RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA – JIJEL

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire Pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Probabilités et Statistique

Thème

Quelques Distributions Généralisées : Propriétés et applications

Présenté par : Adjimi Hayet & Arif Hadjer

Devant le jury :

Présidente : Mme.Azzam Laouir Dalila	Professeur
Encadreur : Mr. Gherda Mebrouk	M.A.A
Examinatrice: Mme. Djeridi Zohra	M.A.A
Examinatrice: Mme. Abdi Zineb	M.A.A

Promotion 2016/2017

Table des matières

Abréviations et notations

v.a	variable(s) aléatoire(s).
AIC	Critère d'information d'Akaike.
AIC_C	Critère d'information d'Akaike corrigé.
B	Distribution de Beta.
BIC	Critère d'information Bayésien.
$BQHR$	Distribution à taux de hasard Beta quadratique.
Exp	Distribution Exponentielle.
EGE	Extension de l'Exponentielle Généralisée.
$EGWG$	Exponentielle Weibull-Gumpertz généralisée.
WE	Exponentielle Weibull.
G	Distribution Gamma.
GD	Distribution Generalisée.
GE	Exponential Generalisée.
GEV	Generalized Extreme Value.
GIG	Inverse Gaussien Généralisée..
GP	Pareto Généralisée.
IGE	Inverse Exponential Généralisée.
$i.i.d$	identiquement indépendant distribuée.
$QHRD$	Distribution à taux de hasard Quadratique.
$MEGE$	Extension de l'exponential Généralisée modifiée.
MLE	Estimateur du maximum de vraisemblance.
$MTBF$	Durée moyenne entre deux pannes.
$MTTF$	Temps moyen de panne.
$MTTR$	Durée moyenne avant la réparation.
ODE	Equation Différentielle Ordinaire.
W	Distribution de Weibull.

Motivation

En modélisation statistique, les lois classiques à variance finie, en particulier la loi normale, sont largement utilisées pour étudier de nombreux phénomènes physiques et des données de nature variée. Cependant, une telle modélisation devient inefficace lorsque l'on désire étudier des phénomènes présentant de nombreuses valeurs extrêmes, qui ne peuvent être considérées comme des valeurs aberrantes. Dans cette situation les lois classiques présentent certaines limites. Par exemple loi exponentielle à un seul paramètre $\lambda > 0$, ne s'adapte à une telle situation. Les travaux précédents ont montré que les lois Généralisées présentent une meilleure qualité d'ajustements de la fonction de survie que les lois classiques lorsque les taux d'hasard sont en forme de baignoire. C'est dans ce sens que Gupta et Kundu et plusieurs chercheurs ont introduit des nouvelles distributions appelées « distributions généralisées (GD)» et qui sont concentrées sur l'amélioration de la fonction de distribution dans différentes directions.

Introduction générale

La généralisation des fonctions de distribution a attiré beaucoup d'attention et d'intérêt, après l'introduction d'une distribution exponentielle généralisée (GE) par Kundu.D et Gupta.R.D (1999), plusieurs chercheurs se soient concentrées sur l'amélioration de cette fonction de distribution dans différentes directions dont le but est d'obtenir une fonction de distribution qui sera plus robuste, et applicable en modélant différents types de données.

L'exponentielle généralisée à deux paramètres c'est une nouvelle distribution notée GE et est présentée par les auteurs Gupta et kundu (1999, 2000, 2001, 2003, 2004, 2007) ont également continué dans cette direction. Ils ont étudié les propriétés de cette distribution, aussi par rapport à Weibull et à la distribution gamma. Ils ont observé que cette distribution peut être employée au lieu des distributions gamma et Weibull, depuis les deux paramètres du gamma, du Weibull et de la distribution GE ont les mêmes propriétés d'augmenter et de diminuer la fonction de risque si leur paramètre de forme α est le plus grand ou moins d'un, et elles ont une fonction constante de risque si leur paramètre de forme α est égal à un. Plusieurs chercheurs ont fait la même chose, ainsi Balakrishnan et Leung (1988), lie Hsiu-Mei, (2000), George et al (1980) et Olapade (2004, 2005, 2006) qui ont travaillé sur plusieurs types de distribution logistique généralisée.

Les modèles exponentiels généralisés inverses sont des modèles qui peuvent être employés dans la fiabilité. Aussi elles peuvent être employées comme norme pour modéliser des données de panne dépendant du temps. Ce nouveau modèle de fiabilité est une généralisation de la distribution exponentielle inverse.

La distribution exponentielle généralisée inverse (IGE) s'approche à la distribution exponentielle inverse (IE) quand $\beta = 1$ et $t_0 = 0$. Cette distribution peut être employée pour modéliser une variété de caractéristiques de pannes telles que la mortalité infantile, échecs aléatoires, ... Aussi elle peut être également utilisée pour déterminer les périodes de rentabilité et d'entretien.

La distribution exponentielle généralisée inverse (IGE) conviendra à modéliser dans le domaine de l'agriculture, la botanique, les sciences économiques, la médecine, la psychologie, la zoologie, essais des durées de vie et la fiabilité mécanique. Quelques travaux ont été effectués sur cette distribution par Gupta et Kundu (1999, 2001, 2003).

La loi inverse-gaussienne généralisée est une loi de probabilité continue qui généralise la loi inverse-gaussienne en introduisant un troisième paramètre.

Cette loi est utilisée, par exemple, en géostatistique, en hydrologie ou en finance. Elle a été initialement proposée par Etienne Halphen, la loi est également connue sous le nom de loi Sichel, elle est utilisée dans la modélisation de nombreux phénomènes réels, notamment la modélisation de données concernant les temps d'attente (Jorgensen, 1982), des phénomènes extrêmes en hydrologie (Chebana et al, 2010), l'activité neuronale (Iyengar et al, 1997). Concernant l'étude des propriétés statistiques de cette loi, on peut citer par exemple (Jorgensen, 1982), Perreault et al 1999a, 1999b).

La théorie des valeurs extrêmes propose d'approximer la queue d'une distribution expérimentale par une loi théorique particulière et faire des estimations à partir de cette dernière. Deux approches sont envisagées :

- l'analyse des maxima par intervalles de temps fixes (crues maximales décennales par exemple),

- l'analyse des valeurs au-dessus d'un seuil (toutes les crues supérieures à une certaine hauteur par exemple).

La loi généralisée des extrêmes ou GEV (Generalized Extreme Value) est utilisée dans le premier cas et la loi de Pareto généralisée GPD dans le second.

La distribution Pareto généralisée (GP) a été introduite par Pikands (1975) et été étudié ensuite par Davison, Smith (1984), Castillo (1997, 2008) et autres. Cette distribution peut être utilisée pour approcher la loi des excès.

La GP a des applications dans certains domaines, y compris des études de fiabilité, dans la modélisation des grandes demandes d'assurance, comme une répartition du temps d'échecs. Ainsi joue- t- il un rôle important dans la modélisation des évènements extrême ? Un modèle est fréquement utilisé dans l'étude de la répartition de revenu et dans l'analyse d'évènements extrêmes, par exemple pour l'analyse des données sur les précipitations, dans l'analyse des données de la plus grande hauteur de vagues ou le niveau dela mer, les vents maximaux, analyse de la chute de pluie, dans l'analyse des plus grandes valeurs des inondations annuelles, rupture force des matériaux, charges d'avion, etc. Letac et Seshadri (1983) ont caractérisé la loi GIG comme étant la loi d'une fraction continue constituée par des variables aléatoires indépendantes de loi gamma.

Le modèle x-exponentielle, comme alternative des distributions Lindley généralisé GL, Gamma généralisé GG et exponentielle Weibull (EW). Ce modèle est plus simple que les distributions, GL, GG, EW et qui a l'avantage que son taux de hasard a une forme en baignoire.

La théorie des valeurs extrêmes sera alors un prétexte pour comprendre l'impact des évènements rares sur les mesures de risque en cherchant a caractériser la loi des extrema, le minimum et le maximum afin de mesurer les risques.

La plupart des techniques statistiques pour les sciences expérimentales sont basées sur une décomposition de la variance (des cycles et des régimes). Que se passe-t-il quand le système considéré n'est sensible qu'à de grandes variations d'un paramètre ? L'analyse de la variance se concentre sur les valeurs les plus communes, l'analyse des valeurs rares lui échappe. Les phénomènes extrêmes sont par essence rares, et demandent des techniques statistiques plus approfondies.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres

Dans le premier chapitre nous présentons quelques lois classiques et notions de base, notamment les fonctions associées à une distribution de probabilité, que nous voyons utiles pour la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les propriétés mathématiques de quelques distributions généralisées en se référant à leurs caractéristiques

Au troisième chapitre, nous donnons des applications des distributions généralisées en fiabilité et en analyse des données en réalisant l'impact ces distributions en utilisant des critères d'information comme AIC, BIC, AIC_C.

Chapitre 1

Rappels et quelques notions de probabilité

Dans le premier chapitre nous présentons quelques lois classiques et notions de base, notamment les fonctions associées à une distribution de probabilité, que nous voyons utiles pour la suite de ce travail.

1.1 Distributions de la durée de survie

Supposons que la durée de survie T soit une variable positive non nulle, et absolument continue, alors sa loi de probabilité peut être définie par l'une des fonctions équivalentes suivantes (chacune des fonctions ci-dessous peut être obtenue à partir de l'une des autres fonctions) :

1.1.1 Fonction de survie

La fonction de survie est, pour t fixé est la probabilité de survivre jusqu'à l'instant t. C'est le complément à un de la fonction de répartition, elle est donnée par

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)\,;\ t \geq 0.$$

où $F(t)$ est la fonction de répartition associée à la v.a T.

