n} converge vers u''' pour la topologie faible de $L^2([0,T],H)$. En appliquant le Lemme 4.1 sur l'équation multivoque

$$u'''_{f_n}(t) - f_n(t) \in \partial\varphi(u'_{f_n}(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T]$$

on trouve

$$u'''(t) - f(t) \in \partial\varphi(u'(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

En vertu de l'unicité ([3], Théorème 2.1), il résulte que $u = u_f$.

Rappelant l'équation multivoque

$$g_n(t) \in F(t, u_{f_n}(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

Le théorème 1.3 de fermeture entraine

$$g(t) \in F(t, u_f(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

Le théorème 1.5 du point fixe de Kakutani-Ky Fan assure que la multifonction $\Psi(f)$ admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $f \in S^2_\Gamma$ tel que $f \in \Psi(f)$ et donc

$$f(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

En d'autre termes

$$\begin{cases} u'''(t) \in \partial\varphi(u'(t)) + f(t) & p.p.\ t \in [0,T], \\ f(t) \in F(t, u(t)) & p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T) \text{ et } u''(0) = -u''(T). \end{cases}$$

Ceci complète la démonstration. □

Un résulalt d'existence pour le problème (4.3) en dimension infinie est aussi prouvé dans le théorème suivant. Ici, nous allons ajouter une hypothèse de compacité sur l'ensemble de niveaux de φ.

Théorème 4.2 *Soit H un espace de Hilbert séparable, $\varphi : H \to [0,+\infty]$ une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement et paire satisfaisant : $\varphi(0) = 0$ et pour chaque $\beta_1, \beta_2 > 0$, l'ensemble $\{x \in D(\varphi) : \|x\| \leq \beta_1, \varphi(x) \leq \beta_2\}$ est compacte. Soit $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs convexes compactes, mesurable sur $[0,T]$ et semi-continue supérieurement sur H satisfaisant :*
il existe $\alpha(\cdot) \in L^2([0,T], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$F(t,x) \subset \Gamma(t) := \overline{\mathbb{B}}_{\alpha(t)}(0) \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in [0,T] \times H.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} u^{'''}(t) \in \partial\varphi(u^{'}(t)) + F(t,u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), u^{'}(0) = -u^{'}(T) \text{ et } u^{''}(0) = -u^{''}(T), \end{cases}$$

admet au moins une solution anti-périodique dans $W^{3,2}([0,T], H)$.

Preuve.

En utilisant les même notations de la démonstration du Théorème 4.1, nous avons

$$u^{'''}_{f_n}(t) - f_n(t) \in \partial\varphi(u^{'}_{f_n}(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T],$$

pour chaque $f_n \in S^2_\Gamma$.

La continuité absolue de $\varphi(u^{'}_{f_n}(\cdot))$ et la régle de composition (Voir [12]), donnent

$$\langle u^{'''}_{f_n}(t), u^{''}_{f_n}(t)\rangle - \langle f_n(t), u^{''}_{f_n}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\varphi(u^{'}_{f_n}(t)),$$

pour chaque $f_n \in S^2_\Gamma$, et donc

$$
\begin{aligned}
+\infty &> \sup_{n\geq 1}\int_0^T |\langle u'''_{f_n}(t), u''_{f_n}(t)\rangle - \langle f_n(t), u''_n(t)\rangle| dt \\
&= \sup_{n\geq 1}\int_0^T |\frac{d}{dt}\varphi(u'_{f_n}(t))| dt.
\end{aligned}
$$

De plus, la définition du sous-différentiel d'une fonction convexe donne

$$0 = \varphi(0) \geq \varphi(u'_{f_n}(t)) + \langle 0 - u'_{f_n}(t), u'''_{f_n}(t) - f_n(t)\rangle$$

or

$$0 \leq \varphi(u'_{f_n}(t)) \leq \langle u'_{f_n}(t), u'''_{f_n}(t) - f_n(t)\rangle.$$

