



Faculté des Sciences Exacte et Informatique  
Département de Mathématique

N° d'ordre : .....

N° de séries : .....

## Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

### Master

**Spécialité** : Mathématiques.

**Option** : Probabilités et statistiques.

### Thème

# Modélisation des séries temporelles : processus ARFIMA

**Présenté par :**

- GHEDIED Nora
- LASMAR Zohra

**Devant le jury :**

- Président : GHOUIL Djoweda
- Encadreur : CHERAITIA Hassen
- Examineur : SELLAMI Nawel

---

# TABLE DES MATIÈRES

Liste des tableaux	v
Liste des figures	viii
Notations	ix
Introduction générale	x
<b>1 Introduction aux modèles linéaires ARIMA</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction aux séries chronologiques . . . . .	1
1.1.1 Approches temps/fréquences : un peu d'histoire . . . . .	2
1.1.2 Les composantes principales d'une série temporelle . . . . .	4
1.1.3 Les modèles de décomposition déterministe . . . . .	4
1.1.4 Estimation et élimination de la partie déterministe ( $T(t)$ et $S(t)$ ) . . . . .	4
1.2 Processus stochastique . . . . .	4
1.2.1 Définitions . . . . .	4
1.2.2 Les autocorrélations et la densité spectrale . . . . .	7
1.3 Processus ARMA . . . . .	10

1.3.1	Processus MA(q) . . . . .	10
1.3.2	Le processus AR(p) . . . . .	13
1.3.3	Processus ARMA(p,q) . . . . .	17
1.4	Processus ARIMA et SARIMA . . . . .	20
1.4.1	Processus ARIMA . . . . .	20
1.4.2	Processus SARIMA . . . . .	20
1.5	Processus TS et DS . . . . .	21
1.5.1	Les processus TS (Trend stationary) . . . . .	21
1.5.2	Les processus DS (Differency Stationary ) . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Les processus autorégressifs moyennes mobiles fractionnairement intégrés (ARFIMA)</b>	<b>24</b>
2.1	Introduction à la notion de "mémoire longue" . . . . .	25
2.1.1	Généralités et définitions . . . . .	25
2.1.2	La comparaison entre un processus à mémoire longue et un processus à courte mémoire . . . . .	26
2.1.3	Processus self-similaires . . . . .	26
2.2	Processus ARFIMA . . . . .	27
2.2.1	Processus ARFIMA(0,d,0) . . . . .	27
2.2.2	Processus ARFIMA(p,d,q) . . . . .	29
2.2.3	Exposant de Hurst . . . . .	31
2.3	Les méthodes d'estimation des processus ARFIMA . . . . .	33
2.3.1	Les méthodes en deux étapes . . . . .	34
2.3.2	Les méthodes en une étape . . . . .	35
2.4	Résultats préliminaires sur les prédicteurs dans un modèle ARFIMA(p,d,q)	38
2.4.1	Prédiction linéaire à l'horizon l basée sur n observations de $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ d'un processus . . . . .	38

2.4.2	Prédiction pour un processus ARFIMA(p,d,q) avec $d > -\frac{1}{2}$ . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>40</b>
3.1	Simulation des modèles ARFIMA . . . . .	41
3.1.1	Quelques simulations des modèles ARFIMA(0,d,0) . . . . .	41
3.1.2	Quelques simulations des modèles ARFIMA(p,d,0) . . . . .	42
3.1.3	Quelques simulations des modèles ARFIMA(0,d,q) . . . . .	44
3.1.4	Estimation du paramètre d'intégration fractionnaire "d" . . . . .	45
3.2	Étude empirique sur les modèles ARFIMA . . . . .	52
3.2.1	Analyse préliminaire de la série ( <b>tmpyr</b> ) . . . . .	52
3.2.2	Différentiation de la série ( <b>tmpyr</b> ) . . . . .	53
3.2.3	La méthodologie de Box-Jenkins . . . . .	54
3.2.4	Prévisions . . . . .	61
	<b>Conclusion générale</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>
	<b>Annex</b>	<b>67</b>

---

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=200 par la méthode GPH. . . . .	46
3.2	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=1000 par la méthode de GPH. . . . .	46
3.3	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=200 par la méthode de GPH. . . . .	47
3.4	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=1000 par la méthode de GPH. . . . .	47
3.5	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=200 par la méthode de GPH. . . . .	48
3.6	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=1000 par la méthode de GPH. . . . .	48
3.7	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=200 par la méthode de Whittle. . . . .	49
3.8	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=1000 par la méthode de Whittle. . . . .	49
3.9	Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=200 par la méthode de Whittle. . . . .	50

---

---

3.10 Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=1000 par la méthode de Whittle. . . . .	50
3.11 Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=200 par la méthode de Whittle. . . . .	51
3.12 Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=1000 par la méthode de Whittle. . . . .	51
3.13 La table des critères du choix de meilleur modèle. . . . .	59
3.14 La table des prévisions. . . . .	61

---

## TABLE DES FIGURES

3.1	Le graphe d'un processus ARFIMA(0,0.1,0). . . . .	41
3.2	Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0). . . . .	41
3.3	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,0.1,0). . . . .	41
3.4	Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0). . . . .	41
3.5	Le graphe d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0). . . . .	42
3.6	Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0). . . . .	42
3.7	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0). . . . .	42
3.8	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0). . . . .	42
3.9	Le graphe d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0). . . . .	42
3.10	Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0). . . . .	42
3.11	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0). . . . .	43
3.12	Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0). . . . .	43
3.13	Le graphe d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0). . . . .	43
3.14	Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0). . . . .	43
3.15	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0). . . . .	43
3.16	Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0). . . . .	43

---

---

3.17	Le graphe d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3). . . . .	44
3.18	Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3). . . . .	44
3.19	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3). . . . .	44
3.20	Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3). . . . .	44
3.21	Le graphe d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7). . . . .	44
3.22	Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7). . . . .	44
3.23	Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7). . . . .	45
3.24	Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7). . . . .	45
3.25	Le graphe de la série <b>tmpyr</b> . . . . .	52
3.26	Le corrélogramme de la série <b>tmpyr</b> . . . . .	53
3.27	Le corrélogramme partiel de la série <b>tmpyr</b> . . . . .	53
3.28	Le graphe de la série différenciée. . . . .	54
3.29	Le corrélogramme de la série différenciée. . . . .	54
3.30	Le corrélogramme partiel de la série différenciée. . . . .	54
3.31	Le graphe de la série résiduelle pour le modèle AR(1). . . . .	56
3.32	Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle AR(1). . . . .	56
3.33	Le corrélogramme partiel de la série résiduelle pour le modèle AR(1). . . . .	57
3.34	Le périodogramme de la série résiduelle pour le modèle AR(1). . . . .	57
3.35	Le graphe de la série résiduelle pour le modèle MA(1). . . . .	57
3.36	Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle MA(1). . . . .	57
3.37	Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle MA(1). . . . .	58
3.38	Le corrélogramme partiel de la série résiduelle pour le modèle MA(1). . . . .	58
3.39	Le graphe de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1). . . . .	58
3.40	Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1). . . . .	58
3.41	Le corrélogramme partiel de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1). . . . .	59
3.42	Le périodogramme de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1). . . . .	59



---

---

3.43 L’histogramme des résidus pour le modèle ARMA(1,1). . . . .	60
--	----

---

# NOTATIONS

<b><math>T_t</math></b>	: La tendance
<b><math>S_t</math></b>	: La saisonalité
<b><math>\varepsilon_t</math></b>	: Le résidu
<b>bb</b>	: Bruit blanc
<b>i.i.d</b>	: Indépendant identiquement distribué
<b>E</b>	: Espérance
<b>Var</b>	: Variance
<b>Cov</b>	: Covariance
<b>Corr</b>	: Corrélation
<b>ACF</b>	: Auto correlation function "Fonction d'autocorrélation"
<b>PACF</b>	: Partial auto correlation function "Fonction d'autocorrélation partiel"
<b>ARMA</b>	: Auto regressive moving average "Autorégressif moyenne mobile"
<b>AR</b>	: Auto regressive "Autorégressif"
<b>MA</b>	: Moving average "Moyenne mobile"
<b>ARIMA</b>	: Autorégressif intégré moyenne mobile
<b>SARIMA</b>	: Autorégressif moyenne mobile intégré saisonier
<b>ARFIMA</b>	: Autorégressif fractionnée intégré moyenne mobile
<b>DS</b>	: Differency stationary "Marche aléatoire"
<b>TS</b>	: Trend stationary
<b>H</b>	: Hurst exponent "Exposant de Hurst"
<b>R/S</b>	: Scaled Range Method
<b>GPH</b>	: La méthode de Geweke et Porter Hudak
<b>Whittle</b>	: La méthode du maximum de vraisemblance approché par la fonction de Whittle
<b>RMSE</b>	: La racine de l'erreur quadratique moyenne
<b>MAE</b>	: L'erreur absolue moyenne

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Une série chronologique est un ensemble d'observations qui est obtenu de façon séquentielle à des intervalles de temps réguliers ou non. La modélisation et la prévision des séries chronologiques est un enjeu important dans de nombreux domaines : l'économétrie financière, l'économétrie classique, les sciences sociales et médicales, la démographie, et les sciences du climat .

Les objectifs pour l'étude des séries chronologiques est la description et la compréhension du mécanisme de production de la série d'une part, et la prévision des valeurs futures d'une autre part.

Les séries chronologiques linéaires peuvent être divisées en deux principales catégories. Les processus à mémoire courte et les processus à mémoire longue. Nous disons qu'un processus linéaire est à mémoire courte si sa fonction d'autocovariance est absolument sommable i.e  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$ . On dit que le processus est à mémoire longue si  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| = \infty$ . Les processus à mémoire courte sont largement utilisés dans de nombreux domaines et de multiples modèles ont été proposés : AR, MA, ARMA. En revanche, les modèles permettant de représenter les processus à mémoire longue ne sont apparus qu'au début des années 50, historiquement pour l'étude du comportement inhabituel des niveaux du fleuve Nil en Egypte.

Les processus à mémoire longue s'avèrent plus adaptés à l'étude des séries chronologiques issues par exemple de l'économie, la climatologie et l'économétrie financière. On peut, dans cette situation, adapter un modèle plus large appelé modèle ARMA fractionnaire et qui présente « une longue mémoire » .

L'objet de notre travail porte sur l'inférence statistique dans une classe de modèles

---

---

à longue mémoire, plus précisément, les modèles autorégressif moyennes mobile fractionnairement intégrés ARFIMA(p,d,q).

Ce mémoire se compose de trois chapitres.

Dans le premier chapitre intitulé "Introduction aux modèles linéaires ARIMA", nous rappellerons les notions fondamentales sur les séries chronologiques, ce chapitre est consacré à l'étude des processus ARMA, leurs cas particulières "AR", "MA" et leurs propriétés, des processus ARIMA et SARIMA et aussi les processus non stationnaires TS et DS.

Le deuxième chapitre intitulé "Les processus ARFIMA" est consacré à la présentation du modèle ARFIMA(p,d,q), ses propriétés de causalité et d'inversibilité, l'expression de sa fonction d'autocovariance ainsi que sa représentation spectrale, et à l'estimation du paramètre d'intégration fractionnaire "d" du modèle ARFIMA(p,d,q). Trois méthodes d'estimation sont présentées : la méthode de "Hurst", la méthode de Geweke et Porter Hudak "GPH" et la méthode du maximum de vraisemblance approché par la fonction de Whittle "Whittle". Ce chapitre a été clôturé par les prévisions basées sur les processus ARFIMA(p,d,q).

Enfin, le dernier chapitre intitulé "Application" divisé en deux parties, la première est consacrée à la simulation de différents modèles ARFIMA(p,d,q) et l'estimation du paramètre d'intégration fractionnaire "d" par deux méthodes : "GPH" et "Whittle", ensuite on fait compléter notre chapitre par une application de la méthode de Box-Jenkins utilisée pour la prévision sur la série de température annuelle "tmpyr" de package "arfima" du logiciel R.

A la fin, une conclusion générale dresse une synthèse des principaux résultats obtenus au cours de notre travail.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## INTRODUCTION AUX MODÈLES LINÉAIRES ARIMA

Dans ce chapitre nous essayerons de présenter brièvement les notions classiques des séries chronologiques et des processus aléatoires, on reprendra brièvement la théorie sur les processus ARMA, ARIMA et SARIMA qui servira dans la modélisation à mémoire courte et moyenne des séries chronologiques qu'on rencontre assez souvent dans la vie courante. Ces processus développés dans les années quarante du siècle passé, ont connu un grand intérêt de la part des chercheurs en statistique.

On étudierait par la suite les caractéristiques statistiques en terme de stationnarité et d'inversibilité de ces processus, leurs fonctions d'autocovariances, d'autocorrélations et leurs densité spectrale. Enfin, on présente un panorama des processus linéaire non stationnaires TS et DS.

### 1.1 Introduction aux séries chronologiques

**Définition 1.1.1.** *On considère qu'une série temporelle (chronologique) observée  $\{x_t, t = 1, \dots, T\}$  est la réalisation d'un processus aléatoire  $\{X_t, t = 1, \dots, T\}$ . Les  $X_t$  sont des variables aléatoires, et  $x_t$  est la valeur prise par  $X_t$ , ce qui advient à la date  $t$ , où  $T = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$  (espace d'évolution discret), et  $E = \mathbb{R}$  (espace des états continu).*

### 1.1.1 Approches temps/fréquences : un peu d'histoire

De façon générale, quand on parle de séries stationnaires, on a en tête une représentation de la forme  $X_t$ , où  $t \in \mathbb{Z}$ , dont on peut définir un ensemble d'autocovariance par :

$\gamma(t, s) = E([X_t - \mu][X_s - \mu])$ , qui ne dépend que la distance entre  $t$  et  $s$  tel que  $\gamma(t, s)$  tend vers zéro lorsque  $(t - s)$  tend vers l'infini.

Cette approche, basée sur l'utilisation des corrélations, correspond à l'analyse de type "temporelle" : elle consiste à étudier les corrélations croisées de fonctions de la série ( $X_t$ ). Ces méthodes sont généralement paramétriques de type moyenne-mobiles (moving average MA) ou autorégressives (AR).

L'autre approche également utilisée est celle basée sur l'étude des "fréquences". Cette vision est une généralisation des méthodes utilisées en analyse de Fourier. L'idée est ici d'approximer une fonction analytique par une somme pondérée de fonctions sinus ou cosinus.

#### 1.1.1.1 Analyse harmonique

Les astronomes ont été les premiers à utiliser l'analyse de Fourier pour des séries chronologiques. Leur but était de détecter des saisonnalités cachées au sein de leurs données. Ainsi, Lagrange a utilisé ces méthodes pour détecter de la périodicité cachée en 1772 et en 1778. Un demi-siècle plus tard, en 1847, Buys et Ballot, dans "Les changements périodiques de températures" ont proposé des méthodes pour étudier la périodicité de données astronomiques. Toutefois, il a fallu attendre 1889 pour que Sir Arthur Shuster introduise le périodogramme, qui constitue la base des méthodes spectrales d'analyse de séries chronologiques. L'idée est la suivante : on recherche un modèle sous-jacent de la forme :

$$X_t = \sum [\alpha_j \cos(w_j t) + \beta_j \sin(w_j t)] + \varepsilon_t,$$

où  $(\varepsilon_t)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, qui correspondront à un "bruit blanc".

#### 1.1.1.2 Modèles autoregressifs et moyennes mobiles

Deux articles en 1927 ont ouvert une autre voie : l'article de Yule ("on the method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's sunspot numbers") et celui de Slutsky ("the summation of random causes as the source of cyclical

processes”).

Yule a introduit dans la littérature les **modèles autorégressifs**, en considérant des modèles de la forme :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \beta X_{t-2},$$

Cette suite présente un comportement saisonnier, Yule remarque qu'en fait, le comportement dépend des racines (complexes) de l'équation  $z^2 - \alpha z - \beta = 0$ , et plus particulièrement de leur position par rapport au disque unité.

Le modèle autorégressif proposé par Yule est le suivant :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (1.1)$$

où  $(\varepsilon_t)$  correspond à un "bruit blanc".

Slutsky a introduit les **moyennes mobiles** la même année que Yule a introduit les processus autorégressifs, la forme générale était la suivante :

$$X_t = \mu_0 \varepsilon_t + \mu_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \mu_q \varepsilon_{t-q}, \quad \mu_i, i = 0, \dots, q \text{ sont des constantes.} \quad (1.2)$$

où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc, Cette écriture a suggéré d'élargir la relation (1.1) sous une forme proche de (1.2), à savoir :

$$\phi_0 X_t + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad \phi_i, i = 0, \dots, p \text{ sont des constantes.}$$

Les processus introduits par Yule deviendront les processus AR(p) et ceux introduits par Slutsky les processus MA(q). L'analogie entre les deux processus sera même poussée plus loin lorsqu'il sera montré que les processus AR(p) et MA(q) sont respectivement des processus MA( $\infty$ ) et AR( $\infty$ ), sous certaines conditions.

