REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse
Par

Belhannache Farida

Thème

ÉTUDE QUALITATIVE DU COMPORTEMENT DES SOLUTIONS DE CERTAINS ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Soutenue le 14/09/2017 devant le jury composé de :

Président :	Mr. A. **Boubakir**	M.C.A	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Rapporteur :	Mr. N. **Touafek**	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examinateurs :	Mr. M. S. **Abdelouahab**	M.C.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila
	Mr. A. **Ardjouni**	M.C.A	U. M. Chérif Messaadia, Souk Ahras
	Mr. H. **Khellaf**	M.C.A	U. Mentouri, Constantine 1

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour réaliser ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Mr. Nouressadat Touafek, professeur à l'université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette thèse.
Je remercie également Mr. Ahsene Boubakir, Maître de conférece à l'Université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. J'adresse un grand merci à Mr. Mohamed-Salah Abdelouahab, Maître de conférence au Centre Universitaire de Mila pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail. Je tiens à remercier Mr. Abdelouahab Ardjouni, Maître de conférece à l'Université Mohamed-Chérif Messaadia-Souk Ahras, d'avoir accepté de juger ce travail. Je remercie Mr. Hassane Khellaf, Maître de conférence à l'Université frères Mentouri-Constantine d'avoir accepté d'examiner ma thèse et faire partie du jury.

Mes vifs remerciements vont également à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père, ma mère, mon mari, mes soeurs et mes frères. Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude des propriétés qualitatives des solutions de quelques équations et systèmes d'équations aux différences non linéaires.
La première partie de la thèse étudie les propriétés qualitatives des solutions de deux équations aux différences rationnelles, la première est d'ordre trois et la deuxième est d'ordre supérieur.
La deuxième partie de la thèse est liée dans sa première section à l'étude du comportement asymptotique et la périodicité des solutions d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois. La deuxième section de cette partie est consacrée à l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre deux.
La dernière partie de la thèse donne des résultats sur la périodicité et la bornitude des solutions d'un système d'équations aux différences de type max.

Mots-clés : Equations aux différences, comportement global, oscillation, systèmes d'équations aux différences, stabilité, périodicité.

Abstract

The aim of this thesis is the study of global asymptotic behavior of solutions of some nonlinear difference equations and systems of nonlinear difference equations.
The first part of the thesis studies the behavior of solutions of two rational difference equations, the first is of order three and the second is of higher order.
The second part of the thesis is devoted in its first section to the study of the asymptotics and the periodicity of the solutions of a system of rational three order difference equations. The second section of this part is devoted to the asymptotics stability of the solutions of a system of two rational difference equations of order two.
The last part of the thesis gives the periodic character and the boundedness nature of the positive solutions of a system of max-type difference equations.

Key words : Difference equations, global behavior, oscillatory, systems of difference equations, stability, periodicity.

Arab

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **8**

1 Définitions et résultats préliminaires **11**

1.1 Équations aux différences linéaires 11

1.2 Équations aux différences non linéaires 13

1.3 Systèmes d'équations aux différences non linéaires 16

2 Comportement asymptotique des solutions de deux équations aux différences non linéaires **20**

2.1 Sur une équation aux différences rationnelle d'ordre trois 21

2.1.1 Stabilité locale 22

2.1.2 Stabilité globale et bornitude 27

2.2 Sur une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur 38

2.2.1 Cas $\alpha > 0$ 39

2.2.2 Cas $\alpha = 0$ 56

2.3 Exemples numériques 59

3 Sur quelques systèmes d'équations aux différences non linéaires **61**

3.1 Étude du comportement des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordre trois 62

3.1.1 Comportement global 63
3.1.2 Périodicité des solutions 68
3.1.3 Oscillation et existence d'une solution non bornée 69
3.2 Étude du comportement des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordre deux 70
3.2.1 Stabilité locale et globale 71
3.2.2 Oscillation 76

4 Sur un système d'équations aux différences de type max 78
4.1 Bornitude des solutions 79
4.2 Périodicité des solutions 83

Conclusion et perspectives 92

Bibliographie 93

Introduction

Les équations aux différences (récurrentes) sont des équations qui donnent une liaison entre au moins deux images d'une suite. L'utilisation des suites récurrentes remonte au début de 2000 avant Jésus-Christ chez les babyloniens, pour approcher les racines par des fractions. Phytagore aussi étudia les nombres figuratifs par les suites récurrentes et utilisa un système d'équations aux différences linéaires pour résoudre l'équation de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ et approximer $\sqrt{2}$.
Environ 250 av.JC, Archimède employa une équation aux différences non linéaire pour calculer la circonférence d'un cercle. En 1202, Fibonacci formula son problème de lapin qui conduisit à la suite de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$, puis, environ 1634, Girard Albert donna l'expression générale de la suite de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
En 1769, Euler utilisa, pour la première fois, les équations aux différences linéaires pour approximer les solutions des équations différentielles.
Les équations aux différences sont devenues un outil de valeur et ont beaucoup d'importance dans plusieurs domaines et disciplines scientifiques et ceci par leurs nombreuses applications dans les sciences appliquées tels que l'économie, la biologie, la théorie des probabilités, l'ecologie,...etc (voir par exemple [3, 26, 35, 46]). En effet, d'une part elles sont utilisées pour la simulation des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, dans l'analyse numérique pour la résolution des équations à

l'aide des suites, avec la recherche de la valeur approchée de la solution par exemple le schéma numérique d'Euler ou de Runge-Kutta. D'une autre part, elle se sont utilisées en modélisation des phénomènes de la vie réelle, notamment en dynamique des populations. Le premier modèle est dû au économiste Britanique Thomas Malthus qui le proposa en 1798. Ce modèle est écrit sous la forme $x_{n+1} = (1+r)x_n$, où r est une constante qui représente le taux de reproduction de la population et x_n (resp. x_{n+1}) désigne la taille de la population étudiée à l'instant n (resp. à l'instant $n+1$).
La résolution des équations aux différences non linéaires est une tache, en générale, très difficile puisque il n'existe pas des méthodes ou des démarches générales à suivre pour les résoudre. Ceci nous ramène à l'étude qualitative des solutions qui permet de comprendre le comportement asymptotique des solutions de l'équation considérée. Cette étude fait généralement autour des points d'équilibre qui sont des solutions constantes de l'équation étudiée. Au cours de ces dernières années, l'étude du comportement asymptotique des solutions des équations aux différences non linéaires a attiré l'attention de plusieurs chercheurs [1, 2, 9-15, 17-24, 27, 28, 32-34, 36-45, 47, 48].
L'objectif de cette thèse est l'étude du comportement asympotique des solutions de quelques équations et systèmes d'équations aux différences non linéaires. Cette étude nous a permis d'obtenir des résultats concernant la stabilité locale et globale des points d'équilibre par la méthode de linéarisation.

Cette thèse est composée de quatres chapitres.
Dans le premier chapitre, nous commençons par donner quelques notions sur les équations aux différences linéaires. Nous présentons en suite la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation (resp. un système d'équations) aux différences non linéaire par la linéarisation.
Le deuxième chapitre comporte deux parties. La première, voir [5], est consacrée à l'étude du comportement des solutions de l'équation aux différences rationnelle d'ordre trois suivante

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n^p x_{n-2}^q}, \ n = 0, 1, ...$$

qui est une généralisation de l'équation, lorsque $p = q = 1$, étudié dans [1].
Dans la deuxième partie, voir [6], on s'intéresse à l'étude du comportement des solutions de l'équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur

$$\frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D\prod_{i=l}^{k} x_{n-2i}^{m_i}}, \ n = 0, 1, ...$$

Cette étude généralise celle de Abo-Zeid [2] lorsque $m_i = 1$, pour tout $l \leq i \leq k$.
Dans le troisième chapitre, motivé par [11] et [34], on présente une étude du comportement asymptotique des solutions des deux systèmes d'équations aux différences rationnelles suivants, voir [4]

$$t_{n+1} = \frac{\alpha t_{n-2}}{\beta + \gamma z_n^k z_{n-1}^k z_{n-2}^k}, \quad z_{n+1} = \frac{\alpha' z_{n-2}}{\beta' + \gamma' t_n^k t_{n-1}^k t_{n-2}^k}, \quad n = 0, 1, ...,$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{A + y_n^p y_{n-1}^q}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{B + x_n^p x_{n-1}^q}, \quad n = 0, 1, ...$$

Le quatrième chapitre est consacré à donner un résultat sur la périodicité et la bornitude des solutions du système d'équations aux différences de type max suivant, voir [7]

$$x_{n+1} = \frac{\max\{A, y_n\}}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{\max\{A, x_n\}}{y_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ...$$

Nous terminerons cette thèse par une conclusion générale récapitulant les résultats obtenus et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons regrouper quelques notions de bases et des résultats fondamentaux concernant les équations aux différences qui seront utiles dans la suite de notre travail. Pour plus de résultats et de détails, nous renvoyons aux références [16, 25, 30].
Dans tout ce qui suit on désignera par k un entier strictement positif et $\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, ...\}$ où n_0 est un nombre naturel.

1.1 Équations aux différences linéaires

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g(n), \qquad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.1}$$

avec $p_i(n)$, $i = \overline{1,k}$ et $g(n)$ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ s'appelle équation aux différences linéaire d'ordre k.

Définition 1.1.2 *On appelle équation homogène associée à l'équation* (1.1) *l'équation*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.2}$$

Définition 1.1.3 *Une suite* $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est dite solution de l'équation* (1.1) *si elle satisfait cette équation.*

Observons que si nous précisions k conditions initiales pour l'équation (1.1)

$$y_{n_0} = c_0, \;\; y_{n_0+1} = c_1, \; \ldots \; , \; y_{n_0+k-1} = c_{k-1}, \tag{1.3}$$

où les $c_i, \; i = \overline{0, k-1}$ sont des constantes réelles, alors on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g(n), \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \\ y_{n_0} = c_0, \;\; y_{n_0+1} = c_1, \;\; \ldots, \;\; y_{n_0+k-1} = c_{k-1}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Théorème 1.1.1 *Le problème* (1.4) *admet une solution unique.*

Définition 1.1.4 *On appelle équation aux différences linéaire homogène à coefficients constants d'ordre k toute équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1 y_{n+k-1} + \cdots + p_k y_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.5}$$

avec $p_i, \; i = \overline{1, k}$ *sont des constantes réelles et* $p_k \neq 0$.

Définition 1.1.5 *L'équation*

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \tag{1.6}$$

est appelée équation caractéristique associée à l'équation (1.5).
Le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k+1} + \cdots + p_k \tag{1.7}$$

est appelé polynôme caractéristique associé à l'équation (1.5).

Lemme 1.1.1 *Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1.5). Alors*

1. *S est un espace vectoriel de dimension k.*
2. *Si λ_i, $i = \overline{1,k}$, sont des racines distinctes du polynome $P(\lambda)$ défini par (1.7), alors $\{\lambda_i^n\}_{i=1}^k$ est une base de l'espace S.*
3. *Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ où $r < k$ sont des racines du polynome $P(\lambda)$ défini par (1.7), de multipicités $m_1, \cdots, m_r$ respectivement avec $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$, alors $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \cdots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n, \cdots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \cdots, \lambda_r^n, n\lambda_r^n, \cdots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\}$ est une base de l'espace S.*

1.2 Équations aux différences non linéaires

Dans cette section, on désigne par I une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *Soit $f : I^{k+1} \longrightarrow I$ une fonction continue, alors l'équation aux différences d'ordre $k+1$ suivante*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

est dite non linéaire si elle n'est pas de la forme (1.1).

Définition 1.2.2 *Une solution de l'équation (1.8) est une suite $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ qui satifait l'équation (1.8) pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Si nous précisions $k+1$ conditions initiales

$$x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I,$$

alors

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, x_{-1}, ..., x_{-k}) \\ x_2 &= f(x_1, x_0, ..., x_{1-k}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

et la solution $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ existe et unique pour tout $n \geq -k$ et elle est définie par les conditions initiales.

Définition 1.2.3 *On dit que $\overline{x} \in I$ est un point d'équilibre de l'équation (1.8) si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}).$$

Définition 1.2.4 *Soient $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.8) et $\overline{x}$ un point d'équilibre de la même équation.*
On dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est non oscillatoire autour du point $\overline{x}$ si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad x_n > \overline{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

ou

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad x_n < \overline{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

sinon on dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est oscillatoire autour du point $\overline{x}$.

Définition 1.2.5 *Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation (1.8).*

1. *On dit que $\overline{x}$ est localement stable* [1] *si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.8) avec les conditions initiales $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I$ vérifiant*

$$| x_{-k} - \overline{x} | + | x_{-k+1} - \overline{x} | + \cdots + | x_0 - \overline{x} | < \delta,$$

   alors

$$| x_{-k} - \overline{x} | < \varepsilon, \quad \forall n \geq -k.$$

2. *On dit que $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable* [2] *si $\overline{x}$ est localement stable, et s'il existe $\gamma > 0$ tel que si $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.8) avec les conditions initiales $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I$ vérifiant*

$$| x_{-k} - \overline{x} | + | x_{-k+1} - \overline{x} | + \cdots + | x_0 - \overline{x} | < \gamma,$$

   alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \overline{x}.$$

[1] Certaines réferences utilise le mot stable
[2] Certaines réferences utilise le mot asymptotiquement stable

3. *On dit que $\overline{x}$ est globalement attractif si pour toute solution $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation (1.8) avec les conditions initiales $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I$, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \overline{x}.$$

4. *On dit que $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable si $\overline{x}$ est localement stable et globalement attractif.*

5. *On dit que $\overline{x}$ est instable si $\overline{x}$ n'est pas localement stable.*

Définition 1.2.6 *Soit $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.8) et soit $p \geq 1$ un entier.*

1. *On dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est éventuellement périodique de période p s'il existe un entier $N \geq -k$ tel que*

$$x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \geq N.$$

2. *Si $N = -k$ on dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est périodique de période p.*

Définition 1.2.7 *Soit $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.8).*
On dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est permanente si $\exists\, m, M > 0$ et si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que

$$m \leq x_n \leq M, \quad \forall n \geq N.$$

Maintenant on suppose que

$$\begin{aligned} f : \ I^{k+1} &\longrightarrow I \\ (u_0, u_1, ..., u_k) &\longrightarrow f(u_0, u_1, ..., u_k) \end{aligned}$$

est une fonction différentiable dans un voisinage du point $(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x})$, où $\overline{x}$ est un point d'équilibre de l'équation (1.8). Soit $p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x})$ pour $i = 0, 1, \ldots, k$ les dérivées partielles de f au point d'équilibre $\overline{x}$ par rapport à $u_0, u_1, \ldots, u_k$ respectivement.

Définition 1.2.8 *L'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.9}$$

est appelée équation linéaire associée à l'équation (1.8) autour du point $\overline{x}$, et l'équation

$$\lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_{k-1}\lambda - p_k = 0 \tag{1.10}$$

est appelée équation caractéristique de l'équation (1.9) autour du point $\overline{x}$.

Théorème 1.2.1 *(Stabilité par linéarisation)[25] Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation (1.8).*

1. *Si toutes les racines de l'équation caractéristique (1.10) sont dans le disque unité ouvert, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une racine de l'équation caractéristique (1.10) de module supérieur strictement à un, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est instable.*

1.3 Systèmes d'équations aux différences non linéaires

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et

$$f : I^{k+1} \times J^{r+1} \to I,\ g : I^{k+1} \times J^{r+1} \to J$$

deux fonctions de classe C^1. On considère le système d'équations aux différences suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-r}), \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-r}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.11}$$

où r est un entier strictement positif. Alors, si on associe ce système avec un ensemble des conditions initiales $(x_i, y_i) \in I \times J$, $i \in \{-k, \ldots, 0\}$ et $j \in \{-r, \ldots, 0\}$, le système (1.11) admet une solution unique $\{(x_n, y_n)\}_{n=-l}^{+\infty}$, où $l = min(r, k)$.
L'écriture vectorielle du système (1.11) est

$$X_{n+1} = F(X_n),\ n = 0, 1, ..., \tag{1.12}$$

où

$$F: \begin{array}{ccc} I^{k+1} \times J^{r+1} & \to & I^{k+1} \times J^{r+1} \\ \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} & \mapsto & F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_r) \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ g(u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_r) \\ v_0 \\ \vdots \\ v_{r-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$X_n = (x_n,\ x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n,\ y_{n-1}, \ldots, y_{n-r})^t.$$

Définition 1.3.1 *Une solution $\{(x_n, y_n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ du système (1.11) est éventuellement périodique de période $p \in \mathbb{N}$ si $\exists\ n_0 \geq -l$, tel que*

$$x_{n+p} = x_n \ \ et \ \ y_{n+p} = y_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Si $n_0 = -l$, on dit que $\{(x_n, y_n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ est périodique de période p.

Définition 1.3.2 *Un point $(\overline{x}, \overline{y}) \in I \times J$ est dit point d'équilibre du système (1.11) si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}),$$

et

$$\overline{y} = g(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}).$$

Définition 1.3.3 *Un vecteur $\overline{X} \in I^{k+1} \times J^{r+1}$ est dit point d'équilibre du système (1.12) si*

$$\overline{X} = F(\overline{X}).$$

Remarque 1.3.1 *Il est clair que $(\overline{x}, \overline{y})$ est un point d'équilibre du système (1.11) si et seulement si $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}, \overline{y})$ est un point d'équilibre du system (1.12).*

Dans tout ce qui suit on désigne par $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^{k+r+2}$.

Définition 1.3.4 *Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (1.12).*

1. *On dit que $\overline{X}$ est localement stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ est une solution du système (1.12) avec la condition initiale $X_0 \in I^{k+r+2}$ vérifiant*

$$\|X_0 - \overline{X}\| < \delta,$$

alors

$$\|X_n - \overline{X}\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sinon on dit que $\overline{X}$ est instable.

2. *On dit que $\overline{X}$ est localement asymptotiquement stable si $\overline{X}$ est localement stable, et s'il existe $\gamma > 0$ tel que si $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ est une solution du système (1.12) avec la condition initiale $X_0 \in I^{k+r+2}$ vérifiant*

$$\|X_n - \overline{X}\| < \gamma,$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = \overline{X}.$$

3. *On dit que $\overline{X}$ est globalement asymptotiquement stable si $\overline{X}$ est localement stable et si pour toute solution $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ du système (1.12) avec la condition initiale $X_0 \in I^{k+r+2}$, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = \overline{X}.$$

Définition 1.3.5 *Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (1.12). Supposons $F \in C^1(I^{k+r+2}, I^{k+r+2})$. On appelle système linéaire associé au système (1.12) autour du point $\overline{X}$ le système*

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.13}$$

où $A = D_F$ est la matrice jacobienne de F au point $\overline{X}$.