Par conséquent

$$\sup_{n\geq 1} |\varphi(u'_{f_n})|_{L^1_{\mathbb{R}}([0,T])} < +\infty.$$

Pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\varphi(u'_{f_n}(t)) = \varphi(u'_{f_n}(0)) + \int_0^t \frac{d}{dt}\varphi(u'_{f_n}(s)) ds \quad \leq \quad \varphi(u'_{f_n}(0)) + \sup_{n\geq 1} |\varphi(u'_{f_n})|_{L^1_{\mathbb{R}}([0,T])}.$$

Maintenant, nous affirmons que $\varphi(u'_{f_n}(t)) \leq \beta_2$ pour chaque $t \in [0,T]$. Ici β_2 est une constante positive. En effet, pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\varphi(u'_{f_n}(0)) &\leq |\varphi(u'_{f_n}(t)) - \varphi(u'_{f_n}(0))| + \varphi(u'_{f_n}(t)) \\
&\leq \int_0^T |\frac{d}{dt}\varphi(u'_{f_n}(t))| dt + \varphi(u'_{f_n}(t)).
\end{aligned}
$$

Il résulte que

$$\varphi(u'_{f_n}(0)) \leq \sup_{n\geq 1}\int_0^T |\frac{d}{dt}\varphi(u'_{f_n}(t))| dt + \frac{1}{T}\sup_{n\geq 1}\int_0^T \varphi(u'_{f_n}(t)) dt < +\infty.$$

Par conséquent

$$\beta_1 := \sup_{n\geq 1}\sup_{t\in[0,T]} \|u'_{f_n}(t)\| < +\infty, \qquad \beta_2 := \sup_{n\geq 1}\sup_{t\in[0,T]} \varphi(u'_{f_n}(t)) < +\infty.$$

Alors $(u'_{f_n}(t))$ est relativement compacte pour la topologie forte de H en utilisant la compacité de l'ensemble de niveaux de φ. Ainsi, on peut terminer la démonstration en suivant les étapes de la preuve du Théorème 4.1.

□

4.4 Résultat d'unicité

Enonçons maintenant un résulat d'existence et d'unicité dans le cas où la perturbation du théorème 4.2 est une fonction univoque mais non linéaire.

Théorème 4.3 *Soit H un espace de Hilbert séparable, $\varphi : H \to [0, +\infty]$ est une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement et paire satisfaisant : $\varphi(0) = 0$ et pour chaque $\beta_1, \beta_2 > 0$, l'ensemble $\{x \in D(\varphi) : \|x\| \leq \beta_1, \varphi(x) \leq \beta_2\}$ est compacte et*
$f : [0, T] \times H \to H$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant les hypothèse suivantes :
$(\mathcal{H}_1)$ $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|$ pour tout $(t, u, v) \in [0, T] \times H \times H$, pour un certain $L > 0$.
$(\mathcal{H}_2)$ Il existe une fonction $L^2([0, T]; \mathbb{R}^+)$-intégrable $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\|f(t, u)\| \leq \alpha(t)$ pour tout $(t, u) \in [0, T] \times H$.
Si $0 < T < \frac{\pi}{\sqrt[3]{L}}$, alors le problème

$$\begin{cases} u'''(t) \in \partial\varphi(u'(t)) + f(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T], \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T) \quad et \quad u''(0) = -u''(T), \end{cases} \tag{4.4}$$

admet une solution unique anti-périodique dans $W^{3,2}([0, T], H)$.

Preuve.

L'existence de solutions anti-périodiques dans $W^{3,2}([0, T]; H)$ est assurée par le Théorème 4.2. En effet, on pose $F(t, u) := \{f(t, u)\}$ pour tout $(t, u) \in [0, T] \times H$. Comme f est une fonction de Carathéodory, alors : $u \longmapsto f(t, u)$ est continue, pour presque tout $t \in [0, T]$ et $t \longmapsto f(t, u)$ Lebesgue mesurable, pour tout $u \in H$.

