République Algérienne Démocratiques et populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia de Jijel

N° d'ordre :
Série :

T H È S E

Faculté des Sciences Exactes et de L'informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité Mathématiques
Option Analyse
présentée et soutenue par

Sabrina IZZA

Thème

Contribution à l'Étude de Certaines Classes d'Inclusions Différentielles Gouvernées par le Processus de la Rafle

le 14 novembre 2016

Devant le jury composé de

Président	M. Taher ZERZAIHI	Prof. U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Directeur	Mme Dalila AZZAM-LAOUIR	Prof. U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examinateurs	M. Messaoud BOUNKHEL	Prof. U. Riyad, Arabie Saoudite
Examinateurs	M. Aissa AIBECHE	Prof. U. Setif 1
Examinateurs	Mme Hadda HAMMOUCHE	M.C.A. U. Ghardaia

Remerciements

Voilà j'y suis, qui l'aurait cru il y a une dizaine d'années. Je suis en train de rédiger les remerciements de ma thèse de Doctorat. Bien des choses se sont passées depuis ma première inscription en magister en 2007, des amitiés se sont faites et d'autres se sont défaites et biens des masques sont tombés. J'ai failli tout laisser tomber à plusieurs reprises pour des tas de raisons qui n'ont rien avoir avec la recherche (été 2014 surtout). J'y suis arrivée il fallait avoir beaucoup de volonté, de courage et de foi, la foi en moi et en l'avenir, et surtout en dieu, comme dirait beaucoup d'entre nous ***"Allah"****. Je remercie dieu pour cette force intérieure qui m'a donnée pour lutter contre vents et marrées et d'être là aujourd'hui et je n'ai perdu ni mon âme, ni ma personnalité, et surtout pas mon humanité parce que à quoi sert les titres si on a pas les valeurs qui vont avec.* ***Encore une fois merci mon dieu****.*

J'exprime toute ma reconnaissance à ma directrice de thèse ***Madame Azzam-Laouir Dalila*** *qui s'avère être aussi mon encadreur en magister, tout d'abord de m'avoir fait confiance et confié ce sujet de thèse. Une dizaine d'années à la côtoyer de près. Je lui dis merci d'avoir eu le courage de me supporter car deux forces de caractères ne peuvent cohabiter sans étincelles d'autant que je suis vraiment difficile à contrôler quand je m'y met et ce sont à mon avis ces petits incidents qui font que l'on construise des relations durables avec les gens, il ne faut pas trop s'y attarder.*

Mais franchement il y a eu beaucoup de bons moments, nous travaillons ensemble au niveau du même département, nous avons voyagé ensemble, séminaires et stages, et beaucoup de personnes nous ont envié notre relation amicale avec notre directrice de thèse. Ceci pour le côté humain. Il faut lui reconnaitre aussi que côté mathématiques j'ai beaucoup appris auprès d'elle, de sa rigueur, de ses qualités professionnelles et scientifiques - on n'a pas fait que s'amuser - elle à toujours été présente et disponible pour corriger mes erreurs et énormités mathématiques car j'ai débarqué en magister analyse après une graduation en probabilité et beaucoup d'années se sont écoulées entre les deux, bien du chemin a été parcouru depuis.

Il ne faut pas oublier que cette thèse s'est faite aussi avec la contribution et la collaboration d'autres personnes de l'autre côté de la méditerranée, étant donné que Madame Azzam nous a fait entrer par la grande porte dans l'équipe de recherche de Montpellier, en particulier Monsieur **Lionel Thibault** qui est co-auteur de mon premier article de thèse, et **Charles Castaing** le très paternel, beaucoup de plaisir à les connaitre et beaucoup de choses apprises avec eux, ils n'ont jamais été radins de leurs savoirs et connaissances, ils ont la modestie et la simplicité des grandes personnes. Rencontrer des sommités et pionniers du domaine des inclusions différentielles on ne peut qu'être humble devant eux. C'est un petit clin d'œil que je leur fait pour les remercier.

J'arrive à **Mon jury**. Je commence tout d'abord par remercier son président Monsieur **Tahar Zerzaihi** il a été jury à mon magister et le voilà président de mon jury à ma soutenance de Thèse de Doctorat, Je ne peux que le remercié de l'honneur et le plaisir qu'il me fait encore une fois en acceptant d'être Président de jury, de prendre le temps sur ces vacances d'été pour lire et commenter cette thèse.

Mes remerciements vont aussi aux autres membres de jury Madame **Hadda Hammouche**, Messieurs **Messaoud Bounkhel** et **Aissa Aibeche** surtout pour leurs avoir imposé la lecture de ma thèse pendant les grandes chaleurs de l'été afin de la corriger et de la noter.

je tiens à remercier un grand ami qui a toujours été là depuis mes premières années à l'université de Jijel, notre amitié n'a fait que grandir depuis le temps, quelqu'un qui n'est jamais très loin, il m'est même arrivé de le surnommer mon ange gardien, Monsieur **Abdnacer Tilbi**. Je ne pouvait rédiger des remerciement sans que son nom n'y soit inclus et je n'oublie pas bien sûr sa fille **Nora**, je n'écris plus rien d'autres les gens qui nous connaissent liront entre les lignes.

Enfin je remercie tout mes amis de l'université de Jijel enseignants ou autres. Je ne vais pas citer tous les noms ils se reconnaitrons pour avoir toujours été là quand rien n'allait, qu'ils ont fait que je m'y accroche et que je ne laisse pas tomber...

Un dernier merci à mes étudiants qui rendent bien ce qu'on leur donne, c'est auprès d'eux que je puise mon énergie pour aller encore plus vers l'avant, c'est qu'ils nous apprennent bien des choses sur la vie.

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties principales, dans la première nous étudions deux résultats d'existence de solutions pour un processus de la rafle du premier ordre gouverné par des ensembles prox-réguliers et avec deux perturbations, l'une semicontinue supérieurement et l'autre semicontinue mixte, ceci en utilisant un théorème de coïncidence entre les ensembles de solutions d'une inclusion différentielle avec contrainte et une inclusion sans contrainte. Dans la deuxième partie, on montre deux résultats d'existence de solutions, aussi pour un processus de la rafle du premier ordre gouverné cette fois par des ensembles sous lisses, mais avec une seule perturbation semicontinue mixte, le premier dépendant du temps et le second du temps et de l'état.

Abstract

This thesis consists of two main parts, in the first one we study two existence results of solutions for a first order sweeping process governed by prox-regular sets and perturbed by two set-valued mappings, one is upper semicontinuous and the second one is mixed semicontinuous, this by using a coincidence theorem between the solutions set of constrained and unconstrained differential inclusion. In the second part, we give a proof of the existence of solutions of two first order sweeping processes governed by subsmooth sets and perturbed by a mixed semicontinuous set-valued mapping, in the first case the sets in the sweeping process depend only on the time and in the second depends on the state and time.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse nous nous sommes intéressées à l'étude de plusieurs résultats sur l'existence de solutions dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, d'une inclusion différentielle gouvernée par un processus de la rafle non convexe du type

$$(\mathcal{P}_{F,G}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)) + G(t,u(t)), \ p.p.t \in [0,T]; \\ u(t) \in C(t,u(t)), \ \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $N_S(\cdot)$ est le cône normal à l'ensemble S, $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs convexes fermées mesurable sur $[0,T]$ et semicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^d$ et $G : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application mesurable. Nous supposons aussi que G est semicontinue mixte, c'est à dire, pour tout $t \in [0,T]$, et pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $G(t,x)$ est convexe la multi-application $G(t,\cdot)$ est semicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^d$ et à chaque fois que $G(t,x)$ est non convexe la multi-application $G(t,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x.

En premier lieu, le problème est considéré dans la classe des ensembles prox-réguliers, c'est à dire les ensembles $C(t,x)$ sont uniformément ρ-prox-réguliers ($\rho > 0$). En deuxième lieu le problème sera posé dans une classe plus générale celle des ensembles sous lisses, c'est à dire les ensembles $C(t,x)$ sont uniformément sous lisses.

Le processus de la rafle a été introduit par J.J. Moreau [36] comme étant l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{K(t)}(u(t)) & t \in [0,T] \\ u(0) \in K(0) \end{cases}$$

et elle a été étudiée dans [36], [37], [38] sous l'hypothèse de convexité de l'ensemble $K(t)$ ce dernier est requis d'avoir une semivariation bornée (resp. absolument continue). Après ce papier précurseur, plusieurs auteurs ont été intéressés par l'étude de l'existence de solutions du processus de la rafle perturbé dans le cas convexe et non convexe. Le problème du premier ordre a été étudié à fond dans plusieurs papiers, voir par exemple [8], [18], [19], [21],[25], [28], [29], [30], [32], [43], [44], [46] et leurs références. Pour le second ordre on peut citer [4], [9], [11], [16], [17], [34] et leurs références.
L'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_{F,G})$ avec $G \equiv 0$ a été étudié dans les articles fondamentaux [18], [21], [30] ; l'ensemble $C(t,x)$ est convexe dans [30], dans [18], [21] il est supposé appartenir à la classe des ensembles prox-réguliers et dans [32] il est dans la classe plus générale des ensembles sous lisses.

Cette thèse est organisée en trois chapitres, au début un chapitre **"Préliminaires"**, **Chapitre 1** qui rassemble plusieurs définitions et résultats d'ordre général qui nous ont été nécessaires dans nos diverses démonstrations tels que la mesurabilité des fonctions et des multi-applications, la continuité de ces dernières, des résultats de compacité dans les espaces de fonctions, etc... puis quelques notions d'analyse non lisse et variationnelle, comme les différents sous différentiels et cônes et nous terminons en donnant une brève introduction aux ensembles prox-réguliers et sous lisses.

Dans le **Chapitre 2** nous énonçons et démontrons deux résultats d'existence de solutions du problème $(\mathcal{P}_{F,G})$ en dimension finie, où les ensembles $C(t,x)$ sont uniformément r-prox-réguliers, $r > 0$. Le premier théorème démontré à fait l'objet d'une publication, voir [6], le but de ce résultat est de fournir une nouvelle démonstration dans le cas des ensembles prox-réguliers, la multi-application $C(\cdot,\cdot)$ est Lipschitzienne et pour le cas plus général de la perturbation semicontinue mixte. Dans [18], [21] les auteurs ont utilisé une technique de discrétisation basée sur "l'algorithme de rattrapage" de Moreau, c'est à dire, en considérant une partition appropriée de l'intervalle temps, ils ont construit une suite d'approximations qui converge vers la solution du problème considéré. Nous nous proposons une approche différente basée sur un important résultat de coïncidence entre les ensembles de solutions de l'inclusion du premier ordre avec et sans contrainte établie dans [29], et le théorème du point fixe de Kakutani pour les multi-applications. Cette approche de réduction d'une inclusion différentielle sans contraintes nous permet également d'étudier l'inclusion $(\mathcal{P}_{F,G})$ en présence de la semicontinuité mixte de la multi-application G. Dans la seconde section de ce chapitre nous reprenons le même problème avec les mêmes hypothèses sauf exception, la multi-application $C(\cdot,\cdot)$ est absolument continue ceci en utilisant la même technique de démonstration.

Au **Chapitre 3**, nous énonçons deux résultats d'existence dans le cas où les ensembles considérés sont sous lisses, le premier résultat qui est l'objet d'un article soumis voir [5] et il montre l'existence de solutions du problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases}-\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t,x(t)),\ p.p.\ t \in [T_0,T];\\ x(t) \in C(t),\ \forall t \in [T_0,T];\\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0),\end{cases}$$

où les ensembles $C(t)$ sont sous lisses et la multi-application F est semicontinue mixte. Ici nous avons combiné les idées utilisées dans [6] et [32] et nous avons utilisé la même technique de discritisation que dans [32]. Dans le second résultat que nous avons démontré nous reprenons le problème $(\mathcal{P})$ mais cette fois-ci les ensembles $C(t,x)$ dépendent du temps et de l'état pour tout $(t,x) \in [T_0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de cette thèse.

Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach. On note par

- $\mathbf{E}'$ le dual topologique de $\mathbf{E}$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$.
- $\|\cdot\|$ la norme de $\mathbf{E}$.
- $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ la topologie faible sur $\mathbf{E}$.
- $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$ la topologie faible* sur $\mathbf{E}'$.
- $\mathbf{B_E}$ la boule unité ouverte de $\mathbf{E}$.
- $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}$ la boule unité fermée de $\mathbf{E}$.
- Si A est un sous ensemble de $\mathbf{E}$ alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.
- $co(A)$ est l'enveloppe convexe de A.
- $\delta(\cdot, A)$ la fonction indicatrice de A, définie sur $\mathbf{E}$ par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A; \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- La fonction polaire associée à $\delta(\cdot, A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, est la fonction notée $\delta^*(\cdot, A)$ et définie sur $\mathbf{E}'$ par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in \mathbf{E}'.$$

Notons que si A est un convexe fermé de $\mathbf{E}$, alors nous avons la relation suivante

$$d(x, A) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}'}} [\langle x', x\rangle - \delta^*(x', A)], \quad \forall x \in \mathbf{E}$$

avec

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

est la distance du point x à l'ensemble A.

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble fermé pas nécessairement convexe de $\mathbf{H}$. On note par

- $\mathrm{Proj}_A(x)$ la projection de $x \in \mathbf{H}$ sur A.
- $N_A(y)$ le cône normal de Clarke au point $y \in A$. Nous avons

$$y \in \mathrm{Proj}_A(x) \Leftrightarrow x - y \in N_A(y).$$

- χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note aussi par

- $\mathbf{C}_{\mathbf{E}}([0,T])$ l'espace de Banach des applications continues $u : [0,T] \to \mathbf{E}$, muni de la topologie de la norme sup, i.e., $\|u\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|$.
- $\mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}(I)$ l'espace des applications Lebesgue-Bochner intégrables définies sur $I = [0,T]$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbf{E}$, muni de la norme $\|u\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}}$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre **"Préliminaires"** nous citons quelques définitions et résultats fondamentaux qui ont été utilisés dans l'élaboration des démonstrations de nos résultats de telle sorte que la lecture de la thèse soit simplifiée et plus fluide.

1.1 Rappels de Mesurabilité

Pour commencer, nous donnons quelques résultats sur la mesurabilité dans le cas univoque ces derniers sont indispensables pour pouvoir introduire un peu plus loin ces mêmes notions dans le cas multivoque. Pour plus de détails se référer à [3], [14], [41] ou [42]

1.1.1 Notions de mesurabilité

Définition 1.1.1 *Soient* $\mathbf{X}$ *un ensemble non vide,* Σ *une famille de sous ensembles de* $\mathbf{X}$*, alors* Σ *est dite une tribu sur* $\mathbf{X}$ *si*

1. $\emptyset \in \Sigma$,
2. $A \in \Sigma \Rightarrow \mathbf{X} \setminus A \in \Sigma$,
3. $A_n \in \Sigma, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$.

– Le couple $(\mathbf{X}, \Sigma)$ est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
– Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une *algèbre* sur $\mathbf{X}$.
– Dans le cas où $\mathbf{X}$ est un espace topologique, la plus petite tribu contenant la topologie de $\mathbf{X}$, autrement dit, la tribu engendré par la topologie de $\mathbf{X}$ est appelée *tribu Borélienne* sur $\mathbf{X}$ et est notée $\mathcal{B}(\mathbf{X})$.

Définition 1.1.2 *Soient* $(\mathbf{X}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}_2, \Sigma_2)$ *deux espaces mesurables et* g *une application définie sur* $\mathbf{X}_1$ *à valeurs dans* $\mathbf{X}_2$*. On dit que* g *est* (Σ_1, Σ_2)*-mesurable si pour tout* $A \in \Sigma_2$, $g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.
Si $\mathbf{X}_2$ *est un espace topologique, une fonction* $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$*-mesurable est dite fonction Borélienne, avec* $\Sigma = \Sigma_1$ *et* $\mathcal{B}(\mathbf{X}_2) = \Sigma_2$.

Définition 1.1.3 *Soient* $(\mathbf{X}, \Sigma)$ *un espace mesurable et* $\mathbf{M}$ *un espace métrique. Alors une application* $g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{M}$*, est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si* g *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbf{M}))$*-mesurable et* $g(\mathbf{X})$ *est séparable.*

Définition 1.1.4 *Soient* $(\mathbf{X}, \Sigma)$ *un espace mesurable et* $\mathbf{M}$ *un espace métrique, on dit que l'application* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{M}$ *est* Σ*-étagée (resp. dénombrablement* Σ*-étagée) si* f *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbf{M}))$*-mesurable et* $f(\mathbf{X})$ *fini (resp. dénombrable).*

Lemme 1.1.1 *Sous les notations de la* **Définition** 1.1.4 *nous avons équivalence entre les caractérisations suivantes*

1. *f est Bochner mesurable.*
2. *Il existe une suite de fonctions Σ-étagées définies sur $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbf{M}$, convergeant simplement vers f.*
3. *Il existe une suite de fonctions dénombrablement Σ-étagées définies sur $\mathbf{X}$, à valeurs dans $\mathbf{M}$ convergeant uniformément sur $\mathbf{X}$ vers f.*

1.1.2 Rappels sur les mesures

Définition 1.1.5 *Soit $(\mathbf{X}, \Sigma)$ un espace mesurable. Alors la fonction $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur $\mathbf{X}$ si*

1. *$\nu(\emptyset) = 0$;*
2. *$\nu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \nu(A_n)$ pour toute suite dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- Le triplet $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ est appelé espace mesuré.
- Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$. On dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$ ou que l'espace $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ est positif.
- Si $\nu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$. On dit que ν est une mesure finie, ou que l'espace $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ est fini.
- Si $\mathbf{X}$ est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.

Définition 1.1.6 *Soient $\mathbf{X}$ un espace topologique séparé et ν une mesure Borélienne.Alors ν est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de $\mathbf{X}$, tels que $G \subset A \subset C$ et $\nu(C \setminus G) \leq \varepsilon$.*
Une mesure finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.1.7 *Soit $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ un espace mesuré avec $\nu \geq 0$ et Z un sous ensemble de $\mathbf{X}$. On dit que Z est ν-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*
On dit qu'une propriété sur $\mathbf{X}$ est vraie ν-presque partout (ν-p.p) si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est ν-négligeable.

La tribu ν-complétée de Σ notée Σ_ν est la tribu engendrée par Σ et les ensembles ν-négligeables, i.e. ;

$$\Sigma_\nu = \Big\{ A \cup Z/ \ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \nu - \text{négligeable} \Big\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire, si tout ensemble ν-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.1.8 *Soit $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$ un espace mesuré avec ν finie, notons $\Sigma^* = \Sigma_\nu$. Soit $\nu^* : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\nu^*(A \cup Z) = \nu(A)$ pour tout $A \in \Sigma$ et tout Z ν-négligeable. Alors, $(\mathbf{X}, \Sigma^*, \nu^*)$ est un espace mesuré avec ν^* finie et complète. De plus, on a $\nu^* = \nu$ sur Σ.*
$(\mathbf{X}, \Sigma^*, \nu^*)$ est appelée l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré $(\mathbf{X}, \Sigma, \nu)$.

Théorème 1.1.1 *Soient $\mathbf{X}$ un espace topologique compact, Σ une algèbre sur $\mathbf{X}$ et $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive, régulière et bornée.*
Soit $\widetilde{\Sigma}$ la plus petite tribu sur $\mathbf{X}$ contenant Σ. Alors, il existe une mesure unique $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ régulière, bornée et qui prolonge ν à $\widetilde{\Sigma}$.

1.1.3 Mesure de Borel et de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soient t_0 , t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0]$, $]t', t'']$ pour tout $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$ et les unions finies de ces intervalles. Il est clair que Σ est une algèbre sur J.
Définissons, $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nu(\{t_0\}) = 0, \quad \nu(]t', t'']) = t'' - t' \quad \text{et} \quad \nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.
La mesure ν est une mesure additive, régulière et bornée. Par le **Théorème** 1.1.1 elle admet une unique extension à $\widetilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur J contenant Σ et qui n'est autre que la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(J)$. Cette extension notée $\widetilde{\nu}$ est appelée mesure de Borel sur J.
Soit (J, Σ^*, ν^*) l'extension de Lebesgue de $(J, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\nu})$, alors les éléments de Σ^* sont appelés ensembles Lebesgue mesurables de J et ν^* la mesure de Lebesgue sur J.
On notera par

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I.
- μ ou dt la mesure de Lebesgue.
- $\mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}(I)$ l'espace des applications Lebesgue-Bochner intégrables définies sur I à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbf{E}$, c'est à dire, les applications f Lebesgue-Bochner mesurables et telles que $\displaystyle\int f d\mu$ est finie.

Définition 1.1.9 *Soient (J, Σ) un espace mesurable, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux espaces topologiques et $f : J \times \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. On dit que f est une application de Carathéodory si $f(\cdot, x)$ est Σ-mesurable pour tout $x \in \mathbf{X}$, fixé et $f(t, \cdot)$ est continue pour tout $t \in J$, fixé.*

1.2 Quelques résultats de compacité

Les résultats de cette section ont été largement utilisés dans les démonstrations de nos théorèmes et nous les avons pris des références [1], [15], [26] et [31].

1.2.1 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 1.2.1 *Soit $\mathbf{J}$ un espace métrique compact, $\mathbf{Y}$ un espace métrique complet, et K un sous ensemble de $\mathbf{C}(\mathbf{J}, \mathbf{Y})$, l'espace des applications continues définies sur $\mathbf{J}$ à valeurs dans $\mathbf{Y}$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors, K est relativement compact si et seulement si K est équicontinu et $K(x)$ est relativement compact avec*

$$K(x) = \Big\{ f(x) / \ f \in K \Big\}.$$

Le théorème qui suit est une conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.1 voir [1] et[3] pour la démonstration.

Théorème 1.2.2 *Soient J un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, $\mathbf{E}$ un espace de dimension finie et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans $\mathbf{E}$, satisfaisant les conditions suivantes*

1. *$\forall t \in J$, $(f_n(t))_n$ est un sous ensemble relativement compact de $\mathbf{E}$.*
2. *Il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}(J)$ telle que $\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t)$ presque partout sur J.*

Alors, il existe une sous suite de $(f_n)_n$ (qu'on note aussi $(f_n)_n$) et qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to \mathbf{E}$ au sens suivant

a) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

b) $(\dot{f}_n)_n$ converge faiblement vers f dans $\mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}(J)$, c'est à dire, $(\dot{f}_n)_n$ converge vers f $\sigma(\mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}, \mathbf{L}^\infty_{\mathbf{E}})$.

1.2.2 Autres théorèmes de compacité

Théorème 1.2.3 ***(Théorème d'Eberlein-$\tilde{S}$mulian)***
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach $\mathbf{E}$*. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.

ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 1.2.4 ***(Théorème de Mazur)***
Soit $\mathbf{E}$ *un espace de Banach et A un sous ensemble compact de* $\mathbf{E}$*. Alors, $\overline{co}(A)$ est compacte.*

Théorème 1.2.5 ***(Théorème de Banach-Mazur)***
Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ *convergeant faiblement vers x. Alors, il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments x_n, x_{n+1},...) convergeant fortement vers x.*

Lemme 1.2.1 ***(Lemme de Mazur)***
Pour tout sous ensemble convexe d'un espace de Banach $\mathbf{E}$*, la fermeture forte coïncide avec la fermeture faible.*

Pour terminer cette section nous énonçons un théorème qui assure la faible compacité d'un sous ensemble de $\mathbf{L}^1$. Pour plus de détails voir [26].

Définition 1.2.1 *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini et* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert de dimension finie. Une partie K de $\mathbf{L}^1_{\mathbf{H}}(\Omega)$ est uniformément intégrable si*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \|f\| d\mu = 0$$

uniformément en $f \in K$, avec $E \in \Sigma$.

Théorème 1.2.6 ***(Théorème de Dunford*** *théorème, IV.2.1 dans [26]).*
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini et $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert de dimension finie. Une partie K de $\mathbf{L}^1_{\mathbf{H}}(\Omega)$ est relativement faiblement compacte si*

i) K est bornée,

ii) K est uniformément intégrable,

iii) pour chaque $E \in \Sigma$, l'ensemble $\left\{ \int_E f d\mu, f \in K \right\}$ est relativement faiblement compact.

1.3 Multi-applications

1.3.1 Définition d'une multi-application

Définition 1.3.1 *Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbf{Y}$ est une application qui à chaque élément $x \in \mathbf{X}$ associe un sous ensemble $F(x)$ de $\mathbf{Y}$. On note $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ ou $F : \mathbf{X} \to \mathcal{P}(\mathbf{Y})$ (où $\mathcal{P}(\mathbf{Y})$ est l'ensemble des parties de $\mathbf{Y}$).*

On note par

1. $\mathrm{Dom}(F)$ le domaine d'une multi-application $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ et est donné par

$$\mathrm{Dom}(F) = \Big\{x \in \mathbf{X} \;/\; F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

2. $\mathrm{gph}(F)$ le graphe de F défini par

$$\mathrm{gph}(F) = \Big\{(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \;/\; x \in \mathrm{Dom}(F)\;; y \in F(x)\Big\}.$$

3. Enfin, l'image de F notée $\mathcal{I}m(F)$ est donnée par

$$\mathcal{I}m(F) = \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(F)} F(x).$$

Définition 1.3.2 *Soit $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ vérifiant $f(x) \in F(x)$, $\forall x \in \mathbf{X}$.*

1.3.2 Mesurabilité d'une multi-application

Pour plus de détails sur cette partie se référer à [20].

Définition 1.3.3 *Soient $(\mathbf{J}, \Sigma)$ un espace mesurable, $\mathbf{X}$ un espace métrique et $\Gamma : \mathbf{J} \rightrightarrows \mathbf{X}$ une multi-application. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbf{X}))$-mesurable, ou tout simplement Σ-mesurable, si pour tout ouvert V de $\mathbf{X}$ on a*

$$\Gamma^{-1}(V) = \Big\{t \in \mathbf{J} \;/\; \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\Big\} \in \Sigma.$$

Définition 1.3.4 *Une multi-application* $\Gamma : \mathbf{J} \rightrightarrows \mathbf{X}$ *est dite intégralement bornée ou scalairement intégrable si* Γ *est mesurable et la fonction* $t \mapsto |\Gamma((t)|$ *appartient à* $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbf{J})$. *avec*

$$|\Gamma((t)| = \sup_{x \in \Gamma(t)} \|x\|$$

Théorème 1.3.1 ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***
Soient $(\mathbf{J}, \Sigma)$ *un espace mesurable,* $\mathbf{X}$ *un espace métrique complet séparable.*
Soit $F : \mathbf{J} \rightrightarrows \mathbf{X}$ *une multi-application* Σ*-mesurable à valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

1.3.3 Distance de Hausdorff

Définition 1.3.5 *Soient* A, B *deux sous ensembles d'un espace métrique* $(\mathbf{X}, d)$. *L'écart entre* A *et* B *est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

avec

$$d(a, B) = d_B(a) = \inf_{b \in B} d(a, b),$$

et la distance de Hausdorff entre A *et* B *est définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B),\ e(B, A)\}.$$

Remarque 1.3.1 *Si on note par* $P_f(\mathbf{X})$ *l'ensemble des parties fermées de* $\mathbf{X}$, *alors* $P_f(\mathbf{X})$ *muni de la distance de Hausdorff est un espace métrique.*

Définition 1.3.6 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* A *une partie de* $\mathbf{E}$ *et* f *une fonction définie sur* $\mathbf{E}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

1. *On appelle fonction polaire associée à* f *et on note* f^* *la fonction définie sur* $\mathbf{E}'$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *par*

$$x' \mapsto f^*(x') = \sup_{x \in \mathbf{E}} [\langle x', x \rangle - f(x)].$$

2. *On appelle fonction d'appui de* A, *la fonction polaire associée à* $\delta(\cdot, A)$, *et qu'on note* $\delta^*(\cdot, A)$, *elle est définie sur* $\mathbf{E}'$ *par*

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in \mathbf{E}} [\langle x', x \rangle - \delta(x, A)] = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle.$$

Corollaire 1.3.1 *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach. Si* A *est un convexe fermé de* $\mathbf{E}$, *nous avons la relation suivante*

$$d(x, A) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}'}} [\langle x', x \rangle - \delta^*(x', A)], \quad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Corollaire 1.3.2 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach et* A, B *deux parties non vides, convexes et fermées de* $\mathbf{E}$. *Alors,*

$$e(A,B) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}'}} [\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)]$$

et

$$\mathcal{H}(A,B) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}'}} \left|\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)\right|.$$

Énonçons maintenant un théorème qui va nous être utile dans les démonstrations de nos théorèmes.