### 1.1.1.3 L'approche temporelle : concept de corrélation sérielle

Si l'approche spectrale repose sur l'utilisation du spectre (ou du périodogramme), l'approche temporelle repose sur l'autocorrélogramme, ou plus généralement sur l'utilisation de la corrélation sérielle. Poynting est le premier à introduire cette idée en 1884. Le coefficient de corrélation sérielle a été défini par Hooker en 1901. Etant données deux séries temporelles,  $(X_t)$  et  $(Y_t)$ , la **covariance sérielle** est définie par  $c_k(X, Y) = cov(X_t, Y_{t+k})$  et la **corrélation sérielle** sera alors  $r_k(X, Y) = c_k(X, Y)/c_0(X, Y)$ . Le coefficient d'autocorrélation est alors obtenu en considérant  $\rho_k = corr(X_t, X_{t+k}) = r_k(X, X)$ . Les années 30 ont alors vu l'éclosion des résultats de base dans le domaine des séries chronologiques, sous l'impulsion de Khintchine, Cramer, Wold, Kolmogorov, Wiener...etc. Ces auteurs ont développé une théorie des séries temporelles, en considérant qu'une série chronologique est une réalisation d'un processus aléatoire.

### 1.1.2 Les composantes principales d'une série temporelle

On peut souvent décomposer une série temporelle en trois termes :

- 1) **La tendance ( $T_t$ )** : représente l'évolution à long terme de la grandeur étudiée, et traduit l'aspect général de la série, c'est une fonction monotone, polynomiale, exponentielle... .
- 2) **La saisonnalité ( $S_t$ )** : est une fonction déterministe périodique de période  $d$ .
- 3) **Le résidu ( $\varepsilon_t$ )** : est un bruit aléatoire stationnaire correspond à des fluctuations irrégulières, en général de faible intensité.

### 1.1.3 Les modèles de décomposition déterministe

On distingue trois modèles de décomposition :

- 1) **Le modèle additif :**

$$X(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon(t)$$

- 2) **Le modèle multiplicatif :**

$$X(t) = T(t).S(t).\varepsilon(t)$$

- 3) **Le modèle mixte :**

$$X(t) = (T(t) + S(t)).\varepsilon(t)$$

### 1.1.4 Estimation et élimination de la partie déterministe ( $T(t)$ et $S(t)$ )

Il ya plusieurs méthodes d'estimation comme la méthode des moindres carrée ordinaires (MCO), la méthode des moyenne mobile pour la tendance, et la méthode de différentiation pour éliminer les deux composantes.

## 1.2 Processus stochastique

### 1.2.1 Définitions

**Définition 1.2.1.** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indicées par  $t$ , noté  $(X(t), t \in \mathbb{Z})$  où encore  $X_t$ .*



**Définition 1.2.2.** Un bruit blanc fort est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d)  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  centrées et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . On note  $(\varepsilon_t) \sim \text{bbf}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

**Définition 1.2.3.** On appelle bruit blanc faible, toute suite de v.a.r  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  centrée, non corrélés et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . On note  $(\varepsilon_t) \sim \text{bb}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

**Définition 1.2.4.** On dit que  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus linéaire de moyenne  $\mu$  s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i},$$

où  $(\varepsilon_t) \sim \text{bbf}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty$ .

**Définition 1.2.5.** Le processus  $X_t$  est stationnaire au sens strict si pour tout  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  avec  $t_i \in T$ ,  $i = 1, \dots, n$  et si pour tout  $\tau \in T$  avec  $t_i + \tau \in T$ ,  $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$  a la même distribution de probabilité jointe que  $\{X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}\}$ .

### Exemples 1.2.1.

Par la définition d'un bruit blanc fort  $(\varepsilon_t) \sim \text{bbf}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  est strictement (fortement) stationnaire.

**Définition 1.2.6.** Un processus  $X_t$  est stationnaire au second ordre si :

- (1)  $E(X_t) = m < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ ;
- (2)  $E(X_t^2) < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ ;
- (3)  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$  (ne dépend pas de  $t$ )  $\quad \forall t, h \in \mathbb{Z}$ .

où  $\gamma(h)$  est la fonction d'autocovariance du processus.

### Exemples 1.2.2.

- 1\_ Par définition un processus bruit blanc faible  $(\varepsilon_t) \sim \text{bb}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  est faiblement stationnaire.
- 2\_ Un processus linéaire  $X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$ , où  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty$  est stationnaire au second ordre car :

$$(1) E(X_t) = E\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i E(\varepsilon_{t-i}) = 0 < +\infty.$$

(2)

$$\begin{aligned}
E(X_t^2) &= \text{Var}(X_t) = E\left[\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right] \\
&= E\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}\right) \\
&= E\left(\sum_{i=-\infty, i=j}^{+\infty} \psi_i^2 \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=-\infty, i \neq j}^{+\infty} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}\right) \\
&= E\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2 \varepsilon_{t-i}^2\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2 E(\varepsilon_{t-i}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) \\
&= E\left[\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}\right)\right] \\
&= E\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}\right) \\
&= E\left(\sum_{i=-\infty, i=j-h}^{+\infty} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-(j-h)} + \sum_{i=-\infty, i \neq j-h}^{+\infty} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-(j-h)}\right) \\
&= E\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h} \varepsilon_{t-i}^2\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h} E(\varepsilon_{t-i}^2) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h}.
\end{aligned}$$

**Définition 1.2.7.** Un processus linéaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  s'appelle *causal* s'il peut être représenté sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i},$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc et  $\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty$ .

**Définition 1.2.8.** Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit *inversible* s'il existe une suite de constantes  $(\pi_i)$  telle que :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i X_{t-i},$$

où  $\sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i^2 < +\infty$ .

## 1.2.2 Les autocorrélations et la densité spectrale

### 1.2.2.1 Définitions

**Définition 1.2.9.** Soit  $X_t$  un processus stationnaire de variance finie. On appelle fonction d'autocovariance  $\gamma(h)$  de  $X_t$  la fonction :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))], \forall h \in \mathbb{Z}.$$

**Définition 1.2.10.** Soit  $X_t$  un processus stationnaire. On appelle fonction d'autocorrélation  $\rho(h)$  de  $X_t$  la fonction

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)}\sqrt{\text{Var}(X_{t-h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \forall h \in \mathbb{Z}.$$

**Théorème 1.2.1.** La fonction d'autocovariance (resp. d'autocorrélation) d'un processus  $X_t$  stationnaire vérifiée les propriétés suivantes :

- $\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = E[(X_t - E(X_t))^2] = \text{Var}(X_t) = \sigma_X^2 \geq 0$  ;
  - $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$  ;
  - $\gamma(h) = \gamma(-h)$  (fonction paire).
- ( resp.  $\rho(0) = 1, |\rho(h)| \leq \rho(0), \rho(h) = \rho(-h)$  ).

**Définition 1.2.11.** L'autocorrélation partielle d'ordre  $h$  désigne la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-h}$  obtenue lorsque l'influence des variables  $X_{t-h+i}$  avec  $i < h$  à été retirée .

**Corollaire 1.2.1.** De façon générale, la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , satisfait la relation :

$$\phi_{hh} = \frac{|p_h^*|}{|p_h|}, \quad \forall h \in \mathbb{N},$$

avec  $p_h$  la matrice symétrique formée des  $(h-1)$  premières autocorrélations de  $X_t$ , donnée par :

$$p_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

et  $p_h^*$  est donnée par :

$$p_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & \rho(h) \end{bmatrix}$$

$p_h^*$  est ainsi la matrice  $p_h$  dans laquelle on a remplacé la dernière colonne par le vecteur  $[\rho(1) \ \rho(2) \ \dots \ \rho(h)]'$ .

**Définition 1.2.12.** La densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire est donnée par :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) \exp(-iwh) \quad , \forall w \in \mathbb{R}$$

où  $\gamma(h)$  est la fonction d'autocovariance du processus.

**propriété 1.2.1.** La densité spectrale est une fonction paire, positive, continue et périodique de période  $2\pi$ .

**Remarque 1.2.1.** la fonction d'autocovariance  $\gamma(h)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(w) \cos(wh) dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(w) \exp(iwh) dw. \end{aligned}$$

**Exemples 1.2.3.** Un bruit blanc  $(\varepsilon_t)$  est caractérisé par :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 & , \text{ pour } h = 0 \\ \gamma(h) = 0 & , \text{ pour } h \neq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

alors sa densité spectrale est donnée par :

$$f(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}.$$

**propriété 1.2.2.**

La densité spectrale d'une série  $(X_t)$  est constante, alors  $(X_t)$  est un bruit blanc.

**Démonstration**

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(w) \exp(iwh) dw = k \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(iwh) dw,$$

avec  $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(iwh) dw = 0$  , sauf si  $h=0$ .

Cette nullité de la fonction d'autocorrélation est donc une caractéristique du bruit blanc.

### 1.2.2.2 Estimation des autocorrélations

Considérons un ensemble d'observations  $X_1, \dots, X_T$ .

La moyenne empirique est donnée par :

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t.$$

La fonction d'autocovariance empirique est donnée par :

$$\hat{\gamma}_T(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t-h} - \bar{X}_T).$$

Et la fonction d'autocorrélation empirique est donnée par :

$$\hat{\rho}_T(h) = \frac{\hat{\gamma}_T(h)}{\hat{\gamma}_T(0)}.$$

#### propriété 1.2.3.

Les moments empiriques convergent vers les moments théoriques :

$$\bar{X}_T \longrightarrow m, \hat{\gamma}_T(h) \longrightarrow \gamma(h) \text{ et } \hat{\rho}_T(h) \longrightarrow \rho(h), \text{ quand } T \longrightarrow \infty.$$

#### Remarque 1.2.2.

Bien que ces fonctions soient définies pour tout  $h$  tel que  $-T \leq h \leq T$ , la fonction d'autocovariance empirique fournit un estimateur très pauvre de  $\gamma(h)$  pour des valeurs  $h$  proche de  $T$ . Autre indicatif, Box et Jenkins recommandent de n'utiliser ces quantités que si  $T > 50$  et  $h \leq \frac{T}{4}$ .

Afin, par exemple, de faire la selection de modèles, il important de pouvoir dire si les autocovariances empiriques sont significativement non nulles. Il est alors possibles d'utiliser le résultat suivant :

#### propriété 1.2.4.

Si  $(X_t)$  est un processus linéaire, au sens où il satisfait  $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j \varepsilon_{t-j}$  où  $(\varepsilon_t)$  est une suite de variables i.i.d centrées, telle que  $E(\varepsilon_t^4) = \eta E(\varepsilon_t^2)^2 < +\infty$ , où les  $\phi_j$  définissent une série absolument convergente, et où  $\eta$  est une constante positive, alors , on a la formule dite de Bartlett :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{Cov}(\hat{\gamma}_T(h), \hat{\gamma}_T(k)) = \eta \gamma(h) \gamma(k) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma(i) \gamma(i+k-h) + \gamma(i+k) \gamma(i-h).$$

**propriété 1.2.5.**

Si  $(X_t)$  est un processus linéaire, au sens où il satisfait  $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j \varepsilon_{t-j}$  où  $(\varepsilon_t)$  est une suite de variables i.i.d centrées, telle que  $E(\varepsilon_t^4) = \eta E(\varepsilon_t^2)^2 < +\infty$ , où les  $\phi_j$  définissent une série absolument convergente, et où  $\eta$  est une constante positive, alors, on a pour tout  $p \geq 0$  :

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_T(0) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_T(p) \end{pmatrix} \rightarrow N \left( \begin{pmatrix} \gamma(0) \\ \vdots \\ \gamma(p) \end{pmatrix}, V \right)$$

où  $V$  est la matrice de variance-covariance définie par :

$$V = \left[ \eta \gamma(h) \gamma(k) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma(i) \gamma(i+k-h) + \gamma(i+k) \gamma(i-h) \right]_{h,k=0,\dots,p}.$$

**1.2.2.3 Estimation de la densité spectrale**

Le périodogramme est défini comme le module au carré de la transformé de Fourier discrète des observations, i.e.

$$I_T(x) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_t \exp(itx) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \hat{\gamma}_T(h) \exp(ihx).$$

Le plus souvent, on estime le périodogramme aux fréquences de Fourier, i.e.  $x_k = 2k\pi/T$  pour  $k = 1, \dots, T$ , noté  $I_{T,k}$ .

Sous des hypothèses de régularité de la densité spectrale, le périodogramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale. Mais il n'est pas consistant (on ne peut estimer que les  $T$  premier  $\gamma(h)$  intervenant dans la définition du périodogramme à partir de  $T$  observations).

**1.3 Processus ARMA****1.3.1 Processus MA(q)**

**Définition 1.3.1.** On appelle processus moyennes mobile d'ordre  $q$   $MA(q)$  un processus linéaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  vérifiant une relation :

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

où  $\varepsilon(t) \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\theta_0 = 1$  et  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) sont des réels.

En introduisant l'opérateur de retard  $B$  défini par :  $BX_t = X_{t-1}$ , la relation (1.4) peut encore s'écrire :  $X_t = \Theta(B)\varepsilon(t)$ .

où  $\Theta(B) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$  est appelé polynôme caractéristique en  $B$  de degré  $q$  du processus  $X_t$ .

### 1.3.1.1 Les propriétés d'un processus MA(q)

**1) La stationnarité :** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus MA(q), alors  $X_t$  est stationnaire.

#### Démonstration

on a :

$$(1) \quad E(X_t) = E\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = 0 < \infty$$

(car  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$ )

(2)

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) \\ &= E\left(\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right)\left(\sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t+h-k}\right)\right) = E\left(\sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^q \theta_j \theta_k \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sum_{j,k=0}^q \theta_j \theta_k E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-(k-h)}) \\ &= \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } j = k - h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} & \text{si } 0 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases} \end{aligned}$$

donc  $\gamma(h)$  ne dépend pas de  $t$ .

$$(3) \quad E(X_t^2) = Var(X_t) = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2 < \infty.$$

**2) La causalité :** Par la définition d'un processus causale, le processus moyenne mobile est causale car  $\sum_{i=0}^q \theta_i^2 < \infty$  (car MA(q) linéaire).

**3) L'inversibilité :** Un processus moyenne mobile est inversible ssi le polynôme caractéristique  $\theta(z) = \sum_{j=0}^q \theta_j z^j$  où  $\theta_0 = 1$  est tel que :

$$\theta(z) \neq 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1,$$

(autrement dit,  $\theta(z) = 0$ , pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$ ).

### 1.3.1.2 La fonction d'autocovariance d'un processus MA(q)

La fonction d'autocovariance d'un processus MA(q) est donnée par :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} & \text{si } 0 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases}$$

où  $\theta_0 = 1$ .

#### Démonstration

Voir la preuve de la stationnarité d'un processus MA(q).

### 1.3.1.3 La fonction d'autocorrélation d'un processus MA(q)

La fonction d'autocorrélation d'un processus MA(q) est :

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 0 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases}$$

propriété :

Pour un processus MA(q),  $\rho(h) = 0$ , pour  $h > q$ .

### 1.3.1.4 La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus MA(q)

**Proposition 1.3.1.** *La fonction d'autocorrélation partielle  $\phi_{h,h}$  d'un processus MA(q)  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  défini par  $X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$  se comporte comme une exponentielle ou une sinusodale amortie.*

### 1.3.1.5 La densité spectrale d'un MA(q)

Soit  $X_t$  un processus MA(q) :  $X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$

alors sa densité spectrale est donnée par :

$$f(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\Theta(\exp(-iw))|^2}{2\pi}.$$



### 1.3.2 Le processus AR(p)

**Définition 1.3.2.** Un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  sera appelé processus autorégressif linéaire d'ordre  $p$ ,  $AR(p)$  s'il existe un bruit blanc  $\varepsilon_t$ , et des réels  $\varphi_i, i = 1, \dots, p$  tel qu'une relation de récurrence :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.5)$$

est vérifiée.

La notation des pôlynomes de retard ramène (1.5) à la forme :  $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$ .

où  $\Phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i B^i$  est le pôlynome caractéristique en  $B$  de degré  $p$  du processus  $X_t$ .

#### 1.3.2.1 Les propriétés d'un processus processus AR(p)

**1) La stationnarité et la causalité :** Un processus autorégressif est stationnaire et causale ssi le polynôme caractéristique en  $z$  :  $\Phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i z^i$  tel que  $\Phi(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , tel que  $|z| \leq 1$  (autrement dit :  $\Phi(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , tel que  $|z| > 1$ ).

**2) L'inversibilité :** Un processus  $AR(p)$  est toujours inversible car  $\sum_{i=1}^p \varphi_i^2$  est finie.

#### 1.3.2.2 L'écriture $AR(\infty)$ d'un processus $MA(q)$

**Proposition 1.3.2.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus  $MA(q)$  :  $X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ , si  $\Theta(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$  (inversible), alors on peut écrire  $X_t$  sous la forme  $AR(\infty)$  :

$$\varepsilon_t = \Theta^{-1}(B)X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X_{t-i},$$

avec  $\beta_0 = 1$  et  $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2 < \infty$ .

