REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia- JIJEL

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : ***Mathématiques appliquées***

Option : ***probabilités et statistique***

Thème

Estimation Des Paramètres Pour Un Modèle GARCH (p.q)

Présenté par :

BOULMELH Zineb & FAROUR Meriem

Devant le jury :

Président : *Mr. ZERZAIHI Tahar*	**Professeur**
Encadreur : *Mme. SELLAMI Nawel*	**M.A.A**
Examinatrice : *Mme. DJERIDI Zohra*	**M.A.A**
Examinatrice : *Mme. MADI Meriem*	**M.A.A**

Promotion 2016/2017

Remerciements

En tout premier lieu, Nous remercions le bon Dieu, tout puissant, de nous avoir donné la force pour dépasser toutes les difficultés et mener à terme ce présent travail.

Nous tenons à saisir cette occasion pour adresser nos sincères remerciements et nos profondes reconnaissances aux personnes qui nous ont apportées leurs aides et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Nous voudrons tout d'abord adresser toutes nos gratitudes à notre encadreur ***SELLAMI Nawel*** *pour sa patience, sa grande disponibilité, sesencouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire.*

Nos remerciements vont en particulier à professeur ***ZERZAIHI Tahar*** à accepté la présidence de nos jurys.

Nous exprimons nos profonds remerciements aux enseignantes ***DJERIDI Zohra*** *et* ***MADI Meriem****d'avoir accepté l'évaluation de ce mémoire.*

Nos remerciements sont adressés également aux membres du département de Mathématiques : Enseignants, Etudiants, Collègues, ...

Nous remercions nos frères et nos sœurs, nos familles, nos proches, qui nous ont soutenus et encouragés tout au long de la réalisation de ce mémoire.

MERIEM, ZINEB

Table des matières

Introduction

L'incertitude joue un rôle central dans la plupart des problèmes abordés par la théorie financière. L'observation de certaines séries chronologiques provenant du monde économique et financier par exemple les taux de changes, les taux d'actions, les indices,..., montrent des caractéristiques spécifiques qui ne sont pas théoriquement prises en compte dans la modélisation de Box-Jenkins[2], à savoir que leur volatilité ou leur variance se modifie dans le temps.

Suite aux travaux pionniers de Engle[9] en 1982, il est devenu couramment dans la littérature financière de retenir comme mesure de volatilité (i.e. variance conditionnelle) la variance d'un modèle "Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastiques" : $ARCH$ qui est une généralisation de l'approche de Box- Jenkins.

Au milieu des années quatre-vingt Bollerslev[11], alors étudiant de Engle, généralise la famille des modèles $ARCH$ en permettant à la variance conditionnelle du modèle de dépendre aussi de son propre passé. Bollerslev définit donc, en 1986, le modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisé, c'est-à-dire $GARCH$.

Le présent mémoire, est alors une synthèse des travaux de recherches concernant la théorie des séries temporelles, ainsi que les différentes propriétés probabilistes et statistiques des modèles $ARCH$ et $GARCH$. Dans ce cadre, nous présentons une revue sur les études que nous considérons comme étant les plus importantes et les plus prometteuses pour la formulation de ces modèles.

Le but de notre travail est de fournir une introduction aux modèles $ARCH$ et $GARCH$

L'organisation de la mémoire est la suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principales définitions, notations et résultats que nous verrons souvent dans la théorie des séries temporelles et que l'on va utiliser par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous étudiérons les modèles $ARCH$ et $GARCH$ ainsi que leurs propriétés.

Enfin, le dernier chapitre contient l'essentiel des travaux. On s'intéressera à l'estimation des paramètres des modèles $ARCH$ et $GARCH$ par la méthode du maximum de vraisemblance et nous appliquerons quelques exemples dans le logiciel R.

Chapitre 1

Généralités sur les séries chronologiques

Dans ce chapitre nous faisons un petit rappel de quelques notions de bases sur les séries chronologiques.

1.1 Processus stationnaires

Une des grandes questions dans l'étude de séries temporelles (ou chronologiques) est de savoir si celles-ci suivent un processus stationnaire.

Définition 1.1 *Le processus aléatoire* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est dit strictement ou fortement stationnaire si sa distribution de probabilité ne change pas au cours du temps, c'est à dire si* $\forall$ *le n-uplet du temps* $t_1 < t_2 < ... < t_n$ *tel que* $t_n \in \mathbb{Z}$ *et pour tout temps* $h \in \mathbb{Z}$ *avec* $t_i + h \in \mathbb{Z}\ \forall i = 1...n$ *la suite,* $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ *possède la même loi de probabilité que la suite* $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$.

Dans la pratique, on se limite généralement à requérir la stationnarité du second ordre (ou stationnarité faible) du processus étudié.

Définition 1.2 *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est dit stationnaire au second ordre (ou stationnaire au sens faible) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1) $\forall t \in \mathbb{Z},\ E(X_t^2) < \infty$

2) $\forall t \in \mathbb{Z},\ E(X_t) = m$, *est indépendant de* t

3) $\forall (t,\, h) \in \mathbb{Z}^2,\ Cov(X_t,\, X_{t+h}) = E[(X_{t+h} - m)(X_t - m)] = \gamma(h)$, *dépendant uniquement de l'écart* h *entre les observations.*

La première condition impose l'existence des moments jusqu'a l'ordre 2, *la seconde condition stipule que le moment d'ordre un du processus* X_t *ne dépendant pas du temps, la troisième condition sur* $\gamma(h)$ *implique que les covariances doivent être indépendantes des dates considérées et donc ne dépendant que des retards. Autrement dit, la fonction d'autocovariance du processus* X_t *est indépendante du temps.*

Remarque 1.1 *En résumé, un processus est stationnaire au second ordre si ces deux premières moments sont indépendants du temps.*

1.2 Processus bruit blanc

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stochastique, on dit que $(\varepsilon_t)_t$ est un bruit blanc faible si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1) $\forall t \in \mathbb{Z},\ E(\varepsilon_t) = 0$

2) $\forall t \in \mathbb{Z},\ Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$

On appelle bruit blanc fort tout bruit blanc faible tel que les variables ε_t sont (i, i, d) et un bruit blanc gaussien tout bruit blanc fort $(\varepsilon_t)_t$ tel que $\forall t,\ \varepsilon_t \rightsquigarrow N(0,\, \sigma^2)$.

1.3 Processus d'innovations

Nous introduisons sous le concept d'innovations qui est plus adapté à l'analyse des dynamiques non linéaires, l'innovation d'un processus stochastique (X_t) est habituellement définit comme l'erreur de prévision :

$$\varepsilon_t = X_t - E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}),$$

où $\mathcal{F}_{t-1}$ est l'information disponible jusqu'à l'instant $(t-1)$, $\mathcal{F}_{t-1}$ est la $\sigma - alg\grave{e}bre$ engendrée par $(X_{t-1}, X_{t-2}, ...)$.