Théorème 1.3.1 *[30] Considérons le système (1.12) où $F \in C^1(I^{k+r+2}, I^{k+r+2})$. Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (1.12).*

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne D_F se trouvent dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est localement asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une valeurs propres de la matrice jacobienne D_F a un module supérieur strictement à un, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est instable.*

Définition 1.3.6 *Soient $\{(x_n, y_n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ une solution du système (1.11) et $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du même système.*
On dit que $\{(x_n, y_n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ est oscillatoire autour du point $(\overline{x}, \overline{y})$ si $\{x_n\}_{n=-l}^{+\infty}$ est oscillatoire autour de $\overline{x}$ ou $\{y_n\}_{n=-l}^{+\infty}$ est oscillatoire autour de $\overline{y}$.
Si $\{x_n\}_{n=-l}^{+\infty}$ et $\{y_n\}_{n=-l}^{+\infty}$ sont non oscillatoires autour de $\overline{x}$ et $\overline{y}$ respectivement on dit que $\{(x_n, y_n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ est non oscillatoire autour de $(\overline{x}, \overline{y})$.

Théorème 1.3.2 *(Théorème de Rouché)[8] Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert simplement connexe U du plan complexe $\mathbb{C}$. Soit K un compact contenu dans U et dont le bord Γ admet un paramétrage de classe C^1 par morceaux. On suppose que*

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)|, \quad \forall \ \zeta \in \Gamma.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans K.

CHAPITRE 2

Comportement asymptotique des solutions de deux équations aux différences non linéaires

Dans ce chapitre on va donner quelques résultats sur le comportement asymptotique des solutions de deux équations aux différences non linéaires, la première est une équation aux différences rationnelle d'ordre trois et la deuxième est une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur.

2.1 Sur une équation aux différences rationnelle d'ordre trois

Dans [1] les auteurs ont étudié le comportement global des solutions de l'équation aux différences non linéaire

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n x_{n-2}},\ n = 0, 1, ..., \tag{2.1}$$

où les conditions initiales x_0, x_{-1}, x_{-2} et les paramètres A, B sont des nombres réels positifs et C, D sont des nombres réels strictement positifs. L'objectif de cette partie est l'étude du comportement asymptotique de l'équation aux différences plus générale suivante

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n^p x_{n-2}^q},\ n = 0, 1, ..., \tag{2.2}$$

où les conditions initiales x_0, x_{-1}, x_{-2} et le paramètre B sont des nombres réels positifs, les paramètres A, C, D sont des nombres reéls strictement positifs et p, q sont des entiers strictement positifs fixés.

Lemme 2.1.1 *L'équation (2.2) est équivalente à l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{1 + y_n^p y_{n-2}^q},\ n = 0, 1, ..., \tag{2.3}$$

où $\alpha = \frac{A}{C}\left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p+q}}$ *et* $\beta = \frac{B}{C}$.

Preuve. On pose $y_n = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p+q}} x_n$, pour tout $n \geq -2$. Alors

$$x_n = \left(\frac{C}{D}\right)^{\frac{1}{p+q}} y_n$$

et

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p+q}} x_{n+1} \\
&= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p+q}} \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n^p x_{n-2}^q} \\
&= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p+q}} \frac{A + B\left(\frac{C}{D}\right)^{\frac{1}{p+q}} y_{n-1}}{C + Cy_n^p y_{n-2}^q} \\
&= \frac{\frac{A}{C}\left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p+q}} + \frac{B}{C} y_{n-1}}{1 + y_n^p y_{n-2}^q} \\
&= \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{1 + y_n^p y_{n-2}^q}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.1

(i) Du Lemme 2.1.1, il suffit d'étudier l'équation (2.3) à la place de l'équation (2.2).

(ii) Toute solution de l'équation (2.2) est strictement positive.

2.1.1 Stabilité locale

Premièrement on détermine les points d'équilibre positifs de l'équation (2.3), puis on discute leurs stabilité locale.

Lemme 2.1.2 *On a les assertions suivantes*

1. *Supposons $\beta \geq 1$. Alors l'équation (2.3) a un point d'équilibre positif unique dans* $\left]\left(\frac{\beta-1}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}, +\infty\right[$.
2. *Supposons $\beta < 1$. Alors*
   - **(i)** *Si $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$, alors l'équation (2.3) a un point d'équilibre positif unique dans* $\left]0, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[$.
   - **(ii)** *Si $\alpha > (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$, alors l'équation (2.3) a un point d'équilibre positif unique dans* $\left]\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}, +\infty\right[$.

Preuve. Soit $\overline{y} \in]0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation (2.3). Alors

$$\overline{y} = \frac{\alpha + \beta\overline{y}}{1 + \overline{y}^{p+q}}, \tag{2.4}$$

donc

$$\overline{y}(1 + \overline{y}^{p+q}) = \alpha + \beta\overline{y}.$$

C'est à dire $\overline{y}$ est un point d'équilibre de l'équation (2.3) si et seulement si $\overline{y}$ est un zéro de la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^{p+q+1} + (1 - \beta)x - \alpha. \tag{2.5}$$

Maintenant on considère la fonction ci-dessus, alors

$$f(0) = -\alpha < 0, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

et

$$f'(x) = (p + q + 1)x^{p+q} + 1 - \beta.$$

1. Si $\beta \geq 1$, alors

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{\beta - 1}{p + q + 1}\right)^{\frac{1}{p+q}}.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{\beta - 1}{p + q + 1}\right)^{\frac{1}{p+q}}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \left(\frac{\beta - 1}{p + q + 1}\right)^{\frac{1}{p+q}}.$$

Donc la fonction f est croissante sur $\left]\left(\frac{\beta-1}{p+q+1}\right)^{\frac{1}{p+q}}, +\infty\right[$. Mais

$$\left(\frac{\beta - 1}{p + q + 1}\right)^{\frac{1}{p+q}} \leq \left(\frac{\beta - 1}{p + q - 1}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{\beta - 1}{p + q - 1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) &= \left(\frac{\beta - 1}{p + q - 1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} + (1 - \beta)\left(\frac{\beta - 1}{p + q - 1}\right)^{\frac{1}{p+q}} - \alpha \\ &= -(p + q - 2)\left(\frac{\beta - 1}{p + q - 1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} - \alpha < 0. \end{aligned}$$

Donc $\exists!\ x \in \left]\left(\frac{\beta-1}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}, +\infty\right[$, $f(x) = 0$.

2. Supposons que $\beta < 1$. Alors f est croissante sur $]0, +\infty[$.

   (i) Si $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$, donc

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) &= \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} + (1-\beta)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}} - \alpha \\ &= (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} - \alpha > 0 \end{aligned}$$

   D'où $\exists!\ x \in \left]0, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[$, $f(x) = 0$.

   (ii) Si $\alpha > (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$, alors

$$f\left(\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) = (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} - \alpha < 0.$$

   D'où $\exists!\ x \in \left]\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}, +\infty\right[$, $f(x) = 0$.

■

Théorème 2.1.1 *Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.3). Alors*

1. *$\overline{y}$ est instable si $\beta \geq 1$.*
2. *Si $\beta < 1$, alors*

   (i) *$\overline{y}$ est localement asymptotiquement stable si $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$.*

   (ii) *$\overline{y}$ est instable si $\alpha > (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$.*

Preuve. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u,v,w) = \frac{\alpha+\beta v}{1+u^p w^q}$ et soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.3). On a

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w)|_{(\overline{y},\overline{y},\overline{y})} \\ &= \frac{-pu^{p-1}w^q(\alpha+\beta v)}{(1+u^p w^q)^2}|_{(\overline{y},\overline{y},\overline{y})} \\ &= \frac{-p\overline{y}^{p+q-1}(\alpha+\beta\overline{y})}{(1+\overline{y}^{p+q})^2}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.4) on trouve

$$p_1 = -\frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}.$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w)|_{(\overline{y},\overline{y},\overline{y})} \\ &= \frac{\beta}{1+u^p w^q}|_{(\overline{y},\overline{y},\overline{y})} \\ &= \frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)|_{(\overline{y},\overline{y},\overline{y})} \\ &= \frac{-qw^{q-1}u^p(\alpha+\beta v)}{(1+u^p w^q)^2}|_{(\overline{y},\overline{y},\overline{y})} \\ &= \frac{-q\overline{y}^{p+q-1}(\alpha+\beta\overline{y})}{(1+\overline{y}^{p+q})^2}. \end{aligned}$$

De (2.4) on obtient

$$p_3 = -\frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}.$$

Donc l'équation linéaire associée à l'équation (2.3) autour de $\overline{y}$ est

$$z_{n+1} = -\frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}z_n + \frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}z_{n-1} - \frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}z_{n-2},\ n = 0,1,...$$

L'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^3 + \frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda^2 - \frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda + \frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}} = 0.$$

1. Supposons que $\beta \geq 1$ et considérons la fonction g_1 définie par

$$g_1(\lambda) = \lambda^3 + \frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda^2 - \frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda + \frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}. \tag{2.6}$$

   On a

$$\beta + (p+q)\overline{y}^{p+q} > 1 + \overline{y}^{p+q}$$

   car $\beta \geq 1$ et $p+q > 1$, donc

$$g_1(-1) = -1 + \frac{\beta + (p+q)\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}} > -1 + \frac{1+\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}} = 0.$$

   Et comme

$$\lim_{\lambda\to-\infty} g_1(\lambda) = -\infty,$$

   alors la fonction g_1 a un zéro λ_1 dans $]-\infty,-1[$ avec $|\lambda_1| > 1$. Appliquons le Théorème 1.2.1 on trouve le résultat.

2. Supposons maintenant que $\beta < 1$.

   (i) Soit $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$. On considère les fonctions $h_1, h_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$h_1(\lambda) = \lambda^3$$
$$h_2(\lambda) = \frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda^2 - \frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda + \frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}.$$

   Donc

$$|h_2(\lambda)| \leq \left|\frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}\right| + \left|\frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}\right| + \left|\frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}\right|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1,$$

   et alors

$$|h_2(\lambda)| \leq \frac{(p+q)\overline{y}^{p+q} + \beta}{1+\overline{y}^{p+q}} = \frac{(p+q-1)\overline{y}^{p+q} + \overline{y}^{p+q} + \beta}{1+\overline{y}^{p+q}}$$

   Mais le Lemme 2.1.2 implique $\overline{y} < \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}$,

   i.e.,

$$(p+q-1)\overline{y}^{p+q} + \overline{y}^{p+q} + \beta < 1 + \overline{y}^{p+q},$$

   d'où

$$|h_2(\lambda)| < 1 = |h_1(\lambda)|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1.$$

   D'après le théorème de Rouché toutes les racines de

$$\lambda^3 + \frac{p\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda^2 - \frac{\beta}{1+\overline{y}^{p+q}}\lambda + \frac{q\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}} = 0,$$

   se situent à l'intérieur du disque unité ouvert. Une autre application du Théorèm 1.2.1 donne le résultat.

   (ii) Soit $\alpha > (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$. On considère la fonction g_1 définie par (2.6), alors

$$g_1(-1) = -1 + \frac{\beta + (p+q)\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}} = -1 + \frac{\beta + \overline{y}^{p+q} + (p+q-1)\overline{y}^{p+q}}{1+\overline{y}^{p+q}}$$

   D'après le Lemme 2.1.2 on a $\overline{y} > \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, donc

$$\overline{y}^{p+q}(p+q-1) > 1-\beta,$$

   d'où

$$\beta + \overline{y}^{p+q} + (p+q-1)\overline{y}^{p+q} > 1 + \overline{y}^{p+q}.$$

Donc $g_1(-1) > 0$, et comme

$$\lim_{\lambda \to -\infty} g_1(\lambda) = -\infty,$$

Alors l'équation $g_1(\lambda) = 0$ a une racine λ_2 dans $]-\infty, -1[$ avec $|\lambda_2| > 1$, ce qui implique l'instabilité du point $\overline{y}$ dans ce cas.

■

2.1.2 Stabilité globale et bornitude

Théorème 2.1.2 *Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.3) et soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de la même équation.*

(a) *Si $y_{-1} < \overline{y} \leq y_{-2}, y_0$, alors*

$$y_{2n} \geq \overline{y} \text{ et } y_{2n+1} < \overline{y}, \ \forall n \geq 0.$$

(b) *Si $y_{-2}, y_0 < \overline{y} \leq y_{-1}$, alors*

$$y_{2n} < \overline{y} \text{ et } y_{2n+1} > \overline{y}, \ \forall n \geq 0.$$

Preuve. Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.3) et soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de la même équation.

(a) On suppose que $y_{-1} < \overline{y} \leq y_0, y_{-2}$.

On a

$$y_1 = \frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0^p y_{-2}^q} < \frac{\alpha + \beta \overline{y}}{1 + \overline{y}^{p+q}} = \overline{y},$$

et

$$y_2 = \frac{\alpha + \beta y_0}{1 + y_1^p y_{-1}^q} > \overline{y}.$$

Par induction on trouve

$$y_{2n} \geq \overline{y} \text{ et } y_{2n+1} < \overline{y}, \ \forall n \geq 0.$$

(b) De la même manière que (a) on montre (b).

■

Corollaire 2.1.1 *Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.3). Si l'une des conditions ci-dessus est satisfaite, alors la solution $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ de l'équation (2.3) est oscillatoire autour de $\overline{y}$.*

Lemme 2.1.3 *Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3). Alors*

$$y_{2n+1} < \sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k + \beta^{n+1} y_{-1}, \ \forall n \geq 0. \tag{2.7}$$

$$y_{2n} < \sum_{k=0}^{n-1} \alpha\beta^k + \beta^{n} y_{0}, \ \forall n \geq 1. \tag{2.8}$$

Preuve. Il suffit de montrer (2.7) par récurrence et de la même manière on peut montrer l'estimation (2.8).

(i) n=0, on a

$$y_1 = \frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0^p y_{-2}^q} < \alpha + \beta y_{-1} = \sum_{k=0}^{0} \alpha\beta^k + \beta^{0+1} y_{-1}.$$

(ii) Supposons que

$$y_{2n+1} < \sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k + \beta^{n+1} y_{-1}$$

et on montre que

$$y_{2(n+1)+1} < \sum_{k=0}^{n+1} \alpha\beta^k + \beta^{n+2} y_{-1}.$$

On a

$$y_{2(n+1)+1} = y_{2n+2+1} = \frac{\alpha + \beta y_{2n+1}}{1 + y_{2n+2}^p y_{2n}^q} < \alpha + \beta y_{2n+1}$$

$$< \alpha + \beta \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k + \beta^{n+1} y_{-1} \right) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha\beta^k + \beta^{n+2} y_{-1}.$$

De (i) et (ii) on obtient (2.7).

■

Lemme 2.1.4 *Supposons que $\beta < 1$. Alors toute solution de l'équation (2.3) est permanente.*

Preuve. D'après le Lemme 2.1.3 on a

$$y_{2n+1} < \sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k + \beta^{n+1} y_{-1}, \ \forall n \geq 0$$

et

$$y_{2n} < \sum_{k=0}^{n-1} \alpha\beta^k + \beta^n y_0, \ \forall n \geq 1.$$

Donc

$$y_{2n+1} < \alpha \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} + \beta^{n+1} y_{-1}, \ \forall n \geq 0$$

et

$$y_{2n} < \alpha \frac{1-\beta^{n}}{1-\beta} + \beta^{n} y_{0}, \ \forall n \geq 1.$$

Mais $\beta < 1$, alors

$$y_{2n+1} < \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-1}, \ \forall n \geq 0$$

et

$$y_{2n} < \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{0}, \ \forall n \geq 1,$$

d'où

$$y_n < \frac{\alpha}{1-\beta} + c = M, \ \forall n \geq 0,$$

avec $c = max(y_0, y_{-1})$.

D'autre part on a

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{1 + y_n^p y_{n-2}^q} \geq \frac{\alpha}{1 + y_n^p y_{n-2}^q} > \frac{\alpha}{1 + M^{p+q}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Donc

$$\exists\, m = \frac{\alpha}{1 + M^{p+q}}, \quad y_n \geq m, \quad \forall n \geq 3.$$

et la démonstration est complète. ■

Lemme 2.1.5 *Supposons que $\beta < 1$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3). Si $\Lambda = \limsup_{n\to+\infty} y_n$ et $\lambda = \liminf_{n\to+\infty} y_n$, alors Λ et λ vérifient les inégalités suivantes*

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^{p+q}} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^{p+q}}. \tag{2.9}$$

Preuve. Comme $\beta < 1$, alors la solution $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ est bornée. Donc pour tout $\varepsilon \in (0, \lambda)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\lambda - \varepsilon \leq y_n \leq \Lambda + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0,$$

donc

$$\lambda - \varepsilon \leq y_{n-1} \leq \Lambda + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 + 1,$$

$$\lambda - \varepsilon \leq y_{n-2} \leq \Lambda + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 + 2.$$

D'où

$$\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon) \leq \alpha + \beta y_{n-1} \leq \alpha + \beta(\Lambda + \varepsilon), \ \forall n \geq n_0 + 1,$$

$$(\lambda - \varepsilon)^q \leq y_{n-2}^q \leq (\Lambda + \varepsilon)^q, \ \forall n \geq n_0 + 2,$$

$$(\lambda - \varepsilon)^p \leq y_n^p \leq (\Lambda + \varepsilon)^p, \ \forall n \geq n_0,$$

donc

$$1 + (\lambda - \varepsilon)^{p+q} \leq 1 + y_n^p y_{n-2}^q \leq 1 + (\Lambda + \varepsilon)^{p+q}, \ \forall n \geq n_0 + 2.$$

Alors

$$\frac{\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon)}{1 + (\Lambda + \varepsilon)^{p+q}} \leq y_{n+1} \leq \frac{\alpha + \beta(\Lambda + \varepsilon)}{1 + (\lambda - \varepsilon)^{p+q}}, \ \forall n \geq n_0 + 2.$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \longrightarrow +\infty$ on trouve (2.9). ■

Théorème 2.1.3 *Supposons que $\beta < 1$. Si $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$, alors le point d'équilibre $\overline{y} \in \left]0, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[$ est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3). Comme $\beta < 1$, alors la solution $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ est bornée. Soient $\Lambda = \limsup_{n\to+\infty} y_n$ et $\lambda = \liminf_{n\to+\infty} y_n$. En utilisant le Lemme 2.1.5, on trouve

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^{p+q}} \leq \lambda \tag{2.10}$$

et

$$\Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^{p+q}}. \tag{2.11}$$

De (2.10) on trouve

$$\alpha + (\beta - 1)\lambda \leq \lambda\Lambda^{p+q}. \tag{2.12}$$

En multipliant les deux membres de (2.12) par λ^{p+q-1} on obtient

$$\alpha\lambda^{p+q-1} + (\beta - 1)\lambda^{p+q} \leq \lambda^{p+q}\Lambda^{p+q}. \tag{2.13}$$

De (2.11) on a

$$\Lambda\lambda^{p+q} \leq \alpha + (\beta - 1)\Lambda \tag{2.14}$$

En multipliant les deux membres de (2.14) par Λ^{p+q-1} on obtient

$$\lambda^{p+q}\Lambda^{p+q} \leq \alpha\Lambda^{p+q-1} + (\beta - 1)\Lambda^{p+q}. \tag{2.15}$$

En combinant (2.13) et (2.15) on trouve

$$(1-\beta)\lambda^{p+q} - \alpha\lambda^{p+q-1} \geq (1-\beta)\Lambda^{p+q} - \alpha\Lambda^{p+q-1}. \tag{2.16}$$

Considérons maintenant la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(x) = (1-\beta)x^{p+q} - \alpha x^{p+q-1}.$$

Donc

$$h'(x) = (p+q)(1-\beta)x^{p+q-1} - (p+q-1)\alpha x^{p+q-2},$$

d'où

$$h'(x) = x^{p+q-2}\left[(p+q)(1-\beta)x - (p+q-1)\alpha\right],$$

et

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)},$$

ce qui implique

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}.$$

C'est à dire h est croissante sur $\left]\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}, +\infty\right[$. Comme $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$, alors le Lemme 2.1.2 donne

$$\overline{y} \in \left]0, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[\quad \text{et} \quad f\left(\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) > 0$$

où f est la fonction définie par (2.5).