**Exemples 1.3.1.** L'écriture d'un  $MA(1)$  sous la forme d'un  $AR(\infty)$ .

Considérons le modèle  $MA(1)$  :  $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

alors :  $X_t = \varepsilon_t + \theta B\varepsilon_t = (1 + \theta B)\varepsilon_t$

donc :  $\Theta(B) = 1 + \theta B$

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est inversible si  $\Theta(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$

$$\Theta(z) = 0 \Leftrightarrow 1 + \theta z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{\theta}$$

pour que  $X_t$  inversible il faut que  $|z| = \left|\frac{1}{\theta}\right| > 1$  donc  $|\theta| < 1$

alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= (1 + \theta B)^{-1} X_t = \frac{1}{1 + \theta B} X_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} -\pi_i B^i X_t = \sum_{i=0}^{\infty} -\pi_i X_{t-i} \end{aligned}$$

où  $\pi_0 = -1$ .

La série de Taylor :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, |x| < 1$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \theta B} &= \frac{1}{1 - (-\theta B)} = 1 + (-\theta B) + (-\theta B)^2 + (-\theta B)^3 + (-\theta B)^4 + \dots \\ &= 1 - \theta B + \theta^2 B^2 - \theta^3 B^3 + \theta^4 B^4 - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-\theta)^i B^i \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-\theta)^i B^i = \sum_{i=0}^{\infty} -\pi_i B^i$$

on trouve que :

$$\pi_i = (-1)^{i+1} \theta^i, \quad i = 1, 2, \dots \text{ et } \pi_0 = -1$$

alors :

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B^i X_t + \varepsilon_t$$

### 1.3.2.3 L'écriture $MA(\infty)$ d'un processus $AR(p)$

**Proposition 1.3.3.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus  $AR(p)$  :  $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$ , si  $\Phi(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| > 1$  (causale), alors on peut écrire  $X_t$  sous la forme  $MA(\infty)$  :

$$X_t = \Phi^{-1}(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

avec :  $\psi_0 = 1$  et  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ .

**Exemples 1.3.2.** *La représentation MA( $\infty$ ) d'un processus AR(2).*

Considérons le modèle AR(2) :

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \\ X_t &= \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \varepsilon_t \\ (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2) X_t &= \varepsilon_t \\ \Phi(B) X_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

si  $\Phi(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1$  alors on peut écrire.

$$X_t = \Phi^{-1}(B)\varepsilon_t = \frac{1}{1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(B)\varepsilon_t$$

les coefficients  $\psi_j$  sont déterminés par :

$$\Phi(B)\Psi(B) = 1$$

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots) = 1$$

$$\psi_0 + (\psi_1 - \varphi_1 \psi_0)B + (-\varphi_1 \psi_1 - \varphi_2 \psi_0 + \psi_2)B^2 + \dots = 1$$

donc

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 - \varphi_1 \psi_0 = 0 \\ -\varphi_1 \psi_1 - \varphi_2 \psi_0 + \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 = \varphi_1 \\ \psi_2 = \varphi_1^2 + \varphi_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

#### 1.3.2.4 Propriétés des autocorrélations - Equations de Yulle Walker

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus AR(p) vérifiée l'équation :

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

on a :  $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h})$ .

car  $E(X_t) = E(X_{t-h}) = 0$  (AR(p) possède une représentation MA( $\infty$ )).

alors :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \varphi_1 E(X_{t-1}X_{t-h}) + \dots + \varphi_p E(X_{t-p}X_{t-h}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) \\ &= \varphi_1 \gamma(h-1) + \dots + \varphi_p \gamma(h-p) + E(\varepsilon_t X_{t-h}).\end{aligned}$$

$$\text{avec : } E(\varepsilon_t X_{t-h}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \begin{cases} \varphi_1 \gamma(h-1) + \dots + \varphi_p \gamma(h-p) & \text{si } h > 0 \\ \varphi_1 \gamma(1) + \dots + \varphi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i) & \text{si } h > 0 \\ \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(i) + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

en divisant la relation (1.8) par  $\gamma(0)$ , on obtient la fonction d'autocorrélation :

$$\rho(h) = \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho(h-i)$$

en écrivant cette relation pour différentes valeurs de  $h$  ( $h=1,2,\dots,p$ ), on arrive au système Yulle-Walker :

$$R_p \varphi = \rho$$

où  $R_p$  est la matrice de corrélation symétrique :

$$R_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}.$$

### 1.3.2.5 La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus AR(p)

#### propriété 1.3.1.

Pour un processus autorégressif AR(p),  $\phi_{h,h} = 0, \forall h > p$ . En d'autres termes, pour un processus AR(p), les autocorrélations partielles s'annulent à partir du rang  $p+1$ .

### 1.3.2.6 La densité spectrale d'un AR(p)

Soit  $X_t$  un processus AR(p) :

$$\varepsilon_t = \Phi(B)X_t,$$

alors sa densité spectrale est :

$$f(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi|\Phi(\exp(-iw))|^2}.$$

### 1.3.3 Processus ARMA(p,q)

**Définition 1.3.3.** On appelle processus ARMA(p,q) un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  vérifiant une relation de récurrence :

$$X_t - \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

où les  $\varphi_i, \theta_j$  sont des réels et  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ .

La notation des polynômes de retard ramène (1.9) à la forme :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$$\text{avec } \Phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i B^i \quad \text{et} \quad \Theta(B) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j.$$

#### Remarque 1.3.1.

Un processus AR(p) est un processus ARMA(p,0), et un processus MA(q) est un processus ARMA(0,q).

#### 1.3.3.1 Propriétés d'un processus ARMA(p,q)

##### 1) La stationarités et la causalité

Un processus ARMA(p,q) est stationnaire et causal si le polynôme  $\Phi(z)$  a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité, autrement dit :  $\Phi(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$ .

##### 2) L'inversibilité

On dit que un processus ARMA(p,q) est inversible si  $\Theta(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$ .

### 1.3.3.2 L'écriture $MA(\infty)$ d'un processus ARMA(p,q)

**Proposition 1.3.4.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus ARMA(p,q) :  $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$  où  $\Phi(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$  (causal), alors  $X_t$  admet la représentation  $MA(\infty)$  :

$$X_t = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}$$

avec  $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$  et  $\alpha_0 = 1$ .

### 1.3.3.3 L'écriture $AR(\infty)$ d'un processus ARMA(p,q)

**Proposition 1.3.5.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus ARMA(p,q)  $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$  tel que  $\Theta(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$  (inversible), alors  $X_t$  admet une représentation  $AR(\infty)$  :

$$\varepsilon_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X_{t-i}$$

avec  $\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i| < \infty$  et  $\beta_0 = 1$ .

### 1.3.3.4 Les propriétés des autocovariances

La fonction d'autocovariance d'un processus ARMA(p,q) est donnée par :

$$\gamma(h) - \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i) = 0 \quad , \text{pour } h \geq q+1$$

et

$$\gamma(h) - \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h} \quad , \text{pour } 0 \leq h \leq q$$

où les  $\psi_k$  correspondent aux coefficients de la forme  $MA(\infty)$  de  $(X_t)$  :

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}.$$

#### Démonstration

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus ARMA(p,q) de représentation minimale et causale, il admet alors la représentation  $MA(\infty)$  :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon(t-i)$$

et on a :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i X(t-i) + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon(t-j)$$

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h}) - E(X_t) \cdot E(X_{t+h})$$

on a :

$$E(X_t) = E(X_{t+h}) = 0 \text{ (d'après l'écriture } MA(\infty))$$

donc :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t \cdot X_{t+h}) \\ &= E \left[ \left( \sum_{i=0}^p \varphi_i X_{t+h-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+h-j} \right) X_t \right] \\ &= \sum_{i=1}^p \varphi_i E(X_{t+h-i} \cdot X_t) + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t+h-j} \cdot X_t) \\ &= \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i) + \sum_{j=0}^q \theta_j \sum_{i=0}^{\infty} [\psi_i E(\varepsilon_{t+h-j} \cdot \varepsilon_{t-i})] \\ &= \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i) + \sum_{j=0}^q \theta_j \sum_{i=0}^{\infty} [\psi_i E(\varepsilon_{t-(j-h)} \cdot \varepsilon_{t-i})] \\ &= \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i) + \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h} \sigma_{\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

### 1.3.3.5 La fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(p,q)

La fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(p,q) est donnée par :

$$\frac{\gamma(h) - \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma(h-i)}{\gamma(0)} = 0 \quad , \text{ pour } h \geq q+1$$

ou

$$\rho(h) - \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho(h-i) = 0 \quad , \text{ pour } h \geq q+1$$

et

$$\rho(h) - \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho(h-i) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\gamma(0)} \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h} \quad , \text{ pour } 0 \leq h \leq q.$$

### 1.3.3.6 La densité spectrale d'un processus ARMA(p,q)

#### propriété 1.3.2.

Soit  $X_t$  un processus ARMA(p,q) vérifiant :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

La densité spectrale de  $X_t$  est donnée par :

$$f(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\Theta(\exp(-iw))|^2}{2\pi |\Phi(\exp(-iw))|^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |1 + \theta_1 \exp(-iw) + \dots + \theta_q \exp(-qiw)|^2}{2\pi |1 - \varphi_1 \exp(-iw) - \dots - \varphi_p \exp(-ipw)|^2}.$$

## 1.4 Processus ARIMA et SARIMA

### 1.4.1 Processus ARIMA

**Définition 1.4.1.** *Un processus  $X_t$  suit un ARIMA(p,d,q) s'il vérifie la relation suivante :*

$$\begin{aligned} \Phi(B)(1-B)^d X_t &= \Theta(B)\varepsilon_t \\ \Phi(B)\nabla^d X_t &= \Theta(B)\varepsilon_t \end{aligned}$$

avec :  $\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ ,  $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ , et  $d$  est un entier positif appelé paramètre d'intégration ou de différenciation, et  $\varepsilon_t \sim \text{bb}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

### 1.4.2 Processus SARIMA

**Définition 1.4.2.** *Une série  $X_t$  suit un processus SARIMA d'ordre  $(p, d, q) \times (P, D, Q)$  si cette série a une saisonnalité de période  $s$  et qu'on peut écrire :*

$$\Phi_p(B)\Phi_P(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \Theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\varepsilon_t$$

avec

$$\Phi_p(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$$

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \varphi_1 B^s - \dots - \varphi_P B^{Ps}$$

$$\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$$



$$\Theta_Q(B^s) = 1 + \theta_1 B^s + \dots + \theta_Q B^{Qs}.$$

## 1.5 Processus TS et DS

### 1.5.1 Les processus TS (Trend stationary)

**Définition 1.5.1.** *Si l'on suppose qu'un processus peut s'écrire comme la somme d'une fonction déterministe du temps et d'un élément stochastique stationnaire, alors un processus TS est donnée par :*

$$X_t = f_t + \varepsilon_t$$

où  $f_t$  est une fonction déterministe du temps et  $\varepsilon_t$  est un processus stationnaire. Dans le cas simple où la fonction  $f_t$  est une fonction polynômiale d'ordre 1 on a :

$$X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

#### Les caractéristiques des processus TS

Supposons que  $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . On a alors les propriétés suivantes :

- $E(X_t) = E(\alpha + \beta t + \varepsilon_t) = \alpha + \beta t$
- $V(X_t) = E[X_t - E(X_t)]^2 = E(\varepsilon_t)^2 = V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$
- $Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \quad , \forall t \neq s$

Le processus TS est non stationnaire en moyenne, car  $E(X_t)$  dépend du temps. Cette processus peut être stationnarisé en retranchant à  $X_t$  la valeur estimée  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}t$  par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

On doit minimiser l'erreur quadratique :

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{t=1}^N (X_t - \alpha - \beta t)^2$$

où N est le nombre des observations.

Donc déterminer  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème de minimisation est :

$$\begin{cases} \hat{\beta} = \frac{Cov(X, T)}{Var(T)} \\ \hat{\alpha} = \bar{X} - \hat{\beta}\bar{T} \end{cases}$$

**Remarque 1.5.1.** On peut aussi appliquer la méthode des différences.

**Exemples 1.5.1.** Soit  $(X_t)$  un processus TS vérifie

$$X_t = \beta t + \varepsilon_t \quad , \text{ pour tout } t \text{ , et } \beta \in R$$

alors

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

Il s'agit d'un processus MA(1) (non inversible, mais stationnaire comme tout processus MA(q)).

## 1.5.2 Les processus DS (Differency Stationary )

### 1.5.2.1 Marche aléatoire sans dérive(DS sans drift)

**Définition 1.5.2.** Un processus DS ou marche aléatoire (marche au hasard) est défini de la façon suivante : Soit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$  une suite de variables aléatoires i.i.d, et on suppose que  $E(\varepsilon_t) = 0$  et  $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ .

Une marche aléatoire  $X_t$  vérifie :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \text{ pour tout } t \text{ avec } X_0 = 0$$

#### Les caractéristiques des processus DS sans dérive

On peut noter que  $X_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$

on a alors

$$\begin{cases} E(X_t) = E(X_{t-1} + \varepsilon_t) = 0 \\ Var(X_t) = E[X_t - E(X_t)]^2 = \sigma_\varepsilon^2 t \\ Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = \min(t, s)\sigma_\varepsilon^2 \quad , \text{ pour } t \neq s \end{cases}$$

La marche aléatoire sans dérive est stationnaire en moyenne, mais pas en variance.

**Remarque 1.5.2.**

Soit  $(X_t)$  une marche aléatoire :  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$  pour tout t

alors :  $Y_t = X_t - X_{t-1}$  est stationnaire ( $Y_t = \varepsilon_t$ )

### 1.5.2.2 Marche aléatoire avec dérive (DS avec drift)

**Définition 1.5.3.** Une marche aléatoire avec dérive est définie par :

$X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t$  où  $\alpha \in R$ , pour tout  $t$ , et  $\varepsilon_t$  une suite de variables aléatoires *i.i.d* de moyenne 0 et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ .

#### Les caractéristiques des processus DS avec dérive

Par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha + X_0 + \varepsilon_1 \\ X_2 &= \alpha + X_1 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ X_t &= t\alpha + X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \end{aligned}$$

avec  $X_0 = 0$  alors  $X_t = (\alpha + \varepsilon_1) + (\alpha + \varepsilon_2) + \dots + (\alpha + \varepsilon_t)$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} E(X_t) = E(t\alpha + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i) = \alpha t \\ Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 t \\ Cov(X_t, X_s) = \min(t, s)\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{pour tout } t \neq s \end{cases}$$

il représente une non stationnarité de nature stochastique, la méthode le plus courant utilisée est prendre des différences.

#### Remarque 1.5.3.

Soit  $X_t$  marche aléatoire avec dérive :

$$X_t = (\alpha + \varepsilon_1) + (\alpha + \varepsilon_2) + \dots + (\alpha + \varepsilon_t) + (\alpha + \varepsilon_t)$$

alors :  $Y_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t$  est stationnaire.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# LES PROCESSUS AUTORÉGRESSIFS MOYENNES MOBILES FRACTIONNAIREMENT INTÉGRÉS (ARFIMA)

Il existe cependant de nombreux exemples de données sur "les processus à mémoire longue" où les corrélations prises seules sont faibles, mais de sommes extrêmement élevée. Le périodogramme de ces séries présente un pic dans le spectre à la fréquence zéro. De manière équivalente, dans le domaine temporel, les autocorrélations de ces séries diminuent très lentement.

De nombreux processus répondent à une telle définition, comme le bruit gaussien fractionnaire en temps continu ou en temps discret. Nous nous intéresserons ici uniquement à une catégorie particulière de processus à mémoire longue : des processus ARFIMA (auto-régressifs, moyenne mobile, fractionnairement intégrés). Par rapport aux autres modèles à mémoire longue, les processus ARFIMA présentent l'avantage d'être relativement facilement applicables en économie dans la mesure où ils constituent une extension directe des processus ARIMA usuels.

Dans un premier temps, nous nous attacherons à la représentation de la mémoire longue au travers de la définition de processus ARFIMA avant de présenter quelques pro-

cedures visant à estimer les paramètres d'intégration de ces processus. Nous terminerons ce chapitre par des prévisions sur les processus ARFIMA.

## 2.1 Introduction à la notion de "mémoire longue"

### 2.1.1 Généralités et définitions

**Définition 2.1.1.** *Un processus stationnaire sera dit à mémoire longue si les autocorrélations  $\rho(h)$  satisfont :*

$$\rho(h) \sim Ch^{2d-1} \quad \text{quand } h \longrightarrow \infty \quad (2.1)$$

où  $C$  est une constante non nulle et  $d < 1/2$ .

*Il est possible de faire une distinction suivant la valeur de  $d$  :*

– si  $d < 0$  : mémoire intermédiaire, la série  $\rho(h)$  est absolument convergente

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\rho(h)| < \infty.$$

– si  $0 < d < 1/2$  : mémoire longue, la série  $\rho(h)$  n'est plus absolument convergente

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\rho(h)| = \infty.$$

#### Remarque 2.1.1.

Cette condition (2.1) se réécrit également  $\lim_{h \rightarrow \infty} \rho(h)/Ch^{2d-1} = 1$ .