Propriétés

- $S(t) \in [0,1]$, $t \geq 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$.
- S est une fonction décroissante à valeurs dans $[0,1]$ et continue monotone c'est-à-dire

$$t_1 < t_2 \Rightarrow S(t_1) \geq S(t_2);\ t_1,\ t_2 > 0.$$

- $S(0) = 1$, si on pose $P(T = 0) = 0$.

Si T possède une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f(t) = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{P(t < T < t + \triangle t)}{\triangle t};\ t \geq 0.$$

et

$$F(t) = \int_0^t f(u)du.$$

aussi

$$S(t) = \int_t^{+\infty} f\left(u\right) du = 1 - \int_0^t f(u)du = 1 - F(t);\ t > 0.$$

donc

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{dF(t)}{dt} = -f(t);\ t > 0.$$

1.1.2 Risque instantané (taux de hasard ou de défaillance)

Le taux de hasard, pour t fixé caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après t, condionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'au temps t (c'est-à-dire le risque de mort instantané pour ceux qui ont survécu).

$$h\left(t\right) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P\left(t \leq T < t + \triangle t / T \geq t\right)}{\Delta t}.$$

où le graphique de taux de hasard est une courbe en baignoire.

On distingue 3 périodes :

a) Le risque instantané décroissant (défaillances précoces).

b) Le taux de hasard constant (défaillances aléatoires).

c) Le taux de défaillance croissant (période de vieillesse).

Propriétés

1- $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
2- $\int_0^t h(u)\,du < \infty;\ \forall t > 0$ mais $\int_0^\infty h(u)\,du = \infty$.
3- h n'est pas nécessairement monotone.
4- $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\ln S(t)$,
En effet,

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t \le T < t+\Delta t/T \ge t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{P((t \le T < t+\Delta t)\cap(T \ge t))}{P(T > t)} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{P(t \le T < t+\Delta t)}{P(T > t)} = \frac{1}{P(T > t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t \le T < t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}. \end{aligned}$$

et

$$\frac{d\ln S(t)}{dt} = \frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{f(t)}{S(t)} = -h(t).$$

La fonction de hasard est donnée par

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}.$$

1.1.3 Taux de hasard cumulé

C'est l'intégrale du taux de hasard

$$H(t) = \int_0^t h(u)du.$$

On peut écrire la fonction $H(t)$ en fonction de $S(t)$

$$H(t) = -\ln[S(t)].$$

En effet

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}[\ln S(t)] \\ \Rightarrow S(t) &= e^{\left(-\int_0^t h(u)du\right)} = e^{-H(t)}. \end{aligned}$$

1.2 Quelques distributions usuelles

Considérons dans toute la section que T soit une v.a continue positive distribuée selon la distribution que l'on doit définir à chaque fois.

1.2.1 Distribution exponentielle

Cette loi a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. C'est une loi simple, très utilisée en fiabilité dont la fonction de hasard est constante et généralement utilisée pour modéliser la durée de vie d'un phénomène.

- La fonction de densité de probabilité correspondante à la distribution exponentielle est

$$f(t;\ \lambda) = \lambda e^{-\lambda t};\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le paramètre d'intensité ou d'inverse échelle et on note $T \rightsquigarrow Exp(\lambda)$.

On peut maintenant calculer la fonction de répartition F avec

$$F(t;\ \lambda) = P(T \leq t);\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

donc

$$F(t;\ \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}\ ;\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

Notons que

$$P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t};\ t \geq 0,\ \lambda > 0. \tag{1.1}$$

- La fonction de survie associée est

$$S(t;\ \lambda) = e^{-\lambda t};\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

- La fonction de risque est

$$h(t;\ \lambda) = \lambda;\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

- La fonction de risque cumulée est

$$H(t;\ \lambda) = \lambda t;\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

- La moyenne appelé le temps caractéristique est donnée par

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

En procédant par récurrence, on peut prouver que

$$E(T^n) = \frac{n!}{\lambda^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

- La variance de la distribution exponentielle est

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- La médiane est

$$median = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

- Le mode correspondant à la distribution exponentielle est nul, le skewness est égal à 2 et le Kurtosis normalisé est égal à 6.

- La fonction génératrice des moments est

$$M_T(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

- La fonction caractéristique est

$$\Phi_T(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Cette loi est sans mémoire car la probabilité de la panne pour un individu dans certain période de temps est la même quelle que soit sa durée de vie, c'est à dire

$$\forall s,\ t > 0 \quad P(T > s + t/T > t) = P(T > s).$$

Preuve. Si T suit la loi $Exp(\lambda)$ alors, d'aprés (1.1)

$$P(T > s + t/T > t) = \frac{P(T > s + t)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(T > s).$$

■

1.2.2 Distribution Inverse-exponentielle

- Sa fonction de densité de probabilité est

$$f_{IE}(t;\ \eta) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right);\ t > 0,\ \eta > 0.$$

- Sa fonction de répartition est

$$F_{IE}(t;\ \eta) = \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right];\ t > 0,\ \eta > 0.$$

- Sa fonction de survie est

$$S_{IE}\left(t;\ \eta\right)=1-\exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right];\ t>0,\ \eta>0.$$

- Sa fonction de hasard est

$$h_{IE}\left(t;\ \eta\right)=\frac{\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^{2}\exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{1-\exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right]};\ t>0,\ \eta>0.$$

- Sa fonction de hasard cumulée est

$$H_{IE}\left(t;\ \eta\right)=-\ln\left[1-\exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right];\ t>0,\ \eta>0.$$

1.2.3 Distribution x-exponentielle

On essaye de présenter une nouvelle distribution, appelé x-exponentielle, comme une alternative des distributions de Lindley généralisé (GL), Gamma généralisé (GG) et exponentielle de Weibull (EW) et on donne leurs propriétés (voir [10]).

C'est un modèle plus simple que les distributions, GL, GG, EW, et qui a l'avantage que son taux de hasard est en forme de baignoire.

- La fonction de répartition correspondante à la distribution x-exponentielle est

$$F\left(t;\ \alpha,\ \lambda\right)=\left(1-\left(1+\lambda t^{2}\right)e^{-\lambda t}\right)^{\alpha};\ t,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

où λ est le paramètre d'échelle.

Il est clair que $F(0)=0$, $F(\infty)=1$, la fonction de répartition est continue à droite, non décroissante, et elle est absolument continue.

- Sa fonction de densité croît d'abord, puis décroît donc n'est pas unimodal, elle est donnée par

$$f\left(t;\ \alpha,\ \lambda\right)=\alpha e^{-\lambda x}\left(\lambda^{2}t^{2}-2\lambda t+\lambda\right)\left(1-\left(1+\lambda t^{2}\right)e^{-\lambda t}\right)^{\alpha-1};\ t,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

- Sa fonction de survie est

$$S(t;\ \alpha,\ \lambda)=1-\left(1-\left(1+\lambda t^{2}\right)e^{-\lambda t}\right)^{\alpha};t>0,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

- Sa fonction de hasard est

$$h(t;\ \alpha,\ \lambda)=\frac{\alpha e^{-\lambda t}\left(\lambda^{2}t^{2}-2\lambda t+\lambda\right)\left(1-\left(1+\lambda t^{2}\right)e^{-\lambda t}\right)^{\alpha-1}}{1-\left(1-\left(1+\lambda t^{2}\right)e^{-\lambda t}\right)};\ t,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H(t;\ \alpha,\ \lambda) = -\ln\left[1 - \left(1 - \left(1 + \lambda t^2\right) e^{-\lambda t}\right)^{\alpha}\right];\ t,\ \alpha,\ \lambda > 0.$$

Le calcule des moments de T nécessite le lemme suivant

Lemme 1.2.1 *Pour* $t > 0$; $\alpha,\ \lambda > 0,\ K(\alpha,\ \lambda,\ c) = \int_0^\infty t^c \left[1 - (1 + \lambda t^2)\, e^{-\lambda t}\right]^{\alpha - 1} e^{-\lambda t} dt,$

alors,

$$K(\alpha,\ \lambda,\ c) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_j^i \lambda^j \left[\int_0^\infty t^{2j+c} e^{-i\lambda t} e^{-\lambda t} dt\right].$$

Preuve. Nous savons que

$$(1 - z)^{\alpha-1} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i z^i.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
K(\alpha,\ \lambda,\ c) &= \int_0^\infty t^c \left[1 - \left(1 + \lambda t^2\right) e^{-\lambda t}\right]^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty t^c \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \left[\left(1 + \lambda t^2\right) e^{-\lambda t}\right]^i e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \int_0^\infty t^c \left[\left(1 + \lambda t^2\right) e^{-\lambda t}\right]^i e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \int_0^\infty t^c \left[\left(1 + \lambda t^2\right)\right]^i e^{-i\lambda t} e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \int_0^\infty t^c \sum_{j=0}^{i} C_j^i \left(\lambda t^2\right)^j e^{-(i+1)\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_j^i \lambda^j \int_0^\infty t^c \left(t^2\right)^j e^{-(i+1)\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_j^i \lambda^j \int_0^\infty t^c t^{2j} e^{-(i+1)\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_j^i \lambda^j \int_0^\infty t^{2j+c} e^{-(i+1)\lambda t} dt \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_i^{\alpha-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_j^i \lambda^j \left[\frac{\Gamma(2j + c + 1)}{((i+1)\lambda)^{2j+c+1}}\right].
\end{aligned}$$

et par suite

$$E(T) = \int_0^\infty t\alpha e^{-\lambda t}\left(\lambda^2 t^2 - 2\lambda t + \lambda\right)\left(1 - \left(1 + \lambda t^2\right)e^{-\lambda t}\right)^{\alpha - 1} dt$$

et le moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$

$$E(T^r) = \int_0^\infty t^r \alpha e^{-\lambda t}\left(\lambda^2 t^2 - 2\lambda t + \lambda\right)\left(1 - \left(1 + \lambda t^2\right)e^{-\lambda t}\right)^{\alpha - 1} dt.$$

