République Algérienne Démocratiques et populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia

N° d'ordre :
Série :

T H È S E

Faculté des Sciences Exactes et de L'informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Science

Spécialité Mathématiques
Option Analyse
présentée et soutenue par

Samira MELIT

Thème

Etude d'une classe de problèmes d'évolution régis par le sous differentiel

soutenue le 09/10/2017

Devant le jury composé de

Président	M. Taher ZERZAIHI	Prof. Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Directeur	Mme. Dalila AZZAM-LAOUIR	Prof. Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examinateurs	M. Aissa AIBECHE	Prof. Univ. Setif 1
Examinateurs	M. Mouffak BENCHOHRA	Prof. Univ. Sidi Bel Abbes
Examinateurs	M. Nadjet ABADA	M.C.A. ENS. Constantine

À la mémoire de mon père..

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné pour terminer cette thèse.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Madame D.Azzam-Laouir, Professeur à l'université de Jijel, pour avoir diriger cette thèse avec une attention soutenue, pour ses grandes qualités scientifiques et humaines, je la remercie pour l'aide précieuse et les conseils qu'elle a su me transmettre avec beaucoup de patience et de pédagogie.

Je remercie plus particulièrement, Monsieur T. Zerzaihi Professeur à l'université de Jijel d'avoir accepter la tâche de président du jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur A. Aibeche, Professeur à l'université de Setif, M. Benchohra, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes et Madame N. Abada MCA à l'E.N.S de Constantine qui ont bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail, qu'ils soient vivement remerciés.

Merci aussi à tous mes enseignants et collègues du département de mathématiques et tous ceux qui m'ont, de loin ou de près, encouragée pour terminer ce travail .

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que je veux remercier profondément tous les membres de ma famille pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de mes études.

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Notations 9

1.2 La distance de Hausdorff 11

1.3 Multi-applications et sélections 12

1.3.1 Mesurabilité des multi-applications 13

1.3.2 Continuité des multi-applications 18

1.4 Points extrémaux 21

1.5 Quelques résultats de convergence 22

1.6 Quelques résultats de compacité 23

2 Existence de solutions pour un problème aux limites du second ordre gouverné par le sous différentiel de Clarke

2.1 Introduction **27**

2.2 Préliminaires **27**

2.2.1 Sous-différentiabilité 27

2.3 Théorème d'existence **32**

3 Solutions extrémales pour un problème aux limites du second ordre gouverné par le sous différentiel

3.1 Introduction **50**

3.2 Préliminaires **50**

3.2.1 Les ensembles décomposables et $\mathbf{L}^p$-sélections 50

3.3 Théorème de relaxation **57**

4 Un Théorème de densité entre l'ensemble des solutions du problème relaxé et problème original

4.1 Introduction **77**

4.2 Théorème de densité **77**

Bibliographie

Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre et l'existence et densité de solutions extrémales.

l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle du premier ordre dans un espace de Hilbert séparable H de la forme

$$(\mathcal{P}_{\mathbf{M}}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + M(t, x(t)), & \text{p.p. sur [0,T]} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

a été étudiée dans la référence [1], où $\partial_c \varphi(.)$ est le sous différentiel de Clarke d'une fonction $\varphi(.)$ propre semi-continue inférieurement inf compacte convexe, $M : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable et à valeurs fermées convexes.

Les auteurs dans [36] ont étudié la même inclusion d'évolution avec $\varphi(.)$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement dans les deux cas où la perturbation $M(.,.)$ est à valeurs convexes ou non convexes.

Les inclusions différentielles d'évolution gouvernées par le sous différentiel d'une fonction propre convexe semicontinue inférieurement apparaissent souvent dans les problèmes de contrôle optimale (Cesari [17], Clarke [18], et Rockafellar [43]), de mécanique (Moreau [40] et Danchev [23]), et de l'économie mathématique (Cornet [19] et Henry [26]).

Le problème d'existence et de densité des solutions extrémales pour le problème de

Cauchy d'une inclusion différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in ext\big(F(t, x(t))\big), & \text{p.p. sur [0,T]} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

a été introduit par Cellina [16], et dans [20] DeBlasi et Pianigiani ont donné un résultat d'existence et densité dans un espace de Banach réel réflexif et F une mutlti-application à valeurs non vides convexes compactes, le cas où F satisfait des hypothèses qui excluent la compacité a été traité dans [21].

En ce qui concerne les inclusions différentielles du second ordre avec les conditions aux limites, une propriété de densité entre l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in \Gamma(t), & \text{p.p. sur [0,1]} \\ x(0) = x_0,\ x(\theta) = x(1), \end{cases}$$

et l'ensemble de solutions de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in ext(\Gamma(t)), & \text{p.p. sur [0,1]} \\ x(0) = x_0,\ x(\theta) = x(1), \end{cases}$$

a été étudié par Azzam-Castaing et Thibault dans [6] dans un espace de Banach séparable avec Γ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable et intégrablement bornée. Aussi, dans [4], Avgerinos et Papageorgiou ont prouvé l'existence de solutions extrémales et on donné une propriété de densité pour le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in ext(F(t, x(t), \dot{x}(t))), & \text{a.e. on } [0, b] \\ x(0) = x(b) = 0, \end{cases}$$

où $F : [0, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ $(b > 0)$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur $[0, b]$ et continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Nous nous renvoyons également le lecteur à [29], [30], [31], [32], [35] et leurs références pour d'autres théorèmes concernant de telles classes d'inclusions différentielles.

La presente thèse est organisée sur un plan structuré par quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux résultats préliminaires et outils de base utilisés pour la démonstration de nos théorèmes principaux.

Dans le chapitre 2, on étudie l'existence de solutions de l'inclusion différentielle du second ordre gouvernée par le sous différentiel de Clarke d'une fonction Lipschitzienne dans un espace de dimension finie de la forme

$$(\mathcal{P}_{\mathbf{F}}) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), & \text{p.p. sur [0,1]} \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

où $F : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs non vides fermées mesurable sur $[0,1]$ et semi-continue mixte au sens de Tolstonogov, c'est à dire pour presque tout $t \in [0,1]$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, tel que $F(t,x,y)$ est convexe $F(t,.,.)$ est semi-continue supérieurement, et lorsque $F(t,x,y)$ est non convexe $F(t,.,.)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de (x,y).

On peut regarder dans la littérature les références [8] et [9] qui traitent des inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites, où interviennent des perturbations semicontinues mixtes au sens de Tolstonogov (voir [9]) et au sens de Fryszkowski-Gorniewicz [24] (voir [8]). Le résultat de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale impactée (voir [10]).

Dans le chapitre 3, nous donnons un théorème d'existence de solutions extrémales pour l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_{ext(F)}) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + ext(F(t,x(t),\dot{x}(t))), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

inspirés par les résultats dans [4] et en suivant les idées de leurs preuves. Ce résultat se base sur le théorème d'existence de solutions pour le problème

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t,x(t),\dot{x}(t)), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

qui est une variante du résultat du deuxième chapitre.

Ici $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, $\partial\varphi$ désigne le sous différentiel de φ au sens de l'analyse convexe et $F : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur $[0,1]$ et Hausdorff-continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Finalement, dans le quatrième chapitre, nous prouvons que l'ensemble de solutions du problème $(\mathcal{P}_{ext(F)})$ est dense dans l'ensemble de solutions du problème $(\mathcal{P}_F)$, par rapport à la topologie de la convergence uniforme.

Les résultats du troisième et quatrième chapitre ont fait l'objet d'un papier soumis pour publication dans une revue internationale impactée [11].

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos Théorèmes principaux. Nous commençons par se fixer les notations utilisées dans ce manuscrit.

Soit X un espace de Banach, X' son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de X. On note par

• $\sigma(X, X')$ la topologie faible sur X.

• $\sigma(X', X)$ la topologie faible* sur X'.

• $\mathbf{B}_X(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\mathbf{B}_X$ la boule unité ouverte de X.

• $\overline{\mathbf{B}}_X(0, r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{\mathbf{B}}_X$ la boule unité fermée de X.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On note par

• $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur l'intervalle I.

• $\lambda(.)$ la mesure de Lebesgue.

• $\mathcal{B}(X)$ la tribu de Borel sur X (Tribu engendrée par la topologie de X).

• $co(S)$ l'enveloppe convexe de $S \subset X$.

• $\overline{co}(S)$ l'enveloppe convexe fermée de $S \subset X$.

• $\mathbf{C}(I, X)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to X$, muni de la norme de la convergence uniforme, i.e.

$$\|u(.)\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|, \text{ pour tout } u(.) \in \mathbf{C}(I, X).$$

• $\mathbf{C}^1(I, X)$ l'espace de Banach des applications continues $u : [0, 1] \to X$, ayant une dérivée continue, muni de la norme

$$\|u(.)\|_{\mathbf{C}^1} = max\left\{ \max_{t \in [0,1]} \|u(t)\|, \max_{t \in [0,1]} \|\dot{u}(t)\| \right\} = max\left\{ \|u(.)\|_{\mathbf{C}}, \|\dot{u}(.)\|_{\mathbf{C}} \right\}.$$

• $\mathbf{L}^0(I, X)$ l'espace des applications mesurables de I à valeurs dans X.

• $\mathbf{L}^p(I, X)$ ($p \in [1, +\infty[$) l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to X$ mesurables et telles que $\displaystyle\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(.)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

• $\mathbf{L}^\infty(I, X)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to X$ essentiellement bornées sur X, muni de la norme

$$\|u(.)\|_\infty = \inf \left\{ c \geq 0 : \ \|u(t)\| \leq c, \ p.p. \text{ sur } I \right\}.$$

• $\mathbf{W}^{2.1}(I, X)$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbf{C}(I, X)$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{L}^1(I, X)$.

• $\delta(., A)$ la fonction indicatrice de l'ensemble $A \subset X$, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in A \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

• La fonction polaire de $\delta(.,A)$ appelée aussi la fonction d'appui de A, est la fonction $\delta^*(.,A)$, définie sur X' par

$$\delta^*(x',A) = \sup_{x\in A}\langle x',x\rangle, \ \ \forall x' \in X'.$$

• $1\!\!\mathrm{I}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A de X, définie par

$$1\!\!\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

1.2 La distance de Hausdorff

Définition 1.2.1 *(voir [5]) Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X,d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,\ B),$$

avec

$$d(a,\ B) = \inf_{b\in B} d(a,\ b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A,B) = max(e(A,B), e(B,A)).$$

Propriétés élémentaires

Soient $A, B, C \subset X$. Alors

1. $e(A,\emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset,B) = 0$,
3. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A,B) \leq e(A,C) + e(C,B)$,

5. $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

6. $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$,

7. $|d(x,A) - d(x,B)| \leq \mathcal{H}(A,B)$, $\forall x \in X$.

Notons par $P_f(X)$, l'ensemble des parties fermées de X, alors $P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.

Rappelons les propriétés suivantes

- *Si (X,d) est un espace métrique complet, alors $(P_f(X),\mathcal{H})$ l'est aussi.*
- *Si X est séparable, l'ensemble des parties compactes de X, noté $P_k(X)$ muni de $\mathcal{H}$ est aussi séparable.*

1.3 Multi-applications et sélections

Pour une étude détaillée des multiapplications et leurs sélections on peut se référer à [5, 15].

Définition 1.3.1 *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multiapplication (ou application multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une application qui associe à chaque élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y. Il ya dans la littérature plusieurs notations mais nous allons adopté la suiante $F : X \rightrightarrows Y$.*

Le domaine, le graphe et l'image de la multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$dom(F) = \Big\{x \in X : \ F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

$$gph(F) = \Big\{(x,y) \in X \times Y : \ x \in dom(F), y \in F(x)\Big\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in dom(F)} F(x).$$

Définition 1.3.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall\, x \in X.$$

1.3.1 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-application on peut se référer à [5, 15].

Définition 1.3.3 *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : \Omega \rightrightarrows X$. On dit que F est Σ-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert V de X*

$$F^{-1}(V) = \{t \in \Omega : \ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.3.1 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multiapplication à valeurs non vides fermées.*

Considérons les propriétés suivantes

(i) $F^{-1}(B) \in \Sigma$ pour tout Borélien B de X.

(ii) $F^{-1}(C) \in \Sigma$ pour tout fermé C de X.

(iii) $F^{-1}(V) \in \Sigma$ pour tout ouvert V de X.

(iv) Il existe une suite $(f_n)_n$ de sélections mesurables de F telle que

$$\forall t \in \Omega, \ F(t) = \overline{\{f_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}}.$$

(v) $\forall\, x \in X$, la fonction distance $d(x, F(\cdot))$ est mesurable.

(vi) Le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

Alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (vi)$.

Si F est à valeurs non vides complètes alors $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.

Si F est à valeurs non vides compactes alors $(iii) \Rightarrow (i)$.

Si X est un espace de Banach séparable et F est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de F est équivalente à la mesurabilité de la fonction d'appui $\delta^*(x', F(\cdot))$ pour tout $x' \in X'$.

Lemme 1.3.2 *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ μ-complète. Soient X un espace métrique complet, $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multiapplication à valeurs non vides fermées, alors $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.*

Proposition 1.3.1 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) F est Σ-mesurable ;

(ii) pour chaque $x \in X$, la fonction

$$\begin{aligned} g_x : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g_x(t) = d(x,\, F(t)), \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Preuve.
On suppose que F est Σ-mesurable. Pour tout $x \in X$, nous avons

$$g_x^{-1}(\mathbf{B}(0,r)) = \{t \in \Omega :\ d(x, F(t)) < r\} = F^{-1}(\mathbf{B}(x,r)).$$

En effet.
• Soit $t \in g_x^{-1}(\mathbf{B}(0,r)) \Leftrightarrow g_x(t) \in \mathbf{B}(0,r) \Leftrightarrow d(x, F(t)) \in \mathbf{B}(0,r)$

$$\Rightarrow \exists y_r \in F(t) :\ d(x, y_r) < r \Leftrightarrow \exists y_r \in F(t) \ \ et \ \ y_r \in \mathbf{B}(x,r)$$

$$\Leftrightarrow F(t) \cap \mathbf{B}(x,r) \neq \emptyset \Leftrightarrow t \in F^{-1}(\mathbf{B}(x,r))$$

i.e., $g_x^{-1}(B(0,r)) \subset F^{-1}(B(x,r))$.
• Soit $t \in F^{-1}(\mathbf{B}(x,r)) \Leftrightarrow F(t) \cap \mathbf{B}(x,r) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists z \in F(t) \ \ et \ \ z \in \mathbf{B}(x,r) \Leftrightarrow \exists z \in F(t) \ \ et \ \ d(z,x) < r \Rightarrow \inf\limits_{z \in F(t)} d(z,x) < r \Rightarrow d(z, F(t)) < r \Rightarrow g_x(t) < r \Rightarrow t \in g_x^{-1}(\mathbf{B}(0,r))$.

Comme F est Σ-mesurable on conclut que $F^{-1}(\mathbf{B}(x,r)) \in \Sigma$, donc $g_x^{-1}(\mathbf{B}(0,r)) \in \Sigma$, alors g_x est Σ-mesurable.
Réciproquement, soit V un ouvert non vide de X, X étant séparable, il existe une suite $(x_n, r_n) \subset X \times \mathbb{Q}$, avec $r_n > 0$, telle que

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}(x_n, r_n).$$

d'où

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= F^{-1}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}(x_n, r_n)\big) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}\big(\mathbf{B}(x_n, r_n)\big) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{t \in \Omega : \ d(x_n, F(t)) < r_n\big\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_x^{-1}\big(\mathbf{B}(0, r_n)\big) \in \Sigma, \end{aligned}$$

donc F est Σ-mesurable. ■

Théorème 1.3.1 ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***

Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable, i.e., il existe une application mesurable $f : \Omega \to X$ telle que $f(t) \in F(t), \forall\, t \in \Omega$.

Théorème 1.3.2 ***(Théorème de Yankov-Von-Neumann)***[27]

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides, telle que $gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, alors $F(.)$ admet une sélection mesurable.

Théorème 1.3.3 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace de Banach. Soient $F : \Omega \times X \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable, $u : \Omega \to X$ une application mesurable. Alors la multi-application $F(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable.*

Preuve.
Soit l'application $f : \Omega \to \Omega \times X$ définie par $f(t) = (t, u(t))$ et soit $V \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, $V = V_1 \times V_2$, avec $V_1 \in \Sigma$ et $V_2 \in \mathcal{B}(X)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{t \in \Omega : f(t) \in V\} \\ &= \{t \in \Omega : (t, u(t)) \in V_1 \times V_2\} \\ &= \{t \in \Omega : \ t \in V_1 \ \text{ et } \ u(t) \in V_2\} \\ &= \{t \in \Omega : t \in V_1\} \cap \{t \in \Omega : u(t) \in V_2\} \\ &= V_1 \cap u^{-1}(V_2) \in \Sigma \end{aligned}$$

puisque $V_1 \in \Sigma$ et u est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable, par conséquent f est mesurable.
Considérons maintenant la multi-application $H = F(., u(.)) : \Omega \rightrightarrows X$ définie par

$$H(t) = F(t, u(t)) = F(f(t)).$$

Soit W un ouvert de X, on a

$$\begin{aligned} H^{-1}(W) &= \{t \in \Omega : H(t) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in \Omega : F(t, u(t)) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in \Omega : F(f(t)) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in \Omega : f(t) \in F^{-1}(W)\} \\ &= f^{-1}(F^{-1}(W)), \end{aligned}$$

comme F est mesurable alors $F^{-1}(W) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ et puisque f est mesurable on obtient $f^{-1}(F^{-1}(W)) \in \Sigma$, c'est à dire, $H^{-1}(W) \in \Sigma$. Par conséquent $F(., u(.))$ est Σ-mesurable.
■

Définition 1.3.4 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X et Y deux espaces métriques.*

Soit $\varphi : \Omega \times X \to Y$. On dit que φ est une application de Carathéodory si

$$\begin{aligned} \varphi_x : \Omega &\to Y \\ t &\mapsto \varphi_x(t) = \varphi(t, x) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable pour chaque $x \in X$, fixé et l'application

$$\begin{aligned} \varphi_t : X &\to Y \\ x &\mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x) \end{aligned}$$

est continue sur X pour chaque $t \in \Omega$, fixé.

Lemme 1.3.3 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets et soit $\varphi : \Omega \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors φ est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable.*

Lemme 1.3.4 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets. Soit $\varphi : \Omega \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors pour toute application mesurable $f : \Omega \to X$ l'application $t \mapsto \varphi(t, f(t))$ est mesurable.*

Preuve.
Soit $g : \Omega \to \Omega \times X$ l'application définie par $g(t) = (t, f(t))$ et soit $V \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, $V = V_1 \times V_2$, avec $V_1 \in \Sigma$ et $V_2 \in \mathcal{B}(X)$. Donc

$$\begin{aligned} g^{-1}(V) &= \{t \in \Omega : \ g(t) \in V\} \\ &= \{t \in \Omega : \ (t, f(t)) \in V_1 \times V_2\} \\ &= \{t \in \Omega : \ t \in V_1 \ \text{ et } \ f(t) \in V_2\} \\ &= \{t \in \Omega : \ t \in V_1\} \cap \{t \in \Omega : \ f(t) \in V_2\} \\ &= V_1 \cap f^{-1}(V_2) \in \Sigma, \end{aligned}$$

car $V_1 \in \Sigma$ et f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable. Donc g est mesurable.
Considérons maintenant l'application $h(.) = \varphi(., f(.)) : \Omega \to Y$ définie par

$$h(t) = \varphi(t, f(t)) = \varphi(g(t)).$$

Soit W un ouvert de Y, on a

$$\begin{aligned} h^{-1}(W) &= \{t \in \Omega : \ h(t) \in W\} \\ &= \{t \in \Omega : \ \varphi(t, f(t)) \in W\} \\ &= \{t \in \Omega : \ \varphi(g(t)) \in W\} \\ &= \{t \in \Omega : \ g(t) \in \varphi^{-1}(W)\} \\ &= g^{-1}(\varphi^{-1}(W)), \end{aligned}$$

comme φ est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable alors $\varphi^{-1}(W) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, et puisque g est mesurable on obtient $g^{-1}(\varphi^{-1}(W)) \in \Sigma$, c'est à dire, $h^{-1}(W) \in \Sigma$. Par conséquent $\varphi(., f(.))$ est Σ-mesurable. ■

Définition 1.3.5 *Soit (X, Σ, μ) un espase mesuré, on dit que μ est non atomique si pour tout ensemble mesurable A, avec $\mu(A) > 0$, il existe un sous ensemble mesurable non vide $B \subset A$, tel que $\mu(A) > \mu(B)$.*

Exemples 1.3.1

1. *La mesure de Lebesgue est une mesure non atomique.*

2. *La mesure de Dirac admet des atomes.*

Définition 1.3.6 *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et X un espace de Banach séparable. Soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F scalairement mesurable si pour tout $x' \in X'$, l'application $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ est mesurable.*

Proposition 1.3.2 *([27]) Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace de Banach séparable. Si $F : \Omega \rightrightarrows X$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors $F(.)$ est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Proposition 1.3.3 *([27]) Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace de Banach séparable. Si $F_1, F_2 : \Omega \rightrightarrows X$ sont deux multi-applications à valeurs non vides convexes faiblement compactes et scalairement mesurable, alors $t \mapsto (F_1 \cap F_2)(t)$ est scalairement mesurable.*

1.3.2 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris des références [2, 5, 15].

