REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA

Faculté des sciences et de la technologie

Département d'Electrotechnique

N° :……/2026

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE : Sciences et Technologies

FILIERE : Électromécanique

SPECIALITE : Électromécanique

Thème

Modèle analytique et numérique pour le Contrôle Non Destructif par les courants induits

Présenté Par :

BELHADJI Meroua

DALIA Belkis

Date de soutenance : 28/06/2026

Devant le Jury composé de :

Dr. MOHDEB Naamane	Présidet	MCA	Université de Jijel
Dr. KIMOUCHE Abdelghani	Membre	MCB	Université de Jijel
Dr. AOMAR Lyes	Encadreur	MCA	Université de Jijel
Pr. IKHLEF Nabil	Co-Encadreur	Professeur	Université de Jijel

Remerciement

Avant tout nous remercions Dieu Le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté, la patience, et la santé durant toutes ces années et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.

Nous tenons à exprimer notre remerciement et notre gratitude à monsieur Dr. Aomar Lyes et Pr. Ikhlef Nabil et Dr. Chebout Mohamed pour avoir assumé la responsabilité de nous encadrer, nous orienter et de nous conseiller tout au long de la réalisation de ce travail.

Nous remercions vivement tous les enseignants et tous ceux à qui nous devons notre formation.

Des remerciements vont également à tous ceux qui, d'une quelconque façon, ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail.

Table de Matière

Remerciement……

Introduction générale……1

Chapitre I: Etat de l'art

I.1.Introduction…….……..... 4

I.2 Principe général de la détection des défauts…….…….4

I.3 Nature des défauts à détecter par le CND……...5

I.3.1 Défauts de surface……..5

I.3.2 Défauts de internes……...…..5

I.4 Technique de contrôle non destructif…….5

I.4.1. Examen visuel…….……6

I.4.2. Examen par ressuage…….…..7

I.4.3 Magnétoscopie…….8

I.4.4 Thermographie infrarouge……9

I.4.5 Contrôle par ultrasons…….10

I.4.6 Contrôle par les courants de Foucault…….11

I.4.6.1 Facteurs affectant la réponse de courants de Foucault…….13

I.5 Conclusion 15

Chapitre II: Modélisation du CND par courants induits

II.1 Introduction…….16

II.2 Équations de Maxwell…….16

II.3 Lois de comportement des milieux et loi d'Ohm……17

II.4 Conditions de passage…….18

II.5 Hypothèses simplificatrices……19

II.6 Formulation en potentiel vecteur magnétique A…….20

II.7 Équations dans les différents domaines…….….21

II.7.1 Dans l'air…….…….…….22

II.7.2 Dans la bobine…….……..22

II.7.3 Dans la cible conductrice……...22

II.8 Méthodes de resolution…….……..23

II.9 Conclusion……..……24

Chapitre III : Calcul analytique Tridimensionnel

III.1 Introduction……..….25

III.2 Formulation du potentiel vecteur magnétique du second ordre en coordonnées sphériques…....25

III.3 Calcul des courants induits…….…...28

III.4 Potentiel dans l'espace libre……..…….29

III.5 Cas d'une sphère comportant N couches de conductivités différentes…….32

III.6 Conclusion…….34

Chapitre IV : Applications et interpretation des resultats

IV.1 Introduction……..…….35

IV.2 Processus de Modélisation et de Simulation sous COMSOL Multiphysics…….36

IV.2.1 Définition de COMSOL Multiphysics……...….36

IV.2.2 Étapes de Modélisation et de Simulation……...……37

IV.2.3 Chronogramme des étapes de modélisation et de simulation sous COMSOL Multiphysics……...…37

IV.3 Cas d'une sphère monocouche……..…38

IV.4 Validation des résultats obtenus…….....40

IV.5 Cas général : sphére multicouches……....43

IV.6.2 Effet de la fréquence du travail……..……47

IV.7 Conclusion…….……48

Conclusion générale……..……50

Annexe……...….52

Bibliographie……59

Résumé……

Introduction générale

Dans le contexte industriel actuel, l'amélioration continue de la qualité et de la fiabilité des produits constitue une exigence fondamentale. De nombreux secteurs stratégiques, tels que l'industrie nucléaire, l'aéronautique, le ferroviaire à grande vitesse ou encore l'industrie pétrochimique, imposent des normes de sécurité très strictes. Dans ces domaines, la présence d'un défaut, même minime, peut entraîner des conséquences économiques importantes, voire mettre en danger des vies humaines. Il devient alors indispensable de disposer de techniques d'inspection performantes permettant de garantir l'intégrité des structures et des équipements.[11]

Parmi les moyens de contrôle développés à cet effet, le Contrôle Non Destructif (CND) occupe une place essentielle. Cette discipline regroupe un ensemble de méthodes permettant d'évaluer l'état d'un matériau ou d'une pièce sans provoquer sans provoquer de dégradation ni altérer ses propriétés. Le CND offre ainsi la possibilité d'effectuer des inspections en cours de fabrication ou en service, tout en assurant la continuité de l'exploitation et la réduction des coûts de maintenance.

L'évolution rapide des technologies industrielles a largement favorisé l'essor des méthodes de contrôle non destructif. D'une part, les exigences croissantes des industries à haut risque ont stimulé la recherche de techniques de détection toujours plus fiables et précises. D'autre part, les progrès réalisés dans les domaines de l'informatique, du calcul scientifique et du traitement numérique des données ont permis l'automatisation des procédures d'inspection ainsi que l'amélioration de l'analyse des défauts détectés.

Les principales techniques de CND utilisées aujourd'hui reposent sur différents phénomènes physiques. Parmi elles figurent le contrôle par ultrasons, la radiographie industrielle, la magnétoscopie et les méthodes électromagnétiques basées sur les courants de Foucault. Ces dernières sont particulièrement adaptées à l'inspection des matériaux conducteurs et présentent plusieurs avantages, notamment la rapidité de mise en œuvre, l'absence de contact direct avec la pièce inspectée et la capacité de détecter des défauts superficiels ou situé à faible profondeur.

La méthode des courants de Foucault, objet de ce mémoire, repose sur l'interaction entre un champ électromagnétique variable et un matériau conducteur. Lorsqu'une bobine alimentée par un courant alternatif est placée à proximité d'une pièce conductrice, elle induit des courants électriques appelés courants de Foucault. La présence d'une anomalie ou d'une variation des propriétés du matériau perturbe la distribution de ces courants ce qui modifie la réponse électromagnétique du système.

L'étude des phénomènes électromagnétiques associés aux courants induits constitue un domaine multidisciplinaire faisant intervenir l'électromagnétisme, l'analyse numérique, la modélisation mathématique ainsi que les techniques avancées de simulation. La détermination précise de la distribution des courants induits dans les structures conductrices représente une étape fondamentale pour l'amélioration des performances des systèmes de contrôle non destructif.

Dans ce cadre, les outils de simulation numérique occupent aujourd'hui une place incontournable. Le logiciel COMSOL Multiphysics, basé sur la méthode des éléments finis, offre un environnement performant permettant de modéliser et d'analyser des phénomènes électromagnétiques complexes en trois dimensions. Grâce à ses capacités avancée de simulation, il est possible de visualiser la distribution des champs électromagnétiques, de calculer les densités de courant induit et d'étudier l'influence de différents paramètres physiques tels que la fréquence d'excitation, la conductivité électrique ou la géométrie de la pièce inspectée. L'utilisation de COMSOL dans ce travail permet ainsi de valider les résultats obtenus par les modèles analytiques développés et d'assurer une meilleure compréhension du comportement électromagnétique du système étudié.

Le présent travail porte sur l'analyse des courants induits dans une sphère conductrice soumise à une excitation électromagnétique produite par une boucle de courant. Une formulation basée sur le potentiel vecteur magnétique est développée afin d'établir une solution analytique destinée au calcul des différentes grandeurs électromagnétiques dans le milieu étudié. Cette approche est ensuite étendue au cas d'une sphère multicouche constituée de couches présentant des conductivités électriques distinctes afin de prendre en compte l'hétérogénéité du matériau.

Par ailleurs, des simulations numériques réalisées sous COMSOL Multiphysics sont mises en œuvre afin d'étudier la répartition spatiale des courants induits, du champ magnétique et de la densité de courant dans différentes configurations. Les résultats obtenus par simulation sont comparés aux solutions analytiques développées, ce qui permet de vérifier la validité du modèle proposé et d'évaluer sa précision.

Pour atteindre ces objectifs, ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Présentation générale du contrôle non destructif, de ses domaines d'application industriels, des principales techniques utilisées ainsi que des avantages et limites de chacune. Une attention particulière est portée aux méthodes électromagnétiques par courants de Foucault.

Chapitre 2 : Rappel des fondements théoriques de l'électromagnétisme, incluant les équations de Maxwell, les relations constitutives des milieux matériels, la loi d'Ohm locale ainsi que les différentes formulations utilisées pour la modélisation des problèmes électromagnétiques tridimensionnels.

Chapitre 3 : Développement des modèles analytiques destinés au calcul des courants induits dans une sphère conductrice homogène puis multicouche excitée par une source de courant. Les formulations mathématiques ainsi que les conditions aux interfaces y sont détaillées.

Chapitre 4 : Présentation des simulations numériques réalisées sous COMSOL Multiphysics et analyse des résultats obtenus. Les distributions des champs électromagnétiques et des courants induits sont étudiées pour différentes configurations, puis comparées aux résultats analytiques afin de valider les modèles développés.

Ce travail contribue ainsi à une meilleure compréhension des phénomènes électromagnétiques associés au contrôle non destructif par courants de Foucault et met en évidence l'apport complémentaire de la modélisation analytique et de la simulation numérique dans l'étude des systèmes d'inspection électromagnétique.

CHAPITRE I :

ETAT DE L'ART

I.1 Introduction

Le contrôle non destructif (CND) désigne l'ensemble des méthodes de contrôle permettant d'examiner un matériau, une pièce ou une structure sans altérer son intégrité ni compromettre son aptitude au service. Il a pour objectif principal la détection, la localisation et, dans la mesure du possible, la caractérisation des défauts ou discontinuités susceptibles d'affecter la qualité, la fiabilité et la sécurité des produits industriels. De ce fait, le CND occupe une place majeure dans les secteurs industriels, aussi bien lors des phases de fabrication que dans les opérations de maintenance et de suivi en service. [1][2]

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons particulièrement au contrôle non destructif par courants de Foucault, en raison de son aptitude à détecter rapidement et sans contact les défauts de surface et de subsurface dans les matériaux conducteurs, tout en permettant également la caractérisation de certaines propriétés physiques du matériau.

Au cours de chapitre, nous allons tous d'abord présenter les différents défauts à détecter par le contrôle non destructif. Ensuite nous allons illustrer les différentes techniques de contrôle existantes en montrant les avantages et les inconvénients de chacune.

I.2 Principe général de la détection des défauts

Quelle que soit la technique de contrôle non destructif employée, le développement d'un système de contrôle s'appuie sur une démarche structurée visant à définir l'objectif de l'inspection, à comprendre l'interaction entre le capteur et la pièce, puis à exploiter les signaux mesurés afin d'identifier les caractéristiques du matériau ou la présence d'éventuels défauts. Les objectifs du contrôle peuvent être résumés comme suit :

- Caractériser les matériaux sur les plans électrique, magnétique et géométrique.
- Détecter la présence de défauts au sein de la structure des matériaux.
- Caractériser ces défauts.

Cette démarche s'appuie sur l'analyse des phénomènes physiques mis en jeu, puis sur l'élaboration de modèles analytiques, semi-analytiques ou numériques décrivant l'interaction entre le champ généré par le capteur et la pièce inspectée. Ces modèles constituent une base essentielle pour la conception et l'optimisation des capteurs, mais également pour la résolution du problème inverse, c'est-à-dire l'interprétation des signaux mesurés en vue d'extraire des informations sur l'état de la pièce contrôlée.[5]

I.3 Nature des défauts à détecter par le CND

Différentes méthodes ont été mises au point afin de pouvoir remplir les contraintes dues à la nature du défaut recherché, de la pièce à contrôler (rivetée, soudée, laminée, de forme complexe,) et des conditions dans lesquelles le contrôle doit être effectué (en cours de fabrication, en recette, en service). Les défauts recherchés peuvent être classés en deux grandes catégories. Les défauts surfaciques et les défauts internes :

I.3.1 Défauts de surface

Ils sont situés à la surface du matériau ou dans une zone très proche de celle-ci. Ils peuvent être visibles à l'œil nu ou nécessiter des techniques spécifiques pour être révélés. Ces défauts apparaissent généralement à la suite de procédés de fabrication, d'usinage, de soudage ou sous l'effet des contraintes mécaniques et environnementales en service. Parmi les défauts de surface les plus courants, on trouve les fissures superficielles, les criques de fatigue, les piqûres de corrosion, les craquelures. Bien que parfois de faible dimension, ces défauts sont souvent critiques car ils peuvent constituer des points d'amorçage de rupture, notamment en fatigue. [7]

I.3.2 Défauts internes

Les défauts internes sont situés à l'intérieur du matériau, sans manifestation visible en surface. Ils résultent principalement des procédés de fabrication ou du vieillissement en service et regroupent notamment les porosités, inclusions, fissures internes et défauts de soudage. Ces défauts peuvent fortement dégrader les propriétés mécaniques de la pièce et représentent un risque important s'ils ne sont pas détectés. [8]

I.4 Technique de contrôle non destructif

Il existe une variété de méthodes de CND qui peuvent être utilisées, notamment la radiographie, les ultrasons, le ressuage, la thermographie, les courants de Foucault, etc. Ils dépendent du type de contrôle envisagé. Ces techniques utilisent divers phénomènes et sont souvent complémentaires. Le choix d'une méthode dépend de la pièce à contrôler (nature du matériau, forme, …), du type de contrôle à utiliser (détection de défauts, mesure d'épaisseur, ...) et des conditions dans lesquelles le contrôle doit être effectué. La plupart de ces méthodes ont automatisé les procédures d'acquisition, permettant le stockage et le traitement numérique d'un très grand nombre de données. Le premier chapitre se concentre sur la présentation des principaux outils de CND, en particulier celui basé sur les courants de Foucault. [2][5]

I.4.1 Examen visuel

Le contrôle visuel constitue la méthode la plus simple et la plus répandue en contrôle non destructif. Il consiste à observer directement la surface d'une pièce afin de détecter des défauts apparents tels que les fissures ouvertes, les criques, les défauts d'aspect, la corrosion ou les déformations géométriques. Cette inspection peut être réalisée à l'œil nu ou à l'aide d'outils optiques comme des loupes, des endoscopes ou des caméras, afin d'améliorer la visibilité des zones difficiles d'accès. L'examen visuel est généralement utilisé comme première étape du contrôle, car il permet un tri rapide et peu coûteux des pièces.[9]

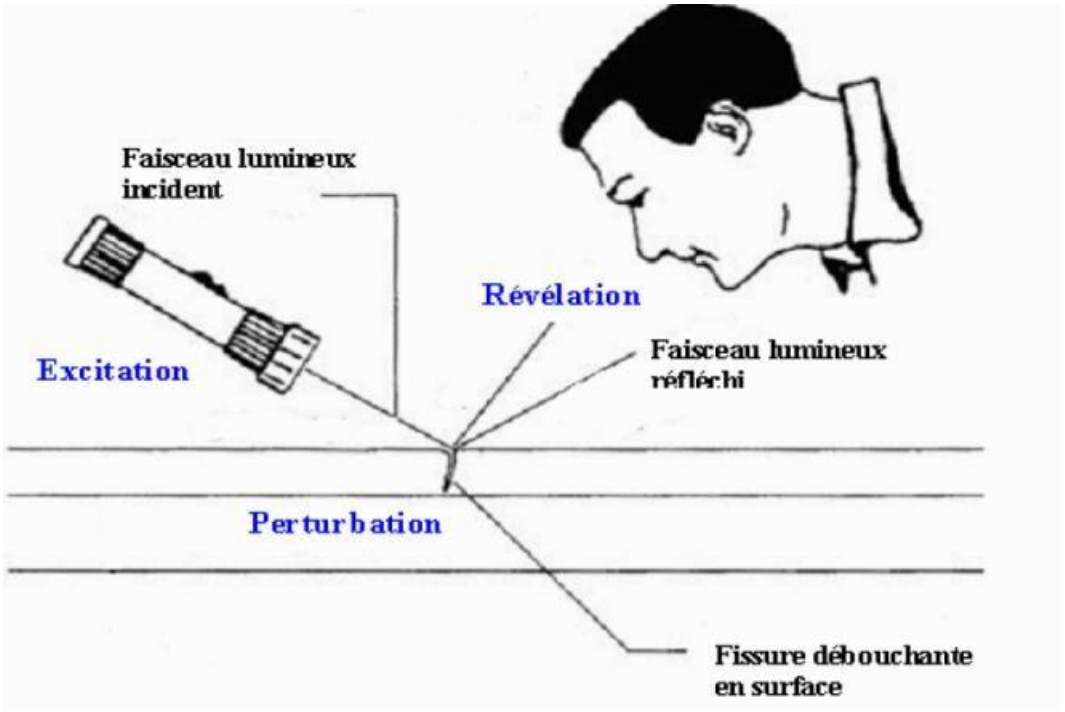


Figure I.1. Principe de l'examen visuel [17]

a. Avantages :

- Examen simple, rapide et pas coûteux.
- Souplesse d'inspection.[12]

b. Inconvénients :

- Limitation aux défauts visibles en surface.
- La surface doit être propre.
- Pas d'interruption des parcours optiques entre l'œil et la pièce examinée.[12]

c. Domaine d'application :

Le contrôle visuel est une méthode largement utilisée dans tous les secteurs de l'industrie, essentiellement en contrôle de procédé ou en complément d'autres méthodes du CND. Il permet la détection et surtout la caractérisation de tous types de défauts présents en surface de pièces, à condition que le matériel d'inspection mis en œuvre ait des caractéristiques compatibles avec l'application (sensibilité, profondeur de champ, précision). Il est utilisable sur tous types de matériaux, tant en fabrication qu'en maintenance. [12]

I.4.2 Examen par ressuage

Est une méthode utilisée pour détecter les défauts ouverts à la surface des matériaux, tels que fissures, porosités ou microfissures. Elle repose sur la pénétration d'un liquide coloré ou fluorescent dans les discontinuités, suivi d'un nettoyage de la surface et de l'application d'un révélateur qui fait ressortir le défaut. Cette méthode est simple, économique et applicable sur de nombreux matériaux.[9]

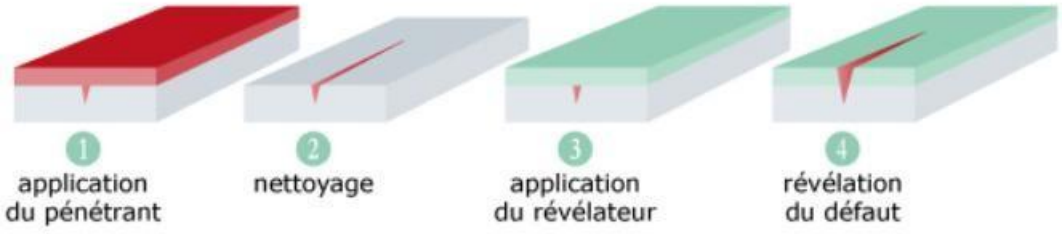


Figure I.2. Principe de l'examen par ressuage [19]

a. Avantages :

- Simple à mettre en œuvre et relativement sensible aux fissures ouvertes.
- Peut-être effectué sur toutes sortes de matériaux non poreux et non rugueux.
- Facilité de mise en œuvre [13][14]

b. Inconvénients :

- Il est nécessaire de faire un décapage et un dégraissage soigné avant l'inspection
- L'interprétation des résultats est subjective : il est impossible de déterminer les dimensions exactes des défauts.
- Danger des solvants toxiques, corrosifs et inflammables.[13][14]

c. Domaine d'application :

Le domaine d'application du ressuage est très vaste, car le procédé est simple d'emploi et permet de détecter la plupart des défauts débouchant en surface sur les matériaux métalliques non poreux, ainsi

que les autres matériaux à condition toutefois qu'ils ne réagissent pas chimiquement ou physiquement avec le pénétrant.[15]

I.4.3 Magnétoscopie

La magnétoscopie est utilisée pour détecter les défauts ouverts à la surface des matériaux ferromagnétiques, tels que fissures, inclusions ou défauts de soudure. Elle repose sur la magnétisation de la pièce, suivie de l'application de particules ferromagnétiques (sèches ou en suspension) qui s'accumulent aux endroits où le champ magnétique est perturbé par un défaut, rendant celui-ci visible. Cette méthode est rapide et efficace sur les surfaces accessibles.[9]

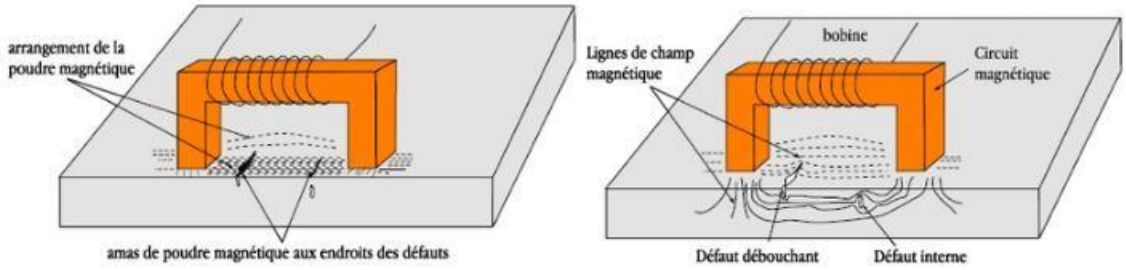


Figure I.3. Principe de l'examen par la magnétoscopie [24]

a. Avantages :

- Simple, peu coûteux et rapide.
- Facilité à mettre en œuvre manuellement.
- Economique.
- Détection des défauts débouchant et sous-jacents. [13]

b. Inconvénients :

- Cette méthode à champ magnétique continu ne s'applique qu'à des matériaux ferromagnétiques.
- La sensibilité de la détection dépend en effet de la nature, de la détection et de l'intensité de la magnétisation de la pièce.[13]

c. Domaine d'application :

La magnétoscopie permet de détecter les défauts de densité débouchant en surface sur des matériaux ferromagnétiques tels que les aciers ordinaires au carbone, aciers ferriques ordinaires et au chrome (13% de chrome), fontes, nickel, cobalt. Elle est utilisée pour le contrôle des :[15]

- Pièces moulées : criques situées entre les raccordements, réseaux de fissures superficielles.
- Pièces forgées : criques correspondant à des déchirures superficielles, fissures survenant au refroidissement.
- Les fissures de fatigue peuvent être détectées si les conditions sont favorables.