1.4 Séries chronologiques

Définition 1.3 *Une série chronologique (ou série temporelle) est une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'une quantité spécifique au cours du temps.*

Remarque 1.2 *Une série chronologique peut être considérée comme une suite d'observations ponctuelles dans le temps d'un processus aléatoire.*

1.4.1 Propriétés des séries chronologiques

Stationnarité : la technique de stationnarisation d'une série chronologique la plus populaire est celle de Box-Jenkins, elle consiste en la différentiation de la série observée (X_t) i.e :

Si X_t n'est pas stationnaire, alors $Y_t = \nabla^d X_t$, $d = 1, 2;$ est stationnaire, tel que $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$.

Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation :

Définition 1.4 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire on appelle fonction d'autocovariance de X_t la fonction γ définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall h,\ t \in \mathbb{Z}\ \gamma(h) = cov(X_t,\ X_{t+h}).$$

Le graphe de cette fonction est appelé variogramme.

Définition 1.5 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire, on appelle fonction d'autocorrélation (ACF) de X_t la fonction ρ définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall h \in \mathbb{Z},\ \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Le graphe de cette fonction est appelé corrélogramme.

Fonction d'autocorrélation partielle (PACF) :

L'autocorrélation partielle d'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mesure la liaison linéaire entre X_t et X_{t-h} est noté par $r(h)$ tel que :

$$r(h) = corr(X_t,\ X_{t-h}/X_t, ..., X_{t-h+1}),$$

le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre h d'un processus stationnaire et se calcule de la manière suivante :

$$r(h) = \frac{|R(h)^*|}{|R(h)|},$$

avec :

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

et $R(h)^*$ la matrice $R(h)$ dans laquelle on a remplacé la colonne h par $\begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_h \end{pmatrix}^t$ sont :

$$R(h)^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_h \end{pmatrix},$$

ainsi

$$r(1) = \rho(1),\ r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}, ...$$

Le graphe de cette fonction est appelé corrélogramme partiel.

1.5 Les modèles ARMA

La famille des modèles $ARMA$ est l'ensemble des modèles linéaires stationnaires, et définie telle que cette famille est composée de deux types de modèles qui sont les modèles autorégressifs-moyennes mobiles (Autoregressive Moving Average) ou modèles mixte, notée $ARMA(p,q)$ sont définies par la relation suivante :

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

avec $\alpha_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ et $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc suite de variables aléatoires $(i.i.d)$, centrée et de variance finie.

Remarque 1.3 *Il est immédiat qu'un $ARMA(p,0)$ est un $AR(p)$ pur et qu'un $ARMA(0,\ q)$ est un $MA(q)$ pur et $ARMA(0,0)$ correspondent aux bruits blancs.*

1.5.1 Propriétés principales des modèles ARMA

• Pour un processus $AR(p)$ sa fonction ACF décroit exponentiellement vers zéro, tandis que sa fonction $PACF$ chute à zéro à partir de l'ordre $p+1$.

• Pour un processus $MA(q)$ sa fonction ACF chute à zéro à partir de l'ordre $q+1$, tandis que sa fonction $PACF$ décroit exponentiellement vers zéro.

• Pour un processus mixte $ARMA(p,q)$ sa fonction ACF décroit exponentiellement vers zéro, et sa fonction $PACF$ décroit aussi exponentiellement vers zéro.

Exemple 1.1 *Considérons un modèle* $ARMA(1,1)$

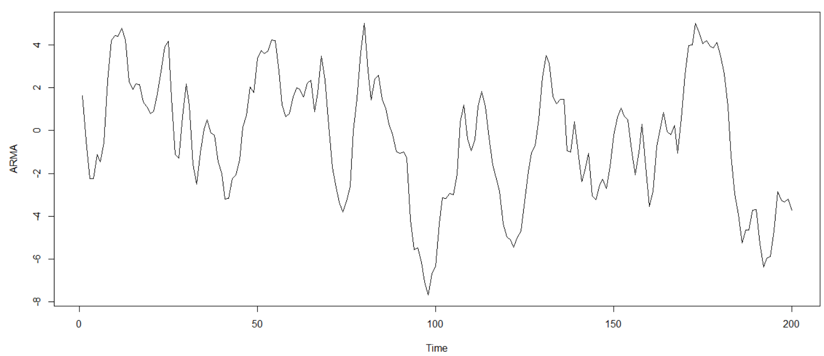
$$X_t = 0.8X_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t,$$

le script en langage R suivant, nous permet de calculer et de tracer le corrélogramme d'un modèle $ARMA(1,1)$ *:*

$> library(stats)$

$> ARMA = arima.sim(list(order = c(1,0,1), ar = 0.8, ma = 0.6), 200)$

$> ts.plot(ARMA, type = "l")$



$> acf = ARMAacf(ar = c(0.8,0), ma = c(0,0.6), 200)$

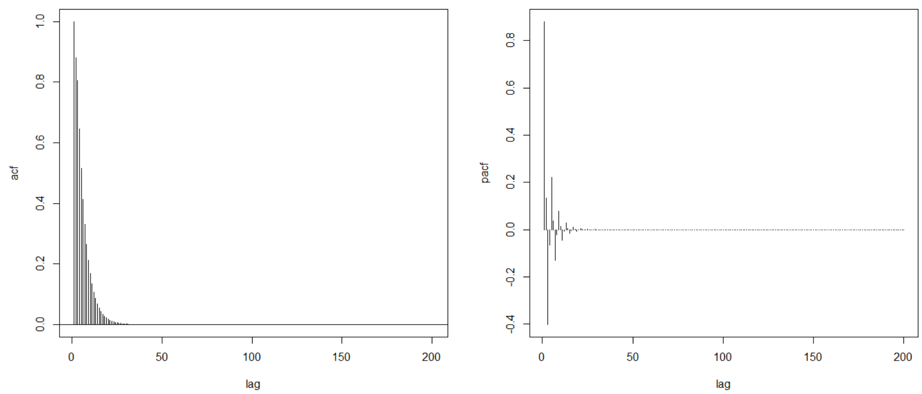
$> pacf = ARMAacf(ar = c(0.8,0), ma = c(0,0.6), 200, pacf = T)$

$> par(mfrow = c(1,2))$

$> plot(acf, type = "h", xlab = "lag")$

$> abline(h = 0)$

$> plot(pacf, type = "h", xlab = "lag")$



Remarque 1.4 *Les propriétés énoncées ci-dessus sont les critères principaux pour identifier le type de modèle pour une série chronologique donnée.*

1.6 Kurtosis et Skewness

Dans la suite de notre exposé, nous aurons besoin des notions de Kurtosis et de Skewness.