Définition 1.3.7 *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(V_{x_0}) \subset U$.*

On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.

2. *On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout*

ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V_{x_0}$.

On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.

Définition 1.3.8 *On dit que F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0 et F est continue sur X si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i sur X.*

Proposition 1.3.4 *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est semicontinue supérieurement si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) := \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermée pour tout sous ensemble fermé C de Y, et elle est semicontinue inférieurement si et seulement si pour tout sous ensemble ouvert G de Y, $F^{-1}(G)$ est aussi ouvert dans X.*

Théorème 1.3.4 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 1.3.5 *Soient X un espace de Banach, Y un espace de Banach compact. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Exemples 1.3.2

1. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1] & si \quad x = 0 \\ \{0\} & si \quad x \neq 0, \end{cases}$$

alors F est s.c.s.

2. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1] & si \quad x \neq 0. \\ \{0\} & si \quad x = 0, \end{cases}$$

alors F est s.c.i.

Définition 1.3.9 *Soient X,Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est $\mathcal{H}$-continue (continue par rapport à la distance de Hausdorff) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ convergeant vers x_0 nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(x_n),\, F(x_0)) = 0.$$

Dans la suite nous enonçons un théorème de fermeture pour les multi-applications s.c.s qui nous sera d'une grande utilité dans les preuves de nos résultats et nous renvoyons le lecteur à la référence [15] pour sa démonstration et d'autres détails.

Théorème 1.3.5 *Soient Y un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T] \times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans Y et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\Phi(t,.)$ est s.c.s.*

Soinent $(x_n(.)), x(.)$ des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X et $(y_n(.)), y(.)$ des applications intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans Y.

Supposons que

(a) $\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t)$, *p.p. sur* $[0,T]$,

(b) (y_n) *converge vers* y $\sigma(\mathbf{L}^1([0,T],Y), \mathbf{L}^\infty([0,T],Y'))$,

(c) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$, *p.p. sur* $[0,T]$.

Alors $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, *p.p. sur* $[0,T]$.

On donne quelques théorèmes de point fixe qui nous seront utiles dans la démonstrations de nos résultas d'existence.

Théorème 1.3.6 ***(Théorème du point fixe de Schauder)***

Soient X un espace vectoriel normé, K un sous ensemble non vide convexe compact de X et $f : K \to K$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans K.

Théorème 1.3.7 ***(Théorème de Kakutani)****(voir [34])*

Soient X un espace de Banach, K un sous ensemble non vide compact convexe de X, et

soit $F : K \rightrightarrows K$ une multi-application s.c.s à valeurs convexes fermées. Alors F admet un point fixe, c'est à dire il existe $x \in K$, tel que $x \in F(x)$.

Définition 1.3.10 *(voir [27]) On dit qu'un espace topologique X est un espace Polonais s'il est séparable et métrisable par une métrique complète.*

1.4 Points extrémaux

Dans ce qui suit, nous présentons quelques définitions et résultats sur les points extrémaux (voir [37]).

Définition 1.4.1 *Soit X un espace vectoriel et $K \subset X$. On dit que $x \in K$ est un point extrémal à K si $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $x_1, x_2 \in X$ et $\alpha \in]0,1[$, alors $x_1 = x_2$.*

Si K est convexe, un point $x \in K$ est extrémal à K si x ne puisse être intérieur à un segment de droite inclus dans K.

On note par ext(K), l'ensemble des points extrémaux à K.

Exemples 1.4.1

1. *Si K est un cercle de $\mathbb{R}^2$, alors ext(K) est la circonférence de ce cercle.*
2. *Si K est un rectangle de $\mathbb{R}^2$, alors ext(K) est l'ensemble des quatre sommets de ce rectangle.*
3. *Soit K un convexe de $\mathbb{R}^d$, telle que*

$$K = \left\{ x \in (\mathbb{R}^+)^d : \ \|x\| = \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \right\},$$

alors, les points extrémaux de K sont les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_d$ de la base canonique.

Théorème 1.4.1 ***(Théorème de Krein-Milman)***

Soit X un espace topologique localement convexe. Alors tout ensemble convexe compact K de X admet au moins un point extrémal, i.e., $ext(K) \neq \emptyset$. De plus K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

1.5 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [22].

Théorème 1.5.1 ***(Théorème de la convergence de Lebesgue)***.

Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et X un espace de Banach, soit $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs dans X, si la suite (f_n) vérifie

(i) $f_n \to f$ *μ.p.p sur Ω,*

(ii) il existe une fonction positive $g \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ μ.p.p.

Alors $f_n \to f$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$. En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu.$$

Théorème 1.5.2 ***(Réciproque de la convergence de Lebesgue)***.

Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et X un espace de Banach, soit $1 \leq p < +\infty$. Si $f_n \to f$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$ alors il existe (f_{n_k}) une suite extraite de (f_n) et une fonction positive $g \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

(i) $f_{n_k} \to f$ *μ.p.p,*

(ii) pour tout k, $\|f_{n_k}\| \leq g$ μ.p.p.

Théorème 1.5.3 *Soit φ une fonction à valeurs réelles, définie sur $V_s \times (E \backslash A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ et $A \subset E$ est un sous ensemble μ-néqligeable. Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \mapsto \varphi(t, s)$ est μ-intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E \backslash A)$, la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité*

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) \right| \leq g(s),$$

où g est μ-intégrable est indépendante de t, alors la fonction

$$t \mapsto \int \varphi(t, x) d\mu(x),$$

est dérivable au point s et on a

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(s, x) d\mu = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, x) d\mu(x).$$

1.6 Quelques résultats de compacité

Théorème 1.6.1 ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***.

Soient X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathbf{C}(X, Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et pour tout $x \in X$, $H(x)$ est relativement compact, avec

$$H(x) = \{f(x) : \ f \in H\}.$$

Théorème 1.6.2 ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)****(voir[13])*

Soit X un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de X' est compacte pour la topologie faible$^*\sigma(X', X)$.

Théorème 1.6.3 *(**Théorème de Banch-Mazur**)(voir [34])*

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'éléments de X convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite $(z_i)_i$ dans X telle que chaque z_i est une combinaison convexe des éléments de la suite $(x_n)_n$ et $(z_i)_i$ converge fortement vers x.

Théorème 1.6.4 *(**Théorème de Mazur**)(voir [34])*

Soient X un espace de Banach et A un sous ensemble compact de X. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Le Théorème ci dessous caractérise l'enveloppe convexe fermée d'un sous ensemble d'un espace vectoriel normé X.

Théorème 1.6.5 *(voir [3]) Soit X un espace normé, soit K un ensemble non vide de X. Alors*

$$\overline{co}(K) = \Big\{x \in X : \forall x' \in X',\ \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', K)\Big\}.$$

Lemme 1.6.1 *(voir [15]) Soit X un espace de Banach, et C un ensemble fermé convexe de X, alors*

$$d(x, C) = \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{X'}} \Big(\langle x', x\rangle - \delta^*(x', C)\Big).$$

Théorème 1.6.6 *(voir [13]) Soit X un espace de Banach et C un ensemble convexe de X, alors C est faiblement fermé si et selement s'il est fortement fermé.*

Nous terminons cette section par les deux Lemmes suivants qui sont des variantes du Lemme de Gronwall.

Lemme 1.6.2 *(voir [14]) Soit $m \in \mathbf{L}^1([0, T], \mathbb{R})$ tel que $m \geq 0$ p.p. sur $]0, T[$ et soit a une constante positive. Soit ϕ une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad \textit{pour tout } t \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)ds, \ \ \forall\ t \in [0, T].$$

Lemme 1.6.3 *(voir [41]) Soient u_0 un réel positif et u, f, g des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ telles que*

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t f(s)u(s)ds + \int_0^t f(s)\left(\int_0^s g(\tau)u(\tau)d\tau\right)ds, \ \forall\, t \in [0, T],$$

alors

$$u(t) \leq u_0\left[1 + \int_0^t f(s)exp\left(\int_0^s (f(\tau) + g(\tau))d\tau\right)ds\right], \ \forall\, t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Existence de solutions pour un problème aux limites du second ordre gouverné par le sous différentiel de Clarke

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne un théorème d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions au limites de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne, $\partial_c\varphi$ désigne le sous différentiel au sens de Clarke et $F : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs non vides fermées, mesurable sur $[0,1]$ et semicontinue mixte au sens de Tolstonogov.

Dans l'article [7], les auteurs ont étudié le problème

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)) + H(t, x(t), \dot{x}(t)), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(\theta) = 0, x(\theta) = x(1), \end{cases}$$

avec $F : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application semicontinue supérieurement et $H : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application semicontinue mixte, pour cela ils ont appliqué le Théorème de Tolstonogov sur les deux multi-applications pour construire la multi-application à laquelle ils appliquent le Théorème du point fixe qui leur a permis de conclure l'existence de solutions.

Dans notre travail, nous avons appliqué le Théorème de Tolstonogov sur la multi-application H, et nous avons construit un autre type de multi-application à laquelle nous avons appliqué le Théorème du point fixe, cette méthode nous a permis d'affaiblir l'hypothèse supposée sur H dans [7].

2.2 Préliminaires

2.2.1 Sous-différentiabilité

Dans ce chapitre, on note $I = [0,1]$.

Cette sous section est consacrée aux définitions et quelques résultats sur la sous différentiabilité au sens de l'analyse convexe et au sens de Clarke.

On sait que lorsque une fonction réelle est différentiable on peut décrire sa variation locale au point x_0 qui est donnée par

$$df(x_0;\varepsilon) = \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Pour les fonctions convexes à valeurs réelles non différentiables, le sous différentiel (s'il existe) est le substitut qui décrit leurs variations locales. Il existe diverses extensions de sous différentiabilité aux fonctions non nécessairement convexes. Dans notre étude on va introduire l'une d'entre elles, qui est la sous différentiabilité des fonctions localement Lipschitziennes appelée sous différentiabilité au sens de Clarke.

Définition 2.2.1 *Soit X un espace topologique réel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on appelle domaine effectif de f qu'on note $D(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \Big\{ x \in X : \ f(x) < +\infty \Big\}.$$

Définition 2.2.2 *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in D(f)$, et pour tout $\lambda \in I$, nous avons*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Proposition 2.2.1 *(voir [42]) Soit f une fonction convexe sur un convexe ouvert non vide D de $\mathbb{R}^d$. Alors f est continue en tout point de D.*

Définition 2.2.3 *(voir [15]) Soient X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0 (au sens de l'analyse convexe), noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \Big\{ x' \in X' : \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \forall x \in X \Big\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous gradient de f au point x_0, on dit que f est sous différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Exemple 2.2.1 *Soit f la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = |x|, \end{aligned}$$

on sait que f n'est pas différentiable au point 0. Par contre elle est sous différentiable en 0. En effet,

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y(x-0) \leq f(x) - f(0), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq |x| - |0|, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq |x|, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq x, \ \forall\, x > 0 \Big\} \bigcap \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ yx \leq -x, \ \forall\, x < 0 \Big\} \\ &= \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y \leq 1 \Big\} \bigcap \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y \geq -1 \Big\} \\ &= \ ]-\infty, 1] \cap [-1, +\infty[\\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1 *(voir [27]) Soient X un espace de Banach, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et continue au point $x_0 \in X$, alors $\partial f(x_0)$ est non vide convexe faiblement*compact dans X'.*

Proposition 2.2.2 *(voir [42]) Soit f une fonction continue sur un sous ensemble convexe ouvert D de l'espace de Banach X, alors la multi-application $x \mapsto \partial f(x)$ est s.c.s sur D.*

Définition 2.2.4 *Soit X un espace de Banach, Y un sous ensemble de X. On dit que la fonction $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz sur Y si pour un certain scalaire positif L on a*

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\|,$$

pour tous $y, y' \in Y$.

On dit que f *est localement Lipschitzienne (de raport* L*), au voisinage de* x *si pour un certain* $\varepsilon > 0$, f *vérifie la condition de Lipschitz (de rapport* L*) sur l'ensemble* $x + \varepsilon \mathbf{B}_X$ *(c'est à dire dans un* ε*-voisinage de* x*).*

Définition 2.2.5 *Soient* X *un espace de Banach et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné* $x_0 \in X$, *et soit* v *un vecteur dans* X. *La dérivée directionelle généralisée de* f *au point* x_0 *dans la direction* v, *notée* $f^\circ(x_0, v)$ *est définie par*

$$f^\circ(x_0, v) = \limsup_{y \to x_0 \ t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

où y *est un vecteur dans* X *et* t *est un scalaire positif.*

Proposition 2.2.3 *(voir [18]) Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne au voisinage de* $x \in X$ *de rapport* $L > 0$. *Alors*

(**a**) *La fonction* $v \mapsto f^\circ(x, v)$ *est finie, positivement homogène, sous-additive et satisfait*

$$|f^\circ(x, v)| \leq L\|v\|;$$

(**b**) *la fonction* $(x, v) \mapsto f^\circ(x, v)$ *est semi-continue supérieurement comme fonction de* (x, v), *et comme fonction de* v *seulement elle est Lipschitzienne sur* X *de rapport* L *;*

(**c**) $f^\circ(x, -v) = (-f)^\circ(x, v)$.

Définition 2.2.6 *(voir [18]) Soit* X *un espace de Banach. Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné* x *et soit* v *un vecteur dans* X. *Le sous différentiel de Clarke de* f *au point* x, *noté* $\partial_c f(x)$ *est le sous ensemble de* X', *donné par*

$$\partial_c f(x) = \left\{ \xi \in X' : \ \langle \xi, v \rangle \leq f^\circ(x, v), \ \text{ pour tout } v \in X \right\}.$$

On note par $\|\xi\|_*$ *la norme de* ξ *dans* X', *donnée par*

$$\|\xi\|_* = \sup \left\{ \langle \xi, v \rangle : \ v \in X, \|v\| \leq 1 \right\}.$$

Exemple 2.2.2 *Soit f la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = max\ (0, x), \end{aligned}$$

qui est une fonction Lipschitzienne et donc

$$\begin{aligned} f^{\circ}(0, v) &= \lim_{y \to 0} \sup_{t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \\ &= \lim_{y \to 0} \sup_{t \downarrow 0} \frac{max(0, y + tv) - max\ (0, y)}{t} \\ &= \begin{cases} v & si\ v \geq 0 \\ 0 & si\ v \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \partial_c f(0) &= \Big\{ \xi \in \mathbb{R} :\ \langle \xi, v \rangle \leq f^{\circ}(0, v),\ \ pour\ tout\, v \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ \xi \in \mathbb{R} :\ \xi v \leq v,\ \forall v > 0 \Big\} \bigcap \Big\{ \xi \in \mathbb{R} :\ \xi v \leq 0,\ \forall v \leq 0 \Big\} \\ &= \Big\{ \xi \in \mathbb{R} :\ \xi \leq 1 \Big\} \bigcap \Big\{ \xi \in \mathbb{R} :\ \xi \geq 0 \Big\} \\ &= \ ]-\infty, 1] \cap [0, +\infty[\\ &= [0, 1]. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.4 *(voit [18]) Soit f une fonction Lipschtzienne de rapport L au voisinage de x. Alors*

(**a**) *$\partial_c f(x)$ est un sous ensemble non vide, convexe et faiblement*compact de X' et $\|\xi\|_* \leq L$ pour tout ξ dans $\partial_c f(x)$;*

(**b**) *pour tout v dans X, on a*

$$f^{\circ}(x, v) = \max \Big\{ \langle \xi, v \rangle :\ \xi \in \partial_c f(x) \Big\}.$$

(**c**) *Soient* $(x_n)_n$ *et* $(x'_n)_n$ *deux suites respectivement dans* X *et* X' *telles que* $x'_n \in \partial_c f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $(x_n)_n$ *converge vers* x *et* $(x'_n)_n$ *converge faiblement** *vers* x', *alors* $x' \in \partial_c f(x)$.

Lemme 2.2.1 *(voire [44]) Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction localement Lipschitzienne sur* X. *Alors le sous différentiel de Clarke* $\partial_c f : (X, \|.\|_X) \rightrightarrows (X', \sigma(X', X))$ *est une multi-application semi-continue supérieurement sur* X.

Proposition 2.2.5 *(voir [18]) Soit* f *une fonction convexe localement Lipschitzienne au voisinage de* x, *alors* $\partial_c f(x)$ *coincide avec* $\partial f(x)$ *et* $f^\circ(x, v)$ *coincide avec la dérivée directionnelle* $f'(x, v)$, *pour tout* v.

2.3 Théorème d'existence

On commence par un Lemme préliminaire où nous démontrons quelques propriétés d'une fonction de Green, qui est en fait l'ingrédient essentiel dans la preuve de l'existence de solutions de tels problèmes.

La fonction de Green a été utilisée par plusieurs auteurs pour résoudre des équations et des inclusions différentielles du second ordre, nous citons par exemple [6, 7, 25, 38, 39, 33, 28].

Lemme 2.3.1 *Soient* X *un espace de Banach séparable,* $G : I \times I \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-1)s & si \quad 0 \le s \le t, \\ t(s-1) & si \quad t \le s \le 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Alors, on a les résultats suivants

(1) *si* $u \in \mathbf{W}^{2,1}(I, X)$ *avec* $u(0) = u(1) = 0$, *alors*

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)\ddot{u}(s)ds, \forall t \in I. \tag{2.2}$$

(2) *$G(.,s)$ est dérivable sur I pour tout $s \in I$, sauf sur la diagonale et sa dérivée est donnée par*

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} s & si \quad 0 \leq s < t, \\ (s-1) & si \quad t < s \leq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

(3) *$G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient*

$$\sup_{t,s\in I}|G(t,s)| \leq 1, \quad \sup_{\substack{t,s\in I \\ t\neq s}}\left|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\right| \leq 1. \tag{2.4}$$

(4) *Soit $f \in \mathbf{L}^1(I,X)$ et soit $u_f(.) : I \to X$ l'application définie par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall\, t \in I, \tag{2.5}$$

alors

$$u_f(0) = u_f(1) = 0.$$

De plus, la fonction $u_f(.)$ est dérivable et sa dérivée $\dot{u}_f(.)$ vérifie

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_f(t+h) - u_f(t)}{h} = \dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds. \tag{2.6}$$

(5) *La fonction $\dot{u}_f(.)$ est scalairement dérivable, i.e., pour tout $x' \in X'$, la fonction scalaire $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ est dérivable et sa dérivée faible $\ddot{u}_f(.)$ est égale à $f(.)$ presque partout,*

$$\ddot{u}_f(.) = f(.) \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.7}$$

Preuve.