Théorème 1.3.2 ***(Théorème de séparation)***
soit K *un sous ensemble non vide d'un espace de Banach* $\mathbf{E}$. *Alors,*

$$\overline{co}(K) = \Big\{x \in \mathbf{E} / \ \forall x' \in \mathbf{E}', \ \langle x, x' \rangle \leq \delta^*(x',K)\Big\}.$$

1.3.4 Continuité des multi-applications

Pour plus de détails sur les résultats de cette section voir [1], [7], [31] ou [40].

Définition 1.3.7 *Soient* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *deux espaces topologiques et* $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ *une multi-application. Alors* F *est dite semicontinue supérieurement (s.c.s) au point* $\bar{x} \in \mathbf{X}$, *si pour tout ouvert* V *de* $\mathbf{Y}$ *vérifiant* $F(\bar{x}) \subset V$ *il existe un ouvert* U *de* $\mathbf{X}$ *tel que* $\bar{x} \in U$ *et* $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.
On dit que F *est s.c.s sur* $\mathbf{X}$, *si elle est s.c.s en tout point* $x \in \mathbf{X}$.

Définition 1.3.8 *Soient* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *deux espaces topologiques,* $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ *une multi-application. Alors* F *est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) au point* $\bar{x} \in \mathbf{X}$, *si pour tout ouvert* V *de* $\mathbf{Y}$ *vérifiant* $F(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$, *il existe un ouvert* U *de* $\mathbf{X}$ *tel que* $\bar{x} \in U$ *et* $F(x) \cap V \neq \emptyset$, $\forall x \in U$.
On dit que F *est s.c.i sur* $\mathbf{X}$, *si elle est s.c.i en tout point* $x \in \mathbf{X}$.

On a les propriétés suivantes

Propriétés 1.3.1 *Soient* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *deux espaces topologiques,* $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ *une multi-application.*

1. *Si* F *est s.c.s à valeurs fermées alors, son graphe est fermé. De plus on a*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) \subset F(\bar{x}),$$

pour tout $\bar{x} \in \mathbf{X}$.

2. *Si* $\mathbf{Y}$ *est compact,* F *à valeurs compactes et* $gph(F)$ *est fermé dans* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$*. Alors* F *est s.c.s.*

Définition 1.3.9 *Soient* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *deux espaces topologiques,* $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ *une multi-application. Alors* F *est dite semicontinue extérieurement (s.c.e) au point* $\bar{x} \in \mathbf{X}$ *si*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) \subset F(\bar{x}).$$

On dit que F *est s.c.e sur* $\mathbf{X}$*, si elle est s.c.e en tout point* $x \in \mathbf{X}$*.*

Remarque 1.3.2

1. F *est s.c.e si et seulement si son graphe* $gph(F)$ *est fermé.*
2. *Si* F *est s.c.s à valeurs fermées alors,* F *est s.c.e.*

Définition 1.3.10 *Soient* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *deux espaces métriques et* $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ *une multi-application. On dit que* F *est continue (resp. Lipschitzienne de rapport* $\lambda > 0$*), si pour tout* $\bar{x} \in \mathbf{X}$ *on a,*

$$\lim_{x \to \bar{x}} \mathcal{H}(F(\bar{x}), F(x)) = 0$$

(resp. pour tout $\bar{x}, x \in \mathbf{X}$ *on a,*

$$\mathcal{H}(F(\bar{x}), F(x)) \leq \lambda d_{\mathbf{X}}(\bar{x}, x)),$$

où $\mathcal{H}$ *est la distance de Hausdorff et* $d_{\mathbf{X}}$ *la distance sur* $\mathbf{X}$*.*

Définition 1.3.11 *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace topologique. On dit qu'une application* $f : [a, b] \to \mathbf{E}$ *est absolument continue si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$*, tels que pour toute partition dénombrable de* $[a, b]$ *par des intervalles disjoints* $[a_k, b_k]$ *vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

on a,

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3.3 *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace topologique. Une application* $f : [a, b] \to \mathbf{E}$ *est absolument continue si et seulement si il existe une application intégrable* $v : [a, b] \to \mathbf{E}$ *telle que*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)dt,$$

dans ce cas $\dot{f} = v$ *p.p.*

Définition 1.3.12 *Soient $T > 0$, $\mathbf{Y}$ un espace topologique et $C : [0, T] \rightrightarrows \mathbf{Y}$ une multi-application. On dit que C est absolument continue si pour tout $y \in \mathbf{Y}$ et tout $t, t' \in [0, T]$ on a*

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq |a(t) - a(t')| \tag{1.1}$$

où $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a}(t) \neq 0$ p.p sur $[0, T]$.

Remarques 1.3.1

1. *De la relation (1.1) nous avons pour $t \geq t'$*

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)| ds.$$

2. *On voit bien qu'une fonction (multi-application) absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.*
3. *Une multi-application Lipschitzienne est absolument continue.*

Dans ce qui suit nous énonçons un théorème de fermeture pour les multi-applications semicontinues supérieurement que nous utiliserons dans les démonstrations de nos théorèmes du **Chapitre 2**.

Théorème 1.3.4 *(Théorème [VI-4] chap3 dans [20])*
Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach séparable, $\mathbf{X}$ un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0, T] \times \mathbf{X}$ à valeurs non vides, convexes, compactes dans $\mathbf{E}$ et telle que pour tout $t \in [0, T]$ fixé, $\Phi(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement.
Soient $(x_n)_n$, x des applications définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{X}$. $(y_n)_n$, y des applications définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{E}$. Supposons que

1. *$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$, p.p sur $[0, T]$;*
2. *$(y_n)_n$ converge vers y, $\sigma(\mathbf{L}^1_{\mathbf{E}}, \mathbf{L}^\infty_{\mathbf{E}'})$;*
3. *$y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$ p.p sur $[0, T]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors, $y(t) \in \Phi(t, x(t))$ p.p sur $[0, T]$.

Théorème 1.3.5 *Soient $\mathbf{X}$ un espace métrique, $\mathbf{Y}$ un espace de Banach séparable et $F : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ une multi-application à valeurs convexes compactes. Alors,*

1. *F est $\mathcal{B}(\mathbf{X})$-mesurable si est seulement si pour chaque $\xi \in \mathbf{X}'$ sa fonction d'appui $\delta^*(\xi, F(\cdot))$ est $\mathcal{B}(\mathbf{X})$-mesurable.*

2. *F est semicontinue supérieurement si est seulement si pour chaque $\xi \in \mathbf{X}'$ sa fonction d'appui $\delta^*(\xi, F(\cdot))$ est semicontinue supérieurement.*

Théorème 1.3.6 *(Théorème 14.13 dans [40])*
Soient $\mathbf{T}$ un espace quelconque et $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux espaces topologiques, soit $F : \mathbf{T} \rightrightarrows \mathbf{X}$ une multi-application mesurable à valeurs fermées, et pour chaque $t \in \mathbf{T}$ considérons une multi-application $M(t, \cdot) : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{Y}$ semicontinue extérieurement et supposons que la multi-application $t \longmapsto gph(M(t, \cdot)) \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ est mesurable (ce qui est vrai quand $M(t, \cdot)$ est constante pour tout t). Alors la multi-application $t \longmapsto M(t, F(t))$ est mesurable.

1.3.5 Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan

Le résultat énoncé dans cette section est un théorème du point fixe dans le cas multivoque. Pour la démonstration voir par exemple [31].

Théorème 1.3.7 *Soient $\mathbf{X}$ un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de $\mathbf{X}$ et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées. Alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.*

1.4 Sous différentiels

Dans cette section nous donnons les résultats les plus importants sur les sous différentiels au sens de Clarke, au sens de Fréchet et proximal qui nous sont nécessaires pour donner les définitions et les caractérisations de deux classes d'ensembles non convexes à savoir les ensembles prox-réguliers pour commencer puis sous lisses, puisque nos théorèmes ont été posés sous des hypothèses de non convexité. Pour plus de détails sur les sous différentiels au sens de Clarke, au sens de Frèchet et proximal voir [22], [23], [24], [34] et [35].

1.4.1 Sous différentiel au sens de Clarke

Définition 1.4.1 ***(Dérivée directionnelle généralisée au sens de Clarke)***
Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach et $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au

voisinage de $\bar{x} \in \mathbf{E}$ de rapport $k > 0$, i.e., il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| \leq k\|x - x'\|$ pour tout $x, x' \in \bar{x} + \varepsilon \mathbf{B_E}$.
Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point $\bar{x}$ dans la direction v, notée $f^0(\bar{x}; v)$, est définie par

$$f^0(\bar{x}; v) = \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

où x est un vecteur de $\mathbf{E}$ et t un scalaire positif.

Remarque 1.4.1 *Notons que cette définition ne suppose pas l'existence d'une limite mais juste l'existence d'une limite sup.*

Définition 1.4.2 ***(Sous différentiel au sens de Clarke)***
Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach et $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x} \in \mathbf{E}$, de rapport $k > 0$. Le sous différentiel au sens de Clarke de la fonction f au point $\bar{x}$ noté $\partial f(\bar{x})$ est le sous ensemble de $\mathbf{E}'$ (dual de $\mathbf{E}$) défini par

$$\partial f(\bar{x}) = \Big\{ \xi \in \mathbf{E}' : f^0(\bar{x}; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \ \forall v \in \mathbf{E} \Big\}.$$

Notons qu'il existe une définition plus généralisée du sous différentiel au sens de Clarke donnée dans le cas où f est une fonction semicontinue inférieurement. La voici

Définition 1.4.3 *Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach et $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semicontinue inférieurement (s.c.i) et soit $\bar{x}$ un point de $\mathbf{E}$ où f est finie.*
Le sous différentiel au sens de Clarke de f au point $\bar{x}$ est défini par

$$\partial f(\bar{x}) = \Big\{ \xi \in \mathbf{E}' : \ \langle \xi, h \rangle \leq f^{\uparrow}(\bar{x}, h) \ , \ \forall h \in \mathbf{E} \Big\},$$

où $f^{\uparrow}(\bar{x}, h)$ est la dérivée directionnelle généralisée de Rockaffellar donnée par

$$f^{\uparrow}(\bar{x}, h) = \limsup_{\substack{x' \to^f \bar{x} \\ t \searrow 0}} \inf_{h' \to h} \frac{f(x' + th') - f(x')}{t},$$

où $x' \to^f \bar{x}$ veut dire $x' \to \bar{x}$ et $f(x') \to f(\bar{x})$.

Remarque 1.4.2 *Si $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est localement Lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$, $f^{\uparrow}(\bar{x}, h)$ coïncide avec la dérivée directionnelle de Clarke, $f^0(\bar{x}, h)$.*

On note par $\|\xi\|_*$ la norme de $\xi \in \mathbf{E}'$ définie par

$$\|\xi\|_* = \sup \big\{ |\langle \xi, v \rangle|, \ v \in \mathbf{E} \text{ et } \|v\| \leq 1 \big\} = \sup_{v \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}} |\langle \xi, v \rangle|.$$

La proposition suivante résume quelques importantes propriétés du sous différentiel au sens de Clarke.

Proposition 1.4.1 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach et* $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de* $\bar{x} \in \mathbf{E}$*, de rapport* $k > 0$*. Alors*

1. $\partial f(\bar{x})$ *est un sous ensemble non vide, convexe, faiblement compact de* $\mathbf{E}'$ *et* $\|\xi\|_* \leq k$*, pour tout* $\xi \in \partial f(\bar{x})$*.*
2. *Pour tout* $v \in \mathbf{E}$*, on a*

$$f^0(\bar{x}, v) = \max \big\{ \langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial f(\bar{x}) \big\}.$$

Proposition 1.4.2 *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach et* $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de* $\bar{x} \in \mathbf{E}$*, de rapport* $k > 0$*. Alors*

1. $\xi \in \partial f(\bar{x})$ *si et seulement si* $f^0(\bar{x}, v) \geq \langle \xi, v \rangle$ *pour tout* $v \in \mathbf{E}$*.*
2. *Soient* (x_i) *et* (ξ_i) *deux suites respectivement dans* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *telles que* $\xi_i \in \partial f(x_i)$*. Supposons que* (x_i) *converge vers* $\bar{x}$ *et que* ξ *est un point d'adhérence de* (ξ_i) *pour la topologie faible***. Alors on a* $\xi \in \partial f(\bar{x})$*. (i.e., la multi-application* $\partial f(\cdot)$ *est faiblement** *fermée) ;*
3. *On a la caractérisation suivante,*

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{y \in \bar{x} + \delta \mathbf{B_E}} \partial f(y).$$

4. *Si* $\mathbf{E}$ *est de dimension finie alors,* $\partial f(\cdot)$ *est semicontinue supérieurement au point* $\bar{x}$*.*

1.4.2 Sous différentiels proximal et au sens de Fréchet

Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach et $f : \mathbf{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et semicontinue inférieurement sur $\mathbf{E}$.

Définition 1.4.4 ***(Sous différentiel proximal)***
Le sous différentiel proximal au point $\bar{x} \in \mathbf{E}$*,* $\partial^P f(\bar{x})$ *est défini comme étant l'ensemble de tous les* $\xi \in \mathbf{E}'$ *pour les quels il existe deux nombres réels* $\sigma > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que*

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \sigma \|x - \bar{x}\|^2$$

pour tout $x \in \bar{x} + \delta \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}$*.*

Définition 1.4.5 ***(Sous différentiel au sens de Fréchet)***
Le sous différentiel au sens de Fréchet de f *au point* $\bar{x} \in \mathbf{E}$*,* $\partial^F f(\bar{x})$*, est donné par l'ensemble de tous les* $\xi \in \mathbf{E}'$ *tels que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *vérifiant*

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|$$

pour tout $x \in \bar{x} + \delta \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}$*.*

Remarquons que nous avons toujours,

$$\partial^P f(\bar{x}) \subset \partial^F f(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x}).$$

Par convention on pose, $\partial^P f(\bar{x}) = \partial^F f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = \emptyset$ quand $f(\bar{x})$ est infini.
Notons aussi que $\partial f(\bar{x})$ et $\partial^F f(\bar{x})$ sont des convexes fermés, par contre $\partial^P f(\bar{x})$ est un convexe pas nécessairement fermé.

1.5 Cônes tangents et normaux à des ensembles non convexes

On ne peut définir les sous différentiels sans donner les définitions des cônes normaux qui leurs sont associés étant donnée que leurs définitions sont étroitement liées, aussi nous en aurons besoin pour les différentes propriétés des ensembles prox-réguliers et des ensembles sous lisses. De plus, on ne peut parler de processus de la rafle sans définir ce qu'est un cône puisque ce dernier n'est rien d'autre qu'une inclusion différentielle dont le second membre est un cône.

1.5.1 Cône tangent au sens de Clarke

On donne ici la définition du cône tangent au sens de Clarke $T_S^C(\bar{x})$ (où S est un sous ensemble d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ et $\bar{x} \in S$) qui joue un rôle important dans l'analyse non lisse. Pour plus de détails se référer à [22].

Définition 1.5.1 *Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ et $\bar{x} \in S$. Un vecteur $v \in \mathbf{E}$ est tangent à S au point $\bar{x}$ si on a $d_S^0(\bar{x}, v) = 0$.*
L'ensemble de tous les vecteurs tangents à S est noté $T_S^C(\bar{x})$ et est appelé cône tangent de Clarke à S au point $\bar{x}$.

Voici une caractérisation séquentielle de $T_S^C(\bar{x})$.

Proposition 1.5.1

$$T_S^C(\bar{x}) = \Big\{ v \in \mathbf{E}, \forall t_n \searrow 0, \forall x_n \to^S \bar{x}, \exists v_n \to v \quad t.q \quad x_n + t_n v_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

où $x_n \to^S \bar{x}$ veut dire que $x_n \to \bar{x}$ et $x_n \in S$ pour tout n.

1.5.2 Cône normal au sens de Clarke

Il existe plusieurs manières de définir le cône normal au sens de Clarke à S au point $\bar{x}$ et nous avons choisi la suivante, étant donné que nous avons déjà défini le cône tangent au sens de Clarke $T_S^C(\bar{x})$.

Définition 1.5.2 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* S *un sous ensemble non vide de* $\mathbf{E}$ *et* $\bar{x} \in S$*. Le cône normal au sens de Clarke à* S *au point* $\bar{x}$*, noté* $N_S(\bar{x})$*, est défini par*

$$N_S(\bar{x}) = \Big\{\xi \in \mathbf{E}'; \langle \xi, v\rangle \leq 0, \forall v \in T_S^C(\bar{x})\Big\}.$$

Nous avons la caractérisation de $N_S(\bar{x})$ en terme de sous différentiel.

Proposition 1.5.2 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* S *un sous ensemble non vide de* $\mathbf{E}$ *et* $\bar{x} \in S$*.*

$$N_S(\bar{x}) = cl\Big\{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d(\bar{x}, S)\Big\}$$

où cl *dénote la fermeture faible***.*
De plus, l'inclusion suivante est toujours vérifiée

$$\partial d(\bar{x}, S) \subset N_S(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}.$$

Proposition 1.5.3 *Si* S *est un ensemble convexe, alors* $N_S(\bar{x})$ *coïncide avec le cône des normales dans le sens de l'analyse convexe.*

Maintenant donnons une autre caractérisation du sous différentiel au sens de Clarke et qui utilise le cône normal de ce dernier. Commençons par définir l'épigraphe d'une fonction.

Définition 1.5.3 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* f *une fonction définie de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On appelle épigraphe de* f *qu'on note* $Epif$*, le sous ensemble de* $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ *défini par*

$$Epif = \big\{(x, r) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R};\ f(x) \leq r\big\}.$$

Théorème 1.5.1 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* $\bar{x} \in \mathbf{E}$ *et* f *une fonction définie de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbb{R}$*, Lipschitzienne au voisinage de* $\bar{x}$*. Alors l'épigraphe de* $f^0(\bar{x}, .)$ *est* $T^C_{Epif}(\bar{x}, f(\bar{x}))$*. C'est à dire, le couple* $(v, r) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}$ *est dans* $T^C_{Epif}(\bar{x}, f(\bar{x}))$ *si et seulement si* $r \geq f^0(\bar{x}, v)$*.*

Corollaire 1.5.1 *Soient* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* $\bar{x} \in \mathbf{E}$ *et* f *une fonction Lipschitzienne au voisinage de* $\bar{x}$*. Alors un élément* $\xi \in \mathbf{E}'$ *est dans* $\partial f(\bar{x})$ *si et seulement si* $(\xi, -1) \in N_{Epif}(\bar{x}, f(\bar{x}))$

1.5.3 Cône normal proximal

Pour plus de détails sur les cônes normaux proximaux se référer à [23] et [24].

Pour définir le cône normal proximal nous avons besoin de définir la projection sur un ensemble S.

Définition 1.5.4 *(**Projection sur** S).*
Soient S un sous ensemble d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ et $\bar{u} \notin S$. On définit $Proj_S(\bar{u})$, la projection de $\bar{u}$ sur S (qui peut être vide) comme l'ensemble de tous les $\bar{x} \in S$ dont la distance à $\bar{u}$ est minimale, c'est à dire, $\|\bar{u} - \bar{x}\| = d(\bar{u}, S)$.
D'où,

$$Proj_S(\bar{u}) = \Big\{\bar{x} \in S,\ d(\bar{u}, S) = \|\bar{u} - \bar{x}\|\Big\}.$$

La caractérisation géométrique de cette définition est la suivante

$$\bar{x} \in \mathrm{Proj}_S(\bar{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} \in S \cap \mathbf{B}(\bar{u}, \|\bar{u} - \bar{x}\|) \\ \text{et} \\ S \cap int\{\mathbf{B}(\bar{u}, \|\bar{u} - \bar{x}\|)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Le vecteur $\bar{u} - \bar{x}$ peut déterminer la direction de la normale proximale à S au point $\bar{x}$. Tout multiple non négative $\xi = r(\bar{u} - \bar{x}),\ r > 0$ d'un tel vecteur est appelé normal proximal à S au point $\bar{x}$.
L'ensemble de tous ces vecteurs est appelé le cône normal proximal à S au point $\bar{x} \in S$ et est noté $N_S^P(\bar{x})$, i.e.,

$$N_S^P(\bar{x}) = \Big\{\xi \in \mathbf{E}' : \exists\, r > 0,\ \bar{x} \in \mathrm{Proj}_S(\bar{x} + r\xi)\Big\},$$

en d'autres termes,

$$N_S^P(\bar{x}) = \Big\{\xi \in \mathbf{E}' : \exists\, r > 0,\ d(\bar{x} + r\xi, S) = r\|\xi\|_*\Big\}.$$

Proposition 1.5.4 *Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ et $\bar{x} \in S$. On a*

$$N_S^P(\bar{x}) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial^P d(\bar{x}, S)$$

De plus, l'égalité suivante est toujours vérifiée.

$$\partial d^P(\bar{x}, S) = N_S^P(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}.$$

Remarque 1.5.1 *Quand $\bar{x} \notin S$, le cône normal proximal à S, $N_S^P(\bar{x})$ est indéfini. Par contre lorsqu'on a $\bar{x} \in S$ avec $\bar{x} \notin Proj_S(\bar{u})$ pour tout $\bar{u} \notin S$ (i.e. ; qu'il n'existe pas de point $\bar{u}$ extérieur à S tel que $\bar{x} \in Proj_S(\bar{u})$ ce qui est le cas quand $\bar{x} \in intS$) on pose $N_S^P(\bar{x}) = \{0\}$.*

1.5.4 Cône normal au sens de Fréchet

Se référer à [34] et [35] pour plus de détails.

Définition 1.5.5 *Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ et $\bar{x} \in S$. Le vecteur $\xi \in \mathbf{E}'$ est normal à S au point $\bar{x}$ au sens de Fréchet, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq \varepsilon \|x - \bar{x}\|$$

pour tout $x \in (\bar{x} + \delta \mathbf{B_E}) \cap S$.
On notera l'ensemble de tous ces vecteurs par $N_S^F(\bar{x})$.

Proposition 1.5.5 *Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Banach $\mathbf{E}$ et $\bar{x} \in S$. On a*

$$N_S^F(\bar{x}) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial^F d(\bar{x}, S)$$

De plus,

$$\partial d^F(\bar{x}, S) = N_S^F(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{E}}.$$

Proposition 1.5.6 *Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ et $\bar{x}$ un point dans S. Alors*

$$\partial \delta_S(\bar{x}) = N_S(\bar{x}),$$
$$\partial^P \delta_S(\bar{x}) = N_S^P(\bar{x}),$$

et

$$\partial^F \delta_S(\bar{x}) = N_S^F(\bar{x}).$$

Proposition 1.5.7 *Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ et $\bar{x}$ un point dans S. On a toujours les inclusions suivantes*

$$N_S^P(\bar{x}) \subset N_S^F(\bar{x}) \subset N_S(\bar{x}).$$

On pose, $N_S^P(\bar{x}) = N_S^F(\bar{x}) = N_S(\bar{x}) = \emptyset$ si $\bar{x} \notin S$.

- Pour tout sous ensemble S non vide, fermé, convexe et tout point $\bar{x} \in S$, tous les cônes coïncident avec $N_S(\bar{x})$.
- $N_S^F(\bar{x})$ et $N_S(\bar{x})$ sont des cônes fortement fermés dans $\mathbf{H}$.
- $N_S^P(\bar{x})$ est un cône convexe dans $\mathbf{H}$.

1.5.5 Régularité des ensembles

Rappelons avant tout la définition du cône contingent $K_S(\bar{x})$ des tangentes à l'ensemble S en un point $\bar{x}$.

Définition 1.5.6 *Soient un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$*,* S *un sous ensemble non vide de* $\mathbf{H}$ *et* $\bar{x} \in S$*. Un vecteur* v *de* $\mathbf{H}$ *est dans* $K_S(\bar{x})$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $t \in]0, \varepsilon[$ *et un point* w *dans* $v + \varepsilon \mathbf{B_H}$ *tels que* $\bar{x} + tw \in S$ *(*$\bar{x} \in clS$ *nécessairement avec cl la fermeture faible***).*

Il vient immédiatement que $T_S^C(\bar{x})$ est toujours contenu dans $K_S(\bar{x})$, cependant ce dernier n'est pas convexe.

Définition 1.5.7 *Soient un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$*,* S *un sous ensemble non vide de* $\mathbf{H}$ *et* $\bar{x} \in S$*. L'ensemble* S *est régulier en* $\bar{x}$*, si on a* $T_S^C(\bar{x}) = K_S(\bar{x})$*.*

Ensembles normalement réguliers

Définition 1.5.8 *Soient* S *un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *et soit* $\bar{x} \in S$*. On dit que* S *est normalement régulier au sens de Fréchet au point* $\bar{x}$ *si on a*

$$N_S^F(\bar{x}) = N_S(\bar{x}).$$

On dit que S *est normalement régulier au sens de Fréchet s'il est régulier en tout point.*

Remarque 1.5.2 *D'après* ***Proposition*** *1.5.2 et* ***Proposition*** *1.5.5 on a si un ensemble* S *est régulier au sens de Fréchet*

$$\partial d^F(\bar{x}, S) = N_S^F(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\bar{\mathbf{H}}} = N_S(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\bar{\mathbf{H}}} = \partial d(\bar{x}, S), \quad \forall \bar{x} \in \mathbf{H}.$$

Définition 1.5.9 *Soient* S *un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *et soit* $\bar{x} \in S$*. On dit que* S *est normalement proximalement régulier au point* $\bar{x}$ *si on a*

$$N_S^P(\bar{x}) = N_S(\bar{x}).$$

On dit que S *est normalement proximalement régulier s'il est normalement proximalement régulier en tout point.*

Remarque 1.5.3 *D'après* ***Proposition*** *1.5.2 et* ***Proposition*** *1.5.4 on a si un ensemble* S *est normalement proximalement régulier*

$$\partial d^P(\bar{x}, S) = N_S^P(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}} = N_S(\bar{x}) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}} = \partial d(\bar{x}, S), \quad \forall \bar{x} \in \mathbf{H}.$$

Remarque 1.5.4 *Étant donné que l'inclusion $N_S^P(\bar{x}) \subset N_S^F(\bar{x})$ est toujours vraie, on en déduit alors que la régularité normale proximale implique toujours la régularité normale au sens de Fréchet.*
L'implication inverse n'est pas toujours vraie.