I.4.4 Thermographie infrarouge

La thermographie repose sur l'étude de la diffusion de la chaleur dans une cible à contrôler. Une quantité de chaleur est une quantité d'énergie stockée dans la matière et la température est un indicateur mesurable. La thermographie consiste en l'interprétation des cartes thermiques (thermo gammes) des surfaces observées. Distinction est faite entre la thermographie passive qui résulte de la simple observation des gradients thermiques sur une pièce, et la thermographie active lorsqu'une perturbation thermique a été volontairement générée pour le contrôle (source laser). Les discontinuités dans la pièce se traduisent par des différences de température sur l'image. L'acquisition des images thermiques s'obtient alors à l'aide d'une caméra infrarouge. [15]

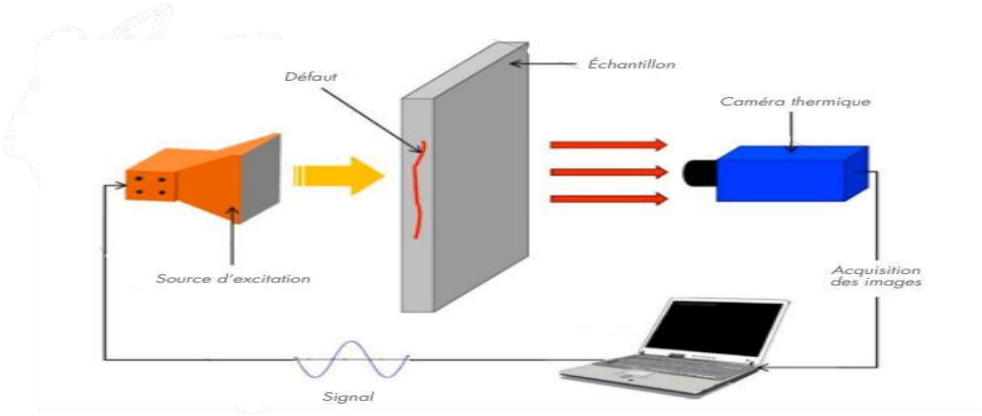


Figure I.4. Principe de l'examen par la thermographie infrarouge [20]

a. Avantages :

- Méthode relativement rapide et sans contact.
- Grande sensibilité de l'analyse de l'image.
- Image instantanée.

b. Inconvénients :

- Méthode coûteuse en investissement.
- Méthode limitée dans ses applications.
- L'interprétation des mesures n'est pas toujours facile, surtout pour identifier la nature des défauts.

c. Domaine d'application :

- Installations électriques.
- Enveloppe des bâtiments.
- Visualisation des canalisations.
- Contrôle des machines électriques.
- Détection de fuites.
- Contrôles thermiques des installations de chauffage et de vapeur.[13]

I.4.5 Contrôle par ultrasons

Le contrôle par ultrasons utilise des ondes acoustiques à haute fréquence qui se propagent dans le matériau et se réfléchissent aux interfaces ou défauts internes. Le principe consiste à émettre une onde ultrasonore (par un transducteur) qui se propage dans la pièce à contrôler et se réfléchit, à la manière d'un écho, sur les obstacles qu'elle rencontre (défauts, limites de la pièce). Les échos sont analysés sur un écran ou traités dans une chaîne de mesure. Le signal est maximal lorsque le défaut est perpendiculaire aux ondes émises.[16]

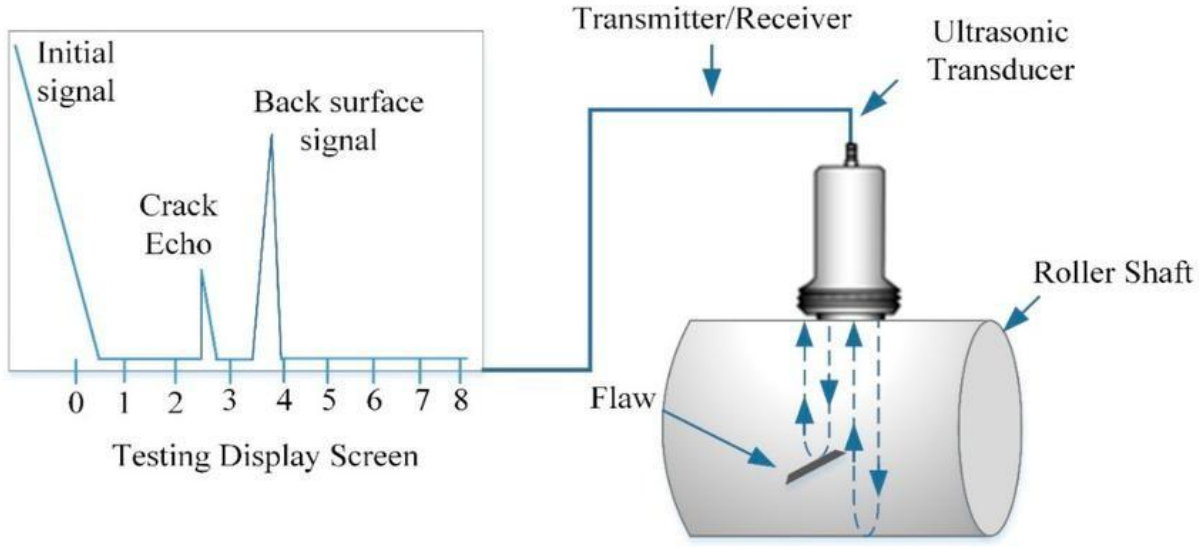


Figure I.5. **P**rincipe des ultrasons.[18]

a. Avantages :

- Détection précise de la position des défauts dans le volume de la pièce.
- Grande sensibilité surtout pour les défauts plans correctement orientés.
- Souplesse d'utilisation

b. *Inconvénients :*

- Nécessité d'utiliser un milieu de couplage entre le palpeur et la pièce.
- Interprétation de la nature des défauts et de leur dimension délicate nécessitant un personnel qualifié.
- La sensibilité dépend fortement de l'orientation du défaut vis-à-vis de la direction.[13]

I.4.6 Contrôle par les courants de Foucault

L'inspection par courants de Foucault est l'une des méthodes de contrôle non destructif qui se base sur la théorie de l'électromagnétisme. Plusieurs autres méthodes comme la magnétoscopie par exemple utilisent également ce principe.

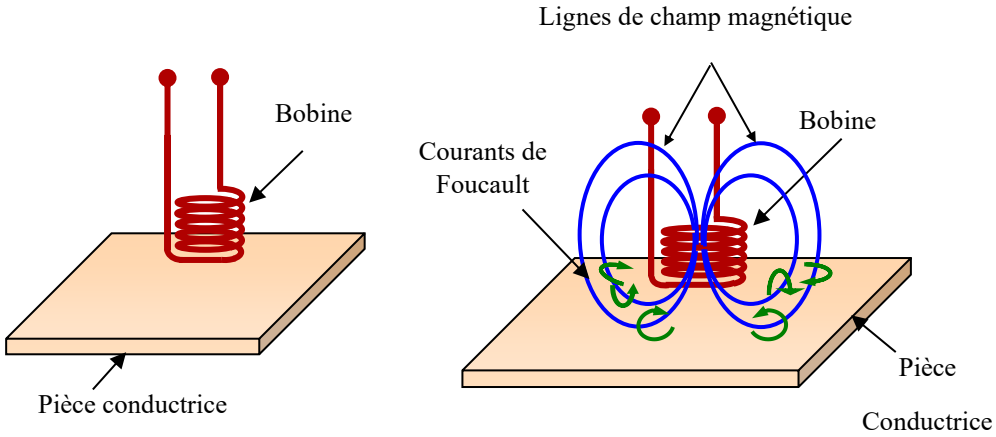


Figure I.6. Principe de développement des courants de Foucault

Quand un courant alternatif est appliqué à un matériau conducteur, tel que le cuivre, un champ magnétique se développe dans et autour de ce matériau. Ce champ magnétique augmente et diminue avec le courant alternatif. Si un autre matériau conducteur est introduit à proximité de ce champ magnétique, alors des courants de Foucault se développent.[2]

Un des avantages principaux de la méthode du contrôle non destructif par courants de Foucault est la variété d'inspections et de mesures qui peuvent être effectuées. C'est grâce à cette méthode qu'on peut, par exemple mesurer l'épaisseur d'un matériau, ou bien encore la conductivité de ce matériau dans le but de l'identifier, de déterminer les dommages dûs à la chaleur, déterminer sa profondeur, …etc.

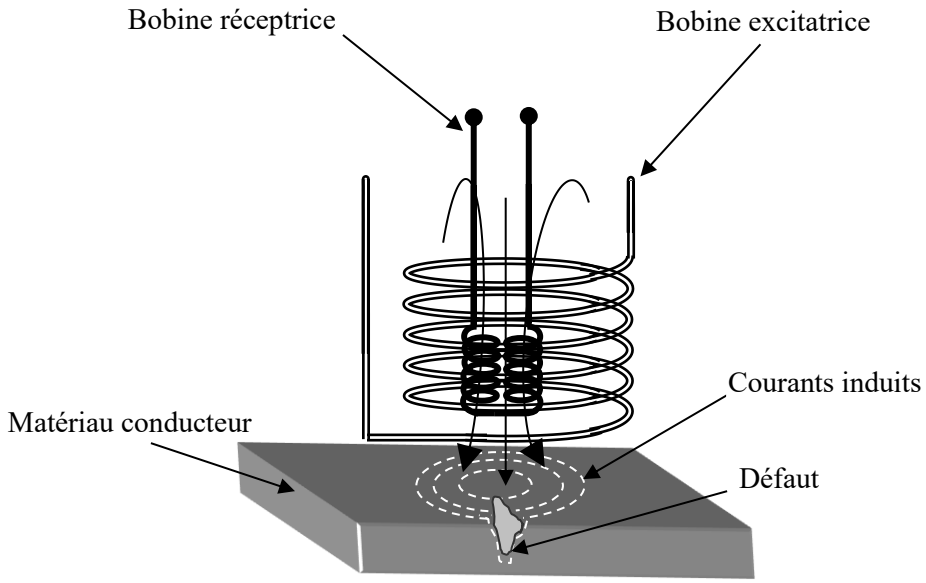


Figure I.7. Principe du contrôle non destructif par courants de Foucault

La technique de contrôle par courants de Foucault est largement utilisée dans le contrôle non destructif, notamment en égard à ces grands avantages en relation avec la nature du défaut, et le matériel utilisé. C'est une méthode de contrôle sensible aux petites fissures et à d'autres défauts proches de la surface du matériau.

Elle nous donne des résultats immédiats grâce à son équipement portatif, et qui n'exige ni une grande préparation ni une grande expérience dans le domaine du contrôle non destructif comme l'exige la méthode du contrôle par ultrasons. En plus c'est une technique où le capteur de contrôle n'a pas besoin d'entrer en contact avec le matériau conducteur à inspecter.[1][2]

Pour réaliser un contrôle complet d'une pièce métallique conductrice, il faut déplacer (à une vitesse qui peut atteindre quelques m/s) la bobine à la surface de celle-ci et déceler les variations de l'impédance qui traduisent la présence d'une anomalie à l'intérieur de la pièce.

La détection des défauts consiste à mesurer les variations d'impédance de la bobine. En général, on utilise une méthode comparative, dont l'objectif est de mesurer la différence entre l'impédance de la bobine et l'impédance de la bobine pour une pièce de référence (ne comportant pas de défaut).

a. Avantage :

- Coût faible.
- Sensibilité aux petites fissures ou autres défauts de surface.
- L'investigation donne des résultats immédiats et ne nécessite pas de corrélation.
- Possibilité de contrôle des pièces longues et profilées.
- Pas de conditions de sécurité ni pour l'opérateur ni pour l'environnement.
- Cette technique se différencie par rapport aux autres par le fait qu'elle ne nécessite pas de contact direct avec la surface de la cible. Cette caractéristique constitue un avantage important pour le domaine du CND.[22]

b. Inconvénients :

- Limité aux matériaux conducteurs d'électricité.
- Sensible à de nombreux paramètres dont il faut maîtriser la variation.[13]

c. Domaine d'application :

- Détection des effets de la chaleur sur alliages d'aluminium comme par exemple la surchauffe de composants aéronautiques.
- Vérification qu'un traitement thermique est effective par émission de la dureté du matériau.[15]

I.4.6.1 Facteurs affectant la réponse de courants de Foucault

La réponse d'un capteur de courants de Foucault est susceptible à un certain nombre de facteurs, on évoque :

a. Conductivité électrique

La conductivité d'un matériau a un effet direct sur le développement de courants de Foucault, plus la conductivité du matériau est élevée, plus ces derniers sont importants et reparties sur une certaine profondeur.

b. La Perméabilité

Dans les matériaux ferromagnétiques contrairement à d'autres substances paramagnétiques et diamagnétiques la perméabilité n'est pas constante, elle peut prendre une très grande valeur et ceci à une influence très significative sur la réponse de courants de Foucault. On outre la perméabilité varie considérablement dans une pièce en métal avec les efforts appliqués.

c. La fréquence

La réponse de courants de Foucault est considérablement influencée par la fréquence d'essai choisi, celle-ci est un facteur que nous pouvons commander.

Il y'a trois types de gamme de fréquence, la première dite gamme basse fréquence, où les fréquences peuvent aller de 1 Hz jusqu'à 1KHz, elle est spécifiée pour la recherche des défauts profond. Elle peut être utilisée pour le contrôle des pièces épaisses (on peut mesurer un dixième de millimètres sur des épaisseurs de l'ordre de 15 millimètres par exemple), ensuite la deuxième, que l'on appelle gamme moyenne fréquence, où la plage des fréquences varie de 1KHz à 1MHz, cette gamme est la plus utilisé pour la détection des fissures , enfin la gamme haute fréquence, cette dernière s'étend sur quelques MHz, son utilisation est limitée seulement pour la détection des micro fissures en surface.

d. La géométrie

Dans l'industrie, on retrouve des pièces qui ne sont pas plates et de géométrie très complexe. Cela (courbures, bords, etc.) affectent la répartition des courants induits dans la pièce à contrôler. Cependant, les méthodes d'essais doivent être capables de faire une nuance entre un bord par exemple et un défaut.

e. Profondeur de pénétration (épaisseur de peau)

Tous les matériaux conducteurs parcourus par un courant électrique alternatif ou soumis à un champ électromagnétique variable dans le temps présentent ce phénomène d'origine électromagnétique. Dans le cas d'un contrôle non destructif, les courants induits dans la pièce commencent à décroître d'une manière exponentielle à partir de la surface. La profondeur de pénétration donnée par détermine la grandeur caractéristique de ce phénomène : [21]

$$\delta = \frac{1}{\pi.\sigma.\mu.f} = \frac{1}{\sqrt{\pi.\sigma.\mu_0.\mu_r.f}} \quad \textbf{(I-1)}$$

f *:* la fréquence d'alimentation [HZ]

μ_r : La perméabilité magnétique relative du matériau [H/m]

μ_0 : La perméabilité magnétique du vide [H/m]

σ : La conductivité électrique [S/m]

Par conséquent, la profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la fréquence du champ et à la nature du matériau. Le module de la densité de courant d'une cible plane semi-finie excitée par une nappe de courants extérieurs parallèles au plan est régi par la relation suivante :[30]

$$J(z) = J_{0^e}^{-z\sqrt{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}} = J_0 e^{\frac{z}{\delta}} \quad \textbf{(I-2)}$$

z : la profondeur considérée à l'intérieur de la cible [m]

J(z) : le module de la densité de courant en fonction de la profondeur [A]

σ : profondeur de pénétration ou épaisseur de peau [m]

On peut constater que la densité du courant décroît de manière exponentielle dans la profondeur (figure I.7). [2] [21]

Un élément sensible à une grandeur électromagnétique collecte la réponse d'une cible à une excitation. Il s'agit généralement de déterminer une impédance ou une différence de potentiel (d.d.p) qui représente la variation d'un flux. Souvent, cette mesure est effectuée à l'aide d'une bobine. [21]

I.5 Conclusion

Pour conclure, ce chapitre nous a permis de présenter les notions générales sur le contrôle non destructif, ainsi que les principales méthodes utilisées pour détecter les défauts dans les matériaux sans les endommager. Il ressort que chaque méthode possède ses propres caractéristiques, avantages et limites, ce qui rend son choix étroitement lié à la nature du matériau et au type de défaut à identifier. Parmi ces techniques, le contrôle par courants de Foucault apparaît comme une méthode particulièrement intéressante pour les matériaux conducteurs. Cette partie introductive prépare donc l'étude détaillée qui sera développée dans les chapitres suivants.

CHAPITRE Ⅱ :

MODÉLISATION DU CND PAR COURANTS INDUITS

II.1 Introduction

Le contrôle non-destructif par courants induits repose sur l'analyse des courants générés dans une pièce conductrice soumise à un champ électromagnétique variable. La distribution de ces courants dépend à la fois des propriétés électromagnétiques du matériau inspecté, de la géométrie de la pièce, des caractéristiques du capteur ainsi que de la nature du signal d'excitation.