Les moments sont

$$E(T) = \alpha\lambda^2 K(\alpha,\ \lambda,\ 3) - 2\alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda,\ 2) + \alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda,\ 1).$$

$$E(T^r) = \alpha\lambda^2 K(\alpha,\ \lambda,\ r+2) - 2\alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda,\ r+1) + \alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda,\ r), r = 1,\ 2,\ 3, ...$$

■

- Sa fonction génératrice des moments associée est

$$M_T(t) = \alpha\lambda^2 K(\alpha,\ \lambda - t,\ 3) - 2\alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda - t,\ 2) + \alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda - t,\ 1).$$

- Sa fonction caractéristique est

$$\Phi_T(t) = \alpha\lambda^2 K(\alpha,\ \lambda - it,\ 3) - 2\alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda - it,\ 2) + \alpha\lambda K(\alpha,\ \lambda - it,\ 1).$$

Écart moyen par rapport à la moyenne

La quantité de la dispersion dans une population est évidement mesurée dans une certaine unité par la totalité des écarts par rapport à la moyenne et à la médiane.

- L'écart moyen par rapport à la moyenne μ est définie par

$$\begin{aligned} MD(\mu) &= 2\mu F(\mu) - 2\mu + 2\int_\mu^\infty tf(t)\,dt \\ &= 2\mu F(\mu) - 2\mu + 2\alpha\lambda^2 L(\alpha,\ \lambda,\ 3,\ \mu) - \\ &\quad 2\alpha\lambda L(\alpha,\ \lambda,\ 2,\ \mu) + \alpha\lambda L(\alpha,\ \lambda,\ 1,\ \mu). \end{aligned}$$

où $f(t)$ est la fonction de densité associée à la distribution x-exponentielle et

$$\begin{aligned}L(\alpha,\ \lambda,\ c,\ \mu) &= \int_{\mu}^{\infty} t^{c}\left[1-\left(1+\lambda t^{2}\right)e^{-\lambda t}\right]^{\alpha-1}e^{-\lambda t}dt \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha-1} C_{i}^{\alpha-1}(-1)^{i}\sum_{j=0}^{i} C_{j}^{i}\lambda^{j}\left[\int_{\mu}^{\infty} t^{2j+c+1}e^{-(j+1)\lambda t}dt\right].\end{aligned}$$

- La déviation moyenne de la médiane M est définie par

$$\begin{aligned}MD(M) &= -M+2\int_{M}^{\infty} tf(t)\,dt \\ &= -M+2\alpha\lambda^{2}L(\alpha,\ \lambda, 3\ ,\ M)-2\alpha\lambda L(\alpha,\ \lambda,\ 2,\ M)+ \\ &\quad \alpha\lambda L(\alpha,\ \lambda,\ 1,\ M).\end{aligned}$$

1.2.4 Distribution à hasard quadratique

La distribution $QHRD$ peut être une fonction de risque (décroissante) croissante ou en forme de baignoire ou en forme de baignoire renversée (voir [2]).

- Sa fonction de répartition est

$$G_{QHRD}(t;\ \alpha,\ \theta,\ \beta)=1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^{2}+\frac{\beta}{3}t^{3}\right)};\ t>0,\ \alpha,\ \beta\geq 0,\ \theta\geq -2\sqrt{\alpha\beta}.$$

On note $T \rightsquigarrow QHRD(\alpha, \theta, \beta)$.

- Sa fonction de densité est

$$g_{QHRD}(t;\ \alpha,\ \theta,\ \beta)=(\alpha+\theta t+\beta t^{2})e^{-(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^{2}+\frac{\beta}{3}t^{3})};\ t>0.$$

- Sa fonction de survie est

$$S_{QHRD}(t;\ \alpha,\ \theta,\ \beta)=e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^{2}+\frac{\beta}{3}t^{3}\right)};\ t>0.$$

- Sa fonction de risque est

$$h_{QHRD}(t;\ \alpha,\ \theta,\ \beta)=\alpha+\theta t+\beta t^{2};\ t>0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H_{QHRD}(t;\ \alpha,\ \theta,\ \beta)=\alpha t+\frac{\theta}{2}t^{2}+\frac{\beta}{3}t^{3};\ t>0.$$

- Son espérance est

$$E(T)=W_{k,m}\left[\alpha\frac{\Gamma(2k+3m+2)}{\alpha^{2k+3m+2}}+\theta\frac{\Gamma(2k+3m+3)}{\alpha^{2k+3m+3}}+\beta\frac{\Gamma(2k+3m+4)}{\alpha^{2k+3m+4}}\right].$$

où

$$W_{k,m} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+m} \theta^k \beta^m}{k!m!2^k 3^m}.$$

Preuve.

$$E(T) = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} t(\alpha + \theta t + \beta t^2) e^{-\left(\alpha t + \frac{\theta}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3\right)} dt.$$

comme $0 < e^{-\left(\alpha t + \frac{\theta}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3\right)} < 1$, le développement en séries de $e^{-\frac{\theta}{2}t^2}$ et $e^{-\frac{\beta}{3}t^3}$ donne

$$e^{-\frac{\theta}{2}t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{\theta}{2}t^2)^k}{k!}.$$

et

$$e^{-\frac{\theta}{3}t^3} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{\theta}{3}t^3)^m}{m!}.$$

donc

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{k,m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+m}\theta^k \beta^m}{k!m!2^k 3^m} \int_0^{+\infty} t^{1+2k+3m} (\alpha + \theta t + \beta t^2) e^{-\alpha t} dt \\
&= W_{k,m} \left\{ \alpha \int_0^{+\infty} t^{1+2k+3m} e^{-\alpha t} dt + \theta \int_0^{+\infty} t^{2+2k+3m} e^{-\alpha t} dt + \right. \\
&\qquad \left. \beta \int_0^{+\infty} t^{3+2k+3m} e^{-\alpha t} dt \right\}.
\end{aligned}$$

On utilise la propriété suivante afin de simplifier l'intégration ci-dessus

$$\Gamma(z) = \alpha^z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\alpha t} dt.$$

donc

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(z)}{\alpha^z}.$$

on trouve

$$E(T) = W_{k,m} \left[\alpha \frac{\Gamma(2+2k+3m)}{\alpha^{2+2k+3m}} + \theta \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{\alpha^{3+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(4+2k+3m)}{\alpha^{4+2k+3m}} \right].$$

■

- La variance est

$$\begin{aligned}
V(X) &= W_{k,m} \left[\alpha \frac{\Gamma(2+2k+3m)}{\alpha^{2+2k+3m}} + \theta \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{\alpha^{3+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(4+2k+3m)}{\alpha^{4+2k+3m}} \right] - \\
&\qquad \left\{ W_{k,m} \left[\alpha \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{\alpha^{3+2k+3m}} + \theta \frac{\Gamma(4+2k+3m)}{\alpha^{4+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(5+2k+3m)}{\alpha^{5+2k+3m}} \right] \right\}^2.
\end{aligned}$$

- Sa fonction caractéristique est

$$\Phi_T(t) = W_{i,k,m}\left[\alpha\frac{\Gamma(2+2k+3m)}{(\alpha-it)^{1+2k+3m}} + \theta\frac{\Gamma(2+2k+3m)}{(\alpha-it)^{2+2k+3m}} + \beta\frac{\Gamma(3+2k+3m)}{(\alpha-it)^{3+2k+3m}}\right].$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Phi_T(t) &= E(e^{ixt})\\ &= \int_0^{+\infty} e^{ixt}g(t)dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{ixt}(\alpha+\theta t+\beta t^2)e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}dt\\ &= \int_0^{+\infty} (\alpha+\theta t+\beta t^2)e^{-\left((\alpha-ix)t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}dt.\end{aligned}$$

On utilise la même méthode pour simplifier l'intégration. Comme $0 < e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)} < 1$, le développement en séries de $e^{-\frac{\theta}{2}t^2}$ et $e^{-\frac{\beta}{3}t^3}$ donne

$$e^{-\frac{\theta}{2}t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{\theta}{2}t^2\right)^k}{k!}.$$

et

$$e^{-\frac{\theta}{3}t^3} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{\theta}{3}t^3\right)^m}{m!}.$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi_T(t) &= \sum_{i,k,m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+m}\theta^k\beta^m}{k!m!2^k3^m}\int_0^{+\infty} t^{2k+3m}(\alpha+\theta t+\beta t^2)e^{-(\alpha-ix)t}dt\\ &= W_{i,k,m}\left\{\alpha\int_0^{+\infty} t^{2k+3m}e^{-(\alpha-ix)t}dt + \theta\int_0^{+\infty} t^{1+2k+3m}e^{-(\alpha-ix)t}dt + \right.\\ &\qquad \left.\beta\int_0^{+\infty} t^{2+2k+3m}e^{-(\alpha-ix)t}dt\right\}.\end{aligned}$$

On utilise la propriété suivante afin simplifier l'intégration

$$\Gamma(z) = \alpha^z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-\alpha t}dt.$$

donc

$$\Phi_T(t) = W_{i,k,m}\left[\alpha\frac{\Gamma(2+2k+3m)}{(\alpha-it)^{1+2k+3m}} + \theta\frac{\Gamma(2+2k+3m)}{(\alpha-it)^{2+2k+3m}} + \beta\frac{\Gamma(3+2k+3m)}{(\alpha-it)^{3+2k+3m}}\right].$$

■

1.2.5 Distribution à taux de hasard Beta-quadratique

Cette nouvelle distribution a été introduite par Ibrahim Elbatal en 2015 (voir [2]). Elle est dénotée par $BQHR$.

