REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales

Thème

L'étude de quelques problèmes concernant les équations aux différences non linéaires

Présenté par :

Hamida Hamioud

Devant le jury :

N. Touafek	**Prof**	**Président**	Université de Jijel
F. Belhannache	M.A.A	**Encadreur**	Université de Jijel
A. Boussayoud	M.A.A	**Examinateur**	Université de Jijel

Promotion 2017

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu, le tout puissant, pour m'avoir donnée la force, la patience et le courage d'aller jusqu'au bout de mon travail.

Je remercie mon encadreur ***Mme Belhannache Farida****, qui me fait l'honneur d'avoir veillé et dirigé ce travail, ainsi que pour ses conseils, sa patience et sa disponibilité.*

Je remercie les membres de jury
Mr. Nouressadat Touafek *et* ***Mr. Boussayoud Ali***
d'avoir bien voulu accepter de juger ce travail.

Je remercie aussi tous mes professeurs et enseignants et toutes les personnes qui m' ont aidé tout au long de ce travail, et qui n'ont pas cessé de me donner des remarques pertinentes.

En fin, je ne serai achevés sans remercier mes chers parents qui m'ont soutenus durant tous ses années d'étude et qui m'ont encouragés sans cesse.

Dedicaces

Je dédie ce travaille de fin d'étude

Aux personnes les plus chères dans ma vie.
A mes parents pour leurs aides précieuses, leurs soutient moraux, leurs encouragements, leur sacrifices …

A mon frère, Boubaker.
A mes sœurs, Fatima, Saliha, Meriem et Amina.

A mes chères amies les étudiants de Master II Mathématiques Fondamentales.
Aux enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Une suite numérique est une application, notée généralement x, de l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (ou complexe $\mathbb{C}$). Si on connaît l'image $x(n)$ ou x_n d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ par l'application x, on dit que la suite est définie explicitement.

Une équation aux différences (récurrente) est une équation qui donne une relation entre les termes d'une même suite. Les équations aux différences sont très importantes. D'une part elles sont utilisées dans l'analyse numérique pour la résolution d'une équation à l'aide d'une suite, pour la simulation des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles. D'autre part elles sont utilisées pour modéliser quelques phénomènes dans la biologie (dynamique des populations), l'écologie, l'électronique, ... , etc.

Notre mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons des notions fondamentaux sur les équations aux différences linéaires, non linéaire et les systèmes d'équations aux différences non linéaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique des solutions de l'équation aux différences rationnelle d'ordre trois suivante

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Le troisième chapitre est partagé en deux sections. Dans la première section nous donnons la forme de la solution du système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1} \\ y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1} \end{array}\right. , \quad n = 0, 1, \ldots$$

La deuxième section de ce chapitre est consacrée à l'étude du comportement des solutions du modèle biologique suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = bx_n \exp(-ay_n) \\ y_{n+1} = cx_n(1 - \exp(-ay_n)) \end{array}\right. , \quad n = 0, 1, \ldots$$

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Ce chapitre est partagé en trois sections. Dans la première section nous présentons quelques notions de base concernant les équations aux différences linéaires.

Dans la deuxième section nous donnons des définitions et des résultats fondamentaux sur les équations aux différences non linéaires.

La dernière section présente des préliminaires sur les systèmes d'équations aux différences non linéaires. Les références utilisées dans ce chapitre sont [2], [3] et [4].

Dans toute la suite on désigne par $\mathbb{N}_{n_0} = \{n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Équations aux différences linéaires

1.1.1 Définitions et résultats généraux

Définition 1.1.1. *Une équation aux différences linéaire d'ordre k, est une équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.1}$$

avec $g(n), p_i(n), i = \overline{1,k}$ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $p_k(n)$ non nul pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Remarque 1.1.1. *L'équation* (1.1) *est dite non homogène.*

Remarque 1.1.2. *En général on associe k valeurs initiales avec l'équation aux différences linéaire* (1.1)

$$y_{n_0} = c_0, y_{n_0+1} = c_1, \cdots, y_{n_0+k-1} = c_{k-1} \tag{1.2}$$

où $c_i, i = \overline{0, k-1}$ sont des constantes réelles ou complexes.

Exemple 1.1.1. *L'équation suivante est une équation aux différences linéaire d'ordre trois.*

$$4y_{n+3} + 2y_{n+1} + y_n = 4n \ln n + n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_3.$$

Définition 1.1.2. *Une suite $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est dite solution de l'équation* (1.1) *si elle satisfait cette équation.*

Théorème 1.1.1. *[2] L'équation* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *admet une solution unique $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$.*

Définition 1.1.3. *On appelle équation homogène associée à l'équation* (1.1) *l'équation*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.3}$$

Théorème 1.1.2. *[2] L'ensemble S des solutions de l'équation* (1.3) *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Définition 1.1.4. *Un ensemble de k solutions de l'équation* (1.3) *linéairement indépendantes est dit ensemble fondamental de solutions.*

Définition 1.1.5. *Soient $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $i = \overline{1, k}$ des solutions de l'équation* (1.3), *on définit le Casoratien $W(n)$ de ces solutions par*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^k \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 & \cdots & y_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k-1}^1 & y_{n+k-1}^2 & \cdots & y_{n+k-1}^k \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Lemme 1.1.3 (Lemme d'Abel). *Soient $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty}, i = \overline{1, k}$ des solutions de l'équation* (1.3) *et soit $W(n)$ leurs Casoratien, alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.5}$$

avec

$$\prod_{i=j}^{k} a_i = 1, \ k < j.$$

Pour démontrer ce lemme on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.4. *Considérons l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante*

$$y_{n+1} = p(n)y_n, \qquad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.6}$$

avec $y_{n_0} = y_0$ *et* $p(n)$ *est une fonction non nul définie sur* $\mathbb{N}_{n_0}$*. Alors la solution générale de l'équation* (1.6) *est donnée par*

$$y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p(i)\right] y_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.7}$$

avec

$$\prod_{i=j}^{k} a_i = 1, \ k < j.$$

Démonstration. Par récurrence.

Pour $n = n_0 + 1$. De l'équation (1.6), on a

$$\begin{aligned} y_{n_0+1} &= p(n_0)y_{n_0} \\ &= p(n_0)y_0 \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n_0} p(i)y_0\right], \end{aligned}$$

donc (1.7) est vraie pour $n = n_0 + 1$.

Maintenant supposons que

$$y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p(i)\right] y_0$$

et montrons que

$$y_{n+1} = \left[\prod_{i=n_0}^{n} p(i)\right] y_0. \tag{1.8}$$

De (1.6) et l'hypothèse on trouve

$$\begin{aligned} y_{n+1} = p(n)y_n &= p(n)\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p(i)\right] y_0 \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n} p(i)\right] y_0. \end{aligned}$$

D'où (1.8).

■

Démonstration du Lemme 1.1.3

On va démontrer le lemme pour $k = 2$ et de la même manière on peut montrer le cas général. Considérons l'équation aux différences suivante

$$y_{n+2} + p_1(n)y_{n+1} + p_2(n)y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.9}$$

Soient $\{y_n^1\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\{y_n^2\}_{n=n_0}^{+\infty}$ deux solutions de l'équation (1.9) alors le Casoratien de ces solutions est défini par

$$W(n+1) = \det\begin{pmatrix} y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 \\ y_{n+2}^1 & y_{n+2}^2 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

de l'équation (1.9), on a

$$y_{n+2}^i = -p_1(n)y_{n+1}^i - p_2(n)y_n^i, \quad i = 1, 2$$

donc

$$W(n+1) = \det\begin{pmatrix} y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 \\ -p_1(n)y_{n+1}^1 - p_2(n)y_n^1 & -p_1(n)y_{n+1}^2 - p_2(n)y_n^2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les propriétés des déterminants on trouve

$$\begin{aligned} W(n+1) &= -p_2(n)\det\begin{pmatrix} y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 \\ y_n^1 & y_n^2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)(-1)p_2(n)\det\begin{pmatrix} y_n^1 & y_n^2 \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$W(n+1) = (-1)^2 p_2(n) W(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.11}$$

En utilisant le Lemme 1.1.4, on obtient

$$\begin{aligned} W(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^2 p_2(i)\right] W(n_0) \\ &= (-1)^{2(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_2(i)\right] W(n_0). \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.5. *Supposons que* $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, *alors* $W(n) \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ *si et seulement s'il existe* $\widetilde{n} \in \mathbb{N}_{n_0}$ *tel que* $W(\widetilde{n}) \neq 0$.