Le phénomène des courants induits est régi par les équations de Maxwell. Toutefois, la résolution directe de ces équations dans leur forme générale demeure complexe. Il est donc nécessaire d'introduire des hypothèses simplificatrices adaptées au problème étudié et d'adopter une formulation mathématique appropriée.

Dans ce contexte, la modélisation constitue un outil essentiel pour comprendre le comportement du contrôle non destructif par courants induits, prévoir l'influence des défauts sur la réponse du capteur et optimiser les paramètres d'inspection.

L'objectif de ce chapitre est d'établir le modèle électromagnétique décrivant l'interaction entre la sonde et la pièce à contrôler, en vue de formuler les équations gouvernant le problème étudié.

II.2 Équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques mis en jeu dans le contrôle par courants induits sont décrits par les quatre équations de Maxwell. Le domaine d'étude est généralement constitué de trois régions principales: l'air environnant, la bobine d'excitation et le matériau conducteur inspecté.

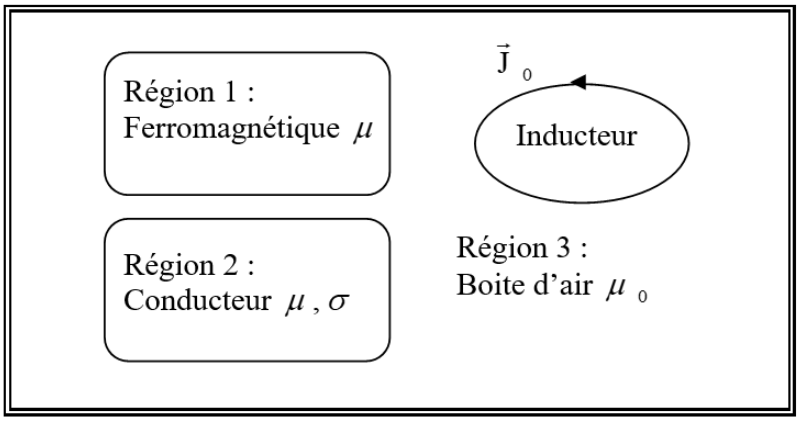


Figure II.1. Domaine d'étude.[32]

Les équations de Maxwell s'écrivent comme suit:

- Equation de Maxwell-Faraday

$$R\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(II-1)}$$

- Equation de conservation du flux magnétique

$$Div\vec{B} = 0 \quad \textbf{(II-2)}$$

- Equation de Maxwell-Ampère

$$R\vec{o}t\vec{H} = \vec{J}_{tot} \quad \textbf{(II-3)}$$

- Equation de Maxwell-Gauss

$$Div\vec{D} = \rho \quad \textbf{(II-4)}$$

Où:

$\vec{E}$: Champ électrique $[V/m]$

$\vec{B}$: Induction magnétique $[T]$

$\vec{H}$: Champ magnétique $[A/m]$

$\vec{D}$: Induction électrique $[A \cdot S/m^2]$

$\vec{J}_{tot}$: Densité de courant totale $[A/m^2]$

ρ: Densité de charge $[C/m^3]$

t: Temps $[s]$

II.3 Lois de comportement des milieux et loi d'Ohm

Les grandeurs électromagnétiques précédentes ne sont pas indépendantes. Leurs relations dépendent des propriétés du milieu considéré. Pour un matériau linéaire, isotrope et homogène, les lois constitutives s'écrivent:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \textbf{(II-5)}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad \textbf{(II-6)}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \textbf{(II-7)}$$

Avec:

$\mu = \mu_o \cdot \mu_r$

$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{H}{m}\right]$

$\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$

$\varepsilon_o = \frac{10^{-9}}{36\pi}[F/m]$

où μ désigne la perméabilité magnétique du milieu, ε la permittivité électrique et σ la conductivité électrique. L'association des équations de Maxwell à ces lois permet de décrire complètement le comportement électromagnétique d'un milieu donné.

II.4 Conditions de passage

Dans le cas du contrôle par courants induits, le domaine étudié est composé de plusieurs régions de nature différente, notamment l'air, la bobine et la cible conductrice. À l'interface entre deux milieux, certaines composantes des champs électromagnétiques doivent satisfaire des conditions de continuité ou de discontinuité.

- Continuité de la composante tangentielle du champ électrique $[\vec{E}]$:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0 \quad \textbf{(II-8)}$$

- Continuité de la composante normale de l'induction magnétique $[\vec{B}]$:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \textbf{(II-9)}$$

- Discontinuité éventuelle de la composante tangentielle du champ magnétique en présence de courants surfaciques:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{J}_S \quad \textbf{(II-10)}$$

- Discontinuité éventuelle de la composante normale de l'induction électrique en présence de charges surfaciques:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho_S \quad \textbf{(II-11)}$$

Avec:

ρ_S: Densité de charge surfacique à l'interface.

$\vec{n}$: Normale à la surface.

$\vec{J}_S$: densité de courant surfacique à l'interface.

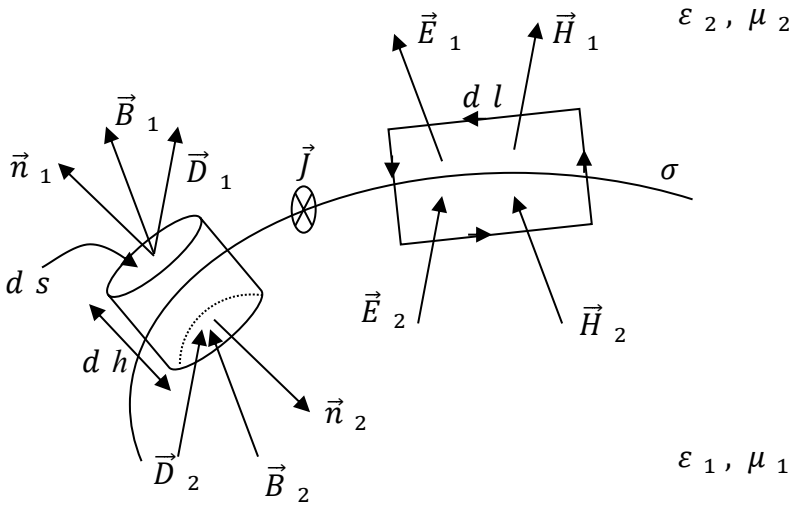


Figure II.2. Interface entre milieux de caractéristiques électromagnétiques différentes.[32]

Ces conditions sont essentielles pour assurer la cohérence physique du modèle et garantir la continuité des solutions aux interfaces entre les différents domaines.

II.5 Hypothèses simplificatrices

Dans de nombreux dispositifs électrotechniques fonctionnant à fréquence relativement basse, les dimensions du système sont faibles devant la longueur d'onde électromagnétique associée à la fréquence d'excitation. Dans ce cas, les effets de propagation peuvent être négligés.

Cette approximation, appelée approximation quasi-stationnaire, permet de simplifier les équations de Maxwell en négligeant les courants de déplacement devant les courants de conduction. On suppose également l'absence d'accumulation significative de charges dans les conducteurs.

Ainsi, les équations du problème deviennent:

$$R\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \textbf{(II-12)}$$

$$Div\vec{B} = 0 \quad \textbf{(II-13)}$$

$$R\vec{o}t\vec{H} = \vec{J} \quad \textbf{(II-14)}$$

$$Div\vec{D} = 0 \quad \textbf{(II-15)}$$

Avec les relations constitutives des milieux:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

Ces hypothèses sont particulièrement adaptées au contrôle non destructif par courants induits, où l'on s'intéresse principalement aux phénomènes d'induction dans des matériaux conducteurs.

II.6 Formulation en potentiel vecteur magnétique A

Afin de simplifier la résolution du problème, on introduit le potentiel vecteur magnétique A, défini par

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad \textbf{(II-16)}$$

Cette définition permet de satisfaire automatiquement l'équation de conservation du flux magnétique. Pour assurer l'unicité de la solution, on impose la condition de jauge de Coulomb:

$$div(A) = 0 \quad \textbf{(II-17)}$$

En remplaçant (II-16) dans (II-1), on obtient:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}.\overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad \textbf{(II-18)}$$

En utilisant la propriété de commutation entre le rotationnel et la dérivée temporelle, il vient :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \overrightarrow{-rot}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \quad \textbf{(II-19)}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) + \overrightarrow{rot}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \textbf{(II-20)}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \textbf{(II-21)}$$

L'expression (II-20) implique l'existence d'un potentiel scalaire électrique $\vec{V}$, défini comme suit:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{grad}(V) \quad \textbf{(II-22)}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}(V) \quad \textbf{(II-23)}$$

En considérant la loi d'Ohm (II-7), on obtient:

$$\vec{j} = \sigma.(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}(V) \quad \textbf{(II-24)}$$

Cette relation permet d'exprimer les deux densités de courant introduites précédemment:

$$\vec{j}\text{ind} = -\sigma.\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \textbf{(II-25)}$$

$\vec{j}\text{exi} = -\sigma.\vec{grad}(V)$ **(II-26)**

En remplaçant l'équation (II-24) dans l'équation (II-3), on obtient (en négligeant les courants de déplacement)

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \sigma.(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}(V)) \quad \textbf{(II-27)}$$

En combinant les équations (II-5) et (II-16), on obtient :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}.\vec{rot}(\vec{A}) \quad \textbf{(II-28)}$$

En remplaçant (II-28) dans (II-27), on obtient :

$$\vec{rot} = \left(\frac{1}{\mu}.\vec{rot}(\vec{A})\right) = \sigma.\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}(V) \quad \textbf{(II-29)}$$

$$\vec{rot} = \left(\frac{1}{\mu}.\vec{rot}(\vec{A})\right) + \sigma.\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{grad}(V) \quad \textbf{(II-30)}$$

Cette équation représente l'équation de la magnétodynamique transitoire en termes de potentiel vecteur magnétique A avec un terme source (excitation).

L'étude de cette équation en régime statique (indépendant du temps) correspond au régime magnétostatique. En revanche, lorsque l'on prend en compte la dépendance temporelle du champ avec une alimentation sinusoïdale, on obtient un modèle magnétodynamique en régime harmonique. En régime harmonique sinusoïdal, la dérivée temporelle est remplacée par: $\frac{d}{dt} = jw$

En régime harmonique sinusoïdal, la dérivée temporelle est remplacée par jw. L'équation de la magnétodynamique s'écrit alors sous la forme:

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{rot}(\vec{A})\right) + jw\sigma\vec{A} = \overrightarrow{J_s} \quad \textbf{(II-31)}$$

II.7 Équations dans les différents domaines

Le système étudié étant constitué de plusieurs régions, l'équation de la magnétodynamique prend une forme particulière dans chaque domaine.

II.7.1 Dans l'air

Dans la région d'air entourant le dispositif, il n'existe ni source volumique de courant ni conduction électrique. La conductivité y est donc nulle (σ = 0). L'équation se réduit à:

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu 0}.rot(\vec{A})\right) = 0 \qquad \textbf{(II-32)}$$

II.7.2 Dans la bobine

Dans la bobine d'excitation, la présence du courant source imposes un terme d'excitation. L'équation s'écrit alors sous la forme:

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu 0}.\vec{rot}(\vec{A})\right) = J\vec{s} \qquad \textbf{(II-33)}$$

II.7.3 Dans la cible conductrice

La pièce inspectée est supposée conductrice et non ferromagnétique. Dans ce cas, l'excitation est absente à l'intérieur de la cible, mais les courants induits y apparaissent sous l'effet du champ magnétique variable. L'équation devient:

$$rot\left(\frac{1}{\mu}rot(\vec{A})\right) + jw\sigma\vec{A} = 0 \qquad \textbf{(II-34)}$$

Cette équation gouverne la diffusion électromagnétique dans le matériau inspecté.

II.8 Méthodes de resolution

De manière générale, la modélisation des phénomènes électromagnétiques peut être menée à l'aide de trois grandes familles de méthodes:[32]

<table>
<tr><th>TYPES</th><th>Méthodes analytiques</th><th>Méthodes
semi analytiques</th><th>Méthodes numériques</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Avantages</td><td>Simples et faciles à programmer</td><td rowspan="2">Simples est faciles à programmer</td><td rowspan="2">Applicables aux géométries complexes</td></tr>
<tr><td>Résultats exacts et précis</td><td rowspan="2">Temps de calcul réduit</td></tr>
<tr><td>Temps de calcul et espace mémoire très Réduits</td><td>Applicables aux systèmes non linéaires</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Inconvénients</td><td rowspan="2">Nécessitent un développement délicat</td><td>Utilisent des approximations</td><td>Utilisent des approximations</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Se limitent à des géométries simples</td><td>Nécessitent la discrétisation du Domaine d’étude</td><td>Nécessitent la discrétisation du Domaine d’étude</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Applicables uniquement aux systèmes linéaires</td><td>Se limitent à des géométries simples</td><td>Difficiles à programmer</td></tr>
<tr><td>Applicables uniquement aux systèmes linéaires</td><td>Temps de calcul et espace mémoire très importants</td></tr>
</table>

Tableau II.1. comparaison entre les différentes méthodes de résolution des EDDPs [32]

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le cadre théorique nécessaire à la modélisation du contrôle non destructif par courants induits. À partir des équations de Maxwell et des lois constitutives des milieux, nous avons établi la formulation mathématique permettant de décrire l'interaction entre la sonde d'inspection et la pièce conductrice. Les hypothèses simplificatrices adoptées ainsi que la formulation en potentiel vecteur magnétique A conduisent à un modèle adapté à l'étude du régime harmonique. Ce modèle constitue la base des simulations destinées à analyser la répartition des courants induits et l'influence des défauts sur la réponse du capteur.

CHAPITRE III :

CALCUL ANALYTIQUE TRIDIMENSIONNEL

III.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au développement du modèle analytique tridimensionnel utilisé pour l'étude des courants induits dans des structures sphériques conductrices. La méthode adoptée repose sur la formulation du Potentiel Vecteur Magnétique du Second Ordre (PVSO), qui permet de simplifier la résolution des équations électromagnétiques en coordonnées sphériques. Après avoir établi les expressions des potentiels dans les différentes régions du domaine d'étude, les courants induits sont déterminés à partir des conditions aux limites imposées aux interfaces. Cette démarche est ensuite étendue au cas d'une sphère multicouche afin de prendre en compte des conductivités électriques différentes et d'élargir le domaine d'application du modèle développé.

III.2 Formulation du potentiel vecteur magnétique du second ordre en coordonnées sphériques

La méthode du potentiel vecteur magnétique du second ordre considère deux potentiels scalaires dérivés du potentiel vecteur magnétique. Elle permet de ramener l'équation vectorielle de diffusion électromagnétique à des équations scalaires, tout en réduisant le nombre d'inconnues.

L'équation de diffusion électromagnétique s'écrit sous la forme :

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(III-1)}$$

En régime quasi-stationnaire harmonique, on peut écrire :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = j\omega\vec{A}$$

Si l'on pose :

$k^2 = -j\mu\sigma\omega$

L'équation (III-1) devient :

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = 0 \qquad \textbf{(III-2)}$$

En coordonnées sphériques, la résolution directe de l'équation (III-2) présente l'inconvénient de conduire au traitement de trois équations scalaires, correspondant aux trois composantes du vecteur. Cette difficulté est évitée en introduisant le potentiel vecteur magnétique du second ordre, défini par :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{W} = \vec{\nabla} \times [(\mathrm{rW}_a)\,\vec{r}_o + \vec{r}_o \times \nabla(\mathrm{rW}_b)] \qquad \textbf{(III-3)}$$

Ce potentiel $\overrightarrow{W}$ est décomposé en deux composantes scalaires différentes, notées W_a et W_b, qui obéissent à l'équation de diffusion homogène de Helmholtz [2].

$$\nabla^2 W_a + k^2 W_a = 0 \qquad \textbf{(III-4)}$$

$$\nabla^2 W_b + k^2 W_b = 0 \qquad \textbf{(III-5)}$$

Les équations précédentes deviennent ainsi séparables dans n'importe quel système de coordonnées [12].

À partir de l'équation (III-3), les composantes de $\vec{A}$ en coordonnées sphériques sont $\vec{A}(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ telles que :

$$\begin{cases} A_r = \frac{\cot\theta}{r} \cdot \frac{\partial W_b}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 W_b}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 W_b}{\partial \varphi^2} & \textbf{(III-6)} \\ A_\theta = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 W_b}{\partial \theta \cdot \partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_b}{\partial \theta} & \textbf{(III-7)} \\ A_\phi = -\frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial \varphi \cdot \partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_b}{\partial \varphi}\right) & \textbf{(III-8)} \end{cases}$$

La densité du flux magnétique peut être exprimée en termes de $W_a$et W_b en coordonnées sphériques comme suit :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{W}. \quad \textbf{(III-9)}$$

$$\vec{B} = \left(r_\circ \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\nabla}\,(\mathrm{rW}_a) + k^2\left[(\mathrm{rW}_a)\,\vec{r}_\circ + \vec{r}_\circ \times \nabla\left(r\vec{W}_b\right)\right]$$

Qui donne les expressions qui suivent pour les composantes de $\vec{B}$ **:**

$$\begin{cases} B_r = r\frac{\partial^2 W_a}{\partial r^2} + 2\frac{\partial W_a}{\partial r} + k^2 W_a \cdot r & \textbf{(III-10)} \\ B_\theta = \frac{\partial^2 W_a}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{k^2}{\sin\theta}\frac{\partial W_b}{\partial \varphi} & \textbf{(III-11)} \\ B_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial \varphi \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_a}{\partial \varphi}\right) + k^2\frac{\partial^2 W_b}{\partial \theta} & \textbf{(III-12)} \end{cases}$$

A partir de ces équations, il est observé que pour la région non conductrice (k=0), la densité du flux magnétique $\vec{B}$ dépend seulement de W_a et s'exprime comme le gradient de la quantité scalaire :

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\left[\frac{\partial(\mathrm{rW}_a)}{\partial r}\right] \quad \textbf{(III-13)}$$

L'intensité du champ électrique, et par conséquent les courants de Foucault, se déduisent de la loi suivante :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = -j\omega\sigma\,\{\vec{A} = -j\omega\sigma\,\{\vec{\nabla} \times \vec{W} \quad \textbf{(III-14)}$$

L'analyse précédente met en évidence les avantages de la formulation en potentiel vecteur magnétique du second ordre. En pratique, la résolution analytique en potentiel vecteur magnétique devient délicate dès que l'on traite des configurations tridimensionnelles.

C'est pour cette raison que la méthode du PVSO est utilisée. En effet, elle fait intervenir deux potentiels scalaires dans les régions conductrices, solutions de l'équation de Helmholtz, et un seul potentiel scalaire dans les régions non conductrices, solution de l'équation de Laplace [12].

Le problème étudié est illustré sur la **Figure III.1**. Une bobine à spire unique, parcourue par un courant harmonique $I\exp(j\omega t)$, est placée à proximité d'une sphère conductrice de rayon b.

La conductivité σ de la sphère est supposée constante dans tout son volume.

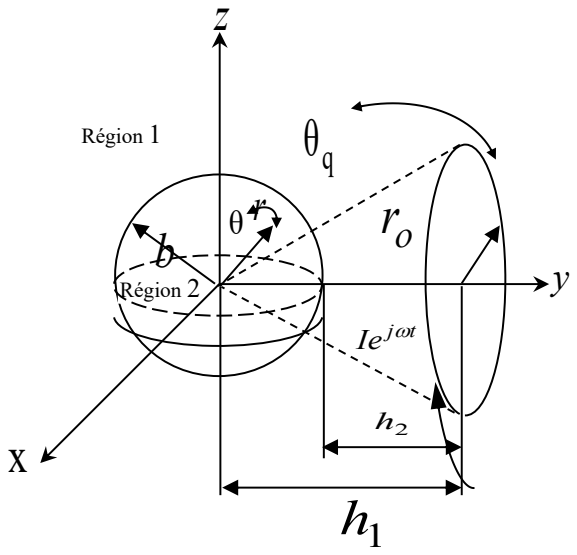


Figure III.1. Excitation filiforme à côté d'une sphère conductrice

Selon les expressions (III.6), (III.7) et (III.8), le potentiel vecteur magnétique dans les coordonnées sphériques dépend de W_a et W_b non seulement dans les régions conductrices mais aussi dans les régions non conductrices.