Définition 1.6 *On appelle moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$, d'un processus aléatoire X_t, noté m_k la quantité définie telle que :*

$$m_k = E\left[X_t^k\right].$$

Soit μ_k le moment empirique centré d'ordre k du processus X_t, $t = 1...T$

$$\mu_k = E[X_t - E(X_t)]^k.$$

Définition 1.7 *le coéfficient d'applatissement pour un échantillon de taille T s'écrit :*

$$K_\mu = \frac{E[X - E(X_t)]^4}{E[(X - E(X_t))^2]^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2},$$

on peut montrer que :

$$\frac{K_\mu - 3}{\sqrt{\frac{24}{T}}} \rightarrow_{T \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Remarque 1.5 *La Kurtosis mesure le caractère pointu ou plat de la distribution de la série. La Kurtosis de la disribution normale est 3. Si la Kurtosis est superieur à 3 (queue sépaisses), la distribution est plutôt pointue (distribution leptokurtique) ; si la Kurtosis est inférieur à 3, la distribution est plutôt plate (distribution est dite platikurtique).*

Définition 1.8 *La skewaness ou le coéfficient d'asymétrie pour un échantillon de taille T s'écrit :*

$$S_k = \frac{E[X - E(X_t)]^3}{E[(X - E(X_t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}.$$

Remarque 1.6 *Skewness ou coefficient d'asymétrie S donne une idée du manque de symétrie d'une distribution d'une variable aléatoire.*

- *Si $S_k = 0$ la distribution est dite symétrique à l'instar de la loi normale.*
- *Si $S_k > 0$ la distribution s'étale vers la droite et on a une asymétrie positive.*
- *Si $S_k < 0$ la distribution s'étale vers la gauche et on est en présence d'une asymétrie négative.*

1.7 La volatilité

Définition 1.9 *La volatilité est une notion statistique qui permet de mesurer la variabilité instantané de la série. Dans le monde de la finance, la volatilité est considérée comme un facteur de risque.*

1.8 Hétéroscédasticité

L'hétéroscédasticité est une caractéristique des séries financières, elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps.

Définition 1.10 *On appelle modèle linéaire hétéroscédastique le modèle dans lequel un vecteur de variables aléatoires Y dépend linéairement de $K+1$ variables explicatives X :*

$$Y = Xb + U,$$

avec les hypothèses :

$$\begin{cases} E(U_i/X) = 0 \\ E(U_i U_j/X) = 0 \text{ pour } i \neq j \\ E(U_i^2/X) = \sigma_i^2 \end{cases}$$

On dit que le modèle est hétéroscédastique si $\forall i,\ j\ \sigma_i \neq \sigma_j$ *vérifié et homoscédastique si* $var(U_i) = \sigma^2$.

Chapitre 2

Modèles ARCH et GARCH

Les modèles $ARCH$ (autorégressive conditionnel heteroskedasticity) ont été conçus dans le but de modéliser les séries chronologiques observées en finance. Le cadre général défini par Engle (1982) consiste à supposer que la variance du processus observé dépend de l'ensemble de l'information dont on dispose avant l'observation. Il propose une spécification $ARCH(q)$ où la variance conditionnelle $\sigma_t^2 = var\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)$ s'écrit sous la forme d'un processus autorégressif d'ordre q. En 1986 Bollerslev a généralisé le modèle initial d'Engle développant les modèles $GARCH$. Cette extension consiste à introduire des valeurs retardées de la variance dans l'équation d'état du modèle $ARCH$.

2.1 Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques ARCH(1)

Définition 2.1 *On dit qu'une série chronologique X_t suit un modèle $ARCH(1)$ si elle vérifie les relations suivantes :*

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t, \tag{2.1}$$

avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2,$$

où ε_t un bruit blanc faible, tel que $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ et $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$. [9]

Remarque 2.1 *En général, les ε_t sont des variables aléatoires centrées, réduites et indépendantes et identiquement distribuées. La composante $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$ est une variable conditionnélle par l'ensemble d'informations des valeurs passées de X_t, c'est-à-dire : $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{X_{t-1}, X_{t-2,}..., X_{t-j}, ...\}$ qui est déterministe et positive.*

Le processus X_t est caractérisé par des autocorrélations nulles et une variance conditionnelle variable dans le temps en fonction de l'ampleur de l'innovation passée. On peut établir des résultats intéressants telle que :

Si un processus X_t satisfait une représentation $ARCH(1)$, alors X_t^2 satisfait une représentation $AR(1)$ tell que :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \eta_t, \tag{2.2}$$

où $\eta_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ vérifiant $E(\eta_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ est un processus d'innovation pour X_t^2.

Remarque 2.2 *On sait que le processus X_t^2 est stationnaire au second ordre si et seulement si $|\alpha_1| < 1$.*

On peut déduire alors de ces différentes écritures, un certain nombre de propriétés qui pourront être étendues au cas des processus $ARCH(p)$.

2.1.1 Propriétés des processus ARCH(1)

propriété 2.1 *Le processus X_t satisfaisant une représentation $ARCH(1)$, défini par l'équation* (2.1) *est une différence de martingale homoscédastique :*

$$E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)=0 \quad var\left(X_t\right)=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

- *On peut noter que pour tout $h>1$: $E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right)=0$*

Preuve On a

$$\begin{aligned} E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) &= E\left(E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)/\mathcal{F}_{t-h}\right) \\ &= E\left(0/\mathcal{F}_{t-h}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\forall h>1\ \mathcal{F}_{t-h}\subset\mathcal{F}_{t-1}$. ■

propriété 2.2 *La variance conditionnelle de processus X_t satisfaisant une représentation $ARCH(1)$, définie par l'équation* (2.1) *est non constante dans le temps et vérifie :*

$$var\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right)=\alpha_0\left(\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1}\right)+\alpha_1^h X_{t-h}^2,\ \forall t.$$

C'est la propriété centrale des processus $ARCH$, le processus X_t a une variance conditionnelle dépend du temps.