1.6 Ensembles prox-réguliers

C'est une classe d'ensembles qui est apparue récemment et pour laquelle tous les concepts de régularité sont vérifiés (après la classe des ensembles convexes). Elle a apparue pour la première fois sous le nom de **"reached set"** dans [27], ensembles atteint, puis dans [23] où Clarke et ses co-auteurs donnèrent leurs premières caractérisations sous le nom d'ensembles proximalement lisses.
Ce paragraphe va être consacré à l'étude des ensembles proximalement lisses, c'est à dire, les ensembles prox-réguliers.
Commençons par les définir.

Définition 1.6.1 *Soit S un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$.*
On dit que S est r-prox-régulier (où équivalemment proximalement lisse) s'il existe $r > 0$, tel que la fonction distance $d(\cdot, S)$ soit continuement différentiable sur la couronne de la forme

$$U(r) = \Big\{x \in \mathbf{H} : \ 0 < d(x, S) < r\Big\}.$$

Proposition 1.6.1 *Soient S un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ et $r \in]0, +\infty]$. Un ensemble S est dit r-prox-régulier si et seulement si pour tout $\bar{x} \in S$ et tout $0 \neq \xi \in N_S^P(\bar{x})$ on a*

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, y - \bar{x}\rangle \leq \frac{1}{2r}\|y - \bar{x}\|^2, \ \forall y \in S.$$

Remarques 1.6.1

1. *L'union de deux ensembles convexes n'est pas nécessairement convexe, par contre elle est prox-régulière.*
2. *On fait la convention $\dfrac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$*
3. *Remarquons que pour $r = +\infty$, l'uniforme r-prox-régularité de S est équivalente à sa convexité.*

Maintenant, nous énonçons quelques résultats, qui sont des conséquences immédiates de la prox-régularité, qui nous serons utiles dans les démonstrations de nos théorèmes du **Chapitre 2**. Pour plus de détails voir [23] et [39].

Proposition 1.6.2 *Soient S un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *et* $r \in]0, +\infty]$. *Si S est uniformément r-prox-régulier. Alors*

i) Pour tout $\bar{x} \in \mathbf{H}$, vérifiant $d(\bar{x}, S) < r$ on a, $Proj_S(\bar{x}) \neq \emptyset$ et $Proj_S(\cdot)$ est univoque.

ii) $\partial^P d(\bar{x}, S) = \partial d(\bar{x}, S)$ en tout point $\bar{x} \in \mathbf{H}$ satisfaisant $d(\bar{x}, S) < r$.
Dans ce cas, $\partial^P d(\bar{x}, S) = \partial d(\bar{x}, S)$ est un sous ensemble convexe fermé de $\mathbf{H}'$.

iii) Pour tout $x_i \in S$ et tout $v_i \in N_S^P(x_i)$ avec $\|v_i\| \leq \rho$ et $i = 1, 2$ on a

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\|x_1 - x_2\|^2.$$

Une conséquence de *iii*) est qu'on a pour les ensembles r-prox-réguliers le cône normal proximal à S coïncide avec tous les cônes normaux qui sont contenus dans le cône normal au sens de Clarke en tout point $\bar{x} \in S$, c'est à dire que

$$N_S^P(\bar{x}) = N_S(\bar{x}).$$

Proposition 1.6.3 *Soient S un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *et* $r \in]0, +\infty]$. *Supposons que S est uniformément r-prox-régulier. Alors*

$$\begin{cases} \text{pour tout } \bar{x} \in S \quad \text{et tout } \ \xi \in \partial d(\bar{x}, S), \text{ on a :} \\ \langle \xi, \bar{x} - x' \rangle \leq \dfrac{2}{r}\|x' - \bar{x}\|^2 + d(\bar{x}, S) \\ \text{pour tout } x' \in \mathbf{H} \ \text{ vérifiant } \ d(x', S) \leq r. \end{cases}$$

Proposition 1.6.4 *Voir [13]*
Soient S un sous ensemble non vide d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ *et* $r \in]0, +\infty]$. *Si S est uniformément r-prox-régulier, alors pour tout $\bar{x} \in \mathbf{H}$ on a*

$$\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}} \cap N_S(\bar{x}) = \partial d(\bar{x}, S).$$

Soient $X(r)$ et $Y(r)$ les ensembles définis par

$$X(r) = \Big\{ x \in \mathbf{H} : \ d(x, S) \leq r \Big\}$$

et

$$Y(r) = \Big\{ x \in \mathbf{H} : \ d(x, S) \geq r \Big\}.$$

Le théorème qui suit résume quelques caractérisations de la r-prox-régularité.

Théorème 1.6.1 *Soient* $r \in]0, +\infty]$ *et S un sous ensemble r-prox-régulier d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$d(\cdot, S)$ est continuement différentiable sur $U(r)$.*
2. *$Proj_S(\bar{x}) \neq \emptyset$, $\forall \bar{x} \in U(r)$ et la dérivée au sens de Gâteaux de $d(\cdot, S)$ existe.*
3. *$Proj_S(\bar{x}) \neq \emptyset$, $\forall \bar{x} \in U(r)$ et pour tout $r' \in]0, r[$ on a,*

$$d(\bar{x}, S) + d(\bar{x}, Y(r')) = r', \quad \forall \bar{x} \in U(r').$$

4. *$\forall r' \in]0, r[$ et $\bar{x} \in \mathbf{H}$, tels que $d(\bar{x}, S) = r'$ on a, $N^P_{X(r')}(\bar{x}) \neq \emptyset$.*
5. *$\partial^P d(\bar{x}, S) \neq \emptyset$ pour tout $\bar{x}$ dans $U(r)$.*

Corollaire 1.6.1 *Un ensemble fermé S contenu dans un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ est convexe si et seulement si il est r-prox régulier pour tout r positif.*

Théorème 1.6.2 *Soit S un sous ensemble d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$. Supposons que S est faiblement fermé et soit r un réel positif. Alors, les assertions du Théorème 1.6.1 sont vérifiées et sont équivalentes à*

6. *$Proj_S(\bar{x})$ est un singleton pour tout $\bar{x}$ dans $U(r)$.*

1.7 Ensembles sous lisses

Introduisons maintenant la définition d'une classe d'ensembles plus générale que celle des ensembles r-prox-réguliers et qui a été introduite par A. Danaliliis et ses co-auteurs voir [2] pour plus de détails et résultats sur la caractérisation de ces ensembles.
Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert de dimension finie et soit C un sous ensemble de $\mathbf{H}$.

Définition 1.7.1 *L'ensemble C est dit sous-lisse au point $\bar{x} \in C$, si pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in \mathbf{B}(\bar{x}, \delta) \cap C$ et tout $x_i^* \in N_C(x_i) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, r)$, $i \in \{1, 2\}$, on a*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq -\varepsilon \|x_1 - x_2\|. \tag{1.2}$$

L'ensemble C est dit sous lisse s'il est sous lisse en tout point $\bar{x} \in C$.
De plus, on dit que C est uniformément sous-lisse si pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que (1.2) soit vérifiée pour tout x_1, x_2 dans C satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et tout $x_i^* \in N_C(x_i) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, r)$, $i \in \{1, 2\}$.

Remarquons que tout ensemble r-prox-régulier est sous lisse mais le contraire est faux.

Définition 1.7.2 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On dit que la famille $(C(t))_{t\in I}$ d'ensembles fermés de $\mathbf{H}$ est uniformément equi-sous-lisse si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que (1.2) soit vérifiée pour chaque $t \in I$ et tout $x_1, x_2 \in C(t)$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et tout $x_i^* \in N_{C(t)}(x_i) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}$, avec $i \in \{1, 2\}$.*

Pour la démonstration du résultat suivant voir [32]

Lemme 1.7.1 *Si un ensemble fermé C d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ est sous-lisse en $\bar{x} \in C$, alors*

$$\partial d(\bar{x}, C) = \partial^F d(\bar{x}, C)$$

et

$$N_C(\bar{x}) = N_C^F(\bar{x})$$

Remarque 1.7.1 *Le **Lemme** 1.7.1 donne la régularité au sens de Fréchet des ensembles sous lisses.*

Donnons maintenant deux exemples d'ensembles sous-lisses qui ne sont pas prox réguliers que nous avons pris dans [32]).

Exemple 1.7.1 *Considérons les deux fonctions suivantes, $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x) = -x^{5/3}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} -x^{5/3} & si\ x \geq 0; \\ \infty & sinon. \end{cases}$$

Considérons l'ensemble $C = Epi(f)$, pour $\bar{x} = (0, 0)$, on a les égalités

$$N_C^P(\bar{x}) = \{(0, 0)\}$$

et

$$N_C^F(\bar{x}) = \{0\} \times] - \infty, 0],$$

d'où $N_C^P(\bar{x}) \neq N_C^F(\bar{x})$, ainsi C n'est pas prox-régulier en $\bar{x}$
La non prox-régularité de l'ensemble $C' = Epi(g)$ peut être constatée d'après les égalités

$$N_{C'}^P(\bar{x}) = (] - \infty, 0] \times] - \infty, 0[) \cup \{(0, 0)\}$$

et

$$N_{C'}^F(\bar{x}) =] - \infty, 0] \times] - \infty, 0],$$

d'où $N_C^P(\bar{x}) \neq N_C^F(\bar{x})$ c'est à dire C' n'est pas prox-régulier en $\bar{x}$. Mais les deux ensembles sont sous lisses.

Chapitre 2

Résultats d'existence de solutions pour processus de la rafle gouvernés par des ensembles prox-réguliers

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence de solutions pour deux inclusions différentielles gouvernées par un processus de la rafle sous des hypothèses de prox-régularité en utilisant le théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan, **Théorème** 1.3.7 et un résultat - **Théorème** 2.1.1 - qui nous garantie la coïncidence entre les ensembles de solutions de deux inclusions différentielles l'une avec contrainte et l'autre sans contrainte et ceci via le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2 qui nous donne l'existence de sélections mesurables pour une multi-application semicontinue mixte.

2.1 Introduction

La démonstration du théorème principal de ce chapitre utilise un résultat dans [29] et [43] pour montrer la coïncidence entre les ensembles de solutions d'une inclusion différentielle du premier ordre sans contrainte et une avec contrainte. Commençons par le rappeler.

Théorème 2.1.1 *Soient T_0, T deux nombres réels positifs tels que $T_0 < T$ et soit pour tout $t \in [T_0, T]$, un sous ensemble non vide $C(t)$ d'un espace de Hilbert séparable $\mathbf{H}$ tel que les assertions suivantes soient satisfaites*

i) Pour un ρ fixé dans $]0, +\infty]$ l'ensemble $C(t)$ est ρ-prox régulier ;

ii) La multi-application $C : [T_0, T] \rightrightarrows \mathbf{H}$ est absolument continue, c'est à dire, il existe une fonction absolument continue et positive $v : [T_0, T] \to \mathbb{R}$ telle que

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |v(t) - v(s)|$$

pour tous $x, y \in \mathbf{H}$ et $s, t \in [T_0, T]$.

Alors, une application absolument continue $u(\cdot)$ est solution de l'inclusion différentielle avec contrainte

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \;\; p.p.\; t \in [T_0, T]; \\ u(t) \in C(t), \;\forall t \in [T_0, T]; \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0) \end{cases}$$

(avec la contrainte $u(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [T_0, T]$) si et seulement si elle est solution de l'inclusion différentielle sans contrainte

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in |\dot{v}(t)| \partial d_{C(t)}(u(t)) \;\; p.p.\; t \in [T_0, T]; \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Nous allons énoncer maintenant un deuxième résultat que nous avons utilisé dans nos démonstrations. Il s'agit d'une conséquence d'un théorème d'existence de sélections pour une multi-application à valeurs non convexes, démontré par Tolstonogov, **Théorème 2.1** dans [45].

Théorème 2.1.2 *Soit $\mathbf{H}$ un espace de dimension finie, et soit $M : [0, T] \times \mathbf{H} \rightrightarrows \mathbf{H}$ une multi-application à valeurs fermées satisfaisant les hypothèses suivantes*

i) M est $\mathcal{L}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{H})$-mesurable.

ii) *Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbf{H}$ tels que $M(t,x)$ est convexe, $M(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement et à chaque fois que $M(t,x)$ est non convexe $M(t,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x.*

iii) *Il existe une fonction de Carathéodory $\zeta : [0,T] \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}_+$ intégrablement bornée et telle que $M(t,x) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}(0,\zeta(t,x)) \neq \emptyset$, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{H}$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact $K \subset \mathbf{C_H}([0,T])$, il existe une multi-application $\Phi : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbf{H}}([0,T])$ à valeurs non vides convexes fermées et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, telle que pour tout $u \in K$ et tout $\varphi \in \Phi(u)$ nous avons

$$\varphi(t) \in M(t,u(t))$$

$$\|\varphi(t)\| \leq \zeta(t,u(t)) + \varepsilon$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Nous aurons aussi besoin du théorème suivant qui donne une importante propriété de fermeture du sous différentiel de la fonction distance associée à une multi-application voir [13] pour plus de détails.

Théorème 2.1.3 *Soient $\rho \in]0,+\infty]$ et Ω une partie ouverte d'un espace métrique $\mathbf{X}$, et $K : \Omega \rightrightarrows \mathbf{H}$ une multi-application Hausdorff-continue de Ω dans un espace de Hilbert $\mathbf{H}$. Supposons que $K(z)$ est uniformément ρ-prox-régulier pour tout $z \in \Omega$. Alors étant donné $0 < \delta < \rho$, ce qui suit est vérifié.*
"Pour tout $\overline{z} \in \Omega$, $\overline{x} \in K(\overline{z}) + (\rho-\delta)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}$, $x_n \to \overline{x}$, $z_n \to \overline{z}$ avec $z_n \in \Omega$ (x_n pas nécessairement dans $K(z_n)$) et $\xi_n \in \partial d(x_n, K(z_n))$ avec $\xi_n \to^{\sigma} \overline{\xi}$, on a $\overline{\xi} \in \partial d(\overline{x}, K(\overline{z}))$."
Ici, $\to^{\sigma}$ est la convergence pour la topologie faible dans l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$.

Remarque 2.1.1 *Une conséquence directe de ce théorème est que, nous avons pour tout $\rho \in]0,+\infty]$, étant donné $0 < \delta < \rho$, et pour toute multi-application $K : \Omega \rightrightarrows \mathbf{H}$ à valeurs uniformément ρ-prox-régulières, la multi-application $(z,x) \mapsto \partial d(x,K(z))$ est semicontinue supérieurement de $\{(z,x) \in \Omega \times \mathbf{H} : \ x \in K(z) + (\rho-\delta)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}\}$ dans $\mathbf{H}$ muni de la topologie faible. Cette dernière propriété est équivalente à la semicontinuité supérieure de la fonction d'appui $(z,x) \mapsto \delta^*\big(\partial d(x,K(z)),p\big)$ sur $\{(z,x) \in \Omega \times \mathbf{H} : \ x \in K(z) + (\rho-\delta)\}$, pour chaque $p \in \mathbf{H}$.*

2.2 Théorème d'existence cas Lipschitzien

Maintenant nous sommes en mesure de donner notre résultat principal, ce résultat à fait l'objet d'un article voir [6]

Théorème 2.2.1 *Soit* $\overline{T} > 0$.

• *Soit* $C : [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une multi-application satisfaisant les hypothèses suivantes*

($\mathbf{H_1}$) *Pour tout* $(t, x) \in [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^d$, $C(t, x)$ *est un sous ensemble non vide fermé de* $\mathbb{R}^d$ *tel que pour* ρ *fixé dans* $]0, +\infty]$, $C(t, x)$ *est uniformément* ρ*-prox-régulier.*

($\mathbf{H_2}$) *Il existe des nombres réels* $\alpha > 0$ *et* $\lambda \in]0, 1[$ *tels que*

$$|d(u, C(t, x)) - d(v, C(s, y))| \leq \|u - v\| + \alpha|t - s| + \lambda\|x - y\|$$

pour tous $u, v, x, y \in \mathbb{R}^d$ *et tous* $s, t \in [0, \overline{T}]$.

• *Soit* $F : [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une multi-application à valeurs convexes fermées,* $\mathcal{L}([0, \overline{T}]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *mesurable et semicontinue supérieurement par rapport à la seconde variable dans* $\mathbb{R}^d$*, telle que*

$$F(t, x) \cap (m_1 + p_1\|x\|)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^d$*, avec* m_1 *et* p_1 *deux nombres réels positifs.*

• *Soit* $G : [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une seconde multi-application satisfaisant les assertions suivantes*

i) G *est* $\mathcal{L}([0, \overline{T}]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*-mesurable ;*

ii) pour tout $t \in [0, \overline{T}]$*, et tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *tels que* $G(t, x)$ *est convexe,* $G(t, \cdot)$ *est semi-continue supérieurement, et à chaque fois que* $G(t, x)$ *est non convexe,* $G(t, \cdot)$ *est semicontinue inférieurement sur un voisinage de* x *;*

iii) il existe des nombres réels positifs m_2 *et* p_2 *tels que*

$$G(t, x) \cap (m_2 + p_2\|x\|)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^d$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $u_0 \in C(0, u_0)$ *et soit un réel positif* $T \leq \overline{T}$ *satisfaisant*

$$2(p_1 + p_2)T < 1 - \lambda. \tag{2.1}$$

Posons pour tout $\varepsilon > 0$

$$\zeta := \Big(1 - \lambda - 2(p_1 + p_2)T\Big)^{-1}\Big(\alpha + 2\big[(m_1 + m_2) + (p_1 + p_2)\|u_0\| + \frac{\varepsilon}{2}\big]\Big). \tag{2.2}$$

Alors, il existe une application lipschitzienne $u : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ *solution de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)) + G(t, u(t)), \ \text{p.p. } t \in [0, T]; \\ u(t) \in C(t, u(t)), \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

et qui satisfait

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + T\,\zeta \quad p.p., \quad \text{et} \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \quad p.p.$$

Démonstration.
Posons

$$M = (m_1 + m_2) + (p_1 + p_2)(\|u_0\| + \zeta T) + \frac{\varepsilon}{2},$$

on a alors

$$\lambda\zeta + \alpha + 2M = \zeta. \tag{2.3}$$

<u>***1^ere^ Étape***</u>

Posons $I = [0, T]$ et

$$M_i = m_i + p_i(\|u_0\| + \zeta T) + \frac{\varepsilon}{4} \quad (i = 1, 2),$$

observons que $M = M_1 + M_2$.
Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des applications Lipschitzienne continues $u : I \to \mathbb{R}^d$ telles que $u(0) = u_0$ et $\|\dot{u}(t)\| \leq \zeta$, p.p. sur I. Il est évident que $\mathcal{X} \subset \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$.

Considérons aussi les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i &= \Big\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I) \ : \ \|h(t)\| \leq M_i, \text{ p.p. sur } I \Big\} \quad (i = 1, 2), \\ \mathcal{K} &= \big\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I) : \ \|h(t)\| \leq M, \text{ p.p. sur } \ I \big\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$ sont des parties convexes et faiblement compactes ($\sigma(\mathbf{L}^1(I), \mathbf{L}^\infty(I))$-compacts) de $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ d'après le théorème de Dunford, **Théorème** 1.2.6.

Montrons que $\mathcal{X}$ est un sous ensemble compact de $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$. Soit $(u_n(\cdot))_n$ une suite quelconque de $\mathcal{X}$. Alors

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s) ds, \ \forall t \in I \quad \text{et} \quad \|\dot{u}_n(s)\| \leq \zeta, \text{ p.p. sur } I.$$

De plus, pour tout $t \in I$ on a

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \zeta T,$$

ce qui donne que $(u_n(t))$ est une suite bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, alors elle est relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$. D'une autre part, pour tous $t, \tau \in I$, nous avons

$$\|u_n(t) - u_n(\tau)\| \leq \int_\tau^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \zeta |t - \tau|,$$

ce qui assure que la suite $(u_n(\cdot))_n$ est équicontinue.
D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.1, on conclut qu'elle est relativement

compacte dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$, alors on peut lui extraire une sous suite qu'on notera aussi $(u_n(\cdot))_n$ et qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$.
Puisque $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \zeta$, p.p. sur I, la faible compacité de l'ensemble

$$\Lambda := \{h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I) : \ \|h(t)\| \leq \zeta, \text{ p.p. sur } I\} \tag{2.4}$$

assure qu'il existe une sous suite de $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ (qu'on notera de la même manière) et qui converge faiblement vers une application $v(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, avec $\|v(t)\| \leq \zeta$, p.p. sur I. Ainsi on obtient pour tout $y(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(\cdot), y(\cdot)\rangle = \langle v(\cdot), y(\cdot)\rangle,$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^T \langle v(s), y(s)\rangle ds.$$

En particulier pour $y(\cdot) = \chi_{[0,t]}(\cdot).e_j \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I)$ avec $t \in I$, où $(e_j)_j$ est une base de $\mathbb{R}^d$ et $\chi_{[0,t]}(\cdot)$ est la fonction caractéristique de $[0,t]$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s),\ \chi_{[0,t]}(s).e_j\rangle ds = \int_0^T \langle v(s),\ \chi_{[0,t]}(s).e_j\rangle ds,\ \forall j$$

qui donne

$$\langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds,\ e_j\rangle = \langle \int_0^t v(s)ds,\ e_j\rangle, \quad \forall j.$$

on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} (u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds) = u_0 + \int_0^t v(s)ds,$$

aussi

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds, \tag{2.5}$$

alors $u(\cdot)$ est une application absolument continues et $\dot{u}(\cdot) = v(\cdot)$ p.p., aussi $u(\cdot)$ est Lipschitzienne puisque $\|v(t)\| \leq \zeta$ p.p. Ceci montre que $\mathcal{X}$ est compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$.

D'après le Théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2 il existe une multi-application à valeurs non vides convexes fermées $\Phi_i : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ $(i = 1, 2)$ et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, telle que, pour tout $u \in \mathcal{X}$ et $\varphi \in \Phi_1(u)$, on a pour presque tout $t \in I$

$$\varphi(t) \in F(t, u(t)) \ \text{ et } \ \|\varphi(t)\| \leq m_1 + p_1\|u(t)\| + \frac{\varepsilon}{4},$$

et, pour tout $u \in \mathcal{X}$ et $\psi \in \Phi_2(u)$, on a pour presque tout $t \in I$

$$\psi(t) \in G(t, u(t)) \ \text{ et } \ \|\psi(t)\| \leq m_2 + p_2\|u(t)\| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Puisque $u \in \mathcal{X}$, on a $\|\dot{u}(t)\| \leq \zeta$ et donc

$$\|u(t)\| = \|u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds\| \leq \|u_0\| + T\zeta,$$

alors

$$\|\varphi(t)\| \leq m_1 + p_1(\|u_0\| + T\zeta) + \frac{\varepsilon}{4} = M_1 \tag{2.6}$$

et

$$\|\psi(t)\| \leq m_2 + p_2(\|u_0\| + T\zeta) + \frac{\varepsilon}{4} = M_2. \tag{2.7}$$

Considérons maintenant la multi-application $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, où

$$\Phi(\cdot) = \Phi_1(\cdot) + \Phi_2(\cdot).$$

Il est évident que Φ est à valeurs non vides convexes fermées dans $\mathcal{K}$.
En effet, $\forall f \in \mathcal{X}$, on a $\Phi(f) = \Phi_1(f) + \Phi_2(f)$ et sachant que la somme de deux convexes est convexe alors, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ est à valeurs convexes.
Aussi, pour tout $f \in \mathcal{X}$ et tout $\varphi \in \Phi(f)$ on a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_i \in \Phi_i(f)$ $(i = 1, 2)$, de plus d'après (2.6) et (2.7), $\|\varphi_i(t)\| \leq M_i(t)$ $(i = 1, 2)$ alors

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi_1(t)\| + \|\varphi_2(t)\| \leq M_1 + M_2 = M, \quad \text{p.p. sur } I.$$

D'où, $\Phi(f) = \Phi_1(f) + \Phi_2(f) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est faiblement compact.
Soit $(u_n(\cdot))_n$ une suite de $\Phi(f) \subset \mathcal{K}$, donc on peut lui extraire une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{K}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n(\cdot) = x_n(\cdot) + y_n(\cdot)$ avec $x_n(\cdot) \in \Phi_1(f)$ et $y_n(\cdot) \in \Phi_2(f)$. En d'autres termes, $(x_n(\cdot))_n \subset \Phi_1(f)$ qui est faiblement compact, alors $(x_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers une application $x(\cdot) \in \Phi_1(f)$. De même pour $(y_n(\cdot))_n$, elle converge faiblement vers $y(\cdot) \in \Phi_2(f)$. Par suite $u_n(\cdot) = x_n(\cdot) + y_n(\cdot)$ converge faiblement vers $x(\cdot) + y(\cdot) \in \Phi_1(f) + \Phi_2(f) = \Phi(f)$ d'où $x(\cdot) + y(\cdot) \in \Phi(f)$ et $u_n(\cdot)$ converge faiblement vers $u(\cdot)$. Par l'unicité de la limite on a $u(\cdot) = x(\cdot) + y(\cdot) \in \Phi(f)$, il s'ensuit que $\Phi(f)$ est faiblement fermé et comme il est convexe, on conclut qu'il est fortement fermé. C'est à dire, Φ est à valeurs convexes fermées.
De plus, le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé. En effet, soit $(f_n, u_n)_n$ une suite de $gph(\Phi)$ convergeant vers une limite $(f, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n(\cdot) \in \Phi(f_n) = \Phi_1(f_n) + \Phi_2(f_n)$ alors, il existe deux suites $(u_n^i(\cdot))_n \subset \Phi_i(f_n) \subset \mathcal{K}_i$ qui convergent vers $u_i(\cdot)$, $(i = 1, 2)$ et $u_n(\cdot) = u_n^1(\cdot) + u_n^2(\cdot)$. Or, d'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, le graphe de Φ_i est fortement faiblement séquentiellement fermé, alors, $u_i(\cdot) \in \Phi_i(f)$, par ailleurs on a $u_n(\cdot) = u_n^1(\cdot) + u_n^2(\cdot)$ converge vers $u_1(\cdot) + u_2(\cdot)$ d'où,

$$u(\cdot) = u_1(\cdot) + u_2(\cdot) \in \Phi_1(f) + \Phi_2(f) = \Phi(f),$$

donc (f,u) est dans $\mathrm{gph}(\Phi)$. Ainsi, le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé

$2^{ème}$ *Étape.*

Posons $\beta(t) = (\alpha + \lambda\zeta)t$ et introduisons la multi-application $\Psi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$ définie par,

$$\Psi(f) = \Big\{ u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)/ \ u \text{ est Lipschitzienne}, \ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \forall t \in I;$$
$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d\big(f(t), C(t, f(t))\big) + h(t), \text{ p.p. sur } I, \text{ et } h \in \Phi(f) \Big\}.$$

Observons tout d'abord que pour tout $f \in \mathcal{X}$ la multi-application $t \mapsto C(t, f(t))$ est Lipschitzienne puisque pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $t, s \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|d(u, C(t, f(t))) - d(v, C(s, f(s)))| &\leq \|u - v\| + \alpha|t - s| + \lambda\|f(t) - f(s)\| \\
&\leq \|u - v\| + \alpha|t - s| + \lambda\left|\int_s^t \|\dot{f}(\tau)\|d\tau\right| \\
&\leq \|u - v\| + \alpha|t - s| + \lambda\left|\int_s^t \zeta \ d\tau\right| \\
&= \|u - v\| + \alpha|t - s| + \lambda \ \zeta|t - s| \\
&= \|u - v\| + (\alpha + \lambda\zeta)|t - s|.
\end{aligned}$$

Comme, pour tout $t \in I$, $C(t, f(t))$ est ρ-prox-régulier, alors l'ensemble $\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est non vide convexe compact. D'autres parts, comme $f \in \mathcal{X} \subset \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$, i.e., f est continue alors, la multi-application $t \mapsto \partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est mesurable d'après **Théorème** 1.3.6. Donc, pour tout $f \in \mathcal{X}$ et $h \in \Phi(f)$, la multi-application

$$t \mapsto (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t)$$

est mesurable à valeurs convexes fermées.