Montrons maintenant que $f\left(\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}\right) < 0$.

On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}\right) &= \left(\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}\right)^{p+q+1} + \frac{\alpha(p+q-1)}{p+q} - \alpha \\ &= \left(\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}\right)^{p+q+1} - \frac{\alpha}{p+q} \\ &= \frac{\alpha}{p+q}\left[\left(\frac{\alpha}{p+q}\right)^{p+q}\left(\frac{p+q-1}{1-\beta}\right)^{p+q+1} - 1\right], \end{aligned}$$

mais

$$\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{p+q}\right)^{p+q} < \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{p+q+1},$$

donc

$$\left(\frac{\alpha}{p+q}\right)^{p+q}\left(\frac{p+q-1}{1-\beta}\right)^{p+q+1} < 1,$$

d'où $f\left(\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}\right) < 0$. Alors $\overline{y} \in \left]\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[$.

Supposons que $\Lambda \neq \lambda$, i.e $\lambda < \Lambda$. On a, par définition, $\lambda \leq \overline{y} \leq \Lambda$ est comme

$$\overline{y} \in \left]\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[,$$

donc

$$\lambda, \Lambda \in \left]\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[.$$

Alors $h(\lambda) < h(\Lambda)$ car h est croissante sur $\left]\frac{\alpha(p+q-1)}{(p+q)(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[$, ce qui est contradictoire avec (2.16), d'où $\lambda = \Lambda = \overline{y}$ et $\overline{y}$ est globalement attractif.

La stabilité asymptotique globale de $\overline{y}$ est obtenue par la combinaison de la stabilité asymptotique locale et l'attractivité globale de $\overline{y}$ lorsque $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}}$. ■

Lemme 2.1.6 *Supposons $\beta > 2$. Alors*

1. *Si $x > \sqrt[p+q]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}$, alors $\sqrt[p+q]{\beta-1} > \frac{\alpha}{x^{p+q}-\beta+1}$.*
2. *Si $x > \sqrt[p+q]{\beta-1}$ et $y > \frac{\alpha}{x^{p+q}-\beta+1}$, donc $y > \frac{\alpha+\beta y}{1+x^{p+q}}$.*

Preuve. Soit $\beta > 2$.

1. Supposons $x > \sqrt[p+q]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}$, alors

$$x^{p+q} > \left(\sqrt[p+q]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}\right)^{p+q},$$

donc

$$x^{p+q} > \sum_{k=0}^{p+q} C_k^{p+q}\left(\sqrt[p+q]{\beta-1}\right)^k\left(\frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}\right)^{p+q-k},$$

et comme

$$\sum_{k=0}^{p+q} C_k^{p+q}\left(\sqrt[p+q]{\beta-1}\right)^k\left(\frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}\right)^{p+q-k} = C_0^{p+q}\frac{\alpha^{p+q}}{\beta-1} + \cdots$$
$$+C_{p+q-1}^{p+q}\frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}\left(\sqrt[p+q]{\beta-1}\right)^{p+q-1} + C_{p+q}^{p+q}(\beta-1),$$

alors

$$x^{p+q} > C_{p+q-1}^{p+q}\frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}\left(\sqrt[p+q]{\beta-1}\right)^{p+q-1} + C_{p+q}^{p+q}(\beta-1),$$

i.e.,

$$x^{p+q} > (p+q)\frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}(\beta-1)^{\frac{p+q-1}{p+q}} + \beta - 1.$$

Donc

$$x^{p+q} - \beta + 1 > (p+q)\frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}(\beta-1)^{\frac{p+q-1}{p+q}},$$

d'où

$$(x^{p+q} - \beta + 1)\sqrt[p+q]{\beta-1} > (p+q)\alpha(\beta-1)^{\frac{p+q-1}{p+q}} > \alpha$$

car $p+q > 1$ et $\beta - 1 > 1$.

Donc

$$\sqrt[p+q]{\beta-1} > \frac{\alpha}{x^{p+q} - \beta + 1}.$$

2. Soient $x > \sqrt[p+q]{\beta-1}$ et $y > \frac{\alpha}{x^{p+q}-\beta+1}$, alors

$$x^{p+q} - \beta + 1 > 0 \quad \text{et} \quad (x^{p+q} - \beta + 1)y > \alpha,$$

d'où

$$y > \frac{\alpha + \beta y}{1 + x^{p+q}}.$$

■

Théorème 2.1.4 *Supposons $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3) avec les conditions initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 vérifient*

$$\frac{\alpha}{y_{-1}^{p+q} - \beta + 1} < y_0 < y_{-2} < \sqrt[p+q]{\beta - 1} \tag{2.17}$$

et

$$y_{-1} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta - 1}}. \tag{2.18}$$

Alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{\alpha}{y_{2n-1}^{p+q} - \beta + 1} < y_{2n} < y_{2n-2} < \sqrt[p+q]{\beta - 1} \tag{2.19}$$

et

$$y_{2n-1} > y_{2n-3} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta - 1}}. \tag{2.20}$$

Preuve. (Par récurrence)

Supposons que $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3) avec les conditions initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 vérifient (2.17) et (2.18).

1. n=1

   De (2.17) on trouve

   $$y_0^p y_{-2}^q < \beta - 1,$$

   alors

   $$y_1 = \frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0^p y_{-2}^q} > \frac{\alpha + \beta y_{-1}}{\beta},$$

   donc

   $$y_1 > \frac{\alpha}{\beta} + y_{-1}, \tag{2.21}$$

   d'où

   $$y_1 > y_{-1} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta - 1}}.$$

   De l'inégalité précédente on trouve

   $$y_1^p y_{-1}^q > y_{-1}^{p+q}.$$

   Donc

   $$y_2 = \frac{\alpha + \beta y_0}{1 + y_1^p y_{-1}^q} < \frac{\alpha + \beta y_0}{1 + y_{-1}^{p+q}}.$$

De (2.17) et (2.18) on a

$$y_0 > \frac{\alpha}{y_{-1}^{p+q} - \beta + 1} \text{ et } y_{-1} > \sqrt[p+q]{\beta - 1}.$$

En appliquant le Lemme 2.1.6, on trouve

$$\frac{\alpha + \beta y_0}{1 + y_{-1}^{p+q}} < y_0,$$

d'où $y_2 < y_0$.

Montrons maintenant que $y_2 > \frac{\alpha}{y_1^{p+q} - \beta + 1}$.

Puisque $y_{-1} < y_1$ alors

$$y_0 > \frac{\alpha}{y_{-1}^{p+q} - \beta + 1} \Rightarrow y_0 > \frac{\alpha}{y_1^{p+q} - \beta + 1},$$

donc

$$y_0 > \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + y_1^{p+q} - y_1^{p+q} + \beta - 1}{y_1^{p+q} - \beta + 1}\right],$$

d'où

$$y_0 > \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + y_1^p y_{-1}^q}{y_1^{p+q} - \beta + 1} - 1\right],$$

ce qui implique

$$\alpha + \beta y_0 > \alpha\left[\frac{1 + y_1^p y_{-1}^q}{y_1^{p+q} - \beta + 1}\right],$$

i.e.,

$$y_2 = \frac{\alpha + \beta y_0}{1 + y_1^p y_{-1}^q} > \frac{\alpha}{y_1^{p+q} - \beta + 1}.$$

2. Supposons que

$$\frac{\alpha}{y_{2n-1}^{p+q} - \beta + 1} < y_{2n} < y_{2n-2} < \sqrt[p+q]{\beta - 1}$$

et

$$y_{2n-1} > y_{2n-3} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta - 1}}$$

et montrons que

$$\frac{\alpha}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1} < y_{2n+2} < y_{2n} < \sqrt[p+q]{\beta - 1}$$

et

$$y_{2n+1} > y_{2n-1} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta - 1}}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$y_{2n}^{p} y_{2n-2}^{q} < \beta - 1,$$

donc

$$y_{2n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{2n-1}}{1 + y_{2n}^{p} y_{2n-2}^{q}} > \frac{\alpha + \beta y_{2n-1}}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + y_{2n-1},$$

d'où

$$y_{2n+1} > y_{2n-1} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta - 1}}. \tag{2.22}$$

De (2.22) on trouve

$$y_{2n+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}^{p} y_{2n-1}^{q}} < \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n-1}^{p+q}},$$

Puisque

$$y_{2n-1} > \sqrt[p+q]{\beta - 1} \text{ et } y_{2n} > \frac{\alpha}{y_{2n-1}^{p+q} - \beta + 1},$$

alors le Lemme 2.1.6 implique

$$y_{2n+2} < y_{2n} < \sqrt[p+q]{\beta - 1}.$$

Pour compléter la démonstration il suffit de montrer que $y_{2n+2} > \frac{\alpha}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1}$.
De (2.22) on obtient

$$y_{2n} > \frac{\alpha}{y_{2n-1}^{p+q} - \beta + 1} \Rightarrow y_{2n} > \frac{\alpha}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1},$$

donc

$$y_{2n} > \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + y_{2n+1}^{p+q} - y_{2n+1}^{p+q} + \beta - 1}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1}\right],$$

d'où

$$y_{2n} > \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + y_{2n+1}^{p} y_{2n-1}^{q}}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1} - 1\right],$$

alors

$$\alpha + \beta y_{2n} > \alpha\left[\frac{1 + y_{2n+1}^{p} y_{2n-1}^{q}}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1}\right],$$

donc

$$y_{2n+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}^{p} y_{2n-1}^{q}} > \frac{\alpha}{y_{2n+1}^{p+q} - \beta + 1}.$$

■

Corollaire 2.1.2 *Supposons $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3) avec les conditions y_{-2}, y_{-1}, y_0 vérifient (2.17) et (2.18). Alors la sous suite $\{y_{2n}\}_{n=0}^{+\infty}$ (resp. $\{y_{2n+1}\}_{n=0}^{+\infty}$), de $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$, est décroissante (resp. est croissante).*

Lemme 2.1.7 *Supposons $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3) avec les conditions y_{-2}, y_{-1}, y_0 vérifient (2.17) et (2.18). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$y_{2n+2} < y_0. \tag{2.23}$$

$$y_{2n+1} > (n+1)\frac{\alpha}{\beta} + y_{-1}. \tag{2.24}$$

Preuve.

- Du Corollaire (2.1.2) on trouve (2.23).
- Montrons, par récurrence, (2.24).

a) n=0, c'est (2.21).

b) Supposons que

$$y_{2n+1} > (n+1)\frac{\alpha}{\beta} + y_{-1}$$

et montrons que

$$y_{2n+3} > (n+2)\frac{\alpha}{\beta} + y_{-1}.$$

De (2.19) on trouve

$$\begin{aligned} y_{2n+3} &= \frac{\alpha + \beta y_{2n+1}}{1 + y_{2n+2}^p y_{2n}^q} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{2n+1} \\ &> \frac{\alpha}{\beta} + (n+1)\frac{\alpha}{\beta} + y_{-1}, \end{aligned}$$

d'où (2.24).

■

Lemme 2.1.8 *Supposons $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3) avec les conditions y_{-2}, y_{-1}, y_0 vérifient (2.17) et (2.18). Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2n+1} = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_{2n} = 0. \tag{2.25}$$

Preuve. Supposons $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.3) avec les conditions initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 vérifient (2.17) et (2.18).
De l'inégalité (2.24) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2n+1} = +\infty.$$

De (2.23) on trouve

$$y_{2n+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}^p y_{2n-1}^q} < \frac{\alpha + \beta y_0}{1 + y_{2n+1}^p y_{2n-1}^q}.$$

En passant à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$ on obtient $\lim_{n\to+\infty} y_{2n} = 0$. ■

Corollaire 2.1.3 *Si $\beta > 2$. Alors l'équation (2.3) a des solutions non bornées.*

2.2 Sur une équation aux différences rationnelle d'ordre supérieur

Abo-Zeid [2] a discuté le comportement global et la bornitude des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D\prod_{i=l}^{k} x_{n-2i}}, \; n = 0, 1, ..., \tag{2.26}$$

où A, B sont des nombres réels positifs et C, D sont des nombres réels strictement positifs et l, k sont des entiers positifs tel que $l \leq k$.
Motivé par ce papier on va étudier dans cette section le comportement asymptotique des solutions de l'équation aux differences suivante

$$\frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D\prod_{i=l}^{k} x_{n-2i}^{m_i}}, \; n = 0, 1, ..., \tag{2.27}$$

où les conditions initiales $x_{-2k-1}, x_{-2k}, \cdots, x_{-1}, x_0$ et les paramètres C, D sont des nombres réels strictement positifs, les paramètres A, B sont des nombres réels positifs, k, l sont des entiers positifs fixés et $m_i, i = \overline{l, k}$ sont des entiers strictement positifs fixés tel que $l \leq k$.
Dans tout ce qui suit, on pose $p = \sum_{i=l}^{k} m_i$.

Lemme 2.2.1 *L'equation (2.27) est équivalente à l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-2k-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}}, \ n = 0, 1, ..., \tag{2.28}$$

où $\alpha = \frac{A}{C}\left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p}}$ *et* $\beta = \frac{B}{C}$.

Preuve. Soit $x_n = \left(\frac{C}{D}\right)^{\frac{1}{p}} y_n$ pour tout $n \geq -2k-1$, alors

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p}} x_{n+1} \\
&= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{A + Bx_{n-2k-1}}{C + D\prod_{i=l}^{k} x_{n-2i}^{m_i}} \\
&= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{A + B\left(\frac{C}{D}\right)^{\frac{1}{p}} y_{n-2k-1}}{C + C\prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}} \\
&= \frac{\frac{A}{C}\left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{B}{C} y_{n-2k-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}} \\
&= \frac{\alpha + \beta y_{n-2k-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.1 *Du Lemme 2.2.1, il suffit d'étudier l'équation (2.28) à la place de l'équation (2.27).*

2.2.1 Cas $\alpha > 0$

Tout d'abord on va étudier l'équation (2.28) dans le cas où $\alpha > 0$.

Stabilité locale

Ici on détermine les points d'équilibre de l'équation (2.28) puis on discute leurs stabilité locale.

Lemme 2.2.2 *On a les assertions suivantes*

1. *L'équation (2.28) a un seul point d'équilibre positif dans* $\left]\left(\frac{\beta-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, +\infty\right[$ *si* $\beta \geq 1$.
2. *Supposons* $\beta < 1$. *Alors*
   (i) *L'équation (2.28) a un seul point d'équilibre positif dans* $\left]0, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$ *si* $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$.
   (ii) *L'équation (2.28) a un seul point d'équilibre positif dans* $\left]\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, +\infty\right[$ *si* $\alpha > p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$.

Preuve. Soit $\overline{y}$ un point d'équilibre de l'équation (2.28). Alors

$$\overline{y} = \frac{\alpha + \beta\overline{y}}{1 + \overline{y}^p} \tag{2.29}$$

donc

$$\overline{y}(1 + \overline{y}^p) = \alpha + \beta\overline{y},$$

c'est à dire $\overline{y}$ est un point d'équilibre de l'équation (2.28) si et seulement si $\overline{y}$ est un zéro de la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^{p+1} + (1 - \beta)x - \alpha. \tag{2.30}$$

Maintenant on considère la fonction ci-dessus, alors

$$f(0) = -\alpha < 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus on a

$$f'(x) = (p + 1)x^p + (1 - \beta).$$

Donc

1. Si $\beta \geq 1$, on a

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc la fonction f est croissante sur $\left]\left(\frac{\beta-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, +\infty\right[$.

Mais

$$f\left(\left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p}} + (1-\beta)\left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - \alpha$$

$$= -p\left(\frac{\beta - 1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p}} - \alpha < 0.$$

Donc $\exists!\ x \in \left]\left(\frac{\beta-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, +\infty\right[$, $f(x) = 0$.

2. Supposons que $\beta < 1$. Alors f est croissante sur $]0, +\infty[$.

(i) Soit $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$, donc

$$f\left(\left(\frac{1 - \beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \left(\frac{1 - \beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}} + (1-\beta)\left(\frac{1 - \beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} - \alpha$$

$$= p\left(\frac{1 - \beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}} - \alpha > 0.$$

D'où $\exists!\ x \in \left]0, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$, $f(x) = 0$.

(ii) Soit $\alpha > p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$, alors

$$f\left(\left(\frac{1 - \beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = p\left(\frac{1 - \beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}} - \alpha < 0.$$

D'où $\exists!\ x \in \left]\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, +\infty\right[$, $f(x) = 0$.