De plus, en vertu de $(\mathcal{H}_2)$ qu'il existe une fonction $L^2([0,T];\mathbb{R}^+)$-intégrable $\alpha(\cdot)$ telle que

$$\|f(t,u)\| \leq \alpha(t) \quad \text{pour tout } (t,u) \in [0,T] \times H.$$

Par conséquent, F vérifie les hypothèses du Théorème 4.2.

Pour prouver l'unicité, nous supposons que (u_1) et (u_2) sont deux solutions pour (4.4) c-à-d

$$\begin{cases} u_1^{'''}(t) \in \partial\varphi(u_1^{'}(t)) + f(t,u_1(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T], \\ u_1(0) = -u_1(T), u_1^{'}(0) = -u_1^{'}(T), u_1^{''}(0) = -u_1^{''}(T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2^{'''}(t) \in \partial\varphi(u_2^{'}(t)) + f(t,u_2(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T], \\ u_2(0) = -u_2(T), u_2^{'}(0) = -u_2^{'}(T), u_2^{''}(0) = -u_2^{''}(T). \end{cases}$$

Posons

$$v_1(t) = u_1^{'''}(t) - f(t,u_1(t)), \quad \forall t \in [0,T],$$

$$v_2(t) = u_2^{'''}(t) - f(t,u_2(t)), \quad \forall t \in [0,T].$$

Donc, nous avons

$$v_1(t) - v_2(t) = u_1^{'''}(t) - u_2^{'''}(t) - f(t,u_1(t)) + f(t,u_2(t)), \quad p.p.\ t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

En multipliant scalairement les deux membre de (4.5) par $(u_1^{'} - u_2^{'})$ et en intégrant sur $[0,T]$, nous obtenons

$$\int_0^T \langle v_1(t) - v_2(t), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt =$$

$$\int_0^T \langle u_1^{'''}(t) - u_2^{'''}(t), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt - \int_0^T \langle f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt \tag{4.6}$$

Comme $v_1 \in \partial\varphi(u_1^{'})$ et $v_2 \in \partial\varphi(u_2^{'})$, la monotonie de $(\partial\varphi)$ et (4.6) impliquent

$$\int_0^T \langle u_1^{'''}(t) - u_2^{'''}(t), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt \geq \int_0^T \langle f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt. \tag{4.7}$$

En vertu de l'anti-périodicité

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle u_1^{'''}(t) - u_2^{'''}(t), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt \\
&= \langle u_1^{''}(T) - u_2^{''}(T), u_1^{'}(T) - u_2^{'}(T)\rangle - \langle u_1^{''}(0) - u_2^{''}(0), u_1^{'}(0) - u_2^{'}(0)\rangle \\
&\quad - \int_0^T \langle u_1^{''}(t) - u_2^{''}(t), u_1^{''}(t) - u_2^{''}(t)\rangle dt \\
&= - \int_0^T \|u_1^{''}(t) - u_2^{''}(t)\|^2 dt.
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.7) entraine que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u_1^{''}(t) - u_2^{''}(t)\|^2 dt &\leq \int_0^T \langle f(t, u_2(t)) - f(t, u_1(t)), u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\rangle dt \\
&\leq L \int_0^T \|u_1(t) - u_2(t)\|.\|u_1^{'}(t) - u_2^{'}(t)\| dt,
\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Hölder

$$\|u_1^{''} - u_2^{''}\|^2_{L^2([0,T],H)} \leq L\|u_1 - u_2\|_{L^2([0,T],H)} \cdot \|u_1^{'} - u_2^{'}\|_{L^2([0,T],H)}.$$

En utilisant les estimations (a_2) et (b_2) de la proposition 4.1, nous obtenons

$$\frac{\pi^2}{T^2}\|u_1^{'} - u_2^{'}\|^2_{L^2([0,T],H)} \leq L\frac{T}{\pi}\|u_1^{'} - u_2^{'}\|^2_{L^2([0,T],H)}$$

or

$$\|u_1^{'} - u_2^{'}\|^2_{L^2([0,T],H)} \leq L\frac{T^3}{\pi^3}\|u_1^{'} - u_2^{'}\|^2_{L^2([0,T],H)}.$$

Selon le choix de T, on conclut que $\|u_1^{'} - u_2^{'}\|^2_{L^2([0,T],H)} = 0$.