En revanche, la densité de flux magnétique dépend de W_a et de W_b dans les régions conductrices, alors que dans les régions non conductrices, elle ne dépend que de W_a

Les conditions d'interface entre la région non conductrice et la région conductrice traduisent la continuité de la composante tangentielle de l'intensité du champ magnétique ainsi que celle de la composante normale de la densité de flux magnétique [13].

$$\begin{cases} W_{a,1} = W_{a,2}, & r = b \quad \textbf{(III-15)} \\ \frac{\partial W_{a,1}}{\partial r} = \frac{\partial W_{a,2}}{\partial r}, & r = b \quad \textbf{(III-16)} \\ \frac{\partial W_{b,2}}{\partial r} = 0, & r = b \quad \textbf{(III-17)} \\ W_{b,2} = 0, & r = b \quad \textbf{(III-18)} \end{cases}$$

L'expression (III-18) est obtenue par le fait qu'il n'y a pas de source dans la région conductrice. De plus, le potentiel $W_{b,2}$ est nul partout dans la sphère.

Ce qui simplifie le potentiel vecteur magnétique A_2 dans le conducteur et s'écrit uniquement en fonction de $W_{a,2}$:

$$\vec{A}_2 = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{W_2} = \vec{\nabla} \times \left[(r \cdot W_{a,2})\vec{r}_\circ\right] \quad \textbf{(III-19)}$$

En combinant la relation (III-19) avec l'expression des courants induits donnée par (III-14), on montre que, pour la configuration considérée, la composante radiale du courant de Foucault est nulle dans la sphère.

Dans la région non conductrice (région air), le potentiel $W_{a,1}$ peut être exprimé comme la somme du potentiel primaire $W_{a,s}$ dû aux sources de courant dans l'espace libre et le second potentiel $W_{a,\text{ec}}$ dû aux courants induits dans la sphère conductrice.

$$W_{a,1} = W_{a,\text{ec}} + W_{a,s} \quad \textbf{(III-20)}$$

La procédure standard pour le calcul de $W_a$dans les deux régions consiste à l'exprimer par des séries d'expansions orthogonales connues dans les deux régions.

Les coefficients inconnus seront déterminés. Si nous remplaçons $W_{a,1}$ dans (III-15) et (III-16) par l'expression en (III-20) on trouve :

$$W_{a,2} = W_{a,\text{ec}} + W_{a,s} \qquad r = b \quad \textbf{(III-21)}$$

$$\frac{\partial W_{a,2}}{\partial r} = \frac{\partial (W_{a,\text{ec}} + W_{a,s})}{\partial r} \qquad r = b \quad \textbf{(III-22)}$$

Ces relations permettent de déterminer le potentiel l$W_{a,2}$, et donc le champ magnétique, à l'intérieur de la sphère.

III.3 Calcul des courants induits

Dans la région non conductrice, le potentiel $W_{a,\text{ec}}$ généré par les courants induits eux-mêmes vérifie l'équation de Laplace en coordonnées sphériques, qui résulte de (III-4) pour$k = 0$.

La région étant définie par $r \geq b$, l'expression de $W_{a,\text{ec}}$ est tirée de [12] [14] avec le potentiel qui s'annule à la distance radiale infinie

$$W_{a,\text{ec}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)[S_{\text{ec}}\sin(m\varphi) + C_{\text{ec}}\cos(m\varphi)] \quad \textbf{(III-23)}$$

$P_n^m(\cos\theta)$: est la fonction de Legendre associée de la première espèce.

Le potentiel à l'intérieur de la sphère conductrice W_{a2} est la solution de l'équation de Helmholtz scalaire (4) en coordonnées sphériques, dans cette région, définie par $r \leq b$, l'expression de W_{a2} est :

$$W_{a2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} I_n\,(\text{kr}) P_n^m(\cos\theta)[S_2\sin(m\varphi) + C_2\cos(m\varphi)] \quad \textbf{(III-24)}$$

$I_n(\text{kr})$: est la fonction de Bessel modifiée de la première espèce, qui prend une valeur finie à l'origine de coordonnées.

Pour mettre en œuvre la méthode du PVSO, les coefficients inconnus S_{ec},C_{ec},S_2 et C_2 doivent être déterminés, cela est fait en imposant les conditions aux limites (III-21) et (III-22) à la surface de la sphère $r = b$.

Cependant il est nécessaire de définir une expression pour le potentiel produit par la source dans l'espace libre.

W_{as} Prend une forme similaire à celles données par (III-23) et (III-24). Le potentiel dans l'espace libre, défini par $r \geq b$ est décrit sous la forme suivante [12] :

$$W_{as} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} r^n p_n^m(\cos\theta) \left[S_s \sin(m\varphi) + C_s \cos(m\varphi)\right] \quad \textbf{(III-25)}$$

Où :

S_s et C_s sont les coefficients qui seront calculés par la suite.

À partir des expressions des potentiels$W_{a,ec}$, W_{a2} et W_{as} donnés respectivement par les équations (III-23), (III-24) et (III-25) et les équations obtenues en appliquant les conditions aux limites (III-21) et (III-22), on aura les expressions pour les coefficients sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_s \\ C_s \end{bmatrix} \cdot \frac{(2n+1)b^n}{\text{kb}\cdot I_{n-1}(\text{kb}) + I_n(\text{kb})} \quad \textbf{(III-26)}$$

$$\begin{bmatrix} S_{ec} \\ C_{ec} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} S_s \\ C_s \end{bmatrix} \cdot \frac{I_{n+1}(\text{kb})\, b^{(2n+1)}}{\text{kb}\cdot I_{n-1}(\text{kb}) + I_n(\text{kb})} \quad \textbf{(III-27)}$$

Avec :

I_{n+1}: Fonction de Bessel modifiée de la première espèce d'ordre$(n+1)$.

I_{n-1}: Fonction de Bessel modifiée de la première espèce d'ordre$(n-1)$.

À partir de ces deux systèmes d'équations, nous déterminerons le potentiel dans toutes les régions en fonction de S_s etC_s, qui seront à leur tour déterminés en calculant le potentiel magnétique dans l'espace libre à partir de la formule de (Biot et Savart)

III.4 Potentiel dans l'espace libre

À partir de la loi de Biot et Savart donnée pour la densité du flux magnétique par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \oint_c \frac{d\vec{l}}{R} \quad \textbf{(III-28)}$$

Où l'intégration est réalisée le long du contour suivi par le courant d'excitation (la bobine).

R: désigne la distance entre le point d'excitation $(r_o, \theta_o, \varphi_o)$ et le point champ défini par (r, θ, φ) comme le montre la **figure III.2**

$$R^2 = r^2 + r_o^2 - 2\text{r}r_o[\cos\theta\cos\theta_o + \sin\theta\sin\theta_o\cos(\varphi - \varphi_o)] \quad \textbf{(III-29)}$$

En utilisant le théorème de Stokes qui transforme l'intégrale de la relation (III-28) en une intégrale de surface, on trouve :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iint d\vec{s} \times \vec{\nabla}_o \left(\frac{1}{R}\right) \quad \textbf{(III-30)}$$

Où ∇_o est l'opérateur gradient, dl est la distance différentielle du vecteur tangentiel au contour de courant de source, et ds est le vecteur tangentiel de la surface normale à n'importe quelle surface limitée par le contour C.

Après développement, (III-30) prend la forme suivante :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \left[-\frac{\mu_o I}{4\pi} \iint d\vec{s} \cdot \vec{\nabla}_o \left(\frac{1}{R}\right) \right] \quad \textbf{(III-31)}$$

Si (III-31) est comparée à (III-13) pour l'expression du champ magnétique dans la région non conductrice, le potentiel dans l'espace libre devient :

$$W_{\text{as}} = -\frac{\mu_o I}{4\pi\, r} \iint_S \text{ds} \cdot \nabla_o \left(\frac{\text{dr}}{R}\right) \quad \textbf{(III-32)}$$

$\frac{1}{R}$ est remplacé par son équivalent en coordonnées sphériques :

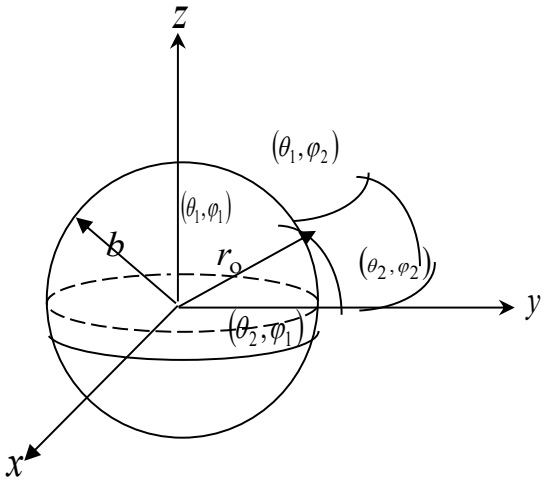


Figure III.2. Excitation dans le plan radial r*θ*

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta_o) \times \cos[m(\varphi - \varphi_o)] \cdot \frac{r^n}{r_o^{n+1}}, r \leq r_\circ \quad \textbf{(III-33)}$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, m = 0 \\ 2, m \neq 0 \end{cases} \quad \textbf{(III-34)}$$

Le potentiel peut être calculé à partir de la surface d'intégration analytiquement en utilisant :

$$d\vec{s} = r_o^2 \sin\theta_o \cdot d\theta_o \cdot d\varphi_o \cdot \vec{r}_o + r_o \sin\theta \cdot \text{dr}_o \cdot d\varphi_o \cdot \vec{\theta}_o + r_o \cdot \text{dr}_o \cdot d\theta_o \cdot \vec{\varphi}_o \quad \textbf{(III-35)}$$

Le problème n'admet une solution analytique que pour trois positions de l'excitation [12], dans d'autres cas un recours aux méthodes numériques est nécessaire. Dans notre étude, on ne s'intéressera qu'au premier cas où l'excitation est localisée dans le plan des $r_s$constant, elle s'étend suivant la direction transversale de θ_1à $\theta_2$et de $\varphi_1$et φ_2 suivant la direction longitudinale. Cette excitation est représentée dans **Figure III.2**, l'intégration de (III-32) donne l'expression du potentiel $W_{a,s}$ suivante [12] :

$$W_{a,s}= \frac{\mu_s I}{4\pi}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_N(\theta_1,\theta_2)\cdot\frac{r^n}{\mathrm{mr}_0^n}\cdot[(\sin m\varphi_2-\sin m\varphi_1)\cos m\varphi-(\cos m\varphi_2-\cos m\varphi_1)\sin m\varphi] \quad \textbf{(III-36)}$$

Avec :

$$P_N(\theta_1,\theta_2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}P_n^m(\cos\theta_0)\sin\theta_0 d\theta_0 \quad \textbf{(III-37)}$$

On fixe des valeurs pour $\theta_1$et θ_2 ainsi que φ_1 etφ_2, selon :

$\theta_1=45^\circ$; $\theta_2=135^\circ$;

$\varphi_1=-45^\circ$; φ_2=$+45^\circ$;

En se rapportant à l'expression (36), et connaissant les valeurs exactes de θ_1,θ_2, φ_1 et φ_2,on obtient :

$$W_{a,s}=\frac{\mu_s I}{2\pi}\sum_n^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot P_N(\theta_1,\theta_2)\cdot\frac{r_s^n}{\mathrm{mr}_s^n}\cdot\sin m\frac{\pi}{4}\cdot\cos m\varphi \quad \textbf{(III-38)}$$

En faisant une simple identification entre l'équation (III-38) et l'équation (III-25) décrite précédemment, nous obtenons les coefficients S_S et C_S qui seront donnés par les expressions suivantes :

Après la détermination de S_S et C_S il sera donc facile d'enlever toutes les indéterminations en revenant aux systèmes d'équations (III-26) pour déterminer S_2et C_2et donc identifier le potentiel dû à la source W_S ainsi que (III-27) pour

$$\begin{aligned} S_S &= 0 \\ C_S &= \frac{\mu_s I}{2\pi}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_N(\theta_1,\theta_2)\frac{1}{\mathrm{mr}_s^n}\cdot\sin m\frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \textbf{(III-39)}$$

déterminer S_{ec} et C_{ec} ce qui permet ensuite de calculer le potentiel dû aux courants de Foucault W_{ec}.

$$\begin{cases} C_2=\dfrac{\mu_o I}{2\pi}\varepsilon_m\dfrac{(n-m)\,!}{(n-m)\,!}P_N(\theta_1,\theta_2)\dfrac{1}{r_o^n}\dfrac{(2n+1)I_{n+1}(\mathrm{kb})}{\mathrm{kb}\cdot I_{n-1}(\mathrm{kb})+I_n(\mathrm{kb})}\cdot\sin m\dfrac{\pi}{4} & \textbf{(III-40)} \\ S_2=0 & \\ C_{\mathrm{ec}}=-\dfrac{\mu_o I}{2\pi}\varepsilon_m\dfrac{(n-m)\,!}{(n-m)\,!}P_N(\theta_1,\theta_2)\dfrac{1}{r_o^n}\dfrac{(2n+1)I_{n+1}(\mathrm{kb})}{\mathrm{kb}\cdot I_{n-1}(\mathrm{kb})+I_n(\mathrm{kb})}\cdot\sin m\dfrac{\pi}{4} & \textbf{(III-41)} \\ S_{\mathrm{ec}}=0 & \end{cases}$$

:s par :

$$J_\theta=-\frac{\mathrm{j}w\sigma}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\iota_n(\mathrm{kr})\ (2n+1)b''}{\mathrm{kb}i_{n-1}(\mathrm{kb})+i_n(\mathrm{kb})}\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\ m\cdot[S_s\cos m\varphi-C_s\sin m\varphi] \quad \textbf{(III 42)}$$

$$J_\varphi = \mathrm{jw}\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{i_n(\mathrm{kr})(2n+1)b^n}{\mathrm{kb}\cdot i_{n-1}(\mathrm{kb})+i_n(\mathrm{kb})} \frac{\mathrm{dP}_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \left[S_s \sin m\varphi + C_s \cos m\varphi\right] \quad \textbf{(III 43)}$$

III.5 Cas d'une sphère comportant N couches de conductivités différentes

Pour ce qui suit, on va considérer une sphère qui comporte *N* couches, de même perméabilité magnétique $\mu=4\pi.10^{-7}$ H/m, mais de conductivités électriques différentes comme indiqué sur **la figure III.3** ci-dessous.

La couche t sur la **figure III.3** est caractérisée par une conductivité électrique $\sigma_t$et de rayon b_t. Idem une couche *t+1* caractérisée par une conductivité électrique σ_{t+1} et de rayon égal à $r = b_{t+1}$.

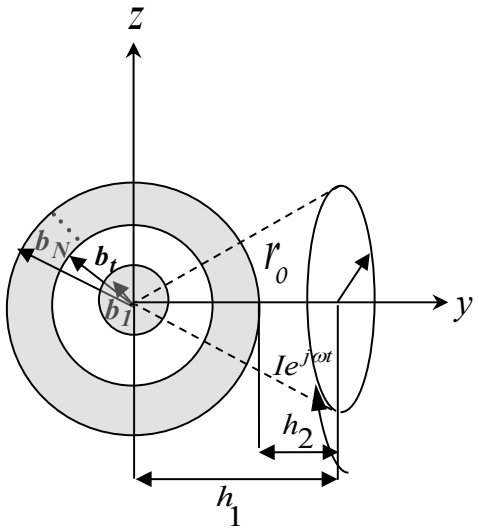


Figure III.3. Schéma du modèle d'étude pour N couches

En utilisant la méthode du PVSO en coordonnées sphériques et en s'inspirant des travaux cités en [15], où la même configuration a été traitée avec un modèle analytique en potentiel vecteur magnétique. Pour ce faire, des conditions d'interfaçage entre couches ont été mises en place sur la base d'une formulation en potentiel vecteur magnétique du second ordre.

$$W_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} i_n(k_t r)\, P_n^m(\cos\theta)[S_t \sin m\varphi + C_t \cos m\varphi] \quad \textbf{(III-44)}$$

$$W_{t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} i_n(k_{t+1} r)\, P_n^m(\cos\theta)[S_{t+1} \sin m\varphi + C_{t+1} \cos m\varphi] \quad \textbf{(III-45)}$$

Avec :

$$k_t = \sqrt{-j\mu\sigma_t\omega}$$

$k_{t+1} = \sqrt{-j\mu\sigma_{t+1}\omega}$

Ainsi que le potentiel de la source, résultant du potentiel dans l'espace libre W_S et le potentiel dû aux courants de Foucault W_{ec}:

$$W_S = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n P_n^m(\cos\theta) C_S \sin m\varphi \qquad (\text{Ⅲ} - \mathbf{46})$$

$$W_{\text{ec}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) C_{\text{ec}} \cos m\varphi \qquad (\text{Ⅲ} - \mathbf{47})$$

Les constantes de ces potentiels seront déterminées en appliquant les conditions de passage d'une couche à l'autre (couches adjacentes) en commençant par mettre les conditions aux limites entre la première couche et la deuxième couche et on va suivre cette opération jusqu'à la dernière couche, c'est-à-dire jusqu'à la couche *N*.

Appliquons maintenant la condition aux limites entre une couche *t* et une couche adjacente *t+1*, on trouve :

$$W_t\,|_{r=b_t} = W_{t+1}|_{r=b_{t+1}} \qquad \textbf{(III-48)}$$

En utilisant l'expression de la dérivée de la fonction de Bessel, on trouve :

$$\frac{\partial i_n(\text{kr})}{\partial r} = k\left[i_{n-1}(\text{kr}) - \frac{n}{\text{kr}} i_n(\text{kr})\right] \qquad \textbf{(III-49)}$$

On obtient la relation qui détermine la constante $C_t$en fonction deC_{t+1}.

$$C_t = \frac{k_{t+1}}{k_t} \frac{i_{n-1}(k_{t+1}b_t)}{i_{n-1}(k_t b_t)} C_{t+1} \qquad \textbf{(III-50)}$$

Si nous considérons une sphère constituée de *N* couches, la relation entre la couche *t* et la couche *N* sera exprimée en fonction des constantes $C_t$et C_N comme suit :

$$C_t = \frac{k_N}{k_t} \frac{\prod_{x=t}^{N-1} i_{n-1}(k_{x+1}b_x)}{\prod_{j=t}^{N-1} i_{n-1}(k_j b_j)} C_N \qquad \textbf{(III-51)}$$

Afin de déterminer la constante de la N^{eme}couche(C_N), on doit appliquer une dernière condition aux limites, cette fois-ci entre la couche *N* et l'air.

Pour cela, il faut déterminer le potentiel dans l'air, qui est identique à celui calculé pour une sphère à une seule couche.", c'est-à-dire : $W_{\text{air}} = W_{\text{ec}} + W_S$

$$W_N|_{r=b_N} = W_{\text{air}}|_{r=b_N} \qquad \textbf{(III 52)}$$

$$\frac{\partial W_N}{\partial r}|_{r=b_N} = \frac{\partial W_{\text{air}}}{\partial r}|_{r=b_N} \qquad \textbf{(III-53)}$$

A partir de ces deux conditions, on aboutit à la relation :

$$C_N = \frac{(2n+1)\, b_N^2}{k\, b_N \cdot I_{n-1}(k\, b_N) + I_n(k\, b_N)} C_S \qquad \textbf{(III-54)}$$

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation analytique tridimensionnelle des courants induits appliquée au contrôle non destructif. L'utilisation du potentiel vecteur magnétique du second ordre a permis de simplifier la résolution du problème en coordonnées sphériques et de déterminer les grandeurs électromagnétiques dans les différentes régions étudiées. L'étude du cas d'une sphère homogène, puis d'une sphère multicouche, a montré l'intérêt de cette approche pour l'analyse de structures conductrices plus complexes.