■

Théorème 2.2.1 *Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.28). Alors*

1. *$\overline{y}$ est instable si $\beta \geq 1$.*
2. *Si $\beta < 1$, on a deux cas*
   (i) *$\overline{y}$ est localement asymptotiquement stable si $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$.*
   (ii) *$\overline{y}$ est instable si $\alpha > p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$.*

Preuve. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u_0, u_1, ..., u_{2k+1}) = \frac{\alpha + \beta u_{2k+1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} u_{2i}^{m_i}}$$

et soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.28). Alors pour tout $i \in 0, \ldots, k$ on a

$$\begin{aligned}
p_{2i} &= \frac{\partial g}{\partial u_{2i}}(u_0, u_1, ..., u_{2k+1})|_{(\overline{y},...,\overline{y})} \\
&= \frac{-m_i u_{2i}^{m_i-1} \prod_{j=l, i\neq j}^{k} u_{2j}^{m_j}(\alpha + \beta u_{2k+1})}{(1 + \prod_{i=l}^{k} u_{2i}^{m_i})^2}|_{(\overline{y},...,\overline{y})} \\
&= \frac{-m_i \overline{y}^{m_i-1} \prod_{j=l, i\neq j}^{k} \overline{y}^{m_j}(\alpha + \beta\overline{y})}{(1 + \prod_{i=l}^{k} \overline{y}^{m_i})^2} \\
&= \frac{-m_i \overline{y}^{p}(\alpha + \beta\overline{y})}{(1 + y^p)^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.29) on trouve

$$p_{2i} = \frac{-m_i \overline{y}^p}{1 + y^p}, \ \forall\ i \in \{0, \ldots, k\}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
p_{2k+1} &= \frac{\partial g}{\partial u_{2k+1}}(u_0, u_1, ..., u_{2k+1})|_{(\overline{y},...,\overline{y})} \\
&= \frac{\beta}{1 + \prod_{i=l}^{k} u_{2i}^{m_i}}|_{(\overline{y},...,\overline{y})}. \\
&= \frac{\beta}{1 + \overline{y}^p}.
\end{aligned}$$

Donc l'équation linéaire associée à l'équation (2.28) autour du point $\overline{y}$ est

$$z_{n+1} = -\frac{\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p}\sum_{i=l}^{k} m_i z_{n-2i} + \frac{\beta}{1+\overline{y}^p} z_{n-2k-1},\ n \in \mathbb{N}$$

L'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^{2k+2} + \frac{\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p}\sum_{i=l}^{k} m_i \lambda^{2k-2i+1} - \frac{\beta}{1+\overline{y}^p} = 0. \tag{2.31}$$

1. Supposons que $\beta \geq 1$ et considérons la fonction G définie par

$$G(\lambda) = \lambda^{2k+2} + \frac{\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p}\sum_{i=l}^{k} m_i \lambda^{2k-2i+1} - \frac{\beta}{1+\overline{y}^p}. \tag{2.32}$$

   On a

$$\beta + p\overline{y}^p > 1 + \overline{y}^p$$

   car $\beta \geq 1$ et $p > 1$, donc

$$G(-1) = 1 - \frac{\beta + p\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p} < 1 - \frac{1+\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p} = 0.$$

   Et comme

$$\lim_{\lambda \to -\infty} G(\lambda) = +\infty. \tag{2.33}$$

   Alors l'équation (2.31) a une racine λ_1 dans $]-\infty, -1[$ avec $|\lambda_1| > 1$. D'après le Theorème 1.2.1, on déduit que le point $\overline{y}$ est instable dans ce cas.

2. Supposons $\beta < 1$. Alors

   (i) Si $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$. On considère les fonctions $h_1, h_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ défines par

$$h_1(\lambda) = \lambda^{2k+2}$$

   et

$$h_2(\lambda) = \frac{\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p}\sum_{i=l}^{k} m_i \lambda^{2k-2i+1} - \frac{\beta}{1+\overline{y}^p},$$

   donc, $\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$ on a

$$|h_2(\lambda)| \leq \frac{\beta + p\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p} = \frac{\beta + (p-1)\overline{y}^p + \overline{y}^p}{1+\overline{y}^p}.$$

D'autre part on a d'après le Lemme 2.2.2

$$\overline{y} < \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique

$$(p-1)\overline{y}^p < 1-\beta,$$

d'où

$$|h_2(\lambda)| < \frac{1+\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p} = 1 = |h_1(\lambda)|$$

En appliquant le théorème de Rouché on trouve que toutes les racines de (2.31) se situent à l'intérieur du disque unité ouvert. Du Théorème 1.2.1 on trouve le résultat.

(ii) Soit $\alpha > p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$. On considère la fonction G définie par (2.32), alors

$$G(-1) = 1 - \frac{\beta + p\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p} = 1 - \frac{\beta + \overline{y}^p + (p-1)\overline{y}^p}{1+\overline{y}^p} \tag{2.34}$$

D'après le Lemme 2.2.2 on a

$$\overline{y} > \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$\overline{y}^p(p-1) > 1-\beta,$$

d'où

$$\beta + \overline{y}^p + (p-1)\overline{y}^p > 1 + \overline{y}^p. \tag{2.35}$$

En combinant (2.33), (2.34) et (2.35) on trouve que la fonction G a un zéro λ_2 dans $]-\infty, -1[$ avec $|\lambda_2| > 1$ et le Théorème 1.2.1 donne le résultat.

■

Oscillation et bornitude des solutions

Théorème 2.2.2 *Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.28) et soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de la même équation. Alors si l'une des deux conditions suivantes*

(a_1) $y_{-2k-1}, y_{-2k+1}, ..., y_{-1} < \overline{y} \leq y_{-2k}, y_{-2k+2}, ..., y_0$

(a_2) $y_{-2k}, y_{-2k+2}, ..., y_0 < \overline{y} \leq y_{-2k-1}, y_{-2k+1}, ..., y_{-1}$

est satisfaite, la solution $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ *est oscillatoire autour du point* $\overline{y}$.

Preuve. Soit $\overline{y}$ le point d'équilibre positif de l'équation (2.28) et soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de la même équation.

1. Supposons que la condition (a_1) est satisfaite et l'autre cas se démontre de la même manière.

   On a
$$y_1 = \frac{\alpha + \beta y_{-2k-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{-2i}^{m_i}} < \frac{\alpha + \beta\overline{y}}{1 + \overline{y}^p} = \overline{y}$$
   et
$$y_2 = \frac{\alpha + \beta y_{-2k}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{1-2i}^{m_i}} > \frac{\alpha + \beta\overline{y}}{1 + \overline{y}^p} = \overline{y}.$$
$$y_3 = \frac{\alpha + \beta y_{-2k+1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{-2i+2}^{m_i}} < \frac{\alpha + \beta\overline{y}}{1 + \overline{y}^p} = \overline{y}$$
   et
$$y_4 = \frac{\alpha + \beta y_{-2k+2}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{-2i+3}^{m_i}} > \frac{\alpha + \beta\overline{y}}{1 + \overline{y}^p} = \overline{y}.$$
   Par induction on déduit que
$$y_{2n} \geq \overline{y} \ \ et \ \ y_{2n+1} < \overline{y}, \quad \forall n \geq 0.$$
   Donc $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ est oscillatoire autour du point $\overline{y}$.

■

Lemme 2.2.3 *Soit* $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ *une solution de l'équation (2.28). Alors*

1.
$$y_{2(k+1)n} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0, \quad \forall n \geq 0.$$

2.
$$y_{2(k+1)n+2i} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-2k+2i-2}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

3.
$$y_{2(k+1)n+2i+1} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-2k+2i-1}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall i \in \{0, \ldots, k\}.$$

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.28). Alors

$$y_{n+1} \leq \alpha + \beta y_{n-2k-1}, \quad n \geq 0. \tag{2.36}$$

1. Par récurrence sur n on montre la première estimation.

   Pour $n = 0$, on a
$$y_0 \leq y_0 = \sum_{j=0}^{-1} \alpha\beta^j + \beta^0 y_0.$$
   Supposons que pour un certain n on a
$$y_{2(k+1)n} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0$$
   et montrons que
$$y_{2(k+1)(n+1)} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_0.$$
   En utilisant (2.36) on trouve
$$y_{2(k+1)(n+1)} = y_{2(k+1)n+2k+1+1} \leq \alpha + \beta y_{2(k+1)n}$$
   et d'après l'hypothèse on obtient
$$y_{2(k+1)(n+1)} \leq \alpha + \beta \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0 \right) = \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_0.$$
   D'où l'estimation recherchée.

2. Pour $i = 1$, montrons par récurrence sur n que
$$y_{2(k+1)n+2} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-2k}, \quad \forall n \geq 0.$$

On a pour $n = 0$, (2.36) implique

$$y_2 \leq \alpha + \beta y_{-2k}.$$

Supposons maintenant que

$$y_{2(k+1)n+2} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-2k}$$

et montrons que

$$y_{2(k+1)(n+1)+2} \leq \sum_{j=0}^{n+1} \alpha\beta^j + \beta^{n+2} y_{-2k}.$$

En utilisant (2.36) on trouve

$$y_{2(k+1)(n+1)+2} = y_{2(k+1)n+2k+3+1} \leq \alpha + \beta y_{2(k+1)n+2}$$

et d'après l'hypothèse on obtient

$$y_{2(k+1)(n+1)+2} \leq \alpha + \beta \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-2k} \right) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha\beta^j + \beta^{n+2} y_{-2k}.$$

Par induction sur i on peut montrer les cas $i \in \{2, ..., k\}$.

3. La preuve est similaire que celle de 2.

■

Proposition 2.2.1 *Supposons que $\beta < 1$. Alors, toute solution de l'équation (2.28) est permanente.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.28). Du Lemme 2.2.3 on a

$$y_{2(k+1)n} \leq \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n y_0, \quad \forall n \geq 0.$$

$$y_{2(k+1)n+2i} \leq \alpha \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} + \beta^{n+1} y_{-2k+2i-2}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

$$y_{2(k+1)n+2i+1} \leq \alpha \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} + \beta^{n+1} y_{-2k+2i-1}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall i \in \{0, ..., k\}.$$

Comme $\beta < 1$, alors

$$y_{2(k+1)n} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} + y_0, \quad \forall n \geq 0.$$

$$y_{2(k+1)n+2i} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2k+2i-2}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

$$y_{2(k+1)n+2i+1} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2k+2i-1}, \quad \forall\ n \geq 0, \quad \forall i \in \{0, ..., k\}.$$

C'est à dire pour tout $n \geq 0$ on a

$$\begin{array}{rcl}
y_{2(k+1)n} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_0. \\
y_{2(k+1)n+1} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2k-1}. \\
y_{2(k+1)n+2} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2k}. \\
y_{2(k+1)n+3} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2k+1}. \\
y_{2(k+1)n+4} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2k+2}. \\
\vdots & & \vdots \\
y_{2(k+1)n+2k-2} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-4}. \\
y_{2(k+1)n+2k-1} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-3}. \\
y_{2(k+1)n+2k} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-2}. \\
y_{2(k+1)n+2k+1} & \leq & \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-1}.
\end{array}$$

Donc

$$\exists\, M > 0, \quad y_n \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

où

$$M = \frac{\alpha}{1-\beta} max\left(1 + y_{-2k-1}, 1 + y_{-2k}, 1 + y_{-2k+1}, 1 + y_{-2k+2}, \ldots, 1 + y_{-1}, 1 + y_0\right).$$

En utilisant cette dernière inégalité on trouve

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-2k-1}}{1 + \prod\limits_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}} \geq \frac{\alpha}{1 + M^p} = m, \quad \forall n \geq 2k+1,$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.2.2 *Supposons $\beta < 1$. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.28) et soient $\Lambda = \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\lambda = \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$, alors Λ et λ vérifient l'estimation suivante*

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^p} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^p}. \tag{2.37}$$

Preuve. Soit $\beta < 1$ et soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.28). D'après la Proposition 2.2.1 la solution $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ est bornée. Par définition on a pour tout $\varepsilon \in (0, \lambda)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda - \varepsilon \leq y_n \leq \Lambda + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

donc

$$\lambda - \varepsilon \leq y_{n-2k-1} \leq \Lambda + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 + 2k + 1$$

et

$$1 + (\lambda - \varepsilon)^p \leq 1 + \prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i} \leq 1 + (\Lambda + \varepsilon)^p, \quad \forall n \geq n_0 + 2k,$$

ce qui implique

$$\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon) \leq \alpha + \beta y_{n-2k-1} \leq \alpha + \beta(\Lambda + \varepsilon), \quad \forall n \geq n_0 + 2k + 1$$

et

$$\frac{1}{1 + (\Lambda + \varepsilon)^p} \leq \frac{1}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}} \leq \frac{1}{1 + (\lambda + \varepsilon)^p}, \quad \forall n \geq n_0 + 2k.$$

Alors

$$\frac{\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon)}{1 + (\Lambda + \varepsilon)^p} \leq y_{n+1} \leq \frac{\alpha + \beta(\Lambda + \varepsilon)}{1 + (\lambda - \varepsilon)^p}, \quad \forall n \geq n_0 + 2k + 1.$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient (2.37). ■

Lemme 2.2.4 *Supposons $\beta > 2$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées*

1. *Si $x > \sqrt[p]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta-1}}$, alors $\sqrt[p]{\beta - 1} > \frac{\alpha}{x^p - \beta + 1}$.*
2. *Si $x > \sqrt[p]{\beta - 1}$ et $y > \frac{\alpha}{x^p - \beta + 1}$, alors $y > \frac{\alpha + \beta y}{1 + x^p}$.*

Preuve.

1. Soit $x > \sqrt[p]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta-1}}$, donc

$$x^p > \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left(\sqrt[p]{\beta - 1}\right)^k \left(\frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta - 1}}\right)^{p-k}.$$

De cette inégalité on trouve

$$x^p > \frac{\alpha^p}{\beta - 1} + (\beta - 1)^{\frac{p-1}{p}} \frac{\alpha p}{\sqrt[p]{\beta - 1}} + \beta - 1,$$

ce qui implique

$$x^p > (\beta-1)^{\frac{p-1}{p}} \frac{\alpha p}{\sqrt[p]{\beta-1}} + \beta - 1.$$

D'où

$$\sqrt[p]{\beta-1}(x^p - \beta + 1) > p\alpha\,(\beta-1)^{\frac{p-1}{p}} > \alpha,$$

car $\beta > 2$ et $p \geq 2$.

2. Supposons que

$$x > \sqrt[p]{\beta-1} \quad \text{et} \quad y > \frac{\alpha}{x^p - \beta + 1}.$$

Alors

$$(x^p - \beta + 1)y > \alpha,$$

d'où

$$(x^p + 1)y > \alpha + \beta y.$$

■

Théorème 2.2.3 *Supposons $\beta > 2$. Alors l'équation (2.28) a des solutions non bornées.*

Preuve. Supposons $\beta > 2$. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.28) avec les conditions initiales $y_{-2k-1}, y_{-2k}, y_{-2k+1}, ..., y_{-2}, y_{-1}, y_0$ vérifient

$$\frac{\alpha}{y_{-2k-1}^p - \beta + 1} < y_0 < y_{-2} < \cdots < y_{-2k} < \sqrt[p]{\beta-1} \tag{2.38}$$

et

$$y_{-1} > \cdots > y_{-2k+1} > y_{-2k-1} > \sqrt[p]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta-1}}. \tag{2.39}$$

On considère les sous suites de $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ suivantes

$$\{y_{2(k+1)n-2k+2j-1}\}_{n=0}^{+\infty} \;\; et \;\; \{y_{2(k+1)n-2k+2j}\}_{n=0}^{+\infty},$$

où $j \in \{0, \ldots, k\}$.

Montrons, par récurrence, que $\forall n \geq 1$ on a

$$\frac{\alpha}{y_{2(k+1)n-2k+2j-1}^p - \beta + 1} < y_{2(k+1)n-2k+2j} < y_{2(k+1)(n-1)-2k+2j} < \sqrt[p]{\beta-1} \tag{2.40}$$

et

$$y_{2(k+1)n-2k+2j-1} > y_{2(k+1)(n-1)-2k+2j-1} > \sqrt[p]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta-1}}. \tag{2.41}$$

c'est à dire la sous suite $\{y_{2(k+1)n-2k+2j-1}\}_{n=0}^{+\infty}$ (resp. $\{y_{2(k+1)n-2k+2j}\}_{n=0}^{+\infty}$) est croissante (resp. est décroissante).

a) Pour $n = 1$, on a par définition

$$y_{2j+1} = \frac{\alpha + \beta y_{2j-2k-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{2j-2i}^{m_i}}.$$

De (2.38) on trouve

$$\prod_{i=l}^{k} y_{2j-2i}^{m_i} < \beta - 1,$$

donc

$$y_{2j+1} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{2j-2k-1} > \sqrt[p+q]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p+q]{\beta-1}}. \tag{2.42}$$

On a aussi

$$y_{2j+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2j-2k}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{2j-2i+1}^{m_i}}.$$

De (2.39) on trouve $\prod_{i=l}^{k} y_{2j-2i+1}^{m_i} > y_{2j-2k+1}^{p}$, alors

$$y_{2j+2} < \frac{\alpha + \beta y_{2j-2k}}{1 + y_{2j-2k+1}^{p}}.$$

D'autre part on a

$$y_{2j-2k+1} > \sqrt[p]{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta-1}}$$

et

$$y_{2j-2k} > \frac{\alpha}{y_{-2k-1}^{p} - \beta + 1} > \frac{\alpha}{y_{-2j-2k+1}^{p} - \beta + 1}.$$

En appliquant le Lemme 2.2.4, on trouve

$$y_{2j+2} < y_{2j-2k} < \sqrt[p]{\beta-1}.$$

Montrons maintenant l'inégalité suivante

$$y_{2j+2} > \frac{\alpha}{y_{2j+1}^p - \beta + 1}.$$

De (2.38), (2.39) et (2.42) on a

$$y_{2j-2k} > \frac{\alpha}{y_{2k-1}^p - \beta + 1} > \frac{\alpha}{y_{2j-2k-1}^p - \beta + 1} > \frac{\alpha}{y_{2j+1}^p - \beta + 1},$$

donc

$$y_{2j-2k} > \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\beta + 1 + y_{2j+1}^p - y_{2j+1}^p - 1}{y_{2j+1}^p - \beta + 1}\right] = \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + y_{2j+1}^p}{y_{2j+1}^p - \beta + 1} - 1\right],$$

alors

$$y_{2j-2k} > \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{2j-2i+1}^{m_i}}{y_{2j+1}^p - \beta + 1}\right] - \frac{\alpha}{\beta},$$

ce qui implique

$$y_{2j+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2j-2k}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{2j-2i+1}^{m_i}} > \frac{\alpha}{y_{2j+1}^p - \beta + 1}.$$

b) Supposons maintenant qu'on a (2.40) et (2.41) et montrons les deux estimations suivantes

$$\sqrt[p]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta - 1}} < y_{2(k+1)n-2k+2j-1} < y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1} \tag{2.43}$$

et

$$\frac{\alpha}{y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j+1}^p - \beta + 1} < y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j} < y_{2(k+1)n-2k+2j} < \sqrt[p]{\beta - 1}. \tag{2.44}$$

De (2.40) on trouve

$$\prod_{i=l}^{k} y_{2(k+1)n+2j-2i}^{m_i} < y_{2(k+1)n+2j-2k}^p < \beta - 1,$$

donc

$$y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1} = \frac{\alpha + \beta y_{2(k+1)n-2k+2j-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{2(k+1)n+2j-2i}^{m_i}} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{2(k+1)n-2k+2j-1}, \tag{2.45}$$

d'où (2.43).