Proposition 1.1.6. *Soit* $\{y_n^1, y_n^2, \cdots, y_n^k\}$ *une famille des solutions de l'équation* (1.3). *Alors ces solutions sont linéairement indépendantes si et seulement si leurs Casoratien est non nul pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Démonstration. Soient $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $i = \overline{1,k}$ des solutions de l'équation (1.3) et soient c_i, $i = \overline{1,k}$ des constantes réelles.
Supposons que

$$c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2 + \cdots + c_k y_n^k = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

alors on peut trouver k équations

$$\begin{cases} c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2 + \cdots + c_k y_n^k = 0, \\ c_1 y_{n+1}^1 + c_2 y_{n+1}^2 + \cdots + c_k y_{n+1}^k = 0, \\ \vdots \\ c_1 y_{n+k-1}^1 + c_2 y_{n+k-1}^2 + \cdots + c_k y_{n+k-1}^k = 0. \end{cases} , \ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.12}$$

Si on pose

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^k \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 & \cdots & y_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k-1}^1 & y_{n+k-1}^2 & \cdots & y_{n+k-1}^k \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$(1.12) \Longleftrightarrow Y(n)A = (0,0,\ldots,0)^t,\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.13}$$

On sait que (1.13) admet uniquement la solution triviale (nulle) si et seulement si $\det Y(n) \neq 0$ i.e.,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0 \Longleftrightarrow \det Y(n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

et comme

$$W(n) = \det Y(n),$$

alors $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty},\ \ i = \overline{1,k}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si

$$W(n) \neq 0.$$

■

Théorème 1.1.7 (Théorème fondamental). *Considérons l'équation* (1.3)*. Si $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, alors l'équation* (1.3) *admet un ensemble fondamental de solutions pour $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.*

Démonstration. soit $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty},\ i = \overline{1,k}$ les solutions unique de l'équation (1.3) avec les conditions initiales

$$y^i_{n_0+i-1} = 1,\ \ y^i_{n_0+j} = 0, \quad j \neq i-1,\ 1 \leq i \leq k.$$

Soit $W(n)$ leur Casoratien, alors

$$\begin{aligned} W(n_0) &= \det \begin{pmatrix} y^1_{n_0} & y^2_{n_0} & \cdots & y^k_{n_0} \\ y^1_{n_0+1} & y^2_{n_0+1} & \cdots & y^k_{n_0+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^1_{n_0+k-1} & y^2_{n_0+k-1} & \cdots & y^k_{n_0+k-1} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$W(n_0) = \det \mathrm{I_k} = 1 \neq 0,$$

donc l'ensemble $\{y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^k\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.3).

■

Lemme 1.1.8. *Soient* $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\{\widetilde{y}_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *deux solutions de l'équation* (1.1), *alors* $\{y_n - \widetilde{y}_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est une solution de l'équation* (1.3).

Théorème 1.1.9. *Soient* $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $i = \overline{1,k}$ *des solutions linéairement indépendantes de l'équation* (1.3) *et soit* $\{y_n^p\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *une solution particulière de l'équation* (1.1), *alors toute autre solution* $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *de l'équation* (1.1) *s'écrit*

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i y_n^i + y_n^p, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Démonstration. Soient $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.1) et $\{y_n^p\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de cette équation, d'après le Lemme 1.1.8, on a $\{y_n - y_n^p\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.3), donc

$$y_n - y_n^p = \sum_{i=1}^{k} c_i y_n^i,$$

d'où

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i y_n^i + y_n^p.$$

■

1.1.2 Équations aux différences linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation aux différences linéaire homogène à coefficients constants suivante

$$y_{n+k} + p_1 y_{n+k-1} + \cdots + p_k y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.14}$$

avec p_i, $i = \overline{1,k}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$.

Théorème 1.1.10. *L'équation* (1.14) *a des solutions de la forme* $y_n = \lambda^n$ *avec* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *si* λ *une racine du polynôme*

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k.$$

Démonstration. Considérons l'équation (1.14) et soit λ une racine de P.

Supposons que $y_n = \lambda^n, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ et montrons que $\{y_n\}_{n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.14).
On a

$$\begin{aligned} \lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k\lambda^n &= \lambda^n\left(\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k\right) \\ &= \lambda^n P(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

donc $y_n = \lambda^n$ est une solution de (1.14).

■

Définition 1.1.6. *Le polynôme $P(\lambda)$ est appelé polynôme caractéristique associé à l'équation* (1.14).

Définition 1.1.7. *L'équation $P(\lambda) = 0$, est appelée équation caractéristique associée à l'équation* (1.14).

Théorème 1.1.11. *Si $\lambda_i, \ i = \overline{1,k}$ sont des racines distinctes de P, alors l'ensemble $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (1.14).

Démonstration. Soient $\lambda_i, \ i = \overline{1,k}$ les racines distinctes de P, d'après le Théorème 1.1.10 on trouve que $\{\lambda_i^n\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ i = \overline{1,k}$ sont des solutions de l'équation (1.14). Soit $W(n)$ le Casoratien de ces solutions, d'après le Corollaire 1.1.5 il suffit de montrer que $W(0) \neq 0$.
On a

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix},$$

c'est le déterminant de $Vandermonde$, alors

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i). \qquad (1.15)$$

Puisque les $\lambda_i, \ i = \overline{1,k}$ sont distinctes, alors $W(0) \neq 0$, donc $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.14).

■

Remarque 1.1.3. *Soient* $\lambda_i,\ i=\overline{1,k}$ *les racines distinctes de* P. *Alors la solution générale de l'équation* (1.14) *est*

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Lemme 1.1.12. *[2] Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *des racines de* P *de multiplicités respectives* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *tel que* $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = k$ *et* $r \leq k$, *alors l'ensemble*

$$\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \cdots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \cdots, \lambda_r^n, \cdots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\}.$$

est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.14) *et la solution générale de cette équation dans ce cas est*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n\,, \qquad c_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Exemple 1.1.2. *Considérons l'équation aux différences linéaire homogène suivante*

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 3y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.16}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (1.16) *est*

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0.$$

et les racines de cette équation sont

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i \ \text{ et } \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$$

donc la solution générale est

$$y_n = c_1(1+\sqrt{2}i)^n + c_2(1-\sqrt{2}i)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \ \ n = 0, 1, \cdots$$

1.2 Équations aux différences non linéaires

Soit $\mathbb{G}$ une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{G}^{k+1} \to \mathbb{G}$ une fonction continue.

1.2.1 Définitions et résultats généraux

Définition 1.2.1. *Une équation aux différences non linéaire d'ordre $k+1$ est une équation de la forme*

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.17}$$

où f n'est pas de la forme (1.1).

Remarque 1.2.1. *L'équation* (1.17) *est appelée équation aux différences non autonome.*
Si on a

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.18}$$

alors l'équation (1.18) *est dite autonome.*

Définition 1.2.2. *Une suite $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est dite solution de l'équation* (1.18) *si elle satisfait cette équation.*

Remarque 1.2.2. *L'équation* (1.18) *avec les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k}$ admet une solution unique.*

Définition 1.2.3. *Soit $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ une solution de l'équation* (1.18)*, $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est dite*

- *eventuellement périodique de période p si*

$$\exists n_0 \geq k, x_{n+p} = x_n, \forall n \geq n_0.$$

- *périodique de période p si*

$$\exists p \geq 1, x_{n+p} = x_n, \forall n \geq -k.$$

Définition 1.2.4. *Soit $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ une solution de l'équation* (1.18)*. On dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est permanente si*

$$\exists N \in \mathbb{N}_0, \ \ \exists M, m > 0 \ \text{ tel que } \ m \leq x_n \leq M, \ \ \forall n \geq N.$$

1.2.2 Stabilité des équations aux différences non linéaires autonome

Définition 1.2.5. *Un point $\overline{x} \in \mathbb{G}$ est appelé point d'équilibre de l'équation* (1.18) *si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}).$$

Remarque 1.2.3. *Un point d'équilibre de l'équation* (1.18) *est une solution constante de cette équation.*

Définition 1.2.6. *Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (1.18).

1. *On dit que $\overline{x}$ est localement stable (stable) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ est une solution de l'équation* (1.18) *et $x_{-k}, \cdots, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{G}$ avec*
$$|x_{-k} - \overline{x}| + \cdots + |x_{-1} - \overline{x}| + |x_0 - \overline{x}| < \delta,$$
alors
$$|x_n - \overline{x}| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \qquad n \geq -k.$$
2. *On dit que $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable (asymptotiquement stable) si*
   - *$\overline{x}$ est localement stable.*
   - *S'il existe $\gamma > 0$ tel que si $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ est une solution de l'équation* (1.18) *et $x_{-k}, \cdots, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{G}$ avec*
$$|x_{-k} - \overline{x}| + \cdots + |x_{-1} - \overline{x}| + |x_0 - \overline{x}| < \gamma,$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}.$$
3. *On dit que $\overline{x}$ est globalement attractif si pour chaque solution $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ de l'équation* (1.18) *on a*
$$\forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in \mathbb{G}, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}.$$
4. *On dit que $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable si*
   - *$\overline{x}$ est localement stable.*
   - *$\overline{x}$ est globalement attractif.*
5. *$\overline{x}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Supposons que la fonction
$$\begin{aligned} f : \mathbb{G}^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{G} \\ (u_0, u_1, \cdots, u_k) &\longmapsto f(u_0, u_1, \cdots, u_k) \end{aligned}$$

est différentiable dans un voisinage du point $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x})$ où $\overline{x}$ est un point d'équilibre de l'équation (1.18).

Définition 1.2.7. *Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (1.18).

- *On appelle équation linéaire associée à l'équation* (1.18) *autour du point $\overline{x}$ l'équation suivante*

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.19}$$

avec

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overline{x}, \cdots, \overline{x}), \quad i = \overline{0, k}.$$

- *On appelle équation caractéristique associée à l'équation* (1.19) *l'équation*

$$\lambda^{k+1} - a_0 \lambda^k - \cdots - a_k = 0. \tag{1.20}$$

Théorème 1.2.1. *[3](stabilité par linéairisation)*

Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation (1.18).

a) Si toutes les racines de l'équation caractéristique (1.20) *sont de modules inférieurs strictement à un, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.*

b) S'il existe au moins une racine de l'équation caractéristique (1.20) *de module supérieur strictement à un, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est instable.*

Théorème 1.2.2. *[3] Supposons que $a_0, a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sum_{i=0}^{k} |a_i| < 1,$$

alors toutes les racines de l'équation (1.20) *sont de module inférieurs strictement à un.*

Théorème 1.2.3. *[3] Considérons le polynôme*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2, \tag{1.21}$$

avec $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$.