D'après le théorème d'existence de sélection mesurable, **Théorème** 1.3.1, il existe une application mesurable $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$\gamma(t) \in -[(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t)]$$

pour tout $t \in I$, avec $\|\gamma(t)\| \leq \dot{\beta}(t) + 2M$ puisque $\partial d(f(t), C(t, f(t))) \subset \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}$ et $\|h(t)\| \leq M$ p.p. sur I, d'où d'après (2.3) on obtient $\|\gamma(t)\| \leq \zeta$ p.p. sur I. Par conséquent l'application $u(\cdot) \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$ définie par $u(t) = u_0 + \int_0^t \gamma(s)ds$ appartient à $\Psi(f)$. Ceci prouve que $\Psi(f)$ est un ensemble non vide.

De plus, pour tout $f \in \mathcal{X}$, $\Psi(f) \subset \mathcal{X}$. En effet, pour tout $u \in \Psi(f)$, on a

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \forall t \in I$$

avec

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t), \text{ p.p.}, \quad \text{et} \quad h \in \Phi(f),$$

et par définition de l'application $u(\cdot)$ on a $\|\dot{u}(t)\| \leq \dot{\beta}(t) + 2M = \zeta$. Alors $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, on conclut que Ψ applique $\mathcal{X}$ dans lui même.

Montrons que Ψ est à valeurs convexes.
Soient $f \in \mathcal{X}$, $u_1, \ u_2 \in \Psi(f)$ et $\alpha \in [0, 1]$ alors,

$$u_1(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_1(s)ds \quad et \quad u_2(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_2(s)ds \quad \forall t \in I,$$

avec

$$-\dot{u}_i(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h_i(t), \text{ p.p. sur } I, \ h_i \in \Phi(f). \ (i = 1, 2) \tag{2.8}$$

D'où, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) &= \alpha\Big(u_0 + \int_0^t \dot{u}_1(s)ds\Big) + (1-\alpha)\Big(u_0 + \int_0^t \dot{u}_2(s)ds\Big) \\ &= u_0 + \int_0^t \Big(\alpha\dot{u}_1(s) + (1-\alpha)\dot{u}_2(s)\Big)ds\end{aligned}$$

D'une autre part, nous avons par (2.8)

$$-\dot{u}_i(t) - h_i(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))), \ (i = 1, 2)$$

puisque le sous différentiel est convexe, nous obtenons

$$-\Big(\alpha\dot{u}_1(t) + (1-\alpha)\dot{u}_2(t)\Big) - \Big(\alpha h_1(t) + (1-\alpha)h_2(t)\Big) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t)))$$

par suite

$$-\Big(\alpha\dot{u}_1(t) + (1-\alpha)\dot{u}_2(t)\Big) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + \Big(\alpha h_1(t) + (1-\alpha)h_2(t)\Big).$$

$\Phi(f)$ étant convexe, alors l'application $h(\cdot) = \alpha h_1(\cdot) + (1-\alpha)h_2(\cdot) \in \Phi(f)$.
Et $u(t) = \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)$ nous donne $\dot{u}(t) = \alpha\dot{u}_1(t) + (1-\alpha)\dot{u}_2(t)$.
En conclusion

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t), \text{ p.p. sur } I, \quad h \in \Phi(f).$$

Ceci montre que $u(\cdot) = \alpha u_1(\cdot) + (1-\alpha)u_2(\cdot) \in \Psi(f)$. D'où la convexité des valeurs de Ψ.

Montrons que Ψ est à valeurs compactes.
Puisque $\mathcal{X}$ est compact et $\Psi(f) \subset \mathcal{X}$ pour tout $f \in \mathcal{X}$, il suffit de montrer que Ψ est à

valeurs fermées.
Soit $(u_n(\cdot))_n$ une suite d'éléments de $\Psi(f)$ convergeant vers $u(\cdot) \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\dot{u}_n(t) \in \big(\dot{\beta}(t) + M\big)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h_n(t), \text{ p.p. sur } I \quad avec \quad h_n \in \Phi(f).$$

On a, $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \zeta$ alors, $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ est faiblement compacte, donc on peut lui extraire une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers $w(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la fermeture de $\mathcal{X}$, on montre que $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot)$.
De même $(h_n(\cdot))_n \subset \Phi(f) \subset \mathcal{K}$ qui est faiblement compact, donc on peut lui extraire une sous suite qu'on notera aussi de la même manière et qui converge faiblement vers une application $h(\cdot) \in \Phi(f)$. D'où, la suite $(\dot{u}_n(\cdot) + h_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers l'application $\dot{u}(\cdot) + h(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
D'autre part, on a $\dot{u}_n(t) + h_n(t) \in -\big(\dot{\beta}(t) + M\big)\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ et comme $C(t, f(t))$ est ρ-prox-régulier, alors $-\big(\dot{\beta}(t) + M\big)\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est un convexe fermé. Par le lemme de Mazur on obtient

$$\dot{u}(t) + h(t) \in -\big(\dot{\beta}(t) + M\big)\partial d(f(t), C(t, f(t))), \text{ p.p. sur } I.$$

En d'autres termes

$$-\dot{u}(t) \in \big(\dot{\beta}(t) + M\big)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t), \text{ p.p. sur } I \quad \text{et } h \in \Phi(f), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) &= u_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} \dot{u}_n(s)ds \\ &= u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds \end{aligned}$$

En conclusion on a $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \dot{u}(s)ds$ avec $\dot{u}(t)$ vérifiant (2.9), c'est à dire $u(\cdot) \in \Psi(f)$, donc $\Psi(f)$ est fermé. Ce qui traduit la compacité de $\Psi(f)$.

Enfin, montrons que la multi-application Ψ est semicontinue supérieurement.
Puisque Ψ est à valeurs compactes dans $\mathcal{X}$, alors pour montrer qu'elle est semicontinue supérieurement il suffit de montrer que son graphe noté $gph(\Psi)$

$$\text{gph}(\Psi) = \big\{(f, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \quad u \in \Psi(f)\big\}$$

est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ pour $\mathcal{X}$ muni de la topologie de la convergence uniforme.
Soit (f_n, u_n) une suite de gph(Ψ) convergent vers $(f, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n(\cdot) \in \Psi(f_n)$ donc $u_n(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \dot{u}_n(s)ds$ pour tout $t \in I$ avec

$$-\dot{u}_n(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f_n(t), C(t, f_n(t))) + h_n(t) \;\; p.p.,$$

et $h_n \in \Phi(f_n)$.
Observons que $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \dot{\beta}(t) + 2M = \zeta$, alors la compacité faible de l'ensemble Λ défini par (2.4) ci dessus assure l'existence d'une sous suite de $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ (qu'on notera de la même manière) et qui converge pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1(I), \mathbf{L}^\infty(I))$ vers une application $v(\cdot) \in \Lambda$, i.e., $v(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ et $\|v(t)\| \leq \zeta$ pour presque tout $t \in I$.
Répétant les arguments ci-dessus concernant l'égalité (2.5) on voit que

$$\lim_{n\to\infty} (u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds = w(t),$$

ainsi $\dot{u}(\cdot) = v(\cdot)$ p.p., d'où $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.
De plus, puisque $(h_n(\cdot))_n$ est inclus dans $\mathcal{K}$ car $h_n(\cdot) \in \Phi(f_n) \subset \mathcal{K}$ et puisque $\mathcal{K}$ est compact pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1(I), \mathbf{L}^\infty(I))$, nous pouvons extraire de $(h_n(\cdot))_n$ une sous suite (qu'on notera de la même manière) et qui converge faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers une application $h(\cdot) \in \Phi(f)$ puisque $\mathrm{gph}(\Phi)$ est fortement faiblement séquentiellement fermé comme on l'a vu précédemment.
D'une autre part

$$\dot{u}_n(t) + h_n(t) \in -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f_n(t), C(t, f_n(t))) \text{ p.p. } t \in I$$

et $(\dot{u}_n(\cdot) + h_n(\cdot))$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $(\dot{u}(\cdot) + h(\cdot)) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$. D'après le lemme de Mazur, il existe une suite $(\xi_n(\cdot))_n$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $\dot{u}(\cdot) + h(\cdot)$ avec

$$\xi_n(\cdot) \in \mathrm{co}\Big\{\dot{u}_i(\cdot) + h_i(\cdot),\ i \geq n\Big\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On extrait une sous suite, on peut supposer que $(\xi_n(t))_n$ converge presque partout vers $\dot{u}(t) + h(t)$. Par conséquent, on a pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) + h(t) \in \bigcap_n \overline{\mathrm{co}}\Big\{\dot{u}_i(t) + h_i(t),\ i \geq n\Big\}.$$

Fixons t dans I et μ dans $\mathbb{R}^d$, alors la dernière inclusion avec le théorème de séparation, **Théorème** 1.3.2, donne

$$\langle \dot{u}(t) + h(t), \mu\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(-(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f_n(t), C(t, f_n(t))), \mu)$$

Or l'application $(z, x) \mapsto \delta^*(-(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(x, C(t, z)), \mu)$ est semicontinue supérieurement pour tout $\mu \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(-(\dot{\beta}(t)+M)\partial d\big(f_n(t), C(t, f_n(t))\big), \mu\Big) \leq \delta^*\Big(-(\dot{\beta}(t)+M)\partial d\big(f(t), C(t, f(t))\big), \mu\Big).$$

Ainsi
$$\langle \dot{u}(t) + h(t), \mu \rangle \leq \delta^*\Big(-(\dot{\beta}(t) + M)\partial d\big(f(t), C(t, f(t))\big), \mu\Big).$$
Sachant que $\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est convexe fermé, on obtient

$$\dot{u}(t) + h(t) \in -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d\big(f(t); C(t, f(t))\big),$$

ainsi

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d\big(f(t), C(t, f(t))\big) + h(t), \text{ p.p. sur } I \quad \text{avec } h \in \Phi(f).$$

Ceci montre que $u(\cdot) \in \Psi(f)$, i.e., le graphe de Ψ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Puisque $\mathcal{X}$ est compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$, il vient que Ψ est semicontinue supérieurement sur $\mathcal{X}$ avec des valeurs convexes compactes dans $\mathcal{X}$.

Appliquons le théorème de Kakutani, **Théorème** 1.3.7 à la multi-application Ψ on obtient l'existence d'un point fixe , i.e., il existe $u \in \mathcal{X}$ telle que $u \in \Psi(u)$. Alors,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)\, ds$$

et il existe $h \in \Phi(u)$ telle que

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(u(t), C(t, u(t))) + h(t), \text{p.p.} \tag{2.10}$$

Posons $z(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)ds$, $D(t) = C(t, u(t)) + z(t)$ et $w(t) = u(t) + z(t)$, on voit bien que $D(t)$ est ρ-prox-régulier car $C(t, u(t))$ est ρ-prox régulier.
De plus, la multi-application $D(\cdot)$ est Lipschitzienne. En effet, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^d$ et s, t dans I on a

$$\begin{aligned}
|d(x, D(t)) - d(y, D(s))| &= |d(x - z(t), C(t, u(t))) - d(y - z(s), C(s, u(s)))| \\
&\leq \|x - y\| + \|z(t) - z(s)\| + \alpha|t - s| \\
&\quad + \lambda\Big\| \int_0^t \dot{u}(\tau)d\tau - \int_0^s \dot{u}(\tau)d\tau\Big\| \\
&\leq \|x - y\| + \|z(t) - z(s)\| + \alpha|t - s| + \lambda\Big| \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|d\tau\Big| \\
&\leq \|x - y\| + \Big\| \int_s^t h(\tau)d\tau\Big\| + \alpha|t - s| + \lambda\zeta|t - s| \\
&\leq \|x - y\| + (M + \alpha + \lambda\zeta)|t - s|,
\end{aligned}$$

c'est à dire,
$$|d(x, D(t)) - d(y, D(s))| \leq \|x - y\| + k|t - s|$$

avec $k = \alpha + \lambda\zeta + M$. D'autres parts, de (2.10) nous avons

$$-(\dot{u}(t) + h(t)) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(u(t), C(t, u(t))) \text{ p.p.} \tag{2.11}$$

Puisque $d(x, C(t, u(t))) = d(x+z(t), D(t))$ on obtient $\partial d(x+z(t), D(t)) = \partial d(x, C(t, u(t)))$ et (2.11) peut être écrite d'après la définition de $w(\cdot)$ comme

$$-\dot{w}(t) \in k\partial d(w(t), D(t)), \text{p.p. sur } I \text{ avec } w(0) = u_0 \in C(0, u_0) = D(0).$$

Cette dernière équation combinée avec le **Théorème** 2.1.1 nous donne

$$-\dot{w}(t) \in N_{D(t)}(w(t)) \;\text{ p.p. sur } I \text{ avec } w(0) = u_0 \in D(0), \tag{2.12}$$

et $w(t) \in D(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. Mais $N_{D(t)}(w(t)) = N_{C(t,u(t))}(u(t))$, par conséquent la relation (2.12) est équivalente à

$$-(\dot{u}(t) + h(t)) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p. sur } I, \text{ avec } u(0) = u_0,$$

et avec la contrainte $u(t) \in C(t, u(t))$. En d'autres termes,

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + h(t) \;\text{ p.p. sur } I, \text{ avec } u(0) = u_0.$$

Puisque $h \in \Phi(u)$, alors, $h = h_1 + h_2$ avec $h_i \in \Phi_i(u)$ pour $i = 1, 2$, c'est à dire, $h_1(t) \in F(t, u(t))$ et $h_2(t) \in G(t, u(t))$ pour presque tout $t \in I$. On conclut que

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)) + G(t, u(t)) \text{ p.p. sur } I; \\ u(t) \in C(t, u(t)), \ \forall t \in I; \\ u(0) = u_0 \in C(0, u_0), \end{cases}$$

avec pour presque tout $t \in I$, $\|\dot{u}(t)\| \leq \alpha + \lambda\zeta + 2M = \zeta$, et $\|u(t)\| \leq \|u_0\| + T\zeta$. Alors, le problème $(\mathcal{P}_{F,G})$ admet au moins une solution Lipschitzienne $u(\cdot)$ sur $[0, T]$. Ce qui termine la démonstration du théorème.

■

Corollaire 2.2.1 *Soient $T > 0$ et $C : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application satisfaisant les assertions* $(\mathbf{H}_1)$ *et* $(\mathbf{H}_2)$.
Soit $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs convexes fermées, $\mathcal{L}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mesurable et semicontinue supérieurement par rapport à la seconde variable dans $\mathbb{R}^d$, et telle que

$$F(t, x) \cap m_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, avec m_1 est un nombre réel positif.
Soit $G : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une seconde multi-application satisfaisant les assertions suivantes

i) *G est* $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*-mesurable ;*

ii) *pour tout* $t \in [0,T]$*, et chaque* $x \in \mathbb{R}^d$ *tels que* $G(t,x)$ *est convexe,* $G(t,\cdot)$ *est semicontinue supérieurement, et à chaque fois que* $G(t,x)$ *est non convexe,* $G(t,\cdot)$ *est semicontinue inférieurement sur un voisinage de* x *;*

iii) *il existe un nombre réel positif* m_2 *tel que*

$$G(t,x) \cap m_2 \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $u_0 \in C(0,u_0)$*. Posons pour* $\varepsilon > 0$*,*

$$\zeta := (1-\lambda)^{-1}\big(\alpha + 2[(m_1+m_2) + \frac{\varepsilon}{2}]\big).$$

Alors, il existe une application Lipschitzienne $u : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *solution, sur l'intervalle* $[0,T]$*, de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)) + G(t,u(t)), \ \ p.p.\ t \in [0,T]; \\ u(t) \in C(t,u(t)), \quad \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

et qui satisfait

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + T\,\zeta \quad p.p., \quad \text{et} \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \quad p.p.$$

Démonstration

Il est évident que les assertions du **Théorème** 2.2.1 sont satisfaites avec $p_1 = p_2 = 0$, et donc $T := \overline{T}$ impliquent l'inégalité $2(p_1+p_2)\overline{T} < 1-\lambda$ dans (2.1). Le corollaire découle alors du **Théorème** 2.2.1.

■

2.3 Théorème d'existence cas absolument continu

Dans cette section nous donnons la démonstration du problème $(\mathcal{P}_{F,G})$ sous les mêmes hypothèses du **Théorème** 2.2.1 sauf que ici la multi-application $C(\cdot,\cdot)$ considérée est dans le cas plus général, absolument continue.

Théorème 2.3.1 *Soit* $\overline{T}$ *un réel strictement positif*

• *Soit* $C : [0,\overline{T}] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une multi-application satisfaisant les hypothèses suivantes*

($\mathbf{H}_1'$) *Pour tout* $(t,x) \in [0,\overline{T}] \times \mathbb{R}^d$, $C(t,x)$ *est un sous ensemble non vide fermé dans* $\mathbb{R}^d$ *et tel que pour un* ρ *fixé dans* $]0,+\infty]$ $C(t,x)$ *est uniformément* ρ*-prox-régulier.*

($\mathbf{H}_2'$) *Il existe une fonction absolument continue* $a : [0,\overline{T}] \to \mathbb{R}_+$ *avec* $\dot{a}(t) > 0$ *pour tout* $t \in [0,\overline{T}]$ *et un nombre réel* $\lambda \in]0,1[$ *tels que*

$$|d(u, C(t,x)) - d(v, C(s,y))| \leq \|u - v\| + |a(t) - a(s)| + \lambda\|x - y\|,$$

pour tous u, v, x, $y \in \mathbb{R}^d$ *et tous* s, $t \in [0,\overline{T}]$.

• *Soit* $F : [0,\overline{T}] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une multi-application à valeurs convexes fermées, Lebesgue mesurable sur* $[0,\overline{T}]$ *et semicontinue supérieurement sur* $\mathbb{R}^d$, *telle que*

$$F(t,x) \subset (m_1 + p_1\|x\|)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}$$

pour tout (t,x) *dans* $[0,\overline{T}] \times \mathbb{R}^d$ *et* m_1, p_1 *deux nombres réels positifs.*

• *Soit* $G : [0,\overline{T}] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une autre multi-application vérifiant*

i) G *est* $\mathcal{L}([0,\overline{T}]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*-mesurable,*

ii) pour tout $t \in [0,\overline{T}]$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $G(t,x)$ *est convexe* $G(t,\cdot)$ *est semicontinue supérieurement et à chaque fois que* $G(t,x)$ *est non convexe* $G(t,\cdot)$ *est semicontinue inférieurement sur un voisinage de* x,

iii) Il existe deux nombres réels positifs m_2 *et* p_2 *définies sur* $[0,\overline{T}]$ *telles que*

$$G(t,x) \subset (m_2 + p_2\|x\|)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}$$

pour tout (t,x) *dans* $[0,\overline{T}] \times \mathbb{R}^d$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^d$, *tel que* $u_0 \in C(0,u_0)$, *soit un réel* $T \leq \overline{T}$ *et une fonction positive* $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ *vérifiant*

$$\dot{a}(t) + 2(m_1 + m_2) + 2(p_1 + p_2)(\|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}) + \frac{1}{2} \leq (1 - \lambda)\zeta(t), \qquad (2.13)$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Alors, il existe une application absolument continue $u : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *telle que*

$$(\mathcal{P}'_{F,G})(I) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)) + G(t,u(t)), \ \textit{p.p. sur } [0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)), \quad \forall t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} \ \textit{ et } \ \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta(t) \ \textit{ p.p.}$$

Démonstration

Posons
$$M = (m_1 + m_2) + (p_1 + p_2)\big(\|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\big) + \frac{1}{2} \text{ p.p. sur } [0, T].$$
donc
$$\dot{a}(t) + 2M \leq (1 - \lambda)\zeta(t) \tag{2.14}$$

1**^{ere}**Étape

Posons $I = [0, T]$, et soit
$$M_i = m_i + p_i\big(\|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\big) + \frac{1}{4}, \quad (i = 1, 2)$$
alors, $M = M_1 + M_2$.

Considérons les ensembles suivants
$$\mathcal{X} = \Big\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I);\ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds,\ \forall t \in I \text{ et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta(t),\ \text{p.p sur } I\Big\},$$

$$\mathcal{K}_i = \Big\{h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I);\ \|h(t)\| \leq M_i,\ \text{p.p sur } I\Big\} \quad (i = 1, 2),$$
$$\mathcal{K} = \Big\{h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I);\ \|h(t)\| \leq M,\ \text{p.p sur } I\Big\}.$$

Les ensembles $\mathcal{X}$, $\mathcal{K}_i$, $(i = 1, 2)$ et $\mathcal{K}$ sont convexes, ce qui est facile à vérifier.

Les ensembles $\mathcal{K}_i$, $(i = 1, 2)$ et $\mathcal{K}$ sont faiblement compacts d'après le théorème de Dunford, Théorème 1.2.6

Montrons que $\mathcal{X}$ est compact.

Commençons par montrer que $\mathcal{X}$ est relativement compact

Nous avons pour tout $t \in I$,
$$\mathcal{X}(t) = \Big\{u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds \ \text{ et } \ \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta(t),\ \text{p.p sur } I\Big\}$$
qu'on peut écrire aussi
$$\mathcal{X}(t) = \Big\{u(t),\ u \in \mathcal{X}\Big\}$$
$\mathcal{X}(t)$ est borné parce que, pour tout $t \in I$ et tout $u \in \mathcal{X}$ on a
$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}(s)\|ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^t \zeta(s)ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^T \zeta(s)ds \\ &= \|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}.\end{aligned}$$

Aussi $\overline{\mathcal{X}(t)} \subset \mathbb{R}^d$ qui est de dimension finie, alors $\mathcal{X}(t)$ est relativement compact.
D'une autre part $\mathcal{X}$ est équicontinu.
En effet, pour tout $u \in \mathcal{X}$, et pour tout $t, s \in I$ avec $s \leq t$ nous avons

$$\begin{aligned}\|u(t) - u(s)\| &= \|u_0 + \int_0^t \dot{u}(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u}(\tau)d\tau\| \\ &= \| \int_s^t \dot{u}(\tau)d\tau\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|d\tau \\ &\leq \int_s^t \zeta(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Comme $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$, alors si t tend vers s on a $\|u(t) - u(s)\|$ tend vers 0. D'où l'équicontinuité de $\mathcal{X}$.
Ainsi d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.1, on conclut que $\mathcal{X}$ est relativement compact.

Reste à montrer que $\mathcal{X}$ est fermé dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$.
Soit $(u_n(\cdot))_n \subset \mathcal{X}$ une suite qui converge vers $u(\cdot) \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \dot{u}_n(s)\mathrm{d}s$, avec $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \zeta(t)$ p.p. sur I.
$(\dot{u}_n(t))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, alors d'après la conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.2, $(u_n(\cdot))_n$ admet une sous suite qu'on notera de la même manière qui converge vers une application absolument continue $u(\cdot)$, dans le sens où $(u_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ et $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $\dot{u}(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
D'où

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)\mathrm{d}s = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s.$$

Comme l'ensemble $\{y \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I),\ \|y(t)\| \leq \zeta(t)\}$ est convexe fortement fermé dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ donc il est faiblement fermé alors $\|\dot{u}(t)\| \leq \zeta(t)$ *p.p.* sur I. Ainsi $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, c'est à dire $\mathcal{X}$ est fermé donc compact.

D'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe deux multi-applications à valeurs non vides convexes fermées $\Phi_i : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, $i = 1, 2$, et qui admettent des graphes fortement faiblement séquentiellement fermés et telles que
$\forall u \in \mathcal{X}$ et $\varphi \in \Phi_1(u)$, on a pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ et

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leq m_1 + p_1\|u(t)\| + \frac{1}{4} \\ &\leq m_1 + p_1\Big(\|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\Big) + \frac{1}{4} = M_1 \qquad (2.15)\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in I$.
$\forall u \in \mathcal{X}$ et $\psi \in \Phi_2(u)$, on a pour tout $t \in I$, $\psi(t) \in G(t, u(t))$ et

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\| &\leq m_2 + p_2\|u(t)\| + \frac{1}{4} \\ &\leq m_2 + p_2\Big(\|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\Big) + \frac{1}{4} = M_2\end{aligned} \tag{2.16}$$

pour presque tout $t \in I$.
Ainsi Φ_1 et Φ_2 sont à valeurs faiblement compactes dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
Soit la multi-application $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ définie par

$$\Phi(\cdot) = \Phi_1(\cdot) + \Phi_2(\cdot).$$

On peut montrer de la même manière que dans la démonstration du **Théorème** 2.2.1 que la multi-application Φ ainsi définie est à valeurs non vides convexes fermées dans $\mathcal{K}$. De plus le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé et pour tout $u \in \mathcal{X}$ et tout $\varphi \in \Phi(u)$, d'après (2.15) et (2.16) il existe $\varphi_i \in \Phi_i(u)$, $i = 1, 2$ vérifiant pour presque tout $t \in I$

$$\|\varphi(t)\| = \|\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\| \leq M_1 + M_2 = M.$$

2^{eme} *Étape*

Soit maintenant la multi-application $\Psi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}([0, T])$ définie par,

$$\begin{aligned}\Psi(f) = \Big\{ &u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I);\;\; u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds,\ \forall t \in I; \\ &- \dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t),\ \text{p.p. sur } I,\ h \in \Phi(f)\Big\}.\end{aligned}$$

avec $\beta(t) = a(t) + \lambda \displaystyle\int_0^t \zeta(s)\,\mathrm{d}s$ autrement dit $\dot{\beta}(t) = \dot{a}(t) + \lambda\,\zeta(t)$.

Pour tout $f \in \mathcal{X}$, la multi-application $t \longmapsto C(t, f(t))$ est absolument continue. En effet, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ et tous $s, t \in I$ avec $s < t$ on a

$$\begin{aligned}|d(u, C(t, f(t)) - d(v, C(s, f(s))| &\leq \|u - v\| + a(t) - a(s) + \lambda\|f(t) - f(s)\| \\ &\leq \|u - v\| + a(t) - a(s) + \lambda\Big\|\int_s^t \dot{f}(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\| \\ &\leq \|u - v\| + \int_s^t \dot{a}(\tau)\mathrm{d}\tau + \lambda\int_s^t \zeta(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \|u - v\| + \int_s^t \big(\dot{a}(\tau) + \lambda\zeta(\tau)\big)\mathrm{d}\tau \\ &= \|u - v\| + \int_s^t \dot{\beta}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \|u - v\| + \beta(t) - \beta(s).\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in I$, $C(t, f(t))$ est ρ-prox-régulier alors, $\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est un convexe fermé non vide.
D'autre part, $f \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$ c'est à dire, f est continue donc mesurable, d'où la multi-application

$$t \longmapsto -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t)$$

est mesurable d'après **Théorème** 1.3.6. Ainsi d'après le théorème d'existence de sélection mesurable, **Théorème** 1.3.1, il existe une application mesurable $\gamma : I \longmapsto \mathbb{R}^d$ telle que

$$\gamma(t) \in -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t)$$

avec $h \in \Phi(f)$ p.p. sur I, et on a $\|\gamma(t)\| \leq \dot{\beta}(t) + 2M = \dot{a}(t) + \lambda\zeta(t) + 2M < \zeta(t)$ d'après (2.14).
Par suite l'application $u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$ définie par $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s$ est dans $\Psi(f)$ donc $\Psi(f)$ est non vide.
Comme pour tout $u \in \Psi(f)$ on a $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s$ avec $\|\gamma\| \leq \zeta(t)$ alors $u \in \mathcal{X}$.
Donc Ψ est définie de $\mathcal{X}$ dans lui même.