- Sa fonction de répartition est

$$G_{BQHR}(t;\ \phi) = I_{\left\{1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\right\}}(a, b), \tag{1.2}$$

$$G_{BQHR}(t;\ \phi) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^{1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}} w^{(a-1)}(w-1)^{(b-1)}dw;\ t>0.$$

où $\phi = (\alpha,\ \theta,\ \beta,\ a,\ b)$,et $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \theta \geq -2\sqrt{\alpha\beta},\ a > 0$ et $b > 0$.

On a

$$\int_0^t w^{(a-1)}(w-1)^{(b-1)}dw = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i\binom{b-1}{i}}{(a+i)} t^i.$$

où

$$\binom{b-1}{i} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-i)i!}.$$

en effet

$$\binom{b-1}{i} = \frac{(b-1)!}{(b-1-i)!i!} = \frac{(b-1)!}{((b-i)-1)!i!} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-i)i!}.$$

donc

$$G_{BQHR}(t;\ \phi) = \frac{1}{B(a,b)}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i\binom{b-1}{i}}{(a+i)}\left(1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\right)^i.$$

- Sa fonction de densité est

$$\begin{aligned} g_{BQHR}(t;\ \phi) &= \frac{(\alpha+\theta t+\beta t^2)e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\left[1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\right]^{a-1}\left\{e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\right\}^{b-1}}{B(a,b)} \\ &= \frac{(\alpha+\theta t+\beta t^2)e^{-b\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}}{B(a,b)}\left[1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\right]^{a-1};\ t>0. \end{aligned}$$

On a

$$\left[1-e^{-\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}\right]^{a-1} = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\binom{a-1}{j}e^{-j\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)}.$$

où

$$\binom{a-1}{j} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-j)j!}.$$

donc

$$g_{BQHR}(t;\ \phi) = \frac{\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\binom{a-1}{j}}{B(a,\ b)}(\alpha+\theta t+\beta t^2)e^{-(b+j)\left(\alpha t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)};\ t>0. \tag{1.3}$$

- Sa fonction de survie est

$$S_{BQHR}(t;\ \phi) = 1 - \frac{1}{B(a,\ b)} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i \binom{b-1}{i} \left(1 - e^{-\left(\alpha t + \frac{\theta}{2} t^2 + \frac{\beta}{3} t^3\right)}\right)^i}{(a+i)};\ t > 0.$$

- Sa fonction de risque est

$$h_{BQHR}(t;\ \phi) = \frac{\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{a-1}{j} \left(\alpha + \theta t + \beta t^2\right) e^{-(b+j)\left(\alpha t + \frac{\theta}{2} t^2 + \frac{\beta}{3} t^3\right)}}{B(a,\ b) - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i \binom{b-1}{i}}{(a+i)} \left(1 - e^{-\left(\alpha t + \frac{\theta}{2} t^2 + \frac{\beta}{3} t^3\right)}\right)^i};\ t > 0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H_{BQHR}(t;\ \phi) = -\ln \left[1 - \frac{1}{B(a,\ b)} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i \binom{b-1}{i}}{(a+i)} \left(1 - e^{-\left(\alpha t + \frac{\theta}{2} t^2 + \frac{\beta}{3} t^3\right)}\right)^i\right];\ t > 0.$$

Pour calculer la moyenne d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, on utilise la formule suivante

$$E\left(T^r\right) = W_{j,k,m} \left[\alpha \frac{\Gamma(r+2k+3m+1)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{r+2k+3m+1}} + \theta \frac{\Gamma(r+2k+3m+2)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{r+2k+3m+2}} + \beta \frac{\Gamma(r+2k+3m+3)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{r+2k+3m+3}}\right].$$

où

$$W_{j,k,m} = \sum_{j,k,m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+k+m} \binom{a-1}{j} \theta^k \beta^m (b+j)^{k+m}}{B(a,b) k! m! 2! 3!}.$$

donc

$$E\left(T\right) = W_{j,k,m} \left[\alpha \frac{\Gamma(2+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{2+2k+3m}} + \theta \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{3+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(4+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{4+2k+3m}}\right].$$

- La variance associée est

$$\begin{aligned} Var(T) \;\; = \;\; & W_{j,k,m} \left\{\alpha \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{3+2k+3m}} + \theta \frac{\Gamma(4+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{4+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(5+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{5+2k+3m}}\right\} - \\ & W_{j,k,m}^2 \left\{\alpha \frac{\Gamma(2+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{2+2k+3m}} + \theta \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{3+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(4+2k+3m)}{\left[\alpha(b+j)\right]^{4+2k+3m}}\right\}^2. \end{aligned}$$

- La fonction caractéristique est

$$\begin{aligned}
\Phi_T(t) &= E\left(e^{ixt}\right) = \int_0^{+\infty} e^{ixt} f(t;\phi)dt \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{a-1}{j}}{B(a,b)} \int_0^{+\infty} (\alpha+\theta t+\beta t^2) e^{-(b+j)\left((ix+\alpha)t+\frac{\theta}{2}t^2+\frac{\beta}{3}t^3\right)} dt \\
&= \sum_{j,k,m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+k+m}\binom{a-1}{j}\theta^k\beta^m (b+j)^{k+m}}{B(a,b)k!m!2!3!} \left\{ \alpha \int_0^{+\infty} t^{k+m} e^{-(b+\alpha+j+ix)t} dt + \right. \\
&\qquad \left. \theta \int_0^{+\infty} t^{1+k+m} e^{-(b+\alpha+j+ix)t} dt + \beta \int_0^{+\infty} t^{2+k+m} e^{-(b+\alpha+j+ix)t} dt \right\} \\
&= W_{j,k,m} \left\{ \alpha \frac{\Gamma(1+2k+3m)}{[(b+\alpha+j+it)]^{1+2k+3m}} + \right. \\
&\qquad \left. \theta \frac{\Gamma(2+2k+3m)}{[(b+\alpha+j+it)]^{2+2k+3m}} + \beta \frac{\Gamma(3+2k+3m)}{[(b+\alpha+j+it)]^{3+2k+3m}} \right\}.
\end{aligned}$$

où

$$W_{j,k,m} = \sum_{j,k,m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+k+m}\binom{a-1}{j}\theta^k\beta^m (b+j)^{k+m}}{B(a,b)k!m!2!3!}.$$

Cas spéciaux de la distribution BQHR

On distingue les cas suivants

1- Pour $a=b=1$ alors (1.3) réduit à la ditribution quadratique.

2- Pour $\theta=\beta=0$ nous obtenons la distribution beta exponentielle.

1.2.6 Distribution de Pareto

- Sa fonction densité de probabilité est

$$f(t;\ \alpha,\ k) = \frac{\alpha k^{\alpha-1}}{t^{\alpha+1}};\ t \geq k,\ \alpha,\ k>0.$$

- Sa fonction de répartition est

$$F(t;\ \alpha,\ k) = \int_k^t f(u)\,du = 1-\left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha};\ t \geq k.$$

- Sa fonction de survie est

$$S\left(t;\ \alpha,\ k\right)=\left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha};\ t\geq k.$$

- Sa fonction de risque est

$$h\left(t;\ \alpha,\ k\right)=\frac{\alpha}{t};\ t\geq k.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H\left(t;\ \alpha,\ k\right)=-\alpha\ln\left(\frac{k}{t}\right);\ t\geq k.$$

- Sa moment d'ordre $r\in\mathbb{N}^{*}$ est

$$E\left(T^{r}\right)=\frac{\alpha k^{\alpha}}{\alpha-r}.$$

- La variance est

$$Var\left(T\right)=\frac{\alpha k^{2}}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)},\ \alpha>2.$$

1.2.7 Distribution inverse-gaussienne

La distribution inverse-gaussienne (ou loi gaussienne inverse ou encore loi de Wald) de paramètres $\lambda,\ \mu>0$ fournie les caractéristiques suivantes

- La fonction densité de probabilité est donnée par

$$f\left(t;\ \lambda,\ \mu\right)=\left[\frac{\lambda}{2\pi t^{3}}\right]^{1/2}\exp\left(\frac{-\lambda\left(t-\mu\right)}{2\mu^{2}t}\right);\ t,\ \lambda,\ \mu>0.$$

où μ est son espérance et λ est le paramétre de forme.

On note $T\rightsquigarrow IG\left(\lambda,\ \mu\right).$

Lorsque λ tend vers l'infini, la loi inverse-gaussienne se comporte comme une loi normale, elle possède plusieurs propriétés similaires avec cette dernière.

- La fonction de répartition est

$$F\left(t;\ \lambda,\ \mu\right)=\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}-1\right)\right)+\exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}+1\right)\right);\ t,\ \lambda,\ \mu>0.$$

où $\Phi\left(.\right)$ est la fonction de répartition de la loi normale.