La condition nécessaires et suffisantes pour que les racines du polynôme (1.21) *soient de module inférieur strictement à un est*

$$|a_1| < 1 + a_2 < 2.$$

Définition 1.2.8. *Soient* $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (1.18) *et* $\overline{x}$ *un point d'équilibre de cette équation.*

On dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est non oscillatoire autour du point* $\overline{x}$ *s'il existe* $N \geq -k$ *tel que*

$$x_n > \overline{x}, \ \ \forall n \geq N \quad ou \quad x_n < \overline{x}, \ \ \forall n \geq N.$$

Sinon on dit que $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est oscillatoire autour du point* $\overline{x}$.

1.3 Système d'équations aux différences non linéaires

Soient $\mathbb{I}, \mathbb{G}$ deux parties de $\mathbb{R}$. Supposons que $f : \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1} \to \mathbb{I}$, $g : \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1} \to \mathbb{G}$ sont deux fonctions continues et considérons le système d'équations aux différences suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-r}) \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-r}) \end{array} \right. , \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.22}$$

Le système (1.22) s'écrit sous la forme vectorielle suivante

$$X_{n+1} = F(X_n), \ \ n = 0, 1, \ldots \tag{1.23}$$

avec

$$X_n = (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-r})^t$$

et

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1} & \longrightarrow & \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1} \\ (u_0, u_1, \cdots, u_k, v_0, v_1, \cdots, v_r) & \longmapsto & F((u_0, u_1, \cdots, u_k, v_0, v_1, \cdots, v_r)^t), \end{array}$$

tel que

$$F((u_0, u_1, \cdots, u_k, v_0, v_1, \cdots, v_r)^t) = \begin{pmatrix} f(u_0, u_1, \cdots, u_k, v_0, v_1, \cdots, v_r) \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ g(u_0, u_1, \cdots, u_k, v_0, v_1, \cdots, v_r) \\ v_0 \\ \vdots \\ v_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.3.1. *Le point* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{I} \times \mathbb{G}$ *est dit point d'équilibre du système* (1.22) *si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}) \ \ et \ \ \overline{y} = g(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}).$$

Définition 1.3.2. *Un point d'équilibre du système* (1.23) *est un vecteur* $\overline{X} \in \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1}$ *tel que*

$$\overline{X} = F(\overline{X}).$$

Remarque 1.3.1. $(\overline{x}, \overline{y})$ *est un point d'équilibre du système* (1.22) *si et seulement si* $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y})$ *est un point d'équilibre du système* (1.23).

Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^{k+r+2}$.

Définition 1.3.3. *Soit* $\overline{X}$ *un point d'équilibre du système* (1.23).

(a) On dit que $\overline{X}$ *est stable (ou localement stable) si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *est une solution du système* (1.23) *et* $X_0 \in \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1}$ *avec* $\| X_0 - \overline{X} \| < \delta$, *alors*

$$\| X_n - \overline{X} \| < \varepsilon, \quad \forall n \geq 0.$$

Sinon $\overline{X}$ *est dit instable.*

(b) On dit que $\overline{X}$ *est asymptotiquement stable (ou localement asymtotiquement stable) si*

- $\overline{X}$ *est stable.*
- *S'il existe* $\gamma > 0$ *tel que si* $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *est une solution du système* (1.23) *et*

$X_0 \in \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1}$ avec $\| X_0 - \overline{X} \| < \gamma$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \| X_n - \overline{X} \| = 0.$$

(c) On dit que $\overline{X}$ est dit globalement asymtotiquement stable si

- *$\overline{X}$ est asymtotiquement stable.*
- *Pour chaque solution du système (1.23) on a*

$$\forall X_0 \in \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1}, \quad \lim_{n \to +\infty} \| X_n - \overline{X} \| = 0.$$

Définition 1.3.4. *Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (1.23) et soit $F \in C^1(\mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{G}^{r+1})$. Le système linéaire associé au système (1.23) est*

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

où A est la matrice jacobienne de la fonction F evaluée en $\overline{X}$, c'est à dire

$$A = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\overline{X}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u_{k-1}}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_k}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\overline{X}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial v_{r-1}}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_r}(\overline{X}) \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{\partial g}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\overline{X}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_{k-1}}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_k}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\overline{X}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial v_{r-1}}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_r}(\overline{X}) \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3.1. *[4] Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (1.23)*

- *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne A sont dans le disque ouvert $| \lambda | < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est asymptotiquement stable.*
- *S'il existe une valeur propre de A de module supérieur strictement à un, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est instable.*

CHAPITRE 2

L'étude du comportement asymptotique des solutions d'une équation aux différences rationnelle d'ordre trois

Dans ce chapitre, on va étudier le comportement asymptotique des solutions positives de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

où $A, B \in [0, +\infty[$ et $C, D, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in]0, +\infty[$, cette équation a été étudié dans [1].

Lemme 2.0.2. *L'équation* (2.1) *est équivalente à l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{1 + y_n y_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

où $\alpha = \frac{A}{C}\sqrt{\frac{D}{C}}, \ \ \beta = \frac{B}{C}$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_{n-1}}{C + Dx_n x_{n-2}},$$

alors

$$x_{n+1} = \frac{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x_{n-1}}{1 + \sqrt{\frac{D}{C}x_n}\sqrt{\frac{D}{C}x_{n-2}}},$$

donc

$$\sqrt{\frac{D}{C}}x_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{D}{C}}(\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x_{n-1})}{1 + \sqrt{\frac{D}{C}x_n}\sqrt{\frac{D}{C}x_{n-2}}},$$

d'où

$$\sqrt{\frac{D}{C}}x_{n+1} = \frac{\frac{A}{C}\sqrt{\frac{D}{C}} + \frac{B}{C}\sqrt{\frac{D}{C}}x_{n-1}}{1 + \sqrt{\frac{D}{C}x_n}\sqrt{\frac{D}{C}x_{n-2}}}.$$

Si on pose $y_n = \sqrt{\frac{D}{C}}x_n$ on trouve

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{1 + y_n y_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

avec $\alpha = \frac{A}{C}\sqrt{\frac{D}{C}}$ et $\beta = \frac{B}{C}$.

■

Remarque 2.0.2. *Du Lemme 2.0.2, il suffit d'étudier l'équation* (2.2) *à la place de l'équation* (2.1).

2.1 L'étude de l'équation (2.2) dans le cas où $\alpha > 0$

Dans cette section on va étudier le comportement des solutions positives de l'équation (2.2) dans le cas où $\alpha > 0$.

Lemme 2.1.1. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^3 + (1-\beta)x - \alpha, \tag{2.3}$$

avec $\alpha \in]0, +\infty[$ et $\beta \in [0, +\infty[$, alors

1. *Si $\beta < 1$, on a deux cas*
   - *i) Si $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, alors f a un seul zéro dans $]0, \sqrt{1-\beta}[$.*
   - *ii) Si $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, alors f a un seul zéro dans $]\sqrt{1-\beta}, +\infty[$.*
2. *Si $\beta \geq 1$, alors f a un seul zéro dans $]\sqrt{\beta - 1}, +\infty[$.*

Démonstration. Considérons la fonction f définie par (2.3), alors

$$f(0) = -\alpha, \tag{2.4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{2.5}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f^{'}(x) = 3x^2 + 1 - \beta.$$

1. Soit $\beta < 1$. Donc

$$f^{'}(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

alors f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
D'autre part on a

$$f(\sqrt{1-\beta}) = -\alpha + 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}.$$

i) Supposons maintenant que $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$. Alors

$$f(\sqrt{1-\beta}) > 0. \tag{2.6}$$

En utilisant (2.4), (2.6) et le Théorème des valeurs intermédiaires on trouve que

$$\exists!\ x \in]0, \sqrt{1-\beta}[, \quad f(x) = 0.$$

ii) Supposons que $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, alors

$$f(\sqrt{1-\beta}) < 0. \tag{2.7}$$

En utilisant (2.5), (2.7) et le Théorème des valeurs intermédiaires on obtient que f a un seul zéro $x \in]\sqrt{1-\beta}, +\infty[$.

2. Soit $\beta \geq 1$. Alors

$$f^{'}(x) > 0, \quad \forall x \in \left]\sqrt{\beta-1}, +\infty\right[$$

c'est à dire f est strictement croissante sur $\left]\sqrt{\beta-1}, +\infty\right[$.
On aussi

$$f\left(\sqrt{\beta-1}\right) = -\alpha < 0. \tag{2.8}$$

De (2.5), (2.8) on trouve

$$\exists !\ x \in \left]\sqrt{\beta-1}, +\infty\right[, \quad f(x) = 0.$$

∎

Remarque 2.1.1. *Il est clair que* $\overline{y} \in]0, +\infty[$ *est un point d'équilibre de l'équation* (2.2) *si et seulement si* $\overline{y}$ *est un zéro de la fonction* f *définie par* (2.3).

Le resultat suivant est un conséquence directe du Lemme 2.1.1.