D'autre part on a

$$y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j} = \frac{\alpha + \beta y_{2(k+1)n-2k+2j}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{2(k+1)n+2j-2i+1}^{m_i}} < \frac{\alpha + \beta y_{2(k+1)n-2k+2j}}{1 + y_{2(k+1)n+2j-2k+1}^{p}},$$

alors

$$y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j} < \frac{\alpha + \beta y_{2(k+1)n-2k+2j}}{1 + y_{2(k+1)n+2j-2k-1}^{p}}$$

Comme

$$\sqrt[p]{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt[p]{\beta - 1}} < y_{2(k+1)n-2k+2j-1}$$

et

$$y_{2(k+1)n-2k+2j} > \frac{\alpha}{y_{-2k-1}^{p} - \beta + 1} > \frac{\alpha}{y_{2(k+1)n-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1},$$

alors une autre application du Lemme 2.2.4, donne

$$y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j} < y_{2(k+1)n-2k+2j}.$$

Montrons maintenant que

$$y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j} > \frac{\alpha}{y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1}. \tag{2.46}$$

De (2.40) et (2.43) on obtient

$$y_{2(k+1)n-2k+2j} > \frac{\alpha}{y_{2(k+1)n-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1} > \frac{\alpha}{y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1},$$

donc

$$\begin{aligned} y_{2(k+1)n-2k+2j} &> \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\beta + 1 + y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - 1}{y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1}\right] \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1 + y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p}}{y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1}\right] - \frac{\alpha}{\beta}, \end{aligned}$$

alors

$$\alpha + \beta y_{2(k+1)n-2k+2j} > \alpha\left[\frac{1 + y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p}}{y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p} - \beta + 1}\right]. \tag{2.47}$$

D'autre côté on a

$$\prod_{i=l}^{k} y_{2(k+1)n+2j-2i+1}^{m_i} < \prod_{i=l}^{k} y_{2(k+1)(n+1)+2j-2i+1}^{m_i} < y_{2(k+1)(n+1)-2k+2j-1}^{p}. \tag{2.48}$$

En combinant (2.47) et (2.48) on trouve l'inégalité (2.46).

Maintenant de l'inégalité (2.45), on obtient

$$y_{2(k+1)n-2k+2j-1} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{2(k+1)(n-1)-2k+2j-1} > \cdots > n\frac{\alpha}{\beta} + y_{-2k+2j-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Ce qui implique

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2(k+1)n-2k+2j-1} = +\infty, \quad \forall j \in \{0, \ldots, k\}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2(k+1)n-2k+2j} = 0, \ \forall j \in \{0, \ldots, k\}.$$

■

Stabilité globale

Le théorème suivant donne la stabilité globale du point d'équilibre positif de l'équation (2.28) dans le cas où $\beta < 1$ et $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$.

Théorème 2.2.4 *Supposons que $\beta < 1$. Si $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$, alors le point d'équilibre $\overline{y} \in]0, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}[$ de l'équation (2.28) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.28). Comme $\beta < 1$, alors la solution $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{\infty}$ est bornée. Soit $\Lambda = \limsup_{n\to+\infty} y_n$ et $\lambda = \liminf_{n\to+\infty} y_n$. En utilisant la Proposition 2.2.2, on obtient

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1 + \Lambda^p} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{\alpha + \beta\Lambda}{1 + \lambda^p}.$$

Donc

$$\alpha + \beta\lambda \leq \lambda + \lambda\Lambda^p, \tag{2.49}$$

et

$$\Lambda + \lambda^p\Lambda \leq \alpha + \beta\Lambda. \tag{2.50}$$

Multiplions (2.49) par λ^{p-1} et (2.50) par Λ^{p-1} on trouve

$$\alpha\lambda^{p-1} + \beta\lambda^p \leq \lambda^p + \lambda^p\Lambda^p, \tag{2.51}$$

et

$$\Lambda^p + \lambda^p\Lambda^p \leq \alpha\Lambda^{p-1} + \beta\Lambda^p. \tag{2.52}$$

De (2.52) on obtient

$$\lambda^p\Lambda^p \leq \alpha\Lambda^{p-1} + (\beta - 1)\Lambda^p. \tag{2.53}$$

En combinant (2.51) et (2.53) on trouve

$$\alpha\lambda^{p-1} + \beta\lambda^p \leq \lambda^p + \alpha\Lambda^{p-1} + (\beta - 1)\Lambda^p.$$

D'où

$$(1-\beta)\lambda^p - \alpha\lambda^{p-1} \geq (1-\beta)\Lambda^p - \alpha\Lambda^{p-1}. \tag{2.54}$$

Maintenant on considère la fonction $h :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = (1-\beta)x^p - \alpha x^{p-1}.$$

Alors

$$h'(x) = x^{p-2}\left[p(1-\beta)x - (p-1)\alpha\right],$$

donc la fonction h est croissante sur $\left]\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}, +\infty\right[$.

On a montré dans le Lemme (2.2.2) que si $\beta < 1$ et $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$, alors $\overline{y} \in \left]0, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$ et $f\left(\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right) > 0$ où f est la fonction définie par (2.30). Montrons maintenant que $f\left(\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}\right) < 0$, c'est à dire que $\overline{y} \in \left]\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$.

On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}\right) &= \left(\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}\right)^{p+1} + \frac{\alpha(p-1)}{p} - \alpha \\ &= \left(\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}\right)^{p+1} - \frac{\alpha}{p} \\ &= \frac{\alpha}{p}\left[\left(\frac{\alpha}{p}\right)^p\left(\frac{p-1}{1-\beta}\right)^{p+1} - 1\right], \end{aligned}$$

mais

$$\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{p}\right)^p < \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{p+1},$$

donc

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right)^p \left(\frac{p-1}{1-\beta}\right)^{p+1} < 1,$$

d'où $f\left(\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}\right) < 0$. Alors $\overline{y} \in \left]\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$.
Supposons que $\lambda \neq \Lambda$, i.e $\Lambda < \lambda$. On a, par définition, $\lambda \leq \overline{y} \leq \Lambda$ est comme

$$\overline{y} \in \left]\frac{\alpha(p-1)}{(p)(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$$

donc

$$\lambda, \Lambda \in \left]\frac{\alpha(p-1)}{p(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[.$$

Alors $h(\lambda) < h(\Lambda)$ car h est croissante sur $\left]\frac{\alpha(p)}{p(1-\beta)}, \left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right[$. Ce qui est contradictoire avec l'inégalité (2.54).
D'où, $\lambda = \Lambda = \overline{y}$ et $\overline{y}$ est globalement attractif. Et comme $\overline{y}$ est localement asymptotiquement stable alors il est globalement asymptotiquement stable.

■

2.2.2 Cas $\alpha = 0$

Maintenant on va étudier l'équation (2.28) dans le cas où $\alpha = 0$.
Il est clair que si $\alpha = 0$, l'équation (2.28) devient

$$y_{n+1} = \frac{\beta y_{n-2k-1}}{1 + \prod_{i=l}^{k} y_{n-2i}^{m_i}}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.55}$$

Lemme 2.2.5 *L'équation (2.55) a deux points d'équilibre, $\overline{y}_1 = 0$ et $\overline{y}_2 = (\beta - 1)^{\frac{1}{p}}$ si $\beta > 1$ et un seul point d'équilibre $\overline{y}_1 = 0$ si $\beta \leq 1$.*

Preuve. Considérons la fonction

$$F(y) = y(y^p + 1 - \beta). \tag{2.56}$$

Il est clair que $\overline{y}$ est un point d'équilibre de l'équation (2.55) si et seulement si $\overline{y}$ est un zéro de la fonction définie par (2.56).
De (2.56) on a

$$F(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \ \ ou \ \ y = (\beta - 1)^{\frac{1}{p}}.$$

■

De la même manière que la démonstration du Lemme 2.2.3 on peut montrer la proposition suivante

Proposition 2.2.3 *Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.55). Alors*

$$y_{2(k+1)n} \leq \beta^n y_0, \ \forall n \geq 0. \tag{2.57}$$

$$y_{2(k+1)n+2i} \leq \beta^{n+1} y_{-2k+2i-2}, \ \forall n \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{2.58}$$

$$y_{2(k+1)n+2i+1} \leq \beta^{n+1} y_{-2k+2i-1}, \ \ \forall n \geq 0, \ \ \forall i \in \{0, \ldots, k\}. \tag{2.59}$$

Lemme 2.2.6 *Supposons que $\beta < 1$. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.55). Alors*

$$\exists \, M > 0, \ \exists \, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ y_n \leq M, \ \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.2.1. ■

Théorème 2.2.5 *Supposons $\beta > 1$. Soit $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.55) et $\overline{y}_2 = (\beta - 1)^{\frac{1}{p}}$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée*
(b_1) $y_{-2k-1}, y_{-2k+1}, \ldots, y_{-1} < \overline{y}_2 \leq y_{-2k}, y_{-2k+2}, \ldots, y_0$
(b_2) $y_{-2k}, y_{-2k+2}, \ldots, y_0 < \overline{y}_2 \leq y_{-2k-1}, y_{-2k+1}, \ldots, y_{-1}$
alors la solution $\{y_n\}_{n=-2k-1}^{\infty}$ est oscillatoire autour du point $\overline{y}_2$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du Théorème 2.2.2. ■

Théorème 2.2.6 *On a les assertions suivantes*

1. *Le point d'équilibre $\overline{y}_1 = 0$ de l'équation (2.55) est localement asymptotiquement stable si $\beta < 1$ et il est instable si $\beta > 1$.*

2. *De plus, si $\beta < 1$ alors, $\overline{y}_1 = 0$ est globalement asymptotiquement stable.*
3. *Si $\beta > 1$, alors le point d'équilibre $\overline{y}_2 = (\beta - 1)^{\frac{1}{p}}$ de l'équation (2.55) est instable.*

Preuve.

1. L'équation linéaire associée à l'équation (2.55) autour du point d'équilibre $\overline{y}_1 = 0$ est
$$z_{n+1} = \beta z_{n-2k-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
L'équation caractéristique associée à cette équation est
$$\lambda^{2k+2} - \beta = 0. \tag{2.60}$$
Donc $|\lambda| < 1$ (resp. $|\lambda| > 1$) pour toutes les racines de (2.60) si $\beta < 1$ (resp. si $\beta > 1$). Alors, le point $\overline{y}_1 = 0$ est localement asymptotiquement stable si $\beta < 1$ et il est instable si $\beta > 1$.
2. La preuve est une conséquence directe de la Proposition 2.2.3.
3. L'équation linéaire associée à l'équation (2.55) autour du point d'équilibre $\overline{y}_2 = \sqrt[p]{\beta - 1}$ est
$$z_{n+1} = \frac{1-\beta}{\beta} \sum_{i=l}^{k} m_i z_{n-2i} + z_{n-2k-1}, \; n \in \mathbb{N}.$$
L'équation caractéristique associée à cette équation est
$$\lambda^{2k+2} + \frac{\beta - 1}{\beta} \sum_{i=l}^{k} m_i \lambda^{2k-2i+1} - 1 = 0.$$
Considérons la fonction g_2 définie par
$$g_2(\lambda) = \lambda^{2k+2} + \frac{\beta - 1}{\beta} \sum_{i=l}^{k} m_i \lambda^{2k-2i+1} - 1.$$
Donc
$$\lim_{\lambda \to -\infty} g_2(\lambda) = +\infty, \quad et \quad g_2(-1) = -\frac{\beta - 1}{\beta} p < 0,$$
alors la fonction g_2 a un zéro dans $]-\infty, -1[$. D'où le point $\overline{y}_2 = \sqrt[p]{\beta - 1}$ est instable.

■

2.3 Exemples numériques

Exemple 2.3.1 *Soit l'équation (2.3) avec* $\alpha = 0.25, \beta = 0.5, p = 2, q = 3, y_0 = 0.8, y_{-1} = 0.33,$ $y_{-2} = 1.5$, *donc l'équation (2.3) devient*

$$y_{n+1} = \frac{0.25 + 0.5y_{n-1}}{1 + y_n^2 y_{n-2}^3}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.61}$$

On a $\beta < 1$ *et* $\alpha < (p+q)\left(\frac{1-\beta}{p+q-1}\right)^{\frac{p+q+1}{p+q}} \cong 0,412346222$, *d'où le point d'équilibre* $\overline{y} \in$ $]0, 0.6597539553[$ *est globalement asymptotiquement stable.* (Voir Figure 2.1)

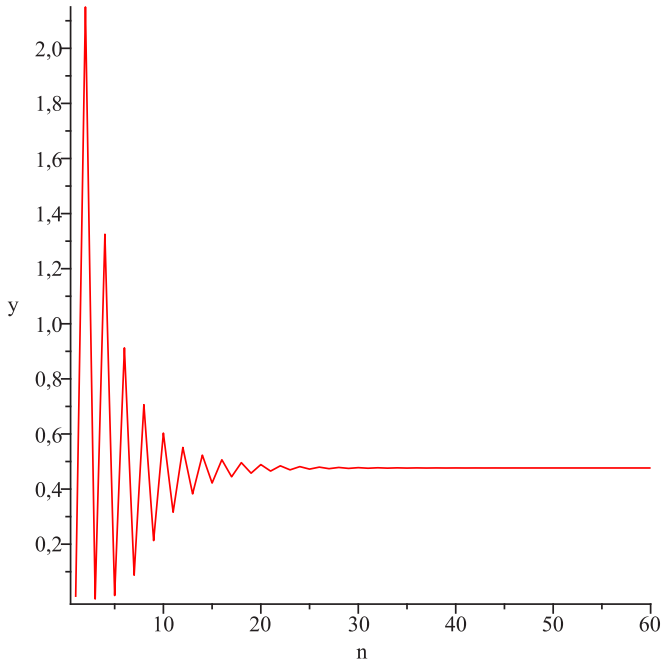

FIG. 2.1 – L'attractivité globale du point d'équilibre $\overline{y}$ de l'équation (2.61).

Exemple 2.3.2 *On considère l'équation (2.28) avec* $\alpha = 0.35, \beta = 0.5, l = 2, k = 4, m_2 = 2,$ $m_3 = 3, m_4 = 4, y_0 = 5.85, y_{-1} = 0.89, y_{-2} = 0.35, y_{-3} = 4.55, y_{-4} = 0.65, y_{-5} = 3.15,$ $y_{-6} = 0.75, y_{-7} = 2.35, y_{-8} = 1.25, y_{-9} = 0.25$, *donc l'équation (2.28) devient*

$$y_{n+1} = \frac{0.35 + 0.5y_{n-9}}{1 + y_{n-4}^2 y_{n-6}^3 y_{n-8}^4}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.62}$$

On a $p = m_2 + m_3 + m_4 = 9, \beta < 1$ *et* $\alpha < p\left(\frac{1-\beta}{p-1}\right)^{\frac{p+1}{p}} \cong 0,413362953$, *d'où le point d'équilibre* $\overline{y} \in]0, 0.7348672687[$ *est globalement asymptotiquement stable.* (Voir Figure 2.2)

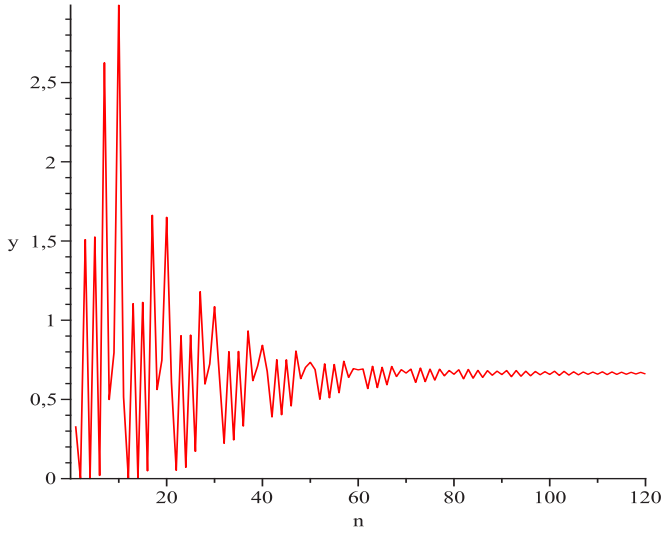

FIG. 2.2 – L'attractivité globale du point d'équilibre $\overline{y}$ de l'équation (2.62).

Exemple 2.3.3 *On considère l'équation (2.55) avec* $\beta = 0.6$, $l = 3$, $k = 5$, $m_3 = 1$, $m_4 = 3$, $m_5 = 2$, $y_0 = 1.25$, $y_{-1} = 0.35$, $y_{-2} = 4.75$, $y_{-3} = 2.89$, $y_{-4} = 1.35$, $y_{-5} = 4.55$, $y_{-6} = 0.65$, $y_{-7} = 3.15$, $y_{-8} = 0.75$, $y_{-9} = 1.15$, $y_{-10} = 0.25$, $y_{-11} = 0.1$, *donc l'équation (2.55) devient*

$$y_{n+1} = \frac{0.6y_{n-11}}{1 + y_{n-6}y_{n-8}^3y_{n-10}^2}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.63}$$

On a $\beta < 1$ *d'où le point d'équilibre* $\overline{y} = 0$ *est globalement asymptotiquement stable.* (Voir Figure 2.3).

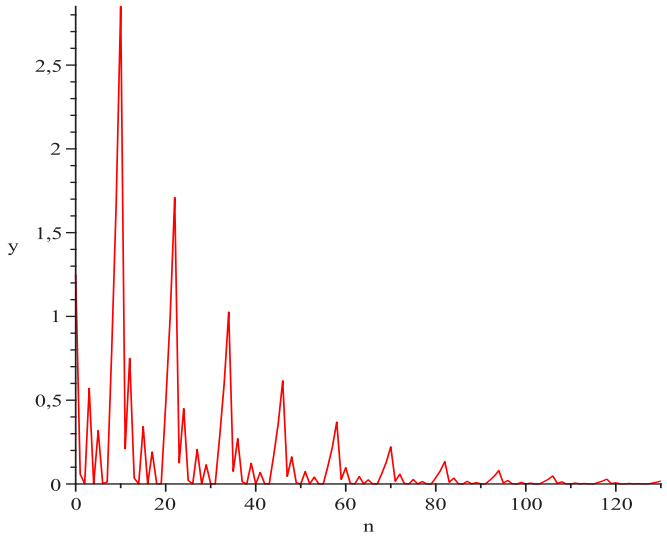

FIG. 2.3 – L'attractivité globale du point d'équilibre $\overline{y} = 0$ de l'équation (2.63).

CHAPITRE 3

Sur quelques systèmes d'équations aux différences non linéaires

Ce chapitre comporte deux parties, dans la première partie on s'intéresse à l'étude du comportement global des solutions d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre trois et la deuxième partie est consacrée à l'étude de la stabilité locale et globale des points d'équilibre d'un système d'équations aux différences rationnelles d'ordre deux.

3.1 Étude du comportement des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordre trois

Shojaei et al. [34] ont étudié la stabilité et les propriétés des solutions de l'équation aux différences rationnelle d'ordre trois suivante

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-2}}{\beta + \gamma y_n y_{n-1} y_{n-2}}, \quad n = 0, 1, ...,$$

où les paramètres α, β, γ et les conditions initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 sont des nombres réels strictement positifs.

Notre objectif dans cette partie est d'établir la stabilité globale et la périodicité des solutions du système suivant

$$t_{n+1} = \frac{\alpha t_{n-2}}{\beta + \gamma z_n^k z_{n-1}^k z_{n-2}^k}, \; z_{n+1} = \frac{\alpha' z_{n-2}}{\beta' + \gamma' t_n^k t_{n-1}^k t_{n-2}^k}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.1}$$

où les conditions initiales t_{-2}, t_{-1}, t_0, z_{-2}, z_{-1}, z_0 et les paramètres α, α', β, β', γ, γ' sont des nombres réels strictement positifs telles que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha' \neq \beta'$ et $k \geq 1$ est un entier fixé.