CHAPITRE IV :

APPLICATION ET VALIDATION DES RÉSULTATS

IV.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes applications du modèle analytique développé au chapitre précédent ainsi que les validations associées. Afin de démontrer la pertinence et la fiabilité de la méthode basée sur le Potentiel Vecteur du Second Ordre (PVSO) pour le calcul des courants induits dans des systèmes tridimensionnels à symétrie sphérique, plusieurs cas d'étude ont été examinés et analysés.

Par ailleurs, dans le but de consolider les résultats obtenus par l'approche analytique, une démarche de validation numérique a été menée à l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics. Cet environnement de simulation multiphysique permet de modéliser avec une grande précision les phénomènes électromagnétiques en prenant en compte les caractéristiques géométriques et les propriétés physiques des matériaux étudiés. Les simulations ont été réalisées à l'aide du module AC/DC, particulièrement adapté à l'analyse des courants de Foucault et des champs électromagnétiques en régime harmonique.

La comparaison entre les résultats analytiques et numériques permet ainsi d'évaluer la validité du modèle proposé, de vérifier sa capacité à reproduire fidèlement le comportement physique du système étudié et de mettre en évidence les principaux paramètres influençant la distribution des courants induits.

IV.2 Processus de Modélisation et de Simulation sous COMSOL Multiphysics

IV.2.1 Définition de COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics est un logiciel de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis, utilisé pour modéliser et résoudre des problèmes physiques complexes. Il permet d'étudier différents phénomènes tels que l'électromagnétisme, le transfert thermique, la mécanique des structures ou encores la dynamique des fluides. Grâce à son approche multiphysique, il est possible de coupler plusieurs phénomènes physiques au sein d'un même modèle.

IV.2.2 Étapes de Modélisation et de Simulation

Au lancement de COMSOL Multiphysics, le navigateur de modèles permet de sélectionner la dimension de l'étude (2D, 2D axisymétrique ou 3D) ainsi que les interfaces physiques nécessaires à la modélisation. Une fois ces choix effectués, l'utilisateur accède à l'environnement principal du logiciel pour construire le modèle.

La procédure de simulation commence par la création de la géométrie du système, suivie de l'attribution des propriétés des matériaux aux différents domaines. Les conditions aux limites et les paramètres physiques sont ensuite définis afin de représenter correctement le phénomène étudié.

Après la définition de la physique du problème, un maillage adapté est généré sur la géométrie, avec la possibilité d'effectuer un raffinement local pour améliorer la précision des calculs. Le modèle est ensuite résolu à l'aide des solveurs numériques intégrés à COMSOL.

Enfin, les résultats sont visualisés et analysés grâce aux outils de post-traitement du logiciel. COMSOL offre également des fonctionnalités avancées permettant l'implémentation d'équations personnalisées et l'interfaçage avec MATLAB pour l'automatisation des calculs et le développement de scripts spécifiques.[23]

IV.2.3 Chronogramme des étapes de modélisation et de simulation sous COMSOL Multiphysics

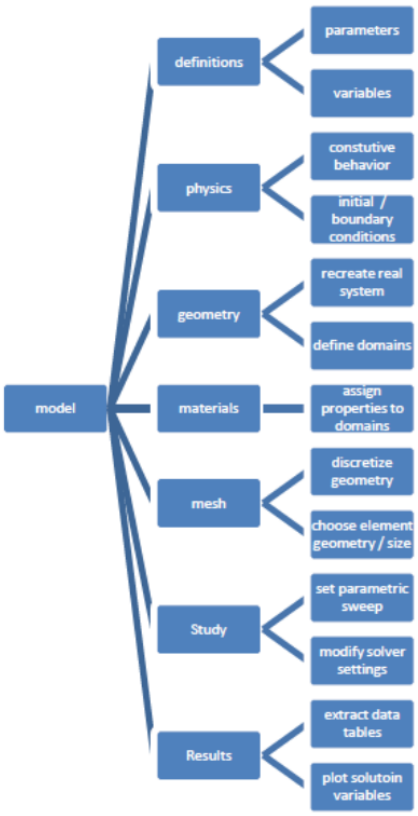


Fig. IV.1. Etapes de modélisation et simulation numérique dans Comsol [23]

IV.3 Cas d'une sphère monocouche

Le système de la figure (III-1) représente une sphère conductrice de rayon *b=0.020 m*, distante de r_0*=0.042m* de l'inducteur (une seule spire filiforme) qui est parcouru par une densité de courant excitateur J=0,35.10^3 A/m^2, dans cette première application, la conductivité de la sphère (charge) est constante, et vaut $\sigma = 3{,}54.10^{+7}$ S/m, sa perméabilité est de $\mu = 4\pi.10^{-7}\ H/m$, et la fréquence des courants excitateurs est de 50 Hz.

Les angles qui définissent la position de l'inducteur, c'est à dire θ_1, θ_2 et φ_1, φ_2 sont respectivement: φ_1=-45°; φ_2=+45°, θ_1=45°; θ_2=135°. Nous obtenons les résultats que nous montrons dans les figues qui suivent.

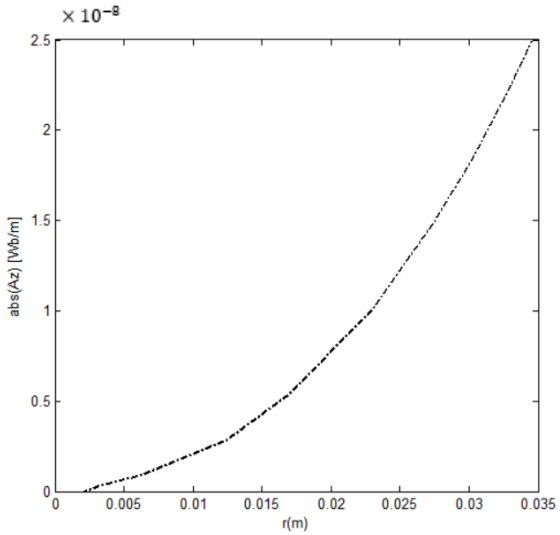


Fig. IV.2. Potentiel A_θ tracer suivant la direction radiale r avec φ=π/12 rad et θ =π/35 rad

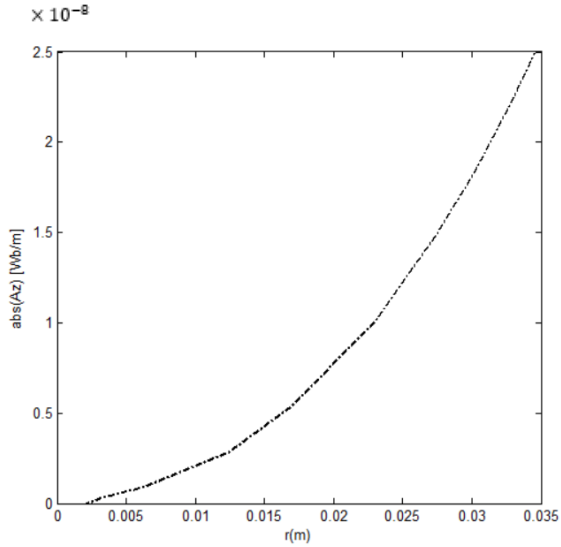


Fig. IV.3. Potentiel Aϕ tracer suivant la direction radiale r avec φ=π/12 rad et θ =π/35 rad

Les figures IV.1 et IV.2 représentent respectivement le potentiel A_θ et A_ϕ tracés suivant la direction radiale *r* avec $\theta = \frac{\pi}{35}$ rad; $\varphi = \frac{\pi}{12}$ rad. Ces derniers ont une forme croissante en fonction de la distance radiale *r* partant du centre de la sphère.

Les figures (IV.3) et (IV.4) représentent l'imaginaire de la densité des courants induits J_θ et J_ϕ suivant la direction radiale avec $\theta = \frac{\pi}{35}$ rad, $\varphi = \frac{\pi}{12}$ rad, .Dans la région conductrice (sphère), la densité de courant décroît de manière exponentielle partant de le surface vers le centre comme le prévoit les lois de l'électromagnétisme. Ce qui fait une première validation de notre modèle.

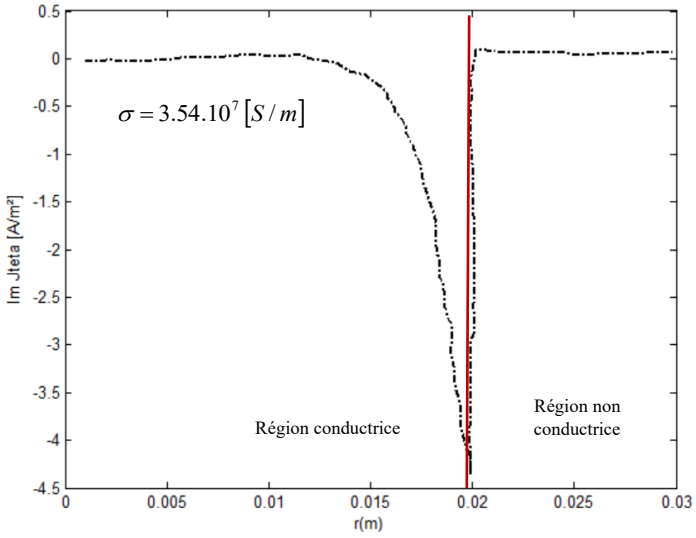


Fig. IV.4. Partie imaginaire de la densité de courant induit $J_\theta$suivant la direction radiale r

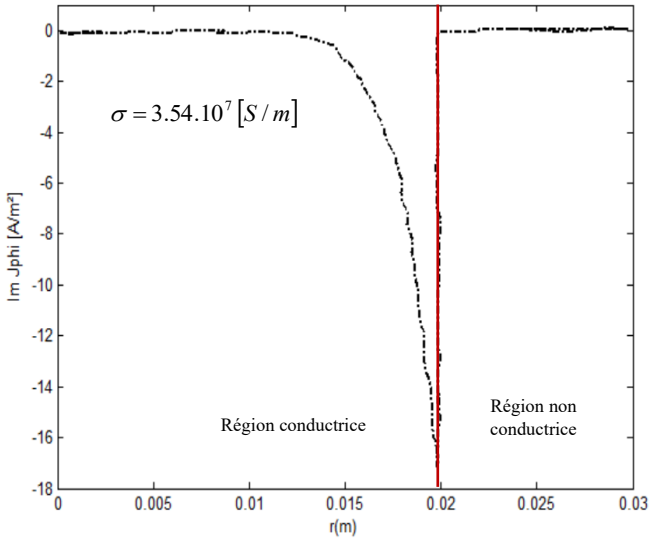


Fig. IV.5. Partie imaginaire de la densité de courant induitJϕsuivant la direction radiale r

Pour des fréquences différentes, la variation de la densité du courant induit selon le même chemin radial *r* avec: $\theta = \frac{\pi}{35}$ rad, $\varphi = \frac{\pi}{12}$ rad, est montrée sur les figures (IV.4), (IV.5).

Nous remarquons clairement que lorsque la fréquence du travail augmente, la densité de courant induit augmente elle aussi. En revanche, comme le montrent les graphes (IV.6) et (IV.7), la profondeur dans la sphère où circule le courant induit diminue (épaisseur de peau) au fur et à mesure que la fréquence augmente. Cela signifie que si un défaut existe dans la sphère et que l'on veut le détecter avec un éventuel changement des grandeurs électromagnétiques (l'induction magnétique ou densité de courant par exemple), il est judicieux de choisir une fréquence la plus élevée à condition que ce défaut se localise dans l'épaisseur de peau. Un défaut superficiel sera donc facilement détectable, et un défaut profond sera difficilement perceptible voire même impossible.

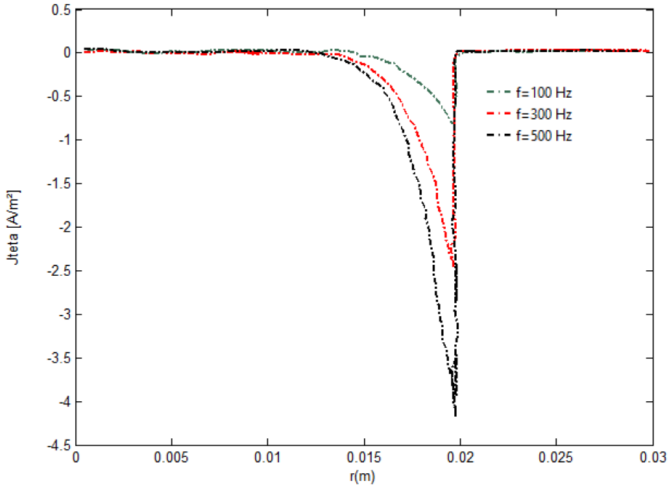


Fig.IV.6. *Variation de la partie imaginaire du courant induit $J_\theta$avec la fréquence pour un chemin radial r*

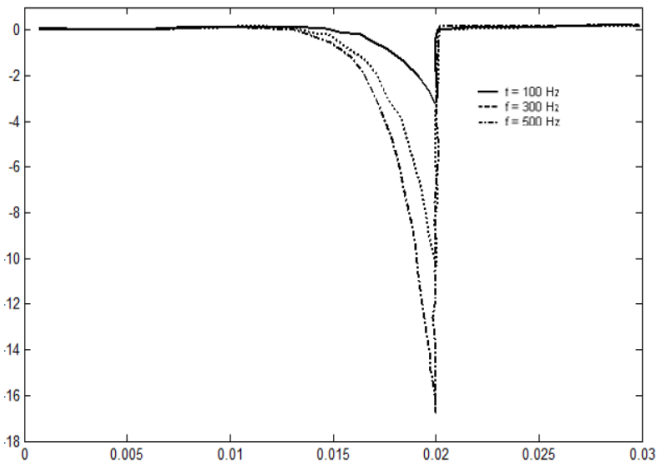


Fig.IV.7. *Variation de la partie imaginaire du courant induit$J_\phi$avec la fréquence pour un chemin radial r*

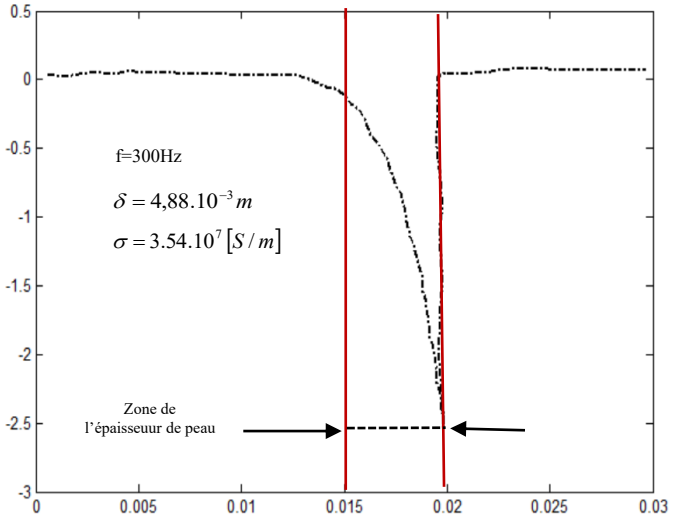


Fig.IV.8. Zone *d'épaisseur de peau pour f = 300 Hz*

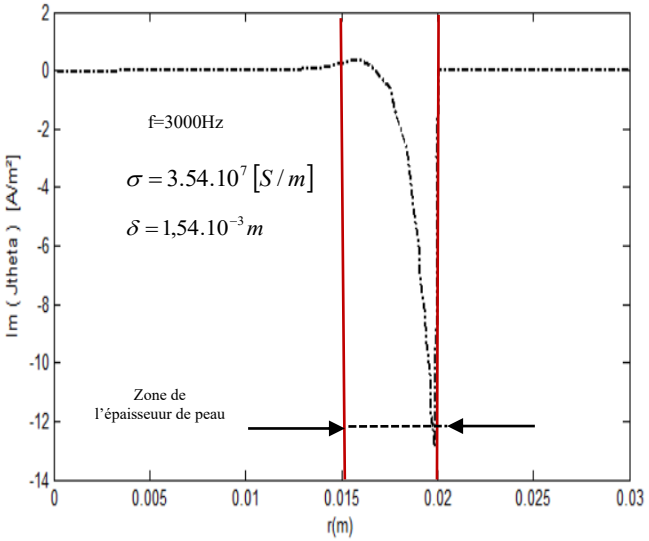


Fig.IV.9. Zone *d'épaisseur de peau pour f = 3000Hz*

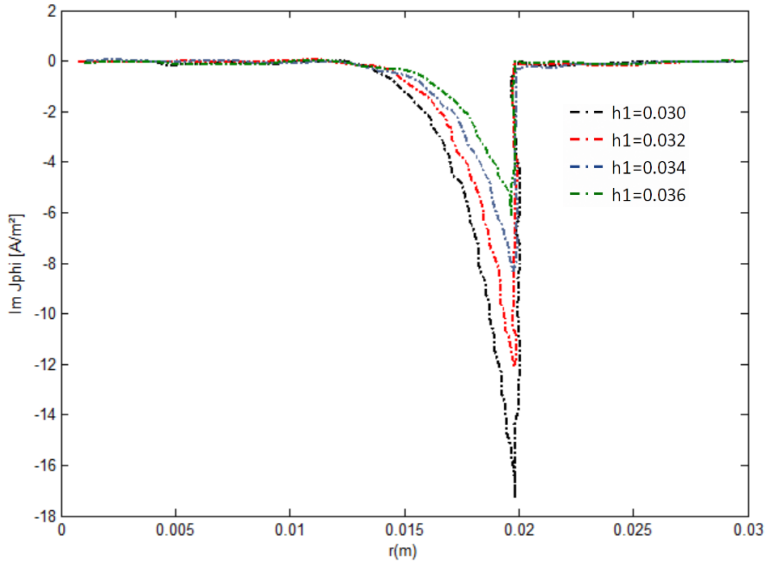


Fig. IV.10. Augmentations *des courants induits Jφ avec la distance* h_1

Sur La figure (IV.10) nous traçons la composante J_φ de la densité de courant sur un chemin radial pour différentes positions de l'inducteur par rapport à la sphère (distance entre la sphère et l'inducteur) pour une fréquence égale à 50Hz. Nous constatons que celle-ci diminue lorsque nous éloignons l'inducteur de la charge. D'un point de vu du contrôle non destructif par courant de Foucault, la distance entre la cible (objet à contrôler) et la sonde (inducteur et capteur) joue un rôle important pour deux raisons:

- Pour une meilleure détection, il faut choisir la plus petite distance possible entre la sonde et la cible.

- Il faut prendre précaution que cette distance soit rigoureusement constante lors des balayages ou pour des chaînes de contrôle embarquées (contrôle des rails par exemple) sinon l'information retournée par les capteurs sera erronée.

IV.4 Validation des résultats obtenus

Le système schématisé sur la figure (IV.11) a été traité en référence [2] avec un modèle basé sur la méthode du PVSO en introduisant des conditions de passage entre milieux formulés en fonction de l'induction magnétique et aussi avec un calcul numérique. Ce même système est repris et l'application du modèle développé nous a permis le calcul des grandeurs électromagnétique dans la charge et dont nous montrons quelques uns dans un but de comparaison.