Corollaire 2.1.2. *On a les assertions suivantes*

1. *Si* $\beta < 1$. *Alors,*
   i) Si $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, *l'équation* (2.2) *a un seul point d'équilibre* $\overline{y} \in]0, \sqrt{1-\beta}[$.
   ii) Si $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, *l'équation* (2.2) *a un seul point d'équilibre* $\overline{y} \in]\sqrt{1-\beta}, +\infty[$.
2. *Si* $\beta \geq 1$, *alors l'équation* (2.2) *a un seul point d'équilibre* $\overline{y} \in]\sqrt{\beta-1}, +\infty[$.

Lemme 2.1.3. *Soit* $\overline{y} \in]0, +\infty[$ *le point d'équilibre de l'équation* (2.2).
L'équation linéaire associée à l'équation (2.2) *en* $\overline{y}$ *est*

$$z_{n+1} = \frac{-\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2} z_n + \frac{\beta}{1+\overline{y}^2} z_{n-1} - \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2} z_{n-2}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.9}$$

et l'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^3 + \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2}\lambda^2 - \frac{\beta}{1+\overline{y}^2}\lambda + \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2} = 0. \tag{2.10}$$

Démonstration. Considérons la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f :]0, +\infty\,[^3 & \longrightarrow &]0, +\infty\,[\\ (u, v, t) & \longmapsto & f(u, v, t) = \dfrac{\alpha + \beta v}{1 + ut}. \end{array}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,t) = \frac{-t(\alpha+\beta v)}{(1+ut)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,t) = \frac{\beta}{1+ut}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(u,v,t) = \frac{-u(\alpha+\beta v)}{(1+ut)^2},$$

donc

$$a_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{y},\overline{y},\overline{y}) = \frac{-\overline{y}(\alpha+\beta\overline{y})}{(1+\overline{y}^2)^2},$$

mais $\overline{y}$ est un point d'équilibre de l'équation (2.2) alors

$$\overline{y} = \frac{\alpha+\beta\overline{y}}{1+\overline{y}},$$

d'où

$$a_0 = \frac{-\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2}.$$

De la même manière on trouve

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{y},\overline{y},\overline{y}) = \frac{\beta}{1+\overline{y}^2},$$

$$a_2 = \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y},\overline{y},\overline{y}) = \frac{-\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2},$$

donc l'équation linéaire associée à l'équation (2.2) est (2.9) et l'équation caractéristique associée à cette équation est (2.10).

■

Théorème 2.1.4. *Soit $\overline{y} \in]0,+\infty[$ le point d'équilibre de l'équation* (2.2)*. On a*

1. *Si $\beta < 1$, alors*
   a) *$\overline{y}$ est localement asymptotiquement stable si $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$.*
   b) *$\overline{y}$ est instable si $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$.*
2. *Si $\beta \geq 1$, alors $\overline{y}$ est instable.*

Démonstration. Soit $\overline{y} \in]0,+\infty[$ le point d'équilibre de l'équation (2.2).

1. Supposons que $\beta < 1$, alors
   a) Soit $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$. On a

$$\sum_{i=0}^{2} |a_i| = \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2} + \frac{\beta}{1+\overline{y}^2} + \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2} = \frac{2\overline{y}^2+\beta}{1+\overline{y}^2},$$

comme $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$ donc $\overline{y} < \sqrt{1-\beta}$,
d'où

$$2\overline{y}^2 + \beta < 1 + \overline{y}^2,$$

ce qui implique

$$\sum_{i=0}^{2} |a_i| = \frac{2\overline{y}^2 + \beta}{1 + \overline{y}^2} < 1.$$

En appliquant le Théorème 1.2.2 on trouve que toutes les racines de l'équation (2.10) sont de module inférieurs strictement à un et le Théorème 1.2.1 donne la stabilité locale asymptotique de $\overline{y}$ dans ce cas.

b) Supposons maintenant que $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$. On considère la fonction g définie par

$$g(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2}\lambda^2 - \frac{\beta}{1+\overline{y}^2}\lambda + \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2},$$

donc

$$g(-1) = \frac{\overline{y}^2 + \beta - 1}{1+\overline{y}^2},$$

comme

$$\overline{y} > \sqrt{1-\beta},$$

alors

$$2\overline{y}^2 + \beta - 1 > 0,$$

d'où

$$g(-1) > 0,$$

et comme

$$\lim_{n \to -\infty} g(\lambda) = -\infty,$$

donc l'équation (2.10) admet une racine $\lambda \in]-\infty, -1[$ et d'après le Théorème 1.2.1, on trouve que $\overline{y}$ est instable.

2. de la même manière que *b*) on peut montrer que $\overline{y}$ est instable lorsque $\beta \geq 1$.

■

Théorème 2.1.5. *Soit* $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.2) *et* $\overline{y}$ *le point d'équilibre positif de la même équation.*

1) *Supposons que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite*

(C_1) $\quad y_{-1} < \overline{y} \leq y_{-2}, y_0$

(C_2) $\quad y_{-2}, y_0 < \overline{y} \leq y_{-1}$

Alors $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ *est oscillatoire autour du point* $\overline{y}$.

2) *Si* $\beta < 1$ *et* $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, *l'équation* (2.2) *admet une solution périodique*

$$\{\ldots, \varphi, \psi, \varphi, \psi, \varphi, \psi, \ldots\}$$

avec φ, ψ *sont deux racines distinctes de l'équation*

$$t^2 + \frac{\alpha}{\beta - 1} t - \beta + 1 = 0.$$

Démonstration.

1) Supposons que (C_1) est vérifiée et montrons par récurrence que

$$y_{2n} \geq \overline{y} \quad \text{et} \quad y_{2n+1} < \overline{y}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour $n = 0$, on a

$$y_0 \geq \overline{y} \ \text{ et } \ y_1 = \frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0 y_{-2}},$$

de (C_1) on trouve

$$\alpha + \beta y_{-1} < \alpha + \beta \overline{y} \quad \text{et} \quad 1 + y_0 y_{-2} \geq 1 + \overline{y}^2,$$

donc

$$\frac{1}{1 + y_0 y_{-2}} \leq \frac{1}{1 + \overline{y}^2},$$

d'où

$$\frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0 y_{-2}} < \frac{\alpha + \beta \overline{y}}{1 + \overline{y}^2} = \overline{y},$$

Supposons maintenant que

$$y_{2n} \geq \overline{y} \ \text{ et } \ y_{2n+1} < \overline{y}$$

et montrons que

$$y_{2n+2} \geq \overline{y} \quad \text{et} \quad y_{2n+3} < \overline{y}.$$

On a par définition

$$y_{2n+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}y_{2n-1}},$$

D'après l'hypothèse on trouve

$$\alpha + \beta y_{2n} \geq \alpha + \beta \overline{y} \quad \text{et} \quad 1 + y_{2n+1}y_{2n-1} < 1 + \overline{y}^2,$$

donc

$$\frac{1}{1 + y_{2n+1}y_{2n-1}} > \frac{1}{1 + \overline{y}^2},$$

d'où

$$\frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}y_{2n-1}} \geq \frac{\alpha + \beta \overline{y}}{1 + \overline{y}^2} = \overline{y},$$

alors

$$y_{2n+2} \geq \overline{y}. \tag{2.11}$$

D'autre part on a

$$y_{2n+3} = \frac{\alpha + \beta y_{2n+1}}{1 + y_{2n+2}y_{2n}}.$$

D'après l'hypothèse et (2.11) on trouve

$$\alpha + \beta y_{2n+1} < \alpha + \beta \overline{y} \quad \text{et} \quad 1 + y_{2n+2}y_{2n} \geq 1 + \overline{y}^2,$$

donc

$$\frac{1}{1 + y_{2n+2}y_{2n}} \leq \frac{1}{1 + \overline{y}^2},$$

d'où

$$\frac{\alpha + \beta y_{2n+1}}{1 + y_{2n+2}y_{2n}} < \frac{\alpha + \beta \overline{y}}{1 + \overline{y}^2},$$

alors

$$y_{2n+3} < \overline{y}.$$

De la même manière on peut montrer le cas (C_2).

2) Soit $\beta < 1$ et $\alpha > 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$. Supposons qu'il existe φ et ψ distinctes tel que

$$\{\ldots, \varphi, \psi, \varphi, \psi, \varphi, \psi, \ldots\}$$

est une solution de l'équation (2.2). Donc

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta\varphi}{1 + \psi^2}, \quad \psi = \frac{\alpha + \beta\psi}{1 + \varphi^2}.$$

Alors

$$\varphi + \varphi\psi^2 = \alpha + \beta\varphi, \tag{2.12}$$
$$\psi + \psi\varphi^2 = \alpha + \beta\psi. \tag{2.13}$$

On prend la différence entre (2.12) et (2.13) on obtient

$$(\varphi - \psi) - \varphi\psi(\varphi - \psi) = \beta(\varphi - \psi),$$

comme $\varphi \neq \psi$, alors

$$\varphi\psi = 1 - \beta. \tag{2.14}$$

En multipliant (2.12) par ψ et (2.13) par φ on trouve

$$\varphi\psi + \varphi\psi^3 = \alpha\psi + \beta\varphi\psi, \tag{2.15}$$
$$\psi\varphi + \psi\varphi^3 = \alpha\varphi + \beta\psi\varphi. \tag{2.16}$$

On prend la différence entre (2.15) et (2.16) on obtient

$$\varphi\psi(\psi^2 - \varphi^2) = \alpha(\psi - \varphi),$$

Comme $\varphi \neq \psi$, alors

$$\varphi\psi(\psi + \varphi) = \alpha,$$

d'où

$$\varphi + \psi = \frac{\alpha}{\varphi\psi}. \tag{2.17}$$

En combinant (2.14) et (2.17) on obtient

$$\varphi + \psi = \frac{\alpha}{1 - \beta}. \tag{2.18}$$

De (2.14) et (2.18) on trouve que φ et ψ sont deux racines de l'équation quadratique

$$t^2 + \frac{\alpha}{\beta - 1} t - \beta + 1 = 0, \tag{2.19}$$

on a

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{(\beta - 1)^2} - 4(1 - \beta) > 0,$$

car

$$\alpha > 2(1 - \beta)^{\frac{3}{2}}.$$

donc φ et ψ sont deux racines distinctes de l'équation (2.19).