Preuve On sait que $E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right)=0$ dés lors, $var\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right)=E\left(X_t^2/\mathcal{F}_{t-h}\right)$. Considérons le processus X_t^2 défini par la relation (2.2) où η_t est un bruit blanc faible. Par itération successive, on a :

$$X_t^2=\alpha_0\left(1+\alpha_1+\alpha_1^2+...+\alpha_1^h\right)+\eta_t+\alpha_1\eta_{t-1}+\alpha_1^2\eta_{t-2}+...+\alpha_1^{h-1}\eta_{t-(h-1)}+\alpha_1^h X_{t-h}^2,$$

on considérant l'espérance conditionnelle de chacun de ces membres, il vient :

$$E\left(X_t^2/\mathcal{F}_{t-h}\right) = \alpha_0\left(\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1}\right) + \sum_{j=0}^{h-1}\alpha_1^j E\left(\eta_{t-j}/\mathcal{F}_{t-h}\right) + \alpha_1^h E\left(X_{t-h}^2/\mathcal{F}_{t-h}\right),$$

puisque par définition du bruit blanc η_t, on a $E\left(\eta_{t-j}/\mathcal{F}_{t-h}\right) = 0\ \forall j = 0, ..., h-1$ et par définition $E\left(X_{t-h}^2/\mathcal{F}_{t-h}\right) = X_{t-h}^2$, on obtient ainsi la formule :

$$var\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) = \alpha_0\left(\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1}\right) + \alpha_1^h X_{t-h}^2\ , \forall t.$$

■

Remarque 2.3 *Lorsque h tend vers l'infini, ces variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle.*

$$\begin{aligned} var\left(X_t\right) &= \lim_{h\to\infty} var\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) \\ &= \lim_{h\to\infty}\left[\alpha_0\left(\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1}\right) + \alpha_1^h X_{t-h}^2\right] \\ &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1},\ \forall\alpha_0 > 0\ et\ 0 < \alpha_1 < 1. \end{aligned}$$

propriété 2.3 *Les auto-covariances conditionnelles du processus X_t défini par l'équation* (2.1) *sont nulles :*

$$cov\left(X_t,\ X_{t+s}/\mathcal{F}_{t-h}\right) = 0\ \forall h\ s \geq 1,$$

donc X_t est un processus qui, conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-h}$, est un processus sans mémoire.

Preuve Considérons la covariance conditionnelle entre X_t et X_{t+s} :

$$\begin{aligned} cov\left(X_t,\ X_{t+s}/\mathcal{F}_{t-h}\right) &= E\left\{\left[X_t X_{t+s} - E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) E\left(X_{t+s}/\mathcal{F}_{t-h}\right)\right]/\mathcal{F}_{t-h}\right\} \\ &= E\left(X_t X_{t+s}/\mathcal{F}_{t-h}\right) \\ &= E\left[E\left(X_t X_{t+s}/\mathcal{F}_{t+s-1}\right)/\mathcal{F}_{t-h}\right] \\ &= E\left[X_t E\left(X_{t+s}/\mathcal{F}_{t+s-1}\right)/\mathcal{F}_{t-h}\right] \\ &= E\left(X_t \times 0/\mathcal{F}_{t-h}\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

■

propriété 2.4 *i)-Le moment conditionnele centré d'ordre 4 du processus X_t vérifie :*

$$E\left(X_t^4/\mathcal{F}_{t-1}\right) = 3\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2\right)^2.$$

ii)-Sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$, le moment non conditionnelle centré d'ordre 4 du processus X_t est égale à :

$$E\left(X_t^4\right) = \frac{3\alpha_0^2\left(1+\alpha_1\right)}{\left(1-3\alpha_1^2\right)\left(1-\alpha_1\right)},$$

donc la Kurtosis non conditionnelle de processus $ARCH(1)$ est :

$$K_m = \frac{E\left(X_t^4\right)}{E\left(X_t^2\right)^2} = \frac{3\left(1-\alpha_1^2\right)}{\left(1-3\alpha_1^2\right)} > 3.$$

Preuve i)-On rappelle que si une variable centrée X suit une loi gaussienne :

$$E\left(X^4\right) = 3\left(var\left(X^2\right)\right) = 3\left(E\left(X^2\right)\right)^2,$$

donc le moment conditionnel centré d'ordre 4 du processus X_t vérifie :

$$E\left(X_t^4/\mathcal{F}_{t-1}\right) = 3E\left(X_t^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)^2 = 3\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2\right)^2.$$

ii)- Sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$, le moment non conditionnel centré d'ordre 4 du processus X_t est égale à :

$$\begin{aligned} E\left(X_t^4\right) &= E\left[E\left(X_t^4/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\ &= E\left[3\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2\right)^2\right] \\ &= 3\left[\left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 E(X_{t-1}^4) + 2\alpha_0\alpha_1 E(X_{t-1}^2)\right]\right. \\ &= 3\left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 E\left(X_{t-1}^4\right) + 2\frac{\alpha_0^2\alpha_1}{1-\alpha_1}\right] \\ &= \frac{3\alpha_0\left(1+\alpha_1\right)}{\left(1-3\alpha_1^2\right)\left(1-\alpha_1\right)}. \end{aligned}$$

iii)- La kurtosis non conditionnelle de processus $ARCH(1)$ est définie par :

$$K_u = \frac{E\left(X_t^4\right)}{E\left(X_t^2\right)^2} = 3\left(\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right) > 3.$$

■

propriété 2.5 *Le moment non conditionnel centré d'ordre* 3 *de processus* $ARCH(1)$ *est égale à :*

$$\begin{aligned} E\left(X_t^3\right) &= E\left[E\left(X_t^3/X_{t-1},\ X_{t-2},...\right)\right] \\ &= E\left[E\left(\varepsilon_t^3\sigma_t^3/X_{t-1},\ X_{t-2},...\right)\right] \\ &= E\left[\sigma_t^3 E\left(\varepsilon_t^3/X_{t-1},\ X_{t-2},...\right)\right] \\ &= E\left[\sigma_t^3 \times 0\right] = 0, \end{aligned}$$

donc la Skewness associée au processus $ARCH(1)$ est égale à :

$$S_k = \frac{E\left(X_t^3\right)}{E\left(X_t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Toutes ces propriétés peuvent être généralisées au cas d'un processus $ARCH(p)$.

2.2 Modèle ARCH(p)

Définition 2.2 *Un processus X_t satisfait une représentation $ARCH(p)$ si :*

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

avec :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2,$$

où ε_t désigne un bruit blanc faible tel que : $E\left(\varepsilon_t\right) = 0$ et $var\left(\varepsilon_t\right) = \sigma_\varepsilon^2$ $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i > 0$.

Pour ce type de processus, on retrouve les deux propriétés essentielles vues précédemment, à savoir la propriété de différence de martingale (ou bruit blanc faible) $E\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) = 0$ et la propriété de variance conditionnelle variable dans le temps puisque :

$$var\left(X_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2.$$

2.3 Modèle avec erreur ARCH(p)

On considére dorénavant non plus un processus $ARCH$ pour modéliser directement la série financière, mais le résidu d'un modèle linéaire. Prenons l'exemple d'un modèle linéaire autorégressif avec résidus de type $ARCH(p)$.