#### Remarque 2.1.2.

Si la mémoire longue a été définie à partir de la fonction d'autocorrélation, elle peut aussi être définie à l'aide de la densité spectrale.

**Définition 2.1.2.** *On dira qu'un processus  $(X_t)$  est à mémoire longue s'il existe une constante  $\beta$  telle que  $0 < \beta < 1$  et une constante  $C > 0$  telles que :*

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(w)}{Cw^{-\beta}} = 1$$

où  $f$  est la densité spectrale du processus  $(X_t)$ .

**Définition 2.1.3.** *On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  stationnaire d'ordre deux est à courte mémoire :*

– si sa fonction d'autocovariance  $\gamma$  vérifie :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < +\infty$$

- ou si sa densité spectrale  $f$  est continue presque partout et bornée inférieurement et supérieurement i.e. il existe  $m, M \in \mathbb{R}^{*+}$  tels que pour tout  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ,  $m < f(\lambda) < M$ .

### Exemples 2.1.1.

Les processus stationnaires ARMA sont dits "à mémoire courte", car leur fonction de corrélation est bornée de la façon suivante :  $|\rho(k)| \leq Cr^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $|r| < 1$  (décroissance exponentielle de la fonction de corrélation), ce qui entraîne que la somme des  $\rho(k)$  est absolument convergente :

$$\sum |\rho(k)| < \infty.$$

### 2.1.2 La comparaison entre un processus à mémoire longue et un processus à courte mémoire

- Dans le domaine temporel, les processus à mémoire longue sont caractérisés par une fonction d'autocorrélation décroissant hyperboliquement au fur et à mesure que le retard s'accroît, alors que celle des processus à mémoire courte décroît exponentiellement.
- Dans le domaine fréquentiel, les processus à mémoire longue sont caractérisés par une densité spectrale s'accroissant sans limite quand la fréquence tend vers zéro. Ainsi la densité spectrale exhibe un pôle à la fréquence zéro, contrairement à la densité spectrale des processus à mémoire courte qui est finie et positive aux basses fréquences.

### 2.1.3 Processus self-similaires

**Définition 2.1.4.** *On dit qu'il processus est self-similaire, de paramètre de self-similarité  $H$  si, pour tout  $c$ , le processus  $(Y_{ct})$  à la même distribution que le processus  $(c^H Y_t)$ , pour tout  $t \geq 0$ .*

#### Accroissements stationnaires de processus self-similaires

Soit  $(Y_t)$  un processus H-self-similaire, à accroissements stationnaires. Posons alors :

$$X_t = Y_t - Y_{t-1}, \text{ pour } t = 1, 2, \dots$$

Soit  $\sigma^2 = \text{Var}(X_t)$ . Alors la fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2}{2} \left[ |h+1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h-1|^{2H} \right].$$

## 2.2 Processus ARFIMA

Un exemple de processus à mémoire longue très répandu est le processus autorégressif fractionnaire intégré et à moyenne mobile dit processus ARFIMA(p,d,q) où p représente le nombre de coefficient de la partie AR, d le paramètre de mémoire et q le nombre de coefficients de la partie MA. Ce processus est devenu très populaire depuis son introduction au début des années 1980, principalement à cause de sa structure mathématique relativement simple et de ses nombreux points communs avec les modèles ARMA, qui restent le modèle prédominant pour l'analyse des séries chronologiques linéaires. Le processus a été originellement proposé par Granger et Joyeux [1980] et Hosking [1981] comme une extension des modèles ARIMA au cas où les valeurs de d appartiendrait à  $[-1/2, 1/2]$ .

### 2.2.1 Processus ARFIMA(0,d,0)

**Définition 2.2.1.** *Le processus ARFIMA(0,d,0) noté  $(X_t)$  encore appelé bruit fractionnaire où d est le paramètre de mémoire où paramètre de différenciation fractionnaire et  $\sigma^2$  la variance de l'innovation est une classe particulière de processus ARFIMA(p,d,q). Ainsi, il se définit par :*

$$X_t = (1 - B)^{-d} \varepsilon_t \quad (2.2)$$

où

$$(1 - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)}$$

où

$$\Gamma(d) = \int_0^{+\infty} x^{d-1} \exp(-x) dx.$$

et  $(\varepsilon_t)$  un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ .

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $X_t$  un processus ARFIMA(0,d,0).*

– Lorsque  $d < 1/2$ ,  $X_t$  est un processus stationnaire et possède une représentation moyenne mobile infinie :

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

où

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$$

- Lorsque  $d > -1/2$ ,  $X_t$  est un processus inversible et possède une représentation autorégressive infinie :

$$\Pi(B)X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t$$

où

$$\pi_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}.$$

### La fonction d'autocovariance

- La fonction d'autocovariance  $\gamma(t, h) = Cov(X_t, X_{t+h})$  converge vers :

$$\sigma^2 \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(h+1-d)\Gamma(d)\Gamma(1-d)}, \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

où  $\sigma^2$  est la variance du bruit blanc.

- Supposons que  $-1/2 < d < 1/2$  et que  $\varepsilon_t$  soit de variance unitaire, alors :

La fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}$$

avec

$$\gamma_k \sim \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} k^{2d-1} \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

### La densité spectrale

**Définition 2.2.2.** La densité spectrale de ces processus ARFIMA(0, d, 0) vérifie la relation suivante :

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}.$$



### 2.2.2 Processus ARFIMA(p,d,q)

**Définition 2.2.3.** *Un processus fractionnaire est un processus  $(X_t)$ , défini pour  $t \geq 0$ , satisfaisant une équation de la forme :*

$$(1 - B)^d \Phi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (2.4)$$

avec comme condition initiale  $X_t = 0$  pour  $t < 0$  et  $\varepsilon_t$  un bruit blanc pour  $t \geq 0$ , nul sinon, de variance finie  $\sigma^2$ , et où  $\Phi(B)$  et  $\Theta(B)$  sont deux polynômes ayant leurs racines à l'extérieur du disque unité, et où  $d$  est réel, avec la convention :

$$\begin{aligned} (1 - B)^d &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-j+1)}{j!} (-1)^j B^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+j)}{\Gamma(d)j!} B^j \end{aligned}$$

où

$$\Gamma(d) = \int_0^{+\infty} x^{d-1} \exp(-x) dx.$$

#### Remarque 2.2.1.

Notons que les processus ARMA ou ARIMA peuvent être considérées comme des cas particuliers des processus ARFIMA avec  $d = 0$  et  $d = 1, 2, \dots$  respectivement.

#### Les propriétés d'un processus ARFIMA(p,d,q)

**Théorème 2.2.2.** *Considérons un processus ARFIMA(p,d,q) défini par (2.4). Supposons que les polynômes  $\Phi(z)$  et  $\Theta(z)$  n'ont aucune racine en commun et que  $d \in [-1/2, 1/2]$ , alors :*

- *Si les racines de  $\Phi(z)$  sont à l'extérieur du cercle unité  $\{z : |z| = 1\}$ , alors il existe une unique solution stationnaire pour (2.4) donnée par :*

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{où } \Psi(z) = (1 - z)^{-d} \Theta(z) / \Phi(z).$$

- *Si les racines de  $\Phi(z)$  sont à l'extérieur du disque unité  $\{z : |z| \leq 1\}$ , alors la solution  $X$  est causale.*
- *Si les racines de  $\Theta(z)$  sont à l'extérieur du disque unité  $\{z : |z| \leq 1\}$ , alors la solution  $X$  est inversible.*

**Remarque 2.2.2.** *D'après le théorème (2.2.2), si les racines des polynômes  $\Phi(B)$  et  $\Theta(B)$  sont à l'extérieur du disque unité et  $d \in [-1/2, 1/2]$ , alors le processus ARFIMA(p,d,q) est stationnaire, causal et inversible. Dans ce cas, on a :*

$$X_t = (1 - B)^{-d} \Phi(B)^{-1} \Theta(B) \varepsilon_t = \Psi(B) \varepsilon_t. \quad (2.5)$$

et

$$\varepsilon_t = (1 - B)^d \Phi(B) \Theta(B)^{-1} X_t = \Pi(B) X_t. \quad (2.6)$$

### Les représentations MA( $\infty$ ) et AR( $\infty$ )

Les représentations (2.5) et (2.6) du processus sont respectivement appelées représentation MA( $\infty$ ) et représentation AR( $\infty$ ) du processus ( $X_t$ ).

### La densité spectrale

Dans le cas où le processus ARFIMA( $p, d, q$ ) est stationnaire i.e lorsque  $d < 1/2$ , il admet une densité spectrale donnée pour tout  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  par :

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 - \exp(-i\lambda) \right|^{-2d} \frac{\left| \Theta(\exp(-i\lambda)) \right|^2}{\left| \Phi(\exp(-i\lambda)) \right|^2} \quad (2.7)$$

Dans le cas où  $d \geq 1/2$ ,  $f$  définie en (2.7) est appelée densité spectrale généralisée du processus ARFIMA.

### Les autocorrélations des processus ARFIMA( $p, d, q$ )

**propriété 2.2.1.** Soit  $X_t$  un processus ARFIMA( $p, d, q$ ), vérifiant :

$$(1 - B)^d \Phi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

Les autocorrélations  $\gamma_k^X$  du processus  $X_t$  peuvent s'écrire en fonction des autocorrélations des deux processus :

$$\begin{cases} Y_t = (1 - B)^d X_t : \text{processus ARMA}(p, q) \\ Z_t = \Phi(B) \Theta(B)^{-1} X_t : \text{processus ARFIMA}(0, d, 0) \end{cases}$$

Alors :

$$\gamma_k^X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma_i^Y \gamma_{k-i}^Z.$$

**Théorème 2.2.3.** Si la solution  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est causale et inversible, alors si  $d \neq 0$ ; la densité spectrale :

$$f(\lambda) \simeq \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \frac{\Theta(1)}{\Phi(1)} \right) \lambda^{-2d} \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0$$

### Démonstration

Si  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est causale  $\Phi(z) \neq 0; |z| \leq 1$ , La densité spectrale de  $(X_t)$  satisfaisant le modèle :

$$X_t = \Psi(B)Y_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_j Y_{t-j}$$

où

$$Y_t = (1 - B)^{-d} \varepsilon_t$$

et s'écrit

$$f_X(\lambda) = |\Psi(e^{-i\lambda})|^2 f_Y(\lambda)$$

où  $f_Y(\lambda)$  est la densité spectrale du processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ .

Comme  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus fractionnaire ARFIMA  $(0, d, 0)$  vérifiant :

$$(1 - B)^d Y_t = \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma^2)$

par ailleurs

$$\Psi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$$

on a

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-i\lambda})|^2} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}$$

et quand  $\lambda \rightarrow 0$

$$f(\lambda) \simeq \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \frac{\Theta(1)}{\Phi(1)} \right) \lambda^{-2d}.$$

### 2.2.3 Exposant de Hurst

Lors de son analyse sur les crues du Nil, Hurst (1951) a introduit une statistique permettant de détecter la présence de phénomènes de mémoire longue. Cette statistique, appelée analyse R/S, est particulièrement intéressante dans la mesure où elle donne lieu à un coefficient, appelé exposant de Hurst, permettant de classer les séries temporelles en fonction de la nature de leur mémoire.

### Analyse R/S et exposant de Hurst

La statistique R/S se définit comme l'étendue (R) des sommes partielles des écarts d'une série temporelle à sa moyenne divisée par son écart type ( $s_T$ ). Ainsi, soit une série temporelle  $X_t$ ,  $t=1, \dots, T$ , de moyenne  $\bar{X}_T$ , la statistique R/S, notée ici  $Q_T$ , s'écrit :

$$Q_T = R/s_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (X_j - \bar{X}_T)^2\right]^{1/2}} \times \left[ \max_{1 \leq K \leq T} \sum_{j=1}^K (X_j - \bar{X}_T) - \min_{1 \leq K \leq T} \sum_{j=1}^K (X_j - \bar{X}_T) \right]$$

Cette statistique est asymptotiquement proportionnelle à  $T^H$ , où la constante  $H$ ,  $0 < H < 1$ , est appelée exposant de Hurst. L'exposant de Hurst est ainsi donné par :

$$H \sim \frac{\log Q_T}{\log T}$$

L'exposant de Hurst est particulièrement intéressant dans la mesure où sa valeur permet de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance. Le paragraphe suivant propose d'établir une telle classification en mettant en avant la relation existant entre l'exposant de Hurst et le paramètre d'intégration fractionnaire des processus ARFIMA.

### Relation entre l'exposant de Hurst et le paramètre d'intégration fractionnaire

Ainsi que nous l'avons précédemment souligné, les premiers processus à mémoire longue ont été développés en temps continu. En particulier, Mandelbort et Van Ness (1968) ont introduit une généralisation du mouvement brownien ordinaire, appelé mouvement brownien fractionnaire, afin de tenir compte de la dépendance de long terme entre les observations. Ainsi, le mouvement brownien fractionnaire d'exposant  $H$ , noté  $W_H(t, \cdot)$ , est donné par :

$$W_H(t, \cdot) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left( \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW(s, \cdot) \right)$$

où  $H$  est exposant de Hurst,  $0 < H < 1$ , et  $W(s, \cdot)$  est le mouvement brownien ordinaire de variance unitaire (mouvement brownien standard). Les incréments  $X_t$  du mouvement brownien fractionnaire :

$$X_t = W_H(t, \cdot) - W_H(t-1, \cdot)$$

forment un processus gaussien stationnaire appelé bruit gaussien fractionnaire en temps discret (Mandelbrot et Wallis (1969c)).

La fonction d'autocovariance de ce processus donnée par :

$$\gamma_k = \frac{1}{2} [|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}] \quad (2.8)$$

avec

$$\gamma_k \sim H(2H - 1)k^{2H-2} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

En reprenant les formulations des fonctions d'autocovariance du bruit gaussien fractionnaire et des processus ARFIMA, on peut établir une relation entre le paramètre  $d$  des processus ARFIMA et l'exposant de Hurst  $H$ . En effet, bien qu'il s'agisse d'un processus à temps discret et d'un processus à temps continu, comparons la limite asymptotique de ces deux fonctions (relation (2.3) et (2.9)) ; on constate qu'elles ont la même puissance de déclin hyperbolique. Ainsi, en liant les deux exposants :

$$2H - 2 = 2d - 1$$

nous obtenons la relation :

$$d = H - \frac{1}{2}$$

Dès lors, il est possible d'effectuer une classification des séries temporelles en fonction des valeurs du paramètre  $d$  :

- Si  $0 < d < \frac{1}{2}$  : le processus ARFIMA est un processus stationnaire à mémoire longue. Les autocorrélations sont positives et diminuent hyperboliquement vers 0 lorsque le retard augmente. La densité spectrale est concentrée autour des faibles fréquences (cycles lents), elle tend vers l'infini lorsque la fréquence tend vers zéro. On est face à un processus persistant.
- Si  $d = 0$ , le processus ARFIMA se réduit au processus ARMA standard et ne présente aucune structure de dépendance à long terme.
- Si  $-\frac{1}{2} < d < 0$  : le processus est anti-persistant. Les autocorrélations alternent de signe et la densité spectrale est dominée par des composantes de haute fréquence (la densité spectrale tend vers zéro lorsque la fréquence tend vers zéro).

## 2.3 Les méthodes d'estimation des processus ARFIMA

Les méthodes d'estimation des processus ARFIMA peuvent être regroupées en deux catégories selon que l'on estime ou non simultanément tous les paramètres de la représentation ARFIMA( $p,d,q$ ). On distingue ainsi les méthodes en deux étapes, qui sont les plus anciennes, et les méthodes en une étape.

### 2.3.1 Les méthodes en deux étapes

Les méthodes en deux étapes peuvent être réunies en deux techniques principales dont la caractéristique commune est, dans une première étape, d'estimer le paramètre d'intégration fractionnaire  $d$  puis, dans une seconde étape, d'estimer par les méthodes usuelles des séries temporelles les paramètres autorégressif et moyenne mobile de la représentation ARMA( $p, q$ ) de la série transformée. Ces techniques se distinguent uniquement par la méthode de calcul du paramètre de différentiation fractionnaire  $d$ .

#### La méthode basée sur l'exposant de Hurst

La méthode la plus simple consiste à estimer  $d$  par le biais de l'exposant de Hurst. Nous avons en effet précédemment rappelé le lien entre l'exposant de Hurst et le paramètre d'intégration fractionnaire  $d$  :  $\hat{d} = \hat{H} - \frac{1}{2}$ .

#### Les méthodes spectrales

Il est possible de construire des estimateurs de  $d$  basés sur le comportement spectral aux basses fréquences de la série temporelle. Selon Olshen (1967), la densité spectrale a de meilleures propriétés échantillonnales que la fonction d'autocorrélation, dans le cas où les coordonnées spectrales aux fréquences  $2\pi j/T$ ,  $j = 1, \dots, T/2$ , sont asymptotiquement non corrélées.