- La fonction de survie est

$$S(t;\ \lambda,\ \mu) = 1 - \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}-1\right)\right) + \exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}+1\right)\right)\right].$$

- La fonction de risque est

$$h(t;\ \lambda,\ \mu) = \frac{\left[\frac{\lambda}{2\pi t^3}\right]^{1/2}\exp\left(\frac{-\lambda(t-\mu)}{2\mu^2 t}\right)}{1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}-1\right)\right)+\exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}+1\right)\right)\right]}.$$

- La fonction de risque cumulée est

$$H(t;\ \lambda,\ \mu) = -\ln\left[1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}-1\right)\right)+\exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}+1\right)\right)\right]\right].$$

- Son espérance de survie est

$$e(t) = \frac{\mu}{1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}-1\right)\right)+\exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu}+1\right)\right)\right]}.$$

- Sa moyenne est

$$E(T) = \mu.$$

- Sa variance est

$$Var(T) = \frac{\mu^3}{\lambda}.$$

- Le skewness est

$$3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

- Le Kurtosis normalisé est

$$\frac{15\mu}{\lambda}.$$

- La fonction génératrice des moments associée est

$$M_T(t) = e^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right]}.$$

- La fonction caractéristique est

$$\Phi_T(t) = e^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 it}{\lambda}}\right]}.$$

Chapitre 2

Quelques distributions généralisées et leurs propriétés

Dans ce chapitre, nous présentons les propriétés mathématiques de quelques distributions généralisées en se référant à leurs caractéristiques.

2.1 Distribution exponentielle généralisée

La généralisation des fonctions de distribution a attiré beaucoup d'attention et intérêt, après l'introduction d'une distribution (GE) exponentielle généralisée par Gupta et Kundu (1999), plusieurs chercheurs ont concentrées sur l'amélioration de cette fonction de distribution dans différentes directions dont le but est d'obtenir une fonction de distribution plus robuste, et applicable en modélant différents types de données.

2.1.1 Distribution exponentielle généralisée à deux paramètres

C'est une nouvelle distribution notée GE qui a été introduite par les auteurs Gupta et kundu en (1999). Gupta et Kundu (2000, 2001, 2003, 2004, 2007) ont également continué dans cette direction. Ils ont étudié les propriétés de cette distribution, aussi par rapport au Weibull et à la distribution gamma. Ils ont observé que cette distribution peut être employée au lieu des distributions gamma et Weibull (voir [7]).

Densité de probabilité

Définition 2.1.1 *On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée selon la loi exponentielle généralisée à deux paramètres $\alpha,\ \lambda > 0$ et on note $X \rightsquigarrow GE\left(\alpha,\ \lambda\right)$ si elle a pour densité de probabilité la fonction suivante*

$$f_{GE}\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right) = \alpha\lambda\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda x};\ x > 0,\ \alpha,\ \lambda > 0. \tag{2.1}$$

où α est le paramètre de forme et λ est le paramètre d'échelle.

Remarque 2.1.2 *Les fonctions de densités de l'GE peut prendre différentes formes selon la valeur de α ;*
1- pour $\alpha \leq 1$, la fonction de densité est une fonction décroissante.
2- pour $\alpha > 1$, c'est une forme unimodal, similaire à la fonction de Weibull ou gamma, elle n'est pas symétrique.
3- Pour $\lambda = 1$, le mode est égal à

$$\mathrm{mod} = \begin{cases} \log\alpha \ , \textit{ si } \alpha > 1 \\ 0 \qquad , \textit{ si } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

elle a comme médiane $\left[-\ln\left(1 - (0.5)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]$.
4- La moyenne, la médiane et le mode sont des fonctions non linéaires de α, alors que si α tend vers ∞, tout tend vers ∞.
5- Pour des grandes valeurs de α, la moyenne, la médiane et le mode sont approximativement égaux à $(\log\alpha)$, mais ils convergent à des taux différents.

Autres caractéristiques

Considérons la v.a $X \rightsquigarrow GE\left(\alpha,\ \lambda\right)$, alors

- La fonction de répartition associée est

$$F_{GE}\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha};\ x,\ \alpha,\ \lambda > 0.$$

- La fonction de survie est

$$S_{GE}\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha};\ x,\ \alpha,\ \lambda > 0.$$

- La fonction de hasard est

$$h_{GE}\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right)=\frac{\alpha\lambda\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{\alpha}};\ x,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

- La fonction de hasard cumulée est

$$H_{GE}\left(x;\alpha,\lambda\right)=-\ln\left[1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{\alpha}\right];\ x,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

- La fonction renversée de risque est donnée sous la forme pratique suivante

$$r\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right)=\frac{f\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right)}{F\left(x;\ \alpha,\ \lambda\right)}=\frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}.$$

On observe que pour toutes valeurs de α, la fonction renversée de risque est une fonction décroissante de x. La fonction de risque et la fonction renversée de risque peuvent être utilisées pour calculer la matrice de l'information de Fisher des paramètres inconnus, voir ([7]).

- Les différents moments de cette distribution peuvent être obtenus en utilisant sa fonction génératrice des moments.

Définition 2.1.3 *Si la v.a* $X \rightsquigarrow GE\left(\alpha,\ \lambda\right)$, *alors la fonction génératrice des moments* $M_X\left(t\right)$ *de* X *pour* $t<\lambda$, *est*

$$M_X\left(t\right)=E\left(e^{tx}\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{t}{\lambda}+1\right)};\ t,\ \alpha,\ \lambda>0.$$

Par conséquent il suit immédiatement que

$$E\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}\left[\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right)\right].$$

Les moments centrés du deuxièmes, troisièmes et quatrièmes ordre sont

$$\mu_2=\frac{1}{\lambda^2}\left[\psi'\left(1\right)-\psi'\left(\alpha+1\right)+\left(\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right)\right)^2\right],$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{1}{\lambda^3}\Big[\psi''\left(\alpha+1\right)-\psi''\left(1\right)+3\left(\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right)\right)\\ &\qquad \left(\psi'\left(1\right)-\psi'\left(\alpha+1\right)\right)+\left(\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right)\right)^3\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \frac{1}{\lambda^4}\Big[\psi'''\left(1\right)-\psi'''\left(\alpha+1\right)+3\left(\psi'\left(1\right)-\psi'\left(\alpha+1\right)\right)^2+4\left(\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right)\right)\times\\ &\qquad \left(\psi''\left(\alpha+1\right)-\psi''\left(1\right)\right)+6\left(\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right)\right)^2\times\\ &\qquad \left(\psi'\left(1\right)-\psi'\left(\alpha+1\right)\right)+\left(\psi'''\left(1\right)-\psi'''\left(\alpha+1\right)\right)^4\Big].\end{aligned}$$

et

$$Var\,(X) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\psi'\,(1) - \psi'\,(\alpha+1)\right].$$

où $\psi\,(.)$ et ses dérivées $\psi'\,(.)$ sont les fonctions digamma et poly-gamma respectivement.

Remarque 2.1.4 *1- $GE\,(1,\ \lambda)$ représente la distribution exponentielle.*
2- La fonction de risque ne dépend pas du paramètre λ, elle dépend uniquement de α.
3- Pour λ fixé, la fonction de risque correspondant à la distribution GE est décroissante pour $\alpha < 1,$ croissante si $\alpha > 1$ et constante pour $\alpha = 1.$
4- Pour λ fixé, la moyenne de la distribution GE diverge lorsque α augmente.
5- Pour λ fixé la variance augmente également et tend vers $\left(\dfrac{\pi^2}{6\lambda}\right).$
6- Les coefficients skewness β_1 et kurtosis β_2 de GE peuvent être calculées comme suit

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}, \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

7- Les coefficients de skewness et Kurtosis sont indépendant du paramètre d'échelle λ, d'ailleurs, la valeur limite de skewness est approximativement 1.139547. *La distribution exponentielle généralisée a le coefficient skewness de MacGillivray*

$$\gamma_X\,(u;\ \alpha) = \frac{\ln\left(1-u^{1/\alpha}\right) + \ln\left(1-\left(1-u^{1/\alpha}\right)\right) - 2\ln\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha}\right)}{\ln\left(1-u^{1/\alpha}\right) - \ln\left(1-\left(1-u^{1/\alpha}\right)\right)}.$$

où μ_2, μ_3 et μ_4 sont respectivement le deuxième, troisième et quatrième moment centé.

La distribution de la somme

Puisque la fonction génératrice des moments de la distribution GE n'est pas dans une forme très pratique, la répartition de la somme de n v.a $i.i.d$ de l'exponentielle généralisée ne peut pas être obtenue facilement. On constate que si X suit $GE(\alpha, 1)$, alors e^{-X} a la distribution Béta. Étant donné que le produit des v.a bêta indépendantes a été bien étudié dans la littérature, il est utilisé efficacement pour calculer la répartition de la somme de n v.a $i.i.d$ exponentielles généralisées. On observe dans [7] que la distribution de la somme de n v.a $i.i.d$ exponentielles généralisées peut être écrite comme étant mélange infini des distributions exponentielles généralisées.

2.1.2 Distribution exponentielle généralisée à trois paramètres

C'est la distribution qui a comme fonction de répartition pour la v.a X la fonction

$$F_{GE}(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \mu) = \left(1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^{\alpha};\ x > \mu,\ \alpha,\ \lambda > 0. \tag{2.2}$$

où le paramètre α s'appelle le paramètre de forme**,** λ d'échelle et μ de position (voir [6])**.**

On note $X \rightsquigarrow GE(\alpha,\ \lambda,\ \mu)$.