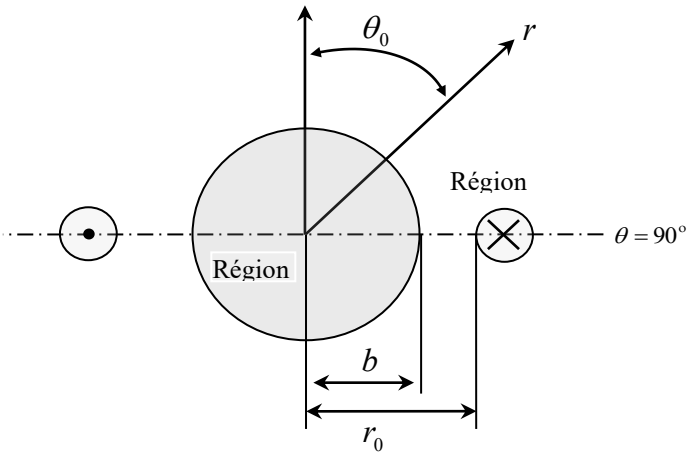


Fig.IV.11. Schéma représentant le model de référence

Les paramètres qui définissent le système sont:

- Le rayon de la sphère: b=0.1m;
- La fréquence utilisée: f=50Hz;
- la conductivité électrique: $\sigma=3{,}54.10^{+7}$ S/m;
- inducteur à une seule spire filiforme parcourue par une densité de courant harmonique ayant pour valeur ($J=0{,}5.10^7$ A/m^2);
- la distance entre le centre de la sphère et l'inducteur: r_0=0.012 m.

les tracés sont réalisés suivant un chemin à l'intérieur de la charge définis par: *r = 0.034 m et l'angle* $\varphi=\frac{\pi}{6}$ *rad*

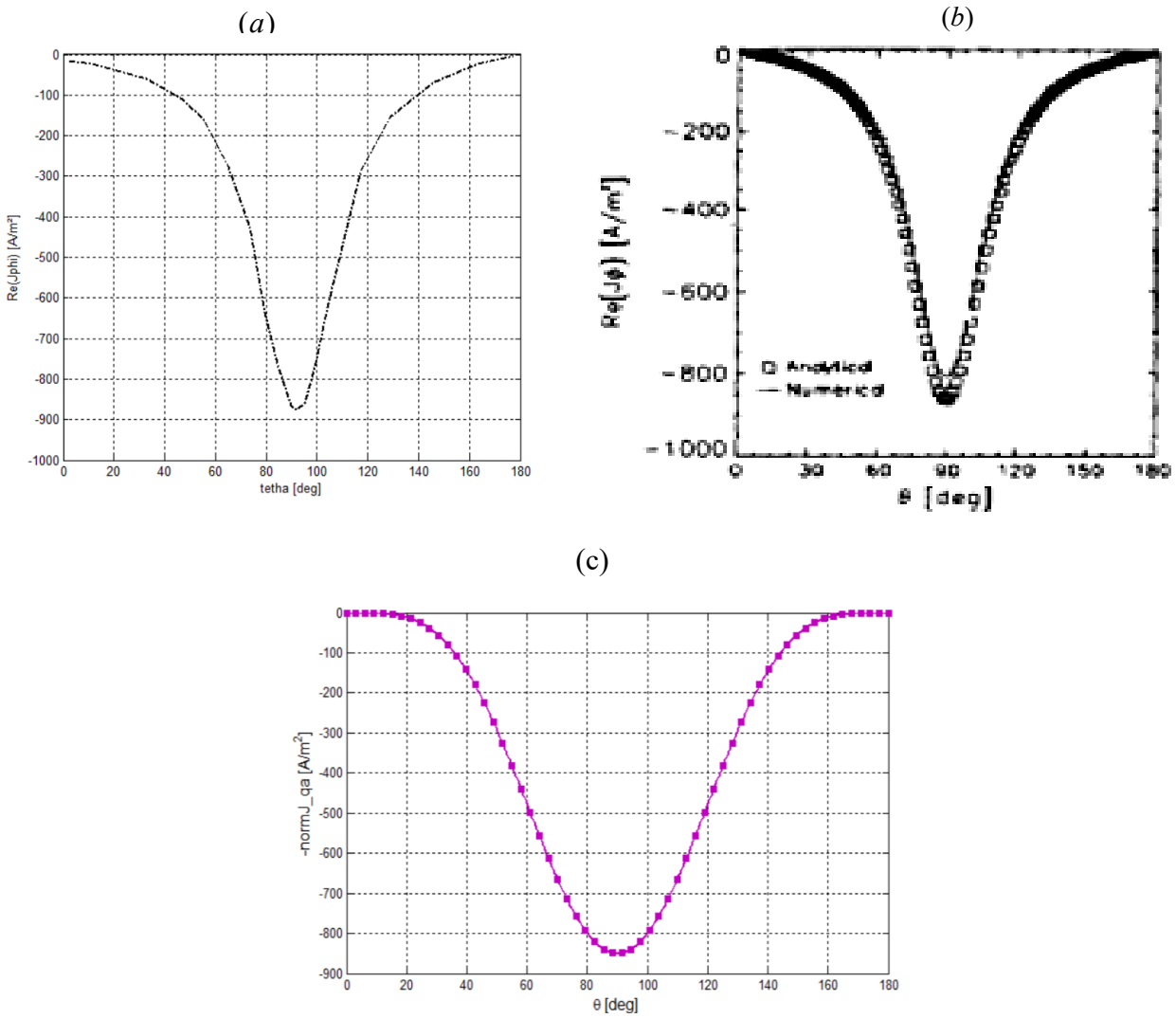
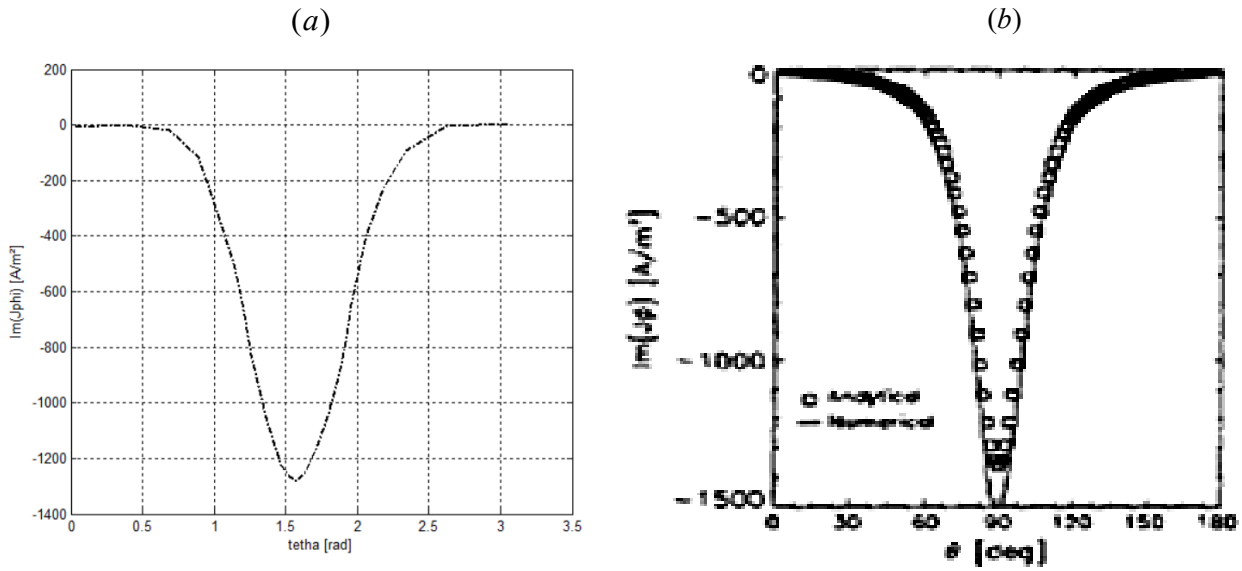


Fig. IV.12. Composante réelle de la densité de courant J_φ tracée suivant la direction transversale

Fig. IV.12.a. Modèle théorique et ***Fig. IV.12.b.*** Modèle de référence et ***Fig. IV.12.c.*** Modèle par COMSOL



(c)

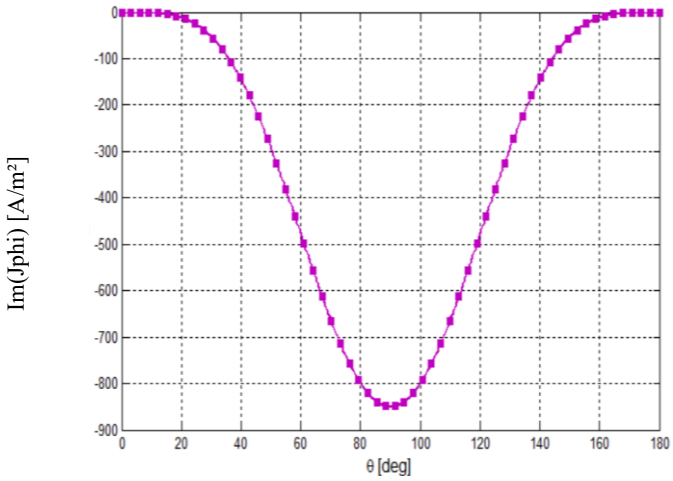


Fig. IV.13. Composante imaginaire de la densité de courant J_φ tracée suivant la direction transversale

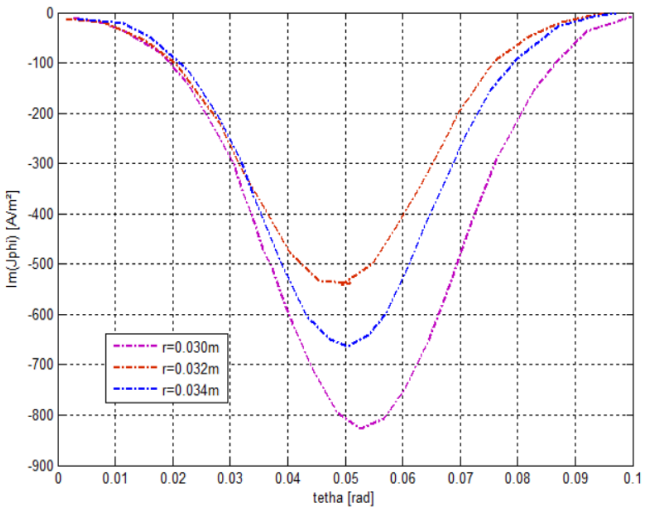
Fig. IV.13.a. Modèle théorique et ***Fig. IV.13.b.*** Modèle de référence et ***Fig. IV.13.c.*** Modèle par COMSOL

Les figures (IV.12.a) et (IV.13.a) représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la composante longitudinale de la densité des courants induits J_φ tracée suivant la direction transversale θ.

D'autre part Les figures (IV.12.b) et (IV.13.b) représentent le tracé des mêmes grandeurs sur un chemin identique obtenus en référence [2].

La comparaison entre nos résultats et ceux publiés en [2] sont en très bonne concordance d'un point de vue qualitatif (allures) et quantitatif (valeur des grandeurs), ce qui permet de conclure quant à la validité du modèle proposé.

Nous remarquons aussi que la plus grande valeur de la composante longitudinale de la densité de courant J_φ est observé pour un angle $\theta = 90°$, c'est à dire pour un point de la sphère juste en face de l'allée de l'inducteur. Mêmes remarques peuvent être faites pour la figure (IV.14) où la partie imaginaire de la composante longitudinale J_φ est tracée sur un chemin transversal à différentes profondeurs dans la charge. (a)



(b)

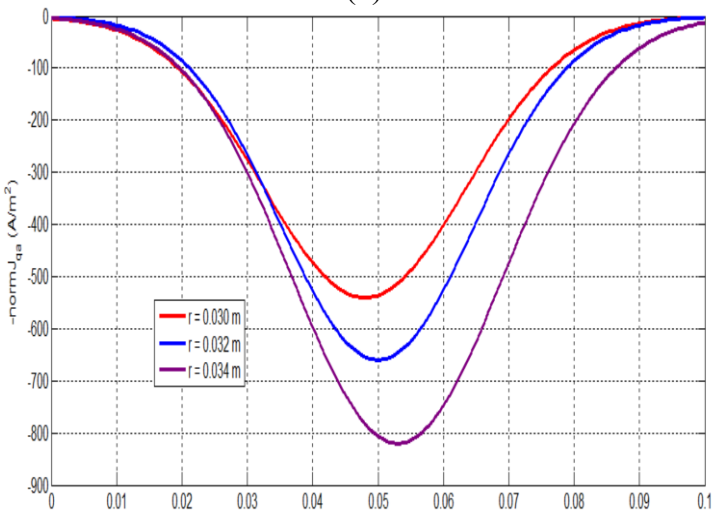


Fig. IV.14. Effet de la profondeur r par rapport à la sphère sur la densité

Fig. IV.1.a Modèle théorique et ***Fig. IV.14.b.*** Modèle par COMSOL

IV.5 Cas général: sphére multicouches

Dans cette étude, on va considérer que $N = 3$ (Nombre de couches). La sphère comporte trois couches ayant les conductivités $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de l'intérieur vers l'extérieur respectivement et de même perméabilité (celle de l'air). Figure (IV.15).

La fréquence de travail utilisée dans cette partie est 50 Hz.

L'inducteur est une spire filiforme et distante de la sphère de (h_2=0,010 m). Il est parcouru par un courant harmonique de densité ($J=0{,}35.10^3$ A/m^2)

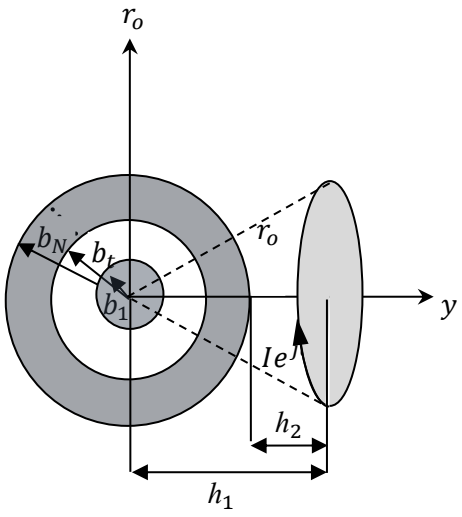


Fig. IV.15 Schémas du model d'étude pour N couches

Un deuxième code de calcul a été réalisé pour la simulation des systèmes à symétrie sphérique ayant plusieurs couches de conductivités différentes comme nous l'avons montré au chapitre précédent. Faute de résultats avec lesquels une confrontation peut être faite, nous proposons en premier lieu deux applications pour valider notre modèle développé pour le calcul des courants induits dans une sphère à trois couches. La première consiste à prendre des conductivités identiques pour les trois couches $\left(\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=3{,}54\cdot10^{+7}\ S/m\right)$. Ce qui revient à dire que la sphère à trois couches est équivalente à une sphère de mêmes dimensions géométriques à une seule couche. Nous appliquons alors le modèle développé pour une charge à une seule couche, ensuite nous appliquons le modèle développé pour une charge à trois couches. (les codes de calcul n'étant pas les même, le premier code à été validé), en gardant les mêmes paramètres de travail dans les deux cas. Les résultats sont montrés sur les figures (IV.16) et (IV.17). On remarque que les résultats sont identiques dans les deux cas, ce qui fait une première validation du modèle à *N* couches.

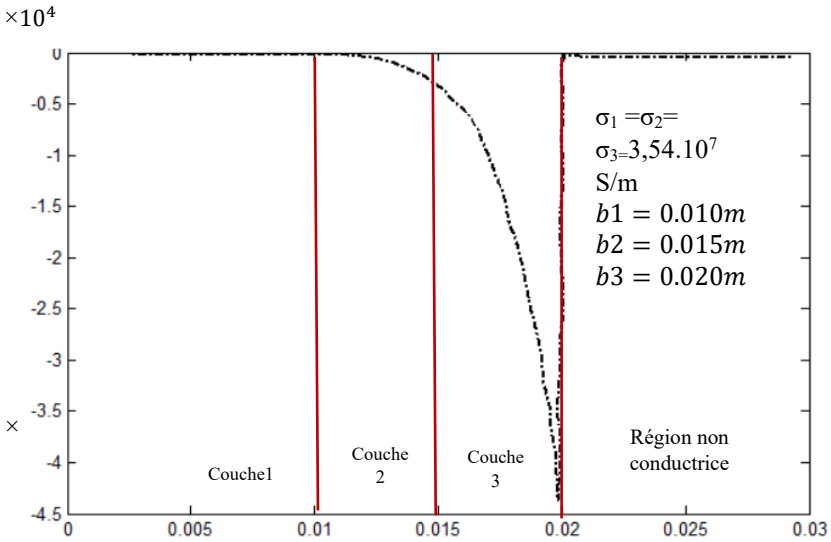


Fig. IV.16. Partie imaginaire de la densité de courants induits dans la sphère comportant trois couches de mêmes conductivités

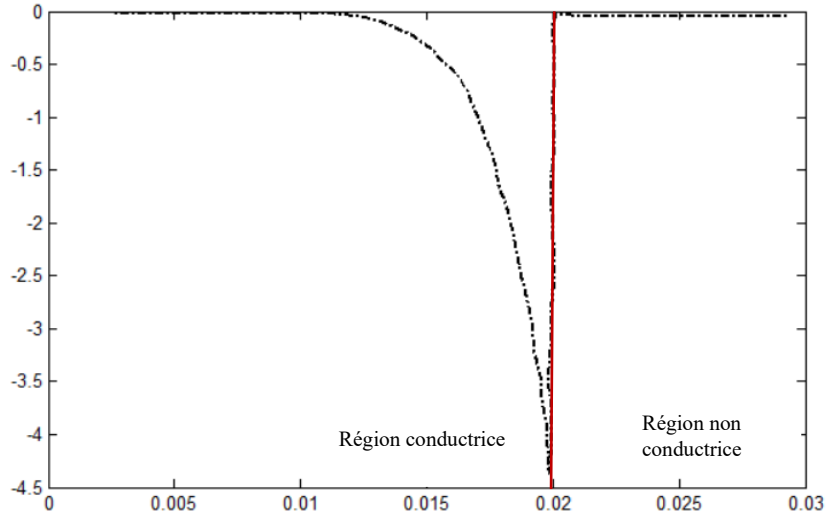


Fig. IV.17. Partie imaginaire de la densité de courants induits dans la sphère comportant une seule couche de conductivité σ=3,54.10^{+7} S /m

La deuxième application consiste à prendre des conductivités identiques pour la 1ere et la 2eme couche ($\sigma_1 = \sigma_2 = 3{,}54.10^{+7}\ S/m$) et considérer la 3eme couche pratiquement isolante ($\sigma_3 = 1{,}1.10^{-14}$ *S/m*). Ce système est équivalent à un autre avec une sphère a une seule couche de conductivité $\sigma = 3{,}54.10^{+7}\ S/m$ mais de rayon égal à celui de la 2eme couche de la charge du système précédent. Sur les figures IV.18 et IV.19 nous traçons la même grandeur (l'imaginaire de la composante transversale de la densité de courant) en utilisant toujours les deux modèles (sphère à une couche et sphère à plusieurs couches). Nous remarquons clairement que les résultats sont identiques. Ce qui fait, à notre avis, une deuxième validation du modèle à *N* couches proposé.

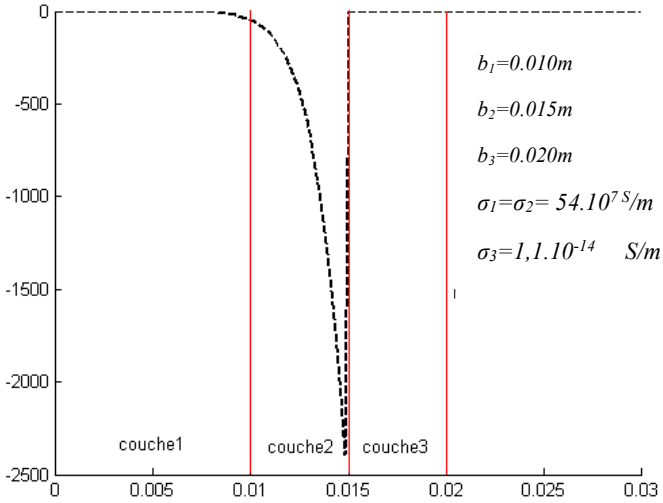


Fig. IV.18. Partie imaginaire de la densité de courants Induit d'une sphère comportant trois couches

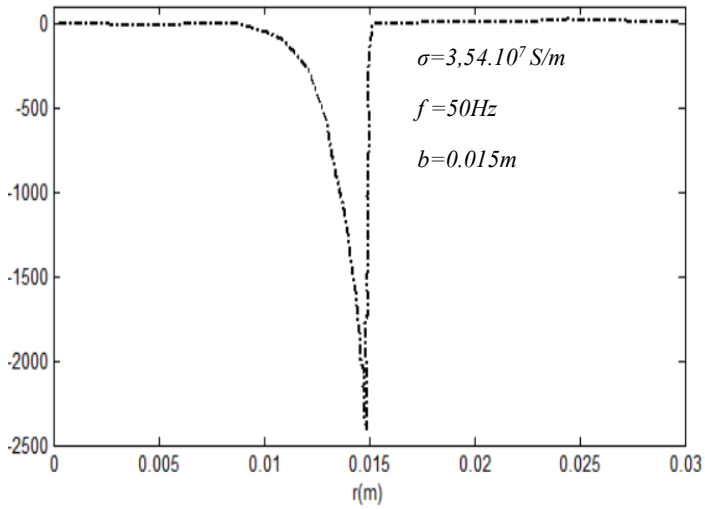


Fig. IV.19. Partie imaginaire de la densité de courants Induit dans la sphère comportant une seule couche

IV.6.1 Effet du rayon de la deuxième couche

Les figures (IV.20), (IV.21) et (IV.22) illustrent l'effet de l'épaisseur de la 2eme couche sur les densités de courants induits dans toutes les couches de la sphère conductrice (les trois couches ont: $\sigma 1 = 3{,}54.10^7$ S/m, $\sigma 2 = 9{,}52.10^7$ S/m, et $\sigma_3 = 8{,}70.10^7$ S/m).