Par l'inégualité du Lemme 4.1, on conclut que

$$u_1(t) - u_2(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Ce qui achève la démonstration.

$\square$

4.5 Application aux équations aux dérivées partielles

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\partial\Omega$. Soit γ un opérateur maximal monotone sur $\mathbb{R}$ telle que $\gamma = \partial j$, où $j : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est propre, convexe, semi-continue inférieurement et paire avec $j(0) = 0$.

On s'intéresse au problème aux limites d'ordre trois suivant

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} -u_{ttt}(t,x) - \Delta_x u_t(t,x) + f(t, u(t,x)) = 0 \quad \text{dans } \; [0,T] \times \Omega, \\ \\ \frac{\partial u_t}{\partial \nu}(t,x) \in \gamma(u_t(t,x)) \quad \text{sur } [0,T] \times \partial\Omega, \\ \\ u(0,x) = -u(T,x), u_t(0,x) = -u_t(T,x) \text{ et } u_{tt}(0,x) = -u_{tt}(T,x) \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ dénote la dérivée normale extèrieure, $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, et

$f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant

(i) $|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u - v|$ pour tout $(t,u,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, pour un certain $L > 0$,

(ii) Il existe une fonction $L^2([0,T]; \mathbb{R}^+)$-intégrable $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ telle que $|f(t,u)| \leq \alpha(t)$ pour tout $(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

Soit $H = L^2([0,T])$, on définit $\varphi : H \to [0, +\infty]$ par

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |grad\ u|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} j(u) d\sigma, \quad \text{si} \quad u \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad j(u) \in L^1(\partial\Omega), \\ \\ +\infty \qquad \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Selon Brézis ([11], Theorem 12), φ est propre, convexe et semi-continue inférieurement sur H, avec $\partial\varphi(u) = -\Delta_x u$, et $D(\varphi) = \{u \in W^{1,2}(\Omega); -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \gamma(u),\ p.p. \text{ sur } \partial\Omega\}$.

On considère $u = u(t,x) = u(t)(x)$. On peut réecrire le problème $(\mathcal{P}')$ sous la forme

$$\begin{cases} -u'''(t) + \partial\varphi(u'(t)) + f(t, u(t)) \ni 0 \quad p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T) \text{ et } u''(0) = -u''(T), \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} u'''(t) \in \partial\varphi(u'(t)) + f(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T], \\ u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T) \text{ et } u''(0) = -u''(T). \end{cases}$$

Remarquons que $\varphi(0) = 0$, φ est paire et que la condition de compacité sur l'ensemble de niveaux de φ est satisfaite à cause de l'injection compacte $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Le Théorème 4.3 assure l'existence d'une solution pour le problème $(\mathcal{P}')$.

De plus, la solution est unique si $0 < T < \frac{\pi}{\sqrt[3]{L}}$.

Conclusion et perspectives

Ce manuscrit résume les quatres années de thèse que j'ai effectué au sein du Département de Mathématiques de l'université de Jijel, sous la direction de Mr Tahar Haddad. La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des équations différentielles multivoques avec des contraintes sur l'état en utilisant des outils de l'analyse non lisse. Nous avons développé des nouveaux algorithmes de projection semi-implicites. La seconde partie traite, dans un premier temps, l'existence de solutions anti-périodiques pour les équations différentielles multivoques d'ordre trois en dimension infinie. Dans un second temps, nous avons étudié (contrôlé) l'unicité de la solution par rapport aux données. Enfin, Les résultats théoriques ont trouvé leurs applications à une classe des équations aux dérivées partielles.