(1) Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds &= \int_0^t G(t,s)\ddot{u}(s)ds + \int_t^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds \\ &= (t-1)\int_0^t s\ddot{u}(s)ds + t\int_t^1 (s-1)\ddot{u}(s)ds \\ &= (t-1)\left(\left[s\dot{u}(s)\right]_0^t - \int_0^t \dot{u}(s)ds\right) + t\left(\left[(s-1)\dot{u}(s)\right]_t^1 - \int_t^1 \dot{u}(s)ds\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (t-1)\Big(t\dot{u}(t) - \big[u(s)\big]_0^t\Big) + t\Big(-(t-1)\dot{u}(t) - \big[u(s)\big]_t^1\Big)\\
&= (t-1)\Big(t\dot{u}(t) - (u(t)-u(0))\Big) + t\Big((1-t)\dot{u}(t) - (u(1)-u(t))\Big)\\
&= u(t),
\end{aligned}$$

et donc

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds,\ \forall t \in I.$$

(2) Pour tout $s \in I$, fixé et pour tout $h > 0$ assez petit,

$$\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h} = \begin{cases} \dfrac{(t+h-1)s-(t-1)s}{h} & \text{si} \quad 0 \le s \le t+h \le 1 \\ \dfrac{(t+h)(s-1)-t(s-1)}{h} & \text{si} \quad 0 \le t+h \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s & \text{si} \quad 0 \le s \le t+h \le 1 \\ s-1 & \text{si} \quad 0 \le t+h \le s \le 1 \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h} = \begin{cases} s & \text{si} \quad 0 \le s < t \le 1 \\ s-1 & \text{si} \quad 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

(3) D'aprés la définition de $G(.,.)$, pour $0 \le s \le t \le 1$

$$|G(t,s)| = |(t-1)s| = s(1-t) \le 1,$$

et pour $0 \le t \le s \le 1$, on a

$$|G(t,s)| = |t(s-1)| = t(1-s) \le 1,$$

on conclut que $\sup\limits_{t,s\in I}|G(t,s)| \le 1$.

D'après la relation (2.3), il est clair que $\sup\limits_{t,s\in I}\left|\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\right| \le 1$.

(4) Soit $f \in \mathbf{L}^1(I,X)$ et $u_f : I \to X$ définie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \ \forall t \in I.$$

D'aprés la définition de $G(.,.)$, on a $G(0,s) = G(1,s) = 0$, donc

$$u_f(0) = u_f(1) = 0.$$

Soit $(t_n) \subset I$ telle que $t_n \to t$ quand $n \to +\infty$.

$$u_f(t_n) = \int_0^1 G(t_n,s)f(s)ds$$

et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|G(t_n, s)| \leq 1$, pour tout $s \in I$

$$G(t_n, s) = \begin{cases} (t_n - 1)s & \text{si} \quad 0 \leq s \leq t_n \\ t_n(s-1) & \text{si} \quad t_n \leq s \leq 1, \end{cases}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} G(t_n, s) = \begin{cases} (t-1)s & \text{si} \quad 0 \leq s \leq t \\ t(s-1) & \text{si} \quad t \leq s \leq 1 \end{cases} = G(t, s).$$

Par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_f(t_n) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t_n, s) f(s) ds \\ &= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} G(t_n, s) f(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) f(s) ds \\ &= u_f(t), \end{aligned}$$

donc $t \mapsto u_f(t)$ est continue sur I.
On veut montrer maintenant que u_f est dérivable.
En effet,
(a) la fonction $G(t, .)f(.)$ est Lebesgue intégrable pour tout $t \in I$,
(b) d'après (2), la fonction $G(., s)$ est dérivable pour tout $s \in I$, fixé, et donc la fonction $G(., s)f(s)$ l'est aussi.
(c) $\left\| \dfrac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s) \right\| \leq \left| \dfrac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| \|f(s)\| \leq \|f(s)\|$, pour tout $(t, s) \in I \times I$.
Les propriétés (a), (b) et (c), nous permettent alors de conclure, d'aprés le Théorème 1.5.3, que u_f est dérivable et que sa dérivée $\dot{u}_f$ est donnée par

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s) ds, \quad \forall t \in I.$$

(5) les relations (2.3) et (2.6), nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \dot{u}_f(t) &= \int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s) ds + \int_t^1 \frac{\partial G}{\partial t} f(s) ds \\ &= \int_0^t s f(s) ds + \int_t^1 (s-1) f(s) ds, \end{aligned}$$

d'où pour tout $x' \in X'$, et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\Big\langle x', \dot{u}_f(t)\Big\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big\langle x', \int_0^t sf(s)ds + \int_t^1 (s-1)f(s)ds\Big\rangle \\
&= \Big\langle x', \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t sf(s)ds + \frac{\partial}{\partial t}\int_t^1 (s-1)f(s)ds\Big\rangle \\
&= \Big\langle x', tf(t) + (1-t)f(t)\Big\rangle \\
&= \langle x', f(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\ddot{u}_f(t) = f(t) \text{ p.p. } t \in I.$$

■

Proposition 2.3.1 *Soit X un espace de Banach séparable et soit $f : I \to X$ une application continue (resp. dans $\mathbf{L}^1(I, X)$). Alors l'application*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall\, t \in I,$$

est la solution unique dans $\mathbf{C}^2(I, X)$ (resp. dans $\mathbf{W}^{2,1}(I, X)$) du problème

$$(\mathcal{P}_f)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t), \quad \text{p.p. sur } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Preuve.
Nous avons

$$\begin{aligned}
u_f(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \\
&= (t-1)\int_0^t sf(s)ds + t\int_t^1 (s-1)f(s)ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\dot{u}_f(t) &= \int_0^t sf(s)ds + t(t-1)f(t) + \int_t^1 (s-1)f(s)ds + t(1-t)f(t) \\
&= \int_0^t sf(s)ds + \int_t^1 (s-1)f(s)ds,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \ddot{u}_f(t) &= tf(t) - (t-1)f(t) \\ &= f(t), \end{aligned}$$

avec $u_f(0) = u_f(1) = 0$.
Par conséquent u_f est une solution de $(\mathcal{P}_f)$.
Pour l'unicité, soient u_f, v_f deux solutions de $(\mathcal{P}_f)$. Alors,

$$\ddot{u}_f(t) = \ddot{v}_f(t) = f(t), \ \forall t \in I.$$

D'après la relation (2.2) du Lemme 2.3.1,

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_f(s)ds$$

et

$$v_f(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}_f(s)ds,$$

donc

$$u_f(t) = v_f(t), \ \forall t \in I,$$

par suite $u_f = v_f$, d'où l'unicité de cette solution. ■

Pour la démonstration de notre théorème, nous avons aussi besoin du résultat suivant dans [47] et [7], et qui exprime l'existence d'une multi-sélection s.c.s pour les multi-applications semicontinues mixte. Cette notion de semicontinuité mixte a été introduite par Tolstonogov [47].

Théorème 2.3.1 *Soit $M : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides fermées vérifiant les hypothèses suivants*

(i) M est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable ;

(ii) pour tout $t \in I$, en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que $M(t,x,y)$ est convexe $M(t,.,.)$ est semi-continue supérieurement, et lorsque $M(t,x,y)$ est non convexe, $M(t,.,.)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de (x,y) ;

(iii) il existe une fonction positive de Carathéodory $f : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}$ qui est intégrablement bornée et telle que

$$M(t,x,y) \cap \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}(0, f(t,x,y)) \neq \emptyset,$$

pour tout $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ *et tout ensemble compact* $\mathcal{K} \subset \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$, *il existe une multi-application* $\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ *à valeurs non vides fermées convexes et de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout* $x \in \mathcal{K}$ *et* $\phi \in \Phi(x)$, *pour presque tout* $t \in I$, *nous avons*

$$\phi(t) \in M(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

$$\|\phi(t)\| \leq f(t, x(t), \dot{x}(t)) + \varepsilon.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.3.2 *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne de rapport* L *et* $F : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ *une muti-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses suivantes*

(H_1) F *est* $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*-mesurable ;*

(H_2) *pour tout* $t \in I$, *en chaque point* $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *tel que* $F(t, x, y)$ *est convexe* $F(t, ., .)$ *est semi-continue supérieurement, et lorsque* $F(t, x, y)$ *est non convexe,* $F(t, ., .)$ *est semi-continue inférieurement sur un voisinage de* (x, y) *;*

(H_3) *il existe une fonction* $\rho(.)$ *positive Lebesgue intégrable définie sur* I *telle que*

$$F(t, x, y) \cap \rho(t)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \neq \emptyset,$$

pour chaque $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Alors, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial_c \varphi(x(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), & \text{p.p. sur } I, \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution $x(.) \in \mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$.

Preuve.

l'idée de la démonstration, est d'essayer de construire une multi-application qui vérifie les hypothèses qui vont nous permettre de lui appliquer le Théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.3.7), ce point fixe ne serait que la solution de notre inclusion différentielle considérée.

Etape 1.

Par la Proposition 2.2.4, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\partial_c \varphi(x) \quad \subset \quad L\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}. \tag{2.8}$$

Pour tout $t \in I$, on pose $m(t) = L + \rho(t) + \dfrac{1}{2}$, évidemment $m \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$.
Considérons les ensembles

$$\mathcal{D} = \left\{ h(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d) : \|h(t)\| \leq m(t),\ p.p.\ t \in I \right\},$$

et

$$\mathcal{K} = \left\{ x_f(.) \in \mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d) :\ x_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds,\ \forall\, t \in I,\ f \in \mathcal{D} \right\}.$$

Il est clair que $\mathcal{D}$ est un sous ensemble convexe, $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.
En effet. Soient $\lambda \in I$, $h_1(.), h_2(.) \in \mathcal{D}$, nous avons $\lambda h_1(.) + (1-\lambda) h_2(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ et on a

$$\begin{aligned} \|\lambda h_1(t) + (1-\lambda) h_2(t)\| &\leq \lambda \|h_1(t)\| + (1-\lambda)\|h_2(t)\| \\ &\leq \lambda m(t) + (1-\lambda) m(t) \\ &= m(t), \end{aligned}$$

d'où la convexité de $\mathcal{D}$.

Maintenant, soit $(h_n(.))_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$. Pour tout $t \in I$, on pose $s_n(.) = \dfrac{h_n(.)}{m(.)}$. Ceci donne $\|s_n(t)\| \leq 1$, donc $s_n(.) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, et d'après le Théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki (Théorème 1.6.2), $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$ est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(s_n(.))_n$ converge faiblement* vers une application $s(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $z \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n \to \infty} \langle s_n(.), z(.) \rangle = \langle s(.), z(.) \rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on aura $m(.)y(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, car

$$\begin{aligned} \|m\, y\|_1 &= \int_0^1 \|m(t) y(t)\| dt \\ &\leq \|y\|_\infty \int_0^1 m(t) dt \end{aligned}$$

$$= \|y\|_\infty \|m\|_1 < +\infty.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \Big\langle h_n(.), y(.) \Big\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \langle h_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle m(t)s_n(t), y(t) \Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle s_n(t), m(t)y(t) \Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \langle s_n(.), m(.)y(.)\rangle \\
&= \langle s(.), m(.)y(.)\rangle \\
&= \int_0^1 \Big\langle s(t), m(t)y(t) \Big\rangle dt \\
&= \int_0^1 \Big\langle m(t)s(t), y(t) \Big\rangle dt \\
&= \langle m(.)s(.), y(.)\rangle,
\end{aligned}$$

alors, $(h_n(.))$ converge vers $h(.) = m(.)s(.)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$. Ceci montre que $\mathcal{D}$ est relativement faiblement compacte.
De plus, $\mathcal{D}$ est un sous ensemble convexe fortement fermé dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. En effet, soit $(h_n(.)) \subset \mathcal{D}$ convergeant vers $h(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, alors par le Théorème 1.5.2, il existe une sous suite extraite de $(h_n(.))$ qu'on note aussi $(h_n(.))$, telle que $h_n(.) \to h(.)$ p.p. sur I, donc

$$\begin{aligned}
\|h_n(t)\| \leq m(t) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \|h_n(t)\| \leq m(t) \\
&\Rightarrow \quad \|\lim_{n\to+\infty} h_n(t)\| \leq m(t) \\
&\Rightarrow \quad \|h(t)\| \leq m(t).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}$ est fortement fermé, alors par le Théorème 1.6.6, il est faiblement fermé. Nous concluons que $\mathcal{D}$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Soient $\lambda \in I$ et $x_{f_1}, x_{f_2} \in \mathcal{K}$, avec $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda x_{f_1}(t) + (1-\lambda)x_{f_2}(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)\big(\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s)\big)ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\lambda f_1(t) + (1-\lambda)f_2(t)\| &\leq \lambda\|f_1(t)\| + (1-\lambda)\|f_2(t)\| \\
&\leq \lambda m(t) + (1-\lambda)m(t) \\
&= m(t),
\end{aligned}$$

d'où la convexité de $\mathcal{K}$.
Soit $f(.) \in \mathcal{D}$, pour tous $t_1, t_2 \in I$, $(t_1 < t_2)$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_f(t_2) - x_f(t_1)\| &= \left\| \int_0^1 G(t_2,s)f(s)ds - \int_0^1 G(t_1,s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)| m(s)ds,
\end{aligned}$$

et d'après la relation (2.6) du Lemme 2.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_f(t_2) - \dot{x}_f(t_1)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t_2}(t_2,s)f(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t_1}(t_1,s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t_2}(t_2,s) - \frac{\partial G}{\partial t_1}(t_1,s) \right| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t_2}(t_2,s) - \frac{\partial G}{\partial t_1}(t_1,s) \right| m(s)ds.
\end{aligned}$$

Etant donné que $m(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, et $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ sont uniformément continues, nous obtenons l'équicontinuité de $\mathcal{K}$ et de l'ensemble $\{\dot{x}_f(.) : x_f(.) \in \mathcal{K}\}$.

D'autre part, pour tout $f(.) \in \mathcal{D}$, nous avons par les relations (2.4) et (2.6) du Lemme 2.3.1

$$\begin{aligned}
\|x_f(t)\| &= \left\| \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_f(t)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_1,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{K}(t)$ et l'ensemble $\{\dot{x}(t) : x(.) \in \mathcal{K}\}$ sont relativement compacts, puisque ils sont bornés dans l'espace $\mathbb{R}^d$ de dimension finie. Donc par le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.6.1) ces deux ensembles sont relativement compacts dans $\mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, ou ce qui est équivalent à dire que $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Ensuite, on montre que $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$. Soit $(x_{f_n}(.))$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}$ convergeant vers $x(.) \in \mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$, donc pour tout $t \in I$,

$$x_{f_n}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds,$$

avec $(f_n(.))_n \subset \mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{D}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1,\mathbf{L}^\infty)$-compact, on peut extraire de $(f_n(.))$ une sous suite qu'on note de la même manière, convergeant faiblement vers une application $f(.) \in \mathcal{D}$.
On a la fonction $G(t,.)f_n(.)$ est Lebesgue intégrable, i.e., $G(t,.)f_n(.) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$, pour tout $t \in I$. Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$, il est aussi clair que pour tout $t \in I$, $G(t,.)y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle G(t,.)f_n(.),y(.)\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle f_n(.),G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle f(.),G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle G(t,.)f(.),y(.)\rangle,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s),y(s)\Big\rangle ds = \int_0^1 \langle G(t,s)f(s),y(s)\rangle ds.$$

En particulier pour $y(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ une base de l'espace $\mathbb{R}^d$, d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s),y(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s),1\!\!1_I(s)e_j\Big\rangle ds \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s),e_j\Big\rangle ds \\
&= \Big\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds,e_j\Big\rangle \\
&= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,e_j\Big\rangle,\ \forall\, j,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{f_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \\
&= x(t),
\end{aligned}$$

par la relation (2.6) du Lemme 2.3.1, nous avons par les mêmes arguments

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \dot{x}_{f_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_n(s)ds \\
&= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds \\
&= \dot{x}(t).
\end{aligned}$$

Nous concluons que la suite $(x_{f_n}(.), \dot{x}_{f_n}(.))$ converge vers $(x(.), \dot{x}(.)) = (x_f(.), \dot{x}_f(.))$, ceci implique que $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.
On applique le Théorème 2.3.1, avec $f(t, x, y) = \rho(t)$, pour déduire l'existence d'une application $\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ à valeurs non vides convexes et fermées, de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé, et tel que pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$ et $\phi \in \Phi(x(.))$, nous avons pour presque tout $t \in I$,

$$\phi(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)) \text{ et } \|\phi(t)\| \leq \rho(t) + \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

Etape 2.

On considère maintenant la multi-application $\Gamma : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ définie par

$$\Gamma(x) = \Big\{ y(.) \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) : y(t) = \int_0^1 G(t, s) w(s) ds, \forall t \in I,$$

$$w(t) \in -\partial_c \varphi(x(t)) - \phi(t), p.p.\ t \in I, \phi \in \Phi(x) \Big\}.$$

Pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$ et pour tout $\phi \in \Phi(x(.))$, par la relation (2.9) et le fait que $y \mapsto \partial_c \varphi(y)$ est s.c.s et $x(.)$ est continue, on conclut que l'application $t \mapsto -\partial_c \varphi(x(t)) - \phi(t)$ est mesurable.

D'après le Théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.3.1), il existe une application mesurable $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ tel que $\gamma(t) \in -\partial_c \varphi(x(t)) - \phi(t)$, pour tout $t \in I$. Par conséquent, l'application $y(.) : I \to \mathbb{R}^d$ définie par $y(t) = \int_0^1 G(t, s) \gamma(s) ds$ appartient à $\Gamma(x)$, ceci montre que $\Gamma(x)$ est un ensemble non vide.

Soit $x(.) \in \mathcal{K}$ et $y(.) \in \Gamma(x)$, par la définition de $\Gamma(x)$, il existe $\phi \in \Phi(x)$ et une application Lebesgue mesurable $w(.) : I \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) w(s) ds, \ \forall t \in I \text{ avec } w(t) \in -\partial_c \varphi(x(t)) - \phi(t), \ p.p.\ t \in I.$$

Par les relations (2.8) et (2.9), pour presque tout $t \in I$, nous avons

$$\|w(t)\| \leq L + \rho(t) + \frac{1}{2} \quad = \quad m(t). \tag{2.10}$$

Ceci implique que $\Gamma(x) \subset \mathcal{K}$, $\forall x \in \mathcal{K}$, donc Γ applique $\mathcal{K}$ dans lui même, c'est à dire $\Gamma : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathcal{K}$.

On montre maintenant la convexité de $\Gamma(x)$, pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$.
Soient $x(.) \in \mathcal{K}$, $\lambda \in I$, et $y_1(.), y_2(.) \in \Gamma(x)$, alors il existe $w_1(.), w_2(.)$ telles que

$$y_1(t) = \int_0^1 G(t, s) w_1(s) ds, \ \forall t \in I, \quad \text{avec} \quad w_1(t) \in -\partial_c \varphi(x(t)) - \phi_1(t), \ \phi_1 \in \Phi(x),$$

et

$$y_2(t) = \int_0^1 G(t,s)w_2(s)ds, \ \ \forall t \in I, \quad \text{avec} \quad w_2(t) \in -\partial_c\varphi(x(t)) - \phi_2(t), \ \phi_2 \in \Phi(x).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \lambda y_1(t) + (1-\lambda)y_2(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)w_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)w_2(s)ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)(\lambda w_1(s) + (1-\lambda)w_2(s))ds \end{aligned}$$

avec

$$-w_1(s) - \phi_1(s) \in \partial_c\varphi(x(s)), \ \forall\, s \in I,$$

et

$$-w_2(s) - \phi_2(s) \in \partial_c\varphi(x(s)), \ \forall\, s \in I.$$

Comme $\partial_c\varphi(x(.))$ est convexe (voir Proposition 2.2.4), on obtient

$$\lambda w_1(s) + (1-\lambda)w_2(s) + \lambda\phi_1(s) + (1-\lambda)\phi_2(s) \in -\partial_c\varphi(x(s))$$

$$\Rightarrow \lambda w_1(s) + (1-\lambda)w_2(s) \in -\partial_c\varphi(x(s)) - \big(\lambda\phi_1(s) + (1-\lambda)\phi_2(s)\big).$$

Sachant que $\Phi(x)$ est convexe, nous avons $\lambda\phi_1(s) + (1-\lambda)\phi_2(s) \in \Phi(x)$, et alors $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \Gamma(x)$, d'où la convexité de ce dernier.