On a $\Psi(f)$ est convexe pour tout $f \in \mathcal{X}$.
La démonstration se fait de la même manière que pour le **Théorème** 2.2.1

Montrons que $\Psi(f)$ est compact pour tout $f \in \mathcal{X}$.
Comme $\mathcal{X}$ est compact, il suffit de montrer que $\Psi(f)$ est fermé.
Soit $(u_n(\cdot))_n \subset \Psi(f)$ une suite convergeant uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{X}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)\mathrm{d}s,$$

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \zeta(t), \quad \text{p.p.}$$

et

$$-\dot{u}_n(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h_n(t) \quad \text{p.p. sur } I, \quad \text{avec } h_n \in \Phi(f).$$

On a $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ est bornée par la même fonction intégrable $\zeta(\cdot)$ donc d'après le théorème de Dunford, **Théorème** 1.2.6 elle est faiblement compacte dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, alors on peut lui extraire une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une fonction $v(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$. Alors d'après la conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.2, on a $(u_n(\cdot))_n$ admet une sous suite (qu'on notera de la même manière) qui converge vers une application absolument continue $u(\cdot)$, avec $(u_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ et $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $v(\cdot) = \dot{u}(\cdot)$ avec

$$\|\dot{u}(t)\| = \|v(t)\| \leq \zeta(t).$$

Aussi $(h_n(\cdot))_n \subset \Phi(f)$ qui est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, alors on peut lui extraire une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une application $h(\cdot) \in \Phi(f)$, d'après **Théorème** 1.2.6. Ainsi $(\dot{u}_n(\cdot)+h_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers l'application $\dot{u}(\cdot) + h(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
D'autres part on a

$$\dot{u}_n(t) + h_n(t) \in -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) \quad \text{p.p. sur } I,$$

et comme $C(t, f(t))$ est ρ-prox-régulier alors $-(\dot{\beta}(t)+M)\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est un convexe fermé. D'après le lemme de Mazur on a

$$\dot{u}(t) + h(t) \in -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) \quad \text{p.p. sur } I.$$

C'est à dire

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t) \quad \text{p.p. sur } I \quad \text{avec} \quad h \in \Phi(f). \tag{2.17}$$

En conclusion on a

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s$$

et $\dot{u}(\cdot)$ satisfait (2.17), donc $u(\cdot) \in \Psi(f)$. Alors, $\Psi(f)$ est fermé, ce qui traduit la compacité de $\Psi(f)$.

Montrons maintenant que la multi-application Ψ est semicontinue supérieurement.
On vient de voir que Ψ est à valeurs convexes compactes, il suffit donc de montrer que le graphe de Ψ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.
Soit $\big((f_n, u_n)\big)_n$ une suite de gph(Ψ) qui converge vers $(f, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)\mathrm{d}s, \quad \forall t \in I,$$

et

$$\|\dot{u}_n(s)\| \leq \zeta(s) \;\; \text{p.p.}$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-\dot{u}_n(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f_n(t), C(t, f_n(t))) + h_n(t) \;\; \text{p.p. sur } I \;\; \text{avec } h_n \in \Phi(f_n). \tag{2.18}$$

On a $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \dot{\beta}(t) + 2M \leq \zeta(t)$ alors par le **Théorème** 1.2.6, $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ est faiblement compacte dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, on peut lui extraire donc une sous suite que l'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une application $v(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
En utilisant la même démonstration que nous avons fait pour arrivée à l'inégalité (2.5) du **Théorème** 2.2.1 on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\Big(u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)\mathrm{d}s\Big) = u_0 + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s,$$

en d'autres termes

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s$$

donc $\dot{u}(\cdot) = v(\cdot)$ presque partout sur I, et $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.

Aussi $(h_n(\cdot))_n \subset \Phi(f_n) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$, alors on peut extraire à $(h_n(\cdot))_n$ une sous suite qu'on notera de la même manière et qui converge faiblement vers une application $h(\cdot) \in \Phi(f)$ car gph(Φ) est fortement faiblement séquentiellement fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{K}$. Donc on a d'après (2.18)

$$(\dot{u}_n(t) + h_n(t)) \in -(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f_n(t), C(t, f_n(t))) \quad \text{p.p. sur } I,$$

et la suite $(\dot{u}_n(\cdot) + h_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $\dot{u}(\cdot) + h(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
D'après le lemme de Mazur, on a pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) + h(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{u}_i(t) + h_i(t),\ \ i \geq n\}.$$

Fixons $t \in I$ et $\mu \in \mathbb{R}^d$, alors la dernière inclusion avec le théorème de séparation, **Théorème** 1.3.2 et puisque la multi-application $t \longrightarrow \delta^*(-(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(x, C(t,z)), \mu)$ est semicontinue supérieurement pour tout $\mu \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\langle \dot{u}(t) + h(t), \mu\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(-(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f_n(t), C(t, f_n(t))), \mu)\\ &\leq \delta^*(-(\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))), \mu).\end{aligned}$$

sachant que $\partial d(f(t), C(t, f(t)))$ est un convexe fermé on obtient

$$\dot{u}(t) + h(t) \in -\big(\dot{\beta}(t) + M\big)\partial d(f(t), C(t, f(t))),$$

ainsi

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(f(t), C(t, f(t))) + h(t), \quad \text{p.p. sur } \ I \text{ et } h \in \Phi(f)$$

ce qui prouve que $u(\cdot) \in \Psi(f)$ donc $\mathrm{gph}(\Psi)$ est fermé d'où la semicontinuité supérieure de la multi-application Ψ.

D'après le théorème du point fixe de Kakutani, **Théorème** 1.3.7 appliqué à la multi-application Ψ on a existence de $u \in \mathcal{X}$ telle que $u \in \Psi(u)$, c'est à dire

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s, \quad \text{p.p. sur } \ I$$

et

$$-\dot{u}(t) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(u(t), C(t, u(t))) + h(t), \quad \text{p.p. sur } \ I \text{ et } h \in \Phi(u) \tag{2.19}$$

Posons, $z(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$, $D(t) = C(t, u(t)) + z(t)$ et $w(t) = u(t) + z(t)$. Alors, $D(t)$ est ρ-prox régulier car $C(t, u(t))$ est ρ-prox-régulier. De plus on a d'après l'hypothèse $(\mathbf{H_2'})$ pour tous $s, t \in I$ avec $s \leq t$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
|d(x, D(t)) - d(y, D(s))| &= |d(x, C(t, u(t)) + z(t)) - d(y, C(s, u(s)) + z(s))| \\
&= |d(x - z(t), C(t, u(t))) - d(y - z(s), C(s, u(s)))| \\
&\leq \|x - z(t) - y + z(s)\| + a(t) - a(s) + \lambda\|u(t) - u(s)\| \\
&\leq \|x - y\| + \|z(t) - z(s)\| + a(t) - a(s) + \lambda\Big\|\int_s^t \dot{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\| \\
&\leq \|x - y\| + \Big\|\int_s^t h(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\| + \int_s^t \dot{a}(\tau)\mathrm{d}\tau + \lambda\int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Or $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ et $h(\cdot) \in \mathcal{K}$ on obtient donc

$$\begin{aligned}
|d(x, D(t)) - d(y, D(s))| &\leq \|x - y\| + \int_s^t \|h(\tau)\|\mathrm{d}\tau + \int_s^t \dot{a}(\tau)\mathrm{d}\tau + \lambda\int_s^t \zeta(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&\leq \|x - y\| + \int_s^t M\mathrm{d}\tau + \int_s^t \dot{a}(\tau)\mathrm{d}\tau + \lambda\int_s^t \zeta(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \|x - y\| + \int_s^t \Big(M + \dot{a}(\tau) + \lambda\zeta(\tau)\Big)\mathrm{d}\tau. \\
&= \|x - y\| + \int_s^t \Big(M + \dot{\beta}(\tau)\Big)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Posons $\psi(t) = \displaystyle\int_0^t (\dot{\beta}(\tau) + M)\mathrm{d}\tau$, ($\psi(\cdot)$ est une application absolument continue) alors,

$$|d(x, D(t)) - d(y, D(s))| \leq \|x - y\| + |\psi(t) - \psi(s)|,$$

D'où l'absolue continuité de $D(\cdot)$.

D'après (2.19) on a

$$-(\dot{u}(t) + h(t)) \in (\dot{\beta}(t) + M)\partial d(u(t), C(t, u(t))), \quad \text{p.p. sur } I. \tag{2.20}$$

et d'après les définitions des applications $w(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$ on obtient en remplaçant dans (2.20)

$$-\dot{w}(t) \in \dot{\psi}(t)\partial d(w(t), D(t)), \quad \text{p.p. sur} \quad I, \tag{2.21}$$

car $d(u(t), C(t, u(t)) = d(w(t), D(t))$, avec $w_0 = u_0$.
D'après le théorème d'équivalence, **Théorème** 2.1.1 on a

$$-\dot{w}(t) \in N_{D(t)}(w(t)), \quad \text{p.p. sur} \quad I, \quad \text{avec} \quad w(0) = u_0 \tag{2.22}$$

avec la contrainte $w(t) \in D(t)$ ce qui est équivalent à $u(t) \in C(t, u(t))$.
Or $N_{D(t)}(w(t)) = N_{C(t,u(t))}(u(t))$ alors (2.22) devient

$$-(\dot{u}(t) + h(t)) \in N_{C(t,u(t)}(u(t)), \quad \text{p.p. sur} \quad I, \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0; \tag{2.23}$$

avec $u(t) \in C(t, u(t))$ ainsi (2.23) est équivalente à

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t)}(u(t)) + h(t), \quad \text{p.p. sur} \quad I, \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0 \tag{2.24}$$

par suite on a $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s$ avec

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + h(t), & \text{p.p. sur } I \ \text{ avec } h \in \Phi(u), \\ u(t) \in C((t, u(t)), \ \forall t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Comme $h \in \Phi(u)$ avec $h = h_1 + h_2$ et $h_i \in \Phi_i(u)$, $i = 1, 2$ alors

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + h_1(t) + h_2(t), \quad \text{p.p. sur } I, \\ u(t) \in C((t, u(t)), \quad \forall t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Aussi on a $h_i \in \Phi_i(u)$, $i = 1, 2$, avec $h_1(t) \in F(t, u(t))$ et $h_2(t) \in G(t, u(t))$ pour presque tout $t \in I$ ceci donne

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)) + G(t, u(t))), \quad \text{p.p. sur } I, \\ u(t) \in C((t, u(t)), \quad \forall t \in I, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec $\|\dot{u}(t) \leq \zeta(t)\|$ et $\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \|\zeta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}$. Alors il existe au moins une application absolument continue $u(\cdot)$ solution du problème $(\mathcal{P}'_{F,G})$.
La preuve du théorème est ainsi achevée.

■

Corollaire 2.3.1 *Soit $T > 0$ et $C : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application satisfaisant les hypothèses $(\mathbf{H'}_1)$ et $(\mathbf{H'}_2)$.*
Soit $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs convexes fermées, Lebesgue mesurable sur $[0, T]$ et semicontinue supérieurement par rapport à la seconde variable dans $\mathbb{R}^d$, et telle que

$$F(t, x) \cap m_1 \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, avec m_1 est un nombre réel positif.
Soit $G : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une seconde multi-application satisfaisant les assertions suivantes

i) G est $\mathcal{L}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable ;

ii) pour tout $t \in [0, T]$, et chaque $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $G(t, x)$ est convexe, $G(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement, et à chaque fois que $G(t, x)$ est non convexe, $G(t, \cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x ;

iii) il existe un nombre réel positif m_2 tel que

$$G(t, x) \cap m_2 \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $u_0 \in C(0, u_0)$. et soit une fonction positive $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0, T])$ vérifiant

$$\dot{a}(t) + 2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \leq (1 - \lambda)\zeta(t) \;\; p.p. \; sur \; [0, T]. \tag{2.25}$$

Alors, il existe une application absolument continue $u : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$(\mathcal{P}_{F,G})(I) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)) + G(t, u(t)), \;\; p.p.t \in [0, T], \\ u(t) \in C(t, u(t)), \quad \forall t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^T \zeta(s)\, ds \;\; p.p. \quad et \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta(t) \;\; p.p.$$

Démonstration

Il est évident que les assertions du **Théorème** 2.3.1 sont satisfaites avec $p_1 = p_2 = 0$, et donc $T := \overline{T}$. Le corollaire découle alors du **Théorème** 2.3.1.

■

CHAPITRE 3

RÉSULTATS D'EXISTENCE POUR PROCESSUS DE LA RAFLE GOUVERNÉS PAR DES ENSEMBLES SOUS LISSES

Ce chapitre est consacré à l'établissement de deux résultats d'existence de solutions pour deux processus de la rafle gouvernés par des ensembles sous lisses le premier qui dépend que du temps est l'objet d'un papier soumis, le second dépend du temps et de l'état. Comme on le sait les ensembles sous lisses sont un cas plus général que celui des ensembles prox-réguliers (un ensemble prox-régulier est sous lisse) est donc les deux résultats montrés dans ce chapitre beaucoup plus, le **Théorème** 3.3.1 sont une généralisation des résultats du **Chapitre 2** avec une seule perturbation semicontinue mixte.

3.1 INTRODUCTION

Avant d'énoncer nos théorèmes principaux, commençons par donner deux résultats qui nous seront utiles dans la suite. Pour plus de détails voir [32].

Lemme 3.1.1 *Soient* $\mathbf{X}$ *un espace métrique,* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert séparable et* $(C(t))_{t\in\mathbf{X}}$ *une famille d'ensembles non vides fermés de* $\mathbf{H}$ *equi-uniformément sous-lisses, et soit* η *un réel positif fixé. Soit* $Q \subset \mathbf{X}$ *et* $s_0 \in \overline{Q}$*.*
Alors, ce qui suit est vérifié

(a) Pour tout $(s,u) \in gph(C)$ *on a* $\eta\partial d(u, C(s)) \subset \eta\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}$*.*

(b) Pour toute suite généralisée $(s_j)_{j\in J}$ *dans* Q *convergeant vers* s_0*, toute suite généralisée* $(u_j)_{j\in J}$ *convergent vers* $u \in C(s_0)$ *dans* $(\mathbf{H}, \|\cdot\|)$*, avec* $u_j \in C(s_j)$ *et* $d(y, C(s_j)) \underset{j\in J}{\to} 0$*, et toute suite généralisée* $(u_j^*)_{j\in J}$ *convergent faiblement vers* u^* *dans* $(\mathbf{H}, \sigma(\mathbf{H},\mathbf{H})$ *avec* $u_j^* \in \eta\partial d(u_j, C(s_j))$*, on a* $u^* \in \eta\partial d(u, C(s))$

Proposition 3.1.1 *(Conséquence du **Lemme** 3.1.1)*
Soient I *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert séparable.*
Soit $(C(t))_{t\in I}$ *une famille d'ensembles non vides de* $\mathbf{H}$ *equi-uniformément sous-lisses, et soit* η *un réel positif fixé.*
Supposons qu'il existe une fonction croissante positive $v : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *telle que, pour tout* $y \in \mathbf{H}$ *et tous* $s, t \in I$ *avec* $s \leq t$

$$d\big(y, C(t)\big) \leq d\big(y, C(s)\big) + v(t) - v(s).$$

Les assertions suivantes sont vérifiées

(a) Pour tout $(s,u) \in gph(C)$ *on a* $\eta\partial d(u, C(s)) \subset \eta\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}$*.*

(b) Pour toute suite $(s_n)_n$ *dans* I *convergente vers* s *avec* $s_n \leq s$*, toute suite* $(u_n)_n$ *convergente vers* $u \in C(s)$ *avec* $u_n \in C(s_n)$ *et pour tout* $u^* \in \mathbf{H}$*, on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*(u^*, \eta\partial d\big(u_n, C(s_n)\big) \leq \delta^*(u^*, \eta\partial d\big(u, C(s)\big).$$

3.2 Théorème d'existence pour un processus de la rafle gouverné par des ensembles dépendants du temps

Le théorème qui va être montré dans cette section le **Théorème** 3.2.1 est un résultat qui donne l'existence de solutions d'un processus de la rafle gouverné par des ensembles sous lisses dépendants du temps seulement et avec une perturbation semicontinue mixte. Pour les différentes étapes de la démonstration nous nous sommes inspirées des techniques utilisées par J. Noel et L. Thibault dans [32] et pour contourner le problème de la perturbation semicontinue mixte nous avons utilisé les techniques des premières étapes de démonstration des résultats du **Chapitre** 2 en utilisant le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2 qui nous assure l'existence de sélections mesurables pour une multi-application semicontinue mixte et à valeurs non convexes.

Théorème 3.2.1 *Soient T_0 et T deux nombres réels fixés avec $0 \leq T_0 < T$.*
Posons $I = [T_0, T]$.

- *Soit $C : I \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application satisfaisant les assertions suivantes.*

$(\mathbf{H}_1')$ *Pour tout $t \in I$, $C(t)$ est un sous ensemble non vide et boule compact de $\mathbb{R}^d$.*

$(\mathbf{H}_2')$ *Il existe une fonction $a : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante et absolument continue telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tous $s, t \in I$ avec $s \leq t$ on a*

$$d(y, C(t)) \leq d(y, C(s)) + a(t) - a(s).$$

$(\mathbf{H}_3)$ *La famille $(C(t))_{t \in I}$ est équi-uniformément sous-lisse.*

- *On considère aussi la multi-application $F : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ à valeurs non vides et fermées vérifiant*

1. *F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable.*
2. *F est semicontinue mixte, c'est à dire, pour tout $t \in I$, et tout $x \in \mathbb{R}^d$ telle que $F(t, x)$ est convexe, $F(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement, et à chaque fois que $F(t, x)$ est non convexe, $F(t, \cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x.*

$(\mathbf{H}_4')$ *Il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que la multi-application F satisfait*

$$F(t, x) \cap \alpha(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$.

Soient $x_0 \in C(T_0)$, ζ *un réel positif, et soit pour tout* $t \in I$

$$M(t) = \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2},$$

et supposons que

$$2M(t) + \dot{a}(t) \leq \zeta. \tag{3.1}$$

Alors, il existe une application absolument continue $x(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *solution sur tout l'intervalle* $[T_0, T]$ *de l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}')\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in I. \\ x(t) \in C(t),\ \forall t \in I. \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \zeta \quad et \quad \|x(t)\| \leq \|x_0\| + (T - T_0)\zeta.$$

Démonstration.

1**^{ere} **Étape

Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la partition de I définie par les points

$$t_i^n = T_0 + i\,\frac{T - T_0}{2^n} \text{ avec } i \in \{0, \cdots, 2^n\}.$$

Soient l'ensemble $J = \{0, \cdots, 2^n - 1\}$ et la fonction $\theta_n(\cdot) : I \longrightarrow I$ définie par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[,\ \forall i \in J; \\ T & \text{si } t = T. \end{cases}$$

On a $|\theta_n(t) - t| \leq \dfrac{T - T_0}{2^n}$, alors $\theta_n(t) \to t$ quand $n \to \infty$.

2eme ***Étape :***

Nous allons commencer par construire pour tout $n \geq 1$,
une suite finie de points $\{x_i^n,\ i = 0, \cdots, 2^n\}$, une suite finie d'applications absolument continues sur I_i^n, $\{u_i^n(\cdot),\ i = 0, \cdots, 2^n - 1\}$, une suite finie d'applications Lebesgue-intégrables sur I_i^n, $\{h_i^n(\cdot),\ i = 0, \cdots, 2^n - 1\}$, aussi bien qu'une suite finie d'ensembles convexes compacts $\{\mathcal{X}_i^n,\ i = 0, \cdots, 2^n - 1\}$, et d'ensembles convexes faiblement compacts $\{\mathcal{K}_i^n,\ i = 0, \cdots, 2^n - 1\}$ tels que, $u_i^n(\cdot) \in \mathcal{X}_i^n$, $h_i^n(\cdot) \in \mathcal{K}_i^n$ et

$$h_i^n(t) \in F(t, u_i^n(t)), \text{ p.p. } t \in I_i^n, \tag{3.2}$$

$$x_{i+1}^n \in \operatorname{Proj}_{C(t_{i+1}^n)}\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big), \tag{3.3}$$

avec

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq (t_{i+1}^n - t_i^n)\zeta = \frac{T - T_0}{2^n}\zeta, \tag{3.4}$$

$$\|x_{i+1}^n\| \leq \|x_0\| + (T - T_0)\zeta. \tag{3.5}$$

Nous allons procéder par récurrence.
Étape $i = 0$
Soit $x_0^n = x_0 \in C(T_0)$ et considérons les ensembles

$$\mathcal{X}_0^n = \Big\{ u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n);\ u(t) = x_0 + \int_{T_0}^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_0^n,\ \text{et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \ \text{ p.p. sur } I_0^n \Big\},$$

et

$$\mathcal{K}_0^n = \Big\{ h \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}^d}^1(I_0^n);\ \|h(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I_0^n \Big\}.$$

Les ensembles $\mathcal{X}_0^n$ et $\mathcal{K}_0^n$ sont convexes, et d'après le théorème de Dunford, **Théorème** 1.2.6, il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{K}_0^n$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}_{\mathbb{R}^d}^1(I_0^n)$. De plus on peut montrer que $\mathcal{X}_0^n$ est compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$.

Commençons par montrer que $\mathcal{X}_0^n$ est relativement compact.
Soit $u(\cdot) \in \mathcal{X}_0^n$, pour tout $t \in I_0^n$ on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{T_0}^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|x_0\| + \int_{T_0}^t \|\dot{u}(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leq \|x_0\| + \int_{T_0}^t \zeta\mathrm{d}s \\
&\leq \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \\
&< \|x_0\| + (T - T_0)\zeta.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{X}_0^n(t)$ est borné dans $\mathbb{R}^d$ qui est un espace de dimension finie alors $\mathcal{X}_0^n(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}^d$.

Montrons maintenant que $\mathcal{X}_0^n$ est équicontinu.
Soit $u(\cdot) \in \mathcal{X}_0^n$ et $t, s \in I_0^n$, on a

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(s)\| &= \left\|x_0+\int_{T_0}^{t}\dot u(\tau)\mathrm{d}\tau - x_0 + \int_{T_0}^{s}\dot u(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|\\ &= \left\|\int_s^t \dot u(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|\\ &\le \left|\int_s^t \|\dot u(\tau)\|\mathrm{d}\tau\right|\\ &\le \left|\int_s^t \zeta\mathrm{d}\tau\right|\\ &\le \zeta|t-s|.\end{aligned}$$

En prenant pour tout $\varepsilon>0$, $\delta=\epsilon/\zeta$, on obtient, $\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tel que $\forall\,t,s\in I_0^n$; $|t-s|<\delta$ alors $\|u(t)-u(s)\|\le\epsilon$.
Donc $\mathcal{X}_0^n$ est équicontinu.

Enfin, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.1 $\mathcal{X}_0^n$ est relativement compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$.
Pour montrer qu'il est fermé dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$, soit $(u_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{X}_0^n$ qui converge uniformément vers une application $u(\cdot)\in\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ et montrons que $u(\cdot)\in\mathcal{X}_0^n$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$u_k(t)=x_0+\int_{T_0}^{t}\dot u_k(s)\mathrm{d}s,\ \ \forall t\in I_0^n$$

avec

$$\|\dot u_k(t)\|\le\zeta,\quad \text{p.p. sur } I_0^n.$$

La suite $(\dot u_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ donc elle est $\sigma(\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n),\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n))$-relativement compacte, par conséquent on peut lui extraire une sous suie, que l'on notera de la même manière, et qui converge pour la topologie faible* sur $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ vers une application $v(\cdot)\in\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$. C'est à dire pour tout $y(\cdot)\in\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$, $\langle\dot u_k(\cdot),y(\cdot)\rangle\to\langle v(\cdot),y(\cdot)\rangle$.

Soit $z(\cdot)\in\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)\subset\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$, alors $\langle\dot u_k(\cdot),z(\cdot)\rangle\to\langle v(\cdot),z(\cdot)\rangle$. Alors $(\dot u_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n),\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n))$ vers $v(\cdot)$.

Posons pour tout $t\in I_0^n$, $w(t)=x_0+\displaystyle\int_{T_0}^{t}v(s)\,\mathrm{d}s$. Il est évident que $w(\cdot)$ est absolument continue et que $\dot w(\cdot)=v(\cdot)$ p.p. sur I_0^n avec $\|\dot w(t)\|=\|v(t)\|\le\zeta$ car l'ensemble $\{y\in\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n);\|y(t)\|\le\zeta \text{ p.p. } t\in I_0^n\}$ est convexe fermé dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ et donc faiblement fermé.
Enfin, puisque $z(\cdot)\in\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ on a

$$\lim_{k\to\infty}\langle\dot u_k(\cdot),z(\cdot)\rangle=\langle v(\cdot),z(\cdot)\rangle.$$

Ce qui équivaut à

$$\lim_{k\to\infty}\int_{T_0}^{t_1^n}\langle \dot u_k(s), z(s)\rangle \mathrm{d}s = \int_{T_0}^{t_1^n}\langle v(s), z(s)\rangle \mathrm{d}s.$$

En particulier pour $z(\cdot) = \chi_{[T_0,t]}(\cdot).e_j \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ avec $\chi_{[T_0,t]}(\cdot)$ est la fonction caractéristique de $[T_0, t]$ et $(e_j)_j$ une base de $\mathbb{R}^d$, alors

$$\lim_{k\to\infty}\int_{T_0}^{t_1^n}\langle \dot u_k(s), \chi_{[T_0,t]}(s).e_j\rangle \mathrm{d}s = \int_{T_0}^{t_1^n}\langle v(s), \chi_{[T_0,t]}(s).e_j\rangle \mathrm{d}s,\ \ \forall j,$$

ainsi

$$\lim_{k\to\infty}\int_{T_0}^{t}\langle \dot u_k(s), e_j\rangle \mathrm{d}s = \int_{T_0}^{t}\langle v(s), e_j\rangle \mathrm{d}s,\ \ \forall j,$$

i.e.

$$\langle\, e_j, \lim_{k\to\infty}\int_{T_0}^{t} \dot u_k(s)\mathrm{d}s\rangle = \langle\, e_j, \int_{T_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\rangle,\ \ \forall j,$$

par conséquent

$$\lim_{k\to\infty}(x_0 + \int_{T_0}^{t} \dot u_k(s)\,\mathrm{d}s) = x_0 + \int_{T_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s.$$

C'est à dire,

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) = x_0 + \int_{T_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s = w(t).$$

On conclut que $u(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot u(\cdot) = v(\cdot)$ p.p., i.e., $u(\cdot) \in \mathcal{X}_0^n$. Par suite, $\mathcal{X}_0^n$ est compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$.