Perspectives

Ce travail nous a ouvert de nombreux chemins à suivre et plus particulièrement dans l'étude des problèmes de type Sweeping Process

- Etude des systèmes dynamiques non réguliers avec choc élastique

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) \in -\partial\varphi(u(t))$$

- Etude des systèmes dynamiques non réguliers avec choc élastique et frottement sec :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + \partial\varphi(u(t)) \in N_K(\dot{u}(t))$$

- Etude du cas des problèmes de Sweeping Process qui s'écrivent sous la forme :

$$\dot{u}(t) + f(u(t)) \in N_{K(t,u(t)}(\dot{u}(t))$$

- Concernant le problème d'ordre trois considéré au Chapitre 4, il paraît important d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème dans le cas non-convexe.

Bibliographie

[1] S. Adly, Tahar Haddad and L. Thibault , *Convex Sweeping Process in the framework of Measure Differential Inclusions and Evolution Variational Inequalities*, Mathematical Programming, February (2014), 1-43.

[2] C. E. Arroud, Tahar Haddad , *Existence of Solutions for a Class of Nonconvex Functional Differential Inclusions*, Applicable Analysis, , December (2013).

[3] A. R. Aftabizadeh, Y. K. Huang and N.H. Pavel, *Nonlinear Third-Order Differential Equations with Anti-Periodic Boundary Conditions and some Optimal Control Problems*, J. Math. Anal. Appl. 192, (1995), 266-293.

[4] S. Aizicovici and N. H. Pavel, *Anti-Periodic Solutions to a class of Nonlinear Differential Equations in Hilbert Space*, J. Fun. Anal. 99, (1991), 387-408.

[5] S. Aizicovici and N. H. Pavel, *Anti-Periodic boundary value problems for higher order differential equations in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. 18, (1992), 253-267.

[6] S. Aizicovici and N. H. Pavel, *On class of second order anti-periodic boundary value problem*, J. Math. Appl. 171, (1992), 301-320.

[7] S. Aizicovici and N. H. Pavel and I. I. Vrabie, *Anti-Periodic Solutions to Strongly Nonlinear Evolutions Equations in Hilbbert Space*, Analele Stiintifice Ale Universitatii "A.I.Cuza" Iasi, Tomul XIV, s.I.a. Matematica, (1998).

[8] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[9] M. Bounkhel and C. Castaing, *State dependent sweeping process in p-uniformly smooth and q-uniformly convex Banach spaces*, Set-Valued Anal, 3, (2011), 200-214.

[10] M. Bounkhel and L. Thibault : *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space*. J. Nonlinear Convex Anal. 6, (2005), 359-374.

[11] H. Brézis, *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to nonlinear partial differential equations*, Contribution to Nonlinear Functional Analysis, Acadimic press, New York, (1971), 101-156.

[12] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[13] C. Castaing, T. X. Du´c Ha, and M. Valadier, *Evolution equations governed by the sweeping process*, Set-Valued Anal, 1, (1993), 109-139.

[14] C. Castaing and Tahar Haddad, *Relaxation and Bolza Problem Involving a Second Order Evolution Inclusion*, J. Nonlinear Convex Anal, Vol 9, Number 2, (2008), 141-159.

[15] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte, and M. Valadier, *Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory*, Kluwer Academic publisher, (2004).

[16] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte and A. Salvadori, *Some variational convergence results with application to evolution inclusions*, Adv. Math. Econ. 8, (2006), 33-73.

[17] C. Castaing, Tahar Haddad and A. Salvadory, *A variational convergence problem with antiperiodic boundary conditions*, Pacific journal of optimization. 6, (2010), 153-176.

[18] C. Castaing, A.G. Ibrahim and M. Yarou, *Some contributions to nonconvex sweeping process*, J. Nonlinear Convex Anal. 10, (2009), 1-20.

[19] C. Castaing, A. Jofre, and A. Salvadory, *Control problems governed by functional evolution inclusions with Young measures*, J. Nonlinear Convex Anal. 5, (2004), 131–152.

[20] C. Castaing, A. Salvadory and T. Thibault, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process*, J. Nonlinear Convex Anal. 2, (2001), 217-241.