Définition 2.3 *On considére un modèle linéaire autorégressif de la forme :*

$$Y_t = E\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) + Z_t,$$

où Z_t est un bruit blanc faible, tel que $E\left(Z_t\right) = 0$ et $E\left(Z_t Z_h\right) = 0$ si $h \neq t$.

On suppose que ce résidu admet une représentation de type $ARCH(p)$

$$Z_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Z_{t-i}^2.$$

On a donc un modèle qui décrit à la fois l'évolution de l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle du processus Y_t dans le temps.

Le cas le plus simple d'un processus de type $AR(1)$ avec erreur $ARCH(1)$ est :

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta + \alpha Y_{t-1} + Z_t, \;\; |\alpha| < 1 \\ Z_t &= \varepsilon_t \left(\alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1}^2\right) \end{aligned}$$

Dans ce cas les résidus satisferont les principales propriétés étudiées précédemment.

• Le processus Z_t est orthogonale aux valeurs passées :

$$E\left(Z_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) = 0 \; \forall h > 1.$$

• La variance conditionnelle dépendante de temps puisque

$$var\left(Z_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) = \alpha_0 \left(\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1}\right) + \alpha_1^h Z_{t-h}^2$$

$$var\left(Z_t\right) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

• Les auto-covariances conditionnelles sont nulles :

$$cov(Z_t,\ Z_{t+s}/\mathcal{F}_{t-h}) = 0\ \forall h,\ s \geq 1.$$

• Sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$, la distribution des résidus est leptokurtique puisque :

$$K_m = \frac{3\left(1-\alpha_1^2\right)}{\left(1-3\alpha_1^2\right)} > 3.$$

On peut on outre déduire un certain nombre de conclusions ce qui concerne le processus Y_t lui même, on peut montrer tout d'abord que l'espérance conditionnelle de Y_t vérifie :

$$\begin{aligned} E\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) &= \beta + \alpha E\left(Y_{t-1}/\mathcal{F}_{t-h}\right) \\ &= \beta\left(\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha}\right) + \alpha^h Y_{t-h} \end{aligned}$$

De la même façon, on montre que la variance conditionnelle de Y_t dépend du temps. En effet, on peut montrer qu'elle dépend du processus Z_{t-h}^2 de la façon suivante.

propriété 2.6 *La variance conditionnelle du processus $AR(1)$ avec erreur $ARCH(1)$, Y_t s'écrit :*

$$var\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) = \left(\frac{\beta}{1-\alpha_1}\right)\left[\left(\frac{1-\alpha^{2h}}{1-\alpha^2}\right) - \alpha_1\left(\frac{\alpha_1^h-\alpha^{2h}}{\alpha_1-\alpha^2}\right)\right] + \alpha_1\left(\frac{\alpha_1^h-\alpha^{2h}}{\alpha_1-\alpha^2}\right) Z_{t-h}^2$$

Ainsi la variance d'une erreur de prévision à l'horizon 1, s'écrit :

$$var\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) = \beta + \alpha_1 Z_{t-1}^2$$

En conclusion, si l'on désire prévoir le processus Y_t dans le cas d'erreur $ARCH\,(1)$, l'erreur de prévision à une horizon d'une période admet une variance $var\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}\right)$ qui varie dans le temps en fonction de la valeur de Z_{t-1}^2.

Remarque 2.4 *La variance d'une erreur de prévision sur un processus avec erreur $ARCH$ dépend du temps* $.var\left(Y_t/\mathcal{F}_{t-h}\right) = g\left(Z_{t-h}\right)$

2.4 Modèles Autorégressifs conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés GARCH (1.1)

Définition 2.4 *On dit qu'une série chronologique X_t suit un modèle $GARCH(1,1)$ si elle vérifie les relations suivantes :*

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Où ε_t désigne un bruit blanc faible tel que : $E\left(\varepsilon_t\right) = 0$ et $var\left(\varepsilon_t\right) = \sigma_\varepsilon^2$ et $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$. [11]

2.4.1 Propriétés des processus GARCH(1,1)

Les propriétés théoriques des processus $GARCH$ se déduisent de la même façon que nous avons développé les propriétés des processus $ARCH$.
i)- On a

$$E\left(X_t\right) = 0,$$

et

$$cov(X_t X_h) = 0$$

ii)- Maintenant pour calculer la kurtosis d'un modèle $GARCH(1,1)$ il suffit de calculer le moment d'ordre 4 et le moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
E\left(X_t^4\right) &= E\left[E\left(X_t^4/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\
&= 3E\left[E\left(\left(\alpha_0+\alpha_1 X_{t-1}^2+\beta_1\sigma_{t-1}^2\right)^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\
&= 3E\left[\left(\alpha_0+\alpha_1 X_{t-1}^2+\beta_1\sigma_{t-1}^2\right)^2\right] \\
&= 3\left(\alpha_0^2+2\alpha_0\left(\alpha_1+\beta_1\right)E\left(X_{t-1}^2\right)+\left(\alpha_1+\beta_1\right)E\left(X_{t-1}^4\right)\right) \\
&= 3\left(\alpha_0+\frac{2\alpha_0\left(\alpha_1+\beta_1\right)}{1-\left(\alpha_1+\beta_1\right)}+\left(\alpha_1+\beta_1\right)E\left(X_{t-1}^4\right)\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$E\left(X_t^4\right)=\frac{3\alpha_0^2\left(1+\alpha_1+\beta_1\right)}{\left(1-\alpha_1-\beta_1\right)\left(1-3\alpha_1^2-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1\right)}$$

La kurtosis existe si : $3\alpha_1^2+2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2<1$ selon[11]

$$\begin{aligned}
K_m &= \frac{E\left(X_t^4\right)}{E\left(X_t^2\right)^2} \\
&= \frac{3\alpha_0^2\left(1+\alpha_1+\beta_1\right)}{\left(1-\alpha_1-\beta_1\right)\left(1-3\alpha_1^2-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1\right)}\frac{\left(1-\alpha_1-\beta_1\right)^2}{\alpha_0^2} \\
&= 3\frac{1-\left(\alpha_1+\beta_1\right)^2}{1-\left(\alpha+\beta\right)^2-2\alpha_1^2}>3
\end{aligned}$$

iii)- Pour calculer la Skweness d'un modèle $GARCH(1,1)$ il suffit de calculer le moment d'ordre 3

$$\begin{aligned}
E\left(X_t^3\right) &= E\left(\varepsilon_t^3\sigma_t^3\right) \\
& \quad E\left[E\left(\varepsilon_t^3\sigma_t^3/\mathcal{F}_t\right)\right] \\
&= E\left[\sigma_t^3 E\left(\varepsilon_t^3/\mathcal{F}_t\right)\right] \\
&= E\left(\sigma_t^3 0\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc la Skweness de processus $GARCH(1,1)$ est nulle.