D'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application $\Phi_0^n : \mathcal{X}_0^n \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ à valeurs non vides convexes fermées et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathcal{X}_0^n$, et tout $\varphi \in \Phi_0^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_0^n. Alors pour presque tout $t \in I_0^n$

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)\| &\le \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\le \Big(1 + \|x_0\| + \int_{T_0}^{t}\|\dot u(s)\|\mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\le \Big(1 + \|x_0\| + \int_{T_0}^{t}\zeta \mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\le \Big(1 + \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\,\zeta\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\le \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

C'est à dire pour presque tout $t \in I_0^n$

$$\|\varphi(t)\| \le \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} = M(t). \tag{3.6}$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} u_0^n : I_0^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto u_0^n(t) = x_0. \end{aligned}$$

Remarquons que $u_0^n(\cdot)$ est absolument continue avec $\|\dot{u}_0^n(t)\| = 0 \leq \zeta$ pour tout $t \in I_0^n$, par conséquent $u_0^n(\cdot) \in \mathcal{X}_0^n$.
Comme $\Phi_0^n(u_0^n)$ est non vide, soit $h_0^n \in \Phi_0^n(u_0^n)$, i.e., $h_0^n(t) \in F(t, u_0^n(t))$ pour presque tout $t \in I_0^n$ et alors d'après (3.6)

$$\|h_0^n(t)\| \leq M(t) \quad \text{p.p. sur } I_0^n,$$

c'est à dire $h_0^n(\cdot) \in \mathcal{K}_0^n$.
La boule compacité des ensembles $C(t)$ pour tout $t \in I$, assure que

$$\mathrm{Proj}_{C(t_1^n)}\Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

En effet, $C(t)$ est boule compact pour tout $t \in I$, i.e., $\forall r > 0$, $C(t) \cap \mathbf{B}(0, r)$ est compact.
Posons $x = x_0 + \displaystyle\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s$, on a

$$\mathrm{Proj}_{C(t)}(x) = \big\{z \in C(t),\ d(x, C(t)) = \|x - z\|\big\},$$

on a d'après $(\mathbf{H}_2)$

$$\begin{aligned} d(x, C(t)) &\leq d(x, C(s)) + a(t) - a(s) \\ &\leq d(y, C(s)) + \|x - y\| + a(t) - a(s), \end{aligned}$$

en particulier pour $s = T_0$ et $y = x_0$

$$d(x, C(t)) \leq d(x_0, C(T_0)) + \|x - x_0\| + a(t) - a(T_0)$$

comme $x_0 \in C(T_0)$ alors $d(x_0, C(T_0)) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} d(x, C(t)) &\leq \|x - x_0\| + a(t) - a(T_0) \\ &\leq \Big\|\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + a(t) - a(T_0) \\ &\leq \int_{T_0}^{t_1^n} \|h_0^n(s)\|\,\mathrm{d}s + a(t) - a(T_0) \\ &\leq \int_{T_0}^{t_1^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{T_0}^{t} \dot{a}(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_{T_0}^{t_1^n} (2M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_{T_0}^{t_1^n} \zeta\,\mathrm{d}s = \frac{T - T_0}{2^n}\,\zeta \leq (T - T_0)\zeta. \end{aligned}$$

Soit $m = \inf\limits_{z \in C(t)} \|x - z\| = d(x, C(t))$, donc d'après la caractérisation de l'inf on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z_\varepsilon \in C(t)$ tel que $\|x - z_\varepsilon\| < m + \varepsilon$, par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z_\varepsilon \in C(t)$ tel que $\|x - z_\varepsilon\| < m + 1$, ainsi

$$\begin{aligned}
\|z_\varepsilon\| &\leq \|x - z_\varepsilon\| + \|x\| \\
&\leq m + 1 + \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} M(s)\,\mathrm{d}s \\
&\leq m + 1 + \|x_0\| + \|M\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} = r.
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ on trouve,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists z_n \in C(t) \ \text{ tel que } \ \|x - z_n\| \leq m + \frac{1}{n}$$

et $\|z_n\| \leq r$. Alors, $(z_n)_n \subset C(t) \cap \mathbf{B}(0, r)$.
$C(t) \cap \mathbf{B}(0, r)$ étant compact on peut extraire à $(z_n)_n$ une sous suite $(z_{n_k})_k$ qui converge vers un élément $\bar{z} \in C(t) \cap \mathbf{B}(0, r)$.
D'autres parts, on a $\|x - z_{n_k}\| \leq m + \dfrac{1}{n_k}$ alors

$$\lim_{k \to \infty} \|x - z_{n_k}\| \leq m + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} = m,$$

par suite $\|x - \bar{z}\| \leq m$ comme $m = \inf\limits_{z \in C(t)} \|x - z\|$ et $\bar{z} \in C(t)$ alors, $\|x - \bar{z}\| = m$, c'est à dire, $\|x - \bar{z}\| = d(x, C(t))$, en d'autres termes $\mathrm{Proj}_{C(t)}\Big(x_0 + \displaystyle\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset$.
Donc on peut choisir un point $x_1^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_1^n)}\Big(x_0 + \displaystyle\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)$. Il est clair que $x_1^n \in C(t_1^n)$ avec

$$\Big\| x_1^n - \Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n)\Big).$$

D'après l'hypothèse $(\mathbf{H_2'})$ on a

$$\begin{aligned}
\Big\| x_1^n - \Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq d\Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(T_0)\Big) + a(t_1^n) - a(T_0) \\
&\leq d(x_0, C(T_0)) + \Big\| \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s \Big\| + a(t_1^n) - a(T_0)
\end{aligned}$$

et comme $x_0 \in C(T_0)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\| x_1^n - \Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq \int_{T_0}^{t_1^n} \|h_0^n(s)\|\,\mathrm{d}s + a(t_1^n) - a(T_0) \\
&\leq \int_{T_0}^{t_1^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{T_0}^{t_1^n} \dot{a}(s)\,\mathrm{d}s. \\
&= \int_{T_0}^{t_1^n} \Big(M(s) + \dot{a}(s)\Big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\|x_1^n - x_0\| - \left\| \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s) \right\| \leq \left\| x_1^n - \left(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s \right) \right\|$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - x_0\| &\leq \left\| x_1^n - \left(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s \right) \right\| + \left\| \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_{T_0}^{t_1^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{T_0}^{t_1^n} \|h_0^n(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{T_0}^{t_1^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{T_0}^{t_1^n} M(s)\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{T_0}^{t_1^n} (2M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq (t_1^n - T_0)\zeta = \zeta \frac{T - T_0}{2^n}.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\|x_1^n - x_0\| \leq \zeta \frac{T - T_0}{2^n}. \tag{3.7}$$

Il est facile de voir que

$$\|x_1^n\| \leq \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \leq \|x_0\| + (T - T_0)\zeta.$$

Étape $i = 1$

De la même manière, considérons les ensembles

$$\mathcal{X}_1^n = \left\{ u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_1^n);\ u(t) = x_0 + \int_{t_1^n}^{t} \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_1^n \ \text{ et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \text{ p.p. sur } I_1^n \right\},$$

et

$$\mathcal{K}_1^n = \left\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_1^n);\ \|h(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I_1^n \right\}.$$

En utilisant les mêmes techniques et arguments que pour $\mathcal{X}_0^n$ et $\mathcal{K}_0^n$ on montre que l'ensemble $\mathcal{X}_1^n$ est convexe compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_1^n)$, et que $\mathcal{K}_1^n$ est convexe faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_1^n)$.

Aussi, d'après le théorème de Tolstonogov **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application à valeurs non vides convexes fermées $\Phi_1^n : \mathcal{X}_1^n \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_1^n)$ et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathcal{X}_1^n$, et tout $\varphi \in \Phi_1^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_1^n, avec pour presque tout $t \in I_1^n$

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)\| &\leq \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|\dot{u}(s)\|\mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \zeta \mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (t_2^n - t_1^n)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&= M(t) \quad \text{p.p. sur } I_1^n.
\end{aligned}$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned}
u_1^n : I_1^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\
t &\longmapsto x_0 + \frac{t - t_1^n}{t_2^n - t_1^n}(x_1^n - x_0),
\end{aligned}$$

nous avons, $\dot{u}_1^n(t) = \dfrac{x_1^n - x_0}{t_2^n - t_1^n}$, par suite, d'après (3.7) on a

$$\|\dot{u}_1^n(t)\| = \Big\|\frac{x_1^n - x_0}{t_2^n - t_1^n}\Big\| = \frac{\|x_1^n - x_0\|}{t_2^n - t_1^n} = \frac{\|x_1^n - x_0\|}{T - T_0} 2^n \leq \zeta \frac{T - T_0}{2^n} \frac{2^n}{T - T_0} = \zeta.$$

Par conséquent, $u_1^n(\cdot) \in \mathcal{X}_1^n$, et observons que $\lim_{t \to t_2^n} u_1^n(t) = x_1^n$.
Soit alors, $h_1^n \in \Phi_1^n(u_1^n)$, i.e., $h_1^n(t) \in F(t, u_1^n(t))$ pour presque tout $t \in I_1^n$, avec

$$\begin{aligned}
\|h_1^n(t)\| &\leq \big(1 + \|u_1^n(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \frac{t - t_1^n}{t_2^n - t_1^n}\|x_1^n - x_0\|\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + \|x_1^n - x_0\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&= M(t).
\end{aligned}$$

i.e. $h_1^n(\cdot) \in \mathcal{K}_1^n$
La boule compacité des ensembles $C(t)$ pour tout $t \in I$ assure que

$$\mathrm{Proj}_{C(t_2^n)}\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

Alors on peut choisir un point $x_2^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_2^n)}\Big(x_1^n + \displaystyle\int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)$. Il est évident que $x_2^n \in C(t_2^n)$ et que

$$\Big\| x_2^n - \Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n)\Big).$$

D'après l'hypothèse $(\mathbf{H_2})$ on obtient

$$\begin{aligned}\Big\| x_2^n - \Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n)\Big) + a(t_2^n) - a(t_1^n)\\ &\leq d(x_1^n, C(t_1^n)) + \Big\|\int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + a(t_2^n) - a(t_1^n),\end{aligned}$$

comme $x_1^n \in C(t_1^n)$ on a

$$\begin{aligned}\Big\| x_2^n - \Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_1^n(s)\|\,\mathrm{d}s + a(t_2^n) - a(t_1^n)\\ &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \dot{a}(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{t_1^n}^{t_2^n} \big(M(s) + \dot{a}(s)\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|x_2^n - x_1^n\| &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s + \Big\|\int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\|\\ &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_1^n(s)\|\,\mathrm{d}s\\ &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_1^n}^{t_2^n} M(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{t_1^n}^{t_2^n} \big(2M(s) + \dot{a}(s)\big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Alors, d'après (3.1) on a

$$\|x_2^n - x_1^n\| \leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} \zeta\,\mathrm{d}s = (t_2^n - t_1^n)\zeta = \frac{T - T_0}{2^n}\zeta,$$

et

$$\|x_2^n\| \leq \|x_1^n\| + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \leq \|x_0\| + \frac{(T - T_0)}{2^{n-1}} \leq \|x_0\| + (T - T_0)\zeta.$$

Étape i

Maintenant supposons que pour tout $i \in J$ toutes les étapes $0, \cdots, i$ ont été réalisées, i.e., il existe une suite finie de points, (x_j^n), $(j = 0, \cdots, i)$, avec $x_j^n \in C(t_j^n)$, une suite finie d'applications absolument continues $(u_j^n(\cdot))$, $(j = 1, \cdots, i)$, $u_j^n : I_j^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ définies par

$$u_j^n(t) = x_{j-1}^n + \frac{t - t_j^n}{t_{j+1}^n - t_j^n}(x_j^n - x_{j-1}^n), \tag{3.8}$$

et

$$u_0^n(t) = x_0,$$

des ensembles convexes compacts, $\mathcal{X}_j^n$, des ensembles convexes faiblement compactes $\mathcal{K}_j^n$, $(j = 0, \cdots, i)$, définies comme suit

$$\mathcal{X}_0^n = \left\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n);\ u(t) = x_0^n + \int_{T_0}^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_0^n,\ \text{et}\ \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \text{ p.p. sur } I_0^n\right\},$$

et pour tout $j = 1, \cdots, i$

$$\mathcal{X}_j^n = \left\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_j^n);\ u(t) = x_{j-1}^n + \int_{t_j^n}^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_j^n,\ \text{et}\ \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \text{ p.p. sur } I_j^n\right\},$$

et pour tout $j = 0, \cdots, i$

$$\mathcal{K}_j^n = \left\{h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_j^n);\ \|h(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I_j^n\right\},$$

tels que (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5) soient satisfaites.

Remarquons que par (3.4) et (3.8) on a

$$\|\dot{u}_i^n(t)\| = \frac{\|x_i^n - x_{i-1}^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} \leq \frac{t_i^n - t_{i-1}^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\zeta = \zeta,$$

c'est à dire, $u_i^n(\cdot) \in \mathcal{X}_i^n$.

Notons que $u_i^n(t_i^n) = x_{i-1}^n$ et que $\lim\limits_{t \to t_{i+1}^n} u_i^n(t) = x_i^n$.

On prend $h_i^n \in \Phi_i^n(u_i^n)$, i.e., $h_i^n(t) \in F(t, u_i^n(t))$, pour presque tout $t \in I_i^n$, et

$$\|h_i^n(t)\| \leq (1 + \|u_i^n(t)\|)\alpha(t) + \frac{1}{2}$$

D'où, comme $i \leq 2^n - 1$ on a

$$
\begin{aligned}
\|h_i^n(t)\| &\leq \big(1 + \|x_{i-1}^n\| + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\|x_i^n - x_{i-1}^n\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_{i-1}^n\| + \|x_i^n - x_{i-1}^n\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_{i-2}^n\| + \|x_{i-1}^n - x_{i-2}^n\| + \|x_i^n - x_{i-1}^n\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + \|x_1^n - x_0\| + \|x_2^n - x_1^n\| + \cdots + \|x_i^n - x_{i-1}^n\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \cdots + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + i\frac{T - T_0}{2^n}\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + \frac{2^n - 1}{2^n}(T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}\\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

C'est à dire

$$\|h_i^n(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I_i^n.$$

La boule compacité des ensembles $C(t)$ pour tout $t \in I$ assure que

$$\mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n)}\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

Il existe donc un point

$$x_{i+1}^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n)}\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big). \tag{3.9}$$

Il est évident que $x_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n)$. De plus,

$$\Big\|x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_{i+1}^n)\Big).$$

D'après l'hypothèse $(\mathbf{H_2})$ on a

$$
\begin{aligned}
\Big\|x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_i^n)\Big) + a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)\\
&\leq d\big(x_i^n +, C(t_i^n)\big) + \Big\|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n),
\end{aligned}
$$

et comme $x_i^n \in C(t_i^n)$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\Big\|x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq \Big\|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)\\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(M(s) + \dot{a}(s)\big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n - x_i^n\| &\leq \Big\| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s \Big\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|h_i^n(s)\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (2M(s) + \dot{a}(s))\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

et d'après (3.1) on a

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \zeta\,\mathrm{d}s = (t_{i+1}^n - t_i^n)\zeta = \frac{T - T_0}{2^n}\zeta.$$

d'autres parts,

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n\| &\leq \|x_{i+1}^n - x_i^n\| + \|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \cdots + \|x_1^n - x_0\| + \|x_0\| \\
&\leq \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \cdots + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\
&\leq (i+1)\frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\|.
\end{aligned}$$

Alors, on a pour tout $i \in J$

$$\|x_{i+1}^n\| \leq \|x_0\| + (T - T_0)\zeta.$$

D'où toutes les conditions de la récurrence à l'étape $i + 1$ sont obtenues.

Définissons maintenant les ensembles

$$\mathcal{X} = \Big\{ u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I);\ u(t) = x_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I, \text{ et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \ \text{ p.p. sur } I \Big\},$$

et

$$\mathcal{K} = \Big\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I);\ \|h(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I \Big\}.$$

Il est clair que $\mathcal{X}$ est un sous ensemble convexe compact de $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I)$ et que $\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe faiblement compact de $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
Sans perte de généralités on peut prendre pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{X}$,

$$\Phi_i^n(u_{/I_i^n}) = \Phi_{i+1}^n(u_{/I_{i+1}^n})$$

avec $u_{/I_i^n}(\cdot)$ est la restriction de $u(\cdot)$ à I_i^n. Alors, d'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application à valeurs non vides convexes fermées

$\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé définie pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ par

$$\Phi(u) = \Phi_i^n(u_{/I_i^n}) \quad \forall i \in J.$$

Pour tout $t \in I$, soit

$$u_n(t) = u_i^n(t), \;\; \forall t \in I_i^n, \;\; \forall i \in J,$$

et soit $h_n \in \Phi(u_n)$ tel que

$$h_n(t) = h_i^n(t), \quad \forall t \in I_i^n, \;\; \forall i \in J.$$

Il est clair que $u_n(\cdot) \in \mathcal{X}$ et que $h_n(t) \in F(t, u_n(t))$ p.p. sur I, alors

$$\|h_n(t)\| \leq M(t) \;\text{ p.p. sur } I,$$

i.e. $h_n(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Maintenant nous définissons l'application $x_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par

$$x_n(t) = x_i^n + \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_n(s)\mathrm{d}s\Big) + \int_{t_i^n}^{t} h_n(s)\mathrm{d}s,$$

pour tout $t \in I_i^n$ et tout $i \in J$, avec

$$\vartheta(t) = \int_{T_0}^{t} \big(M(s) + \dot{a}(s)\big)\mathrm{d}s.$$

D'après ce qui précède on peut écrire

$$\Big\|\Big(x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_n(s)\mathrm{d}s\Big)\Big\| \leq \vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n) \tag{3.10}$$

et pour presque tout $t \in I_i^n$ on a

$$\dot{x}_n(t) = \frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_n(s)\mathrm{d}s\Big) + h_n(t),$$

où,

$$\dot{\vartheta}(t) = M(t) + \dot{a}(t).$$

Alors,

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) = \frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_n(s)\mathrm{d}s\Big). \tag{3.11}$$

D'après (3.10) et (3.11)

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_n(t)-h_n(t)\| &= \frac{\|\dot{\vartheta}(t)\|}{\vartheta(t_{i+1}^n)-\vartheta(t_i^n)}\Big\|x_{i+1}^n-x_i^n-\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big\| \\ &\leq \frac{\|\dot{\vartheta}(t)\|}{\vartheta(t_{i+1}^n)-\vartheta(t_i^n)}\big(\vartheta(t_{i+1}^n)-\vartheta(t_i^n)\big) \\ &= \|\dot{\vartheta}(t)\|,\end{aligned}$$

c'est à dire, pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{x}_n(t)-h_n(t)\| \leq M(t)+\dot{a}(t) \leq \zeta. \tag{3.12}$$

L'application $x_n(\cdot)$ est absolument continue sur I. Et pour presque tout $t \in I$ on a par la relation (3.12)

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_n(t)\| &\leq \|h_n(t)\|+\|\dot{x}_n(t)-h_n(t)\| \\ &\leq 2M(t)+\dot{a}(t).\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \zeta, \quad \text{p.p. } t \in I, \tag{3.13}$$

par suite, $x_n(\cdot) \in \mathcal{X}$.
Par la relation (3.9), la définition du cône normal proximal et le fait que ce dernier est contenu dans le cône normal au sens de Clarke on a

$$x_i^n+\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}h_n(s)\mathrm{d}s-x_{i+1}^n \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n)}(x_{i+1}^n),$$

ou de manière équivalente

$$-\frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n)-\vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n-x_i^n-\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}h_n(s)\mathrm{d}s\Big) \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n)}(x_{i+1}^n).$$

Utilisant (3.11), la dernière inclusion peut être réécrite comme suit

$$-\Big(\dot{x}_n(t)-h_n(t)\Big) \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n)}(x_{i+1}^n).$$

D'après la définition de l'application $\theta_n(\cdot)$ on a

$$\dot{x}_n(t)-h_n(t) \in -\mathrm{N}_{C(\theta_n(t))}(x_n(\theta_n(t))) \;\; \text{a.e. } t \in I. \tag{3.14}$$

Comme $(x_n(\cdot))_n$ est une suite de points de $\mathcal{X}$ qui est compact on peut lui extraire une sous suite, que l'on notera de la même manière, et qui converge uniformément vers une application $x(\cdot) \in \mathcal{X}$.

De plus, $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ et $(h_n(\cdot))_n$ sont des suites bornées dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ donc on peut leur extraire des sous suites que l'on notera de la même manière, et qui convergent pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers les applications $v(\cdot)$ et $h(\cdot)$ respectivement, ceci d'après le théorème de Dunford, **Théorème** 1.2.6, et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, **Théorème** 1.2.1 et sa conséquence, on conclut que $x(\cdot)$ est absolument continue et que $v(\cdot) = \dot{x}(\cdot)$ p.p. sur I. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &\leq \left| \int_t^{\theta_n(t)} \|\dot{x}_n(s)\| \mathrm{d}s \right| \\ &\leq \zeta |\theta_n(t) - t|, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \in I.$$

D'après $(\mathbf{H}_2)$, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} d(x(t), C(t)) &\leq d\Big(x_n(\theta_n(t)), C(t)\Big) + \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \\ &\leq d\Big(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t))\Big) + a(\theta_n(t)) - a(t) + \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\|. \end{aligned}$$

Comme $x_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t))$, $a(\cdot)$ est absolument continue et $\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \longrightarrow 0$ on conclut alors par passage à la limite que $d(x(t), C(t)) = 0$, c'est à dire $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in I$ car $C(t)$ est fermé.

3eme Étape.

Il reste maintenant à montrer que $x(\cdot)$ est solution de $(\mathcal{P})$.
Sachant que $(h_n(\cdot))_n$ et $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $h(\cdot)$ et $\dot{x}(\cdot)$ respectivement.
D'après le lemme de Mazur il existe une suite $(z_n(\cdot))_n$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $\dot{x}(\cdot) - h(\cdot)$ avec $z_n(\cdot) \in co\{\dot{x}_k(\cdot) - h_k(\cdot),\ k \geq n\}$ pour tout $n \geq 1$. On peut extraire de $(z_n(\cdot))_n$ une sous suite qui converge presque partout vers $\dot{x}(\cdot) - h(\cdot)$.
Ceci implique qu'il existe un ensemble Lebesgue négligeable $N \subset I$ tel que pour tout $t \in I \setminus N$

$$\dot{x}(t) - h(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{x}_k(t) - h_k(t),\ k \geq n\}. \tag{3.15}$$

Fixons $t \in I \setminus N$, par (3.12) et (3.14) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) \in -\mathrm{N}_{C(\theta_n(t))}(x_n(\theta_n(t))) \cap \zeta \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}.$$

Alors, d'après **Remarque** 1.5.2 et **Remarque** 1.7.1 on a

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) \in -\zeta \partial d\big(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t))\big).$$

D'après (3.15) et le théorème de séparation **Théorème** 1.3.2 on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\langle \xi, \dot{x}(t) - h(t) \rangle &\leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle \xi, \dot{x}_k(t) - h_k(t) \rangle \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(\xi, -\zeta\partial d\big(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t))\big)\Big),\end{aligned}$$

ou de manière équivalente

$$\langle -\xi, -\dot{x}(t) + h(t) \rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(-\xi, \zeta\partial d\big(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t))\big)\Big). \tag{3.16}$$

Comme, $x_n(\theta_n(t)) \longrightarrow x(t) \in C(t)$, quand $n \longrightarrow \infty$, aussi $\partial d_C(\cdot)$ est semicontinue supérieurement d'après la Proposition 3.1.1, car $C(t)$ est sous lisse pour tout $t \in I$ alors (3.16) donne

$$\langle -\xi, -\dot{x}(t) + h(t) \rangle \leq \delta^*\big(-\xi, \zeta\partial d\big(x(t), C(t)\big)\big),$$

qu'on peut écrire aussi

$$\langle \xi, \dot{x}(t) - h(t) \rangle \leq \delta^*\big(\xi, -\zeta\partial d\big(x(t), C(t)\big)\big).$$

De plus, l'ensemble $\partial d(x(t), C(t))$ est convexe fermé pour tout $t \in I \setminus N$, on déduit alors que

$$\dot{x}(t) - h(t) \in -\zeta\partial d(x(t), C(t)) \subset -\mathrm{N}_{C(t)}(x(t)), \ \ \forall t \in I \setminus N,$$

c'est à dire,

$$\dot{x}(t) \in -\mathrm{N}_{C(t)}(x(t)) + h(t). \tag{3.17}$$

4^eme^ Étape.

Puisque la suite $(u_n(\cdot))_n \subset \mathcal{X}$, on peut lui extraire une sous suite, qu'on notera de la même manière, et qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{X}$.
Et comme la suite $(h_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $h(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ et $h_n(\cdot) \in \Phi(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé on conclut alors que $h(\cdot) \in \Phi(u)$.

Montrons maintenant que $(x_n(\cdot))_n$ et $(u_n(\cdot))_n$ ont la même limite, c'est à dire $u(\cdot) = x(\cdot)$, en d'autres termes $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - x_n\|_{\mathcal{C}} = 0$.
Pour tout $i \in J$ et tout $t \in I_i^n$ d'après la définition de $x_n(\cdot)$ et $u_n(\cdot)$ on a

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq \|x_i^n - x_{i-1}^n\| & \\ &+ \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)} \Big\| x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s \Big\| + \int_{t_i^n}^{t} \|h_i^n(s)\|\mathrm{d}s \\ &+ \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \|x_i^n - x_{i-1}^n\|.\end{aligned}$$

Et d'après (3.10) il s'ensuit que

$$\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\big(\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)\big) + \int_{t_i^n}^{t} M(s)\mathrm{d}s,$$

c'est à dire,

$$\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t} \dot{\vartheta}(s)\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t} M(s)\mathrm{d}s$$

donc,

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - u_n(t)\| &\leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{a}(s))\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} M(s)\mathrm{d}s \\
&= 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (2M(s) + \dot{a}(s))\mathrm{d}s \\
&\leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \zeta\mathrm{d}s \\
&\leq 2\frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \\
&= 3\frac{T - T_0}{2^n}\zeta.
\end{aligned}$$

On déduit que pour tout $t \in I$

$$\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 3\frac{T - T_0}{2^n}\zeta,$$

c'est à dire,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \|x_n(t) - u_n(t)\| = 0.$$

D'où, $x(\cdot) = u(\cdot)$. On conclut que $h \in \Phi(x)$, alors, $h(t) \in F(t, x(t))$, p.p. $t \in I$. D'après (3.17) on obtient

$$\dot{x}(t) \in -\mathrm{N}_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)).$$

avec $x(t) \in C(t)$, pour tout $t \in I$, et $x_0 = x(0)$, c'est à dire $x(\cdot)$ est solution du problème $(\mathcal{P})$. Ceci termine la démonstration du théorème.

■

3.3 Théorème d'existence pour un processus de la rafle gouverné par des ensembles dépendants du temps et de l'état

Dans cette section nous avons repris le résultat de la section précédente, **Théorème** 3.2.1 avec les mêmes hypothèses, sauf différence le processus de la rafle est gouverné cette fois par des ensembles qui dépendent du temps et de l'état donc nous suivant la même idée de démonstration que dans la section précédente.

Théorème 3.3.1 *Soient T_0 et T deux nombres réels fixés avec $0 \leq T_0 < T$, posons $I = [T_0, T]$.*

• *Soit $C : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application satisfaisant les assertions suivantes.*

($\mathbf{H_1'}$) *Pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$, $C(t, x)$ est un sous ensemble non vide et boule compact de $\mathbb{R}^d$.*

($\mathbf{H_2'}$) *Il existe une fonction $a : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante et absolument continue et un réel $\lambda \in [0, 1]$ tels que pour tous $x, y, u, v \in \mathbb{R}^d$ et tous $s, t \in I$ avec $s \leq t$ on a*

$$|d(x, C(t, u)) - d(y, C(s, v))| \leq \|x - y\| + a(t) - a(s) + \lambda\|u - v\|.$$

($\mathbf{H_3'}$) *La famille $(C(t, x))_{(t,x)\in I\times\mathbb{R}^d}$ est équi-uniformément sous-lisse.*

• *On considère aussi la multi-application $F : I \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ à valeurs non vides fermées vérifiant*

1. *F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable*
2. *F est semicontinue mixte, c'est à dire, pour tout $t \in I$, et tout $x \in \mathbb{R}^d$ telle que $F(t, x)$ est convexe, $F(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement, et à chaque fois que $F(t, x)$ est non convexe, $F(t, \cdot)$ est semicontinue inférieurement sur voisinage de x.*

($\mathbf{H_4'}$) *Il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que la multi-application F satisfait*

$$F(t, x) \cap \alpha(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset$$

pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$.