Maintenant, on va montrer que pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$, $\Gamma(x)$ est compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Comme $\Gamma(x) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est compact, il suffit de montrer que $\Gamma(x)$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Soit $(y_n(.))_n$ une suite d'éléments de $\Gamma(x)$ convergeant vers $y(.) \in \mathcal{K}$, alors il existe une suite $(\phi_n(.))_n \subset \Phi(x)$ et une suite $(w_n(.))$ d'applications Lesbegue mesurables, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n(t) = \int_0^1 G(t,s)w_n(s)ds, \ \ \forall t \in I,$$

avec

$$w_n(t) \in -\partial_c\varphi(x(t)) - \phi_n(t), \ p.p.\ t \in I. \tag{2.11}$$

Par la relation (2.10), $(w_n(.)) \subset \mathcal{D}$ qui est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact, donc en peut extraire une sous suite, qu'on note aussi $(w_n(.))$ et qui converge faiblement vers une application $w(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Par conséquent, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t,s)w_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)w(s)ds.$$

En effet, soit $z \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, et donc pour tout $t \in I$, $G(t,.)z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle G(t,.)w_n(.), z(.)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle w_n(.), G(t,.)z(.)\rangle \\ &= \langle w(.), G(t,.)z(.)\rangle \\ &= \langle G(t,.)w(.), z(.)\rangle,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)w_n(s), z(s)\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t,s)w(s), z(s)\Big\rangle ds,$$

en particulier pour $z(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ une base de l'espace $\mathbb{R}^d$, d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)w_n(s), z(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)w_n(s), 1\!\!1_I(s)e_j\Big\rangle ds \\ &= \Big\langle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t,s)w_n(s)ds, e_j\Big\rangle \\ &= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)w(s)ds, e_j\Big\rangle\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)w_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)w(s)ds = y(t).$$

D'autre part, comme $(\phi_n(.)) \subset \Phi(x)$, par la relation (2.9), $\|\phi_n(t)\| \leq \rho(t) + \dfrac{1}{2} := \rho_1(t)$, on pose $\gamma_n(.) = \dfrac{\phi_n(.)}{\rho_1(.)}$, ceci donne $\|\gamma_n(t)\| \leq 1$, donc $\gamma_n(.) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$ qui est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$ (par le Théorème 1.6.2 de Banach-Aloaglu-Bourbaki), par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(\gamma_n(.))_n$ converge faiblement* vers une application $\gamma(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $z(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \gamma_n(.), z(.)\rangle \to \langle \gamma(.), z(.)\rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on aura $\rho_1(.)y(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, puisque

$$\begin{aligned}\|\rho_1\, y\|_1 &= \int_0^1 \|\rho_1(t)y(t)\|dt \\ &\leq \|y\|_\infty \int_0^1 \rho_1(t)dt \\ &= \|y\|_\infty \|\rho_1\|_1 < +\infty,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle\phi_n(.),y(.)\rangle &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1\Big\langle\phi_n(t),y(t)\Big\rangle dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1\Big\langle\rho_1(t)\gamma_n(t),y(t)\Big\rangle dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1\langle\gamma_n(t),\rho_1(t)y(t)\rangle dt\\
&= \lim_{n\to+\infty}\Big\langle\gamma_n(.),\rho_1(.)y(.)\Big\rangle\\
&= \langle\gamma(.),\rho(.)y(.)\rangle\\
&= \int_0^1\Big\langle\gamma(t),\rho_1(t)y(t)\Big\rangle dt\\
&= \int_0^1\Big\langle\rho_1(t)\gamma(t),y(t)\Big\rangle dt\\
&= \langle\rho_1(.)\gamma(.),y(.)\rangle.
\end{aligned}$$

Par suite, $(\phi_n(.))$ converge faiblement vers $\phi(.) = \rho_1(.)\gamma(.)$ dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$, et puisque $\Phi(x)$ est fermé donc $\phi(.) \in \Phi(x)$. Par conséquent, $(w_n(.)+\phi_n(.))_n$ converge faibement vers $(w(.)+\phi(.))$ dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$. Par le Théorème da Banach-Mazur (Théorème 1.6.3), il existe une suite $(z_n(.))_n$ qui converge fortement vers $(w(.)+\phi(.))$ dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$ et telle que $z_n(.)$ est une combinaison convexe de $\{w_m(.)+\phi_m(.) :\ m\geq n\}$, c'est à dire pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_n(.)\in co\{w_m(.)+\phi_m(.),\ m\geq n\}$. Par le Théorème 1.5.2, on peut extraire une sous suite de (z_n), qui converge presque partout vers $w(.)+\phi(.)$. Alors,

$$w(t)+\phi(t)\in\bigcap_n\overline{co}\{w_m(t)+\phi_m(t) :\ m\geq n\}\ \ p.p.\ t\in I.$$

Fixons $t\in I$ et $z\in\mathbb{R}^d$. Par la relation (2.11) et le Théorème 1.6.5 , on a

$$\Big\langle z,w(t)+\phi(t)\Big\rangle\leq\delta^*\Big(z,-\partial_c\varphi(x(t))\Big),$$

et puisque $\partial_c\varphi(x(t))$ est un ensemble convexe fermé (Proposition 2.2.4), nous avons par le Lemme 1.6.1,

$$d\Big(w(t)+\phi(t),-\partial_c\varphi(x(t))\Big)=\sup_{z'\in\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}}\Big(\Big\langle z',w(t)+\phi(t)\Big\rangle-\delta^*(z',-\partial_c\varphi(x(t))\Big)\leq 0,$$

i.e.,

$$w(t)\in-\partial_c\varphi(x(t))-\phi(t)\ \ p.p.\ t\in I,$$

et comme $y(t)=\displaystyle\int_0^1 G(t,s)w(s)ds$, ceci montre que $y(.)\in\Gamma(x)$. Par conséquent $\Gamma(x)$ est fermé, donc compact dans $\mathcal{K}$.

Finalement on va montrer que Γ est une multi-application semi-continue supérieurement. Par la Proposition 1.3.5, il suffit de montrer que son graphe est fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Soient $(x_n, y_n)_n$ une suite dans le graphe de Γ donné par

$$\text{gph}(\Gamma) = \Big\{(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \ y \in \Gamma(x)\Big\},$$

qui converge vers $(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\phi_n(.) \in \Phi(x_n(.))$ et $w_n(.) \in -\partial_c\varphi(x_n(.)) - \phi_n(.)$, telle que

$$y_n(t) \ = \ \int_0^1 G(t, s)w_n(s)ds. \tag{2.12}$$

Par la relation (2.10), $(w_n(.))_n$ est inclue dans $\mathcal{D}$, qui est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact, par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(w_n(.))_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$ vers une application $w(.) \in \mathcal{D}$, i.e., $\|w(t)\| \leq m(t)$ *p.p.* $t \in I$.
D'autre part, puisque $(\phi_n(.))_n \subset \Phi(x_n(.)) \subset (\rho(.) + \frac{1}{2})\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement vers une application ϕ, avec $\|\phi(t)\| \leq \rho(t) + \frac{1}{2}$. Comme $(x_n(.))$ converge fortement vers $x(.)$ dans $\mathcal{K}$, $(\phi_n(.))$ converge faiblement vers $\phi(.)$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ et le graphe de Φ est fortement faiblement séquentiellement fermé, on conclut que $\phi(.) \in \Phi(x(.))$.
D'autre part, nous avons

$$w_n(t) + \phi_n(t) \in -\partial_c\varphi(x_n(t)), \ \ p.p.\ t \in I,$$

et la multi-application $\partial_c\varphi(.)$ est s.c.s à valeurs convexes compactes (voir Lemme 2.2.1 et Proposition 2.2.4), on applique le Théorème 1.3.5, on obtient

$$w(t) + \phi(t) \in -\partial_c\varphi(x(t)), \ p.p.\ t \in I.$$

La fonction $G(t, .)w_n(.)$ est Lebesgue intégrable pour tout $t \in I$, soit $z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, et donc pour tout $t \in I$, $G(t, .)z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle G(t, .)w_n(.), z(.)\rangle \ &= \ \lim_{n\to\infty} \langle w_n(.), G(t, .)z(.)\rangle \\
&= \ \langle w(.), G(t, .)z(.)\rangle \\
&= \ \langle G(t, .)w(.), z(.)\rangle.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t, s)w_n(s), z(s)\Big\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t, s)w(s), z(s)\Big\rangle ds,$$

en partculier pour $z(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ est une base de $\mathbb{R}^d$, d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)w_n(s), z(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)w_n(s), 1\!\!1_I(s)e_j\Big\rangle ds\\ &= \Big\langle \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 G(t,s)w_n(s)ds, e_j\Big\rangle\\ &= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)w(s)ds, e_j\Big\rangle,\ \forall j,\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 G(t,s)w_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)w(s)ds.$$

Par la relation (2.12),

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)w(s)ds,\ \ \forall\, t\in I.$$

Par conséquent $(x(.), y(.)) \in \mathrm{gph}(\Gamma)$, par suite le graphe de Γ est fermé et donc Γ est s.c.s. On applique le Théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.3.7) à Γ, on obtient l'existence de $x(.) \in \mathcal{K}$ telle que $x(.) \in \Gamma(x(.))$, c'est à dire $x(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)w(s)ds$, pour tout $t \in I$, avec $w(t) \in -\partial_c\varphi(x(t)) - \phi(t)$, et $\phi(.) \in \Phi(x(.))$. Par le Lemme 2.3.1, $\ddot{x}(t) = w(t)$, *p.p.* et $x(0) = x(1) = 0$. Alors $\phi(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t))$, *p.p.* $t \in I$, et nous obtenous

$$-\ddot{x}(t) \in \partial_c\varphi(x(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ \ p.p.\, t \in I,$$

c'est à dire $x(.)$ est une solution dans $\mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$ du problème $(\mathcal{P}_F)$.
Ceci termine la preuve. ■

Chapitre 3

Solutions extrémales pour un problème aux limites du second ordre gouverné par le sous différentiel

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions extrémales pour l'inclusion différentiel

$$(\mathcal{P}_{ext(F)})\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + ext(F(t, x(t), \dot{x}(t))), & \text{p.p. sur } [0,1], \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

par l'utilisation du théorème d'existence de solutions pour le problème

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), & \text{p.p. sur } [0,1], \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonctrion convexe, $\partial\varphi$ désigne le sous différentiel de φ dans le sense de l'analyse convexe et $F : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur $[0,1]$ et $\mathcal{H}$-continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

3.2 Préliminaires

Dans ce chapitre, aussi on note $I = [0,1]$.

3.2.1 Les ensembles décomposables et $\mathbf{L}^p$-sélections

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, σ-fini et X un espace de Banach séparable.

Définition 3.2.1 *(voir [27]) Soit K un ensemble de $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$. On dit que K est décomposable si pour tous u,v $\in K$ est pour tout sous ensemble $A \in \Sigma$, nous avons*

$$1\!\!1_A u + (1 - 1\!\!1_A)v \in K.$$

Exemple 3.2.1 *Soient (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité avec μ une mesure non atomique, X un espace de Banach séparable, alors*

1. *l'ensemble* $\left\{ 1\!\!1_A : \ A \text{ est un sous-ensemble mesurable de } \Omega \right\}$ *est décomposable.*
2. *pour tout $X_0 \subset X$, l'ensemble* $E = \left\{ f \in \mathbf{L}^1(\Omega, X) : \ f(t) \in X_0, \ p.p. \ t \in \Omega \right\}$ *est décomposable.*

Définition 3.2.2 *Soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application*

- *On définit l'ensemble des sélections mesurables par*

$$\mathcal{S}_F = \left\{ f \in \mathbf{L}^0(\Omega, X) : \ f(t) \in F(t), \ \mu.p.p \right\}.$$

- *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'esnsemble de toutes les $\mathbf{L}^p$-sélections de F par*

$$\mathcal{S}_F^p = \left\{ f(.) \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) : \ f(t) \in F(t), \ \mu.p.p \right\}.$$

Lemme 3.2.1 *(voir [27]) Soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application de graphe mesurable et $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\mathcal{S}_F^p$ est non vide si et selement si*

$$\inf \left\{ \|x\| : \ x \in F(t) \right\} \leq h(t) \ \mu.p.p,$$

pour une certaine application $h(.) \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)$.

Remarques 3.2.1

1. *Il est clair que pour toute multi-application $F(.)$, l'ensemble $\mathcal{S}_F^p$ est décomposable.*
2. *Si F est à valeurs non vides fermées, alors l'ensemble $\mathcal{S}_F^p$ est fermé dans $\mathbf{L}^p(\Omega, X)$.*

En effet.

1. Soit $A \in \Sigma$ et soient $u, v \in \mathcal{S}_F^p$, nous avons

$$\begin{aligned}
u \in \mathcal{S}_F^p \ &\Leftrightarrow \ u \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) : \ u(t) \in F(t), \ \ p.p. \ t \in \Omega \\
&\Rightarrow \ 1\!\!1_A u \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) \ \ et \ \ 1\!\!1_A(t)u(t) \in 1\!\!1_A(t)F(t), \ p.p. \ t \in \Omega, \\
v \in \mathcal{S}_F^p \ &\Leftrightarrow \ v \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) : \ v(t) \in F(t), \ p.p. \ t \in \Omega \\
&\Rightarrow \ (1 - 1\!\!1_A)v \in \mathbf{L}^p(\Omega, X) \ \ et \ \ (1 - 1\!\!1_A(t))v(t) \in (1 - 1\!\!1_A(t))F(t), \ p.p. \ t \in \Omega.
\end{aligned}$$

Donc

$$1\!\!1_A u + (1 - 1\!\!1_A)v \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)$$

et

$$1\!\!1_A(t)u(t) + (1 - 1\!\!1_A(t))v(t) \in 1\!\!1_A(t)F(t) + (1 - 1\!\!1_A(t))F(t),\ p.p.\ t \in \Omega.$$

Et comme

$$1\!\!1_A(t)F(t) + (1 - 1\!\!1_A(t))F(t) = \begin{cases} F(t) & \text{si } t \in A \\ F(t) & \text{si } t \notin A \end{cases} = F(t).$$

Donc, $1\!\!1_A u + (1 - 1\!\!1_A)v \in \mathcal{S}_F^p$.

2. Soit $(f_n(.))_n \subset \mathcal{S}_F^p$ convergeant vers $f(.) \in \mathbf{L}^p(\Omega, X)$, donc $f_n(t) \in F(t)$ $\mu.p.p.$, par le Théorème 1.5.2, il existe une sous suite extraire de $(f_n(.))_n$ qu'on aussi $(f_n(.))_n$ telle que $f_n(.) \to f(.)$ $p.p.$ sur Ω, et comme F est à valeurs fermées, on conclut que $f(t) \in F(t)$, $\forall\, t \in \Omega$, i.e., $f \in \mathcal{S}_F^p$, par conséquent $\mathcal{S}_F^p$ est fermé.

Théorème 3.2.1 *(voir [6]) Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-fini et Σ μ-complète. Soit X un espace de Banach séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une mlti-application intégrablement bornée à valeurs non vides convexes compactes. Alors $\mathcal{S}_F^1$ est convexe $\sigma(\mathbf{L}^1(\Omega, X), \mathbf{L}^\infty(\Omega, X'))$-compact.*

Définition 3.2.3 *(voir [27]) Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini et X, Y deux espaces de Banach séparables. Soit $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application, soient $p, q \in [1, +\infty[$. On définit la multi-application*

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbf{L}^p(\Omega, X) &\rightrightarrows \mathbf{L}^q(\Omega, Y) \\ u &\mapsto \Gamma(u) = \mathcal{S}^q_{F(.,u(.))}. \end{aligned}$$

Nous appelons $\Gamma(.)$ l'opérateur multivalué de Nemitsky ou superposition correspondante à $F(.,.)$.

Théorème 3.2.2 *(voir [27]) Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini et X, Y deux espaces de Banach séparables. Soit $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées telle*

que

(i) $(t,x) \mapsto F(t,x)$ *est de graphe mesurable,*

(ii) pour tout $x \in X$, $x \mapsto F(t,x)$ *est s.c.i,*

(iii) $|F(t,x)| \leq a(t) + c\|x\|^{\frac{p}{q}}$ *p.p. avec* $a(.)$ *non negative dans* $\mathbf{L}^q(\Omega,\mathbb{R})$ *et* $c \geq 0$.

Alors $u \mapsto \Gamma(u)$ *est s.c.i.*

Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel X. Pour tout $x \in X$, on pose $E(A,x) = A \cap (2\,x - A)$, on a
(a) $E(A,x)$ est non vide, convexe si et seulement si $x \in A$.
(b) Pour tout $x \in A$, $E(A,x)$ est la plus grande partie symétrique par rapport à x incluse dans A .
(c) $x \in ext(A)$ si et seulement si $E(A,x) = \{x\}$.

Théorème 3.2.3 *(voir [27]) Soient* (Ω,Σ,μ) *un espace mesuré,* σ*-fini,* X *un espace de Banach séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes scalairement mesurable, alors*

$$ext(\mathcal{S}_{F(.)}) = \mathcal{S}_{ext(F(.))}.$$

Preuve.
On a pour tout $f \in \mathbf{L}^0(\Omega,X)$, $\mathcal{S}_{F\cap(2f-F)} = \mathcal{S}_F \cap (2f - \mathcal{S}_F)$.
En effet. Soit

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{S}_{F\cap\,(2f-F)} &\Leftrightarrow g(.) \in \mathbf{L}^0(\Omega,X) : \; g(t) \in F(t) \cap (2f(t) - F(t)) \\ &\Leftrightarrow g(.) \in \mathbf{L}^0(\Omega,X) : \; g(t) \in F(t) \;\; et \;\; g(t) \in (2f - F)(t) \\ &\Leftrightarrow g(.) \in \mathbf{L}^0(\Omega,X) : \; g \in \mathcal{S}_F \;\; et \;\; g \in (2f - \mathcal{S}_F) \\ &\Leftrightarrow g \in \mathcal{S}_F \cap (2f - \mathcal{S}_F), \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{S}_{E(F(.),f(.))} = E(\mathcal{S}_F, f).$$

Si $f \in ext(\mathcal{S}_F)$, alors $\mathcal{S}_{E(F(.),f(.))} = E(\mathcal{S}_F, f) = \{f\}$. Ainsi $t \mapsto E(F(t), f(t))$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes et scalairement mesurable, donc mesurable (Proposition 1.3.2), alors nous pouvons trouver $\widehat{f} : \Omega \to X$ mesurable tel que $\widehat{f}(t) \in E(F(t), f(t))$, pour tout $t \in \Omega$. Donc $\widehat{f}(t) = f(t)$ $\mu.p.p$ et donc $f(t) \in E(F(t), f(t))$ $\mu.p.p$. Et puisque $E(F(t), f(t))$ est symétrique par rapport à $f(t)$, on a alors

nécessairement $\{f(t)\} = E(F(t), f(t))$ $\mu.p.p$, i.e., $f(t) \in ext(F(t))$ $\mu.p.p$, par conséquant, nous avons prouvé que $ext(\mathcal{S}_F) \subseteq \mathcal{S}_{ext(F)}$.
L'inclusion inverse est évidente. Nous concluons alors que $ext(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S}_{ext(F)}$. ■

Théorème 3.2.4 *(voir [27]) Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, σ-fini, X un espace de Banach séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes scalairement mesurable, alors*

$$ext(\mathcal{S}^p_{F(.)}) = \mathcal{S}^p_{ext(F(.))}, \quad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Preuve.