Remarque 3.1.1 *Il est clair qu'on peut écrire (3.1) sous la forme*

$$t_{n+1} = \frac{a t_{n-2}}{1 + b z_n^k z_{n-1}^k z_{n-2}^k}, \; z_{n+1} = \frac{a' z_{n-2}}{1 + b' t_n^k t_{n-1}^k t_{n-2}^k}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.2}$$

où $a = \frac{\alpha}{\beta}$, $a' = \frac{\alpha'}{\beta'}$, $b = \frac{\gamma}{\beta}$, *et* $b' = \frac{\gamma'}{\beta'}$.

Lemme 3.1.1 *Le système (3.2) est équivalent au système suivant*

$$x_{n+1} = \frac{a x_{n-2}}{1 + y_n^k y_{n-1}^k y_{n-2}^k}, \; y_{n+1} = \frac{a' y_{n-2}}{1 + x_n^k x_{n-1}^k x_{n-2}^k}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.3}$$

Preuve. On pose pour tout $n \geq -2$,

$$(x_n, y_n) = (\sqrt[3k]{b'} t_n, \; \sqrt[3k]{b} z_n).$$

Donc

$$t_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3k]{b'}} x_{n+1} \quad et \quad z_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3k]{b}} y_{n+1},$$
$$t_{n-2} = \frac{1}{\sqrt[3k]{b'}} x_{n-2} \quad et \quad z_{n-2} = \frac{1}{\sqrt[3k]{b}} y_{n-2},$$
$$b' t_n^k t_{n-1}^k t_{n-2}^k = x_n^k x_{n-1}^k x_{n-2}^k \quad et \quad b z_n^k z_{n-1}^k z_{n-2}^k = y_n^k y_{n-1}^k y_{n-2}^k.$$

Substituons les formules ci-dessus dans (3.2) on trouve le système (3.3). ■

Remarque 3.1.2 *D'après le lemme précédent, il suffit d'étudier le système (3.3) à la place du système (3.2).*

3.1.1 Comportement global

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à donner un résultat sur la stabilité locale et globale des points d'équilibre du système (3.3).

Lemme 3.1.2 $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ *est toujours un point d'équilibre du système (3.3).*
Si $a > 1$ *et* $a' > 1$, *le système (3.3) a aussi le point d'équilibre positif* $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[3k]{a' - 1}, \sqrt[3k]{a - 1})$.

Preuve. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.3), alors

$$\overline{x} = \frac{a\overline{x}}{1 + \overline{y}^{3k}}, \quad et \quad \overline{y} = \frac{a'\overline{y}}{1 + \overline{x}^{3k}}.$$

Donc

$$\overline{x}(\overline{y}^{3k} - a + 1) = 0 \quad et \quad \overline{y}(\overline{x}^{3k} - a' + 1) = 0.$$

Comme $a \neq 1$ et $a' \neq 1$, alors $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est toujours solution de ces deux équations et si $a > 1$ et $a' > 1$, on trouve la deuxième solution $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[3k]{a' - 1}, \sqrt[3k]{a - 1})$. ■

Théorème 3.1.1 **(i)** *Supposons que* $a < 1$ *et* $a' < 1$, *alors le point d'équilibre* $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ *du système (3.3) est localement asymptotiquement stable et il est instable si* $a > 1$ *ou* $a' > 1$.

(ii) *Supposons que $a > 1$ et $a' > 1$, alors le point d'équilibre $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[3k]{a'-1}, \sqrt[3k]{a-1})$ du système (3.3) est instable.*

Preuve. Soint $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.3).
Le système linéaire associé au système (3.3) autour de $(\overline{x}, \overline{y})$ est

$$X_{n+1} = A\, X_n, \tag{3.4}$$

où $X_n = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, y_n, y_{n-1}, y_{n-2})^t$, A est la matrice jacobienne, en $(\overline{x}, \overline{y})$, associée à la fonction vectorielle F, et

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 \\ \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \longrightarrow & F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2) \\ u_0 \\ u_1 \\ g(u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2) \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f, g : \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 \\ \left((u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)^t\right) & \longrightarrow & f, g\left((u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)^t\right), \end{array}$$

où

$$f\left((u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)^t\right) = \frac{a u_2}{1 + v_0^k + v_1^k + v_2^k},$$

et

$$g\left((u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)^t\right) = \frac{a' v_2}{1 + u_0^k + u_1^k + u_2^k}.$$

Donc par définition, on a

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_1}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_2}(\overline{X}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_2}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_2}(\overline{X}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \overline{y})$.

En utilisant les formules de f et g on trouve

(i) Au point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$, $\overline{X} = (0,0,0,0,0,0)$, et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$det(A - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & a' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

d'où l'équation caractéristique du système (3.4) est

$$(\lambda^3 - a)(\lambda^3 - a') = 0. \tag{3.5}$$

Si $a < 1$ et $a' < 1$, on trouve que toutes les racines de l'équation caractéristiqe (3.5) sont de modules inférieur strictement à un. Donc d'après le Théorème 1.3.1, le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ est localement asymptotiquement stable.

Si $a > 1$ ou $a' > 1$, alors il existe au moins une racine de (3.5) de module supérieur strictement à un, et encore une fois par le Théorème 1.3.1, le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ est instable.

(ii) Au point $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[3k]{a' - 1}, \sqrt[3k]{a - 1})$, on a

$$\overline{X} = (\sqrt[3k]{a' - 1}, \sqrt[3k]{a' - 1}, \sqrt[3k]{a' - 1}, \sqrt[3k]{a - 1}, \sqrt[3k]{a - 1}, \sqrt[3k]{a - 1}).$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \delta & \delta & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & \sigma & \sigma & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\delta = -\frac{k(a-1)\sqrt[3k]{a'-1}}{a\sqrt[3k]{a-1}}, \quad \sigma = -\frac{k(a'-1)\sqrt[3k]{a-1}}{a'\sqrt[3k]{a'-1}}.$$

Le polynôme caractéristique du système (3.4) dans ce cas est

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & \delta & \delta & \delta \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & \sigma & \sigma & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^6 - \frac{k^2(a-1)(a'-1)}{aa'}\lambda^4 - 2(1 + \frac{k^2(a-1)(a'-1)}{aa'})\lambda^3 \\ &\quad -3\frac{k^2(a-1)(a'-1)}{aa'}\lambda^2 - 2\frac{k^2(a-1)(a'-1)}{aa'}\lambda + 1 - \frac{k^2(a-1)(a'-1)}{aa'}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De (3.6) on a

$$P(1) = -9\frac{k^2(a-1)(a'-1)}{aa'} < 0, \tag{3.7}$$

et

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = +\infty$$

Donc P a un zéro dans $]1, +\infty[$. D'après le Théorème 1.3.1, le point d'équilibre $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[3k]{a'-1}, \sqrt[3k]{a-1})$ est instable.

■

Le théorème suivant confirme la stabilité globale du point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$.

Théorème 3.1.2 *Supposons que $a < 1$ et $a' < 1$, alors le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ du système (3.3) est globalement asymptotiquement stable.*

Ce théorème est une consequence du Théorème 3.1.1 et le lemme suivant.

Lemme 3.1.3 *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution du système (3.3), alors pour tout $n \geq 0$ on a*

$$x_{3n} \leq a^n x_0, \quad y_{3n} \leq a'^n y_0. \tag{3.8}$$

$$x_{3n+1} < a^{n+1} x_{-2}, \quad y_{3n+1} < a'^{n+1} y_{-2}. \tag{3.9}$$

$$x_{3n+2} < a^{n+1} x_{-1}, \quad y_{3n+2} < a'^{n+1} y_{-1}. \tag{3.10}$$

Preuve. Du système (3.3) on a

$$x_{n+1} < a x_{n-2}, \quad y_{n+1} < a' y_{n-2}, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.11}$$

Montrons, par récurrence l'estimation (3.8) et de la même manière on peut montrer (3.9) et (3.10).
Pour n=0, évident.
Supposons maintenant qu'on a (3.8) et montrons que

$$x_{3(n+1)} \leq a^{n+1} x_0, \quad y_{3(n+1)} \leq a'^{n+1} y_0$$

De (3.11) on obtient

$$x_{3(n+1)} = x_{3n+2+1} < a x_{3n}$$

et

$$y_{3(n+1)} = y_{3n+2+1} < a y_{3n}.$$

En utilisant l'hypothèse on trouve le résultat. ■

Exemple 3.1.1 *Soit $k = 4$, $a = 3/5$ et $a' = 5/8$, $x_{-2} = 0.25$, $x_{-1} = 0.14$, $x_0 = 0.3$, $y_{-2} = 0.2$, $y_{-1} = 0.6$, $y_0 = 0.3$. alors on obtient le système suivant*

$$x_{n+1} = \frac{\frac{3}{5} x_{n-2}}{1 + y_n^4 y_{n-1}^4 y_{n-2}^4}, \; y_{n+1} = \frac{\frac{5}{8} y_{n-2}}{1 + x_n^4 x_{n-1}^4 x_{n-2}^4}. \tag{3.12}$$

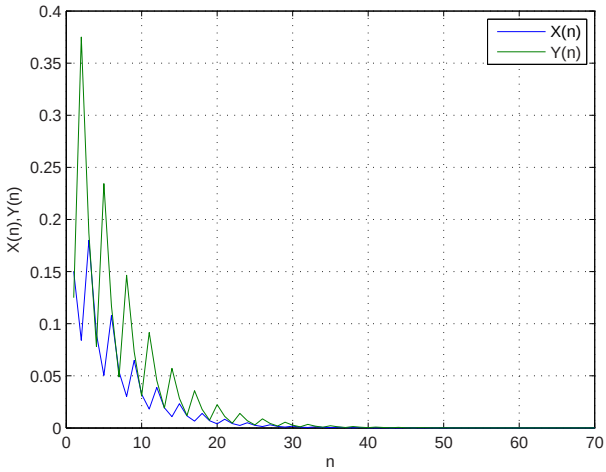

FIG. 3.1 – L'attractivité globale du point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ du système (3.12).

3.1.2 Périodicité des solutions

Théorème 3.1.3 *Supposons $a > 1$ et $a' > 1$, alors le système (3.3) a une solution périodique de période trois.*

Preuve. Soit

$$\{\ldots, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), \ldots\}$$

une solution périodique de période trois du système (3.3). Alors

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{ap_1}{1 + q_1^k q_2^k q_3^k}, \quad q_1 = \frac{a' q_1}{1 + p_1^k p_2^k p_3^k}, \\ p_2 &= \frac{ap_2}{1 + q_1^k q_2^k q_3^k}, \quad q_2 = \frac{a' q_2}{1 + p_1^k p_2^k p_3^k}, \\ p_3 &= \frac{ap_3}{1 + q_1^k q_2^k q_3^k}, \quad q_3 = \frac{a' q_3}{1 + p_1^k p_2^k p_3^k}. \end{aligned}$$

De ces équations, on trouve

$$p_1 p_2 p_3 = \sqrt[k]{a' - 1} \quad \text{et} \quad q_1 q_2 q_3 = \sqrt[k]{a - 1},$$

et la solution périodique prend la forme

$$\left\{ (p_1, q_1), (p_2, q_2), \left(\frac{\sqrt[k]{a' - 1}}{p_1 p_2}, \frac{\sqrt[k]{a - 1}}{q_1 q_2} \right), (p_1, q_1), (p_2, q_2), \left(\frac{\sqrt[k]{a' - 1}}{p_1 p_2}, \frac{\sqrt[k]{a - 1}}{q_1 q_2} \right), \ldots \right\}.$$

■

Exemple 3.1.2 *Soit* $k = 3$, $a = \frac{35}{8}$, $a' = \frac{65}{64}$, $x_{-2} = 2$, $x_{-1} = 4$, $y_{-2} = 5$, $y_{-1} = 3$, $x_0 = \frac{\sqrt[k]{a'-1}}{x_{-2}\times x_{-1}} = \frac{1}{32}$, $y_0 = \frac{\sqrt[k]{a-1}}{y_{-2}\times y_{-1}} = \frac{1}{10}$. *Alors la solution du système (3.3) est*

$$\left\{(2,5)\,,\,(4,3)\,,\left(\frac{1}{32},\frac{1}{10}\right),(2,5)\,,\,(4,3)\,,\left(\frac{1}{32},\frac{1}{10}\right),...\right\}.$$

3.1.3 Oscillation et existence d'une solution non bornée

Théorème 3.1.4 *Supposons* $a > 1$ *et* $a' > 1$. *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{+\infty}$ *une solution du système (3.3) tel que*

(i) $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \geq \overline{x}_2$ *et* $y_{-2}, y_{-1}, y_0 < \overline{y}_2$

ou

(ii) $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < \overline{x}_2$ *et* $y_{-2}, y_{-1}, y_0 \geq \overline{y}_2$.

Alors $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{+\infty}$ *est non oscilatoire autour du point d'équilibre* $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$.

Preuve. Supposons que (i) est vérifiée, le cas (ii) se démontre de la même manière.
De (3.3), on a

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{ax_{-2}}{1+y_0^k y_{-1}^k y_{-2}^k} > \frac{a\overline{x}_2}{1+\overline{y}_2^{3k}} = \overline{x}_2,\\
y_1 &= \frac{a'y_{-2}}{1+x_0^k x_{-1}^k x_{-2}^k} < \frac{a'\overline{y}_2}{1+\overline{x}_2^{3k}} = \overline{y}_2,\\
x_2 &= \frac{ax_{-1}}{1+y_1^k y_0^k y_{-1}^k} > \frac{a\overline{x}_2}{1+\overline{y}_2^{3k}} = \overline{x}_2,\\
y_1 &= \frac{a'y_{-1}}{1+x_1^k x_0^k x_{-1}^k} < \frac{a'\overline{y}_2}{1+\overline{x}_2^{3k}} = \overline{y}_2.
\end{aligned}$$

Et par inductions on trouve le résultat. ■

Le théorème suivant montre l'éxistence d'une solution non bornée du système (3.3).

Théorème 3.1.5 *Supposons* $a > 1$ *et* $a' > 1$. *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{-2}^{+\infty}$ *une solution du système (3.3). Alors on a les assertions suivantes*

(i) *Si* $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \left]0, \overline{x}_2\right[$ *et* $y_{-2}, y_{-1}, y_0 \in \left]\overline{y}_2, +\infty\right[$. *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *et* $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ *est non bornée.*

(ii) *Si* $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \left]\overline{x}_2, +\infty\right[$ *et* $y_{-2}, y_{-1}, y_0 \in \left]0, \overline{y}_2\right[$. *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ *et* $\{x_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ *est non bornée.*

Preuve.

(i) Du Théorème 3.1.4, on peut supposer que la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{+\infty}$ du système (3.3) est vérifée

$$x_n < \overline{x}_2 \quad \text{et} \quad y_n > \overline{y}_2, \quad \forall n \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_{3n+3} &= \frac{a x_{3n}}{1 + y_{3n+2}^k y_{3n+1}^k y_{3n}^k} < \frac{a x_{3n}}{1 + \overline{y}_2^{3k}} = x_{3n}, \\
x_{3n+4} &= \frac{a x_{3n+1}}{1 + y_{3n+3}^k y_{3n+2}^k y_{3n+1}^k} < \frac{a x_{3n+1}}{1 + \overline{y}_2^{3k}} = x_{3n+1}, \\
x_{3n+5} &= \frac{a x_{3n}}{1 + y_{3n+4}^k y_{3n+3}^k y_{3n+2}^k} < \frac{a x_{3n+2}}{1 + \overline{y}_2^{3k}} = x_{3n+2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{3n+3} &= \frac{a' y_{3n}}{1 + x_{3n+2}^k x_{3n+1}^k x_{3n}^k} > \frac{a' y_{3n}}{1 + \overline{x}_2^{3k}} = y_{3n}, \\
y_{3n+4} &= \frac{a' y_{3n+1}}{1 + x_{3n+3}^k x_{3n+2}^k x_{3n+1}^k} > \frac{a' y_{3n+1}}{1 + \overline{x}_2^{3k}} = y_{3n+1}, \\
y_{3n+5} &= \frac{a' y_{3n+2}}{1 + x_{3n+4}^k x_{3n+3}^k x_{3n+2}^k} > \frac{a' y_{3n+2}}{1 + \overline{x}_2^{3k}} = y_{3n+2},
\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ est non bornée.

La preuve de (ii) est similaire que celle de (i). ■

3.2 Étude du comportement des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordre deux

Dans [11] l'auteur a discuté le comportement global des solutions du système

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{a_1 + v_n v_{n-1}}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n + v_{n-1}}{a_2 + u_n u_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.13}$$

où les paramètres a_1, a_2 et les conditions initiales u_{-1}, u_0, v_{-1}, v_0 sont des nombres réels strictement positifs. Il a utilisé les résultats obtenus pour étudier le comportement des

solutions de l'équation aux différences floue suivante

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{p + x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.14}$$

où p et les conditions initiales x_0, x_{-1} sont des nombres flous strictement positifs. Notre objectif dans cette partie est d'étudier le comportement asymptotique du système de deux équations aux différences rationnelles suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{A + y_n^p y_{n-1}^q}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{B + x_n^p x_{n-1}^q}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.15}$$

où les conditions initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 sont des nombres réels positifs, les paramètres A, B sont des nombres réels strictement positifs et p, q sont des entiers positifs fixés.

Remarque 3.2.1 *Le système (3.13) a été aussi étudié par Q. Zhang et W. Zhang [48].*

3.2.1 Stabilité locale et globale

Lemme 3.2.1 *On considère le système (3.15). Alors*

1. $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ *est toujours un point d'équilibre du système (3.15).*
2. *Si* $A < 2$ *et* $B < 2$, *le système (3.15) a aussi le point d'équilibre positif* $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[p+q]{2 - B}, \sqrt[p+q]{2 - A})$.

Preuve. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.15), alors

$$\overline{x} = \frac{2\overline{x}}{A + \overline{y}^{p+q}} \quad et \quad \overline{y} = \frac{2\overline{y}}{B + \overline{x}^{p+q}}.$$

Donc

$$\overline{x}(\overline{y}^{p+q} + A - 2) = 0 \quad et \quad \overline{y}(\overline{x}^{p+q} + B - 2) = 0.$$

Alors

1. $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est toujours solution de ces deux équations.
2. Si $A < 2$ et $B < 2$, on trouve la deuxième solution $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[p+q]{2 - B}, \sqrt[p+q]{2 - A})$.

■

Théorème 3.2.1 *Supposons $A > 2$ et $B > 2$. Alors le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ du système (3.15) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Montrons tout d'abord que $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ est localement asymptotiquement stable.
On a le système linéaire associé au système (3.15) autour du point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ est

$$X_{n+1} = C\, X_n, \tag{3.16}$$

où $X_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})^t$, C est la matrice jacobienne, en $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$, associée à la fonction vectorielle F, et

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \\ \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} & \longrightarrow & F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0, u_1, v_0, v_1) \\ u_0 \\ g(u_0, u_1, v_0, v_1) \\ v_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f, g : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \\ \left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right) & \longrightarrow & f, g\left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right), \end{array}$$

où

$$f\left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right) = \frac{u_0 + u_1}{A + v_0^p v_1^q},$$

et

$$g\left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right) = \frac{v_0 + v_1}{B + u_0^p u_1^q}.$$

Donc par définition, on a

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_1}(\overline{X}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\overline{X}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\overline{X} = (0,0,0,0)$.