Nous traçons la partie imaginaire de la composante transversale pour différents rayons de la 2eme couche tout en gardant les autres rayons des couches constants. Cela veut dire que lorsque b_2 augmente (rayon de la 2eme couche), l'épaisseur de la couche superficielle diminue.

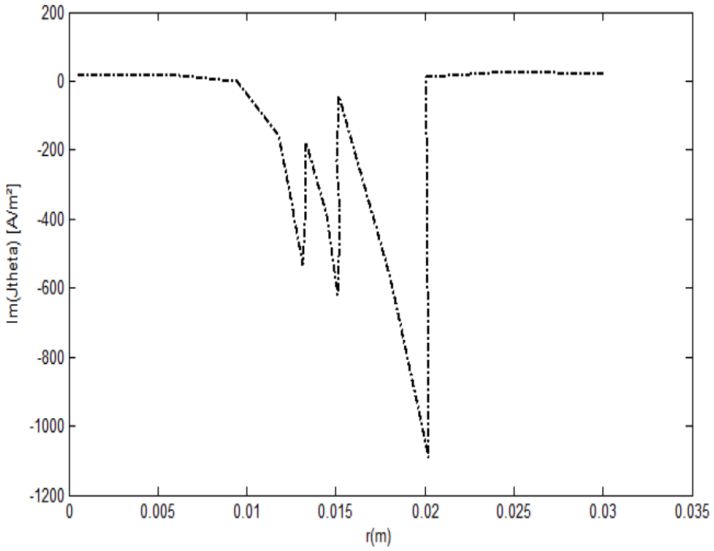


Fig. IV.20. *Partie imaginaire de la densité de courants induits dans la sphère pour b1=0.013, b2=0.015, et b3=0.020 m*

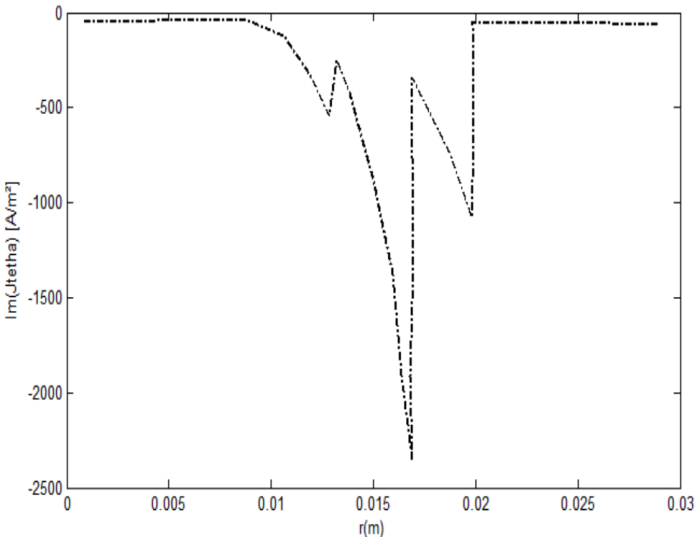


Fig. IV .21. *Partie imaginaire de la densité de courants induits dans la sphèr pour b1=0.013, b2=0.017, et b3=0.020 m*

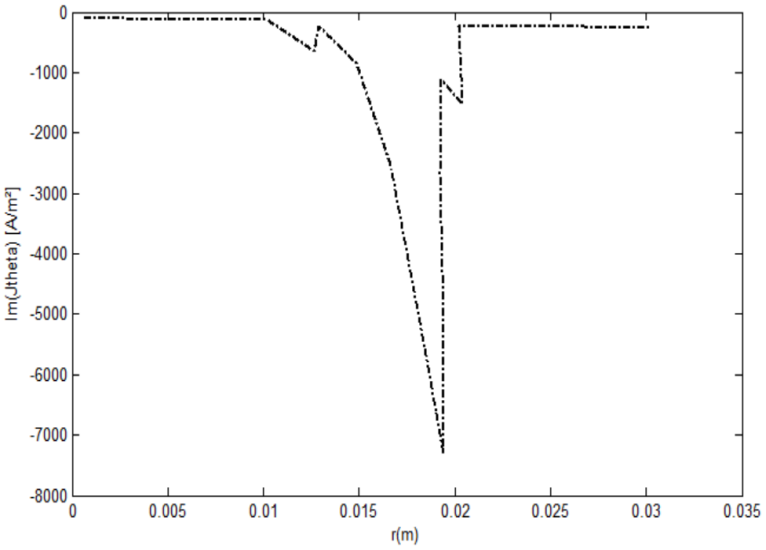


Fig.IV.22. Partie imaginaire de la densité de courant induit pour les couches de la sphère pour f = 1000 Hz

En premier lieu, nous remarquons une discontinuité dans les densités de courant d'une couche à une autre, ce qui est tout à fait en accord avec la théorie du fait que ces dernières présentent des sauts de conductivité.

Nous constatons que l'épaisseur de la 2eme couche a une influence importante sur la répartition des densités de courant dans toute la sphère. En effet, lorsque son rayon donc son épaisseur augmente, les densités de courant augmentent dans cette couche et diminue dans les deux autres couches.

Cela s'explique par le fait que, d'une part, l'épaisseur de la couche superficielle diminue, ce qui permet au champ électromagnétique de pénétrer dans les couches les plus internes favorisant l'augmentation du courant induit dans la 2eme couche, d'autre part, le fait que l'épaisseur de la 2eme couche augmente, elle joue un rôle d'écran, au champ, c'est pour cela que le courant induit dans la couche la plus interne diminue malgré que sa conductivité électrique est la plus grande.

IV.6.2 Effet de la fréquence du travail

La variation de la densité de courant induit dans les couches de la sphère pour différentes fréquences sur un chemin radial est montrée sur les figures (IV.23), (IV.24) et (IV.25). De manière générale, nous remarquons que le courant induit augmente avec l'augmentation de la fréquence. Et aussi l'apparition de l'effet d'écran qui se traduit par la diminution des courants induits dans la couche la plus interne.

En effet, lorsque la fréquence augmente, l'épaisseur de peau dans chaque couche diminue et le champ électromagnétique ne pénètre pas et les courants induits dans la couche la plus interne tendent vers des valeurs nulles.

Cela montre qu'un défaut profond est très difficile à détecter d'une part, et d'autre part pour scanner toutes les régions de la pièce sous contrôle nous devons utiliser plusieurs fréquences (donc plusieurs essais). Pour remédier à cette lacune, une autres méthode de contrôle par courants de Foucault existe, c'est la méthode de contrôle par excitation pulsée (l'excitation est un courant impulsionnel) qui nécessite un traitement dans le domaine temporel.

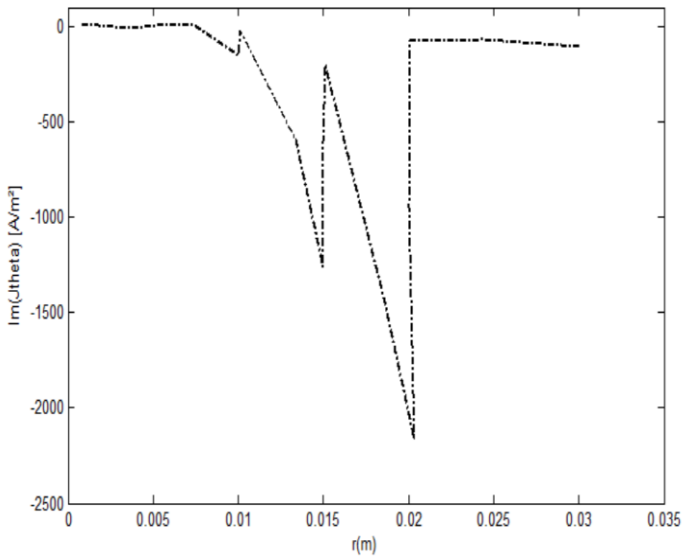


Fig.IV.23. *Partie imaginaire de la densité de courant induit pour les couches de la sphère pour f = 1000 Hz*

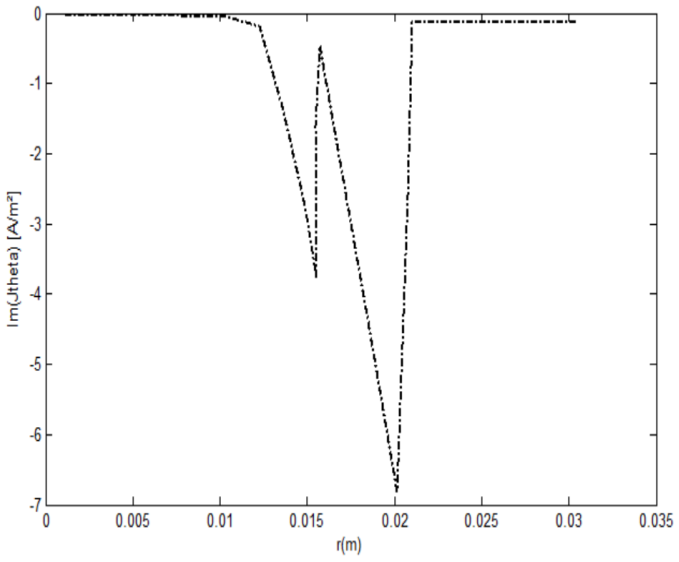


Fig.IV.24. *Partie imaginaire de la densité de courant induit pour les couches de la sphère pour f = 3000 Hz*

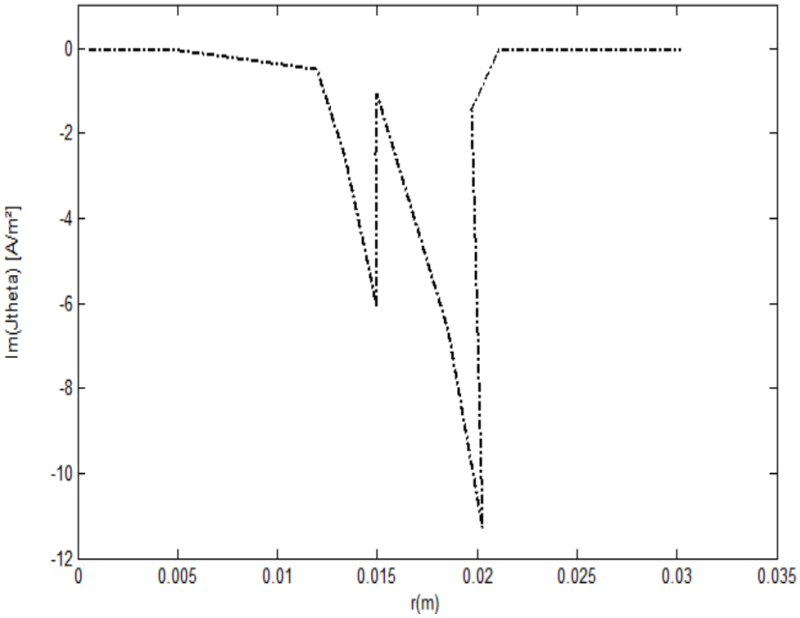


Fig.IV.25. *Densité de courant induit pour les couches de la sphère pour f = 5000 Hz*

IV.7 Conclusion

Les deux modèles analytiques basés sur la méthode du Potentiel Vecteur du Second Ordre (PVSO) ont été développés et appliqués à des systèmes tridimensionnels en coordonnées sphériques. Cette approche a permis de déterminer les grandeurs électromagnétiques ainsi que la distribution des courants induits dans des sphères conductrices monocouches et multicouches excitées par une boucle de courant.

Dans le cas de la sphère monocouche, les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec ceux publiés dans la littérature, montrant une excellente concordance avec les travaux de référence. Pour la configuration multicouche, en l'absence de résultats expérimentaux ou analytiques disponibles dans la littérature, plusieurs procédures de validation ont été mises en œuvre. Les résultats obtenus se sont révélés parfaitement cohérents avec les principes théoriques de l'électromagnétisme, confirmant ainsi la fiabilité du modèle proposé.

Par ailleurs, une modélisation numérique a été réalisée sous **COMSOL Multiphysics** afin de reproduire le comportement électromagnétique des structures étudiées. La comparaison entre les résultats analytiques et ceux issus des simulations numériques a montré une très bonne concordance, tant sur le plan qualitatif que quantitatif. Cette validation croisée confirme la précision du modèle développé et son aptitude à prédire correctement la distribution des courants induits dans les structures conductrices.

Les résultats obtenus démontrent ainsi l'intérêt et l'efficacité de l'approche proposée pour les applications de contrôle non destructif par courants de Foucault. Comme perspectives, ce travail peut être étendu à l'étude de défauts réels dans les matériaux, à une validation expérimentale en laboratoire ainsi qu'à l'application de la méthode à des géométries industrielles plus complexes afin d'améliorer les performances et la fiabilité des systèmes de contrôle non destructif

Conclusion générale

Le contrôle non destructif par courants de Foucault constitue une méthode d'inspection largement utilisée pour l'évaluation des matériaux conducteurs. Cette technique repose sur l'interaction entre un champ électromagnétique variable, généré par une bobine excitatrice parcourue par un courant alternatif, et les courants induits créés à l'intérieur de la pièce inspectée. Les perturbations observées dans la distribution de ces courants permettent de mettre en évidence la présence d'éventuelles anomalies ou défauts dans le matériau.

Dans ce contexte, la détermination précise des grandeurs électromagnétiques et des courants induits représente une étape essentielle pour l'amélioration des performances des systèmes de contrôle non destructif. Bien que de nombreuses études aient été réalisées dans ce domaine, la plupart des approches reposent sur des formulations numériques tridimensionnelles utilisant la méthode des éléments finis. Ces méthodes offrent une grande précision mais nécessitent souvent des ressources informatiques importantes ainsi qu'un temps de calcul élevé.

Afin de surmonter certaines de ces contraintes, ce travail a consisté à développer un modèle analytique tridimensionnel basé sur le potentiel vecteur magnétique de second ordre exprimé en coordonnées sphériques. Ce modèle a été conçu pour l'étude des phénomènes électromagnétiques associés aux courants induits dans des structures sphériques utilisées comme configurations de référence en contrôle non destructif.

Dans une première étape, le modèle a été appliqué à une sphère homogène caractérisée par une conductivité électrique uniforme. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux disponibles dans la littérature scientifique et ont montré une excellente concordance, confirmant ainsi la validité de l'approche proposée.

Dans une seconde étape, le modèle a été étendu au cas plus général d'une sphère hétérogène constituée de plusieurs couches présentant des conductivités électriques différentes. Cette extension a nécessité l'introduction de conditions de continuité aux interfaces entre les différentes couches afin d'assurer une description physique correcte du phénomène électromagnétique. Les résultats obtenus ont mis en évidence la capacité de cette approche à traiter efficacement les milieux multicouches tout en conservant un niveau élevé de précision.

Parallèlement à l'étude analytique, des simulations numériques ont été réalisées à l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics. Cet outil, fondé sur la méthode des éléments finis, a permis de modéliser le comportement électromagnétique du système étudié et d'analyser la répartition spatiale des champs magnétiques, du potentiel vecteur magnétique et des densités de courant induit à l'intérieur des sphères conductrices. La comparaison entre les résultats analytiques et les résultats issus des simulations COMSOL a montré une très bonne cohérence, ce qui constitue une validation supplémentaire des modèles développés.

D'une manière générale, Les résultats obtenus au cours de ce travail confirment la pertinence de l'approche proposée pour l'analyse tridimensionnelle des phénomènes électromagnétiques liés au contrôle non destructif par courants de Foucault. Les modèles développés offrent une alternative intéressante aux approches numériques classiques en réduisant la complexité des calculs tout en maintenant un niveau élevé de précision.

Malgré les avancées réalisées, plusieurs perspectives de recherche demeurent ouvertes. Parmi les développements envisageables figurent l'introduction de défauts de différentes formes et dimensions à l'intérieur des structures étudiées, l'analyse de l'influence de leur position et de leur profondeur sur la distribution des courants induits, ainsi que l'étude de configurations d'excitation plus complexes. Il serait également intéressant de développer un modèle fonctionnant en excitation par tension et d'exploiter davantage les capacités de simulation offertes par COMSOL Multiphysics pour l'analyse de géométries industrielles réelles.

Enfin, l'application des méthodes de résolution du problème électromagnétique inverse à la détection, à la localisation et à la caractérisation automatique des défauts constitue une perspective particulièrement prometteuse. Une telle approche pourrait améliorer significativement les performances des systèmes de contrôle non destructif et favoriser le développement de solutions d'inspection intelligentes, automatisées et robustes pour les applications industrielles.

Annexe

1. Développement de l'équation de Laplace coordonnées sphérique :

Le système de coordonnées (r,θ,φ) est défini dans la figure (A-1). Le Laplacien dans ce système est exprimé comme suit :

$$\boldsymbol{\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}}.$$

Lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des surfaces sphériques ou des cônes, c'est le système de coordonnées sphériques qu'est le plus adéquate pour exprimer ces conditions en vue d'obtenir une solution [15].

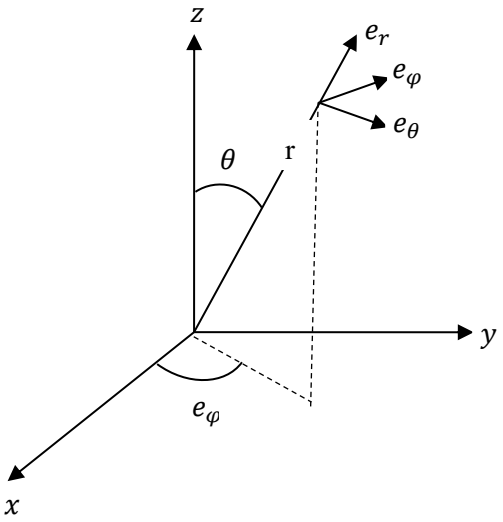


Fig. A.1. système de coordonnées sphériques

$$\partial^2 V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial V(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V(r,\theta,\phi)}{\partial\phi^2}$$
$$= 0[V/m^2] \qquad (A-2)$$

On suppose qu 'ici aussi le potentiel est le produit de trois fonctions :

$$V(r,\theta,\phi) = R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Phi(\phi)[V/m]$$

On introduit ce développement dans (A-2) et on multiplie $r^2\sin^2\theta/V(r,\theta,\varphi)$

$$\frac{\nabla^2 V(r,\theta,\phi)}{V(r,\theta,\phi)}r^2\sin^2\theta = \frac{\sin\theta}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] + \frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (A-3)$$

Les deux premiers termes dépendent de r et de θ, tan disque le troisième n'est fonction que de φ. Pour qu'on ait une solution non triviale, on peut séparer $(A-3)$ en deux termes, qui doivent tous deux être constant, et qu'on pose égaux à $\pm n^2$ [15].