Deux procédures alternatives d'estimation exploitent la forme particulière de la densité spectrale des séries temporelles à intégration fractionnaire : Janacek (1982) estime  $d$  par intégration numérique du log périodogramme, Geweke et Porter-Hudak (1983) s'appuient sur le comportement de la densité spectrale autour de zéro. En utilisant les fréquences basses, une relation univariée du log périodogramme sur le log de la fréquence est estimée.

#### La méthode de Geweke et Porter-Hudak (GPH) (1983)

La méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983) ou "méthode de régression", est basée sur la forme de la densité spectrale :

$$f(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_\varepsilon(\lambda) \quad (2.10)$$

où

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\Theta(e^{-i\lambda})|^2}{2\pi |\Phi(e^{-i\lambda})|^2}$$

est la densité spectrale du processus ARMA( $p, q$ ) :  $\varepsilon_t = \nabla^d X_t$ .

Si l'on prend le logarithme de l'expression (2.10), on obtient :

$$\ln f(\lambda) = \ln f_\varepsilon(0) - d \ln |1 - e^{-i\lambda}|^2 + \ln \left[ \frac{f_\varepsilon(\lambda)}{f_\varepsilon(0)} \right]$$

En remplaçant  $\lambda$  par la fréquence de Fourier  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T} \in [0, \pi]$  et en ajoutant  $\ln I(\lambda_j)$  ( le périodogramme de la série X ) de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\ln I(\lambda_j) = \ln f_\varepsilon(0) - d \ln |1 - e^{-i\lambda_j}|^2 + \ln \left[ \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j)} \right] + \ln \left[ \frac{f_\varepsilon(\lambda_j)}{f_\varepsilon(0)} \right]$$

où le périodogramme est défini par :

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{j=1}^T X_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

Si  $\lambda_j$  est proche de zéro, le dernier terme est négligeable comparé aux autres termes à droite de l'égalité et l'on réécrit alors l'équation sous la forme d'une équation de régression linéaire simple :

$$Y_j = a + bZ_j + \xi_j$$

où :

- $j = 1, 2, \dots, m$  où  $m$  correspond aux ordonnées du périodogramme.
- $Y_j = \ln I(\lambda_j)$
- $a = \ln f_\varepsilon(0)$
- $b = -d$
- $Z_j = \ln |1 - e^{-i\lambda_j}|^2$
- $\xi_j = \ln \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j)}$

On estime alors simplement  $b$  et  $d$  par les moindres carrés ; l'estimateur  $\hat{d}$  étant fourni par :

$$\hat{d} = - \left[ \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{Z})^2 \right]^{-1} \left[ \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{Z})(Y_j - \bar{Y}) \right] \quad (2.11)$$

Geweke et Porter-Hudak (1983) montrent que, quand  $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ , la loi de l'estimateur  $\hat{d}$  de  $d$  tend vers une loi normale quand  $T \rightarrow \infty$  :

$$\hat{d} \sim N \left( d, \pi^2 \left[ 6 \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{Z})^2 \right]^{-1} \right).$$

### 2.3.2 Les méthodes en une étape

Parmi les méthodes d'estimation en une étape, on peut distinguer celles basées sur une approximation de la méthode du maximum de vraisemblance et celles fondées sur le maximum de vraisemblance exact.

### La méthode du maximum de vraisemblance approché par la fonction de Whittle

Fox et Taqqu (1986) proposent d'utiliser une autre approximation de la fonction de vraisemblance gaussienne. L'idée sous-jacente est que la technique du maximum de vraisemblance exact est certainement la plus efficace, mais c'est également la plus difficile à mettre en oeuvre. C'est pourquoi Fox et Taqqu ont suggéré de se ramener à une approximation. Leurs estimateurs sont convergents et asymptotiquement normaux.

La vraisemblance gaussienne de la série  $X$  pour le processus général :

$$\Phi(L)\nabla^d(X_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.12)$$

où  $\Phi$  et  $\Theta$  sont des polynômes retards d'ordre  $p$  et  $q$  respectivement et  $-1/2 < d < 1/2$ , peut être exprimée comme :

$$L(\beta, \sigma) = (2\pi\sigma^2)^{-T/2}(\tau_0, \dots, \tau_{T-1})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^T \frac{(X_j - \hat{X}_j)^2}{\tau_{j-1}}\right) \quad (2.13)$$

où :

- $\beta = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$
- $\hat{X}_j, j = 1, \dots, T$ , correspond à la série des prévisions avec un pas unitaire
- $\tau_{j-1} = \sigma^{-2}E(X_j - \hat{X}_j)^2, j = 1, \dots, T$ .

Les estimateurs du maximum de vraisemblance  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}$  sont obtenus en maximisant la vraisemblance  $L(\beta, \sigma^2)$  par rapport à  $\beta$  et  $\sigma$ .

Brockwell et Davis (1991) indiquent que cette maximisation aboutit à :

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1}S(\hat{\beta}), \quad \text{où } S(\hat{\beta}) = \sum_{j=1}^T \frac{(X_j - \hat{X}_j)^2}{\tau_{j-1}}$$

et  $\hat{\beta}$  est la valeur de  $\beta$  qui minimise :

$$l(\beta) = \ln\left(\frac{S(\beta)}{T}\right) + T^{-1} \sum_{j=1}^T \ln(\tau_{j-1})$$

pour  $\varepsilon_t$  gaussien, Yajima (1985) a montré que, dans le cas où  $p = q = 0$  et  $d > 0$ , on a :

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, T^{-1}W^{-1}(\beta))$$

où  $W_{p+q+1, p+q+1}(\beta)$  est une matrice dont l'élément  $(j, k)$  est :

$$W_{jk}(\beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \ln g(\lambda; \beta)}{\partial \beta_j} \frac{\partial \ln g(\lambda; \beta)}{\partial \beta_k} d\lambda$$



et  $\sigma^2 g(\cdot; \beta)/2\pi$  est la densité spectrale du processus.

Le comportement asymptotique de  $\hat{\beta}$  pour  $d < 0$  est cependant inconnu.

Le calcul de la fonction  $l(\beta)$  est long, surtout pour des valeurs élevées de  $T$ .

Aussi, Brockwell et Davis (1991) suggèrent d'utiliser l'approximation suivante de  $l(\beta)$  :  $l_a(\beta) = \ln \frac{1}{T} \sum_j \left( \frac{I_T(\omega_j)}{g(\omega_j; \beta)} \right)$  la somme étant sur toutes les fréquences de Fourier  $\omega_j$  non nulles.

Hannan (1973) et Fox et Taqqu (1986) ont montré que l'estimateur  $\hat{\beta}$  qui minimise  $l_a(\beta)$  est convergent et si  $d > 0$ , il a la même distribution limite que  $\hat{\beta}$ .

La variance du bruit blanc est estimée par :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_j \left( \frac{I_T(\omega_j)}{g(\omega_j; \tilde{\beta})} \right)$$

Brockwell et Davis (1991) remarquent cependant que l'approximation  $l_a(\beta)$  ne prend pas en compte le terme  $T^{-1} \sum_{j=1}^T \ln(r_{j-1})$ . Bien que ce terme tend vers zéro lorsque  $T$  tend vers l'infini, cet oubli peut avoir des conséquences non négligeables sur la minimisation de  $l(\beta)$ . Les auteurs suggèrent alors d'approximer ce terme par  $T^{-1} \sum_{j=1}^T \ln g(\omega_j; \beta)$ . On obtient en conséquence la seconde approximation de  $l(\beta)$ , soit :

$$l_b(\beta) = l_a(\beta) + T^{-1} \sum_j \ln g(\omega_j; \beta)$$

Brockwell et Davis (1991) proposent ainsi une technique visant à estimer les paramètres  $\beta$  et  $\sigma^2$  du modèle fractionnairement intégré en maximisant l'approximation de Whittle,  $L_\omega$ , de la fonction de vraisemblance. Une telle opération revient à minimiser :

$$-2 \ln(L_\omega) = T \ln(2\pi) + 2T \ln \sigma + \sigma^{-2} \sum_j \left( \frac{I_T(\omega_j)}{g(\omega_j; \beta)} \right) + \sum_j \ln g(\omega_j; \beta)$$

où  $I_T$  correspond au périodogramme,  $\sigma^2.g$  est la densité spectrale du modèle et la somme est sur toutes les fréquences de Fourier non nulles.

## 2.4 Résultats préliminaires sur les prédicteurs dans un modèle ARFIMA(p,d,q)

### 2.4.1 Prédiction linéaire à l'horizon l basée sur n observations de $X_1, X_2, \dots, X_n$ d'un processus

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $L_2(\cdot)$  un espace de Hilbert de variables aléatoires de moyenne nulle et de moment d'ordre deux fini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ .

On note également par  $\hat{X}_{n+l}$  le prédicteur linéaire optimal de  $X_{n+l}$  avec  $l > 0$ , basé sur  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .

Posons  $M_n$  le sous-espace linéaire fermé de  $L_2(\cdot)$  engendré par  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .

$\hat{X}_{n+l}(l)$  est alors donné par :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+l}(l) &= P_{M_n}(X_{n+l}) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k, \quad l > 0\end{aligned}$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des constantes qui peuvent être déterminées en utilisant le fait que :

$$(X_{n+l} - P_{M_n}(X_{n+l})) \in M_n^\perp,$$

c'est-à-dire :

$$\langle X_{n+l} - \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k, X_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle X_k, X_j \rangle &= \langle X_{n+l}, X_j \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \iff \sum_{k=1}^n \alpha_k E(X_k X_j) &= E(X_{n+l} X_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

**Remarque 2.4.1.** Soit  $\alpha_{(n)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$  et  $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)'$  tel que :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+l} &= P_{M_n}(X_{n+l}) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \\ &= \alpha_{(n)} X_{(n)}\end{aligned}$$

Alors  $\hat{X}_{n+1}$  est le meilleur prédicteur linéaire au sens qu'il réalise le minimum de l'erreur moyenne quadratique

$$M.S.E(\beta'_{(n)}X_{(n)}) = E[X_{n+l} - \beta'_{(n)}X_{(n)}]^2.$$

### 2.4.2 Prédiction pour un processus ARFIMA(p,d,q) avec $d > -\frac{1}{2}$

En utilisant les résultats précédents, on peut déterminer le prédicteur d'un pas du processus  $(X_t)$  satisfaisant le modèle ARFIMA (p,d,q) avec  $d > -\frac{1}{2}$ ,

$$\Phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (2.14)$$

où les racines de

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

et

$$\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$$

sont à l'extérieur du cercle unité.

En posant  $Z_t = \Phi(B)X_t$  dans le modèle (2.14), on a :

$$(1 - B)^d Z_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

**Théorème 2.4.1.** *Le prédicteur d'un pas d'un processus  $(X_t)$  satisfaisant le modèle (2.14) est donné par :*

$$\tilde{X}_t(1) = \tilde{Z}_t(1) + \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t+1-j}$$

où

$$\tilde{Z}_t(1) = - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{1+j} Z_{t-j} + \sum_{j=0}^{q-1} \theta_{1+j} \varepsilon_{t-j}.$$

---

---

## CHAPITRE 3

---

### APPLICATIONS

Après avoir présenté dans le chapitre précédent le cadre théorique des processus ARFIMA, nous poursuivrons maintenant la démarche que nous allons adapter depuis le début de notre travail qui va du général vers l'application particulière que nous voulons mettre en place.

Dans ce contexte, nous entamons ici en premier lieu une phase plus directement consacrée à la simulation de différents processus ARFIMA en se jouant sur la taille de l'échantillon une fois, et sur la valeur de "d" une autre fois et l'estimation du paramètre d'intégration fractionnaire d par deux méthodes : "la méthode de Geweke et Porter-Hudak" et "la méthode du maximum de vraisemblance approché par la fonction de Whittle", en deuxième lieu, on a essayé de modéliser la série "tmpyr" du logiciel "R" (la série de moyenne annuelle des températures dans le centre de l'Angleterre du 1659 au 1966). L'étude de cette série à travers la démarche de la méthode de BOX-JENKINS nous permet de mieux capter le meilleur modèle qui sera estimé par la suite, et à travers ce modèle on fera les prévisions.

## 3.1 Simulation des modèles ARFIMA

### 3.1.1 Quelques simulations des modèles ARFIMA(0,d,0)

#### 3.1.1.1 Simulation d'un processus ARFIMA(0,0.1,0) pour n=200

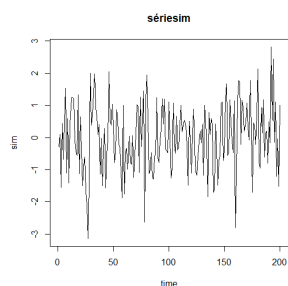


FIGURE 3.1 – Le graphe d'un processus ARFIMA(0,0.1,0).

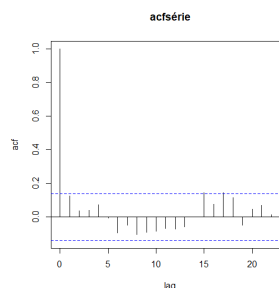


FIGURE 3.2 – Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0).

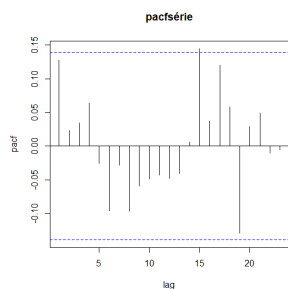


FIGURE 3.3 – Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,0.1,0).

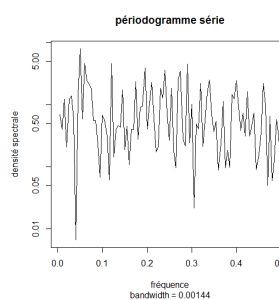


FIGURE 3.4 – Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0).

### 3.1.1.2 Simulation d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0) pour $n = 200$

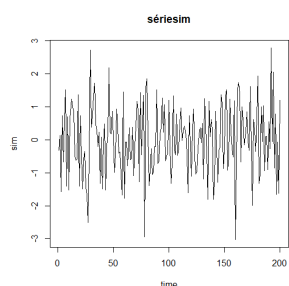


FIGURE 3.5 – Le graphe d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0).

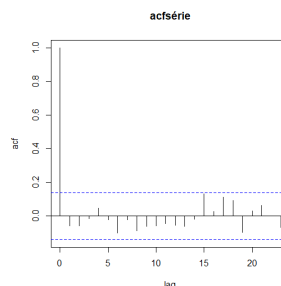


FIGURE 3.6 – Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0).

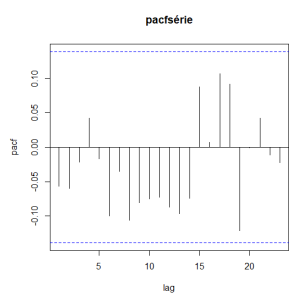


FIGURE 3.7 – Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0).

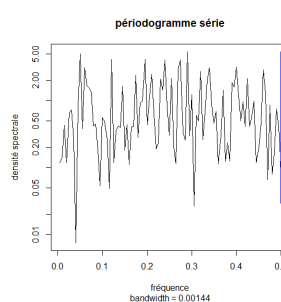


FIGURE 3.8 – Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0).

## 3.1.2 Quelques simulations des modèles ARFIMA(p,d,0)

### 3.1.2.1 Simulation d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0) pour $n = 1000$

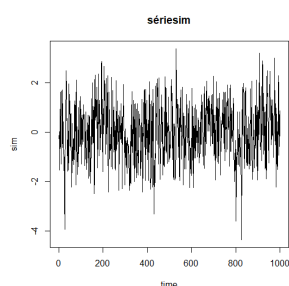


FIGURE 3.9 – Le graphe d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0).

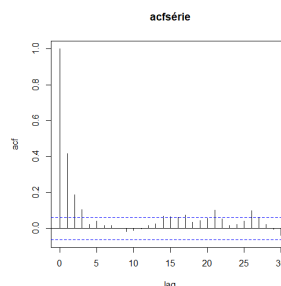


FIGURE 3.10 – Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0).

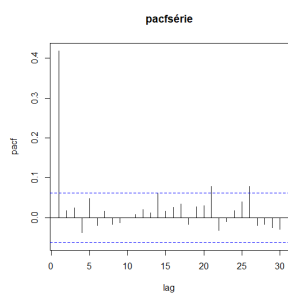


FIGURE 3.11 – Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0).

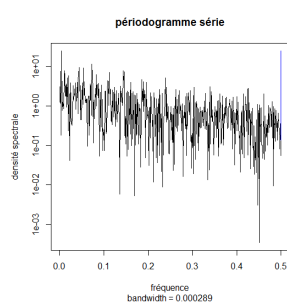


FIGURE 3.12 – Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0.3,0.1,0).

### 3.1.2.2 Simulation d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0) pour $n = 1000$

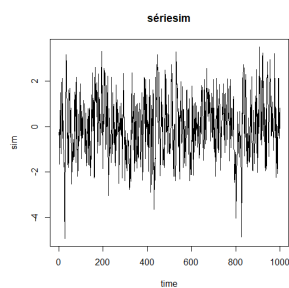


FIGURE 3.13 – Le graphe d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0).