[21] C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 580 Springer-Verlag, Berlin (1977).

[22] J. F Couchouron and R. Precup, *Anti-periodic solution for second order differential inclusions*, Elec. J. Differential Equations. (2004), 1-17.

[23] K. Deimling, *Multivalued differential equations*, De Gruyter Ser. Nonlin. Anal. Appl., Berlin, (1992).

[24] R. Descombes, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[25] D. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, Grundlehren Math. Wiss. 219, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[26] J. F. Edmond, A. and L. Thibault, *Relaxiation and optimal control problem involving a perturbed sweeping process* , Math. program, Ser. B. 104 (2005), 347–373.

[27] Tahar Haddad, *L'étude de la sous-différentiabilité des fonctions non convexes et ses applications en économie, théorie des jeux et aux inclusions différentielles du premier*

et second ordre . Thèse de Doctorat en Sciences, Sétif, (2007).

[28] Tahar Haddad, *Nonconvex Differential Variational Inequality and State-Dependent Sweeping Process*, Journal of Optimization Theory an Applications, Springer (USA), volume 159, issue 2, (2013), 386-398.

[29] Tahar Haddad, *Differential Inclusion Governed by State Dependent Sweeping Process*, International Journal of Difference Equations, Vol 8, N1, (2013), 63-70.

[30] Touma Haddad and Tahar Haddad, *Existence and uniqueness of anti-periodic solutions for nonlinear third-order differential inclusions*, Elect Journal of Differential Equations, 8, (2013), 1-10.

[31] Touma Haddad and Tahar Haddad, *State Dependent Sweeping Process with Perturbation*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer (USA), 41, (2013), 273-281.

[32] Touma Haddad and Tahar Haddad, *Existence of solutions to the state dependent sweeping process with delay*, Journal of Nonlinear Sciences and Applications, Vol 7, N2, (2014), 70-77.

[33] Touma Haddad and Tahar Haddad, *Delay perturbed state-dependent sweeping process*, Applicable Analysis, (Taylor and Francis) accepted (2014).

[34] Tahar Haddad and L. Thibault, *Mixed semicontinuous perturbations of nonconvex sweeping processes*, Mathematical Programming, Ser. B. 123, (2010), 225-240.

[35] Tahar Haddad, A. Jourani, and L. Thibault, *Reduction of sweeping process to unconstrained differential inclusion*, Pacific Journal of Optimization. 4, (2008), 493-512.

[36] A. Haraux, *Anti-periodic solutions of some nonlinear evolution equations*, Manuscripta. Math. 63, (1989) 479-505.

[37] C. Henry, *An existence result for a class of differential equation with multivalued right-hand side*, J. Math. Anal. Appl. 41, (1973), 1979-1986.

[38] M. Kisielewicz, *Differential inclusions and optimal control*, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Boston. London.(1991).

[39] M. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 12, (1998), 179-191.

[40] J. J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Diff. Eqs. 26, (1977), 347-374.

[41] M. D. P. Monteiro Marques, *Differential inclusions in nonsmooths mechanical problems, Shokcks and dry Friction*, Progress in Nonlinear Differential Equations an Their Applications, Birkhauser. 9, (1993).

[42] H. Okochi, *On the existence of periodic solution of some nonlinear abstract parabolic equations*, J. Math. soc. Japon **40** (1988) 541-553.

[43] H. Okochi, *On the existence of anti-periodic solutions to nonlinear evolutions equations associated with odd subdifferential operators*, J. Funct. Aal. 90, (1990) 246-258.

[44] P. Souplet, *Optimal uniqueness condition for the anti-periodic solutions of some nonlinear parabolic equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. vol. 32, No. 2, (1998), 279-286.

[45] L. Thibault, *Proprietes des sous-differentiels de fonctions localement Lipschitziennes definies sur un espace de Banach separable*, These, Universite de montpellier2, France, (1976).

[46] M. Yarou, *Problèmes aux limites pour une classe d'équations différentielles*. Thèse de Doctorat D'état, Constantine, (2003).