■

Proposition 2.1.6. *Soit* $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.2), *alors pour tout* $n \geq 0$ *on a*

$$y_{2n} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0 \tag{2.20}$$

et

$$y_{2n+1} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-1}. \tag{2.21}$$

Démonstration. De l'équation (2.2), on a

$$y_{n+1} \leq \alpha + \beta y_{n-1}, \quad \forall n = 0, 1, \ldots \tag{2.22}$$

Montrons par récurrence (2.20) et (2.21).
On a

$$y_0 = \sum_{j=0}^{-1} \alpha\beta^j + \beta^0 y_0,$$

de (2.22) on trouve

$$y_1 \leq \alpha + \beta y_{-1} = \sum_{j=0}^{0} \alpha\beta^j + \beta^1 y_{-1},$$

donc (2.20) et (2.21) sont vraies pour $n = 0$.
Supposons maintenant que

$$y_{2n} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0 \tag{2.23}$$

et

$$y_{2n+1} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-1}. \tag{2.24}$$

Et montrons que

$$y_{2(n+1)} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_0 \quad \text{et} \quad y_{2(n+1)+1} \leq \sum_{j=0}^{n+1} \alpha\beta^j + \beta^{n+2} y_{-1}.$$

De (2.22) on a

$$y_{2(n+1)} = y_{(2n+1)+1} \leq \alpha + \beta y_{2n}.$$

En utilisant (2.23) on trouve

$$\begin{aligned} y_{2(n+1)} &\leq \alpha + \beta \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_0, \end{aligned}$$

d'où (2.20).
D'autre part, on a

$$y_{2(n+1)+1} \leq \alpha + \beta y_{2n+1}.$$

En utilisant (2.24) on trouve

$$\begin{aligned} y_{2(n+1)+1} &\leq \alpha + \beta \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \alpha\beta^j + \beta^{n+2} y_{-1}, \end{aligned}$$

d'où (2.21).

■

Lemme 2.1.7. *Supposons que $\beta < 1$. Alors toute solution $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ de l'équation* (2.2) *est permanente.*

Démonstration. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.2), d'après la Proposition 2.1.6 on a

$$y_{2n} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha\beta^j + \beta^n y_0 = \alpha\frac{(1-\beta^n)}{1-\beta} + \beta^n y_0, \quad \forall n \geq 0$$

et

$$y_{2n+1} \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha\beta^j + \beta^{n+1} y_{-1} = \alpha\frac{(1-\beta^{n+1})}{1-\beta} + \beta^{n+1} y_{-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Comme $\beta < 1$ alors

$$y_{2n} < \frac{\alpha}{1-\beta} + y_0 \quad \text{et} \quad y_{2n+1} < \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Soit $M = \max\left(\frac{\alpha}{1-\beta} + y_0, \frac{\alpha}{1-\beta} + y_{-1}\right)$, alors

$$y_n < M, \ \ \forall n \geq 0. \tag{2.25}$$

Montrons que $\exists m > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq x_n, \quad \forall n \geq N$.

De (2.25) on a

$$\frac{1}{1 + y_n y_{n-2}} > \frac{1}{1+M^2}, \quad \forall n \geq 2$$

et comme

$$\alpha + \beta y_{n-1} > \alpha,$$

alors

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{1 + y_n y_{n-2}} > \frac{\alpha}{1+M^2} = m, \quad \forall n \geq 2$$

d'où le resultat.

■

Lemme 2.1.8. *Supposons que $\beta < 1$ et soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.2). Si $\lambda = \liminf_{n\to+\infty} y_n, \ \ \gamma = \limsup_{n\to+\infty} y_n$, alors*

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{1+\gamma^2} \leq \lambda \leq \gamma \leq \frac{\alpha + \beta\gamma}{1+\lambda^2}. \tag{2.26}$$

Démonstration. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.2). D'après le Lemme 2.1.7 on a $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ est permanente. Soient

$$\lambda = \liminf_{n\to+\infty} y_n \ \text{ et } \ \gamma = \limsup_{n\to+\infty} y_n,$$

alors par définition on a

$$\forall \varepsilon \in]0, \lambda[, \quad \exists n_0 \geq 0, \quad \lambda - \varepsilon \leq y_n \leq \gamma + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

donc

$$\lambda - \varepsilon \leq y_n \leq \gamma + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \tag{2.27}$$

$$\lambda - \varepsilon \leq y_{n-1} \leq \gamma + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 + 1 \tag{2.28}$$

$$\lambda - \varepsilon \leq y_{n-2} \leq \gamma + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 + 2 \tag{2.29}$$

de (2.28) on trouve

$$\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon) \leq \alpha + \beta y_{n-1} \leq \alpha + \beta(\gamma + \varepsilon), \quad \forall n \geq n_0 + 1 \tag{2.30}$$

de (2.27) et (2.29) on obtient

$$\frac{1}{1 + (\gamma + \varepsilon)^2} \leq \frac{1}{1 + y_n y_{n-2}} \leq \frac{1}{1 + (\lambda - \varepsilon)^2}, \quad \forall n \geq n_0 + 2 \tag{2.31}$$

En combinant (2.30) et (2.31) on trouve

$$\frac{\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon)}{1 + (\gamma + \varepsilon)^2} \leq y_{n+1} \leq \frac{\alpha + \beta(\gamma + \varepsilon)}{1 + (\lambda - \varepsilon)^2}, \quad \forall n \geq n_0 + 2$$

d'où

$$\frac{\alpha + \beta(\lambda - \varepsilon)}{1 + (\gamma + \varepsilon)^2} \leq \lambda \leq \gamma \leq \frac{\alpha + \beta(\gamma + \varepsilon)}{1 + (\lambda - \varepsilon)^2}, \quad \forall n \geq n_0 + 2$$

Comme ε est arbitraire, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ on trouve (2.26).

■

Théorème 2.1.9. *Si $\beta < 1$ et $\alpha < 2(1 - \beta)^{\frac{3}{2}}$, alors le point d'équilibre $\overline{y} \in]0, \sqrt{1 - \beta}[$ de l'équation* (2.2) *est globalement attractif.*

Démonstration. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.2). Montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \overline{y}.$$

Soient $\lambda = \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\gamma = \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$,
De (2.15) on a

$$\alpha + \beta\lambda \leq \lambda + \lambda\gamma^2 \tag{2.32}$$

et

$$\gamma + \gamma\lambda^2 \leq \alpha + \beta\gamma. \tag{2.33}$$

En multipliant (2.32) par λ et (2.33) par γ on trouve

$$\alpha\lambda + \beta\lambda^2 - \lambda^2 \leq \lambda^2\gamma^2 \tag{2.34}$$

et

$$\gamma^2\lambda^2 \leq \alpha\gamma + \beta\gamma^2 - \gamma^2, \tag{2.35}$$

de (2.34) et (2.35) on trouve

$$\alpha\lambda + \beta\lambda^2 - \lambda^2 \leq \alpha\gamma + \beta\gamma^2 - \gamma^2,$$

donc

$$(1-\beta)\lambda^2 - \alpha\lambda \geq (1-\beta)\gamma^2 - \alpha\gamma. \tag{2.36}$$

Maintenant on considère la fonction h définie par

$$\begin{array}{rcl} h :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = (1-\beta)x^2 - \alpha x. \end{array}$$

On a

$$h^{'}(x) = 2(1-\beta)x - \alpha,$$

donc h est croissante sur $]\frac{\alpha}{2(1-\beta)}, +\infty[$.
D'autre part, si $\beta < 1$ et $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, on a

$$\overline{y} < \sqrt{1-\beta}. \tag{2.37}$$

Montrons que $f\left(\frac{\alpha}{2(1-\beta)}\right) < 0$, où f est la fonction définie par (2.3).
De (2.3) on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha}{2(1-\beta)}\right) &= \left(\frac{\alpha}{2(1-\beta)}\right)^3 + (1-\beta)\left(\frac{\alpha}{2(1-\beta)}\right) - \alpha \\ &= \left(\frac{\alpha^3}{8(1-\beta)^3}\right) - \frac{1}{2}\alpha. \end{aligned}$$