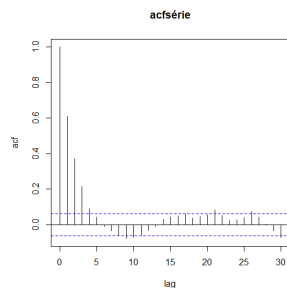


FIGURE 3.14 – Le corrélogramme d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0).

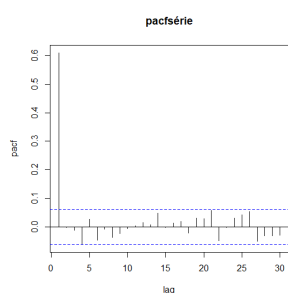


FIGURE 3.15 – Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0).

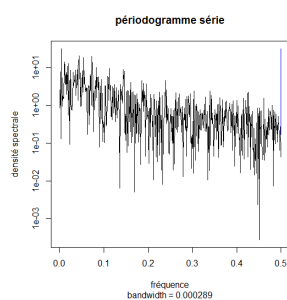


FIGURE 3.16 – Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0.7,-0.1,0).

### 3.1.3 Quelques simulations des modèles ARFIMA(0,d,q)

#### 3.1.3.1 Simulation d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3) pour n=1000

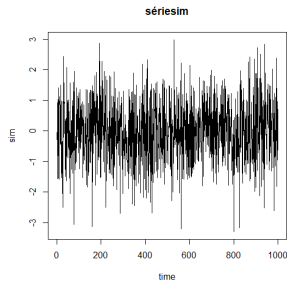


FIGURE 3.17 – Le graphe d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3).

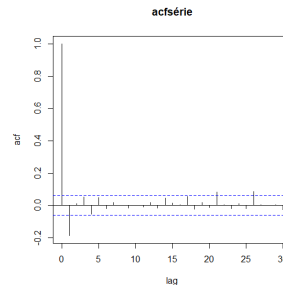


FIGURE 3.18 – Le correlogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3).

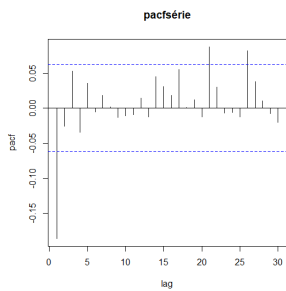


FIGURE 3.19 – Le correlogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3).

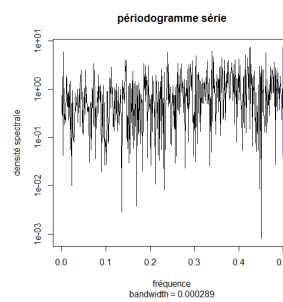


FIGURE 3.20 – Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0,0.1,0.3).

#### 3.1.3.2 Simulation d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7) pour n=1000

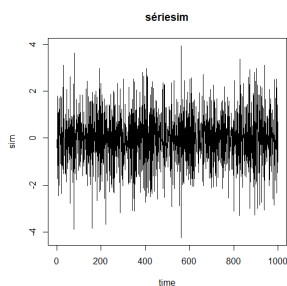


FIGURE 3.21 – Le graphe d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7).

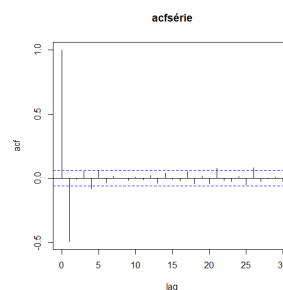


FIGURE 3.22 – Le correlogramme d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7).



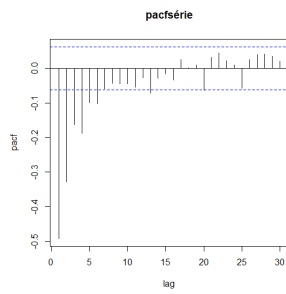


FIGURE 3.23 – Le corrélogramme partiel d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7).

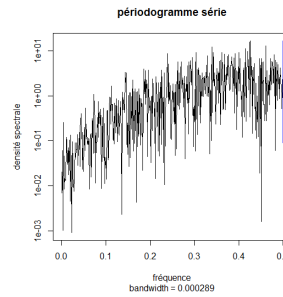


FIGURE 3.24 – Le périodogramme d'un processus ARFIMA(0,-0.1,0.7).

### 3.1.4 Estimation du paramètre d'intégration fractionnaire "d"

Dans le présent paragraphe, on effectuera une étude pratique des méthodes d'estimation de la mémoire longue à partir des simulations. On étudiera deux techniques d'estimation : de Geweke et Porter-Hudak et de maximum de vraisemblance approché par la fonction de Whittle, en procédant au calcul de l'estimateur  $\hat{d}$  pour plusieurs valeurs de  $n$  (la taille de l'échantillon), effectué par des simulations des différents processus ARFIMA.

#### 3.1.4.1 Les résultats des simulations par l'approche GPH

Les tableaux suivants indiquent des simulations des processus ARFIMA (p,d,q) et l'estimation du paramètre "d" par la méthode GPH.

On va tester la signification de "d" ainsi que le biais existant entre la valeur réelle et la valeur estimée : 
$$\begin{cases} H_0 : d = \hat{d} \\ H_1 : d \neq \hat{d} \end{cases}$$

##### a) Les processus ARFIMA(0,d,0)

Tout d'abord on s'intéressera au cas ARFIMA(0,d,0) avec absence de mémoire courte, on effectue des simulations à ces processus pour plusieurs valeurs de  $d$  ( -0.4, 0.1,...). On estime ces modèles et on calculera le biais, puis on procédera au test du coefficient d'intégration.

		<b>ARFIMA(0,d,0), n=200</b>			
<b>Au seuil de 5% ttab = 1,65</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	<b><math>\hat{d}</math></b>	-0.5663458	-0.2543922	-0.05218133	0.2178568
	<b>biais</b>	0.1663458	0.1543922	0.15218133	0.1821432
	<b>tcal</b>	0.71902164	0.65862652	0.65587937	0.8053301
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$

TABLE 3.1 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=200 par la méthode GPH.

		<b>ARFIMA(0,d,0), n=1000</b>			
<b>Au seuil de 5% ttab = 1,65</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	<b><math>\hat{d}</math></b>	-0.2651332	0.02868434	0.2222693	0.5273758
	<b>biais</b>	-0.1348668	-0.12868434	-0.1222693	-0.1273758
	<b>tcal</b>	1.01714565	0.95204103	0.91461226	0.92592434
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$

TABLE 3.2 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=1000 par la méthode de GPH.

D'après les tableaux de simulation précédents, on voit bien qu'on accepte l'hypothèse  $H_0$ , donc les estimateurs sont proches des vraies valeurs pour toutes les tailles choisies, malgré les changements faites sur la taille d'échantillon et sur le paramètre d'intégration fractionnaire  $d$ .

On conclut que le biais de l'estimateur  $\hat{d}$  dans le cas des processus ARFIMA(0,d,0) est toujours petit, et l'estimateur  $\hat{d}$  dans ce cas ne dépend pas de la taille d'échantillon.

### b) Les processus ARFIMA(0,d,1)

Les tableaux suivants montrent les résultats de simulations effectuées pour l'estimation du degré d'intégration fractionnaire des processus ARFIMA (0,d,1) :

$$(1 - B)^d X_t = (1 + \theta B)\varepsilon_t$$

		ARFIMA(0,d,1), n=200			
Au seuil de 5% ttab = 1,65	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\theta$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	-0.6983046	-0.3665825	-0.06371399	0.214444
	<b>biais</b>	0.2983046	0.2665825	0.16371399	0.185556
	<b>tcal</b>	1.38830205	0.8885334	0.69458305	0.82087935
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$
	$\theta$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.5743114	-0.259701	-0.0505685	0.2201134
	<b>biais</b>	0.1743114	0.159701	0.1505685	0.1798866
	<b>tcal</b>	0.75500565	0.68732266	0.65064588	0.79473782
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$

TABLE 3.3 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=200 par la méthode de GPH.

		ARFIMA(0,d,1), n=1000			
Au seuil de 5% ttab = 1.65	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\theta$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	-0.1015554	-0.01803818	0.2204896	0.5268014
	<b>biais</b>	-0.2984446	-0.08196182	-0.1204896	-0.1268014
	<b>tcal</b>	2.25666994	0.66050888	0.9006952	0.92173147
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_0$
	$\theta$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.2604304	0.02877226	0.2223423	0.5276621
	<b>biais</b>	-0.1395696	-0.12877226	-0.1223423	-0.1276621
	<b>tcal</b>	1.00999651	0.94854759	0.91620623	0.92831053
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$

TABLE 3.4 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=1000 par la méthode de GPH.

D'après ces tableaux, pour  $n = 1000$  on remarque que le biais est faible dans tous les cas sauf dans les cas où les valeurs du paramètre moyenne mobile sont plus élevées et positives. Effectivement, on remarque que lorsque le paramètre  $\theta$  est proche de 1, le biais est important, alors que par contre, pour les valeurs négatives de ce paramètre même les plus extrêmes, proche de -1, l'estimation est très appréciée. Dans le cas où  $n = 200$ , le biais est faible pour toutes les valeurs du paramètre moyenne mobile.

La remarque importante qu'on peut extraire de ces tableaux, est que l'estimateur du paramètre  $d$  est sensible aux choix du taille d'échantillon.

**c) Les processus ARFIMA(1,d,0)**

Les résultats d'estimation du degré d'intégration  $\hat{d}$  dans les processus simulés de type ARFIMA(1,d,0) :  $(1 - \phi B)(1 - B)^d X_t = \varepsilon_t$  sont représentés dans les tableaux suivants :

ARFIMA(1,d,0), n=200					
Au seuil de 5% ttab = 1.65	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\phi$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	0.006553241	0.0774701	-0.0353968	0.2214682
	<b>biais</b>	-0.406553241	-0.1774701	0.1353968	0.1785318
	<b>tcal</b>	1.846284	0.786036	0.587783	0.789100
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_0$
	$\phi$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.3143528	-0.1643465	-0.04959316	0.215808
	<b>biais</b>	-0.0856472	0.0643465	0.14959316	0.184192
	<b>tcal</b>	0.523533	0.175561	0.638120	0.815217
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$

TABLE 3.5 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=200 par la méthode de GPH.

ARFIMA(1,d,0), n=1000					
Au seuil de 5% ttab = 1.65	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\phi$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	0.01154417	0.06862775	0.2252257	0.5279954
	<b>biais</b>	-0.38845583	-0.16862775	-0.1252257	-0.1279954
	<b>tcal</b>	2.701403	1.235366	0.937330	0.930099
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_0$
	$\phi$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.2587912	0.02746252	0.2227494	0.5271175
	<b>biais</b>	-0.1412088	-0.12746252	-0.1227494	-0.1271175
	<b>tcal</b>	0.912432	0.945766	0.916981	0.923719
	<b>accept</b>	$H_0$	$H_0$	$H_0$	$H_0$

TABLE 3.6 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=1000 par la méthode de GPH.

D'après ces tableaux, on remarque qu'on accepte  $H_0$  dans tous les cas sauf dans les cas où les valeurs du paramètre autoregressif sont plus élevées et positives. Effectivement, on remarque que lorsque le paramètre  $\phi$  est proche de 1, le biais est important, alors que par contre, pour les valeurs négatives de ce paramètre même les plus extrêmes, proche de -1, l'estimation est très appréciée, malgré le changement faite sur la taille d'échantillon.

### 3.1.4.2 Les résultats de simulation par la méthode du maximum de vraisemblance approché par la fonction de Whittle

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les simulations réalisées sur des modèles de type ARFIMA(p,d,q) et l'estimation du paramètre "d" par la méthode du Whittle

On va tester la signification de "d" ainsi que le biais existant entre la valeur réelle et la valeur estimée : 
$$\begin{cases} H_0 : d = \hat{d} \\ H_1 : d \neq \hat{d} \end{cases}$$

Les tableaux suivants montrent les résultats de simulations effectuées pour l'estimation du degré d'intégration fractionnaire des processus ARFIMA(p,d,q) :

		<b>ARFIMA(0,d,0), n=200</b>			
<b>Au seil de 5% ttab = 1,65</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	<b><math>\hat{d}</math></b>	-0.39602	-0.093665	0.10834	0.40646
	<b>biais</b>	-0.00398	-0.006335	-0.00834	-0.00646
	<b>P( &gt;  t )</b>	0.000649	0.4199	0.3509	0.000465
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$

TABLE 3.7 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=200 par la méthode de Whittle.

		<b>ARFIMA(0,d,0), n=1000</b>			
<b>Au seil de 5% ttab = 1,65</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	<b><math>\hat{d}</math></b>	-0.395545	-0.096202	0.103855	0.402845
	<b>biais</b>	-0.004455	-0.003798	-0.003855	-0.002845
	<b>p( &gt;  t )</b>	2.598e-14	0.06397	0.04552	8.66e-15
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_1$	$H_1$

TABLE 3.8 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,0) pour n=1000 par la méthode de Whittle.

		<b>ARFIMA(0,d,1), n=200</b>			
<b>Au seuil de 5%</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\theta$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	-0.30780	0.13944	0.0022094	0.3311254
	<b>biais</b>	-0.0922	-0.23944	0.0977906	0.0688746
	<b>P( &gt;  t )</b>	0.008036	0.229828	0.98482	0.004352
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$
	$\theta$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.38132	-0.093799	0.082380	0.358148
	<b>biais</b>	-0.01868	-0.006201	0.01762	0.041852
	<b>P( &gt;  t )</b>	0.001025	0.4192	0.4781	0.002041
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$

TABLE 3.9 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=200 par la méthode de Whittle.

		<b>ARFIMA(0,d,1), n=1000</b>			
<b>Au seuil de 5%</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\theta$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	-0.357925	0.020627	0.0782045	0.384588
	<b>biais</b>	-0.042075	-0.120627	0.0217955	0.015412
	<b>P( &gt;  t )</b>	5.499e-12	0.6912	0.1319	1.308e-13
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$
	$\theta$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.406218	-0.113735	0.089480	0.388494
	<b>biais</b>	0.006218	0.013735	0.01052	0.011506
	<b>P( &gt;  t )</b>	5.107e-15	0.02852	0.08489	7.394e-14
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_1$	$H_0$	$H_1$

TABLE 3.10 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(0,d,1) pour n=1000 par la méthode de Whittle.

		<b>ARFIMA(1,d,0), n=200</b>			
<b>Au seuil de 5%</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\phi$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	-0.25166	-0.10248	-0.11430	0.299639
	<b>biais</b>	-0.14834	0.00248	0.2143	0.100361
	<b>P( &gt;  t )</b>	0.03022	0.3775	0.325	0.009871
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$
	$\phi$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.28830	-0.11835	0.0668112	0.343019
	<b>biais</b>	-0.1117	0.01835	0.0331888	0.056981
	<b>P( &gt;  t )</b>	0.0130392	0.3081	0.565062	0.003138
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$

TABLE 3.11 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=200 par la méthode de Whittle.

		<b>ARFIMA(1,d,0), n=1000</b>			
<b>Au seuil de 5%</b>	<b>d</b>	-0.4	-0.1	0.1	0.4
	$\phi$	0.9	0.7	0.3	0.1
	$\hat{d}$	-0.361238	-0.057666	0.076829	0.383331
	<b>biais</b>	-0.038762	-0.042334	0.023171	0.016669
	<b>P( &gt;  t )</b>	3.504e-12	0.2668	0.139	1.568e-13
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_0$	$H_0$	$H_1$
	$\phi$	-0.9	-0.7	-0.3	-0.1
	$\hat{d}$	-0.404361	-0.113006	0.090493	0.388441
	<b>biais</b>	0.004361	0.013006	0.009507	0.011559
	<b>P( &gt;  t )</b>	6.883e-15	0.02956	0.08142	7.461e-14
	<b>accept</b>	$H_1$	$H_1$	$H_0$	$H_1$

TABLE 3.12 – Les résultats d'estimation d'un ARFIMA(1,d,0) pour n=1000 par la méthode de Whittle.

D'après les tableaux de simulation précédents, pour les trois cas des processus ARFIMA(p,d,q) on accepte l'hypothèse  $H_0$  au seuil  $\alpha = 5\%$  pour les valeurs les plus proche de zéro(-0.1,0.1) dans tous les cas sauf dans le cas où  $n = 1000$  (le processus ARFIMA(0,d,0) on accepte l'hypothèse  $H_0$  pour  $d = -0.1$ , et les processus ARFIMA(0,d,1), ARFIMA(1,d,0) avec  $\theta < 0$  et  $\varphi < 0$  respectivement on accepte l'hypothèse  $H_0$  pour  $d = 0.1$ ).

## 3.2 Étude empirique sur les modèles ARFIMA

Dans ce partie on va modéliser la série de moyenne annuelle des températures dans le centre de l'Angletrre de l'année 1659 au 1966, qui se trouve dans le package "arfima" sous le logiciel R par les processus ARFIMA.