La dépendance azimutale est ainsi donnée par :

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -n^2\varphi(\phi)$$

Pour séparer les fonctions de r et de θ, on divise par $\sin^2\theta$ les deux premiers termes de $(A-3)$, ce qui donne :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) - \frac{n^2}{\sin^2\theta} = 0$$

Le premier terme n'est pas fonction que de r, les deux termes suivants ne sont fonction que de θ. On doit donc de poser tous égaux à des constantes.

L'équation différentielle en θ est satisfaite par le polynôme de Legendre de première espèce $p_n^m(\cos\theta)$, pour autant que la constante de séparation ait la forme $-m(m+1)$. Les polynômes de Legendre de seconde espèce satisfont également l'équation, mais comme il devient singulier lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ils ne sont pas admissibles comme solutions. Les polynômes de Legendre de première espèce sont définis par la relation :

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{n/2}}{2^m m!}\frac{d^{n+m}(x^2-1)}{dx^{n+m}} avec x = cos\,\theta$$

Les premiers polynômes de la série sont présentés dans le tableau ci-dessous et leur allure est représentée graphiquement dans la figure A.2

Polynôme de Legendre	
$P_0^0(cos\,\theta)$	$P_1^1(cos\,\theta) = sin\,\theta$
$P_1^0(cos\,\theta) = x$	$P_1^0(cos\,\theta) = \frac{3}{2}sin\,2\,\theta$
$P_2^0(cos\,\theta) = \frac{3}{4}cos\,2\,\theta$	
$P_3^0(cos\,\theta) = \frac{5}{8}cos\,3\,\theta + \frac{3}{8}cos\,\theta$	$P_m^n(cos\,\theta) = 0 sim < n$

Il reste à résoudre l'équation différentielle en r

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) = m(m+1)R(r)$$

Dont les solutions ont des dépendances radiales simples, comportant seulement des puissances de la coordonnées radiales :

$$R(r) = A_1 r^m + A_2 r^{-(m+1)}$$

Les valeurs de m et n, ainsi que les constants d'intégration, sont déterminées par les conditions qu'il faut satisfaire sur les bords du problème à résoudre.

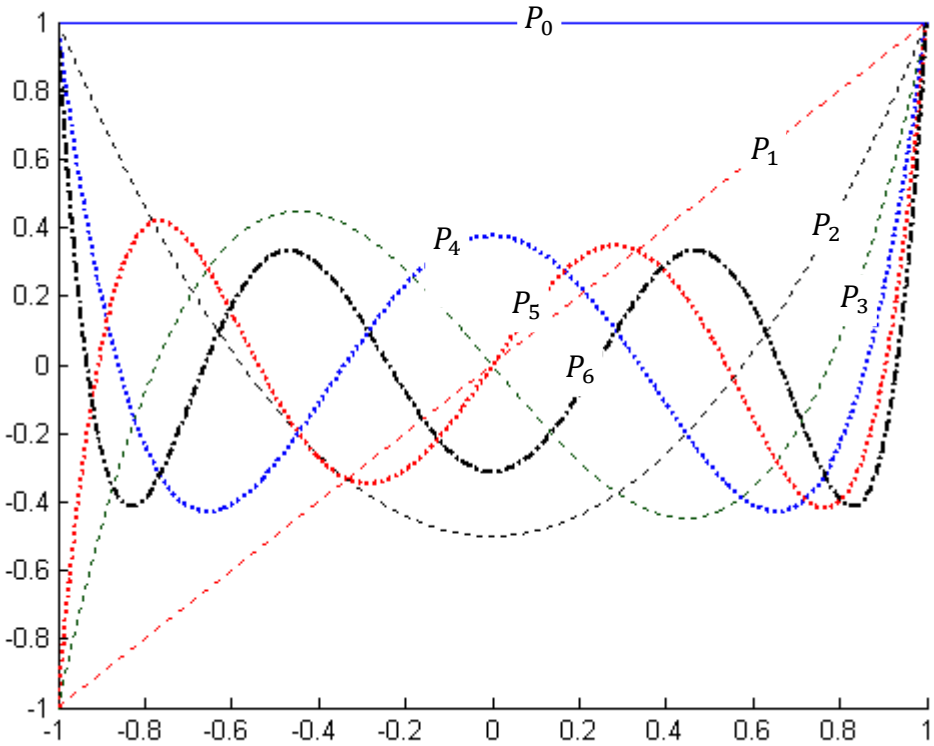


Fig. A.2. Le premier polynôme de Legendre

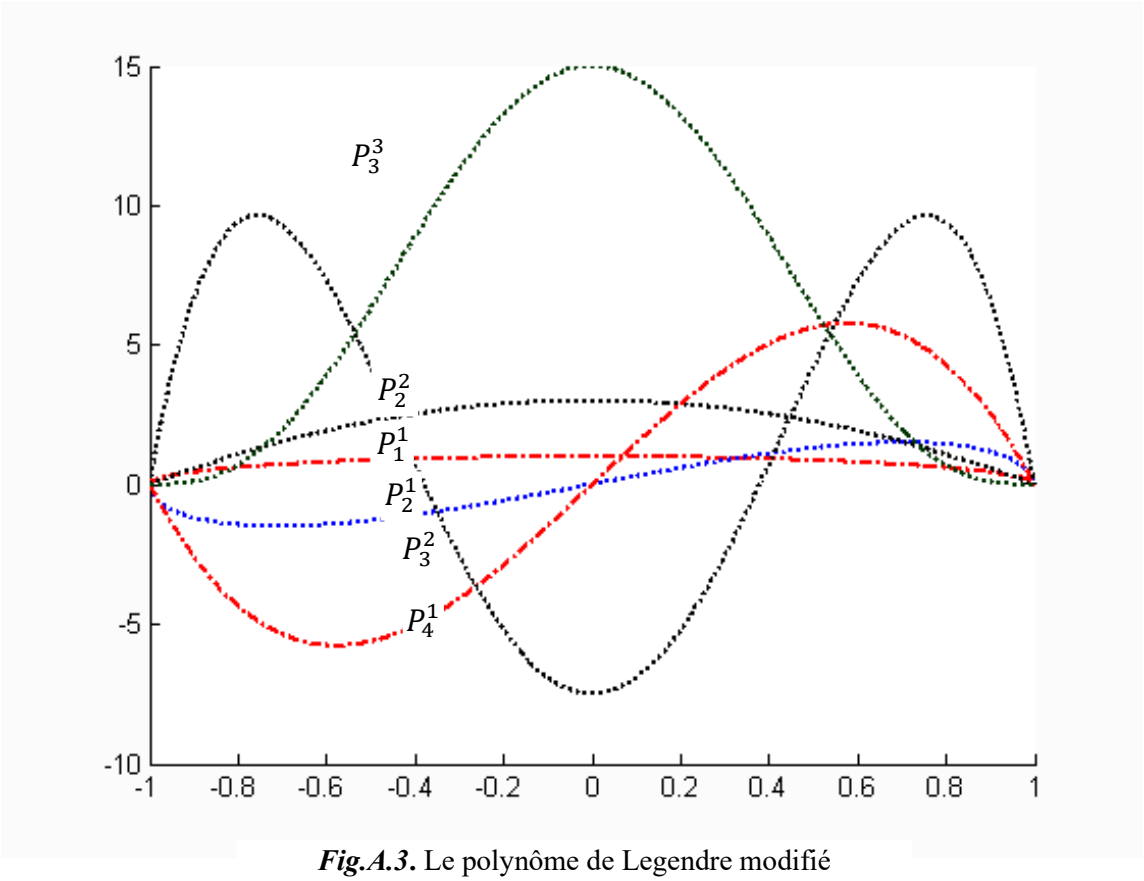


Fig.A.3. Le polynôme de Legendre modifié

2. Fonction de BESSEL :

Dans la résolution de beaucoup de problème à système circulaire, on obtient des fonctions de Bessel, dont les principales propriétés et relations sont regroupées dans cette section. Ces fonctions sont tabulées [15]. Des algorithmes pour leur calcul sont inclus dans beaucoup de logiciels standard.

- Equation différentielle :

Les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce d'ordre m sont des solutions particulières de l'équation différentielle.

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+x\frac{df(x)}{dx}+(x^2-m^2)f(x)=0$$

dont la solution générale a la forme

$$f(x)=Z_m(x)=AJ_m(x)+BN_m(x)$$

Où A et B sont des constantes arbitraires et où $J_m(x)$ et $N_m(x)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de la première et de secondes espèces d'ordre m. le comportement des fonctions de Bessel de première espèce est représenté dans la figure B-4 pour les premières valeurs de m. Les abscisses qui

correspondent aux zéros et aux extrema des fonctions de première espèce $J_m(x)$ sont répertoriées dans les tableaux 1 et 2.

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ sont nulles en $x=0$ lorsque $m \neq 0$, tandis que celles de seconde espèce $N_m(x)$ ont toutes une singularité en $x=0$.

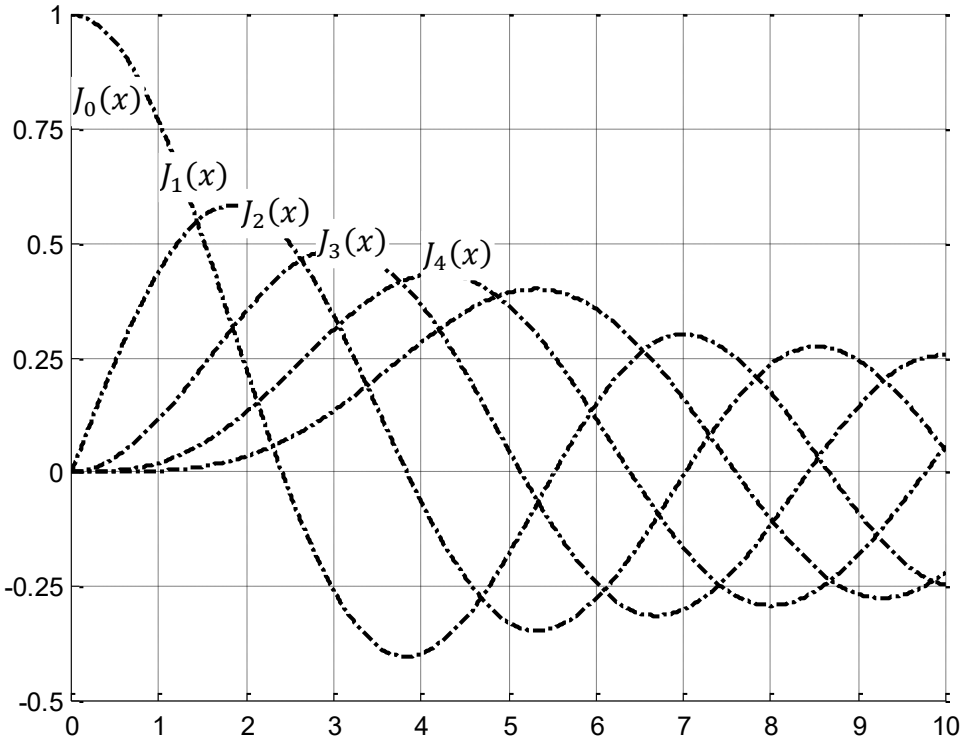


Fig. B.4. Fonction de Bessel de première espèce pour m=0, 1,3 et 4

m	n=1	2	3	4	5
0	2.40483	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092
1	3.83171	7.01559	10.17347	14.79595	
2	5.13562	8.41724	11.61984		
3	6.38016	9.76102	13.01520		
4	7.58834	11.06471	14.37254		

Tableau .1. Zéros de 5 fonctions de Bessel de première espèce : $J_m(x) = 0$pour 0<x<15

m	n=1	2	3	4	5
0	3.83171	7.01559	10.17347	13.32369	
1	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636
2	3.0542	6.7061	9.9695	13.1704	
3	4.2012	8.0152	11.3459	14.5859	
4	5.3175	9.2824	12.6819		

Tableau. 2. Extrema des fonctions de Bessel de première espèce : $dJ_m(x)/dx = 0$

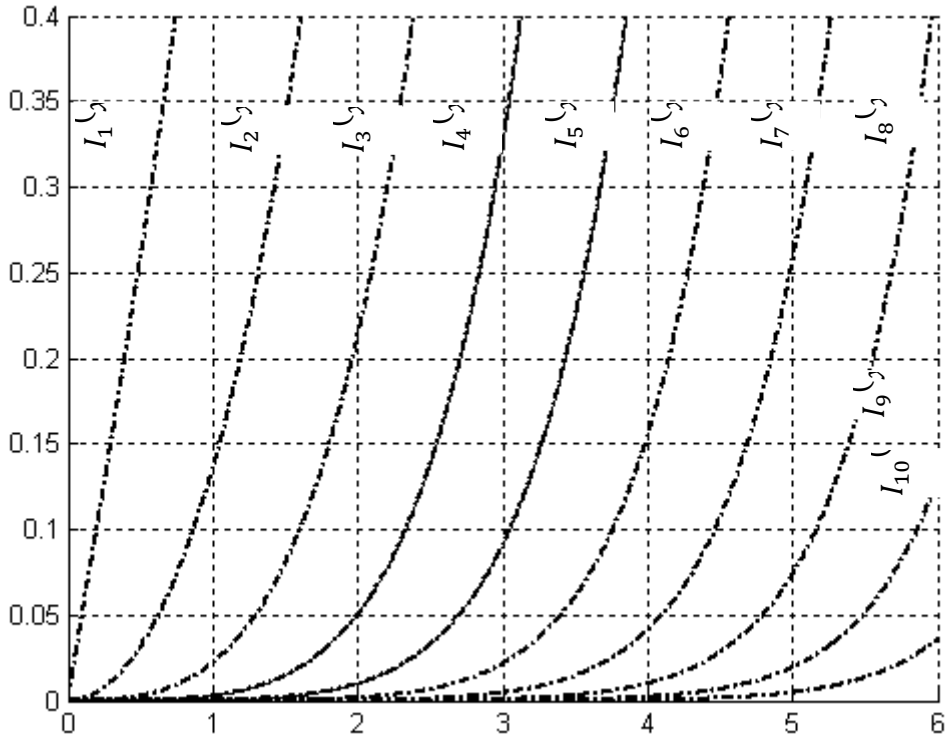


Fig.B.3. Fonction de Bessel modifiée de première espèce pour m=0…10

Bibliographie

[1] : H. Dos Reis, *Inspection et Contrôle Non Destructifs : Principes et Applications*, Paris, France : Hermès Science Publications, 2006.

[2] : C. Hellier, *Handbook of Nondestructive Evaluation*, 2nd ed., New York, NY, USA : McGraw-Hill Education, 2013.

[3]: D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2010.

[4]: P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, 1996.

[5]: A. J. Bahr and R. C. McMaster, *Nondestructive Testing Handbook, Volume 5: Electromagnetic Testing*, 3rd ed., Columbus, OH, USA: American Society for Nondestructive Testing (ASNT), 2004.

[6]: Techniques de l'Ingénieur, « Contrôle non destructif – Principes de détection des défauts », Base documentaire Mesures Analyses, article R1400, Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris, France.

[7] : M. CHEBOUT, ' « Contribution pour l'étude analytique tridimensionnelle des courants induits pour des configurations sphériques » thèse d'ingénieur en electrotechnique. Université de Jijel, Jijel 2011.

[8] : American Society for Nondestructive Testing (ASNT), Nondestructive Testing Handbook, ASNT, Columbus, Ohio, USA.

[9] : Techniques de l'Ingénieur. (n.d.). Contrôle non destructif – Principes de détection des défauts (Base documentaire Mesures Analyses, article R1400). Techniques de l'Ingénieur.

[10] : J.A. Tegopaulas, N.V. Kantartzis, T.D Tsiboukis, et E.E Kriezis,
« Analytical and numerical solution of the eddy current problem in spherical coordinates based the second order vector potential formulation » IEEE transaction on magnetics, vol.33, P.P.2461-2472.Juillet 1997.

[11] : M. CHEBOUT, ' « Approche Numérique Pour la Recherche des Défauts par Une Technique de Contrôle Non Destructif » thèse d'ingénieur en electrotechnique. Université de Jijel, Jijel 2010.

[12] : K.R. Shao, K.D. Zhou, et J.D. Lavers « boundary element analysis method for 3-D eddy current problems using the second order vector potential », IEEE transaction and magnetic, vol 27, N°5, PP.4089-4092, sepetmbre1991

[13] : C. Hellier, *Handbook of Nondestructive Evaluation*, 2nd ed., McGraw-Hill Education, 2013.

[14] : R. Halmshaw, *Non-Destructive Testing*, 2nd ed., Edward Arnold, 1991.

[15] : ASM International, *Nondestructive Evaluation and Quality Control*, ASM Handbook, Vol. 17, ASM International, 1991.

[16] : J. Krautkrämer and H. Krautkrämer, Ultrasonic Testing of Materials, 5th ed. Berlin, Germany : Springer-Verlag, 1990.

[17] : [Université Laval, 2017-01 GEL-1001 CND – Contrôle Non Destructif, Département de génie électrique et génie informatique, Québec, Canada. [Online]. Available : https://wcours.gel.ulaval.ca/2017/h/GEL1001/default/5chronologie/2017-01%20GEL-1001%20CND.pdf

[18] : ResearchGate, Schematic diagram of ultrasonic testing (UT) setup depicting the pulse-echo method, 2019.
[Online]. Available : https://www.researchgate.net/figure/Schematic-diagram-of-the-ultrasonic-testing-UT-set-up-depicting

[19] : Alticontrôle, Qu'est-ce que le Ressuage ? Alticontrôle.com.
[Online]. Available : https://www.alticontrole.com/ressuage/

[20] : La Thermographie Infrarouge Active, Notice Technique – Thermographie Infrarouge Active, PDF.

[21] : L. Oukhellou, « Paramétrisation et classification de signaux en contrôle non destructif. Application à la reconnaissance des defaut de rails par courant de Foucault, » l'Université Paris XI Orsay, 2004.

[22] : YAHYA CHOUA, "Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de foucault", Université Paris Sud, France,2009.

[23] AOMAR. L « Calcul tridimensionnel des courants induits dans desdispositifs électromagnétiques par la méthode intégrale PEEC et par une approche » intégro-différentielle, Université de Jijel, Jijel 2019.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة النمذجة التحليلية للتيارات المستحثة في الكرات الموصلة أحادية الطبقة ومتعددة الطبقات باستخدام طريقة الجهد المتجه من الدرجة الثانية .(PVSO) وتُبرز الدراسة تأثير الخصائص الكهربائية والهندسية على توزيع هذه التيارات. وقد تم التحقق من صحة النتائج من خلال محاكاة رقمية باستخدام برنامج (COMSOL Multiphysics)، حيث أظهرت النتائج توافقًا ممتازًا مع النموذج التحليلي. وتؤكد هذه الدراسة موثوقية النموذج المطور وأهميته في تطبيقات الفحص غير المتلف بالتيارات المستحثة.

Résumé

Ce mémoire porte sur la modélisation analytique des courants induits dans des sphères conductrices monocouches et multicouches à l'aide de la méthode du Potentiel Vecteur du Second Ordre (PVSO). L'étude met en évidence l'influence des propriétés électriques et géométriques sur la distribution des courants induits. Les résultats obtenus ont été validés par des simulations numériques réalisées sous COMSOL Multiphysics, montrant une très bonne concordance. Ce travail confirme la fiabilité du modèle développé et son intérêt pour les applications de contrôle non destructif par courants induits.

Abstract

This study focuses on the analytical modeling of induced currents in single-layer and multilayer conductive spheres using the Second-Order Vector Potential (SOVP) method. The study highlights the influence of electrical and geometrical properties on induced current distribution. The obtained results were validated through numerical simulations performed with COMSOL Multiphysics, showing very good agreement. This work confirms the reliability of the proposed model and its relevance for eddy-current nondestructive testing applications.