2.5 Modèle GARCH(p,q)

Définition 2.5 *Un processus X_t satisfait une représentation $GARCH(p,q)$ si :*

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

avec :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

où ε_t désigne un bruit blanc faible tel que : $E(\varepsilon_t) = 0$ et $var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ et $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., p$ et $\beta_j > 0$, pour $j = 1, 2, ...q$.

Théorème 2.1 *Le modèle $GARCH(p,q)$ [11] est, également, stationnaire ou second ordre si :*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$$

Remarque 2.5 *Dans le cas ou l'inégalité est saturée, c'est à dire que :*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$$

On dira, alors, que le processus $GARCH$ est intégré et on parlera de processus $IGARCH$.

Proposition 2.1 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $GARCH(p,q)$ alors $(X_t)^2$ est un processus $ARMA(m,q)$ avec $m = \max(p,q)$.*

Preuve On peut par inversion exprimer le processus X_t^2 sous la forme d'un processus $ARMA$ défini dans une innovation $\eta_t = X_t^2 - \sigma_t^2$, en introduisant cette notation dans

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 + X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + X_t^2 \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + X_t^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j X_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j X_{t-j}^2 \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j (X_j - \sigma_{t-j}^2) + X_t^2
\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\begin{aligned}
X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + X_t^2 - \sigma_t^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \eta_{t-j} \\
\Longleftrightarrow \quad & X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \eta_{t-j}
\end{aligned}$$

Avec la convention $\alpha_i = 0$ si $i > q$ et $\beta_i = 0$ si $i > p$ les η_t forment un bruit blanc, donc (X_t) est un $ARMA\ (m, q)$. ■

Exemple 2.1 *Considérons le cas d'un processus GARCH(1,1) :*

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Qui peut être représenté par le modèle suivant :

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) X_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1}$$

Où $\eta_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ *est un processus d'innovation pour* X_t^2*. Sous la condition de stationnarité du second ordre* $\alpha_1 + \beta_1 < 1$*, la variance non conditionnelle du processus* X_t *est définie et constante dans le temps. Sachant que* $V(X_t) = E(X_t^2)$ *il suffit à partir de la forme*

$ARMA(1,1)$ sur X_t^2 de définir l'espérance du processus :

$$V(X_t) = E(X_t^2) = \alpha_0 \Phi\,(1)^{-1} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1},$$

où $\Phi\,(l) = 1 - (\alpha_1 + \beta_1)l$ désigne le polynôme auto-régressif associé à la représentation $ARMA(1,1)$ sur X_t^2.

2.6 Modèle avec erreurs GARCH(p,q)

On considère un modèle autorégressif exprimé sous la forme suivante :

$$Y_t = E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) + Z_t,$$

où Z_t est un bruit blanc faible, tel que $E(Z_t) = 0$ et $E(Z_t Z_h) = 0$ si $h \neq t$, satisfaisant la condition de différence de martingale $E(Z_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$, on suppose toujours que le processus Z_t peut s'écrire sous la forme :

$$Z_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

où ε_t est un bruit blanc faible, avec :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

et $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., p$ et $\beta_j \geq 0$, $j = 1, ..., q$ suffisantes pour garantir la positivité de σ_t^2.

Chapitre 3

Estimation

Les modèles introduits dans le chapitre précédent reposent sur des formulations des moyennes et variances conditionnelles.

En pratique celle-ci sont souvent paramétrées de façon que la moyenne conditionnelle $m_t(\theta)$ et la variance conditionnelle $\sigma_t^2(\theta)$ apparaissent comme des fonctions de paramètres inconnus et de valeurs passées du processus. La connaissance de ces moments ne suffit cependant pas sans hypothèse supplémentaire à caractériser la loi conditionnelle du processus. La méthode d'estimation la plus utilisée en pratique est :

- La méthode de maximum de vraisemblance (MV).

3.1 La méthode de maximum de vraisemblance

Le principe de la méthode de maximum vraisemblance, consiste à déterminer la valeur du paramètre θ en fonction des observations $(X_1, X_2, ..., X_n)$, et qui assure la plus grande probabilité d'apparition de ces observations.

Définition 3.1 *On appelle fonction de vraisemblance du paramètre θ, l'application L de*

Θ à valeur dans $\mathbb{R}^+$, définie pour tout $\theta \in \Theta$ par :

$$L_t(\theta) = L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_t(X_i),$$

avec $f_t(X_i)$: désigne la densité marginale de la densité jointe $f_t(X_1,\ X_2, ...,\ X_n)$.

Définition 3.2 *On appelle estimateur du maximum vraisemblance d'un paramètre $\theta \in \Theta$, la statistique $\hat{\theta}$ qui fait correspondre au vecteur $(X_1,\ X_2, ...,\ X_n)$ la quantité $\hat{\theta}(X_1,\ X_2, ...,\ X_n)$, telle que :*

$$\forall \theta \in \Theta,\ L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n;\ \hat{\theta}) \geq L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n;\ \theta)$$

Lorsque on suppose que cette fonction de vraisemblance $L(.)$ est deux fois continûment différentiable par rapport à θ alors $\hat{\theta}$constitue une solution du système suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\right)_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \\ \qquad et \\ \left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \end{cases}$$

Estimateurs du MV sous l'hypothèse de normalité

On reprend ici la présentation de Gourieroux [5]. Soit un modèle tel que :

$$E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}, X_t) = m_t(\mathcal{F}_{t-1}, X_t, \theta) = m_t(\theta)$$

$$var(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}, X_t) = \sigma_t(\mathcal{F}_{t-1}, X_t, \theta) = \sigma_t^2(\theta)$$

On note θ l'ensemble des paramètres intervenant à la fois dans l'expression de la moyenne conditionnelle et de la variance conditionnelle. La plupart des modèles $ARCH$ que nous verrons peuvent être représentés sous cette forme.

3.1.1 Estimation des paramètres du modèle ARCH

L'estimateur des paramètres de modèle $ARCH$ se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Par hypothèse Y_t est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à Y_t conditionnellement au passé $\mathcal{F}_{t-1}$ est donc :

$$L(y_t/\mathcal{F}_{t-1};\ \theta) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(y_t - m_t(\theta))^2}{2\sigma_t^2}),$$

et dépend du vecteur $\theta = (\alpha_0,\ \alpha_1, ..., \alpha_p)^t$ à travers σ_t.