En utilisant les formules de f et g on trouve

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{1}{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$det(C - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} \frac{1}{A} - \lambda & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{B} - \lambda & \frac{1}{B} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Alors l'équation caractéristique du système (3.16) autour du point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ est

$$(\lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A})(\lambda^2 - \frac{1}{B}\lambda - \frac{1}{B}) = 0. \tag{3.17}$$

Soit

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A})(\lambda^2 - \frac{1}{B}\lambda - \frac{1}{B}), \tag{3.18}$$

alors

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda),$$

où

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A}$$

et

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{B}\lambda - \frac{1}{B}.$$

Comme $A > 2$ donc $1 - \frac{2}{A} > 0$, d'où

$$P_1(0) = -\frac{1}{A} < 0, \quad P_1(-1) = 1 > 0 \ \ et \ \ P_1(1) = 1 - \frac{2}{A} > 0.$$

Donc les deux racines de l'équation $P_1(\lambda) = 0$ sont de valeurs absolues inférieur strictement à un.

De la même manière on trouve que les deux racines de l'équation $P_2(\lambda) = 0$ sont de valeurs absolues inférieur strictement à un.

Alors toutes les racines de l'équation (3.17) sont de valeurs absolues inférieur strictement à un, donc d'après le Théorème 1.3.1 on trouve la stabilité asymptotique locale du point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$.
Montrons maintenant que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n = 0.$$

Du système (3.15) on a

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{A}x_n + \frac{1}{A}x_{n-1} \quad \text{et} \quad y_{n+1} \leq \frac{1}{B}y_n + \frac{1}{B}y_{n-1}.$$

Si on considère l'équation aux différences linéaire définie par

$$z_{n+1} = \frac{1}{A}z_n + \frac{1}{A}z_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $z_{-1} = x_{-1}$ *et* $z_0 = x_0$, on trouve

$$0 < x_n \leq z_n, \quad \forall n \geq 1. \tag{3.19}$$

D'autre côté on a

$$z_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad \forall n \geq 1$$

où λ_1 *et* λ_2 sont les deux racines distinctes de l'équation

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A} = 0,$$

i.e.,

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1+4A}}{2A}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1+4A}}{2A}.$$

Il est clair que $|\lambda_2| < 1$.
Montrons que $|\lambda_1| < 1$. On a

$$\begin{aligned} A > 2 \quad &\Rightarrow \quad 4A(A-2) > 0 \\ &\Rightarrow \quad 4A^2 - 8A > 0 \\ &\Rightarrow \quad 1 + 4A^2 - 4A > 1 + 4A \\ &\Rightarrow \quad 2A > 1 + \sqrt{1+4A}, \end{aligned}$$

donc $|\lambda_1| < 1$, ce qui implique $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$. En utilisant (3.19) on trouve $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. De la même manière on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$. Et la démonstration est complète.

■

Théorème 3.2.2 *Supposons $A < 2$ et $B < 2$. Alors les points d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ et $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[p+q]{2-B}, \sqrt[p+q]{2-A})$ du système (3.15) sont instables.*

Preuve.

(i) Les racines de l'équation caractéristique (3.17) du système (3.16) autour du point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1+4A}}{2A}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1+4A}}{2A}$$

$$\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{1+4B}}{2A}, \quad \lambda_4 = \frac{1-\sqrt{1+4B}}{2B}.$$

Il est clair que $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_3| > 1$ si $A < 2$ et $B < 2$. Donc le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ est instable.

(ii) De la même manière que la démonstration du Théorème 3.2.1 on trouve que le système linéaire associé au système (3.15) autour du point d'équilibre $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[p+q]{2-B}, \sqrt[p+q]{2-A})$ est (3.16) où

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -p\alpha & -q\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -p\mu & -q\mu & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = \frac{1}{2}(2-A)^{\frac{p+q-1}{p+q}}(2-B)^{\frac{1}{p+q}}$ et $\mu = \frac{1}{2}(2-B)^{\frac{p+q-1}{p+q}}(2-A)^{\frac{1}{p+q}}$.

Donc

$$det(C - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & -p\alpha & -q\alpha \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -p\mu & -q\mu & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

d'où l'équation caractéristique du système (3.16) dans ce cas est

$$\lambda^4 - \lambda^3 - (\frac{3}{4} + \alpha\mu p^2)\lambda^2 + (\frac{1}{2} - 2\alpha\mu pq)\lambda + \frac{1}{4} - \alpha\mu q^2 = 0. \tag{3.20}$$

Soit

$$P_3(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - (\frac{3}{4} + \alpha\mu p^2)\lambda^2 + (\frac{1}{2} - 2\alpha\mu pq)\lambda + \frac{1}{4} - \alpha\mu q^2.$$

Alors

$$P_3(1) = -\alpha\mu p^2 - 2\alpha\mu pq - \alpha\mu q^2 < 0$$

et

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} P_3(\lambda) = +\infty,$$

d'où (3.20) a une racine λ_1 dans $]1, +\infty[$ avec $|\lambda_1| > 1$. Ce qui donne l'instabilité du point $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt[p+q]{2 - B}, \sqrt[p+q]{2 - A})$.

■

3.2.2 Oscillation

Théorème 3.2.3 *Supposons $A < 2$ et $B < 2$. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution du système (3.15) tels que*

(i) $x_{-1}, x_0 \geq \overline{x}_2$ *et* $y_{-1}, y_0 < \overline{y}_2$

ou

(ii) $x_{-1}, x_0 < \overline{x}_2$ *et* $y_{-1}, y_0 \geq \overline{y}_2$.

Alors $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ est non oscillatoire autour du point d'équilibre $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$.

Preuve. Supposons que la condition (i) est satisfaite et l'autre cas se démontre de la même manière.

De (3.15), on a

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x_0 + x_{-1}}{A + y_0^p y_{-1}^q} > \frac{2\overline{x}_2}{A + \overline{y}_2^{p+q}} = \overline{x}_2, \\
y_1 &= \frac{y_0 + y_{-1}}{B + x_0^p x_{-1}^q} < \frac{2\overline{y}_2}{B + \overline{x}_2^{p+q}} = \overline{y}_2, \\
x_2 &= \frac{x_1 + x_0}{A + y_1^p y_0^q} > \frac{2\overline{x}_2}{A + \overline{y}_2^{p+q}} = \overline{x}_2, \\
y_2 &= \frac{y_1 + y_0}{B + x_1^p x_0^q} < \frac{2\overline{y}_2}{B + \overline{x}_2^{p+q}} = \overline{y}_2.
\end{aligned}$$

Par induction on trouve le résultat. ■

Exemple 3.2.1 *On considère le systeme (3.15) avec* $A = 3.2$, $B = 4.35$, $p = 1$, $q = 3$ *et les conditions initiales* $x_{-1} = 2.73$, $x_0 = 0.47$, $y_{-1} = 0.15$, $y_0 = 1.18$. *Alors le système (3.15) devient*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{3.2 + y_n y_{n-1}^3}, \; y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{4.35 + x_n x_{n-1}^3}, \; n = 0, 1, \ldots \tag{3.21}$$

(Voir Figure 3.2).

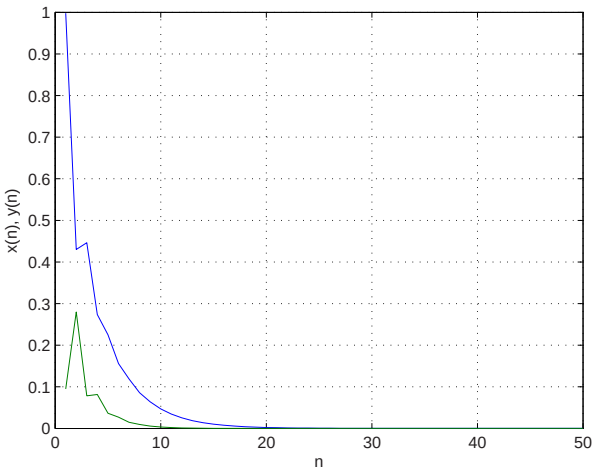

FIG. 3.2 – L'attractivité globale du point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ du système (3.21).

CHAPITRE 4

Sur un système d'équations aux différences de type max

Dans [29] les auteurs ont étudié le comportement global des solutions de l'équation aux différences de type max suivante

$$x_{n+1} = \frac{\max\{A, x_n\}}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.1}$$

où le paramètre A et les conditions initiales x_{-1} et x_0 sont des nombres réels strictement positifs.

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la périodicité et la bornitude des solutions du système d'équations aux différences de type max suivant

$$x_{n+1} = \frac{\max\{A, y_n\}}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{\max\{A, x_n\}}{y_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.2}$$

où le paramètre A et les conditions initiales x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 sont des nombres réels strictement positifs.

4.1 Bornitude des solutions

Remarque 4.1.1 *Toute solution du système (4.2) est strictement positive.*

Lemme 4.1.1 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ *une solution du système (4.2). Pour* $n \geq 0$*, on pose*

$$I_n = \max\left\{1, \frac{1}{x_{n-1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_{n-1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \times \max\{A, x_n, y_{n-1}\}$$
$$\times \max\{A, y_n, x_{n-1}\}.$$

Alors

$$I_n = I_0, \quad \forall n \geq 0.$$

Preuve. Observons que $\forall n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_{n+1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_{n+1}}\right\} \\
&\quad \times \max\{A, x_{n+1}, y_n\} \times \max\{A, y_{n+1}, x_n\} \\
&= \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{x_{n-1}}{\max\{A, y_n\}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{y_{n-1}}{\max\{A, x_n\}}\right\} \\
&\quad \times \max\left\{A, y_n, \frac{\max\{A, y_n\}}{x_{n-1}}\right\} \times \max\left\{A, x_n, \frac{\max\{A, x_n\}}{y_{n-1}}\right\} \\
&= \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \frac{\max\{\max\{A, y_n\}, x_{n-1}\}}{\max\{A, y_n\}} \times \frac{\max\{\max\{A, x_n\}, y_{n-1}\}}{\max\{A, x_n\}} \\
&\quad \times \max\left\{\max\{A, y_n\}, \frac{\max\{A, y_n\}}{x_{n-1}}\right\} \times \max\left\{\max\{A, x_n\}, \frac{\max\{A, x_n\}}{y_{n-1}}\right\} \\
&= \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \times \frac{1}{\max\{A, y_n\}} \times \max\{A, y_n, x_{n-1}\} \\
&\quad \times \frac{1}{\max\{A, x_n\}} \times \max\{A, x_n, y_{n-1}\} \times \max\{A, y_n\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_{n-1}}\right\} \\
&\quad \times \max\{A, x_n\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_{n-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$I_{n+1} = I_n, \ \forall n \geq 0.$$

Alors

$$I_n = I_0, \ \forall n \geq 0.$$

■

Théorème 4.1.1 *Toute solution du système (4.2) est bornée.*

De plus, on a

$$(x_n, y_n) \in \left[\frac{1}{I_0}, \frac{1}{A}I_0\right] \times \left[\frac{1}{I_0}, \frac{1}{A}I_0\right], \quad \forall n \geq 1,$$

où

$$I_0 = \max\left\{1, \frac{1}{x_{-1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_{-1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_0}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_0}\right\}$$
$$\times \max\{A, x_0, y_{-1}\} \times \max\{A, y_0, x_{-1}\}.$$

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution du système (4.2). On a

$$\max\{A, x_n\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_{n-1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{y_{n-1}}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\}$$
$$\times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \times \max\{A, x_n, y_{n-1}\} \times \max\{A, y_n, x_{n-1}\} \geq y_{n-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Alors

$$\frac{\max\{A, x_n\}}{y_{n-1}} \geq \frac{1}{I_n}, \quad \forall n \geq 0,$$

donc

$$y_{n+1} \geq \frac{1}{I_0}, \quad \forall n \geq 0.$$

De la même manière on trouve

$$x_{n+1} \geq \frac{1}{I_0}, \ \forall n \geq 0.$$

D'autre part, on a pour tout $n \geq 0$

$$A \leq \max\{A, y_n, x_{n-1}\} \tag{4.3}$$

$$\max\{A, x_n\} \leq \max\{A, x_n, y_{n-1}\} \tag{4.4}$$

$$1 \leq \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\} \tag{4.5}$$

$$1 \leq \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \tag{4.6}$$

$$1 \leq \max\left\{1, \frac{1}{x_{n-1}}\right\} \tag{4.7}$$

En combinant (4.3)-(4.7) on obtient

$$A \times \max\{A, x_n\} \leq \max\{A, y_n, x_{n-1}\} \max\{A, x_n, y_{n-1}\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_n}\right\}$$

$$\times \max\left\{1, \frac{1}{y_n}\right\} \times \max\left\{1, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}. \tag{4.8}$$

On a aussi

$$\frac{1}{y_{n-1}} \leq \max\left\{1, \frac{1}{y_{n-1}}\right\} \tag{4.9}$$

De (4.8) et (4.9) on trouve

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{A} I_n, \quad \forall n \geq 0.$$

D'où

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{A} I_0, \quad \forall n \geq 0.$$

De la même manière, on obtient

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{A} I_0, \quad \forall n \geq 0.$$

D'où

$$(x_n, y_n) \in [\frac{1}{I_0}, \frac{1}{A} I_0], \quad \forall n \geq 1.$$

■

Lemme 4.1.2 *Le système (4.2) a un point d'équilibre strictement positif unique* $(\overline{x}, \overline{y})$. *De plus,*

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} (1, 1) & si \quad A \leq 1 \\ (\sqrt{A}, \sqrt{A}) & si \quad A > 1. \end{cases}$$

Preuve. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (4.2). Alors

$$\overline{x} = \frac{\max\{A, \overline{y}\}}{\overline{x}} \quad et \quad \overline{y} = \frac{\max\{A, \overline{x}\}}{\overline{y}},$$

donc

$$\overline{x}^2 = \max\{A, \overline{y}\} \quad et \quad \overline{y}^2 = \max\{A, \overline{x}\}. \tag{4.10}$$

De (4.10) on trouve

$$\overline{x} \geq \sqrt{A} \;\; et \;\; \overline{y} \geq \sqrt{A} \tag{4.11}$$

et

$$\overline{x}^2 \geq \overline{y} \;\; et \;\; \overline{y}^2 \geq \overline{x}. \tag{4.12}$$

De (4.12) on obtient

$$\overline{x}^4 \geq \overline{x} \;\; et \;\; \overline{y}^4 \geq \overline{y},$$

ce qui implique

$$\overline{x} \geq 1 \;\; et \;\; \overline{y} \geq 1. \tag{4.13}$$

1. Supposons $A \leq 1$. De (4.10) et (4.13) on obtient

   $$\overline{x}^2 = \overline{y} \;\; et \;\; \overline{y}^2 = \overline{x},$$

   donc

   $$\overline{x}^4 = \overline{x} \;\; et \;\; \overline{y}^4 = \overline{y},$$

   d'où $(\overline{x}, \overline{y}) = (1, 1)$.

2. Soit maintenant $A > 1$. De (4.11) on trouve

   $$\overline{x} > 1 \;\; et \;\; \overline{y} > 1. \tag{4.14}$$

   D'autre part de (4.10) on a

   $$\overline{x}^2 = max\{A, max\{\sqrt{A}, \sqrt{\overline{x}}\}\} = A \;\; et \;\; \overline{y}^2 = max\{A, max\{\sqrt{A}, \sqrt{\overline{y}}\}\} = A.$$

   D'où

   $$(\overline{x}, \overline{y}) = (\sqrt{A}, \sqrt{A}).$$

   Sinon

   $$\overline{x} = 1 \;\; \text{ou} \;\; \overline{y} = 1,$$

   ce qui est contradictoire avec (4.14).

■

Lemme 4.1.3 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ *une solution du système (4.2). Supposons qu'il existe un entier* $N \geq -1$*, tel que*

$$(x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y}), \quad \forall n \geq N.$$

Alors

$$(x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y}), \quad \forall n \geq -1.$$

Preuve.

1. Supposons $A > 1$. Alors

$$x_{N+1} = \frac{\max\{A, y_N\}}{x_{N-1}} = \frac{\max\{A, \overline{y}\}}{x_{N-1}} = \overline{x}$$

et

$$y_{N+1} = \frac{\max\{A, x_N\}}{y_{N-1}} = \frac{\max\{A, \overline{x}\}}{y_{N-1}} = \overline{y},$$

d'où

$$x_{N-1} = \frac{\max\{A, \overline{y}\}}{\overline{x}} = \overline{x} = \sqrt{A}$$

et

$$y_{N-1} = \frac{\max\{A, \overline{x}\}}{\overline{y}} = \overline{y} = \sqrt{A}.$$

Par induction on trouve $(x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y}), \quad \forall n < N$.

2. De la même manière on peut montrer que $(x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y}), \quad \forall n < N$ dans le cas où $A \leq 1$.

■

4.2 Périodicité des solutions

Théorème 4.2.1 *Supposons* $A = 1$*. Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ *une solution du système (4.2) avec* $x_{-1} = \alpha$, $x_0 = \beta$, $y_{-1} = \gamma$ *et* $y_0 = \delta$*. Alors* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ *est périodique de période* $p = 10$ *et elle est donnée comme suit.*

Cas 1 $\beta \leq 1,\ \delta \leq 1,\ \gamma \geq 1$ *et* $\alpha \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 2 $\beta \leq 1,\ \delta \leq 1,\ \gamma \geq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha\delta}),(\frac{1}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha\delta},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 3 $\beta \leq 1,\ \delta \leq 1,\ \gamma \leq 1,$ *et* $\alpha \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma\beta},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\gamma\beta}),(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 4 $\beta \leq 1,\ \delta \leq 1,\ \gamma \leq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma\beta},\frac{1}{\alpha\delta}),(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha\delta},\frac{1}{\gamma\beta}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 5 $\beta \leq 1,\ 1 \leq \delta \leq \alpha$ *et* $\gamma \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 6 $\beta \leq 1,\ 1 \leq \alpha \leq \delta$ *et* $\gamma \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 7 $\beta \leq 1,\ \alpha \leq 1 \leq \delta$ *et* $\gamma \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}),(\frac{1}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 8 $\beta \leq 1,\ 1 \leq \delta \leq \alpha$ *et* $\gamma \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma\beta},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\gamma\beta}),(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 9 $\beta \leq 1,\ \delta \geq 1,\ \gamma \leq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma\beta},\frac{1}{\alpha}),(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma\beta}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 10 $\beta \leq 1,\ \gamma \leq 1$ *et* $1 \leq \alpha \leq \delta$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma\beta},\frac{1}{\alpha}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{1}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma\beta}),(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 11 $1 \leq \beta \leq \gamma,\ \delta \leq 1$ *et* $\alpha \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 12 $1 \leq \gamma \leq \beta,\ \delta \leq 1$ *et* $\alpha \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\gamma}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 13 $\beta \geq 1,\ \delta \leq 1,\ \gamma \leq 1$ *et* $\alpha \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 14 $1 \leq \beta \leq \gamma,\ \delta \leq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha\delta}),(\frac{1}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha\delta},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 15 $\delta \leq 1 \leq \beta,\ \delta \leq 1\ \gamma \leq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha\delta}),(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha\delta},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 16 $1 \leq \gamma \leq \beta,\ \delta \leq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha\delta}),(\frac{1}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha\delta},\frac{1}{\gamma}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 17 $1 \leq \beta \leq \gamma$ *et* $1 \leq \delta \leq \alpha$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 18 $1 \leq \beta \leq \gamma$ *et* $1 \leq \alpha \leq \delta$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 19 $1 \leq \beta \leq \gamma,\ \delta \geq 1$ *et* $\alpha \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}),(\frac{1}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 20 $1 \leq \gamma \leq \beta$ *et* $1 \leq \delta \leq \alpha$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\gamma}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 21 $\beta \geq 1,\ \gamma \leq 1$ *et* $1 \leq \delta \leq \alpha$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\delta}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 22 $1 \leq \gamma \leq \beta$ *et* $1 \leq \alpha \leq \delta$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 23 $\beta \geq 1,\ \gamma \leq 1$ *et* $1 \leq \alpha \leq \delta$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),(\frac{\alpha}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 24 $1 \leq \gamma \leq \beta,\ \alpha \leq 1$ *et* $\delta \geq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),(\frac{1}{\delta},\frac{\gamma}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$

$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{\gamma}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Cas 25 $\beta \geq 1,\ \delta \geq 1,\ \alpha \leq 1$ *et* $\gamma \leq 1$.