Comme $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, on trouve

$$\alpha^2 < 4(1-\beta)^3,$$

alors

$$\alpha^3 < 4(1-\beta)^3\alpha,$$

comme $\beta < 1$ on obtient

$$\frac{\alpha^3}{8(1-\beta)^3} < \frac{1}{2}\alpha,$$

donc

$$f\left(\frac{\alpha}{2(1-\beta)}\right) < 0. \tag{2.38}$$

De (2.37) et (2.38) on trouve

$$\overline{y} \in \left]\frac{\alpha}{2(1-\beta)}, \sqrt{1-\beta}\right[.$$

Comme

$$\lambda \leq \overline{y} \leq \gamma,$$

alors

$$\lambda, \gamma \in \left]\frac{\alpha}{2(1-\beta)}, \sqrt{1-\beta}\right[,$$

supposons que $\lambda \neq \gamma$. C'est à dire $\lambda < \gamma$.
Comme h est croissante sur $\left]\frac{\alpha}{2(1-\beta)}, \sqrt{1-\beta}\right[$, alors

$$h(\lambda) < h(\gamma).$$

C'est une contradiction avec (2.36), i.e.,

$$\overline{y} = \lambda = \gamma = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

$\blacksquare$

Corollaire 2.1.10. *Supposons que* $\beta < 1$ *et* $\alpha < 2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}$, *alors le point d'équilibre* $\overline{y} \in]0, \sqrt{1-\beta}[$ *de l'équation* (2.2) *est globalement asymptotiquement stable.*

Lemme 2.1.11. *Soit* $\beta > 2$. *On a les assertions suivantes*

1. *Si* $x > \sqrt{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta-1}}$, *alors* $\sqrt{\beta-1} > \frac{\alpha}{x^2-\beta+1}$.
2. *Si* $x > \sqrt{\beta-1}$ *et* $y > \frac{\alpha}{x^2-\beta+1}$, *alors* $y > \frac{\alpha+\beta y}{x^2+1}$.

Démonstration. Supposons que $\beta > 2$.

1. Soit $x > \sqrt{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta-1}}$, alors

$$x^2 > \beta - 1 + \frac{\alpha^2}{(\sqrt{\beta-1})^2} + 2\alpha,$$

donc

$$x^2 > \beta - 1 + 2\alpha,$$

d'où

$$x^2 - \beta + 1 > 2\alpha,$$

alors

$$(x^2-\beta+1)\sqrt{\beta-1} > 2\alpha\sqrt{\beta-1} > \alpha,$$

car $\beta > 2$.

Ce qui implique

$$\sqrt{\beta-1} > \frac{\alpha}{x^2-\beta+1}.$$

2. Soit $x > \sqrt{\beta-1}$ et $y > \frac{\alpha}{x^2-\beta+1}$. Alors

$$y(x^2-\beta+1) > \alpha,$$

car $x^2-\beta+1 > 0$, d'où

$$y(x^2+1) > \alpha + \beta y,$$

donc

$$y > \frac{\alpha+\beta y}{x^2+1}.$$

$\blacksquare$

Théorème 2.1.12. *Supposons que $\beta > 2$, alors l'équation* (2.2) *a des solutions non bornées.*

Démonstration. Soit $\{y_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.2) avec les conditions suivantes

$$\frac{\alpha}{y_{-1}^2 - \beta + 1} < y_0 < y_{-2} < \sqrt{\beta - 1} \tag{2.39}$$

et

$$y_{-1} > \sqrt{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - 1}}. \tag{2.40}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0$ on a

$$\frac{\alpha}{y_{2n-1}^2 - \beta + 1} < y_{2n} < y_{2n-2} < \sqrt{\beta - 1} \tag{2.41}$$

et

$$y_{2n+1} > y_{2n-1} > \sqrt{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - 1}}. \tag{2.42}$$

Pour $n = 0$, on a

$$y_1 = \frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0 y_{-2}},$$

comme

$$y_0 < y_{-2} < \sqrt{\beta - 1},$$

alors

$$1 + y_0 y_{-2} < \beta,$$

donc

$$\frac{\alpha + \beta y_{-1}}{1 + y_0 y_{-1}} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{-1},$$

d'où

$$y_1 > y_{-1}. \tag{2.43}$$

De (2.39), (2.40) et (2.43) on trouve que (2.41) et (2.42) sont vraies pour $n = 0$. Supposons maintenant qu'on a (2.41) et (2.42) et montrons que

$$\frac{\alpha}{y_{2n+1}^2 - \beta + 1} < y_{2n+2} < y_{2n} < \sqrt{\beta - 1} \tag{2.44}$$

et

$$y_{2n+3} > y_{2n+1} > \sqrt{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - 1}}. \tag{2.45}$$

Tout d'abord on va montrer que

$$y_{2n+2} < y_{2n} < \sqrt{\beta - 1}.$$

De (2.42) on a

$$1 + y_{2n+1}y_{2n-1} > 1 + y_{2n-1}^2,$$

d'où

$$y_{2n+2} = \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}y_{2n-1}} < \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n-1}^2}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$y_{2n-1} > \sqrt{\beta - 1} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{y_{2n-1}^2 - \beta + 1} < y_{2n},$$

et du Lemme 2.1.11, on a

$$y_{2n} > \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n-1}^2},$$

donc

$$y_{2n} > y_{2n+2}. \tag{2.46}$$

Montrons que $\frac{\alpha}{y_{2n+1}^2 - \beta + 1} < y_{2n}$.
De (2.42) on trouve

$$1 + y_{2n+1}^2 > 1 + y_{2n+1}y_{2n-1},$$

alors

$$\frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}^2} < \frac{\alpha + \beta y_{2n}}{1 + y_{2n+1}y_{2n-1}} = y_{2n+2}. \tag{2.47}$$

D'autre part on a

$$y_{2n} > \frac{\alpha}{y_{2n-1}^2 - \beta + 1},$$

et comme

$$y_{2n+1}^2 - \beta + 1 > y_{2n-1}^2 - \beta + 1,$$

on obtient

$$y_{2n} > \frac{\alpha}{y_{2n+1}^2 - \beta + 1},$$

d'où

$$\alpha + \beta y_{2n} > \frac{\alpha(y_{2n+1}^2 + 1)}{y_{2n+1}^2 - \beta + 1},$$

alors
$$\frac{\alpha + \beta y_{2n}}{y_{2n+1}^2 + 1} > \frac{\alpha}{y_{2n+1}^2 - \beta + 1}. \tag{2.48}$$
De (2.47) et (2.48) on trouve
$$y_{2n} > \frac{\alpha}{y_{2n+1}^2 - \beta + 1}.$$
Montrons que $y_{2n+3} > y_{2n+1}$.
On a
$$y_{2n+3} = y_{2(n+1)+1} = \frac{\alpha + \beta y_{2n+1}}{1 + y_{2n+2} y_{2n}}.$$
D'après l'hypothèse et de (2.46) on obtient
$$y_{2n+2} < y_{2n} < \sqrt{\beta - 1},$$
alors
$$1 + y_{2n+2} y_{2n} < \beta,$$
donc
$$y_{2n+3} = \frac{\alpha + \beta y_{2n+1}}{1 + y_{2n+2} y_{2n}} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{2n+1}, \tag{2.49}$$
d'où
$$y_{2n+3} > y_{2n+1}.$$
De l'équation (2.49) on a
$$y_{2n+1} > \frac{\alpha}{\beta} + y_{2n-1} > \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + y_{2n-3}\right) > \cdots > (n+1)\frac{\alpha}{\beta} + y_{-1},$$
ce qui implique
$$\lim_{n \to +\infty} y_{2n+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} y_{2n+2} = 0.$$
■

2.2 L'étude de l'équation (2.2) dans le cas où $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, alors l'équation (2.2) devient
$$y_{n+1} = \frac{\beta y_{n-1}}{1 + y_n y_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.50}$$

Lemme 2.2.1. *L'équation* (2.50) *admet deux points d'équilibre*

$$\overline{y}_0 = 0, \quad \overline{y}_1 = \sqrt{\beta - 1}.$$

Démonstration. Soit $\overline{y}$ un point d'équilibre de l'équation (2.50). Alors

$$\overline{y} = \frac{\beta \overline{y}}{1 + \overline{y}^2},$$

d'où

$$\overline{y}(1 - \beta + \overline{y}^2) = 0,$$

donc $\overline{y}_0 = 0$ est un point d'équilibre de l'équation (2.50), de plus si $\beta > 1$, alors $\overline{y}_1 = \sqrt{\beta - 1}$ est un autre point d'équilibre.

■

Lemme 2.2.2. *Soit* $\overline{y}_i$, $i = 0, 1$ *les points d'équilibre de l'équation* (2.50).
L'équation linéaire associée à l'équation (2.50) *en* $\overline{y}_i$ *est*

$$z_{n+1} = \frac{-\overline{y}_i^2}{1 + \overline{y}_i^2} z_n + \frac{\beta}{1 + \overline{y}_i^2} z_{n-1} - \frac{\overline{y}_i^2}{1 + \overline{y}_i^2} z_{n-2}, \quad i = 0, 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.51}$$

et l'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^3 + \frac{\overline{y}_i^2}{1 + \overline{y}_i^2} \lambda^2 - \frac{\beta}{1 + \overline{y}_i^2} \lambda + \frac{\overline{y}_i^2}{1 + \overline{y}_i^2} = 0 \quad i = 0, 1. \tag{2.52}$$

Démonstration. Considérons la fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[^3 &\longrightarrow]0, +\infty[\\ (u, v, t) &\longmapsto f(u, v, t) = \frac{\beta v}{1 + ut}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v, t) = \frac{-t(\beta v)}{(1 + ut)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, t) = \frac{\beta}{1 + ut}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(u, v, t) = \frac{-u(\beta v)}{(1 + ut)^2},$$

alors

$$a_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{y}_i, \overline{y}_i, \overline{y}_i) = \frac{-\overline{y}_i^2}{1 + \overline{y}_i^2},$$

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{y}_i, \overline{y}_i, \overline{y}_i) = \frac{\beta}{1+\overline{y}_i^2},$$

$$a_2 = \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{y}_i, \overline{y}_i, \overline{y}_i) = \frac{-\overline{y}_i^2}{1+\overline{y}_i^2},$$

donc l'équation linéaire associée a l'équation (2.50) est (2.51) et l'équation caractéristique associée à cette équation est (2.52).