**Notation :** On note la série de moyenne annuelle des températures par (**tmpyr**)

### 3.2.1 Analyse préliminaire de la série (tmpyr)

La série (**tmpyr**) contient 308 observations (1659;1966, données annuelles).

#### 3.2.1.1 Représentation graphique de la série (tmpyr)

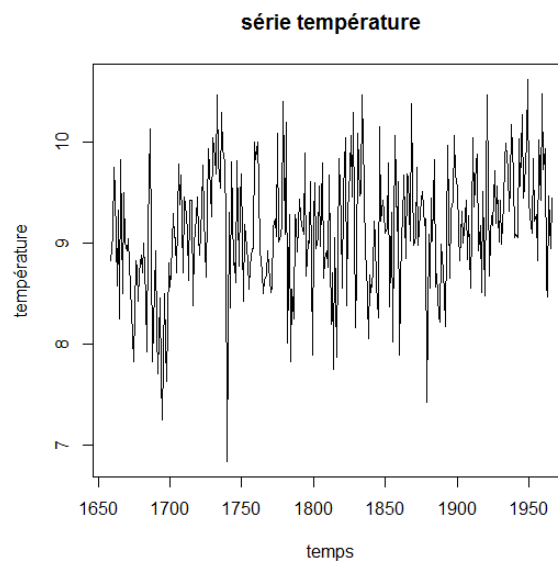


FIGURE 3.25 – Le graphe de la série **tmpyr**.

Nous remarquons du graphe un non stationnarité, caractérisée par un risque d'avoir une légère tendance à la hausse.



### 3.2.1.2 Corrélogramme et corrélogramme partiel de la série (tmpyr)

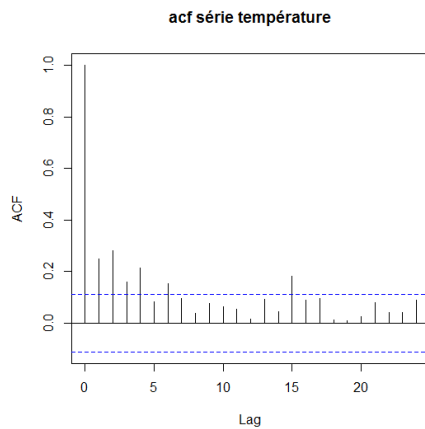


FIGURE 3.26 – Le corrélogramme de la série **tmpyr**.

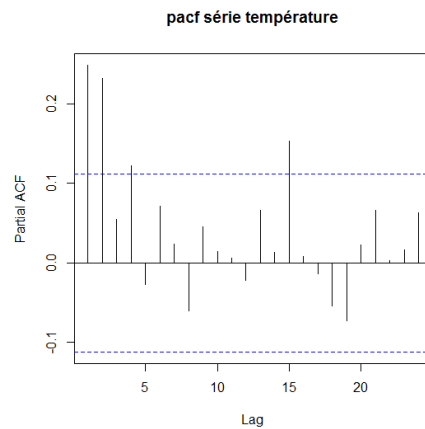


FIGURE 3.27 – Le corrélogramme partiel de la série **tmpyr**.

L'analyse du corrélogramme simple et corrélogramme partiel de la série (**tmpyr**) nous indique préalablement que la série est non stationnaire, puisque la fonction d'autocorrélation ne décroît pas de manière rapide.

### 3.2.1.3 Estimation du paramètre d'intégration fractionnaire "d"

On a estimé le paramètre d'intégration fractionnaire "d" par la méthode "GPH" et on a trouvé :  $\hat{d} = 0.3237655$

## 3.2.2 Différentiation de la série (tmpyr)

**Notation :** On note la série différenciée de la série moyenne annuelle des températures par (**tmpyrdiff**).

### 3.2.2.1 La représentation graphique de la série tmpyrdiff

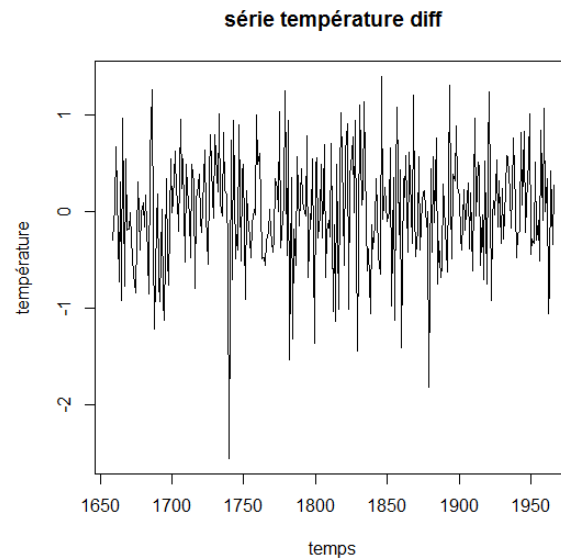


FIGURE 3.28 – Le graphe de la série différenciée.

### 3.2.3 La méthodologie de Box-Jenkins

Maintenant on va suivre la méthodologie de Box et Jenkins pour calculer les prévisions

#### 3.2.3.1 L'identification du modèle

Le corrélogramme et le corrélogramme partiel de la série tmpyrdiff

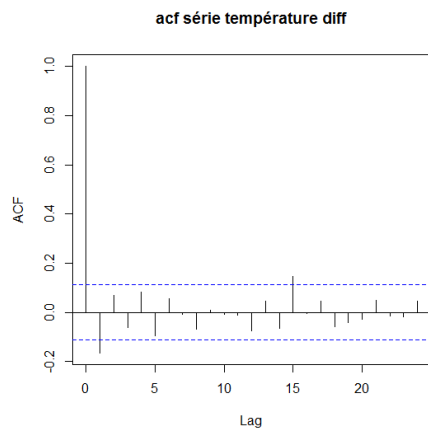


FIGURE 3.29 – Le corrélogramme de la série différenciée.

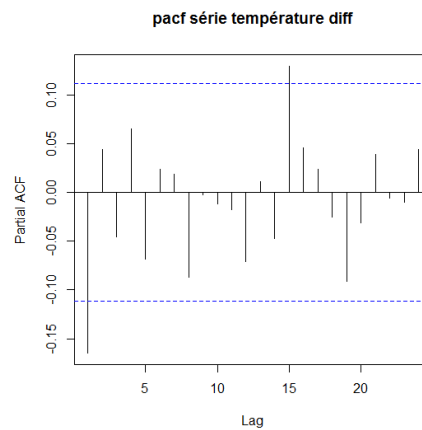


FIGURE 3.30 – Le corrélogramme partiel de la série différenciée.

Cette étape est effectuée par l'étude des fonctions d'autocorrélation et auto-corrélation partielle de la série (**tmpyrdiff**).

Retournons sur le corrélogramme et le corrélograme partiel de la série (**tmpyrdiff**), on remarque que la fonction d'autocorrélation simple et la fonction d'autocorrélation partielle s'annulent à partir de la deuxième pic.

Donc on peut identifier les processus suivants : MA(1), AR(1), ARMA(1,1).

### 3.2.3.2 L'estimation et les tests de validation du modèle

Après avoir identifié l'ordre du processus MA et du processus AR, il convient d'estimer les paramètres du modèle, puis de vérifier à la base du certain nombre de tests statistiques que l'estimation du modèle est valable pour faire les prévisions.

#### 1) Estimation des modèles identifiés et le test de Student (validation des paramètres)

		Avec constante				Sans constante	
		Coeff		Cte		Coeff	
		Esimateur	$P( > )$	Estimateur	$P( > )$	Estimateur	$P( > )$
ARMA(1,1)	AR(1)	-0.72269	6.7e-5	0.01637	0.75737	-0.7232	5.75e-5
	MA(1)	0.59487	0.00526			0.5956	0.00484
AR(1)		-0.15004	0.00508	0.01046	0.71262	-0.14969	0.00517
MA(1)		-0.16461	0.0034	0.01201	0.7189	-0.1642	0.00348

#### Remarque :

En comparant toujours les p-values avec la valeur 0.05 (5%). Les modèles où les p-values sont supérieures à 0.05 seront écartés, si un des paramètres (ou des constantes) ne soit pas significativement différent de 0 le modèle sera alors rejeté.

Au regard des résultats d'estimation, on constate de part que les modèles avec constantes seront rejeté car les constantes ne sont pas significativement différent de 0 (p-value supérieures à 0.05 ) , d'autre part les modèles AR(1), MA(1) et ARMA(1,1) sans constantes reste candidat dans la mesure où les coefficients est significativement différent de zéro (les p-values dans les trois cas sont inférieures à 0.05).

## 2) Les tests sur les résidus(validation des résidus)

### •Test "Portemanteau" (Box-Pierce )

Ce test permet d'identifier les processus de bruit blanc. Cette statistique permet de tester  $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$  pour tout h, soit  $\rho(h) = 0$  pour tout h. Ce test s'écrit :

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0 \\ H_1 : \exists i \neq j \text{ tel que } \rho(i) \neq \rho(j) \neq 0 \end{cases}$$

Pour effectuer ce test, on utilise la statistique de Box-Pierce  $Q_h$ , donnée par :  $Q_h = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2$  où h est le nombre de retard, T est le nombre d'observation et  $\hat{\rho}_k^2$  l'autocorrélation empirique. Asymptotiquement, sous  $H_0$ ,  $Q_h$  suit un  $\chi^2$  à h degrés de liberté.

Nous rejetons l'hypothèse de bruit blanc au seuil h si  $Q_h$  est supérieure au quantile d'ordre  $(1 - \alpha)$  de la loi de  $\chi^2$  à h degrés de liberté.

	$\chi^2$	p-value
AR(1)	17.743	0.6043
MA(1)	19.151	0.512
ARMA(1,1)	15.159	0.7672

### Pour le modèle AR(1)

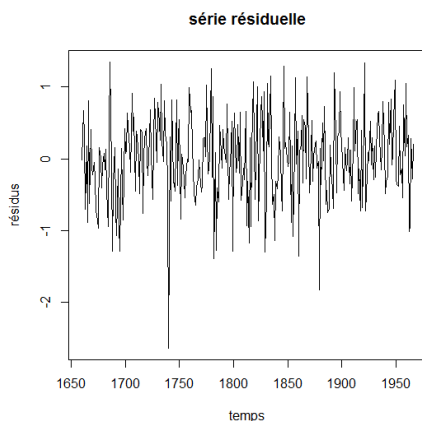


FIGURE 3.31 – Le graphe de la série résiduelle pour le modèle AR(1).

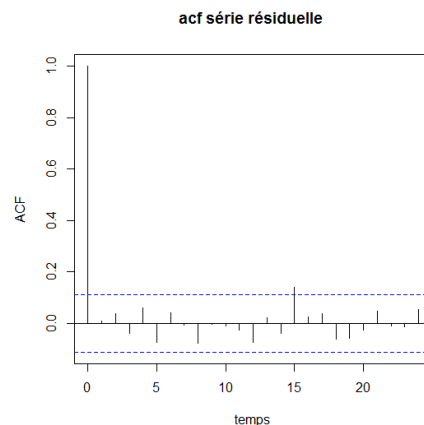


FIGURE 3.32 – Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle AR(1).

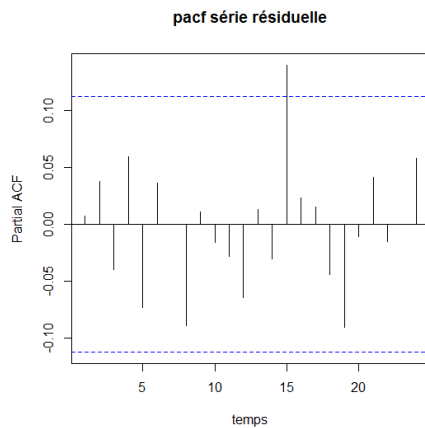


FIGURE 3.33 – Le corrélogramme partiel de la série résiduelle pour le modèle AR(1).

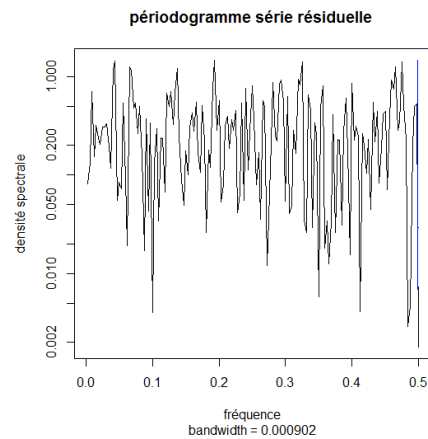


FIGURE 3.34 – Le périodogramme de la série résiduelle pour le modèle AR(1).

$Q_h = 17.743$ ,  $\text{Khi deux}(h) = \text{Khi deux}(20) = 31.41$  (au seuil 5%). On a :  $17.743 < 31.41$ . On peut même voir que toutes les probabilités sont supérieures à 0,05 (accepter  $H_0$ ) alors les pics ne sont pas significatifs. Donc on accepte l'hypothèse nulle, absence d'autocorrélation du résidu, ce qui implique qu'il peut être assimilé à un bruit blanc. Alors le modèle est valide.

De la même façon on va procéder pour les autres modèles.

### Pour le modèle MA(1)

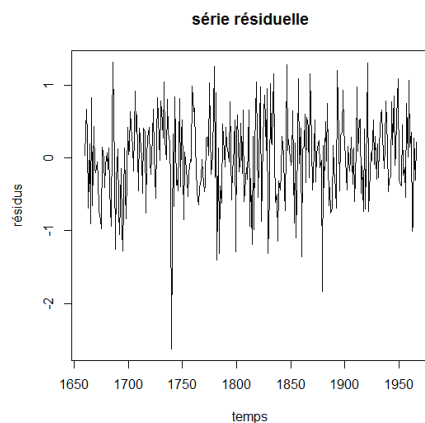


FIGURE 3.35 – Le graphe de la série résiduelle pour le modèle MA(1).

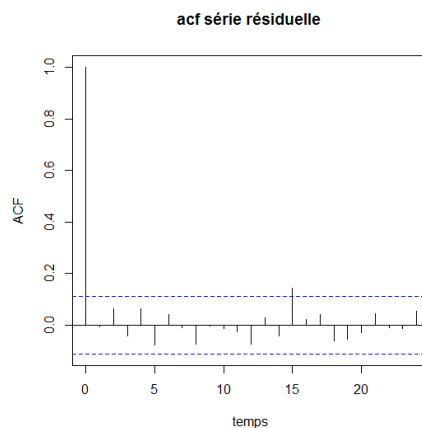


FIGURE 3.36 – Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle MA(1).

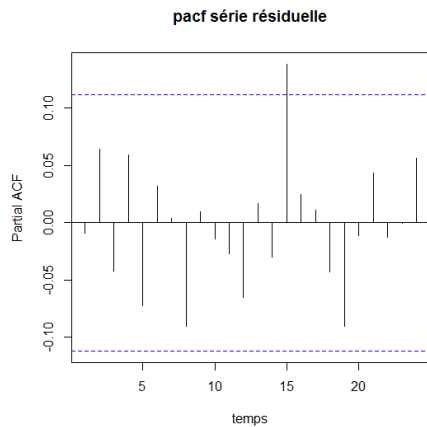


FIGURE 3.37 – Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle MA(1).

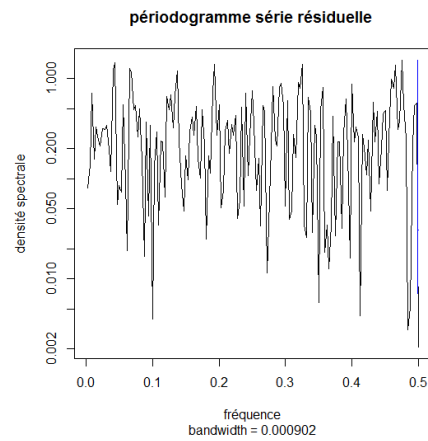


FIGURE 3.38 – Le corrélogramme partiel de la série résiduelle pour le modèle MA(1).

$Q_h = 19, 151 < khi\ deux(h) = khi\ deux(20) = 31.41$  (au seuil 5%). Donc on accepte l'hypothèse nulle, le résidu est un bruit blanc, absence d'autocorrélation du résidu.

### Pour le modèle ARMA(1,1)

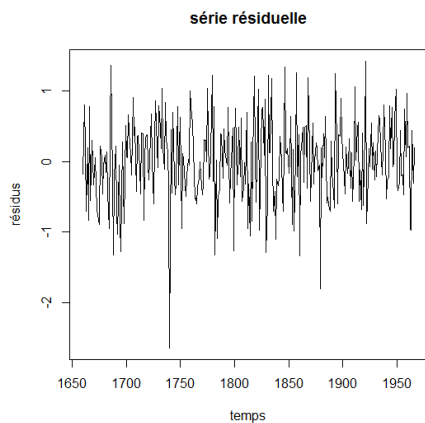


FIGURE 3.39 – Le graphe de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1).