Densité de probabilité

Définition 2.1.5 *Si la v.a X admet comme fonction de répartition la fonction* (2.2)*, alors la densité de probabilité est donnée par*

$$f_{GE}(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \mu) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}};\ x > \mu,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0.$$

Lemme 2.1.6 *La densité de $GE(\alpha,\ \lambda,\ \mu)$ est log-convexe si $\alpha < 1$ et log-concave si $\alpha > 1$.*

Preuve. La preuve résulte du fait que la second dérivée du logarithme de la fonction de densité est

$$\frac{d^2}{dt^2}\log f(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \mu) = -(\alpha - 1)\frac{e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}}{\left(1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^2}.$$

■

Autres caractéristiques

Soit $X \rightsquigarrow GE(\alpha,\ \lambda,\ \mu)$ alors

- Sa fonction de survie est

$$S_{GE}(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \mu) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^{\alpha};\ x > \mu,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0.$$

- Sa fonction de hasard est

$$h_{GE}(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \mu) = \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\left(1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}}{1 - \left(1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^{\alpha}};\ x > \mu,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H_{GE}\left(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \mu\right)=-\ln\left[1-\left(1-e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right)^{\alpha}\right];\ x>\mu,\ \alpha>0,\ \lambda>0.$$

Le tableau suivant montre les différents comportements des distributions : Gamma, Weibull et exponentielle généralisée selon la valeur du paramètre de forme α ;

Tableau 1 :

Comportement des fonctions de hasards des trois distributions

Paramètre	Gamma	Weibull	GE
$\alpha=1$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
$\alpha<1$	Augmente de 0 à $\frac{1}{\lambda}$	Augmente de 0 à ∞	Augmente de 0 à $\frac{1}{\lambda}$
$\alpha>1$	Diminue de ∞ à $\frac{1}{\lambda}$	Diminue de ∞ à 0	Diminue de ∞ à $\frac{1}{\lambda}$

Théorème 2.1.7 *Pour tout $(\lambda,\ \mu)$, la distribution GE a une fonction de hasard croissante si $\alpha>1$, il a une fonction de hasard décroissante si $\alpha<1$ et pour $\alpha=1$ la fonction de hasard est constante pour $x>\mu$.*

Preuve. La preuve se résulte de log-convexité de la fonction de densité (voir [2]). ■

Moments et autre mesures Pour la simplicité et la clarité, nous supposons $\mu=0$ et $\lambda=1$ et développons les résultats pour $GE\left(\alpha\right)=GE\left(\alpha,\ 1,\ 0\right)$, car si $X\rightsquigarrow GE\left(\alpha\right)$ alors $\mu+\lambda X\rightsquigarrow GE\left(\alpha,\ \lambda,\ \mu\right)$.

Si $X\rightsquigarrow GE\left(\alpha\right)$, alors la fonction génératrice des moments notée $M_X\left(t\right)$ correspondante, est donnée par

$$M_X\left(t\right)=E\left(e^{tx}\right)=\alpha\int_0^{\infty}\left(1-e^{-x}\right)^{\alpha-1}e^{(t-1)x}dx. \tag{2.3}$$

En effectuant le changement de variable $y=e^{-x}$, (2.3) devient

$$M_X\left(t\right)=\alpha\int_0^{1}\left(1-y\right)^{\alpha-1}y^{-t}dy=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(1-t\right)}{\Gamma\left(\alpha-t+1\right)};\ t<1. \tag{2.4}$$

différenciant $[\log M\left(t\right)]$ et l'évaluant à $t=0$, on obtient la moyenne et la variance de $GE\left(\alpha\right)$

$$E\left(X\right)=\psi\left(\alpha+1\right)-\psi\left(1\right),\ \text{et } Var\left(X\right)=\psi^{'}\left(1\right)-\psi^{'}\left(\alpha+1\right),$$

où $\psi(.)$ et $\psi^{'}(.)$ sont la fonction digamma et sa dérivé respectivement.

Ces moments peuvent être obtenus en forme des séries finies ou infinies dépendant de α. Puisque $0 < e^{-x} < 1$ pour $x > 0$, en utilisant la série binomiale suivante

$$\left(1 - e^{-x}\right)^{\alpha-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} e^{-jx},$$

(2.3) devient

$$M_X(t) = \alpha \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} e^{-(j+1-t)x} dx. \tag{2.5}$$

Puisque la quantité sous $\sum$ est absolument intégrable, en échangeant l'addition et l'intégration nous avons obtenons

$$M_X(t) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{1}{j+1-t};\ t < 1. \tag{2.6}$$

Nous observons que les séries infinies sont sommables, différentiables et elles ont seulement un nombre fini de termes si α est un nombre entier. Par conséquent en différenciant r fois les moments et l'évaluant à $t = 0$, nous obtenons le moment d'ordre r comme

$$\mu_r = \alpha r! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{1}{(j+1)^{r+1}}, r = 1, 2, ... \tag{2.7}$$

Distribution de la somme et des valeurs extrêmes

Il est bien connu que la distribution d'une somme de v.a gamma indépendantes de même paramètre d'échelle λ est à nouveau une distribution gamma. Elle peut être obtenue très simplement en utilisant la fonction génératrice des moments de la v.a gamma. Dans le cas de la distribution de Weibull, parce que la fonction génératrice des moments n'est pas dans une forme très pratique, nous ne pouvons pas facilement obtenir la répartition de la somme des v.a Weibull indépendantes.

Pour la distribution GE également, la fonction génératrice des moments n'a pas une forme appropriée pour obtenir la répartition de la somme des v.a $i.i.d$ GE.

Cependant, la répartition de la somme peut être obtenue en utilisant une transformation vers la distribution beta.

Définition 2.1.8 *Si* $X \rightsquigarrow GE(\alpha)$, *alors* $U = e^{-X} \rightsquigarrow B(1,\ \alpha)$. *Par conséquent, si* X_1, X_2, ..., X_n *sont des v.a indépendantes telles que* $X_i \rightsquigarrow GE(\alpha_i)$, *alors* $U_i = e^{-X_i} \rightsquigarrow B(1,\ \alpha_i)$ *et* *les U_i sont indépendantes pour $i = 1, ..., n$. Soit*

$$U = \prod_{i=1}^{n} U_i = e^{-\sum_{i=1}^{n} X_i} = e^{-X}. \tag{2.8}$$

On sait que le produit des v.a bêta indépendantes appartient à une famille dont les densités sont des fonctions particulières de fonction de Meijer G, très étudiées dans la littérature (voir [6]). Nous énonçons le résultat suivant sans preuve.

- Sa fonction de densité de probabilité est

$$f_U(u) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j f_B(u; 1, \alpha^* + j),$$

où $\alpha^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $f_B(u; 1, \alpha^* + j)$ est la fonction de densité de la distribution bêta de paramètre 1 et $\alpha^* + j$, et les constantes C_j sont définie par

$$C_0 = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_j + 1)}{\Gamma(1 + \alpha^*)}, \; C_j = \frac{C_0 \alpha^*}{(\alpha^* + j)} C_j^{(n)}; \; j = 1, ...,$$

et

$$C_j^{(2)} = \frac{(\alpha_1)_j (\alpha_2)_j}{j! (\alpha_1 + \alpha_2)_j}, \; C_j^{(k)} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{k-1})_j}{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)_j} \sum_{i=0}^{j} \frac{(\alpha_k)_i}{i!} C_{j-i}^{(k-1)}; \; k = 3, ..., n.$$

avec

$$(\alpha)_j = \frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\alpha)}.$$

En utilisant la transformation (2.8), la fonction de densité de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est

$$f_X(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (\alpha^* + j) e^{-x} \left(1 - e^{-x}\right)^{\alpha^* + j - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j f_{GE}(x; \alpha^* + j) \tag{2.9}$$

pour $X \rightsquigarrow GE(k)$, k un entier, alors sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j F_G(kx; nk + j), \tag{2.10}$$

où les coefficients d_j sont les suivants

$$d_0 = \left(\frac{k!}{k}\right)^n \qquad d_j = \frac{d_0 (nk)_j \, d_j^{(k)}}{k^j}; \; j = 1, \; 2, ...,$$

et

$$d_j^{(2)} = \frac{(n)_j}{(2n)_j\, j!},\ d_j^{(m)} = \frac{((m-1)\,n)_j}{(mn)_j} \sum_{i=0}^{j} \frac{d_{j-1}^{(m-1)}}{i!};\ m = 3,\ 4, ...,\ k.$$

Si α est un petit entier ($< n$), il pourrait être plus facile d'utiliser la dernière représentation (mélange de gamma) et si α est un entier, alors la représentation antérieure (en mélange de GE) pourrait être plus utile. Pour $\alpha = 1$, la fonction de répartition de la somme se réduit à la distribution gamma avec le paramètre de forme n. Lorsque $\alpha = 2$, (2.10) devient

$$F_X(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n)_j}{j! 2^{n+j}} F_G(2x; 2n + j).$$

où F_G est la fonction de répartition de la distribution gamma.

La représentation suivante montre que la répartition du maximum de n variables indépendantes de GE est également une exponentielle généralisée. Il montre que ce modèle peut être utilisé pour représenter un système parallèle.

Théorème 2.1.9 *Si les X_i sont des v.a i.i.d de la distribution $GE(\alpha_i)$, pour $i = 1, ..., n$, alors $X_{(n)} = \max(X_1, ..., X_n)$ est distribuée selon la distribution $GE\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$.*

Le théorème suivant donne une caractérisation de la distribution GE en termes du maximum.