Comme $\mathcal{S}^p_F = \mathcal{S}_F \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X)$ et $\mathcal{S}^p_{ext(F)} = S_{ext(F)} \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X)$, Il suffit de montrer que $ext(\mathcal{S}_F) \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X) = ext(\mathcal{S}_F \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X))$, et le résultat découlera du théorème 3.2.3. Il est facile de voir que $ext(\mathcal{S}_F) \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X) \subseteq ext(\mathcal{S}_F \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X))$. Il reste donc à prouver que l'inclusion inverse est vraie.

Soit $f \in ext(\mathcal{S}_F \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X))$ et supposons que $f \notin ext(\mathcal{S}_F)$. Alors il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_F$ et $f_1, f_2 \notin \mathbf{L}^p(\Omega, X)$, telle que $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f_1 \neq f_2$.
On peut supposer que $f = 0$. Puisque $\mu(.)$ est σ-finie, nous pouvons trouver $A \in \Sigma$ telle que $0 < \mu(A) < \infty$ et $f_1(t) \neq f_2(t)$ pour tout $t \in A$.
Pour $k = 1, 2$, on pose

$$g_k(t) \begin{cases} f_k(t) & \text{si } \|f_k(t)\| \leq 1, \ t \in A \\ \dfrac{f_k(t)}{\|f_k(t)\|} & \text{si } \|f_k(t)\| > 1, \ t \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est claire que $g_k \in \mathcal{S}_F \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X)$ et $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) = 0$. Alors $f = 0 \notin ext(\mathcal{S}_F \cap \mathbf{L}^p(\Omega, X)$, une contradiction. ■

Théorème 3.2.5 ***(Théorème de sélection continue)****(voir [27])*

Soient (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité avec μ une mesure non atomique, X un espace métrique séparable, Y un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows \mathbf{L}^1(\Omega, Y)$ une multi-application s.c.i à valeurs fermées et décomposables, alors $F(.)$ admet une sélection continue.

Proposition 3.2.1 *(voir [12]) Soient (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité avec μ une mesure non atomique, X un espace de Banach, Y un espace métrique et $G : Y \rightrightarrows \mathbf{L}^1(\Omega, X)$*

une multi-application s.c.i à valeurs non vides fermées, décomposables. Supposons que $g : Y \to \mathbf{L}^1(\Omega, X)$ *et* $\varphi : Y \to \mathbf{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ *sont deux applications continues telles que pour tout* $y \in Y$*, l'ensemble*

$$H(y) = \Big\{ u \in G(y) : \ \|u(t) - g(y)(t)\|_X < \varphi(y)(t), \mu.p.p \Big\},$$

est non vide. Alors la multi-application $H : Y \rightrightarrows \mathbf{L}^1(\Omega, X)$ *est s.c.i, à valeurs décomposables.*

Soit X un espace de Banach séparable. Dans $\mathbf{L}^1([0,T], X)$ on considère la norme faible $\|.\|_w$ définie par

$$\|f\|_\omega = \sup \left[\left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s)ds \right\| : \ 0 \le t_1 \le t_2 \le T \right]$$

ou bien par

$$\|f\|_\omega = \sup \left[\left\| \int_0^t f(s)ds \right\| : \ 0 \le t \le T \right], \ \forall f \in \mathbf{L}^1([0,T], X),$$

$\mathbf{L}^1([0,T], X)$ muni de cette norme sera noté par $\mathbf{L}^1_\omega([0,T], X)$.

Définition 3.2.4 *Soit* X *un espace de Banach et* Y *un espace métrique. Soit la multi-application* $H : [0,T] \times Y \rightrightarrows X$ *à valeurs non vides compactes convexes.*

1. *On dit que* H *vérifie la propriété de Scorza-Dragoni, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un ensemble compact* $A \subset [0,T]$ *tel que la mesure de Lebesgue* $\lambda([0,T] \backslash A) < \varepsilon$ *et la restriction de* H *à* $A \times Y$ *notée* $H/_{A \times Y}$*, est continue.*

2. *La multi-application* H *est dite intégrablement bornée sur les compacts de* Y*, si pour tout compact* $\mathcal{D} \subset Y$*, nous pouvons trouver une fonction intégrable* $a_{\mathcal{D}} : [0,T] \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\sup \big\{ \|y\| : \ y \in H(t,z) \big\} \le a_{\mathcal{D}}(t),$$

pour presque tout $z \in \mathcal{D}$*.*

Proposition 3.2.2 *(voir [27])(**Proposition de Scorza-Dragoni**)*

Soit Ω un espace métrique localement compact muni de la mesure de Radon $\mu(.)$, et X un espace Polonais et Y un espace métrique séparable. Soit $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées telle que

(i) pour tout $x \in X$, $t \mapsto F(t,x)$ est mesurable ;

(ii) pour tout $t \in \Omega$, $x \mapsto F(t,x)$ est continue.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ compact, avec $\mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ tel que $F/_{\Omega_\varepsilon \times X}$ est continue.

Le Théorème qui suit est crucial pour la preuve de notre deuxième théorème d'existence, il exprime la densité pour la norme $\|.\|_w$ de l'espace des sélections continues de l'ensemble des points extrémaux d'une multi-application R dans l'espace des sélections continues de R. Pour la preuve et plus de détails on peut consulter la référence [46].

Théorème 3.2.6 *(voir[46]) Soit Y un espace métrique complet, X un espace de Banach séparable, X_σ l'espace de Banach X muni de la topologie faible, $M : I \times Y \rightrightarrows X_\sigma$ une multi-application à valeurs non vides compactes convexes, et soit K un sous ensemble compact de $\mathbf{C}(I,Y)$.*

De plus, soit $R : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I,X)$ la multi-application définie par

$$R(y) = \Big\{ r(.) \in \mathbf{L}^1(I,X) : \ r(t) \in M(t, y(t)), \ p.p. \ sur I \Big\}.$$

Si M vérifie la propriété de Scorza-Dragoni et est intégrablement bornée sur les compacts de Y, alors l'ensemble

$$CS_R^w = \Big\{ f \in \mathbf{C}(K, \mathbf{L}^1_w(I,X)) : \ f(y) \in R(y), \ \forall y \in K \Big\},$$

est un ensemble non vide complet de l'espace $\mathbf{C}(K, \mathbf{L}^1_w(I,X))$. De plus, $CS_R^w = \overline{CS^w_{ext(R)}}^{\|.\|_w}$ avec

$$CS^w_{ext(R)} = \Big\{ f \in \mathbf{C}(K, \mathbf{L}^1_w(I,X)) : \ f(y) \in ext(R(y)), \ \forall y \in K \Big\}.$$

Théorème 3.2.7 *([45]) Soit X un espace de Banach séparable, Y un espace métrique séparable complet et $F : I \times Y \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes qui vérifie la propriété de Scorza-Dragoni et est intégrablement bornée sur les compacts de Y. Alors, pour chaque compact $K \subset \mathbf{C}(I, Y)$, $\varepsilon > 0$ et toute sélection continue $f : K \to \mathbf{L}^1(I, X)$, de la multi-application $G : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I, X)$, définie par*

$$G(y(.)) = \Big\{ f \in \mathbf{L}^1(I, X) : \ f(t) \in F(t, y(t)) \ p.p.\, t \in I \Big\},$$

il existe une sélection continue $g : K \to \mathbf{L}^1_w(I, X)$ de la multi-application $ext(G) : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I, X)$ telle que pour tout $y \in \mathbf{C}(I, Y)$, on a

$$\sup_{t \in I} \Big\| \int_0^t \big(f(y)(s) - g(y)(s)\big) ds \Big\| \leq \varepsilon, \ \ i.e., \ \|f(y) - g(y)\|_w \leq \varepsilon.$$

Définition 3.2.5 *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini, X un espace de Banach et $K \subseteq \mathbf{L}^1(\Omega, X)$. On dit que K est un ensemble uniformément intégrable si*

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{f \in K} \int_{\{|f| \geq c\}} |f| d\mu = 0.$$

Proposition 3.2.3 *([27]) Soit X un espace de Banach et $W \subseteq \mathbf{L}^1(I, X)$ est uniformément intégrable, et pour chaque $\varepsilon > 0$, il exist $K_\varepsilon \subseteq X$ compact tel que, pour chaque $f \in W$, on peut trouver $I_{f,\varepsilon} \subseteq I$ mesurable avec $\lambda(I \backslash I_{f,\varepsilon}) \leq \varepsilon$ et $f(t) \in K_\varepsilon$ pour $t \in I_{f,\varepsilon}$. Alors la topologie de la norme $\|.\|_\omega$ et la topologie faible coincident sur W, et W est $\|.\|_\omega$-compact.*

3.3 Théorème de relaxation

On commence par établir le résultat d'existence pour $(\mathcal{P}_F)$ qui est une variant du Lemme 2.3.1.

Lemme 3.3.1 *Soient X un espace de Banach séparable, $G : I \times I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} t-1 & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ s-1 & si \quad t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Alors, on a les résultats suivants

(a) si $u \in \mathbf{W}^{2.1}(I,X)$ avec $u(1) = \dot{u}(0) = 0$, alors

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \forall t \in I. \tag{3.2}$$

(b) $G(.,s)$ est dérivable sur I pour tout $s \in I$ sauf sur la diagonale et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq s < t, \\ 0 & si \quad t < s \leq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

(c) $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$\sup_{t \in I} |G(t,s)| \leq 1, \quad \sup_{\substack{t \in I \\ t \neq s}} \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \leq 1. \tag{3.4}$$

(d) soit $f \in \mathbf{L}^1(I,X)$ et soit $u_f(.) : I \to X$ la fonction défini par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall\, t \in I, \tag{3.5}$$

alors $u_f(1) = \ddot{u}_f(0) = 0$.

De plus, la fonction $u_f(.)$ est dérivable et sa dérivée vérifie

$$\lim_{h \to 0} \frac{u_f(t+h) - u_f(t)}{h} = \dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds. \tag{3.6}$$

(e) la fonction $\dot{u}_f(.)$ est scalairement dérivable, i.e., pour tout $x' \in X'$, la fonction scalaire $\langle x', \dot{u}_f(.) \rangle$ est dérivable et sa dérivée faible $\ddot{u}_f(.)$ est égale à f presque partout.

Proposition 3.3.1 *Soit X un espace de Banach séparable et soit $f : I \to X$ une application continue (resp. dans $\mathbf{L}^1(I, X)$). Alors la fonction*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall\, t \in I,$$

est la solution unique dans $\mathbf{C}^2(I, X)$ (resp. dans $\mathbf{W}^{2.1}(I, X)$) du problème

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t), \quad p.p. \text{ sur } I, \\ u(1) = \dot{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Pour la démonstration de notre théorème principal, nous avons besoin du résultat suivant qui est une variante du Théorème 2.3.2.

Théorème 3.3.1 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $F : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une muti-application à valeurs non vides convexes compactes satisfaisant les hypothèses*

(H_1) F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable ;

(H_2) $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ est $\mathcal{H}$-continue ;

(H_3) il existe une fonction $\rho(.)$ positive Lebesgue intégrable définie sur I tel que

$$F(t, x, y) \subset \rho(t)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d},$$

pour chaque $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Alors, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad p.p. \text{ sur } I, \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution $x(.) \in \mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$.

Preuve.

Etape 1.

Par le Théorème 2.2.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\partial\varphi(x)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$, alors il existe $M > 0$ telle que

$$\partial\varphi(x) \quad \subset \quad M\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \tag{3.7}$$

pour tout $t \in I$, on pose $\beta(t) = M + \rho(t)$, donc $\beta(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$.
Considérons les ensembles

$$\mathcal{D} = \left\{ h(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d) : \ \|h(t)\| \leq \beta(t), \ p.p. \, t \in I \right\},$$

et

$$\mathcal{K} = \left\{ x_f(.) \in \mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d) : \ x_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \ \forall \, t \in I, \ f \in \mathcal{D} \right\}.$$

On a $\mathcal{D}$ est un sous ensemble convexe, $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe compacte dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.
En effet. Soient $\lambda \in I$, $h_1(.), h_2(.) \in \mathcal{D}$, il est claire que $\lambda h_1(.) + (1-\lambda) h_2(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ et nous avons

$$\begin{aligned} \|\lambda h_1(t) + (1-\lambda) h_2(t)\| &\leq \lambda \|h_1(t)\| + (1-\lambda) \|h_2(t)\| \\ &\leq \lambda \beta(t) + (1-\lambda) \beta(t) \\ &= \beta(t), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{D}$ est convexe.

Maintenant, soit $(h_n(.)$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$. Pour tout $t \in I$, on pose $s_n(.) = \dfrac{h_n(.)}{\beta(.)}$. Implique $\|s_n(t)\| \leq 1$, donc $s_n(.) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, qui est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$ (d'après le Théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki, Théorème 1.6.2), donc par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(s_n(.))_n$ converge faiblement* vers une application $s(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $z \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n \to +\infty} \langle s_n(.), z(.) \rangle = \langle s(.), z(.) \rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\beta(t) y(t)\| dt &\leq \int_0^1 \|y\|_\infty \beta(t) \, dt \\ &\leq \|y\|_\infty \int_0^1 \beta(t) \, dt \\ &= \|y\|_\infty \|\beta\|_1 < +\infty, \end{aligned}$$

c'est à dire, $\beta(.) y(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.
Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \langle h_n(.), y(.) \rangle &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \Big\langle h_n(t), y(t) \Big\rangle dt \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \Big\langle \beta(t) s_n(t), y(t) \Big\rangle dt \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \Big\langle s_n(t), \beta(t) y(t) \Big\rangle dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \langle s_n(.), \beta(.)y(.)\rangle \\
&= \langle s(.), \beta(.)y(.)\rangle \\
&= \int_0^1 \Big\langle s(t), \beta(t)y(t) \Big\rangle dt \\
&= \int_0^1 \Big\langle \beta(t)s(t), y(t) \Big\rangle dt \\
&= \langle \beta(.)s(.), y(.)\rangle,
\end{aligned}$$

alors, $(h_n(.))$ converge vers $h(.) = \beta(.)s(.)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$. Ceci montre que $\mathcal{D}$ est relativement faiblement compacte. De plus, comme $\mathcal{D}$ est un ensemble convexe fortement fermé dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, alors par le Théorème 1.6.6, il est faiblement fermé. Donc $\mathcal{D}$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Soient $\lambda \in I$ et x_{f_1}, $x_{f_2} \in \mathcal{K}$, avec f_1, $f_2 \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda x_{f_1}(t) + (1-\lambda)x_{f_2}(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)\big(\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s)\big)ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\lambda f_1(t) + (1-\lambda)f_2(t)\| &\leq \lambda\|f_1(t)\| + (1-\lambda)\|f_2(t)\| \\
&\leq \lambda\beta(t) + (1-\lambda)\beta(t) \\
&= \beta(t),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{K}$ est convexe.
D'autre part, soit $f(.) \in \mathcal{D}$, et t_1, $t_2 \in I$, avec $t_1 < t_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_f(t_2) - x_f(t_1)\| &= \left\| \int_0^1 G(t_2,s)f(s)ds - \int_0^1 G(t_1,s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\beta(s)ds,
\end{aligned}$$

de même, d'après la relation (3.6) du Lemme 3.3.1, on a

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_f(t_2) - \dot{x}_f(t_1)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t_2}(t_2,s)f(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t_1}(t_1,s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t_2}(t_2,s) - \frac{\partial G}{\partial t_1}(t_1,s) \right| \|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t_2}(t_2,s) - \frac{\partial G}{\partial t_1}(t_1,s) \right| \beta(s)ds.
\end{aligned}$$

Et comme $\beta(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, et $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ sont uniformément continues, nous obtenons l'équicontinuité de $\mathcal{K}$ et de l'ensemble $\{\dot{x}_f(.) : x_f(.) \in \mathcal{K}\}$.

De plus, pour $f(.) \in \mathcal{D}$, nous avons par la relation (3.4) et (3.6) du Lemme 3.3.1

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &= \left\| \int_0^1 G(t,s) f(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \int_0^1 \beta(s) ds = \|\beta\|_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_f(t)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \|f(s)\| ds \\ &\leq \int_0^1 \beta(s) ds = \|\beta\|_1, \end{aligned}$$

donc les ensembles $\mathcal{K}(t)$ et $\{\dot{x}(t) : x(.) \in \mathcal{K}\}$ sont bornées dans l'espace $\mathbb{R}^d$ de dimension finie, donc ils sont relativement compacts. Donc par le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.6.1) ces deux ensembles sont relativement compacts dans $\mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, ou ce qui est équivalant à dire que $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Maintenant, on montre que $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Soit $(x_{f_n}(.)) \subset \mathcal{K}$ convergeant vers $x(.) \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$, avec $(f_n(.))_n \subset \mathcal{D}$, donc pour tout $t \in I$,

$$x_{f_n}(t) = \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds.$$

Comme $\mathcal{D}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact, on peut extraire de $(f_n(.))_n$ une sous suite qu'on note aussi $(f_n(.))_n$, convergeant faiblement vers une application $f(.) \in \mathcal{D}$.
On a la fonction $G(t,.)f_n(.)$ est Lebesgue intégrable, c'est à dire $G(t,.)f_n(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, pour tout $t \in I$.
Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, donc pour tout $t \in I$, $G(t,.)y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle G(t,.)f_n(.), y(.) \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n(.), G(t,.)y(.) \rangle \\ &= \langle f(.), G(t,.)y(.) \rangle \\ &= \langle G(t,.)f(.), y(.) \rangle, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s) f_n(s), y(s) \Big\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t,s) f(s), y(s) \Big\rangle ds.$$

En particulier pour $y(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ une base de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s), y(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s), 1\!\!1_I(s)e_j\Big\rangle ds \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)f_n(s), e_j\Big\rangle ds \\
&= \Big\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds, e_j\Big\rangle \\
&= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, e_j\Big\rangle, \ \forall\, j,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{f_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \\
&= x(t),
\end{aligned}$$

Nous avons par la relation (3.6) du Lemme 3.3.1 les mêmes argumants

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \dot{x}_{f_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_n(s)ds \\
&= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds \\
&= \dot{x}(t).
\end{aligned}$$

Nous concluons que la suite $(x_{f_n}(.), \dot{x}_{f_n}(.))$ converge vers $(x(.), \dot{x}(.)) = (x_f(.), \dot{x}_f(.))$, ceci implique que $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Etape 2.

On considère maintenant la multi-application $\Theta : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ définie par

$$\Theta(x) = \Big\{ y(.) \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) : \ y(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, \ \forall\, t \in I,$$

$$v(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f(t), \ p.p.\ t \in I, \ f(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))} \Big\}.$$

On a pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$ et pour tout $f(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$, et le fait que $y \mapsto \partial\varphi(y)$ est s.c.s et $x(.)$ est continue, on conclut que l'application $t \mapsto -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f(t)$ est mesurable.

En appliquant le Théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.3.1), on obtient l'existence d'une application mesurable $\zeta : I \to \mathbb{R}^d$, tel que $\zeta(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f(t)$, pour tout $t \in I$.

Par conséquent, l'application $y(.) : I \to \mathbb{R}^d$ définie par $y(t) = \int_0^1 G(t,s)\zeta(s)ds$ appartient à $\Theta(x)$, ceci montre que Θ est un ensemble à valeurs non vides.
De plus, soit $x(.) \in \mathcal{K}$ et $y(.) \in \Theta(x)$, donc par définition de $\Theta(x)$, il existe $f(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$ et une application Lebesgue mesurable $v(.) : I \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, \ \forall\, t \in I \ \ avec \ \ v(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f(t), \ p.p. \ t \in I.$$

On a pour tout $t \in I$, $\|f(t)\| \leq \rho(t)$ et par la relation (3.7), nous avons

$$\|v(t)\| \ \ \leq \ \ M + \rho(t) = \beta(t). \tag{3.8}$$

Ceci implique que $\Theta(x) \subset \mathcal{K}$, pour tout $x \in \mathcal{K}$, donc Θ applique $\mathcal{K}$ dans lui même.