La fonction de vraisemblance de $(y_1,\ y_2, ..., y_n)$ conditionnelle est par conséquent

$$L(y_1,\ y_2, ..., y_T,\ \theta) = \prod_{t=1}^{T} L(y_t/\mathcal{F}_{t-1};\ \theta)$$

L'estimateur est alors défini comme le vecteur $\hat{\theta}_T = (\hat{\alpha}_0,\ \hat{\alpha}_1, ...,\ \hat{\alpha}_p)^t$ qui maximise le logarithme de cette fonction vraisemblance

$$\hat{\theta}_T = \arg\max \log L_T(y_1,\ y_2, ...,\ y_T,\ \theta)$$

3.1.2 Estimation des paramètres du modèle GARCH

L'estimation par maximum de vraisemblance d'un modèle $ARMA$ est rendue plus difficile que celle d'un processus autorégressif pur, puisque le processus d'innovations n'est pas directement observé, le même phénomène survient lorsqu'on tente de maximiser la vraisemblance d'un processus $GARCH$. En effet, la vraisemblance associée à Y_t

conditionnellement au passé $\mathcal{F}_{t-1}$ s'écrit

$$L(y_t/\mathcal{F}_{t-1};\ \theta) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(y_t - m_t(\theta))^2}{2\sigma_t^2})$$

Mais cette fois, la variance σ_t^2 dépend des valeurs passées de la variance conditionnelle $\sigma_{t-1}^2, ..., \sigma_{t-q}^2$ Ces valeurs n'étant pas observées en pratique, la maximisation directe de la vraisemblance est rendue impossible. En pratique, on estime successivement les valeurs de $\sigma_1^2, ..., \sigma_{t-1}^2$ avant de calculer la vraisemblance. Ainsi, pour un vecteur $\theta = (\overset{\circ}{\alpha}_0, ..., \overset{\circ}{\alpha}_p, \overset{\circ}{\beta}_1, ..., \overset{\circ}{\beta}_q)^t$ fixé de paramètres, on calcule récursivement

$$\hat{\sigma}_t^2 = \overset{\circ}{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{p} \overset{\circ}{\alpha}_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \overset{\circ}{\beta}_j \hat{\sigma}_{t-j}^2,$$

avec la convention $Y_i = 0$ et $\sigma_i^2 = 0$ si $i \leq 0$. On remplace donc la fonction de vraisemblance par

$$L(y_t/\mathcal{F}_{t-1};\ \theta) = \frac{1}{\hat{\sigma}_t\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(y_t - m_t(\theta))^2}{2\hat{\sigma}_t^2}),$$

et la fonction de vraisemblance totale est :

$$L_T(y_1,\ y_2, ...,\ y_T,\ \theta) = \prod_{t=1}^{T} L(y_t/\mathcal{F}_{t-1};\ \theta)$$

Cette fonction de vraisemblance peut être calculée pour différentes valeurs du vecteur θ et sa maximisation donne l'estimateur de maximum de vraisemblance.

3.2 Applications

Dans cette section, nous allons appliquer quelques exemples d'estimations des paramètres du modèle $G(ARCH)$, et pour exécuter ce travail, on utilise le logiciel R de version 3.3.1, et les packages "$fGarch$", "AER" avec la base des données "$MarkPound$"

et la fonction "$garchFit$".

Définition 3.3 *"$MarkPound$" est une série de taux de retour d'échange DEM/GBP pour la période* $1984-01-03$ *à* $1991-12-31$.

Considérons la série MarkPound :DEM/GBP de taux de change : qui est une série chronologique journalière de rendements en pourcentage des taux de change Deutsche-Mark(unité de monnaie)/British Pound (unité de monnaie) DEM/GBP de $1984-01-03$ jusqu'a $1991-12-31$, (A daily time series of percentage returns of Deutschemark/British pound DEM/GBP exchange rates from $1984-01-03$ through $1991-12-31$). Telle que :

DEM ;German Deutsche Mark (unité de monnaie)

GBP ;British Pound (unité de monnaie)

Où ;

1DEM=0.450472GBP

1GBP=2.21989DEM

Définition 3.4 *R est un système d'analyse statistique disponible gratuitement pour toutes les formes (Windows, Lunix....). Il a été crée en* 1990 *par Ross Ihaka et Robert Gentlemanet.*

R est : à la fois un langage de programmation et un logiciel de fonction statistique. Il contient un grand nombre de fonctions statistiques et graphiques. Le site Internet "$http://www:rproject:org$" est la meilleure source d'informations sur le logiciel R. Aprés avoir installé le système de base, vous pouvez installer les modules supplémentaires appelés (packages), en utilisant le menu :'Package/Install package frome CRAN', et il faut être connecté à Internet.

Le package AER : Applied Econometrics with R (Econométrie Appliquée avec R)

La source : https ://cran.r-project.org/web/packages/AER/AER.pdf

Le package fGarch :Autoregressive Conditional Heteroscedastic Modeling(Modélisation Autorégréssive Conditionnelle Hétéroscedasticité.

la source : https ://cran.r-project.org/web/packages/fGarch/fGarch.pdf

Exemple 3.1 *DEM/GBP FX retourne pour* $1984-01-03$ *à* $1991-12-31$

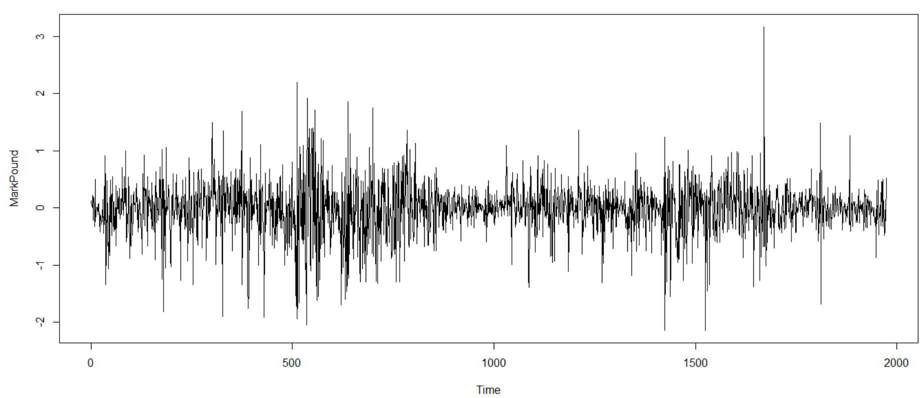
$> library(AER)$

$> library(fGarch)$

$> data(MarkPound)$

$> try(MarkPound)$

$> plot(MarkPound)$



$> summary(MarkPound)$

$Min.$	$1stQu.$	$Median$	$Mean$	$3rdQu.$	$Max.$
-2.144000	-0.225000	-0.000692	-0.016430	0.222900	3.173000

$> var(MarkPound)$

0.2211298

$> sd(MarkPound)$

0.4702445

$> mod1 = garchFit(\tilde{}garch(2,1), data = MarkPound, trace = FALSE, include.mean =$