Théorème 2.1.10 *Supposons que $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$ sont des v.a i.i.d. Alors les X_i sont des v.a de la distribution GE si et seulement si le $\max\{X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n\}$ est une v.a de GE.*

Après une normalisation appropriée, les distributions de n v.a maximales et minimales *i.i.d GE* ont tendance à être des distributions de valeur extrême de type I (type Gumbel) et de type III (type Weibull), respectivement. Les résultats peuvent être indiqués comme suit

Théorème 2.1.11 *Si $X_{(n)} = \max\{X_1,\ X_2, ...,\ X_n\}$, où les X_i sont des v.a i.i.d de loi $GE(\alpha)$, alors pour tous $-\infty < y < \infty$, et $b_n = \log n + \log \alpha$,*

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\{X_{(n)} - b_n \leq y\} = e^{-e^{-y}}.$$

Théorème 2.1.12 *Si $X_1 = \min\{X_1,\ X_2, ...,\ X_n\}$, où les X_i sont des v.a i.i.d de la distribution $GE(\alpha)$, puis pour tous $y > 0$ et $c_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$,*

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\{\frac{X_{(1)}}{c_n} \leq y\} = 1 - e^{-y^{\alpha}}.$$

Remarque 2.1.13 *1- $GE\,(1,\ \lambda,\ \mu)$ représente la distribution exponentielle.*
2- Si $\alpha \leq 1$ la densité de probabilité est strictement croissante.
3- Si $\alpha > 1$ la densité de probabilité de la distribution GE est unimodal.
4- La fonction de hasard de GE se comporte comme la fonction de hasard de la distribution gamma et Weibull, malgré que les deux densités sont totalement différentes. Les différents comportements de ces trois distributions sont mentionnés dans le tableau 1.
5- La variance de $GE(\alpha)$ est une fonction croissante de α, la variance augmente jusqu'à une constante, égal à $\frac{\pi^2}{6}$.
6- Les coefficients de Skewness et Kurtosis peuvent être exprimés en termes de fonctions poly-gamma et ils sont des fonctions décroissantes de α.

2.1.3 Distribution exponentielle généralisée à quatre paramètres

Nous présentons une nouvelle distribution appelée la distribution Extension Exponentielle Généralisée (EGE) d'Olapade, s'améliorant, de ce fait, sur le résultat d'Olapade (2014), de Gupta et de Kundu (1999, 2000) en présentant un paramètre additionnel (voir [5]).

- Sa fonction de densité est donnée par

$$f_X(x;\ \mu,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda) = \frac{\alpha\lambda\left(\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-\mu)}}{\left[\beta^{\alpha} - (\beta-1)^{\alpha}\right]};\ x,\ \mu,\ \lambda > 0,\ \alpha,\ \beta > 1. \tag{2.11}$$

- Sa fonction répartition est

$$F(x;\ \mu,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda) = \frac{\left[\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right]^{\alpha}}{e^{\lambda\mu}\left[\beta^{\alpha} - (\beta-1)^{\alpha}\right]};\ x > 0.$$

- Sa fonction de survie est

$$S(x;\ \mu,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda) = 1 - \frac{\left[\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right]^{\alpha}}{e^{\lambda\mu}\left[\beta^{\alpha} - (\beta-1)^{\alpha}\right]};\ x > 0.$$

- Sa fonction de hasard est

$$h(x;\ \mu,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda) = \frac{\alpha\lambda\left(\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{e^{\lambda\mu}\left[\beta^{\alpha} - (\beta-1)^{\alpha}\right] - \left[\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right]^{\alpha}};\ x > 0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H(x;\ \mu,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda) = -\ln\left(\frac{\left[e^{\lambda\mu}\left[\beta^{\alpha} - (\beta-1)^{\alpha}\right] - \left[\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right]^{\alpha}\right]}{(\alpha\beta) - (\alpha-1)\left(\beta - e^{-\lambda(x-\mu)}\right)}\right) + \lambda x;\ x > 0.$$

Remarque 2.1.14 *il est important de noter que l'introduction du paramètre λ dans l'équation* (2.1) *par Olapade (2014) obtenue pour l'équation* (2.11) *n'a aucun effet sur :*
(a) la fonction de risque au point modal.
(b) les propriétés de la fonction de risque du modèle original par Gupta et Kundu(1999).
(c) le facteur de détermination pour l'existence du mode.

Indépendamment du fait que ces propriétés de la fonction de risque sont très importantes dans la statistique inférencielle des données de durée de vie, Gupta et Kundu ont utilisé ces propriétés pour présenter les similitudes de la distribution GE avec quelques autres distributions (gamma et Weibull) .

Par conséquent, la distribution EGE défini par Olapade (2014) n'a pas pu prolonger les propriétés de la fonction de risque du modèle original par Gupta et Kundu (1999) au point modal.

2.1.4 Distribution exponentielle généralisée à six-paramètres

Olapade (2014) a introduit une nouvelle distribution de probabilité appelée Extension Exponentielle Généralisée Modifiée ($MEGE$) à six paramètres (voit [5]).

Définition 2.1.15 *Soit X une v.a continue, alors $X \rightsquigarrow MEGE(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ \mu,\ \sigma)$ si sa fonction de densité est donné par*

$$f_X(x;\ \phi) = \frac{\alpha\lambda\left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}{\sigma\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\frac{\mu}{\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]};\ x,\ \beta,\ \alpha,\ \eta,\ \mu,\ \lambda,\ \sigma > 0.$$

où $\phi = (\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ \mu,\ \sigma)$.

- Sa fonction de répartition est

$$F(x;\ \phi) = \frac{\left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\frac{\mu}{\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]};\ x > 0.$$

- Sa fonction de survie est

$$S(x;\ \phi) = 1 - \frac{\left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\frac{\mu}{\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]};\ x > 0.$$

- Sa fonction de hasard est

$$h(x;\ \phi) = \frac{\alpha\lambda\left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}{\sigma\left[\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\frac{\mu}{\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right] - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]};\ x > 0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H(x;\ \phi) = \lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \ln\left(\frac{\left[\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\frac{\mu}{\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right] - \left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}{\lambda\left(\beta - \eta e^{-\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{\left(\frac{\alpha}{\lambda}-1\right)}}\right);\ x > 0.$$

Si $X \rightsquigarrow MEGE\,(x;\phi)$, également sans aucune perte de généralisation si nous supposons que $\mu = 0$, de sorte que

$$f_X(x;\ \phi) = \frac{\alpha\lambda\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda x}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta - \eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]};\ x,\ \beta,\ \alpha,\ \eta,\ \lambda > 0. \tag{2.12}$$

où $\phi = (\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ 0,\ 1)$ tel que α, β, λ, η, μ, σ, sont des paramètres de forme, extension, échelle, régularisation, position et de dispersion respectivement et notée par $MEGE(.,\alpha,\beta,\lambda\ ,\eta)$ (ou $MEGE$ pour l'abréviation).

Nous obtenons la fonction de répartition F_X à partir de l'équation (2.12)

$$\begin{aligned}
F_X(x;\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ 0,\ 1) &= \int_0^x f_Y(y;\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ 0,\ 1)dy \\
&= K\int_0^x \left(\beta - \eta e^{-\lambda y}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda y}dy;\ K = \frac{\alpha\lambda}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]} \\
&= K\frac{1}{\lambda\eta}\int_0^x \lambda\eta e^{-\lambda y}\left(\beta - \eta e^{-\lambda y}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1}dy \\
&= K\frac{1}{\lambda\alpha}\left(\beta - \eta e^{-\lambda y}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}\Big]_0^x.
\end{aligned}$$

par conséquent nous avons

$$F_X(x;\ \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ 0,\ 1) = \begin{cases} 0 & ;\ x < 0 \\ \dfrac{\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]} & ;\ 0 < x < \infty \\ 1 & ;\ x \geq 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} F_X = 1$, alors f_X est réellement une fonction de densité.

- La fonction de survie correspondante, la fonction de risque et la fonction renversée de risque sont données ci-dessous

$$S(x;\ \phi) = \frac{(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\beta-\eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}.$$

$$h_X(x;\ \phi) = \alpha\lambda \frac{\left(\beta-\eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda x}}{(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta e^{-\lambda x})^{\frac{\alpha}{\eta}}}.$$

$$r_X(x;\ \phi) = \alpha\lambda \frac{\left(\beta-\eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda x}}{(\beta-\eta e^{-\lambda x})^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}}. \tag{2.14}$$

De l'équation (2.12) à l'équation (2.14), si nous prenons $\eta = 1$, nous obtenons les résultats pour la distribution d'EGE introduite par Olapade (2014).

Dans l'équation (2.12) si $\eta = \beta = 1$, nous obtenons la distribution GE introduite par Gupta et Kundu(1999) et si $\eta = \beta = \alpha = 1$ nous obtenons la distribution exponentielle classique avec le paramètre $\mu = 0$.