■

Théorème 2.2.3. **a)** *Le point d'équilibre* $\overline{y}_0 = 0$ *est localement asymptotiquement stable si* $\beta < 1$ *et instable si* $\beta > 1$.

b) *Si* $\beta > 1$, *alors le point d'équilibre* $\overline{y}_1 = \sqrt{\beta - 1}$ *est instable.*

Démonstration. Soient $\overline{y}_i,\ i = 0, 1$ les points d'équilibre de l'équation (2.50).

a) D'après le Lemme 2.2.2, l'équation linéaire associée à l'équation (2.50) en $\overline{y}_0$ est

$$z_{n+1} = \beta z_{n-1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

et l'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^2 - \beta = 0,$$

donc

$$|\lambda| = \sqrt{\beta},$$

alors d'après le Théorème 1.2.1, si $\beta < 1$ on trouve que $\overline{y}_0$ est localement asymptotiquement stable et instable si $\beta > 1$.

b) D'après le Lemme 2.2.2, l'équation linéaire associée à l'équation (2.50) en $\overline{y}_1$ est

$$z_{n+1} = \frac{1-\beta}{\beta} z_n + z_{n-1} + \frac{1-\beta}{\beta} z_{n-2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

et l'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^3 - \frac{1-\beta}{\beta}\lambda^2 - \lambda + \frac{1-\beta}{\beta} = 0. \tag{2.53}$$

Considérons la fonction g définie par

$$g(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1-\beta}{\beta}\lambda^2 - \lambda + \frac{1-\beta}{\beta},$$

on a

$$g(-1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to -\infty} g(\lambda) = -\infty,$$

donc l'équation (2.53) admet une racine $\lambda \in]-\infty, -1[$ avec $|\lambda| > 1$ et d'après le Théorème 1.2.1, on trouve que $\overline{y}$ est instable.

∎

De la même manière que la démonstration de la Proposition 2.1.6 on peut montrer le Lemme suivant.

Lemme 2.2.4. *Soit* $\{x_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.50)*. Alors*

$$y_{2n} \leq \beta^n y_0, \quad \forall n \geq 0 \tag{2.54}$$

et

$$y_{2n+1} \leq \beta^{n+1} y_{-1}, \quad \forall n \geq 0. \tag{2.55}$$

Corollaire 2.2.5. *Si* $\beta < 1$ *alors le point d'équilibre* $\overline{y}_0$ *est globalement attractif.*

Démonstration. Soit $\beta < 1$. En passant à la limite dans (2.54) et (2.55) lorsque $n \to +\infty$ on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} y_{2n} = \lim_{n \to +\infty} y_{2n+1} = 0,$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = 0.$$

∎

Corollaire 2.2.6. *Supposons que* $\beta < 1$ *alors le point d'équilibre* $\overline{y}_0$ *est globalement asymptotiquement stable.*

CHAPITRE 3

L'étude de quelques systèmes d'équations aux différences non linéaires

Ce chapitre comporte deux parties. La première partie est consacrée à donner la forme de la solution d'un système d'équations aux différences rationnelles. Dans la deuxième partie on va étudier le comportement asymptotique d'un modèle d'interaction hôte-parasitoïde, ces systèmes ont été étudiés dans [5] et [2].

3.1 La forme de la solution d'un système d'équations aux différences rationnelles

On considère le système d'équations aux différences suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1} \\ y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1} \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

où les conditions initiales y_0, y_{-1}, x_0, x_{-1} sont des nombres réels positifs.

Lemme 3.1.1. *Le système* (3.1) *admet* $(0,0), (0,\beta)$ *et* $(\alpha, 0)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *comme points d'équilibre.*

Démonstration. Soit $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.1). Donc

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}\,\overline{x} + 1} \text{ et } \overline{y} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}\,\overline{y} + 1},$$

si $\overline{x} = 0$ alors $(0, \beta), \beta \in \mathbb{R}$ est un point d'équilibre.
Si $\overline{y} = 0$ alors $(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}$ est un autre point d'équilibre.
Si $\overline{x} \neq 0$ et $\overline{y} \neq 0$ ona

$$\overline{x}(\overline{y}\,\overline{x} + 1) = \overline{x} \text{ et } \overline{y}(\overline{x}\,\overline{y} + 1) = \overline{y},$$

d'où

$$\overline{x}^2\overline{y} = 0 \text{ et } \overline{y}^2\overline{x} = 0.$$

Alors $(0, 0), (0, \beta)$ *et* $(\alpha, 0)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tous des points d'équilibre.

■

Le théorème suivant donne la forme de la solution du système (3.1).

Théorème 3.1.2. *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ *une solution du système* (3.1).
Supposons que $y_0 = a, y_{-1} = b, x_0 = c$ *et* $x_{-1} = d$. *Alors pour tout* $n \geq 1$ *on a*

$$x_{2n-1} = \frac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}, \quad x_{2n} = \frac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}, \tag{3.2}$$

$$y_{2n-1} = \frac{b\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}, \quad y_{2n} = \frac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}. \tag{3.3}$$

Démonstration. Par récurrence.
Pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{x_{-1}}{y_0 x_{-1} + 1} &= \frac{d}{ad+1} \\ &= \frac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i-1)ad+1]}, \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{y_{-1}}{x_0 y_{-1} + 1} = \frac{b}{cb+1} = \frac{b\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i-2)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i-1)cb+1]},$$

$$x_2 = \frac{x_0}{y_1 x_0 + 1} = \frac{c}{\frac{b}{cb+1}c+1} = \frac{c(cb+1)}{2bc+1} = \frac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i)cb+1]},$$

$$y_2 = \frac{y_0}{x_1 y_0 + 1} = \frac{a}{\frac{d}{ad+1}a+1} = \frac{a(ad+1)}{2ad+1} = \frac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{1}[(2i)ad+1]}.$$

Supposons maintenant que

$$x_{2n-1} = \frac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}, \quad x_{2n} = \frac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]},$$

$$y_{2n-1} = \frac{b\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}, \quad y_{2n} = \frac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]},$$

et montrons que

$$x_{2n+1} = \frac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)ad+1]}, \quad x_{2n+2} = \frac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i)cb+1]},$$

$$y_{2n+1} = \frac{b\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-2)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)cb+1]}, \quad y_{2n+2} = \frac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i)ad+1]}.$$

Du système (3.1), on a

$$x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = \frac{x_{2n-1}}{y_{2n}x_{2n-1}+1}.$$

D'après l'hypothèse on trouve

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= \frac{\dfrac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}}{\left[\dfrac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}\right]\left[\dfrac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}\right]+1} \\ &= \frac{\dfrac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}}{\dfrac{ad\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{d\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}}{\frac{ad}{(2n)ad+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{d\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}}{\frac{(2n+1)ad+1}{(2n)ad+1}}$$

$$= \frac{\left[d\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)ad+1]\right][(2n)ad+1]}{\left[\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]\right][(2n+1)ad+1]},$$

donc

$$x_{2n+1} = \frac{\left[d\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-2)ad+1]\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)ad+1]\right]}, \tag{3.4}$$

D'autre part, de (3.1) on a

$$y_{2(n+1)-1} = y_{2n+1} = \frac{y_{2n-1}}{x_{2n}y_{2n-1}+1}.$$

D'après l'hypothèse on trouve

$$y_{2n+1} = \frac{\frac{b\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}}{\left[\frac{c\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}\right]\left[\frac{b\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}\right]+1}$$

$$= \frac{\frac{b\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}}{\frac{cb\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}+1}$$

$$= \frac{\frac{b\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}}{\frac{cb}{(2n)cb+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{b\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}}{\frac{(2n+1)cb+1}{(2n)cb+1}}$$

$$= \frac{\left[b\prod_{i=1}^{n}[(2i-2)cb+1]\right][(2n)cb+1]}{\left[\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]\right][(2n+1)cb+1]},$$

donc

$$y_{2n+1} = \frac{b\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-2)cb+1]}{\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)cb+1]}, \tag{3.5}$$

on a aussi du système (3.1)

$$x_{2(n+1)} = x_{2n+2} = \frac{x_{2n}}{y_{2n+1}x_{2n}+1}.$$

D'après l'hypothèse et de (3.5), on trouve

$$\begin{aligned}
x_{2n+2} &= \frac{\dfrac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}}{\left[\dfrac{b\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-2)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)cb+1]}\right]\left[\dfrac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}\right]+1} \\
&= \frac{\dfrac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}}{\dfrac{bc\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)cb+1]}+1} \\
&= \frac{\dfrac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}}{\frac{bc}{(2n+1)cb+1}+1} \\
&= \frac{\dfrac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]}}{\frac{(2n+2)bc+1}{(2n+1)cb+1}} \\
&= \frac{c\left[\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)cb+1]\right][(2n+1)cb+1]}{\left[\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)cb+1]\right][(2n+2)bc+1]},
\end{aligned}$$

donc

$$x_{2n+2} = \frac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)cb+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i)cb+1]},$$

on a aussi

$$y_{2(n+1)} = y_{2n+2} = \frac{y_{2n}}{x_{2n+1}y_{2n}+1}.$$

D'après l'hypothèse et de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
y_{2n+2} &= \frac{\dfrac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}}{\left[\dfrac{d\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-2)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)ad+1]}\right]\left[\dfrac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}\right]+1} \\
&= \frac{\dfrac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}}{\dfrac{da\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)ad+1]}+1} \\
&= \frac{\dfrac{a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]}}{\frac{da}{(2n+1)ad+1}+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a\left[\prod_{i=1}^{n}[(2i-1)ad+1]\right][(2n+1)ad+1]}{\left[\prod_{i=1}^{n}[(2i)ad+1]\right][(2n+2)da+1]},$$

donc

$$y_{2n+2} = \frac{a\prod_{i=1}^{n+1}[(2i-1)ad+1]}{\prod_{i=1}^{n+1}[(2i)ad+1]}.$$