Soient $x_0 \in C(T_0, x_0)$, ζ un réel positif, et soit pour tout $t \in I$

$$M(t) = \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}.$$

Supposons que

$$2M(t) + \dot{a}(t) + \lambda\zeta \leq \zeta.$$

Alors, il existe une application absolument continue $x(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *solution sur tout l'intervalle* $[T_0, T]$ *de l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [T_0, T], \\ x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0, x_0), \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \zeta \ \ et \ \ \|x(t)\| \leq \|x_0\| + (T - T_0)\zeta.$$

Démonstration

1^ere^ Étape

Pour tout entier $n \geq 1$ considérons la partition de I définie par les points

$$t_i^n = T_0 + i\,\frac{T - T_0}{2^n} \ \text{ avec } \ i \in \{0, \cdots, 2^n\}.$$

Soient l'ensemble $J = \{0, \cdots, 2^n - 1\}$ et les fonctions $\theta_n(\cdot)$ et $\tilde{\theta}_n(\cdot) : I \longrightarrow I$ définies par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ \forall i \in J; \\ T & \text{si } t = T. \end{cases}$$

et

$$\tilde{\theta}_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{si } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \ \forall i \in J; \\ T_0 & \text{si } t = T_0. \end{cases}$$

On a $|\theta_n(t) - t| \leq \dfrac{T - T_0}{2^n}$, et $|\tilde{\theta}_n(t) - t| \leq \dfrac{T - T_0}{2^n}$ alors $\theta_n(t) \to t$ et $\tilde{\theta}_n(t) \to t$ quand $n \to \infty$.

2^eme^ Étape** **Construction de la suite $(x_n(\cdot))$

Posons $\beta(t) = a(t) + \lambda\zeta t$ pour tout $t \in I$ et $I_i^n = [t_i^n, t_{i+1}^n[$ avec $i \in J$. Alors $\dot{\beta}(t) = \dot{a}(t) + \lambda\zeta$ et

$$2M(t) + \dot{\beta}(t) \leq \zeta. \tag{3.18}$$

Étape $i = 0$

Soit $x_0^n = x_0 \in C(T_0, x_0)$ et considérons les ensembles

$$\mathcal{X}_0^n = \left\{ u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n);\ u(t) = x_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_0^n;\ \text{et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \ \text{ p.p. sur } I_0^n \right\}$$

et

$$\mathcal{K}_0^n = \left\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n);\ \|h(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I_0^n \right\}$$

Nous avons déjà vu dans la démonstration du théorème 3.2.1 que les ensembles $\mathcal{X}_0^n$ et $\mathcal{K}_0^n$ sont convexes, $\mathcal{X}_0^n$ est compact et $\mathcal{K}_0^n$ est faiblement compact.

D'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application Φ_0^n de $\mathcal{X}_0^n$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_0^n)$ à valeurs non vides fermées et convexes et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que $\forall u \in \mathcal{X}_0^n$, $\forall \varphi \in \Phi_0^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_0^n et donc pour presque tout $t \in I_0^n$

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)\| &\leq \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \int_{T_0}^{t} \|\dot{u}(s)\|\mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \int_{T_0}^{t} \zeta\mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\,\zeta\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} = M(t). \tag{3.19}$$

Soit maintenant l'application

$$\begin{aligned}
u_0^n : I_0^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\
t &\longmapsto u_0^n(t) = x_0.
\end{aligned}$$

$u_0^n(\cdot)$ est une application constante donc absolument continue avec $\dot{u}_0^n(t) = 0$, alors $\|\dot{u}_0^n(t)\| = 0 \leq \zeta$ pour tout $t \in I_0^n$ ainsi $u_0^n(\cdot) \in \mathcal{X}_0^n$.
De plus, observons que $x_0 = u_0(T_0)$ et donc $x_0 \in C(T_0, u_0(T_0))$.
Soit alors $h_0^n \in \Phi_0^n(u_0^n)$ i.e. ; $h_0^n(t) \in F(t, u_0^n(t))$ p.p. sur I_0^n et d'après (3.19) on a

$$\|h_0^n(t)\| \leq M(t) \quad \text{p.p. sur } I_0^n.$$

On voit bien que, $h_0^n(\cdot) \in \mathcal{K}_0^n$.
On a $C(t, x)$ est boule compact pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$, alors,

$$\mathrm{Proj}_{C(t_1^n, x_0)}\Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

Par suite, on peut choisir un point $x_1^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_1^n, x_0)}\Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)$. Il est évident que $x_1^n \in C(t_1^n, x_0)$ avec

$$\Big\|x_1^n - \Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_0 + \int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n, x_0)\Big)$$

d'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_2'$) nous avons

$$\begin{aligned}
&d\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n,x_0)\Big)-d\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(T_0,x_0)\Big)\\
&\qquad\le \Big|d\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n,x_0)\Big)-d\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(T_0,x_0)\Big)\Big|\\
&\qquad\le a(t_1^n)-a(T_0)+\lambda\|x_0-x_0\|\\
&\qquad\le a(t_1^n)-a(T_0).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\Big\|x_1^n-\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &= d\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n,x_0)\Big)\\
&\le d\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s, C(T_0,x_0)\Big)+a(t_1^n)-a(T_0)\\
&\le d\big(x_0, C(T_0,x_0)\big)+\Big\|\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\|+a(t_1^n)-a(T_0),
\end{aligned}$$

comme $x_0\in C(T_0,x_0)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\|x_1^n-\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\le \int_{T_0}^{t_1^n}\|h_0^n(s)\|\,\mathrm{d}s+a(t_1^n)-a(T_0)\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n} M(s)\,\mathrm{d}s+\int_{T_0}^{t_1^n}\dot a(s)\,\mathrm{d}s.\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n}(M(s)+\dot a(s))\,\mathrm{d}s\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n}(M(s)+\dot\beta(s))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

D'autres parts

$$\|x_1^n-x_0\|-\Big\|\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\Big\|\le\Big\|x_1^n-\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\|$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|x_1^n-x_0\| &\le \Big\|x_1^n-\Big(x_0+\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\|+\Big\|\int_{T_0}^{t_1^n} h_0^n(s)\mathrm{d}s\Big\|\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n}(M(s)+\dot\beta(s))\,\mathrm{d}s+\int_{T_0}^{t_1^n}\|h_0^n(s)\|\mathrm{d}s\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n}(M(s)+\dot\beta(s))\,\mathrm{d}s+\int_{T_0}^{t_1^n} M(s)\mathrm{d}s\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n}(2M(s)+\dot\beta(s))\,\mathrm{d}s\\
&\le \int_{T_0}^{t_1^n}\zeta\,\mathrm{d}s\;=\;\zeta(t_1^n-T_0),
\end{aligned}$$

en d'autre termes,

$$\|x_1^n - x_0\| \leq \zeta(t_1^n - T_0) = \zeta\,\frac{T - T_0}{2^n}. \tag{3.20}$$

Remarquons que on a aussi

$$\begin{aligned}
\|x_1^n\| &\leq \|x_1^n - x_0\| + \|x_0\| \\
&\leq \zeta\,\frac{T - T_0}{2^n} + \|x_0\| \\
&\leq \zeta(T - T_0) + \|x_0\|.
\end{aligned}$$

Étape $i = 1$
On reprend le même procédé avec $x_1^n \in C(t_1^n, x_0)$.
Considérons les ensembles

$$\mathcal{X}_1^n = \Big\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_1^n);\ u(t) = x_0 + \int_{t_1^n}^{t} \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_1^n; \ \ \text{et}\ \ \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta\ \ \text{p.p. sur } I_1^n\Big\}$$

et

$$\mathcal{K}_1^n = \Big\{h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_1^n);\ \|h(t)\| \leq M(t)\ \ \text{p.p. sur } I_1^n\Big\}.$$

De la même manière que pour l'ensemble $\mathcal{X}_0^n$ on montre que $\mathcal{X}_1^n$ est convexe compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_1^n)$ et l'ensemble $\mathcal{K}_1^n$ est convexe faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_1^n)$.

De même d'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application Φ_1^n de $\mathcal{X}_1^n$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_1^n)$ à valeurs non vides fermées et convexes et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que $\forall u \in \mathcal{X}_1^n$, $\forall \varphi \in \Phi_1^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_1^n avec pour presque tout $t \in I_1^n$

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)\| &\leq \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|\dot{u}(s)\|\mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \zeta\mathrm{d}s\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (t_2^n - t_1^n)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&= M(t).
\end{aligned}$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} u_1^n : I_1^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto x_0 + \frac{t - t_1^n}{t_2^n - t_1^n}(x_1^n - x_0). \end{aligned}$$

D'où, $\dot{u}_1^n(t) = \dfrac{x_1^n - x_0}{t_2^n - t_1^n}$, par suite d'après (3.20) on a

$$\|\dot{u}_1^n(t)\| = \left\| \frac{x_1^n - x_0}{t_2^n - t_1^n} \right\| = \frac{\|x_1^n - x_0\|}{t_2^n - t_1^n} = \frac{\|x_1^n - x_0\|}{T - T_0} 2^n \leq \zeta \frac{T - T_0}{2^n} \frac{2^n}{T - T_0} = \zeta.$$

Par suite $u_1^n(\cdot) \in \mathcal{X}_1^n$.
Remarquons que $\lim\limits_{t \to t_1^n} u_0^n(t) = u_1^n(t_1^n) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_2^n} u_1^n(t) = x_1^n$, ainsi on a

$$x_1^n \in C(t_1^n, x_0) = C(t_1^n, u_1^n(t_1^n))$$

Soit alors, $h_1^n \in \Phi_1^n(u_1^n)$, i.e. $h_1^n(t) \in F(t, u_1^n(t))$ p.p. sur I_1^n avec pour presque tout $t \in I_1^n$, on a

$$\begin{aligned} \|h_1^n(t)\| &\leq \big(1 + \|u_1^n(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\ &\leq \Big(1 + \|x_0\| + \frac{t - t_1^n}{t_2^n - t_1^n}\|x_1^n - x_0\|\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\ &\leq \big(1 + \|x_0\| + \|x_1^n - x_0\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\ &\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\ &= M(t). \end{aligned}$$

i.e., $h_1^n(\cdot) \in \mathcal{K}_1^n$
Et on a $C(t, x)$ est boule compact pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$ alors

$$\mathrm{Proj}_{C(t_2^n, x_1^n)}\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

Donc, on peut choisir un point $x_2^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_2^n, x_1^n)}\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)$. Il est évident que $x_2^n \in C(t_2^n, x_1^n)$ avec

$$\Big\|x_2^n - \Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big).$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_2'$) et l'inégalité (3.20) on a

$$\begin{aligned}
&d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big) - d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n, x_0)\Big) \\
&\qquad \leq \Big| d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big) - d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n, x_0)\Big)\Big| \\
&\qquad \leq a(t_2^n) - a(t_1^n) + \lambda \|x_1^n - x_0\| \\
&\qquad \leq a(t_2^n) - a(t_1^n) + \lambda\zeta \frac{T - T_0}{2^n} \\
&\qquad = a(t_2^n) - a(t_1^n) + \lambda\zeta (t_2^n - t_1^n) \\
&\qquad = \beta(t_2^n) - \beta(t_1^n).
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\| x_2^n - \Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &= d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big) \\
&\leq d\Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_1^n, x_0)\Big) + \beta(t_2^n) - \beta(t_1^n) \\
&\leq d(x_1^n, C(t_1^n, x_0)) + \Big\| \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + \beta(t_2^n) - \beta(t_1^n),
\end{aligned}$$

comme $x_1^n \in C(t_1^n, x_0)$ alors

$$\begin{aligned}
\Big\| x_2^n - \Big(x_1^n + \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_1^n(s)\|\,\mathrm{d}s + \beta(t_2^n) - \beta(t_1^n) \\
&\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \dot{\beta}(s)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|x_2^n - x_1^n\| &\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s + \Big\| \int_{t_1^n}^{t_2^n} h_1^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| \\
&\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_1^n(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_1^n}^{t_2^n} M(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\|x_2^n - x_1^n\| \leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} (2M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s \leq \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \leq (T - T_0)\zeta. \tag{3.21}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\|x_2^n\| &\leq \|x_2^n - x_1^n\| + \|x_1^n\| \\ &\leq \|x_2^n - x_1^n\| + \|x_1^n - x_0\| + \|x_0\| \\ &\leq \frac{T-T_0}{2^n}\zeta + \frac{T-T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\ &\leq 2\frac{T-T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\ &\leq (T-T_0)\zeta + \|x_0\|.\end{aligned}$$

Étape $i = 2$
On reprend encore une fois le procédé avec $x_2^n \in C(t_2^n, x_1^n)$.
Considérons les ensembles

$$\mathcal{X}_2^n = \Big\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_2^n);\ u(t) = x_1^n + \int_{t_2^n}^t \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_2^n;\ \text{ et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \text{ p.p. sur } I_2^n\Big\}$$

et

$$\mathcal{K}_2^n = \Big\{h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_2^n);\ \|h(t)\| \leq M(t) \text{ p.p. sur } I_2^n\Big\}$$

De la même manière que pour l'ensemble $\mathcal{X}_1^n$ on montre que $\mathcal{X}_2^n$ est convexe compact dans $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_2^n)$ et on a $\mathcal{K}_2^n$ est convexe faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_2^n)$.

De même, d'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application Φ_2^n de $\mathcal{X}_2^n$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_2^n)$ à valeurs non vides fermées convexes et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathcal{X}_2^n$, pour tout $\varphi \in \Phi_2^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_2^n, et pour presque tout $t \in I_2^n$

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2}.$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} u_2^n : I_2^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto x_1^n + \frac{t - t_2^n}{t_3^n - t_2^n}(x_2^n - x_1^n).\end{aligned}$$

D'où, $\dot{u}_2^n(t) = \dfrac{x_2^n - x_1^n}{t_3^n - t_2^n}$, par suite d'après (3.21) on a

$$\|\dot{u}_2^n(t)\| = \left\|\frac{x_2^n - x_1^n}{t_3^n - t_2^n}\right\| = \frac{\|x_2^n - x_1^n\|}{t_3^n - t_2^n} = \frac{\|x_2^n - x_1^n\|}{T - T_0}2^n \leq \frac{T-T_0}{2^n}\frac{2^n}{T-T_0}\zeta = \zeta.$$

C'est à dire ; $u_2^n(\cdot) \in \mathcal{X}_2^n$.
Remarquons que $\lim\limits_{t \to t_2^n} u_1^n(t) = u_2^n(t_2^n) = x_1^n$ et $\lim\limits_{t \to t_3^n} u_2^n(t) = x_2^n$. Par conséquent on a

$$x_2^n \in C(t_2^n, x_1^n) = C(t_2^n, u_2^n(t_2^n)).$$

Soit alors, $h_2^n \in \Phi_2^n(u_2^n)$ i.e. $h_2^n(t) \in F(t, u_2^n(t))$ p.p. sur I_2^n et pour presque tout $t \in I_2^n$

$$\begin{aligned}
\|h_2^n(t)\| &\leq \big(1 + \|u_2^n(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_1^n\| + \|x_2^n - x_1^n\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + \|x_1^n - x_0\| + \|x_2^n - x_1^n\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \Big(1 + \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&= \Big(1 + \|x_0\| + 2\frac{T - T_0}{2^n}\zeta\Big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq \big(1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&= M(t).
\end{aligned}$$

i.e., $h_2^n(\cdot) \in \mathcal{K}_2^n$.
Et on a $C(t, x)$ est boule compact pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$ alors,

$$\mathrm{Proj}_{C(t_3^n, x_2^n)}\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

Alors, il existe un point $x_3^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_3^n, x_2^n)}\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)$. Il évident que $x_3^n \in C(t_3^n, x_2^n)$ avec

$$\Big\|x_3^n - \Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_3^n, x_2^n)\Big).$$

D'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_2')$ et l'inégalité (3.21) on a

$$\begin{aligned}
&d\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_3^n, x_2^n)\Big) - d\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big) \\
&\leq \Big|d\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_3^n, x_2^n)\Big) - d\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big)\Big| \\
&\leq a(t_3^n) - a(t_2^n) + \lambda\|x_2^n - x_1^n\| \\
&\leq a(t_3^n) - a(t_2^n) + \lambda\zeta(t_3^n - t_2^n) \\
&= \beta(t_3^n) - \beta(t_2^n).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\Big\| x_3^n - \Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\le d\Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_2^n, x_1^n)\Big) + \beta(t_3^n) - \beta(t_2^n) \\ &\le d(x_2^n, C(t_2^n, x_1^n)) + \Big\| \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + \beta(t_3^n) - \beta(t_2^n),\end{aligned}$$

et comme $x_2^n \in C(t_2^n, x_1^n)$ alors,

$$\begin{aligned}\Big\| x_3^n - \Big(x_2^n + \int_{t_2^n}^{t_3^n} h_2^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\le \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_2^n(s)\|\,\mathrm{d}s + \beta(t_3^n) - \beta(t_2^n) \\ &\le \int_{t_2^n}^{t_3^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_2^n}^{t_3^n} \dot\beta(s)\,\mathrm{d}s \\ &\le \int_{t_2^n}^{t_3^n} (M(s) + \dot\beta(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|x_3^n - x_2^n\| &\le \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|h_2^n(s)\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_2^n}^{t_3^n} (M(s) + \dot\beta(s))\,\mathrm{d}s \\ &\le \int_{t_2^n}^{t_3^n} (2M(s) + \dot\beta(s))\,\mathrm{d}s \le \frac{T - T_0}{2^n}\zeta. \end{aligned} \tag{3.22}$$

et on a

$$\begin{aligned}\|x_3^n\| &\le \|x_3^n - x_2^n\| + \|x_2^n\| \\ &\le \|x_3^n - x_2^n\| + \|x_2^n - x_1^n\| + \|x_1^n - x_0\| + \|x_0\| \\ &\le \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\ &\le 3\frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\ &\le (T - T_0)\zeta + \|x_0\|.\end{aligned}$$

Étape i

En répétant le processus on définit à l'étape i avec $i \in J$,
une suite finie de points (x_j^n), $j = 0, \cdots, i$, avec $x_j^n \in C(t_j^n, u_j^n(t_j^n))$, des ensembles convexes compacts $\mathcal{X}_j^n$, $j = 0, \cdots, i$, avec

$$\mathcal{X}_0^n = \Big\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_0^n);\ u(t) = x_0^n + \int_{T_0}^{t} \dot u(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_0^n; \text{ et } \|\dot u(t)\| \le \zeta \ \text{ p.p. sur } I_0^n\Big\}$$

et pour tout $j = 1, \cdots, i$

$$\mathcal{X}_j^n = \Big\{u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I_j^n);\ u(t) = x_{j-1}^n + \int_{t_j^n}^{t} \dot u(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I_j^n;\ \text{ et } \|\dot u(t)\| \le \zeta \ \text{ p.p. sur } I_j^n\Big\}$$

et des ensembles convexes faiblement compacts $\mathcal{K}_j^n,\ j = 0, \cdots, i$ avec

$$\mathcal{K}_j^n = \Big\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_j^n);\ \|h(t)\| \leq M(t) \ \text{ p.p. sur } I_j^n \Big\}.$$

Ainsi que des multi-applications $\Phi_j^n : \mathcal{X}_j^n \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_j^n),\ j = 0, \cdots, i$ à valeurs non vides convexes fermées et qui admettent des graphes fortement faiblement séquentiellement fermés telles que $\forall u \in \mathcal{X}_j^n$, $\forall \varphi \in \Phi_j^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_j^n et

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2} \quad \text{p.p. sur } I_j^n,$$

des applications,

$$\begin{aligned} u_0^n : I_0^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

et $u_j^n(\cdot),\ j = 1, \cdots, i$ définies sur I_j^n et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que

$$\begin{aligned} u_j^n : I_j^n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto x_{j-1}^n + \frac{t - t_j^n}{t_{j+1}^n - t_j^n}(x_j^n - x_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Supposons construit les points x_j^n et les applications u_j^n, $j = 1, \cdots, i$ vérifiant

$$x_j^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_j^n, x_{j-1}^n)}\Big(x_{j-1}^n + \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} h_{j-1}^n(s)\mathrm{d}s \Big),$$

avec

$$\|x_j^n - x_{j-1}^n\| \leq \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \leq (T - T_0)\zeta, \tag{3.23}$$

et

$$\|x_j^n\| \leq (T - T_0)\zeta + \|x_0\|.$$

Aussi

$$u_j^n(t) = x_{j-1}^n + \frac{t - t_j^n}{t_{j+1}^n - t_j^n}(x_j^n - x_{j-1}^n), \quad \forall t \in I_j^n,$$

avec

$$\|\dot{u}_j^n(t)\| = \frac{\|x_j^n - x_{j-1}^n\|}{T - T_0} 2^n \leq \zeta,$$

i.e., $u_j^n(\cdot) \in \mathcal{X}_j^n$.
Remarquons aussi que $u_0(T_0) = x_0$ et pour tout $j = 1, \cdots, i$, $u_j^n(t_j^n) = \lim\limits_{t \to t_j^n} u_{j-1}^n(t) = x_{j-1}^n$.
D'où

$$x_j^n \in C(t_j^n, x_{j-1}^n) = C(t_j^n, u_j^n(t_j^n))$$

Construisons le point x_{i+1}^n.
En effet, comme $\mathcal{X}_i^n$ est compact, par le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2 il existe une multi-application $\Phi_i^n : \mathcal{X}_i^n \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I_i^n)$ à valeurs non vides fermées convexes et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que $\forall u \in \mathcal{X}_i^n$, $\forall \varphi \in \Phi_i^n(u)$ on a $\varphi(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I_i^n, et pour presque tout $t \in I_i^n$

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(1 + \|u(t)\|\big)\alpha(t) + \frac{1}{2},$$

comme $u_i^n \in \mathcal{X}_i^n$ on peut choisir un élément $h_i^n \in \Phi_i^n(u_i^n)$, i.e., $h_i^n(t) \in F(t, u_i^n(t))$ p.p. sur I_i^n et

$$\|h_i^n(t)\| \leq (1 + \|u_i^n(t)\|)\alpha(t) + \frac{1}{2}.$$

Alors, comme $i \leq 2^n - 1$ on a

$$\begin{aligned}
\|h_i^n(t)\| &\leq (1 + \|x_{i-1}^n\| + \|x_i^n - x_{i-1}^n\|)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq (1 + \|x_{i-2}^n\| + \|x_{i-1}^n - x_{i-2}^n\| + \|x_i^n - x_{i-1}^n\|)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq (1 + \|x_0\| + \|x_1^n - x_0\| + \|x_2^n - x_1^n\| + \cdots + \|x_i^n - x_{i-1}^n\|)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq (1 + \|x_0\| + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \cdots + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq (1 + \|x_0\| + i\frac{T - T_0}{2^n}\zeta)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq (1 + \|x_0\| + \frac{2^n - 1}{2^n}(T - T_0)\zeta)\alpha(t) + \frac{1}{2} \\
&\leq (1 + \|x_0\| + (T - T_0)\zeta)\alpha(t) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\|h_i^n(t)\| \leq M(t).$$

Alors, $h_i^n(\cdot) \in \mathcal{K}_i^n$.

Et on a $C(t, x)$ est boule compact pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d$ alors

$$\mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big) \neq \emptyset.$$

i.e., on peut choisir un point $x_{i+1}^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)$. Il est évident que $x_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, x_i^n)$, avec

$$\Big\|x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| = d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_3^n, x_2^n)\Big).$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_2'$) et l'inégalité (3.23) on a

$$\begin{aligned}
d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_{i+1}^n, x_i^n)\Big) - d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_i^n, x_{i-1}^n)\Big) \\
&\leq \Big| d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_{i+1}^n, x_i^n)\Big) - d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_i^n, x_{i-1}^n)\Big)\Big| \\
&\leq a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n) + \lambda \|x_i^n - x_{i-1}^n\| \\
&\leq a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n) + \lambda\zeta(t_{i+1}^n - t_i^n) \\
&= \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\| x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq d\Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s, C(t_i^n, x_{i-1}^n)\Big) + \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n) \\
&\leq d(x_i^n, C(t_i^n, x_{i-1}^n)) + \Big\| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| + \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n),
\end{aligned}$$

et comme $x_i^n \in C(t_i^n, x_{i-1}^n)$ alors,

$$\begin{aligned}
\Big\| x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| &\leq \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|h_i^n(s)\|\,\mathrm{d}s + \beta(t_i^n) - \beta(t_{i-1}^n) \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{\beta}(s)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\Big\| x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s.$$

On a aussi

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| - \Big\| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| \leq \Big\| x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big\|.$$

Alors

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| - \Big\| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\Big\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n - x_i^n\| &\leq \| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\,\mathrm{d}s\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|h_i^n(s)\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} M(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (2M(s) + \dot{\beta}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{T - T_0}{2^n}\zeta
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n\| &\leq \|x_{i+1}^n - x_i^n\| + \|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \cdots + \|x_1^n - x_0\| + \|x_0\| \\
&\leq \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \cdots + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\
&\leq (i+1)\frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \|x_0\| \\
&\leq (T - T_0)\zeta + \|x_0\|.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a pour tout $i \in J$

$$\|x_{i+1}^n\| \leq (T - T_0)\zeta + \|x_0\| \tag{3.24}$$

et

$$\|h_i^n(t)\| \leq M(t), \quad \forall t \in I_i^n \tag{3.25}$$

Remarquons aussi, que si nous considérons l'application $u_{i+1}^n : I_{i+1}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ définie par

$$u_{i+1}^n(t) = x_i^n + \frac{t - t_{i+1}^n}{t_{i+2}^n - t_{i+1}^n}(x_{i+1}^n - x_i^n),$$

nous obtenons $u_{i+1}^n(t_{i+1}^n) = x_i^n$ et $\lim\limits_{t \to t_{i+2}^n} u_{i+1}^n(t) = x_{i+1}^n$. Par conséquent

$$x_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, x_i^n) \in C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))$$

On vient de voir que toutes les conditions de la récurrence à l'étape $i+1$ sont obtenues.