$TRUE)$

$>summary(mod1)$

Title :

$GARCH Modelling$

Call :

$garchFit(formula = \tilde{}garch(2,1), data = MarkPound, include.mean = TRUE, trace = FALSE)$

Mean and Variance Equation :

$data\tilde{}garch(2,1)$

$< environment : 0x168e18d0 >$

$[data = MarkPound]$

Conditional Distribution :

norm

Coefficient(s) :

$alpha0$	$alpha1$	$alpha2$	$beta1$
0.01078655	0.15306016	0.00000001	0.80589366

Std. Errors :

based on Hessian

Error Analysis :

	$Estimate$	$Std.Error$	$t\ value$	$Pr(>\|t\|)$
$alpha0$	$1.079e-02$	$7.253e-03$	1.487	0.137
$alpha1$	$1.531e-01$	$2.643e-02$	5.792	$6.97e-09 ***$
$alpha2$	$1.000e-08$	$7.882e-02$	0.000	1.000
$beta1$	$8.059e-01$	$1.045e-01$	7.708	$1.27e-14 ***$

- - -

Signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 '' 1

Exemple 3.2 *DEM/GBP FX retourne pour* $1984-01-03$ *à* $1991-12-31$

$> library(AER)$

$> library(fGarch)$

$> data(MarkPound)$

$> try(MarkPound)$

$> mod1 = garchFit(\tilde{}garch(2,0), data = MarkPound, trace = FALSE, include.mean = TRUE)$

$> summary(mod1)$

Title :

$GARCH$*Modelling*

Call :

$garchFit(formula = \tilde{}garch(2,0), data = MarkPound, include.mean = TRUE, trace = FALSE)$

Mean and Variance Equation :

$data\tilde{}garch(2,0)$

$< environment : 0x168e18d0 >$

$[data = MarkPound]$

Conditional Distribution :

norm

Coefficient(s) :

$alpha0$	$alpha1$	$alpha2$
0.1194507	0.3131298	0.1829478

Std. Errors :

based on Hessian

Error Analysis :

	$Estimate$	$Std.Error$	$t\ value$	$Pr(>\|t\|)$
$alpha0$	0.119451	0.006379	18.726	$< 2e-16***$
$alpha1$	0.3131300	0.040367	7.757	$8.66e-15***$
$alpha2$	0.182948	0.034621	5.284	$1.26e-07***$

- - -

*Signif. codes :*0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 " ' 1

La dernière ligne du tableau des estimateurs donne la p-valeur du test de Student de la nullité de chaque paramètre.

On remarque, dans l'exemple 3.1, que seul les paramètres $alpha1$ et beta ont une p-valeur inférieur aux niveaux de signification indiqués au dessous. En outre, on peut enlever la constante et la variable correspondante à $alpha2$ du modèle.

Par contre, dans l'exemple 3.2, les p-valeurs correspondants aux trois paramètres sont toutes inférieurs aux niveaux de signification indiqués.

On conclut que le dernier modèle est le plus adapté pour cette série chronologique.

Conclusion

Ce travail est juste une petite introduction des modèles $ARCH$ et $GARCH$, on a donné quelques outils de base de la théorie des séries chronologiques. Cependant, les modèles $GARCH$ posent des problèmes lorsque le nombre de données devient extrêmement grand, en effet, le problème de ces modèles vient du fait que la volatilité est prédite par des carrés des innovations. Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'estimation des paramètres du modèle $GARCH$ et nous choisissons la méthode du maximum de vraisemblance parce qu'elle donne des résultats plus précises.

Les modèles $GARCH$ constituent en effet l'une des classes de modèles qui permettre de resoudre les problèmes dans l'etude des séries financières.

Bibliographie

[1] Agnés Lagnoux. Renforcement Statistique Séries chronologiques. Université de Toulouse Le Mirail.

[2] Box G.E.P. and Jenkins GH. Time series analysis. Foreccasting and Conntrol. Holden Day, San Francisco (1976).

[3] Christian Francq and Jean- Michel Zakoian. $GARCH$ Models. 2010 Joln Wily and Sons Ltd.

[4] Christophe Hurlin. Modèles $ARCH - GARCH$, Applications à la VaR. Université d'Orléans $2006 - 2007$.

[5] Gourieroux, C. (1992), Modèles ARCH et Applications Financières, Collection ENSAE, Economica.

[6] Jonathan D. Cryer and Kung-Sik Chan. Time Series Analysis, With Applications in R. .Second Edition : 2008 Springer Science+Business Media, LLC.

[7] J.-J. Droesbeke, B. Fichet, Ph. Tassi, éd., Modélisation $ARCH$. Editions de l'Université de Bruxelles, 1994.

[8] Rainer von Sachs and Sébastien Van Bellegem. Séries Chronologique. Editions 26 septembre 2005

[9] Robert F.engle.Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of united Kingdom inflation .Vol.50.NO.4(jul,1982),pp.987-1007.

[10] Sylvain Rubenthaler. Séries chronologiques (avec R).Université Nice sophia Antipolis $2016-2017$.

[11] Tim Bollerselev.generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity .journal of Econometrics volume 31,Issue 3,April 1986, pages 307-327

[12] Yves Aragon. Séries temporelles avec R, Méthodes et cas. Springer-Verlag France, 2011.

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire un aperçu sur les séries temporelles et en particulier nous nous consacrons à l'étude des modèles ARCH et GARCH ainsi que leurs propriétés caractéristiques, ensuite nous nous attarderons principalement sur les problèmes posés par l'estimation des paramètres de ces modèles par la méthode du maximum de vraisemblance et en illustrant à l'aide du logiciel R les applications.

Mots clés

Modèles ARMA, Modèles ARCH, Modèles GARCH, Méthode MV.

Abstract

We present in this thesis an overview of the time series and in particular we devote ourselves to the study of the ARCH and GARCH models as well as their characteristic properties, then we will focus mainly on the problems posed by the estimation of the parameters of these models By the method of the maximum likelihood and by using the **software R the applications.**

Keywords

ARMA Models, ARCH Models, GARCH Models, MV Method.

ملخص

نقدم في هذه المذكرة لمحة حول السلاسل الزمنية, وعلى وجه الخصوص نحرص على دراسة النماذج ARCH وGARCH وخصائصهم المميزة, ثم سنركز أساسا على المشاكل المطروحة من اجل تقدير معاملات هذه النماذج بطريقة الترجيح العظمى و التوضيح بتطبيقات باستخدام البرنامج R.

الكلمات الدلالية

النموذج ARMA, النموذج ARCH, النموذج GARCH, طريقة الترجيح العظمى.