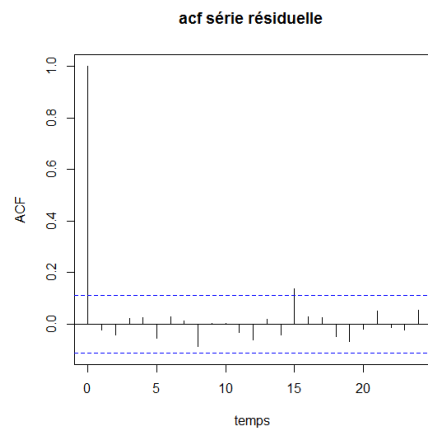


FIGURE 3.40 – Le corrélogramme de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1).

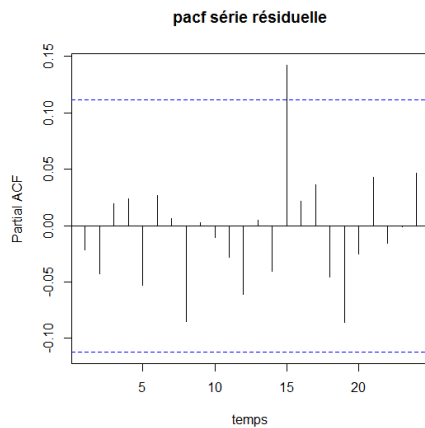


FIGURE 3.41 – Le corrélogramme partiel de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1).

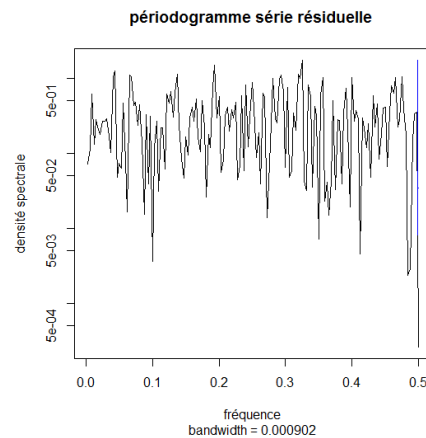


FIGURE 3.42 – Le périodogramme de la série résiduelle pour le modèle ARMA(1,1).

$Q_h = 15.169 < khi\ deux(h) = khi\ deux(20) = 31.41$  (au seuil 5%). Donc on accepte l'hypothèse nulle, le résidu est un bruit blanc, absence d'autocorrélation du résidu.

Les trois modèles sont valides : AR(1), MA(1) et ARMA(1,1) ; donc on se base sur des critères (AIC, SC,...) pour choisir le modèle adéquat (le meilleur modèle), de sorte que le critère AIC est défini par :

$$AIC = -2 \log(\tilde{L}) + 2K$$

où  $\tilde{L}$  est la vraisemblance maximisée et K le nombre de paramètres dans le modèle.

	AIC	$\hat{\sigma}^2$	SC	p.value
AR(1)	547.36	0.344	105.29	0.6043
MA(1)	548.16	0.3449	105.57	0.512
ARMA(1,1)	547.56	0.342	104.67	0.7672

TABLE 3.13 – La table des critères du choix de meilleur modèle.

D'après ces critères le modèle ARMA(1,1) est plus adéquat. L'application de la méthodologie de BOX-JENKINS nous a conduit à retenir un processus ARMA(1,1).

- Test de normalité

### L'histogramme des résidus pour le modèle ARMA(1,1)

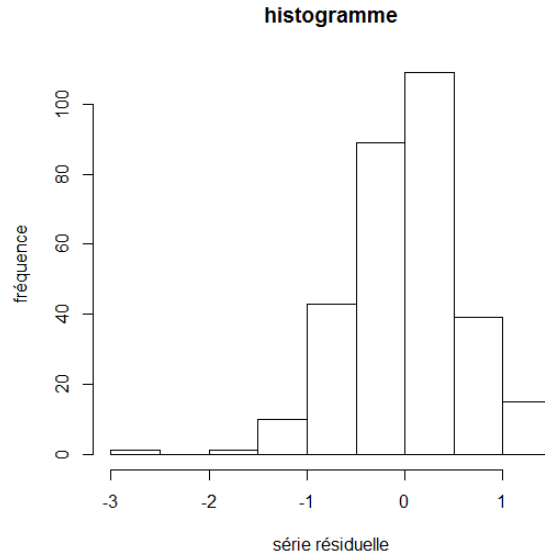


FIGURE 3.43 – L'histogramme des résidus pour le modèle ARMA(1,1).

Nous testons les hypothèses suivantes :  $H_0 : V_1 = 0$  (symétrie) et  $V_2 = 0$  (aplatissement normal), on acceptera l'hypothèse  $H_0$  si  $V_1 \leq 1.96$  et  $V_2 \leq 1.96$  dans le cas contraire, l'hypothèse de normalité est rejetée.

On notant  $\mu_k$  le moment d'ordre  $k$  de la distribution,  $\mu_k = E([X - E(X)]^k)$

Le coefficient de Skewness est défini par :  $\beta_1^{1/2} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ , et le coefficient de Kurtosis est défini par :  $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ .

**Test de Skewness** :  $V_1 = \frac{|\beta_1^{1/2} - 0|}{\sqrt{6/N}}$ , si  $V_1 < 1.96$  on accepte l'hypothèse la symétrie des résidus.

**Test de Kurtosis** :  $V_2 = \frac{|\beta_2 - 3|}{\sqrt{24/N}}$ , si  $V_2 < 1.96$  on accepte l'hypothèse de l'aplatissement normal.

**JB** =  $\frac{N}{6}V_1 + \frac{N}{24}(V_2 - 3)^2$  suit une  $\chi^2_{(1-\alpha)}$  à deux degrés de liberté. Ainsi, si **JB**  $\geq \chi^2_{(1-\alpha)}$  on rejette l'hypothèse  $H_0$  de normalité des résidus au seuil  $\alpha$ .

**JB** = 17.456 > 5.99, donc on rejette l'hypothèse de normalité des résidus.

Alors la distribution des erreurs est un bruit blanc n'est pas gaussien.



### 3.2.4 Prévisions

Année	Prévision	Valeurs réelles	Biais
1967	9,42	9.61	0.19
1968	9,38	9.30	0.08
1969	9,35	9.26	0.09
1970	9,46	9.57	0,11
1971	9,45	9.68	0,23
1972	9,25	9.19	0.06
1973	9,47	9.54	0,07
1974	9,49	9,62	0,13
1975	9,49	10,00	0,51
1976	9,50	10.08	0,58

TABLE 3.14 – La table des prévisions.

Les critères pour déterminer la qualité de prévision sont les suivants :

**1) La racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) :**

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^{10} (\hat{Y}_{t+h} - \hat{Y}_t)^2}{h}} = 0.27$$

**2) L'erreur absolue moyenne (MAE) :**

$$MAE = \frac{\sum_{h=1}^{10} |\hat{Y}_{t+h} - \hat{Y}_t|}{h} = 0.20$$

H : correspond au nombre de périodes de prévisions

$\hat{Y}_{t+h}$  : correspond à la valeur prévue à la période « h »

$\hat{Y}_t$  : correspond à la valeur réelle à la période « h »

Le critère RMSE est selon MEESE et ROGOFF [1983] un mauvais critère si la série étudiée est « gouvernée par un processus stable non normal avec variance infinie ». Il vaut mieux alors se référer au critère de l'erreur absolue moyenne (MAE). Ils signalent par ailleurs que la

MAE est également un critère utile si la série étudiée a des queues de distribution épaisses, même si sa variance est finie.

---

Le tableau ci-dessus compare vise à calculer la qualité de prévision issue de modèle ARFIMA (1,0.32,1) par le biais des critères RMSE et MAE, il compare les valeurs prévues avec les valeurs réelles de la période allant du 1968 à 1976. On observe que, pour les années 1968, 1969, 1972, et 1973, la modélisation ARFIMA fournit des prévisions de la qualité maximale (très proche des valeurs réelles : un écart entre 0.06 et 0.08). On peut observer aussi qu'écart pratiquement faible (entre 0.09 et 0.013) pour les années 1970 et 1974.

En générale, en terme de deux critères utilisés le  $RMSE = 0.27$  et  $MAE = 0.20$ , les deux critères sont faibles ce qui nous permet de conclure que la modélisation ARFIMA permet le calcul de bonnes prévisions.

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans notre travail, nous avons étudié un cas particulier des processus à long mémoire : "processus ARFIMA".

Tout d'abord, nous avons présenté les notions fondamentales des séries chronologiques et des processus aléatoires, ensuite nous avons passé aux modèles caractérisés par une courte mémoire "processus ARMA" et leur caractéristique.

Il nous a semblé intéressant de soulever la question sur l'apport des processus ARFIMA où nous avons présenté également leur intérêt qui réside dans leur capacité à modéliser une large famille de processus à mémoire longue à l'aide d'un seul paramètre.

Ensuite nous avons présenté une application des processus à mémoire longue ARFIMA sur des données climatiques. L'étude de cette série était orientée essentiellement dans une optique prévisionnelle. Nous avons utilisé la méthode "GPH" pour estimer le paramètre "d"  $\hat{d} = 0.32376552$ , cette valeur de "d" confirme que notre série suit un processus ARFIMA puisque  $d \in [-1/2, 1/2]$ , après avoir différencié notre série, nous avons suivi la méthodologie de Box et Jenkins : estimation et validation des modèles candidats ((AR(1), MA(1) et ARMA(1,1)), le meilleur modèle ARMA(1,1) a été choisi sur la base des critères (AIC, SC,...) pour la série "tmpyr", le processus qui la modélise est celui de ARFIMA(1,0.32,1) sur lequel nous avons basé pour calculer des prévisions pour les 10 ans prochains.

À partir des résultats présentés aux tableaux de la comparaison entre les réalisations et les prévisions, et si on observe les écarts entre les prévisions et les réalisations, on remarque qu'ils sont faibles, cela vaut à dire que le processus ARFIMA (1,0.32,1) avait donné de bonnes prévisions.

Prévoir le comportement futur d'une série chronologique, nécessite l'utilisation pas

d'une mais de plusieurs méthodes de prévision, car la fiabilité d'une méthode de prévision, ne dépendait pas seulement de sa complexité théorique, mais aussi des données, de l'information disponible et du champ d'application.

Nous espérons avoir répondu au problème posé et résultats trouvés seront d'une utilité pertinente.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Sandrine Lardic** et **Valérie Mignon** : *Économétrie des séries temporelles macroéconomiques et financières*, ed.economica, 49, rue Héricart, 75015 Paris, 2002.
- [2] **Arthur Charpentier** : *Cours de series temporelles theorie et applications*, volume 1.
- [3] **Arthur Charpentier** : *Cours de series temporelles theorie et applications*, volume 2.
- [4] **Régis Bourbonnais** et **Michel Terraza** : *Analyse des séries temporelles*, 3<sup>e</sup> édition, Dunod, Paris, 2010.
- [5] **Peter J. Brockwell** et **Richard A. Davis** : *Introduction to time Series and forecasting*, Second edition, 2002.
- [6] **Olaf Kouamo** : *Analyse des séries chronologiques à mémoire longue dans le domaine des ondelettes*, Statistiques [math.ST], Télécom ParisTech, 2011, Français, <pastel-00565656>.
- [7] **Fanny Godet** : *Prévision linéaire des processus à long memoire*, Mathématiques [math], Université de Nantes, 2008, Français, <tel-00349384>.
- [8] **Michel Prenat**, **Christine Keribin** et **Raphaël Rossignol** : *Séries chronologiques*, volume 1, Université Paris-Sud, 2010.
- [9] **Jean-Yves Dauxois** : *Introduction à l'étude des Séries temporelles*, 2016.
- [10] **Florin Avram** : *Series temporelles, régression, nterpolation, et géostatistique*.
- [11] **Sandrine Lardic** et **Valérie mignon** : *La mémoire longue en économie :une revue de la littérature*, journal de la société française de statistique, tome 140, n°2(1999),p.5-48.

- 
- [12] **Frédéric Bertrand** et **Myriam Maumy** : *Choix du modèle*, Université Louis Pasteur Strasbourg, France, 2008.
- [13] **Javier E. Contreras-Reyes** et **Wilfredo Palma** : *Statistical analysis of autoregressive fractionally integrated moving average models in R*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
- [14] **Zetili Sihem** : *Inférence Statistique dans les processus ARMA fractionnaires*, Université Mentouri Constantine, option : Mathématiques Appliquées.
- [15] **Mr. Benyammi Youcef** : *Etude du pouvoir estimatif de la méthode Geweke Porter-Hudak sur les modèles ARFIMA : Application sur la température de l'aire de la ville d'Alger, p.80-103.*
- [16] **Javier E. Contreras-Reyes**, **Georg M. Goerg** et **Wilfredo Palma** : *Estimation, diagnostic and forecasting functions for ARFIMA models, 2012.*
- [17] **Kai Liu** , **Yang Quan Chen** et **Xi Zhang** : *An evaluation of ARFIMA (Autoregressive Fractional Integral Moving Average) Programs, www.mdpi.com/journal/axioms, p.2-16, 2017.*
- [18] **Bernard Rapacchi** : *Centre interuniversitaire de calcul de Grenoble*, 1993.
- [19] **Christophe Hurlin** : *Econométrie appliquée séries temporelles.*

# Annex

## Le programme d'application sous R

### a) Simulation des modèles ARFIMA

```
>library(arfima)

#pour lancer le package arfima#

>set.seed(8564)

>sim <- arfima.sim(1000,model=list(phi=0.3,dfrac=0.1))

#simulation d'un processus ARFIMA(p,d,0) de taille n=1000,phi=0.3 et d=0.1#

>plot(sim,xlab="time",ylab="sim",main="sériesim")

#tracer le graphe de la série simulée "sim"#

>acf(sim,xlab="lag",ylab="acf",main="acfsérie")

#tracer le corrélogramme de la série simulée "sim"#

>pacf(sim,xlab="lag",ylab="pacf",main="pacfsérie")

#tracer le corrélogramme partiel de la série simulée "sim"#

>spectrum(sim)

#tracer le périodogramme de la série simulée "sim"#

>library(fracdiff)

#pour lancer le package fracdiff#

>fdGPH(sim, bandw.exp = 0.5)

#pour estimer le paramètre fractionnaire "d" par la méthode "GPH"#

>library(afmtools)

#pour lancer le package afmtools#

> z=sim-mean(sim)

#la série simulée - sa moyenne #
```

```
>mod <- arfima.whittle(z,nar=1,nma=0)
#pour estimer le paramètre fractionnaire "d" par la méthode de "Whittle"#
```

## b) Étude empirique sur les modèles ARFIMA

```
>data(tmpyr)
#charger le data.frame "tmpyr" #
>dat<-data.frame(tmpyr)
#transformer la série "tmpyr" vers un tableau#
>y<-dat[1 :308]
# les données de la série "tmpyr" de l'année 1659 à 1966#
>température<-ts(y,start=c(1659), end=c(1966), frequency=1)
#transformer le tableau "y" vers une série "température"#
>plot(température,xlab="temps",main="série température")
#tracer le graphe de la série "température"#
>acf(température,main="acf série température")
#tracer le corrélogramme de la série "température"#
>pacf(température,main="pacf série température")
#tracer le corrélogramme partiel de la série "température"#
>spectrum(température)
#tracer le périodogramme de la série "température"#
>fdGPH(température, bandw.exp = 0.5)
#estimer le paramètre fractionnaire "d" par la méthode "GPH"#
>w<-diffseries(température, 0.3237655)
# la différentiation de la série "température"#
>plot(w,,xlab="temps",ylab="température",main="série température diff")
#tracer le graphe de la série "w"#
>acf(w,main="acf série température diff")
```



```
#tracer le corrélogramme de la série "w"#
>pacf(w,main="pacf série température diff")
#tracer le corrélogramme partiel de la série "w"#
>s<-arma(w, order = c(1,1 ),include.intercept = FALSE)
#estimer les paramètres du modèle ARFIMA(1,1) sans constante#
>summary (s)
#description des résultats#
>t<-arma(w, order = c(1,1 ),include.intercept = TRUE)
#estimer les paramètres du modèle ARFIMA(1,1) avec constante#
>summary(t)
#description des résultats#
>p<-summary(s.arma <- arma(w, order=c(1,1)))
#description des résultats#
>p$res
#donner la série des résidus d'un modèle ARFIMA(1,1)#
>plot(p$res,xlab="temps",ylab="résidus",main="série résiduelle")
#tracer le graphe de la série résiduelle #
>acf(p$res,xlab="temps",main="acf série résiduelle ")
#tracer le corrélogramme de la série résiduelle#
>pacf(p$res,xlab="temps",main="pacf série résiduelle")
#tracer le corrélogramme partiel de la série résiduelle #
>spectrum(p$res)
#tracer le périodogramme de la série de la série résiduelle#
>Box.test(p$res,lag=20)
#le test de bruit blanc#
>jarque.bera.test(p$res)
```

---

```
# le test de normalité des résidus#  
>hist(p$res,xlab="série résiduelle",ylab="fréquence",main="histogramme")  
# l'histogramme des résidus#  
>summary(p$res)  
#description des résultats#
```