Définissons maintenant les ensembles

$$\mathcal{X} = \left\{ u \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^d}(I);\ u(t) = x_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in I;\ \text{et } \|\dot{u}(t)\| \leq \zeta \ \text{ p.p. sur } I \right\}$$

et

$$\mathcal{K} = \Big\{ h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I);\ \|h(t)\| \leq M(t) \Big\}$$

Les deux ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{K}$ sont convexes, $\mathcal{K}$ est faiblement compact et $\mathcal{X}$ est compact. La convexité des deux ensembles est évidente tandis qu'on peut montrer la faible compacité de $\mathcal{K}$ de la même manière que pour les ensembles $\mathcal{K}_i^n$, et la compacité de $\mathcal{X}$ se montre de la même manière que celle des ensembles $\mathcal{X}_i^n$.
Remarquons tout d'abord que pour tout $u \in \mathcal{X}$ et tout $s, t \in I$ tels que $s < t$ on a

$$\begin{aligned}
d(y, C(t, u(t))) - d(y, C(s, u(s))) &\leq |d(y, C(t, u(t))) - d(y, C(s, u(s)))| \\
&\leq \|x - x\| + a(t) - a(s) + \lambda \|u(t) - u(s)\| \\
&\leq a(t) - a(s) + \lambda \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\| \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_s^t \dot{a}(\tau) \mathrm{d}\tau + \lambda \int_s^t \zeta \mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t (\dot{a}(\tau) + \lambda\zeta) \mathrm{d}\tau \\
&= \beta(t) - \beta(s).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$d(y, C(t, u(t))) \leq d(y, C(s, u(s))) + \beta(t) - \beta(s). \tag{3.26}$$

Sans perte de généralités on peut prendre pour tout $u \in \mathcal{X}$,

$$\Phi_i^n(u_{/I_i^n}) = \Phi_{i+1}^n(u_{/I_{i+1}^n})$$

avec $u_{/I_i^n}(\cdot)$ est la restriction de $u(\cdot)$ à I_i^n. Alors, d'après le théorème de Tolstonogov, **Théorème** 2.1.2, il existe une multi-application à valeurs non vides convexes fermées $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ et qui admet un graphe fortement faiblement séquentiellement fermé définie pour tout $u \in \mathcal{X}$ par

$$\Phi(u) = \Phi_i^n(u_{/I_i^n}) \quad \forall i \in J.$$

Alors, $\forall \varphi \in \Phi(u) = \Phi_i^n(u_{|I_i^n})$ on a

$$\varphi(t) \in F(t, u_{|I_i^n}(t))$$

pour presque tout $t \in I$ avec

$$\|\varphi(t)\| \leq M(t).$$

Posons pour tout $t \in I$

$$u_n(t) = u_i^n(t), \ \ \forall t \in I_i^n, \ \ \forall i \in J.$$

On a alors

$$\dot{u}_n(t) = \dot{u}_i^n(t), \quad \forall t \in I_i^n, \quad \forall i \in J.$$

Comme $u_i^n(\cdot) \in \mathcal{X}_i^n \quad \forall i \in J$ donc $\|\dot{u}_n(t)\| = \|\dot{u}_i^n(t\| \leq \zeta, \quad \forall t \in I_i^n, \quad \forall i \in J$. En d'autres termes, $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \zeta, \quad \forall t \in I$. i.e., $u_n(\cdot) \in \mathcal{X}$.

Soit $h_n \in \Phi(u_n)$ telle que

$$h_n(t) = h_i^n(t), \quad \forall t \in I_i^n, \quad \forall i \in J.$$

Il est évident que $h_n(t) \in F(t, u_n(t))$ pour presque tout $t \in I$ et que

$$\|h_n(t)\| \leq M(t), \text{ p.p. sur } I.$$

C'est à dire, $h_n(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Soit l'application $x_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ définie par

$$x_n(t) = x_i^n + \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big) + \int_{t_i^n}^{t} h_i^n(s)\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \text{ et } \forall i \in J,$$

avec

$$\vartheta(t) = \int_{T_0}^{t} \big(M(s) + \dot{\beta}(s)\big)\mathrm{d}s.$$

On a

$$\begin{aligned} \Big\|(x_{i+1}^n - \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\Big)\Big\| &\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(M(s) + \dot{\beta}(s)\big)\mathrm{d}s \\ &= \vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n) \end{aligned} \tag{3.27}$$

et pour presque tout $i \in J$ et tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ on a

$$\dot{x}_n(t) = \frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big) + h_i^n(t), \tag{3.28}$$

avec

$$\dot{\vartheta}(t) = M(t) + \dot{\beta}(t).$$

De (3.28) on a

$$\dot{x}_n(t) - h_i^n(t) = \frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big), \tag{3.29}$$

or $h_i^n(t) = h_n(t)$, pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$, (3.29) peut être réécrite comme

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) = \frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big). \tag{3.30}$$

Ainsi, d'après (3.27) on a

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t) - h_n(t)\| &= \frac{\|\dot{\vartheta}(t)\|}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)} \left\| x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \frac{\|\dot{\vartheta}(t)\|}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)} \big(\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)\big) \\
&= \|\dot{\vartheta}(t)\|
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\|\dot{x}_n(t) - h_n(t)\| \leq M(t) + \dot{\beta}(t).$$

L'application $x_n(\cdot)$ est absolument continue sur I.
En effet, $\forall i \in J$ et $\forall \tau, t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ tels que $\tau < t$ on a

$$x_n(t) - x_n(\tau) = \frac{\vartheta(t) - \vartheta(\tau)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)} \Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s \Big) + \int_\tau^t h_i^n(s)\mathrm{d}s.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(\tau)\| &\leq \frac{\vartheta(t) - \vartheta(\tau)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)} \left\| x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s \right\| + \int_\tau^t \|h_i^n(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_\tau^t \dot{\vartheta}(s)\mathrm{d}s + \int_\tau^t \|h_i^n(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_\tau^t (M(s) + \dot{\beta}(s))\mathrm{d}s + \int_\tau^t M(s)\mathrm{d}s \\
&\leq \int_\tau^t (2M(s) + \dot{\beta}(s))\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|\dot{x}_n(t)\| - \|h_n(t)\| \leq \|\dot{x}_n(t) - h_n(t)\|$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &\leq \|h_n(t)\| + \|\dot{x}_n(t) - h_n(t)\| \\
&\leq M(t) + M(t) + \dot{\beta}(t) \\
&= 2M(t) + \dot{\beta}(t)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq 2M(t) + \dot{\beta}(t) \leq \zeta. \tag{3.31}$$

Par conséquent, $x_n(\cdot) \in \mathcal{X}$.

On a

$$x_{i+1}^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))} \Big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s \Big).$$

Alors, d'après la définition du cône normal proximal et le fait que ce dernier soit contenu dans le cône normal au sens de Clarke on a

$$x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s - x_{i+1}^n \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))}(x_{i+1}^n)$$

ce qui est équivalent à

$$-\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big) \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))}(x_{i+1}^n) \tag{3.32}$$

alors (3.32) nous donne

$$-\frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big) \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))}(x_{i+1}^n) \tag{3.33}$$

D'où, d'après (3.30) on a

$$-\big(\dot{x}_n(t) - h_n(t)\big) \in \mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))}(x_{i+1}^n).$$

Enfin,

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) \in -\mathrm{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))}(x_{i+1}^n)$$

De plus, $t_i^n = \tilde{\theta}_n(t)$ et $t_{i+1}^n = \theta_n(t)$, $\forall t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$, $x_n(t_{i+1}^n) = x_{i+1}^n$ alors, $x_n(\theta_n(t)) = x_{i+1}^n$, et $x_n(t_i^n) = x_i^n = u_{i+1}^n(t_{i+1}^n)$ alors, $x_n(\tilde{\theta}_n(t)) = x_i^n$, ce qui donne

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) \in -\mathrm{N}_{C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))}(x_n(\theta_n(t))). \tag{3.34}$$

On a $x_n(\cdot) \in \mathcal{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{X}$ est compact, alors $(x_n(\cdot))_n$ admet une sous suite qui converge uniformément vers une application $x(\cdot) \in \mathcal{X}$.
Aussi, $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ et $(h_n(\cdot))_n$ sont deux suites bornées dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ on peut alors leurs extraire des sous suites que l'on notera de la même manière et qui convergent faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ respectivement vers deux applications $v(\cdot)$ et $h(\cdot)$ ceci en utilisant le théorème de Dunford, **Théorème** 1.2.6.

D'où, d'après la conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà **Théorème** 1.2.2 on conclut que $x(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot{x}(t) = v(t)$ pour presque tout $t \in I$.
D'autres parts, on a

$$\begin{aligned}\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &\leq \Big|\int_{\theta_n(t)}^{t} \|\dot{x}_n(s)\|\mathrm{d}s\Big| \\ &\leq \zeta|\theta_n(t) - t|,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|x_n(\tilde{\theta}_n(t)) - x(t)\| &\leq \Big| \int_{\tilde{\theta}_n(t)}^{t} \|\dot{x}_n(s)\| \mathrm{d}s \Big| \\ &\leq \zeta |\tilde{\theta}_n(t) - t|,\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{et} \quad \|x_n(\tilde{\theta}_n(t)) - x(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \forall t \in I$$

D'après $(\mathbf{H}'_2)$, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}&d(x(t), C(t, x(t))) - d(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))\\ &\qquad\qquad \leq \|x(t) - x_n(\theta_n(t)\| + a(t) - a(\theta_n(t)) + \lambda\|x(t) - x_n(\tilde{\theta}_n(t)\|\end{aligned}$$

aussi, on a $x_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n(t_{i+1}^n))$ alors, $x_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))$, et comme $a(\cdot)$ est absolument continue, $\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \longrightarrow 0$ et $\|x_n(\tilde{\theta}_n(t)) - x(t)\| \longrightarrow 0$ on conclut par passage à la limite que $d(x(t), C(t, x(t))) = 0$ c'est à dire, $x(t) \in C(t, x(t))$ puisque l'ensemble $C(t, x(t))$ est fermé.

3

<u>*3*^{eme} *Étape*</u>

Il reste à montrer que $x(\cdot)$ est solution de $(\mathcal{P})$.
Sachant que $(h_n(\cdot))_n$ et $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ convergent faiblement dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ vers $h(\cdot)$ et $\dot{x}(\cdot)$ respectivement, donc d'après le lemme de Mazur il existe une suite $(z_n(\cdot))_n$ qui converge fortement vers $\dot{x}(\cdot) - h(\cdot)$ avec $z_n \in co\{\dot{x}_k(\cdot) - h_k(\cdot),\ k \geq n\}$ pour tout $n \geq 1$.
On peut extraire une sous suite de $(z_n(\cdot))_n$ qu'on notera de la même manière et qui converge presque partout vers $\dot{x}(\cdot) - h(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$.
Ce ci implique qu'il existe un ensemble N Lebesgue négligeable $N \subset I$ tel que $\forall t \in I \setminus N$ on ait $(\dot{x}_n(t) - h_n(t))_n$ converge vers $\dot{x}(t) - h(t)$. D'où

$$\dot{x}(t) - h(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{x}_k(t) - h_k(t),\ k \geq n\}. \tag{3.35}$$

Fixons $t \in I \setminus N$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
On a

$$\|\dot{x}_n(t) - h_n(t)\| \leq M(t) + \dot{\beta}(t) \leq 2M(t) + \dot{\beta}(t) \leq \zeta$$

Donc, d'après (3.34) on a

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) \in -\mathrm{N}_{C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))}(x_n(\theta_n(t))) \cap \zeta\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}.$$

Ce qui implique d'après **Remarque** 1.5.2 et **Remarque** 1.7.1

$$\dot{x}_n(t) - h_n(t) \in -\zeta\partial d(x_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))).$$

D'après (3.35) et le théorème de séparation **Théorème** 1.3.2 on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\langle \xi, \dot{x}(t) - h(t)\rangle &\leq \sup_{k\geq n}\langle \xi, \dot{x}_k(t) - h_k(t)\rangle \\ &\leq \sup_{k\geq n} \delta^*(\xi, -\zeta\partial d(x_n(\theta_n(t))), C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} \delta^*(\xi, -\zeta\partial d(x_n(\theta_n(t))), C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t))))\end{aligned}$$

D'où,

$$\langle \xi, \dot{x}(t) - h(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(\xi, -\zeta\partial d(x_n(\theta_n(t))), C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))))$$

ou bien

$$\langle -\xi, -\dot{x}(t) + h(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(-\xi, \zeta\partial d(x_n(\theta_n(t))), C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t))))) \tag{3.36}$$

Comme $x_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), x_n(\tilde{\theta}_n(t)))$, avec $\theta_n(t) \longrightarrow t$ et $\tilde{\theta}_n(t) \longrightarrow t$ et que $x_n(\theta_n(t))$ et $x_n(\tilde{\theta}_n(t)) \longrightarrow x(t) \in C(t, x(t))$, quand $n \longrightarrow \infty$, Aussi d'après (3.26) et car C est sous lisse, la **Proposition** 3.1.1 nous assure que la multi-application $\partial d_C(\cdot)$ est semicontinue supérieurement, alors (3.36) donne

$$\langle -\xi, -\dot{x}(t) + h(t)\rangle \leq \delta^*(-\xi, \zeta\partial d(x(t), C(t, x(t)))).$$

Ce qu'on peut écrire aussi

$$\langle \xi, \dot{x}(t) - h(t)\rangle \leq \delta^*(\xi, -\zeta\partial d(x(t), C(t, x(t)))).$$

De plus, on sait que $\partial d(x(t), C(t, x(t))$ est un convexe fermé pour tout $t \in I \setminus N$ on peut déduire donc

$$\dot{x}(t) - h(t) \in -\zeta\partial d(x(t), C(t, x(t)))) \subset -\mathrm{N}_{C(t,x(t))}(x(t)). \tag{3.37}$$

Enfin,

$$\dot{x}(t) \in -\mathrm{N}_{C(t,x(t))}(x(t)) + h(t). \tag{3.38}$$

4eme Étape

La suite $(u_n(\cdot))_n \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{X}$ est compact, alors on peut lui extraire une sous suite que l'on notera de la même manière et qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathcal{X}$.

Aussi la suite $(h_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $h(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}(I)$ on sait aussi que $h_n(\cdot) \in \Phi(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et que le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé alors $h(\cdot) \in \Phi(u)$.

Montrons que $(x_n(\cdot))_n$ et $(u_n(\cdot))_n$ ont la même limite. C'est à dire $u(\cdot) = x(\cdot)$.
Il faut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - x_n\|_{\mathbf{C}} = 0$.
(En d'autres termes $(u_n - x_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.)
On a pour tout $i \in J$ et tout $t \in I_i^n$, d'après les définitions des applications $x_n(\cdot)$ et $u_n(\cdot)$

$$\begin{aligned}x_n(t) - u_n(t) = x_i^n - x_{i-1}^n \\ &+ \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big) + \int_{t_i^n}^{t} h_i^n(s)\mathrm{d}s, \\ &- \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(x_i^n - x_{i-1}^n).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq \|x_i^n - x_{i-1}^n\| \\ &+ \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}\Big\|x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} h_i^n(s)\mathrm{d}s\Big\| + \int_{t_i^n}^{t} \|h_i^n(s)\|\mathrm{d}s, \\ &+ \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\|x_i^n - x_{i-1}^n\|.\end{aligned}$$

Par suite comme $\dfrac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \leq 1$, alors d'après (3.27)

$$\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \frac{\vartheta(t) - \vartheta(t_i^n)}{\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)}(\vartheta(t_{i+1}^n) - \vartheta(t_i^n)) + \int_{t_i^n}^{t} M(s)\mathrm{d}s.$$

C'est à dire,

$$\|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t} \dot{\vartheta}(s)\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t} M(s)\mathrm{d}s.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - u_n(t)\| &\leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t} (M(s) + \dot{\beta}(s))\mathrm{d}s + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} M(s)\mathrm{d}s \\ &\leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (2M(s) + \dot{\beta}(s))\mathrm{d}s \\ &\leq 2\|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \zeta\mathrm{d}s \\ &\leq 2\frac{T - T_0}{2^n}\zeta + \frac{T - T_0}{2^n}\zeta \\ &= 3\frac{T - T_0}{2^n}\zeta.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in J$ on a

$$\sup_{t \in I_i^n} \|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 3\frac{T - T_0}{2^n}\zeta.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sup_{t \in I} \|x_n(t) - u_n(t)\| \leq 3\frac{T - T_0}{2^n}\zeta.$$

Par suite,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in I} \|x_n(t) - u_n(t)\| = 0$$

D'où, la suite $(x_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers la suite $(u_n(\cdot))_n$, alors

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} u_n \Longrightarrow x(\cdot) = u(\cdot).$$

On conclut alors que $h \in \Phi(x)$ et $h(t) \in F(t, x(t))$. Enfin d'après (3.38) on a

$$\dot{x}(t) \in -\mathrm{N}_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, x(t)).$$

C'est à dire $x(\cdot)$ est solution du problème $(\mathcal{P}')$.
La preuve est ainsi achevée.

$\blacksquare$

Conclusion et perspectives

En conclusion, dans cette thèse nous avons établi plusieurs résultats d'existence pour des processus de la rafles du premier ordre gouvernés par des ensembles non convexes et perturbés par des multi-applications semicontinues mixtes en commençant par des ensembles r-prox-réguliers puis en passant au cas plus général des ensembles sous lisses et à chaque fois nous avons utilisé le théorème de Tolstonogov [45] qui nous assure l'existence de sélection pour des multi-applications semicontinue mixtes et à valeurs non convexes, en signalant que dans le cas r-prox-régulier nous avons utilisé le théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan et un résultat d'équivalence entre les ensembles de solutions de deux inclusions différentielles la première avec contrainte et la deuxième sans contrainte établis par Thibault dans [29] et [43]. Dans le cas sous lisse nous avons utilisé une méthode complètement différente celle de discrétisation de l'intervalle temps, à savoir l'algorithme de rattrapage de Moreau.

Comme perspectives nous allons passer à autre chose, toujours le processus de la rafle non convexe mais cette fois il sera avec des perturbations stochastiques, on va essayer aussi de nous intéresser aux problèmes de Skorohod multivoque. Ce sont ici juste quelques idées que nos avons à l'esprit en ce moment.

Bibliographie

[1] **J. P. Aubin and A. Cellina**, *Differential inclusions Set-Valued maps and Viability theory*. Springer-Verlag, Berlin (1984). *- Cité© 3 fois : pages 1.2, 1.2.1 et 1.3.4 -*

[2] **D. Aussel, A. Daniilidis and L. Thibault**, *Subsmooth sets : functional characterization and related concepts*. Trans. Amer. Math. Soc 375 (2005), 1275-1301. *- Cité© 1 fois : page 1.7 -*

[3] **D. Azzam-Laouir**, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*. Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université Mohamed Seddik Ben Yahia. De Jijel (2008). *- Cité© 2 fois : pages 1.1 et 1.2.1 -*

[4] **D. Azzam-Laouir and S. Izza**, *Existence of solutions for second-order perturbed nonconvex sweeping process*. Computers and Mathematics with applications 62 (2011), 1736-1744. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[5] **D. Azzam-Laouir and S. Izza**, *Existence result for a perturbed nonconvex sweeping process*. Article soumis pour publication *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[6] **D. Azzam-Laouir, S. Izza and L. Thibault**, *Mixed Semicontinuous Perturbation of Nonconvex State-Dependent Sweeping Process*. Set-Valued Var. Anal. 22 (2014), 271-283. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 2.2 -*

[7] **G. Beer**, *Topologies on closed and closed convex sets.* Kluwer Academic Publishers (1993). *- Cité© 1 fois : page 1.3.4 -*

[8] **M. Bounkhel**, *Existence results of nonconvex differential inclusions.* Port. Math. 59 (2002), 283-309. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[9] **M. Bounkhel**, *General existence results for second order nonconvex sweeping process with unbounded perturbations.* Port. Math. 60 (2003), 269-304. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[10] **M. Bounkhel**, *Regularity concepts in nonsmooth analysis, Theory and applications.* Springer Science + Business Media(2012). *- Pas de citations -*

[11] **M. Bounkhel and D. Laouir-Azzam**, *Existence results on the second-order nonconvex sweeping process with perturbations.* Set-Valued Var. Anal. 12 (2004), 291-318. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[12] **M. Bounkhel and L. Thibault**, *On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis.* Nonlinear Analysis. Vol. 48, (2002) pp. 223-246. *- Cité© 2 fois : pages 1.6.4 et 2.1 -*

[13] **M. Bounkhel and L. Thibault**, *Nonconvex sweeping process and prox-reguralit y in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 6 (2005), 359-374. *- Cité© 2 fois : pages 1.6.4 et 2.1 -*

[14] **A. Bouzid et J. Calbux**, *Théorie de la mesure et de l'intégration.* Publication de l'université de Rouen, (1993). *- Cité© 1 fois : page 1.1 -*

[15] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, (1983). *- Cité© 1 fois : page 1.2 -*

[16] **C. Castaing**, *Quelques problèmes d'évolution du second ordre.* Seminaire Analyse Convexe Montpellier (1998), Exposé No. 5. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[17] **C. Castaing, T. X. Duc Ha and M. Valadier**, *Evolution equations governed by the sweeping process.* Set-Valued Var. Anal., 1 (1993), 109-139. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[18] **C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. Yarou**, *Some contributions to nonconvex sweeping process.* J. Nonliear and Convex Analysis 10 (2009), 1-20. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[19] **C. Castaing, A. Salvadori and L. Thibault**, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process.* J. Nonlinear and Convex Analysis 2 (2001), 217-241. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[20] **C. Castaing and M. Valadier**, *Convex analysis and measurable multifunctions.* Lectures Notes in Mathematics 580, Springer-Verlag, Berlin (1977). *- Cité© 2 fois : pages 1.3.2 et 1.3.4 -*

[21] **N. Chemetov and M.D.P. Monteiro Marques**, *Nonconvex quasi-variational differential inclusions.* Set-Valued Var. Anal. 15 (2007), 209-221. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[22] **F. H. Clarke**, *Optimization and nonsmooth analysis.* Wiley-intersience, Wiley and sons. New York (1983). *- Cité© 2 fois : pages 1.4 et 1.5.1 -*

[23] **F. H. Clarke, R. J. Sterne and P. R. Wolenski**, *Proximal smoothness and the lower-C^2 properties.* J. Convex Analysis. Vol 2 (1995) No1/2, pp. 117-144. *- Cité© 4 fois : pages 1.4, 1.5.3, 1.6 et 1.6 -*

[24] **F. H. Clarke and al**, *Nonsmooth analysis and control theory.* Springer-Verlag Nex York, Inc. Wiley and sons. New York (1998) *- Cité© 2 fois : pages 1.4 et 1.5.3 -*

[25] **G. Colombo and V. Goncharov**, *The sweeping process without convexity.* Set-Valued Var. Anal. 7 (1999), 357-374. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[26] **J. Diestel and J.J. Uhl**, *Vector measures*, Mathematical Surveys and Monographs, No 5, AMS. (1977). *- Cité© 3 fois : pages 1.2, 1.2.2 et 1.2.6 -*

[27] **H. Federer**, *Curvature measures*, Transactions of American Mathematical Society 93 (1959), 418-491. *- Cité© 1 fois : page 1.6 -*

[28] **T. Haddad, A. Jourani and L. Thibault,**. *Reduction of sweeping process to unconstrained differential inclusion.* Pacific Journal of Optimization 4 (2008), 493-512. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[29] **T. Haddad and L. Thibault**, *Mixed semicontinuous perturbation of nonconvex sweeping process.* Mathematical Programming, ser. B 123 (2010), 225-240. *- Cité© 3 fois : pages (document), 2.1 et 3.3 -*

[30] **M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques**, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping process*, Topolological Methods in Nonlinear Analysis 12 (1998), 179-191. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[31] **M. Kisielewicz**, *Differential inclusions and optimal control.* Kluwer Academic Publishers, (1991). *- Cité© 3 fois : pages 1.2, 1.3.4 et 1.3.5 -*

[32] **J. Noel**, *Inclusions différentielles d'évolution associées à des ensembles sous-lisses*, Thèse de doctorat, Université Montpellier II (2013). *- Cité© 5 fois : pages (document), 1.7, 1.7, 3.1 et 3.2 -*

[33] **M.D.P. Monteiro Marques**, *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problem, shoks and dry friction.* Birkauser, (1995). *- Cité© 3 fois : pages (document), 1.4 et 1.5.4 -*

[34] **B.S. Mordukhovich**, *Variational Analysis and generalized Differentiation I, Basic Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2006). *- Cité© 3 fois : pages (document), 1.4 et 1.5.4 -*

[35] **B.S. Mordukhovich, Y. Shao**, *Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1996), 1235-1279. *- Cité© 2 fois : pages 1.4 et 1.5.4 -*

[36] **J.J. Moreau**, *Rafle par un convexe variable I*, Séminaire Analyse Convexe Montpellier (1971), Exposé 15. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[37] **J.J. Moreau**, *Rafle par un convexe variable II*, Séminaire Analyse Convexe Montpellier (1972), Exposé 3. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[38] **J.J. Moreau**, *Evolution problem associated with a moving set in a Hilbert space.* Journal of Differential Equations 26 (1977), 347-374. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[39] **R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault**, *Local differentiability of distance functions.* Trans. Amer. math. soc. Vol 352 (2000) No 11, pp. 5232-5249. *- Cité© 1 fois : page 1.6 -*

[40] **R.T. Rockafellar and R.J-B. Wets**, *Variational analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1998). *- Cité© 2 fois : pages 1.3.4 et 1.3.6 -*

[41] **W. Rudin**, *Analyse réelle et complexe.* Hermann, Paris, (1997). *- Cité© 1 fois : page 1.1 -*

[42] **L. Schwartz**, *Analyse III.* Hermann, Paris, (1998). *- Cité© 1 fois : page 1.1 -*

[43] **L. Thibault**, *Sweeping process with regular and nonregular sets.* Journal of Differential Equations 193 (2003), 1-26. *- Cité© 3 fois : pages (document), 2.1 et 3.3 -*

[44] **L. Thibault**, *Regularisation of nonconvex sweeping process in Hilbert space.* Set-Valued Analysis 16 (2008), 319-333. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[45] **A. A. Tolstonogov**, *Solutions of a diferential inclusion with unbouded right-hand side.* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 29 (1998), 212-225, 241 ; translation in Seberian Mathematical Journal 29 (1988), 857-868. *- Cité© 2 fois : pages 2.1 et 3.3 -*

[46] **M. Valadier**, *Quelques problèmes d'entrainement unilatéral en dimension finie*. Séminaire Analyse Convexe Montpellier (1988), Exposé 8. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

ملخص

تتكون هذه الاطروحة من جزأين مهمين في الجزء الاول ندرس نتيجتين حول وجود الحلول لنسق النشل من الرتبة الاولى مضطرب بتابعين متعددي القيم الاول نصف مستمر علويا و الثاني نصف مستمر مختلط و محكم بمجموعات

prox-réguliers.

في الجزء الثاني ندرس نتيجتين حول وجود الحلول لنسق النشل من الرتبة الاولى مضطرب بتابع متعدد القيم نصف مستمر مختلط و محكم هذه المرة بمجموعات نصف ملسة.

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties principales, dans la première nous étudions deux résultats d'existence de solutions pour un processus de la rafle du premier ordre gouverné par des ensembles prox-réguliers et avec deux perturbations l'une semicontinue supérieurement et l'autre semicontinue mixte, ceci en utilisant un théorème de coïncidence entre les ensembles de solutions d'une inclusion différentielle avec contrainte et une inclusion sans contrainte. Dans la seconde partie, on montre deux résultats d'existence de solutions aussi pour un processus de la rafle du premier ordre gouverné cette fois par des ensembles sous lisses mais avec une seule perturbation semicontinue mixte, le premier dépendant du temps et le second du temps et de l'état.

Abstract

This thesis consists of two main parts, in the first one we study two existence results of solutions for a first order sweeping process governed by prox-regular sets and perturbed by two set-valued mappings, one is upper semicontinuous and the second one is mixed semicontinuous, this by using a coincidence theorem between the solutions set of constrained and unconstrained differential inclusion. In the second part, we give a proof of the existence of solutions of two first order sweeping processes governed by subsmooth sets and perturbed by a mixed semicontinuous set-valued mapping, in the first case the sets in the sweeping process depend only on the time and in the second depends on the state and time.