Montrons maintenant que $\Theta(x)$ est convexe pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$.
Soient $x(.) \in \mathcal{K}$, $\lambda \in I$, et $y_1(.), y_2(.) \in \Theta(x)$, alors il existe $v_1(.)$, $v_2(.)$ telles que

$$y_1(t) = \int_0^1 G(t,s)v_1(s)ds, \ \forall\, t \in I, \ \ avec \ \ v_1(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f_1(t), \ \ f_1(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(t))},$$

et

$$y_2(t) = \int_0^1 G(t,s)v_2(s)ds, \ \forall\, t \in I, \ \ avec \ \ v_2(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f_2(t), \ \ f_2(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(t))},$$

On a

$$(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)(t) = \int_0^1 G(t,s)(\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s))ds$$

avec

$$-v_1(s) - f_1(s) \in \partial\varphi(\dot{x}(s)), \ \ \forall\, s \in I,$$

et

$$-v_2(s) - f_2(s) \in \partial\varphi(\dot{x}(s)), \ \ \forall\, s \in I.$$

Par la convexité de $\partial\varphi(x)$ (Par le Théorème 2.2.1), on obtient

$$\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s) + \lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s) \in -\partial\varphi(\dot{x}(s)),$$

implique

$$\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s) \in -\partial\varphi(\dot{x}(s)) - (\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s)).$$

Il est claire que $\lambda f_1(.) + (1-\lambda)f_2(.) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$ et comme $\mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$ est convexe, donc $\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$, on conclut que $\lambda y_1(.) + (1-\lambda)y_2(.) \in \Theta(x)$, d'où la convexité de ce dernier.

Maintenant pour montrer que, $\Theta(x)$ est compact dans $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$, pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$. Il suffit de montrer que $\Theta(x)$ est fermé dans $\mathcal{K}$, puisque $\Theta(x) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est compact.

Soit $(y_n(.))_n$ une suite d'éléments de $\Theta(x)$ convergeant vers $y(.) \in \mathcal{K}$, alors il existe une suite $(f_n(.))_n \subset \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$ et une suite $(v_n(.))$ d'applications Lesbegue mesurables, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n(t) = \int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds, \ \ \forall t \in I,$$

avec

$$v_n(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f_n(t), \ p.p. \ t \in I. \tag{3.9}$$

On a, $(v_n(.)) \subset \mathcal{D}$ qui est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact, donc en peut extraire une sous suite, qu'on note aussi $(v_n(.))$ et qui converge faiblement vers une application $v(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.
Soit $z \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, et donc pour tout $t \in I$, $G(t,.)z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \langle G(t,.)v_n(.), z(.)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle v_n(.), G(t,.)z(.)\rangle \\
&= \langle v(.), G(t,.)z(.)\rangle \\
&= \langle G(t,.)v(.), z(.)\rangle,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)v_n(s), z(s)\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t,s)v(s), z(s)\Big\rangle ds,$$

en particulier pour $z(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ une base de l'espace $\mathbb{R}^d$, d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)v_n(s), z(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)v_n(s), 1\!\!1_I(s)e_j\Big\rangle ds \\
&= \Big\langle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds, e_j\Big\rangle \\
&= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, e_j\Big\rangle, \ \forall\, j
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds = y(t).$$

D'autre part, comme $(f_n(.)) \subset \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$, qui est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact (Théorème 3.2.1), on peut extraire de $(f_n(.))_n$ une sous suite qu'on note aussi de la même manière, convergeant vers une application $f(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.);\dot{x}(.))}$.
Par conséquent, $(v_n(.) + f_n(.))_n$ converge faibement vers $(v(.) + f(.))$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Par le Théorème da Banach-Mazur (Théorème 1.6.3), il existe une suite $(z_n(.))_n$ qui converge fortement vers $(v(.)+f(.))$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ et telle que $z_n(.)$ est une combinaison convexe de $\{v_m(.) + f_m(.) : \ m \geq n\}$, c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n(.) \in co\{v_m(.) + f_m(.), \ m \geq n\}$.

Par le Théorème 1.5.2, on peut extraire une sous suite de (z_n), qui converge presque partout vers $v(.) + f(.)$. Alors,

$$v(t) + f(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{v_m(t) + f_m(t) : \ m \geq n\} \ \ p.p. \, t \in I.$$

Fixons $t \in I$ et $z \in \mathbb{R}^d$. Par la relation (3.9) et le Théorème 1.6.5 , on a

$$\Big\langle z, v(t) + f(t) \Big\rangle \leq \delta^* \Big(z, -\partial\varphi(\dot{x}(t)) \Big),$$

et puisque $\partial\varphi(\dot{x}(t))$ est un ensemble convexe fermé, nous avons par le Lemme 1.6.1,

$$d\Big(v(t) + f(t), -\partial\varphi(\dot{x}(t)) \Big) = \sup_{z' \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}} \Big(\Big\langle z', v(t) + f(t) \Big\rangle - \delta^*(z', -\partial\varphi(\dot{x}(t)) \Big) \leq 0,$$

i.e.,

$$v(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f(t) \ \ p.p. \, t \in I,$$

et comme $y(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)v(s)ds$, ceci montre que $y(.) \in \Theta(x)$. Par conséquent $\Theta(x)$ est compact dans $\mathcal{K}$.

Finalement on va montrer que Θ est une multi-application semi-continue supérieurement. Par la Proposition 1.3.5, il suffit de montrer que son graphe est fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Soient $(x_n, y_n)_n$ une suite dans le graphe de Θ donné par

$$\text{gph}(\Theta) = \Big\{ (x,y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \ \ y \in \Theta(x) \Big\},$$

qui converge vers $(x,y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x_n(.),\dot{x}_n(.))}$ et $v_n(.) \in -\partial\varphi(\dot{x}_n(.)) - f_n(.)$, telle que

$$y_n(t) \ \ = \ \ \int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds. \tag{3.10}$$

Par la relation (3.9), $(v_n(.))_n$ est inclue dans $\mathcal{D}$, qui est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact, par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(v_n(.))_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$ vers une application $v(.) \in \mathcal{D}$, i.e., $\|v(t)\| \leq \beta(t) \ \ p.p. \, t \in I$.
D'autre part, puisque $(f_n(.))_n \subset \mathcal{S}^1_{F(.,x_n(.),\dot{x}_n(.))}$, qui est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact (Théorème 3.2.1), on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement vers une application $f(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Comme $(x_n(.))$ converge fortement vers $x(.)$ dans $\mathcal{K}$, $(f_n(.))$ converge faiblement vers $f(.)$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, par l'hypothèse (H_2) et comme F est à valeures convexes compactes, on applique le Théorème 1.3.5, on conclut que $f(.) \in F(., x(.), \dot{x}(.))$, donc $f(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$.
D'autre part, nous avons

$$v_n(t) + f_n(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}_n(t)), \ \ p.p. \, t \in I,$$

et la multi-application $\partial\varphi(.)$ est s.c.s à valeurs convexes compactes (voir Théorème 2.2.1 et Proposition 2.2.2), on applique le Théorème 1.3.5, on obtient $v(t)+f(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)), p.p.t \in I$.
La fonction $G(t,.)v_n(.)$ est Lebesgue intégrable pour tout $t \in I$, soit $z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$, et donc pour tout $t \in I$, $G(t,.)z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\langle G(t,.)v_n(.),z(.)\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\langle v_n(.),G(t,.)z(.)\rangle\\ &= \langle v(.),G(t,.)z(.)\rangle\\ &= \langle G(t,.)v(.),z(.)\rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\Big\langle G(t,s)v_n(s),z(s)\Big\rangle ds = \int_0^1\Big\langle G(t,s)v(s),z(s)\Big\rangle ds,$$

en partculier pour $z(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ est une base de $\mathbb{R}^d$, d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\Big\langle G(t,s)v_n(s),z(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\Big\langle G(t,s)v_n(s),1\!\!1_I(s)e_j\Big\rangle ds\\ &= \Big\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds,e_j\Big\rangle\\ &= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)v(s)ds,e_j\Big\rangle,\ \forall j,\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds.$$

Par la relation (3.10),

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds,\ \ \forall\, t\in I.$$

Par conséquent $(x(.),y(.)) \in \mathrm{gph}(\Theta)$, par suite le graphe de Θ est fermé et donc Γ est s.c.s. On applique le Théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.3.7) à Θ, on obtient l'existence de $x(.) \in \mathcal{K}$ telle que $x(.) \in \Theta(x(.))$, c'est à dire $x(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)v(s)ds$, pour tout $t \in I$, avec $v(t) \in -\partial\varphi(\dot{x}(t)) - f(t)$, et $f(.) \in \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$. Par le Lemme 3.3.1, $\ddot{x}(t) = v(t),\ \ p.p.$ et $x(1) = \dot{x}(0) = 0$. Alors nous obtenons

$$-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + f(t) \subset -\partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t,x(t),\dot{x}(t)),\ \ p.p.\, t\in I,$$

c'est à dire $x(.)$ est une solution dans $\mathbf{W}^{2.1}(I,\mathbb{R}^d)$ du problème $(\mathcal{P}_F)$.
Ceci termine la preuve. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre Théorème d'existence de ce chapitre.

Théorème 3.3.2 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $F : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et compactes satisfaisant les hypothèses*

(H_1) *F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)-$mesurable ;*

(H_2) *$(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ est $\mathcal{H}$-continue ;*

(H_3) *il existe une fonction positive $\rho(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que*

$$F(t, x, y) \subset \rho(t)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d},$$

pour tout $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Alors, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_{ext(F)}) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + ext(F(t, x(t), \dot{x}(t))), & p.p. \text{ sur } I, \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution $x(.) \in \mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$.

Preuve.
Par le Théorème 2.2.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\partial\varphi(x)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante $M > 0$ telle que $\partial\varphi(x) \subset M\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}$.
Soit $x(.) \in S(\mathcal{P}_F)$ l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, c'est à dire,

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\ddot{x}(s)ds, \ \forall\, t \in I,$$

et

$$-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)) \ \ p.p.\, t \in I.$$

Alors il existe une application $f(.) \in \mathbf{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$ et une application mesurable $g(.)$ avec $g(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t))$, pour p.p. $t \in I$, telle que

$$-\ddot{x}(t) = g(t) + f(t), \ p.p.\, t \in I,$$

avec

$$\mathbf{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))} = \Big\{ f(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d) : \ f(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)), \ \ p.p.\, t \in I \Big\}.$$

Donc, pour tout $t \in I$, nous avons par l'hypothèse (H_3)

$$\begin{aligned} \|\ddot{x}(t)\| &= \|g(t) + f(t)\| \\ &\leq \|g(t)\| + \|f(t)\| \\ &\leq M + \rho(t), \end{aligned}$$

alors

$$\|\ddot{x}\|_1 = \int_0^1 \|\ddot{x}(t)\|dt \leq M + \|\rho\|_1 := M_1. \tag{3.11}$$

En utilisant la relation (3.4) du Lemme 3.3.1, pour tout $t \in I$, on obtient

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}(s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{x}(s)\|ds \end{aligned}$$

donc

$$\|x(t)\| \leq \|\ddot{x}\|_1 \leq M_1. \tag{3.12}$$

De même, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}(s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \|\ddot{x}(s)\|ds \end{aligned}$$

donc

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \|\ddot{x}\|_1 \leq M_1. \tag{3.13}$$

Par les relations (3.12) et (3.13), nous déduisons que $S(\mathcal{P}_F)$ est borné dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Maintenant, on considère l'ensemble

$$\mathcal{W} = \left\{ h(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d) : \ \|h(t)\| \leq \rho(t), \ p.p. \ t \in I \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{W}$ est convexe, $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. En effet, soient $\lambda \in I$ et $h_1(.), h_2(.) \in \mathcal{W}$, il est claire que $\lambda h_1(.) + (1-\lambda)h_2(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, et on a pour $p.p.\ t \in I$,

$$\begin{aligned} \|\lambda h_1(t) + (1-\lambda)h_2(t)\| &\leq \lambda\|h_1(t)\| + (1-\lambda)\|h_2(t)\| \\ &\leq \lambda\rho(t) + (1-\lambda)\rho(t) \\ &= \rho(t), \end{aligned}$$

d'où la convexité de $\mathcal{W}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{W}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Soit $(h_n(.))_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{W}$, convergeant vers $h(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. On pose

pour tout $t \in I$, $s_n(t) = \dfrac{h_n(t)}{\rho(t)}$, nous avons $\|s_n(t)\| \leq 1$, c'est à dire $\big(s_n(.)\big) \subset \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, qui est faiblement*compacte (par le Théorème 1.6.2), on peut alors extraire de $(s_n(.))_n$ une sous suite qu'on note aussi $(s_n(.))_n$ et qui converge faiblement* vers une fonction $s(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire

$$\forall z(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d), \ \ \langle s_n(.), z(.)\rangle \to \langle s(.), z(.)\rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\rho\, y\|_1 &= \int_0^1 \|\rho(t)y(t)\|dt \\ &\leq \|y\|_\infty \int_0^1 \|\rho(t)\|dt \\ &\leq \|y\|_\infty \|\rho\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

alors $\rho(.)y(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \langle h_n(.), y(.)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle \rho(.)s_n(.), y(.)\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty} \langle s_n(.), \rho(.)y(.)\rangle \\ &= \langle s(.), \rho(.)y(.)\rangle \\ &= \langle \rho(.)s(.), y(.)\rangle, \end{aligned}$$

c'est à dire $(h_n(.))_n$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ vers $h(.) = \rho(.)s(.)$. Par suite $\mathcal{W}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Remarquons que pour tout $h(.) \in \mathcal{W}$, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + h(t), & \text{p.p. sur } I, \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

admet une solution unique $x_h(.) \in \mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$.
En effet.
Soient $x_1(.)$, $x_2(.)$ deux solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_h)$, d'où, pour tout $t \in I$,

$$x_1(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_1(s)ds, \quad x_2(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_2(s)ds$$

et

$$\dot{x}_1(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_1(s)ds, \quad \dot{x}_2(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_2(s)ds \tag{3.14}$$

avec

$$-\ddot{x}_1(t) - h(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_1(t)), \ \ p.p.\, t \in I, \ x_1(1) = \dot{x}_1(0) = 0$$

et

$$-\ddot{x}_2(t) - h(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_2(t)),\ \ p.p.\, t \in I,\ x_2(1) = \dot{x}_2(0) = 0.$$

On obtient, par la définition du sous différentiel,

$$\Big\langle -\ddot{x}_1(t) - h(t), y - \dot{x}_1(t)\Big\rangle + \varphi(\dot{x}_1(t)) \leq \varphi(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^d$$

et

$$\Big\langle -\ddot{x}_2(t) - h(t), z - \dot{x}_2(t)\Big\rangle + \varphi(\dot{x}_2(t)) \leq \varphi(z),\ \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier, pour $y = \dot{x}_2(t)$ et $z = \dot{x}_1(t)$, on obtint

$$\Big\langle -\ddot{x}_1(t) - h(t), \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\Big\rangle + \varphi(\dot{x}_1(t)) \leq \varphi(\dot{x}_2(t))$$

et

$$\Big\langle -\ddot{x}_2(t) - h(t), \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\Big\rangle + \varphi(\dot{x}_2(t)) \leq \varphi(\dot{x}_1(t)),$$

en additionnant ces deux dernières inégalités, nous obtenous

$$\Big\langle \ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t), \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\Big\rangle \leq 0,$$

alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\|^2 \leq 0,$$

en intègre entre 0 et t, on obtient

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\|^2 - \|\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\|^2 \leq 0,$$

et comme $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, alors $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t),\ p.p.\, t \in I$.
Par la relation (3.14), nous avons $x_1(.) = x_2(.)$.
Donc le problème $(\mathcal{P}_h)$ admet une solutionn unique dans $\mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$.
Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathcal{X} = \Big\{(x_h(.), \dot{x}_h(.)) \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d) : x_h(.) \text{ est la solution unique de} (\mathcal{P}_h), h(.) \in \mathcal{W}\Big\},$$

qui est un ensemble compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$.
En effet, soient $(x_h(.), \dot{x}_h(.)) \in \mathcal{X}$, nous avons

$$x_h(t) = \int_0^1 G(t, s)\ddot{x}_h(s)ds,\ \forall t \in I,$$

avec

$$-\ddot{x}_h(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_h(t)) + h(t),\ \ p.p.\, t \in I,$$

pour tout $\tau, t \in I$, $(\tau \leq t)$, on a par la relation (3.6) du Lemme 3.3.1

$$\begin{aligned}
\|(x_h(t), \dot{x}_h(t)) - (x_h(\tau), \dot{x}_h(\tau))\| &= \|(x_h(t) - x_h(\tau), \dot{x}_h(t) - \dot{x}_h(\tau))\| \\
&= \|x_h(t) - x_h(\tau)\| + \|\dot{x}_h(t) - \dot{x}_h(\tau)\| \\
&= \left\| \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_h(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)\ddot{x}_h(s)ds \right\| \\
&+ \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_h(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s)\ddot{x}_h(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| \|\ddot{x}_h(s)\| ds \\
&+ \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s) \right| \|\ddot{x}_h(s)\| ds \\
&= \int_0^1 \left(|G(t,s) - G(\tau,s)| + \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s) \right| \right) \|\ddot{x}_h(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 \left(|G(t,s) - G(\tau,s)| + \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s) \right| \right) (M + \rho(s)) ds.
\end{aligned}$$

Et comme $\rho(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ sont uniformément continues, alors l'ensemble $\mathcal{X}$ équicontinue.
D'autre part, pour tout $h(.) \in \mathcal{W}$, nous avons par la relation (3.4) du Lemme 3.3.1, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\|(x_h(t), \dot{x}_h(t))\| &= \|x_h(t)\| + \|\dot{x}_h(t)\| \\
&= \| \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_h(s)ds \| + \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_h(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)| \|\ddot{x}_h(s)\| ds + \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \|\ddot{x}_h(s)\| ds \\
&\leq 2 \int_0^1 \|\ddot{x}_h(s)\| ds = 2\|\ddot{x}_h\|_1 = 2M_1.
\end{aligned}$$

Alors, l'ensembles $\mathcal{X}(t) = \{(x_h(t), \dot{x}_h(t)) : (x_h(.), \dot{x}_h(.)) \in \mathcal{X}\}$ est borné dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donc elle est relativement compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzélà (Théorème 1.6.1), l'ensemble $\mathcal{X}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$.

En suite on montre que $\mathcal{X}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Soit $(x_n(.), \dot{x}_n)_n(.)$ une suite d'éléments de $\mathcal{X}$ qui converge vers $(x(.), \dot{x}_n(.)) \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n(.) \in \mathcal{W}$ telle que $(x_n(.), \dot{x}_n(.)) = (x_{h_n}(.), \dot{x}_{h_n}(.))$, alors pour tout $t \in I$

$$x_n(t) = x_{h_n}(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds$$

et

$$\dot{x}_n(t) = \dot{x}_{h_n}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds,$$

avec

$$-\ddot{x}_{h_n}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_{h_n}(t)) + h_n(t). \tag{3.15}$$

Comme $\mathcal{W}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$-compact, on peut extraire de $(h_n(.))_n$ une sous suite notée aussi $(h_n(.))_n$ qui converge dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, par rapport à la topologie faible $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$ vers une application $h(.) \in \mathcal{W}$, et puisque $\|\ddot{x}_{h_n}(t)\| \leq M + \rho(t) := \rho_1(t)$, donc $(\ddot{x}_n(.))$ converge faiblement vers une application $\xi(.)$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.
Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, pour tout $t \in I$, $G(t,.)y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \langle G(t,.)\ddot{x}_{h_n}(.), y(.)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \ddot{x}_{h_n}(.), G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle \xi(.), G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle G(t,.)\xi(.), y(.)\rangle,
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s), y(s)\Big\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\xi(s), y(s)\Big\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = 1\!\!1_I(.)e_j$, avec $(e_j)_j$ une base de $\mathbb{R}^d$, d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds, y(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s), 1\!\!1_I(.)e_j\Big\rangle ds \\
&= \Big\langle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds, e_j\Big\rangle \\
&= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)\xi(s)ds, e_j\Big\rangle, \ \forall\, j
\end{aligned}$$

ce ci implique que

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{h_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\xi(s)ds,$$

et par les mêmes arguments

$$\dot{x}(t) = \lim_{n\to\infty} \dot{x}_{h_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\xi(s)ds,$$

ceci montre que $\ddot{x}(.) = \xi(.)$. Nous concluons que la suite $(x_{h_n}(.), \dot{x}_{h_n}(.))$ converge vers $(x(.), \dot{x}(.))$.
D'autre part, on a par la relation (3.10), et par la proposition 2.2.2, $\partial\varphi(.)$ est une multi-application à valeurs convexes compactes et semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^d$, en

utilisant le Théorème 1.3.5, on obtient $-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + h(t)$, c'est à dire $(x(.), \dot{x}(.)) = (x_h(.), \dot{x}_h(.)) \in \mathcal{X}$. Donc $\mathcal{X}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, et par suite la compacité de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$.