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),(\frac{\delta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma}),(\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\alpha}),(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\beta}),(\gamma,\alpha),(\delta,\beta),(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}),$$
$$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\gamma}),(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\delta}),(\alpha,\gamma),(\beta,\delta),...\}.$$

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution du système (4.2) et soit $x_{-1} = \alpha$, $x_0 = \beta$, $y_{-1} = \gamma$ et $y_0 = \delta$.

Cas 1 Supposons que $\beta \leq 1,\ \ \delta \leq 1,\ \gamma \geq 1$, et $\alpha \geq 1$. Alors

$$x_1 = \frac{max\{1, y_0\}}{x_{-1}} = \frac{max\{1,\delta\}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ \ et \ \ y_1 = \frac{max\{1, x_0\}}{y_{-1}} = \frac{max\{1,\beta\}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma},$$

$$x_2 = \frac{max\{1, y_1\}}{x_0} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\gamma}\right\}}{\beta} = \frac{1}{\beta} \ \ et \ \ y_2 = \frac{max\{1, x_1\}}{y_0} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\alpha}\right\}}{\delta} = \frac{1}{\delta}.$$

$$x_3 = \frac{max\{1, y_2\}}{x_1} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\delta}\right\}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\delta} \ \ et \ \ y_3 = \frac{max\{1, x_2\}}{y_1} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\beta}\right\}}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

$$x_4 = \frac{max\{1, y_3\}}{x_2} = \frac{max\left\{1, \frac{\gamma}{\beta}\right\}}{\frac{1}{\beta}} = \gamma \ \ et \ \ y_4 = \frac{max\{1, x_3\}}{y_2} = \frac{max\left\{1, \frac{\alpha}{\delta}\right\}}{\frac{1}{\delta}} = \alpha.$$

$$x_5 = \frac{max\{1, y_4\}}{x_3} = \frac{max\{1,\alpha\}}{\frac{\alpha}{\delta}} = \delta \ \ et \ \ y_5 = \frac{max\{1, x_4\}}{y_3} = \frac{max\{1,\gamma\}}{\frac{\gamma}{\beta}} = \beta.$$

$$x_6 = \frac{max\{1, y_5\}}{x_4} = \frac{max\{1,\beta\}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \ \ et \ \ y_6 = \frac{max\{1, x_5\}}{y_4} = \frac{max\{1,\delta\}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

$$x_7 = \frac{max\{1, y_6\}}{x_5} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\alpha}\right\}}{\delta} = \frac{1}{\delta} \ \ et \ \ y_7 = \frac{max\{1, x_6\}}{y_5} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\gamma}\right\}}{\beta} = \frac{1}{\beta}.$$

$$x_8 = \frac{max\{1, y_7\}}{x_6} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\beta}\right\}}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\beta} \ \ et \ \ y_8 = \frac{max\{1, x_7\}}{y_6} = \frac{max\left\{1, \frac{1}{\delta}\right\}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\delta}.$$

$$x_9 = \frac{max\{1, y_8\}}{x_7} = \frac{max\left\{1, \frac{\alpha}{\delta}\right\}}{\frac{1}{\delta}} = \alpha \ \ et \ \ y_9 = \frac{max\{1, x_8\}}{y_7} = \frac{max\left\{1, \frac{\gamma}{\beta}\right\}}{\frac{1}{\beta}} = \gamma.$$

$$x_{10} = \frac{max\{1, y_9\}}{x_8} = \frac{max\{1,\gamma\}}{\frac{\gamma}{\beta}} = \beta \ \ et \ \ y_{10} = \frac{max\{1, x_9\}}{y_8} = \frac{max\{1,\alpha\}}{\frac{\alpha}{\delta}} = \delta.$$

Par induction on trouve

$$x_{n+10} = x_n \ \ et \ \ y_{n+10} = y_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

De la même manière on peut montrer les autres cas.

■

Si $A > 1$, on définit

$$D_4 = \left\{(u, v, w, t) \in]0, +\infty[^4, \ \ 1 \leq u, v, w, t \leq A\right\},$$

$$CD_4 =]0, +\infty[^4 - D_4,$$

et si $0 < A < 1$, on définit

$$D_6 = \left\{(u, v, w, t) \in \left[A, \frac{1}{A}\right]^4, \ \ Av \leq w \leq \frac{1}{A}v, \ Au \leq t \leq \frac{1}{A}u\right\},$$

$$CD_6 =]0, +\infty[^4 - D_6.$$

Théorème 4.2.2 *Supposons $A > 1$. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution du système (4.2). Alors les assertions suivantes sont vraies*

1. *Si $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in D_4$. Alors*

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in D_4, \ \ \forall n \geq 0.$$

De plus $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ est périodique de période 4 et elle est donné par

$$\left\{(x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), \left(\frac{A}{x_{-1}}, \frac{A}{y_{-1}}\right), \left(\frac{A}{x_0}, \frac{A}{y_0}\right), (x_{-1}, y_{-1}), \ldots\right\}$$

2. *Si $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in CD_4$. Alors*

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in CD_4, \ \ \forall n \geq 0$$

.

Preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution du système (4.2).

1. Supposons $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in D_4$. Alors

$$x_1 = \frac{max\{A, y_0\}}{x_{-1}} \ \ et \ \ y_1 = \frac{max\{A, x_0\}}{y_{-1}}.$$

Mais $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in D_4$, donc

$$x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in [1, A],$$

alors

$$x_1 = \frac{A}{x_{-1}} \in [1, A] \ \ et \ \ y_1 = \frac{A}{y_{-1}} \in [1, A].$$

De la même manière on obtient

$$x_2 = \frac{max\{A, y_1\}}{x_0} = \frac{A}{x_0} \in [1, A] \ \ et \ \ y_2 = \frac{max\{A, x_1\}}{y_0} = \frac{A}{y_0} \in [1, A].$$

$$x_3 = \frac{max\{A, y_2\}}{x_1} = x_{-1} \in [1, A] \ \ et \ \ y_3 = \frac{max\{A, x_2\}}{y_1} = y_{-1} \in [1, A].$$

$$x_4 = \frac{max\{A, y_3\}}{x_2} = x_0 \in [1, A] \ \ et \ \ y_4 = \frac{max\{A, x_3\}}{y_2} = y_0 \in [1, A].$$

Par induction on trouve que $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ est périodique de période 4 et

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in D_4, \quad \forall n \geq 0.$$

2. Supposons que $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in CD_4$. Montrons par l'absurde que

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in CD_4, \quad \forall n \geq 0.$$

On suppose qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que $(x_N, x_{N+1}, y_N, y_{N+1}) \in D_4$. Alors

$$x_{N+1} = \frac{\max\{A, y_N\}}{x_{N-1}} = \frac{A}{x_{N-1}}$$

et

$$y_{N+1} = \frac{\max\{A, x_N\}}{y_{N-1}} = \frac{A}{y_{N-1}}.$$

Donc

$$x_{N-1} = \frac{A}{x_{N+1}} \in [1, A]$$

et

$$y_{N-1} = \frac{A}{y_{N+1}} \in [1, A].$$

D'où

$$(x_{N-1}, x_N, y_{N-1}, y_N) \in D_4.$$

Par induction on trouve que

$$(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in D_4$$

ce qui est une contradiction, d'où

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in CD_4, \quad \forall n \geq 0.$$

■

Théorème 4.2.3 *Supposons* $0 < A < 1$. *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ *une solution du système (4.2). On a*

1. *Si* $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in D_6$. *Alors*

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in D_6, \quad \forall n \geq 0.$$

De plus $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ *est périodique de période 6 et elle est donnée par*

$$\left\{(x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), \left(\frac{y_0}{x_{-1}}, \frac{x_0}{y_{-1}}\right), \left(\frac{1}{y_{-1}}, \frac{1}{x_{-1}}\right), \left(\frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0}\right), \left(\frac{y_{-1}}{x_0}, \frac{x_{-1}}{y_0}\right), (x_{-1}, y_{-1}), \ldots\right\}$$

2. *Si* $(x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0) \in CD_6$. *Alors*

$$(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \in CD_6, \quad \forall n \geq 0.$$

Preuve. De la même manière que la démonstration du Théorème (4.2.2). ■

Remarque 4.2.1 *Observons que si* $A > 1$, *alors* $(\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}) = (\sqrt{A}, \sqrt{A}, \sqrt{A}, \sqrt{A})$ *est un point situé à l'intérieur de* D_4 *et si* $0 < A < 1$, *le point* $(\overline{x}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}) = (1, 1, 1, 1)$ *se situe à l'intérieur de* D_6.

Corollaire 4.2.1 *Le point d'équilibre* $(\overline{x}, \overline{y})$ *du système (4.2) est localement stable mais il n'est pas localement asymptotiquement stable.*

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse et après un chapitre introductif qui est consacré à donner des notions fondamentales sur les équations aux différences linéaires et non linéaires et les systèmes d'équations aux différences non linéaires utiles pour comprendre ce travail, on a établi des résultats de stabilité locale et globale de deux équations aux différences rationnelles, les résultats obtenus ont fait l'objet de deux publications internationales, voir [5, 6]. En suite on a étudié le comportement asymptotique des solutions de deux systèmes d'équations aux différences rationnelles, l'un de ces résultats est accepté pour publication internationale, voir [4] et l'autre est soumi.

En fin, on a donné un résultat sur la périodicité des solutions d'un système d'équations aux différences de type max, ce résultat fait l'objet d'une publication internationale, voir [7].

Les résultats obtenus dans cette thèse sont basés sur la méthode de linéarisation, ces résultats offrent quelques perspectives :

Étude de l'équations aux différences rationnelle suivante

$$\sum_{i=l_1}^{k_1} \frac{A + Bx_{n-2i-1}}{C + D\prod_{j=l_2}^{i} x_{n-2i}^{m_i}}, \ n = 0, 1, \ldots$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abo-Zeid, M. A. Al-Shabi, *Global behavior of a third order difference equation*, Tamk. J. Math., **3(43)**(2012), 375-383.

[2] R. Abo-Zeid, *Global behavior of a higher order difference equation*, Math. Solvaca., **4(64)**(2014), 931-940.

[3] J. R. Beddington, C. A. Free and J. H. Lawton, *Dynamic complexity in predator prey models framed in difference equations*, Nature.,**255**(1975), 58-60.

[4] F. Belhannache, N. Touafek, *Dynamics of a third-order system of rational difference equations*, Dyn. Cont. Disc. Impu. Sys., Series A, Mathematical Analysis, to appear.

[5] F. Belhannache, N. Touafek and R. Abo-Zeid, *Dynamics of a third-order rational difference equation*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie., **1(59)(107)**(2016), 13-22.

[6] F. Belhannache, N. Touafek and R. Abo-Zeid, *On a higher order rational difference equation*, J. Appl. Math. Inf., **5-6(34)**(2016), 369 - 382.

[7] F. Belhannache, *Periodic Character and Boundedness Nature of Positive Solutions of a Max-Type System of Difference Equations*, Elect. J. Math. Anal. Appl., **5(2)**(2017), 53-61.

[8] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[9] D. Clark, M. R. S. Kulenovic, *A couple system of rational difference equations*, Comput. Math. Appl., **43**(2002), 849-867.

[10] D. Clark, M. R. S. Kulenovic and J. F. Selgrade, *Global asymptotic behavior of a two-dimensional difference equation modeling competition*, Nonlinear Anal., **52**(2003), 1765-1776.

[11] Q. Din, *Asymptotic Behavior of a second-order Fuzzy Rational Difference Equation*, J. Disc. Math., vol. 2015, Article ID 524931, 7 pages, 2015.

[12] Q. Din, *On a system of fourth-order rational difference equations*, Acta Univ. Apulensis, Math. Inform., **39**(2014), 137-150.

[13] Q. Din, *Asymptotic behavior of an anti-competitive system of second-order difference equations*, J. Egypt. Math. Soc., **24(1)**(2016), 37-43.

[14] E. M. Elabbasy, H. El-Metwally and E. M. Elsayed, *Qualitative behavior of higher order difference equation*, Soo. J. Math.,**33**(2007), 861-873.

[15] E. M. Elabbasy, S. M Elaissawy, *Global behavior of a higher-order rational difference equation*, Fasci. Math., **53**(2014), 39-52.

[16] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed, Springer, New York, 1999.

[17] M. M. El-Dessoky, *On the solutions and periodicity of some nonlinear systems of difference equations*, J. Nonli. Sci. Appl., **9**(2016), 2190-2207.

[18] E. M. Elsayed, *Qualitative behavior of difference equation of order two*, Math. Comp. Model., **50**(2009), 1130-1141.

[19] E. M. Elsayed, *On the solutions of a rational system of difference equations*, Fasci. Math., **45**(2010), 25-36.

[20] E. M. Elsayed, H. El-Metwally, *On the solutions of some nonlinear systems of difference equations*, Adv. Diff. Equ., **2013**(161) (2013), 14 pages.

[21] E. M. Elsayed, T. F. Ibrahim, *Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations*, Hacet. J. Math. Stat., **44(6)** (2015), 1361-1390.

[22] E. M. Elsayed, T. F. Ibrahim, *Solutions and periodicity of a rational recursive sequences of order five*, Bull. Malay. Math. Sci. Soc., **38**(2015), 95-112.

[23] E. M. Erdogan, C. Cinar, *On the dynamics of the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta+\gamma\Sigma_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p} \prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}}$, Fasci. Math., **50**(2013), 59-66.

[24] N. Fotiades, G. Papaschinopoulos, *On a system of difference equations with maximum*, Appl. Math. Comput., **221**(2013) ,684-690.

[25] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, Advances in Discrete Mathematics and Applications , Volume 4, Chapman and Hall, CRS Press, 2005.

[26] E. A. Grove, G. Ladas, N. R. Prokup and R. Levis, On the global behavior of solutions of a biological model, Commun. Appl. Nonlinear Anal., **7(2)**(2000), 33-46.

[27] B. D. Iricănin, N. Touafek, *On a second order max-type system of difference equations*, Ind. J. Math., **54**(2012), 119-142.

[28] T. F. Ibrahim, *On the third order rational difference equation* $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{x_{n-1}(a+bx_n x_{n-2})}$, Int. J. Cont. Math. Sci., **4**(2009), 1321-1334.

[29] E. J. Janowski, V.L. Kocic, G. Ladas and S. W. Schultz, *Global behavior of solutions of* $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}$, Proceeding of the First International Conference on Difference Equations, May 25-28, 1994, San Antonio, Texas, USA, Gordon and Breach Science Publishers, Basel, 1995.

[30] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher order with Applications*, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London, Volume 256, 1993.

[31] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of difference equations, numerical methods and applications*, 2nd ed., Marcel Dekker, Inc., New York, 2002.

[32] G. Papaschinopoulos, J. Schinas and V. Hatzifilippidis, *Global behavior of the solutions of a max-equation and a system of two max-equations*, J. Comput. Anal. Appl., **5(2)**(2003), 237-254.

[33] G. Stefanidou, G. Papaschinopoulos and C. J. Schinas, *On a system of max-difference equations*, Commun. Appl. Nonl. Anal., **17(2)**(2010), 1-13.

[34] M. Shojaei, R. Saadati and H. Adbi, *Stability and periodic character of a rational third order difference equation*, Cha. Sol. Frac., **39**(2009), 1203-1209.

[35] S. Stević, *On a Discrete Epidemic Model*. Disc. Dyn. Nat. Soc., 2007, 10 : Article ID 87519.

[36] S. Stevic, *Periodicity of a class of nonautonomous max-type difference equations*, Appl. Math., Comput **217**(2011), 9562-9566.

[37] S. Stevic, *Solution of a max-type system of difference equations*, Appl. Math. Comput., **218**(2012), 9825-9830.

[38] S. Stevic, *On some periodic systems of max-type difference equations*, Appl. Math. Comput., **218**(2012), 11483-11487.

[39] S. Stević, *On some solvable systems of difference equations*, Appl. Math. Comput., **218**(2012), 5010-5018.

[40] S. Stević, *On a solvable system of difference equations of kth order*, Appl. Math. Comput., **219**(2013), 7765-7771.

9825-9830.

[41] N. Touafek, *On a second order rational difference equation*, Hacet. J. Math. Stat., bf 41(2012), 867- 874.

[42] N. Touafek, E. M. Elsayed, *On a third order rational systems of difference equations*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat., **61** (2015), 367-380.

[43] L. Yang, J. Yang, *Dynamics of a system of two nonlinear difference equations*, Int. J. Contemp. Math. Sci., **6**(2011), 209-214.

[44] Y. Yazlik, T. D. Tollu and N. Taskara,*On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers*, Appl. Math., **4(12)** (2013), 15-20.

[45] Y. Yazlik, *On the solutions and behavior of rational difference equations*, J. Comput. Anal. Appl., **17(3)**(2014), 584-594.

[46] D. C. Zhang, B. Shi, *Oscillation and global asymptotic stability in a discrete epidemic model*, J. Math. Anal. Appl., **278**(2003), 194-202.

[47] Q. Zhang, L. Yang and J. Liu, *Dynamics of a system of rational third-order difference equation*, Adv. Diff. Equ., Article ID 136(2012), 6 pages.

[48] Q. Zhang, W. Zhang, *On the system of nonlinear rational difference equations*, International Journal of Mathematical, Comp. Phy. Qua. Eng., **8**(2014), 688-691.