■

3.2 Le modèle de Nicholson-Bailey

Le modèle de Nicholson-Bailey à été proposé en 1935 par le biologiste entomologiste Alexander John Nicholson et le physicien Victor Albert Bailey. Ce modèle modilise l'interaction hôte-parasitoïdes et s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = bx_n \exp(-ay_n) \\ y_{n+1} = cx_n(1-\exp(-ay_n)) \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.6}$$

avec $a, b, c > 0$. Où
x_n : la densité de population de l'hôte au temps n.
y_n : la densité de parasitoïde au temps n.
b : taux de reproduction de l'hôte.
a : représente l'efficacité des parasitoïdes.
c : le nombre moyen d'oeufs viables posés par parasitoïdes sur un seul hôte.

Lemme 3.2.1. *Le système* (3.6) *admet deux points d'équilibre*

$$\overline{X}_1 = (0,0) \quad et \quad \overline{X}_2 = \left(\frac{b\ln b}{ac(b-1)}, \frac{\ln b}{a}\right), b \neq 1.$$

Démonstration. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.6). On a

$$\overline{x} = b\overline{x}\exp(-a\overline{y}) \quad \text{et} \quad \overline{y} = c\overline{x}(1-\exp(-a\overline{y})).$$

Si $\overline{x} = 0$, alors $\overline{X}_1 = (0, 0)$ est un point d'équilibre du système (3.6).
Si $\overline{x} \neq 0$, on a

$$1 = b \exp(-a\overline{y}),$$

d'où

$$\overline{y} = \frac{\ln b}{a},$$

et on a

$$\overline{x} = \frac{\overline{y}}{c(1 - \exp(-a\overline{y}))},$$

si $b \neq 1$ alors

$$\overline{x} = \frac{b \ln b}{ac(b-1)},$$

donc $\overline{X}_2 = \left(\frac{b \ln b}{ac(b-1)}, \frac{\ln b}{a}\right)$ est un autre point d'équilibre du système (3.6).

■

Soit $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.6). On a le système (3.6) s'écrit

$$X_{n+1} = F(X_n), \tag{3.7}$$

où

$$X_n = (x_n, y_n)^t$$

et

$$\begin{aligned} F : \mathbb{I} \times \mathbb{J} &\longrightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{J} \\ (u, v) &\longmapsto F(u, v) = (f(u, v), g(u, v)). \end{aligned}$$

$$f(u, v) = bu \exp(-av), \quad g(u, v) = cu(1 - \exp(-av)).$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = b \exp(-av), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = -abu \exp(-av),$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = c(1 - \exp(-av)), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = acu \exp(-av).$$

C'est à dire le système linéaire associé au système (3.7) est

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

avec A est la matrice jacobienne de la fonction F en $\overline{X}$.
donc

$$A = \begin{pmatrix} b\exp(-a\overline{y}) & -ab\overline{x}\exp(-a\overline{y}) \\ c(1-\exp(-a\overline{y})) & ac\overline{x}\exp(-a\overline{y}) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2.2. **1)** *Si $b < 1$ alors le point d'équilibre $\overline{X}_1 = (0,0)$ est asymptotiquement stable.*

2) *Si $b > 1$ alors le point d'équilibre $\overline{X}_1 = (0,0)$ est instable.*

Démonstration.

1) On a le système linéaire associé au système (3.7) en $\overline{X}_1$ est

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

où

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc le polynôme caractéristique associé au système (3.7) est défini par

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = -\lambda(b - \lambda).$$

Il est clair que les racines de P sont

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = b.$$

Si $b < 1$, alors d'après le Théorème 1.3.1 le point $\overline{X}_1 = (0,0)$ est asymptotiquement stable.

2) Si $b > 1$, alors d'après le Théorème 1.3.1 le point $\overline{X}_1 = (0,0)$ est instable.

■

Théorème 3.2.3. *Soit $b \neq 1$, alors le point d'équilibre $\overline{X}_2 = \left(\frac{b\ln b}{ac(b-1)}, \frac{\ln b}{a}\right)$ est instable si $b > 1$ et asymptotiquement stable si $b < 1$.*

Démonstration. On a le système linéaire associé au système (3.7) en $\overline{X}_2 = \left(\frac{b\ln b}{ac(b-1)}, \frac{\ln b}{a}\right)$ est

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-b\ln b}{c(b-1)} \\ \frac{c(b-1)}{b} & \frac{\ln b}{b-1} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)\left(\frac{\ln b}{b-1} - \lambda\right) + \ln b,$$

d'où

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(1 + \frac{\ln b}{b-1}\right)\lambda + \frac{b\ln b}{b-1}.$$

Montrons que

$$1 + \frac{b\ln b}{b-1} > 2.$$

i.e,

$$\frac{b\ln b}{b-1} > 1.$$

Considérons la fonction $g\ :]0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = x - 1 - x\ln x.$$

On a

$$g^{'}(x) = -\ln x,$$

donc g est une fonction strictement décroissante pour $x > 1$ et strictement croissante pour $x < 1$ et comme $g(1) = 0$, alors $g(x) < 0, \quad \forall x \in]0,\ +\infty[$ donc

$$x - 1 < x\ln x,$$

d'où

$$\frac{x\ln x}{x-1} > 1, \ \ \forall x > 1$$

et

$$\frac{x\ln x}{x-1} < 1, \ \ \forall x < 1.$$

Appliquons le Théorème 1.2.3, on trouve que le point $\overline{X}_2$ est instable si $b > 1$ et asymptotiquement stable si $b < 1$.

■

Lemme 3.2.4. *Soit* $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ *une solution du système* (3.6). *Alors*

$$x_{n+1} \leq b^{n+1} x_0, \quad \forall n \geq 0 \tag{3.8}$$

et

$$y_{n+1} \leq c b^n x_0, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.9}$$

Démonstration. Par récurrence.
On a

$$x_{n+1} = b x_n \exp(-a y_n) \leq b x_n \tag{3.10}$$

et

$$y_{n+1} = c x_n (1 - \exp(-a y_n)) \leq c x_n. \tag{3.11}$$

Alors pour $n = 0$, on trouve

$$x_1 \leq b x_0 \quad \text{et} \quad y_1 \leq c x_0.$$

Supposons que

$$x_{n+1} \leq b^{n+1} x_0 \quad \text{et} \quad y_{n+1} \leq c b^n x_0,$$

et montrons que

$$x_{n+2} \leq b^{n+2} x_0 \quad \text{et} \quad y_{n+2} \leq c b^{n+1} x_0.$$

De (3.10) et (3.11), on a

$$x_{n+2} \leq b x_{n+1} \quad \text{et} \quad y_{n+2} \leq c x_{n+1},$$

d'après l'hypothèse on obtient

$$x_{n+2} \leq b b^{n+1} x_0 \leq b^{n+2} x_0 \quad \text{et} \quad y_{n+1} \leq b c b^n x_0 \leq c b^{n+1} x_0.$$

■

Corollaire 3.2.5. *Si* $b < 1$ *alors le point d'équilibre* $\overline{X}_1 = (0, 0)$ *est globalement attractif.*

Démonstration. Soit $b < 1$.
En passant à la limite dans (3.8) et (3.9) lorsque $n \to +\infty$ on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = 0.$$

■

Corollaire 3.2.6. *Si $b < 1$ alors le point d'équilibre $\overline{X}_1 = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié le comportement asymptotique des solutions d'une équation aux différences rationnelle d'ordre trois. En suite on a donné la forme de la solution d'un système d'équations aux différences rationnelle.

Enfin, on a étudié la stabilité asymptotique des solutions d'un modèle boilogique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abo-Zeid, M. A. Al-Shabi, *Global behavior of a third order difference equation*, Tamk. J. Math.**3(43)**(2012), 375-383.

[2] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed, Springer, New York, 2005.

[3] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, Advances in Discrete Mathematics and Applications , Volume 4, Chapman and Hall, CRS Press, 2005.

[4] V.L. Kocic, G. Ladas, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications, Kluwer Academic Publishers, Kingston, 1993.

[5] A. S. Kurbanli, C. Çinar, I. Yalçinkaya, *On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations* $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1}, y_{n+1} = \dfrac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$, Math. Comp. Model. **53**(2011), 1261-1267.