On pose $\widehat{\mathcal{X}} = \overline{co}(\mathcal{X})$, donc $\widehat{\mathcal{X}}$ est convexe compact dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Maintenant, on considère l'application $p : \mathcal{W} \to \widehat{\mathcal{X}}$ définie par $p(h) = (x_h(.), \dot{x}_h(.))$, où $x_h(.)$ est l'unique solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_h)$ correspondant à $h(.)$.

On démontre que p est continue de $\mathcal{W}$ muni de la topologie faible dans $\widehat{\mathcal{X}}$.
Soit $(h_n(.))$ une suite d'éléments de $\mathcal{W}$ qui converge vers $h(.) \in \mathcal{W}$, par rapport à la topologie faible, nous avons que $p(h_n) = (x_{h_n}(.), \dot{x}_{h_n}(.))$ est une suite d'éléments de $\widehat{\mathcal{X}}$ qui est compact, on peut extraire de $(x_{h_n}(.), \dot{x}_{h_n}(.))$ une sous suite qui converge vers $(x(.), \dot{x}(.)) \in \widehat{\mathcal{X}}$. On sait que

$$-\ddot{x}_{h_n}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_{h_n}(t)) + h_n(t), \;\; p.p.\, t \in I,$$

donc

$$\|\ddot{x}_{h_n}(t)\| \leq M + \rho(t), \;\; p.p.\, t \in I$$

alors $(\ddot{x}_{h_n}(.))$ converge faiblement vers une application $\xi_1(.)$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, et on a pour $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, et pour $t \in I$, $G(t, .)y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \langle G(t,.)\ddot{x}_{h_n}(.), y(.)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle \ddot{x}_{h_n}(.), G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle \xi_1(.), G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle G(t,.)\xi_1(.), y(.)\rangle
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s), y(s) \Big\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\xi_1(s), y(s) \Big\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = 1\!\!\mathrm{I}_I(.)e_j$, où $(e_j)_j$ une base de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s), y(s) \Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s), 1\!\!\mathrm{I}_I(s)e_j \Big\rangle ds \\
&= \Big\langle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds, e_j \Big\rangle \\
&= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)\xi_1(s)ds, e_j \Big\rangle, \; \forall\, j
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_{h_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\xi_1(s)ds = x(t)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \dot{x}_{h_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_{h_n}(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\xi_1(s)ds = \dot{x}(t),$$

donc $(x_{h_n}(.), \dot{x}_{h_n}(.))$ converge vers $(x(.), \dot{x}(.))$, ceci montre que $\xi_1(.) = \ddot{x}(.)$, et on a $-\ddot{x}_{h_n}(t) - h_n(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_{h_n}(t))$, et comme $\partial\varphi(.)$ est s.c.s à valeurs convexes compactes (par Théorème 2.2.1 et Proposition 2.2.2), on obtient par le Théorème 1.3.5, $-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + h(t)$, c'est à dire $x(.)$ est une solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_h)$, donc p est continue.

Maintenat on définit la multi-application $R : \widehat{\mathcal{X}} \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ par

$$R(x, \dot{x}) = \mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))} = \left\{ f(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d) : \ f(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)), \ p.p.\, t \in I \right\}.$$

Par la Proposition de Scorza-Dragoni (Proposition 3.2.2), étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensembe fermé $I_\varepsilon \subseteq I$ tel que $\lambda(I \backslash I_\varepsilon) < \varepsilon$ et $F/_{I_\varepsilon \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d}$ est $\mathcal{H}$-continue.
Par le Théorème 3.2.6, on obtient une application continue $r : \widehat{\mathcal{X}} \to \mathbf{L}^1_w(I, \mathbb{R}^d)$, telle que $r(x, \dot{x}) \in ext(R(x, \dot{x}))$, pour tout $(x(.), \dot{x}(.)) \in \widehat{\mathcal{X}}$. Et par le Théorème 3.2.4,

$$ext(R(x, \dot{x})) = ext(\mathcal{S}^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}) = \mathcal{S}^1_{ext(F(.,x(.),\dot{x}(.)))}.$$

Remarquons que $r(\widehat{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{W}$. On considère alors l'application $q(.) = (p \circ r)(.) : \widehat{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{X}}$, qui est continue.
En effet, soit $(x_n(.), \dot{x}_n(.)) \subset \widehat{\mathcal{X}}$, convergeant vers $(x(.), \dot{x}(.)) \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Alors $r(x_n, \dot{x}_n) \to^{\|.\|_w} r(x, \dot{x})$ dans $\mathbf{L}^1_w(I, \mathbb{R}^d)$. Puisque $\|x_n\|_{\mathbf{C}}$, $\|x\|_{\mathbf{C}} \leq M_1$, nous avons pour tout $t \in I_\varepsilon$, $r(x_n, \dot{x}_n)(t), r(x, \dot{x})(t) \in F(I_\varepsilon, M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}, M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d})$ qui est compact dans $\mathbb{R}^d$. Donc nous pouvons appliquer la Proposition 3.2.3, pour conclure que $(r(x_n, \dot{x}_n))$ $\sigma(\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^d}, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d})$-converge vers $r(x(.), \dot{x}(.))$ dans W, où nous prenons $W = \{f(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d) : \ f(t) \in F(t, M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}, M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d})\}$, et comme p est continue de $\mathcal{W}$ muni de la topologie faible dans $\widehat{\mathcal{X}}$, on conclue que $p(r(x_n, \dot{x}_n)) \to p(r(x, \dot{x}))$ dans $\widehat{\mathcal{X}}$, donc $q(.)$ est continue.

On applique le Théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.3.6), on obtient l'existence de $(x(.), \dot{x}(.)) \in \widehat{\mathcal{X}}$ tel que $(x(.), \dot{x}(.)) = q(x(.), \dot{x}(.)) = p(r(x, \dot{x}))$, donc $p(r(x, \dot{x}))$ est l'unique solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_h)$ correspondant à $r(x(.), \dot{x}(.))$, c'est à dire $-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + r(x, \dot{x})(t)$, et comme $r(x, \dot{x})(t) \in ext(F(t, x(t), \dot{x}(t)))$, on obtient

$$-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + ext(F(t, x(t), \dot{x}(t))), \ \ p.p.\, t \in I, \ \ avec \ x(1) = \dot{x}(0) = 0,$$

donc $x(.)$ est une solution dans $\mathbf{W}^{2.1}(I, \mathbb{R}^d)$ du problème $(\mathcal{P}_{ext(F)})$. ■

Chapitre 4

Un Théorème de densité entre l'ensemble des solutions du problème relaxé et problème original

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons que l'ensemble des solutions du problème

$$(\mathcal{P}_{ext(F)})\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + ext(F(t, x(t), \dot{x}(t))), & \text{p.p. sur } [0,1], \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

est dense dans l'ensemble des solution du problème

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), & \text{p.p. sur } [0,1], \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, et $F : [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur $[0,1]$ et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

4.2 Théorème de densité

Posons $I = [0,1]$.

Théorème 4.2.1 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $F : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et compactes sataisfaisant les hypothèses*

(H_1) *F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable ;*

(H_2) *il existe une fonction positive $\lambda(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$, telle que*

$$\mathcal{H}\big(F(t,x,y), F(t,x',y')\big) \leq \lambda(t)(\|x - x'\| + \|y - y'\|), \ \ p.p.\ t \in I,$$

pour tout $(x,x'), (y,y') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$;

(H_3) *il existe une fonction non négative $\rho(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que*

$$F(t,x,y) \subset \rho(t)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}, \textit{pour tout } (t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

Alors, l'ensemble des solutions $S(\mathcal{P}_{ext(F)})$ du problème $(\mathcal{P}_{ext(F)})$ est dense dans l'ensemble des solutions $S(\mathcal{P}_F)$ du problème $(\mathcal{P}_F)$ par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$.

Preuve.

On commence par montrer que $S(\mathcal{P}_F) \subset \overline{S(\mathcal{P}_{ext(F)})}$.
Soit $x(.) \in S(\mathcal{P}_F)$. Alors par définition il existe $f \in S^1_{F(.,x(.),\dot{x}(.))}$ et une application mesurable $g : I \to \mathbb{R}^n$ avec $g(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t))$, $\forall\, t \in I$, telle que

$$-\ddot{x}(t) \;=\; g(t) + f(t) \;\; p.p.\; sur \;\; I \tag{4.1}$$

et $x(1) = \dot{x}(0) = 0$, avec

$$x(t) \;=\; \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}(s)ds \;\; et \;\; \dot{x}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}(s)ds \tag{4.2}$$

Soit $\widehat{\mathcal{X}} \subseteq \mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I,\mathbb{R}^d)$ donné dans la preuve du Théorème 3.3.2, qui est convexe compact dans $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)\times\mathbf{C}(I,\mathbb{R}^d)$. Soit $(y,\dot{y}) \in \widehat{\mathcal{X}}$ et $\varepsilon > 0$, on définit la multi-application $\Delta_\varepsilon : I \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ par

$$\Delta_\varepsilon(t) = \Big\{ v \in F(t,y(t),\dot{y}(t)) : \; \|f(t) - v\| < \varepsilon + d\Big(f(t), F(t,y(t),\dot{y}(t))\Big)\Big\}.$$

Remarquons par la définition de la borne inférieure que pour tout $t \in I$,

$$d\Big(f(t), F(t,y(t),\dot{y}(t))\Big) = \inf_{w \in F(t,y(t),\dot{y}(t))} \|f(t) - w\|,$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in F(t,y(t),\dot{y}(t)) : \; \|f(t) - v_\varepsilon\| < \varepsilon + d\Big(f(t), F(t,y(t),\dot{y}(t))\Big),$$

alors $\Delta_\varepsilon(.)$ est à valeurs non vides.
De plus, $\mathbf{gph}(\Delta_\varepsilon) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
En effet. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{gph}(\Delta_\varepsilon) \;&=\; \Big\{ (t,v) \in I \times \mathbb{R}^d : \; v \in \Delta_\varepsilon(t) \Big\} \\
&=\; \Big\{ (t,v) \in I \times \mathbb{R}^d : \; v \in F(t,y(t),\dot{y}(t)) \;\; et \;\; \|f(t) - v\| < \varepsilon + d\Big(f(t), F(t,y(t),\dot{y}(t))\Big) \Big\} \\
&=\; \Big\{ (t,v) \in I \times \mathbb{R}^d : \; v \in F(t,y(t),\dot{y}(t)) \Big\} \\
&\bigcap\; \Big\{ (t,v) \in I \times \mathbb{R}^d : \; \|f(t) - v\| < \varepsilon + d\Big(f(t), F(t,y(t),\dot{y}(t))\Big) \Big\},
\end{aligned}$$

On pose, $\gamma : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t,v) = \|f(t) - v\| - d\Big(f(t), F(t, y(t), \dot{y}(t))\Big),$$

nous avons

$$\begin{aligned} d\Big(f(t), F(t, y(t), \dot{y}(t))\Big) &= \inf_{w \in F(t,y(t),\dot{y}(t))} \|f(t) - w\| \\ &\leq \|f(t) - v\|, \ \forall v \in F(t, y(t), \dot{y}(t)), \end{aligned}$$

c'est à dire $\gamma(.,.)$ est à valeurs positives, et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{gph}(\Delta_\varepsilon) &= \Big\{(t,v) \in I \times \mathbb{R}^d : \ v \in F(t, y(t), \dot{y}(t))\Big\} \bigcap \Big\{(t,v) \in I \times \mathbb{R}^d : \gamma(t,v) < \varepsilon\Big\} \\ &= \mathbf{gph}\big(F(., y(.), \dot{y}(.))\big) \cap \gamma^{-1}(]0, \varepsilon[). \end{aligned}$$

Comme F est mesurable et les applications $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto \dot{y}(t)$ sont mesurables, alors par le Théorème 1.3.3, $t \mapsto F(t, y(t), \dot{y}(t))$ est mesurable.
En suite, vu que $\mathcal{L}(I)$ est μ-complete, par le Lemme 1.3.2, on conclut que $\mathbf{gph}\big(F(., y(.), \dot{y}(.))\big) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et par le Lemme 1.3.1, on obtient la mesurabilté de la fonction distance $t \mapsto d\Big(f(t), F(t, y(t), \dot{y}(t)\Big)$. Par conséquent $\gamma(.,.)$ est une application de Carathéodory (i.e., mesurable par rapport à t et continue par rapport à x), donc par le Lemme 1.3.3, $\gamma(.,.)$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, alors $\gamma^{-1}(]0, \varepsilon[) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on conclut que $\mathbf{ghp}(\Delta_\varepsilon) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi, par le Théorème 1.3.2, on obtient une application mesurable $u : I \to \mathbb{R}^d$, telle que $u(t) \in \Delta_\varepsilon(t)$, $\forall\, t \in I$.

Maintenant, on définit la multi-application $G_\varepsilon : \widehat{\mathcal{X}} \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ par

$$G_\varepsilon(y, \dot{y}) = \Big\{u \in \mathcal{S}^1_{F(.,y(.),\dot{y}(.))} : \ \|f(t) - u(t)\| < \varepsilon + d\Big(f(t), F(t, y(t), \dot{y}(t))\Big), \ p.p. \ sur \ I\Big\}.$$

Par ce qui précède, pour tout $(y, \dot{y}) \in \widehat{\mathcal{X}}$, $G_\varepsilon(y, \dot{y}) \neq \emptyset$. Par la Proposition 3.2.1, l'application $(y, \dot{y}) \mapsto G_\varepsilon(y, \dot{y})$ est s.c.i à valeurs non vides décomposables, donc $(y, \dot{y}) \mapsto \overline{G_\varepsilon(y, \dot{y})}$ l'est aussi. On applique le Théorème 3.2.5, nous obtenous une sélection continue $g_\varepsilon : \widehat{\mathcal{X}} \to \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$ de $\overline{G_\varepsilon(.,.)}$ i.e., $g_\varepsilon(y, \dot{y}) \in \overline{G_\varepsilon(y, \dot{y})}$, pour tout $(y, \dot{y}) \in \widehat{\mathcal{X}}$.
Alors, par la définition de $G_\varepsilon(.,.)$ et l'hpothèse (H_2), on a pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|f(t) - g_\varepsilon(y, \dot{y})(t)\| &< \varepsilon + d\Big(f(t), F(t, y(t), \dot{y}(t))\Big) \\ &\leq \varepsilon + \mathcal{H}\Big(F(t, x(t), \dot{x}(t)), F(t, y(t), \dot{y}(t))\Big) \\ &\leq \varepsilon + \lambda(t)\Big(\|x(t) - y(t)\| + \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|\Big). \end{aligned}$$

D'apprès le Théorème 3.2.7, il existe une sélection continue $h_\varepsilon : \widehat{\mathcal{X}} \to \mathbf{L}^1_w(I, \mathbb{R}^d)$ telle que $h_\varepsilon(y, \dot{y}) \in ext(G_\varepsilon(y, \dot{y})) \subset ext(\mathcal{S}^1_{F(.,y(.),\dot{y}(.))}) = \mathcal{S}^1_{ext(F(.,y(.),\dot{y}(.)))}$, et $\|g_\varepsilon(y, \dot{y}) - h_\varepsilon(y, \dot{y})\|_w \leq \varepsilon$, pour tout $(y, \dot{y}) \in \widehat{\mathcal{X}}$.

Maintenant, soit $\varepsilon_n \downarrow 0$, quand $n \to +\infty$, on pose pour tout $n \geq 1$, $g_{\varepsilon_n} = g_n$ et $h_n = h_{\varepsilon_n}$. Suivant la preuve du Théorème 3.3.2, on définit une application continue $q(.) = (p \circ h_n) : \widehat{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{X}}$. On applique le Théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.3.6), on obtient $(x_n, \dot{x}_n) \in \widehat{\mathcal{X}}$ tel que $(x_n, \dot{x}_n) = (p \circ h_n)(x_n, \dot{x}_n)$, $n \geq 1$, i.e., $-\ddot{x}_n(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_n(t)) + h_n(x_n, \dot{x}_n)(t)$, p.p. sur I, avec $x_n(1) = \dot{x}_n(0) = 0$, et

$$x_n(t) \;=\; \int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_n(s)ds \;\; et \;\; \dot{x}_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_n(s)ds. \tag{4.3}$$

D'où, pour tout $n \geq 1$, il existe une application mesurable $k_n(.)$ tel que $k_n(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_n(t))$ et

$$-\ddot{x}_n(t) \;=\; k_n(t) + h_n(x_n, \dot{x}_n)(t), \;\; p.p.\ t \in I. \tag{4.4}$$

Comme $(x_n(.), \dot{x}_n(.)) \subset \widehat{\mathcal{X}}$, et $\widehat{\mathcal{X}}$ compact par extraction d'une sous suite qu'on note aussi $(x_n(.), \dot{x}_n(.))$, celle ci converge dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d) \times \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$ vers une application $(\widehat{x}(.), \dot{\widehat{x}}(.)) \in \widehat{\mathcal{X}}$. Nous avons par les relations (4.1) et (4.4)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)\|^2 &= \Big\langle \ddot{x}_n(t) - \ddot{x}(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle \\
&= \Big\langle -k_n(t) - h_n(x_n, \dot{x}_n)(t) + g(t) + f(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle \\
&= \Big\langle g_n(x_n, \dot{x}_n)(t) - h_n(x_n, \dot{x}_n)(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle \\
&+ \Big\langle g(t) - k_n(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle + \Big\langle f(t) - g_n(x_n, \dot{x}_n)(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle,
\end{aligned}$$

et par la définition du sous-différentiel,

$$\Big\langle g(t), y - \dot{x}(t) \Big\rangle + \varphi(\dot{x}(t)) \leq \varphi(y), \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}^d$$

et

$$\Big\langle k_n(t), z - \dot{x}_n(t) \Big\rangle + \varphi(\dot{x}_n(t)) \leq \varphi(z), \;\; \forall\, z \in \mathbb{R}^d.$$

En partculier, pour $y = \dot{x}_n(t)$ et $z = \dot{x}(t)$, alors

$$\Big\langle g(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle + \varphi(\dot{x}(t)) \leq \varphi(\dot{x}_n(t))$$

et

$$\Big\langle k_n(t), \dot{x}(t) - \dot{x}_n(t) \Big\rangle + \varphi(\dot{x}_n(t)) \leq \varphi(\dot{x}(t)).$$

En additionnant ces deux dernières inégalités, on obtient

$$\Big\langle g(t) - k_n(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t) \Big\rangle \leq 0.$$

Par suite

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{x}_n(t)-\dot{x}(t)\|^2 \leq \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(t)-h_n(x_n,\dot{x}_n)(t), \dot{x}_n(t)-\dot{x}(t)\Big\rangle + \Big\langle f(t)-g_n(x_n,\dot{x}_n)(t), \dot{x}_n(t)-\dot{x}(t)\Big\rangle.$$

En intégrant entre 0 et t, et sachant que $\dot{x}_n(0) = \dot{x}(0) = 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\|\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)\|^2 \leq \int_0^t \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds +$$

$$\int_0^t \Big\langle f(s) - g_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds.$$

Par la Proposition de Scorza-Dragoni (Proposition 3.2.2), étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble $I_\varepsilon \subseteq I$, telle que $\lambda(I \backslash I_\varepsilon) < \varepsilon$ et $F/_{I_\varepsilon \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d}$ est $\mathcal{H}$-continue.
On sait que $\|g_n(x_n,\dot{x}_n) - h_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w < \varepsilon_n$, alors quand $n \to +\infty$, $(g_n(x_n,\dot{x}_n) - h_n(x_n,\dot{x}_n)) \to^{\|.\|_w} 0$ dans $\mathbf{L}^1_w(I,\mathbb{R}^d)$. Comme $(x_n,\dot{x}_n) \in \widehat{\mathcal{K}}$, danc $(x_n(t),\dot{x}_n(t)) \in M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d} \times M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}$, il est claire que $h_n(x_n,\dot{x}_n), g_n(x_n,\dot{x}_n) \in W$, où $W = \{f(.) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d) : f(t) \in F(t, M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}, M_1\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d})\}$. On a

$$\begin{aligned} \|g_n(x_n,\dot{x}_n)\| &\leq \|g_n(x_n,\dot{x}_n) - h_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w + \|h_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\|g_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w \leq \lim_{n\to+\infty}\|h_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|h_n(x_n,\dot{x}_n)\| &\leq \|h_n(x_n,\dot{x}_n) - g_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w + \|g_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\|h_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w \leq \lim_{n\to+\infty}\|g_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w, \end{aligned}$$

alors $\lim_{n\to+\infty}\|g_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w = \lim_{n\to+\infty}\|h_n(x_n,\dot{x}_n)\|_w = l$. Par la proposition 3.2.3, on conclut que $(g_n(x_n,\dot{x}_n))$ et $(h_n(x_n,\dot{x}_n))$ $\sigma(\mathbf{L}^1,\mathbf{L}^\infty)$-converge vers l sur W, alors $(g_n(x_n,\dot{x}_n) - h_n(x_n,\dot{x}_n))\sigma(\mathbf{L}^1,\mathbf{L}^\infty)$-converge vers 0, i.e., $\forall z \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$,

$$\Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n) - h_n(x_n,\dot{x}_n), z\Big\rangle \to 0. \tag{4.5}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(.) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(.), \dot{x}_n(.) - \dot{x}(.)\Big\rangle &= \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(.) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(.), \dot{x}_n(.) - \dot{\widehat{x}}(.)\Big\rangle \\ &+ \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(.) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(.), \dot{\widehat{x}}(.) - \dot{x}(.)\Big\rangle. \end{aligned}$$

Par la relation (4.5), en posant $z = \dot{\widehat{x}}(.) - \dot{x}(.)$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(.) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(.), \dot{\widehat{x}}(.) - \dot{x}(.)\Big\rangle = 0$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{\widehat{x}}(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{\widehat{x}}(s)\Big\rangle ds \\
&\qquad \leq \int_0^1 \|g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s)\|\|\dot{x}_n(s) - \dot{\widehat{x}}(s)\|ds \\
&\qquad \leq \|\dot{x}_n - \dot{\widehat{x}}\|_{\mathbf{C}} \int_0^1 \|g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s)\|ds \\
&\qquad \leq \|\dot{x}_n - \dot{\widehat{x}}\|_{\mathbf{C}} \int_0^1 \big(\|g_n(x_n,\dot{x}_n)(s)\| + \|h_n(x_n,\dot{x}_n)(s)\|\big)ds \\
&\qquad \leq 2\|\dot{x}_n - \dot{\widehat{x}}\|_{\mathbf{C}} \int_0^1 \rho(s)ds \\
&\qquad = 2\|\dot{x}_n - \dot{\widehat{x}}\|_{\mathbf{C}}\|\rho\|_1 \to 0,
\end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$.
On conclut alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds \to 0, \ \ quand\ n \to +\infty,$$

or pour tout $t \in I$,

$$\int_0^t \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds \leq \int_0^1 \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds,$$

alors

$$\int_0^t \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds \ \ \to \ \ 0 \ quand\ n \to +\infty.$$

Nous avons aussi par l'hpothèse (H_2) et le fait que $f(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ \ p.p.\, t \in I$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \Big\langle f(s) - g_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\Big\rangle ds \\
&\qquad \leq \int_0^t \|f(s) - g_n(x_n,\dot{x}_n)(s)\|\|\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\|ds \\
&\qquad \leq \int_0^t \Big(\varepsilon_n + d\Big(f(s), F(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))\Big)\Big)\|\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \Big(\varepsilon_n + \mathcal{H}\Big(F(s,x(s),\dot{x}(s)), F(s,x_n(s),\dot{x}_n(s))\Big)\Big)\|\dot{x}_n(s)-\dot{x}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \Big(\varepsilon_n + \lambda(s)(\|x(s)-x_n(s)\| + \|\dot{x}(s)-\dot{x}_n(s)\|)\Big)\|\dot{x}_n(s)-\dot{x}(s)\|ds,
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|\dot{x}_n(t)-\dot{x}(t)\|^2 \leq \int_0^1 \Big\langle g_n(x_n,\dot{x}_n)(s) - h_n(x_n,\dot{x}_n)(s), \dot{x}_n(s)-\dot{x}(s)\Big\rangle ds$$

$$+\int_0^1 \Big(\varepsilon_n + \lambda(s)\big(\|x_n(s)-x(s)\| + \|\dot{x}_n(s)-\dot{x}(s)\|\big)\Big)\|\dot{x}_n(s)-\dot{x}(s)\|ds$$

sachant que $(x_n(.))_n$ converge vers $\widehat{x}(.)$ dans $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$, en faisant tendre $n \to +\infty$ dans cette dernière inégalité, nous obtenons par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\frac{1}{2}\|\dot{\widehat{x}}(t)-\dot{x}(t)\|^2 \leq \int_0^t \Big(\lambda(s)(\|\widehat{x}(s)-x(s)\| + \|\dot{\widehat{x}}(s)-\dot{x}(s)\|)\Big)\|\dot{\widehat{x}}(s)-\dot{x}(s)\|ds.$$

Alors, par le Lemme 1.6.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\dot{\widehat{x}}(t)-\dot{x}(t)\| &\leq \int_0^t \lambda(s)\|\widehat{x}(s)-x(s)\|ds + \int_0^t \lambda(s)\|\dot{\widehat{x}}(s)-\dot{x}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \lambda(s)\|\dot{\widehat{x}}(s)-\dot{x}(s)\|ds + \int_0^t \lambda(s)\Big(\int_0^s \|\dot{\widehat{x}}(\tau)-\dot{x}(\tau)\|d\tau\Big)ds.
\end{aligned}$$

Par le Lemme 1.6.3, on onclut que $\|\dot{\widehat{x}}(t)-\dot{x}(t)\| \leq 0$, p.p, c'est à dire $\dot{\widehat{x}}(t) = \dot{x}(t)$, p.p. $t \in I$. Les relations (4.2) et (4.3) assurent que $x(.) = \widehat{x}(.)$. Par conséquent $x_n \to x$ dans $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$ quand $n \to +\infty$, sachant que $x_n(.) \in S(\mathcal{P}_{ext(F)})$, $n \geq 1$, on conclut que $S(\mathcal{P}_F) \subset \overline{S(\mathcal{P}_{ext(F)})}$.

Maintenant pour montrer que $\overline{S(\mathcal{P}_{ext(F)})} \subset S(\mathcal{P}_F)$, et comme $S(\mathcal{P}_{ext(F)}) \subset S(\mathcal{P}_F)$, il suffit de montrer que $S(\mathcal{P}_F)$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$.
Soit $(x_n(.)) \subset S(\mathcal{P}_F)$ telle que $x_n \to x \in \mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$, alors il existe $h_n(.) \in F(.,x_n(.),\dot{x}_n(.))$, vérifiant $-\ddot{x}_n(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_n(t)) + h_n(t)$, donc $\|h_n(t)\| \leq \rho(t)$, $\forall\, t \in I$, i.e., $(h_n(.))$ converge faiblement vers une application $h(.) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$, et $\|\ddot{x}_n(t)\| \leq \rho_1(t)$, donc $(\ddot{x}_n(.))$ converge faiblement vers une application $\xi(.) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$.
Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$, alors $G(t,.)y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$, et pour tout $t \in I$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\langle G(t,.)\ddot{x}_n(.), y(.)\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\langle \ddot{x}_n(.), G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle \xi(.), G(t,.)y(.)\rangle \\
&= \langle G(t,.)\xi(.), y(.)\rangle,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_n(s), y(s)\Big\rangle ds = \int_0^1 \Big\langle G(t,s)\xi(s), y(s)\Big\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = \mathbb{1}(.)e_j$, avec $(e_j)_j$ une base de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_n(s), y(s)\Big\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \Big\langle G(t,s)\ddot{x}_n(s), \mathbb{1}(s)e_j\Big\rangle ds\\ &= \Big\langle \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_n(s)ds, e_j\Big\rangle\\ &= \Big\langle \int_0^1 G(t,s)\xi(s)ds, e_j\Big\rangle, \ \forall\, j.\end{aligned}$$

Ce ci implique que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,s)\ddot{x}_n(s)ds\\ &= \int_0^1 G(t,s)\xi(s)ds\\ &= x(t),\end{aligned}$$

et par les mêmes arguments

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \dot{x}_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{x}_n(s)ds\\ &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\xi(s)ds\\ &= \dot{x}(t),\end{aligned}$$

ceci montre que $\ddot{x}(.) = \xi(.)$ p.p. Nous concluons que la suite $\big(x_n(.), \dot{x}_n(.)\big)$ converge vers $(x(.), \dot{x}(.))$. D'autre part, on sait que F est à valeurs convexes compactes et est s.c.s sur $\mathbb{R}^d$, en utilisant le Théorème 1.3.5, on obtient $h(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t))$ p.p, et comme $-\ddot{x}_n(t) - h_n(t) \in \partial\varphi(\dot{x}_n(t))$ et $\partial\varphi(.)$ est à valeurs convexes, compactes et est s.c.s sur $\mathbb{R}^d$, on obtient toujours par le Théorème 1.3.5, $-\ddot{x}(t) - h(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t))$, donc $-\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + h(t) \subset \partial\varphi(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t))$, alors $x(.) \in S(\mathcal{P}_F)$, ceci montre que $S(\mathcal{P}_F)$ est fermé dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Par conséquent $S(\mathcal{P}_F) = \overline{S(\mathcal{P}_{ext(F)})}$ pour la topologie de $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Ceci achève la démonstration. ■

Conclusion et perspectives

Nous étions intéressées aux problèmes d'évolution pour une certaine classe d'inclusions différentielles. L'inclusion en question est régie par le sous différentiel de Clarke ou au sens de l'analyse convexe d'une fonction régulière. Nous avons montré l'existence de solutions pour le problème original (perturbé par F) ainsi que l'existence de solutions pour un problème relaxé (perturbé par $ext(F)$).

Enfin, nous avons établi une propriété de densité entre les deux ensembles de solutions de ces problèmes. Cette étude était réalisée dans le cadre d'un espace de dimension finie.

Dans les perspectives proches, nous allons essayer de généraliser ces résultats au cadre Hilbertien. Dans les espaces de Banach, l'étude semble plus délicate vu la complexité de la sous différentiabilité dans ces espaces, mais nécessite des essais du moins dans des espaces de Banach particuliers comme par exemple les espaces $\mathbf{L}^p$ qui jouient de quelques belles propriétés, comme la réflexivité, séparabilité et l'uniforme lissité de leur norme.

Bibliographie

[1] **H. Attouch, A. Damlamian**, *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces.* Israel J. Math, 12 (1972), 373-390. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[2] **J.P. Aubin and A. Cellina**, *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin, (1984). *- Cité© 1 fois : page 1.3.2 -*

[3] **J. P. Aubin and H. Frankowska**, *Set-Valued Analysis* Birkhäser, Boston. Basel. Berlin, (1990). *- Cité© 1 fois : page 1.6.5 -*

[4] **E.P. Avgerinos and N.S. Papageorgiou**, *Existence and relaxation theorems for nonlinear multivalued boundary value problems*, APPL MATH O, 39(1999), 257-279.

[5] **D. Azzam-Laouir**, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[6] **D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault**, *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control Cybernet. 31 (2002), 659-693. *- Cité© 4 fois : pages 1.2.1, 1.3, 1.3.1 et 1.3.2 -*

[7] **D. Azzam-Laouir, S. Lounis and L. Thibault**, *Existence solutions for second-order differential inclusions with nonconvex perturbetions*, Appl. Anal. 86, (2007), 1199-1210. *- Cité© 3 fois : pages (document), 2.3 et 3.2.1 -*

[8] **D. Azzam-Laouir and S. Lounis**, *Existence solutions for a class of second order differential inclusions. Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, Volume 6, Number 2, (2005), 339-346. *- Cité© 3 fois : pages 2.1, 2.3 et 2.3 -*

[9] **D. Azzam-Laouir and S. Lounis**, *Nonconvex perturbations of second order maximal monotone diferential inclusions*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 35 (2010) 305-317. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

- Cité© 1 fois : page (document) -

[10] **D. Azzam-Laouir and S. Melit**, *Existence of solutions for a second order boundary value problem with the Clarke subdifferntial*, Filomat, Vol 31, $N°9$ (2017), 2763-2771. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[11] **D. Azzam-Laouir and S. Melit**, *Extremal solutions for a second order boundary value problem*, submitted. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[12] **A. Bressan and G. Colombo**, *Extensions and selections of maps with decomposable values*, Studia Math. 90(1988), 69-85. *- Cité© 1 fois : page 3.2.1 -*

[13] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunold, Paris, 1999. *- Cité© 2 fois : pages 1.6.2 et 1.6.6 -*

[14] **H. Brezis**, *Operateurs Maximaux Monotones*, Mathemetical Studies, vol.50. North-Holland, Amsterdam, (1972). *- Cité© 1 fois : page 1.6.2 -*

[15] **C. Castaing and M. Valadier**, *Convex analysis and measurable multifunctions*. Lectures Notes in Mathematics, vol. 580. Springer, Berlin, (1977). *- Cité© 6 fois : pages 1.3, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.2, 1.6.1 et 2.2.3 -*

[16] **A. Cellina**, *On the differential inclusion* $x' \in [-1, 1]$. Atti Accad. Naz. Liancei Rend. Cl. Fis. Mat. Natur. (8), 69 (1-2), 1-6 (1981). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[17] **L. Cesari**, *Optimization theory and applications* . Appl. of Math., Vol. 17, Springer Verlag, New York, Berlin, (1983). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[18] **F.H. Clarke**, *Optimization and nonsmooth analysis*. Wiley, New York, (1983). *- Cité© 5 fois : pages (document), 2.2.3, 2.2.6, 2.2.4 et 2.2.5 -*

[19] **B. Cornet**, *Existence of slow solutions for a class of differential inclusions* . J. Math. Anal. Appl. 96 (1983), 130-147. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[20] **F.S. DeBlasi and G. Pianigianni**, *Nonconvex valued differential inclusions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 157(1991), 469-494. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[21] **F.S. DeBlasi and G. Pianigianni**, *On the density of the extremal solutions of the differential inclusions*, Ann. Polon. Math., LVI(2)(1992), 133-142. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[22] **R.D. Descombes**, Cours d'analyse, *Librairie Vuibert, Paris*, (1962). - *Cité© 1 fois : page 1.5* -

[23] **T. Donchev**, *Qualitive properties of a class of differential inclusions*. Glas. Mat. 31 (1996), 269-276. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[24] **A. Fryszkowski and L. Gorniewicz**, *Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions*. Set-Valued Analysis 8 : 203-217, 2000. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[25] **P. Hartman**, *Ordinary differential equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, (1964). - *Cité© 1 fois : page 2.3* -

[26] **C. Henry**, *An existence theorem for a class of differentrial equations with multivalued right-hand side* . J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 179-186. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[27] **S. Hu and N.S. Papagiorgiou**, *Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory*. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, (1997). - *Cité© 14 fois : pages 1.3.2, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.10, 2.2.1, 3.2.1, 3.2.1, 3.2.3, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.2 et 3.2.3* -

[28] **A.G. Ibrahim and A.M.M. Gomaa**, *Existence theorems for Functional multivalued three-point boundary value problem of second order*, J. Egypt. Math. Soc. 8(2) (2000), 155-168. - *Cité© 1 fois : page 2.3* -

[29] **A.G. Ibrahim and A.M. Gomaa**, *Extremal solusions of classes of multivalued differential equations*. Applied Mathematics and Computation, vol. 136, n°2.3, pp 297-314, (2003). - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[30] **A.G. Ibrahim and A.M. Gomaa**, *Topological properties of the solusions dets of some defferential inclusions*. Pure Mathemetics and Applications, vol. 10, n°2, pp 197-223 - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[31] **A.M. Gomaa**, *On four-point boundary value problems for differential inclusions and differential equations with and without multivalued moving constraints.* Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 62, n°. 137, 139-154 (2012). - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[32] **A.M. Gomaa**, *Relaxation problems involving second order differential inclusion.* Abstracte and Applied Analysis, Vol 2013. (2013). - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[33] **A.M.M. Gomaa**, *Set-Valued Functions And Set-valued Differential Equations*, Thesis, Faculty of Sciences-Cairo University, (2000). - *Cité© 1 fois : page 2.3* -

[34] **M. Kisielewicz**, *Differential inclusions and optimal control.* PWN-Polish scientific publishers, (1991). - *Cité© 3 fois : pages 1.3.7, 1.6.3 et 1.6.4* -

[35] **D. Kravvaritis and N. Papageorgiou**, *Boundary value problem for nonconvex differential inclusions. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 185, $n°1$, p.p. 146-160, (1994). - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[36] **D. Kravvaritis and N.S. Papageorgiou**, *Multivalued perturbations of subdifferential type evolution equations in Hilbert space.* J. Differential Equations 76 (1988), 238-255. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[37] **J. Lehec**, *Analyse convexe approfondie.* Université Paris-Dauphine M1MMD, 2013-2014. - *Cité© 1 fois : page 1.4* -

[38] **S.A. Marano**, *Existence theorems for Multivalued Boundary Value Problem*, Bull. Australian Math. Soc. 45 (1992), 249-260. - *Cité© 1 fois : page 2.3* -

[39] **S.A. Marano**, *A Remark on a second order Three-point Boundary Value Problem*, J. Math. Anal. Apll. 183 (1994), 518-522. - *Cité© 1 fois : page 2.3* -

[40] **J.J. Moreau**, *Evolution problems associated with a moving convex set in a Hilbert space.* J. Differential Equations 26(1977), 347-374. - *Cité© 1 fois : page (document)* -

[41] **B.G. Pachpatte**, *A note on Gronwall-Bellman inequality*, J. Math. Anal, 44 (1973), 758-762.

[42] **R. R. Phelps** *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes Math. Nr.1364, Springer-Verlag (1989). Second Edition, 1993. - *Cité© 1 fois : page 1.6.3* -

[43] **R.T. Rockafellar**, *Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange*, Adv. in Math. 15 (1975), 312-333. - *Cité© 2 fois : pages 2.2.1 et 2.2.2* -

- *Cité© 1 fois : page (document)* -

[44] **W. Schirotzek**, *Nonsmooth Analysis,* Springer-Verlage.Berlin Heidelberg, 2007.
- Cité© 1 fois : page 2.2.1 -

[45] **A.A. Tolstonogov**, *Extreme continuous selectors of multivalued maps and their applications*, Journal of Differential Equations, vol. 122, n°2,(1995), 161-180.
- Cité© 1 fois : page 3.2.7 -

[46] **A. A. Tolstonogov**, *Extremal selectors of multivalued mappings and the "bang-bang" principle for evolution inclusions.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, vol. 317, no. 3, (1991), 589-593.
- Cité© 2 fois : pages 3.2.1 et 3.2.6 -

[47] **A.A. Tolstonogov**, *Solutions of a differential inclusion with unbounded right-hand side.* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 29(5), 212-225, 241 translation in Sibrian. Math. J. 29,(5), (1988), 857-868. *- Cité© 1 fois : page 2.3 -*