- La fonction génératrice des moments de la distribution $MEGE$ est donnée par

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x;\phi)\, dx \text{ où } \phi = (\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \eta,\ 0,\ 1) \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]} \int_0^{+\infty} e^{tx} \left(\beta-\eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

$$M_X(t) = K\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1} \int_0^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\beta} e^{-\lambda x}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-x(\lambda-t)} dx. \tag{2.15}$$

où $K = \dfrac{\alpha\lambda}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}$; on pose $p = \dfrac{\eta}{\beta} e^{-t\lambda x}$; $e^{-\lambda x} = \dfrac{\beta p}{\eta}$; $x = -\dfrac{1}{\lambda} \ln\left(\dfrac{\beta p}{\eta}\right)$ et $x = \ln\left(\dfrac{\beta p}{\eta}\right)^{-1/\lambda} \Longrightarrow dx = -(\lambda p)^{-1} dp$

En utilisant l'équation (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} M_X(t) &= -K\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1} \int_{\frac{\eta}{\beta}}^{0} (1-p)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} \left(\frac{\beta}{\eta}\right)^{1-\frac{t}{\lambda}} p^{1-\frac{t}{\lambda}} (\lambda p)^{-1} dp \\ &= -K\eta^{\frac{t}{\lambda}-1} \beta^{\frac{\alpha}{\eta}-\frac{t}{\lambda}} \lambda^{-1} \int_{\frac{\eta}{\beta}}^{0} (1-p)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} p^{-\frac{t}{\lambda}} dp \end{aligned}$$

$$M_X(t) = K\eta^{\frac{t}{\lambda}-1}\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-\frac{t}{\lambda}}\lambda^{-1}\int_0^{\frac{\eta}{\beta}} (1-p)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} p^{-\frac{t}{\lambda}} dp. \tag{2.16}$$

Par développement binomial de $(1-p)^{\frac{\alpha}{\eta}-1}$ et en remplaçant K, l'équation (2.16) devient

$$M_X(t) = \frac{\alpha\eta^{\frac{t}{\lambda}-1}\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-\frac{t}{\lambda}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\int_0^{\frac{\eta}{\beta}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r .C\left(\frac{\alpha}{\eta}-1, r\right).p^{r-\frac{t}{\lambda}} dp$$

où

$$C\left(\frac{\alpha}{\eta}-1, r\right) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\eta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\eta}-2\right)...\left(\frac{\alpha}{\eta}-r\right)}{r!}.$$

donc

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\alpha\eta^{\frac{t}{\lambda}-1}\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-\frac{t}{\lambda}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\int_0^{\frac{\eta}{\beta}} \sum_{r=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\left(i-\frac{\alpha}{\eta}\right)\frac{p^{r-\frac{t}{\lambda}}}{r!} dp \\ &= \frac{\alpha\eta^{\frac{t}{\lambda}-1}\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-\frac{t}{\lambda}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\frac{\left(i-\frac{\alpha}{\eta}\right)}{r!}\int_0^{\frac{\eta}{\beta}} p^{r-\frac{t}{\lambda}} dp. \end{aligned}$$

Comme la série converge en échangeant l'intégrale et l'addition, nous obtenons

$$M_X(t) = \frac{\alpha\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\psi(r)}{r!}\frac{\eta^r}{\beta^r\left(r+1-\frac{t}{\lambda}\right)}$$

$$M_X(t) = \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\psi(r)\,\eta^r}{\beta^r r!}\left(r+1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \tag{2.17}$$

où

$$\psi(r,\ \alpha,\ \eta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{r}\left(i-\frac{\alpha}{\eta}\right) & ; r>0 \\ 1 & ; r=0 \end{cases}.$$

Posons

$$C = \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\psi(r)\,\eta^r}{\beta^r r!}\ ;\ u=-\frac{2}{\lambda}\ ;\ v=\frac{1}{\lambda}.$$

par différenciement k fois l'équation (2.17), nous obtenons

$$M_X(t)^{(k)} = C\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}D^s\left(\eta^{ut}\right)D^{k-s}\left(r+1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

$$M_X(t)^{(k)} = C\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(\ln\eta^u)\,\eta^{ut}\,(k-s)!\left(r+1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-(k-s+1)}v^{k-s}. \tag{2.18}$$

L'évaluation de l'équation (3.9) au point $t=0$ donne le moment centré d'ordre k de $MEGE$

$$\begin{aligned}\mu_k &= \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{k!\,(-2)^s\,(\ln\eta)^s}{\lambda^k s!r!\,(r+1)^{k+1-s}}\psi(r)\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^r\\ &= \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{k!}{\lambda^k r!\,(r+1)^{k+1}}+\sum_{s=0}^{k}\frac{k!\,(-2)^s\,(\ln\eta)^s}{\lambda^k s!r!\,(r+1)^{k+1-s}}\right)\psi(r)\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^r\end{aligned}$$

$$\mu_k = \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}k!\lambda^{-k}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\left(1+\sum_{s=0}^{k}\frac{k!\,(-2\,(r+1)\,(\ln\eta))^s}{s!}\right)\psi(r)\,\frac{\left(\beta^{-1}\eta\right)^r}{r!\,(r+1)^{k+1}}. \tag{2.19}$$

De l'équation (2.19) nous calculons la moyenne, la variance, skewness et les Kurtosis. En outre, lorsque $s=0$, nous obtenons

$$\mu_k = \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}k!\lambda^{-k}}{\eta^{-\frac{2t}{\lambda}}\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}\psi(r)\,\frac{\left(\beta^{-1}\eta\right)^r}{r!\,(r+1)^{k+1}}.$$

si nous posons $\eta=1$ et $\lambda=1$, alors nous obtenons

$$\mu_k = \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\eta}-1}k!}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}\frac{\beta^{-r}}{(r+1)^{k+1}}.$$

Comme cas particulier, ce résultat est prouvé par Olapade (2014).

Médiane de distribution exponentielle généralisée prolongée modifiée

Ici, nous cherchons $x_m\in\mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{x_m} f(x)\,dx = \frac{1}{2};\quad \Longrightarrow F(x_m) = \frac{1}{2}.$$

L'équation (2.13), implique

$$\frac{\left(\beta-\eta e^{-\lambda x_m}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}-(\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}\right]} = \frac{1}{2}.$$

La solution de cette équation donne la médiane x_m

$$x_m = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\eta}\left[\beta-\left(\frac{\beta^{\alpha/\eta}-(\beta+\eta)^{\alpha/\eta}}{2}\right)^{\frac{\eta}{\alpha}}\right].$$

Le mode de la distribution MEGE

Existe-t-il $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) \geq f(x)$ pour tout $x > 0$

De l'équation (2.12)

$$f_X(x;.) = K\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda x};\ K = \frac{\alpha\lambda}{\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}}.$$

Ainsi la première dérivée de f est donné par

$$f_X' = K\lambda\left[\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-2} e^{-\lambda x}\left(\alpha e^{-\lambda x} - \beta\right)\right].$$

résolvant $f' = 0$, nous obtenons les trois solutions

$$x_1 = \infty \text{ ou } x_2 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\beta}{\eta}\right) \text{ ou } x_3 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Seules les solutions x_2 et x_3 sont admissibles. Nous employons la deuxième dérivée de f_X donné par

$$f_X'' = K\lambda^2 e^{-\lambda x}\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-2}\left[(\alpha-2\eta)\, e^{-\lambda x}\left(\alpha e^{-\lambda x} - \beta\right) - \left(2\alpha e^{-\lambda x} - \beta\right)\right].$$

On remarque que $f_X''(x_2) = 0$ donc x_2 ne s'agit pas d'un maximum c'est-à-dire n'est pas un point modal

$$f_X''(x_3) = C(\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}+2};\ C = K\lambda^2\beta^{\frac{\alpha}{\eta}}\alpha^{\frac{\alpha}{\eta}+1}. \tag{2.20}$$

Pour $\alpha > \eta$ et comme C est une constantes positive alors le mode est au point x_3, donc f_X est unimodal au point x_3.

f_X, S_X, h_X et r_X sont donnés par

$$\begin{aligned}(i)\ f_X(x_3) &= \frac{\alpha\lambda(\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\alpha - \frac{\alpha\eta}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}};\ (ii)\ S_X(x_3) = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\alpha - \frac{\alpha\eta}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}}.\\ (iii)\ h_X(x_3) &= \frac{\alpha\lambda(\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}};\ (iv)\ r_X(x_3) = \frac{\alpha\lambda(\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{(\alpha-\eta)^{\frac{\alpha}{\eta}} - \left(\alpha - \frac{\alpha\eta}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}}}.\end{aligned}$$

d'après l'équation (2.20), la condition suffisante pour l'existence du point modal est $\alpha > \eta$ ce qui est indépendant de β et si nous posons $\eta = 1$, nous obtenons la condition suffisante de l'existence du point modal de la distribution GE introduit par Gupta et Kundu (1999).

Comportement de la fonction de risque instantané

Lemme 2.1.16 *(Glaser 1980) Soit f une fonction de densité deux fois différentiable d'une v.a continue X on définit $h(x) = \dfrac{f_X'(x)}{f_X(x)}$. Supposons, que la première dérivée $h'(x)$ existe.*
1- Si $h'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, alors la fonction de risque croissante.
2- Si $h'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, alors la fonction de risque décroissante.
3- S'il existe x_0 tels que $h'(x) < 0$ pour tout $0 < x < x_0$, $h'(x) = 0$ et $h'(x) > 0$ pour tout $x > x_0$, et $\lim_{x \longrightarrow \infty} f_X(x) = 0$, alors la fonction de risque est en forme de baignoire inversée.
4- S'il existe x_0 tels que $h'(x) > 0$ pour tout $0 < x < x_0$, $h'(x) = 0$ et $h'(x) < 0$ pour tout $x > x_0$. Et $\lim_{x \longrightarrow \infty} f_X(x) = \infty$, alors la fonction de risque est en forme de baignoire.

Pour étudier le comportement de la fonction de risque instantané de la distribution de $MEGE$, il suffit de définir

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{d \log_e (f(x))}{dx} \\ &= \frac{d\left(\log_e K + \left(\frac{\alpha}{\eta} - 1\right) \log_e \left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right) - \lambda x\right)}{dx} \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha}{\eta} - 1\right) \lambda \eta e^{-\lambda x}}{\beta - \eta e^{-\lambda x}} - \lambda. \end{aligned}$$

ainsi

$$h'(x) = \frac{-\beta \lambda^2 (\alpha - \eta) e^{-\lambda x}}{\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^2}. \tag{2.21}$$

Par conséquent, d'après (2.20), (2.21) et le lemme 2.1.16 nous énonçons le théorème suivant

Théorème 2.1.17 *Soit X une v.a continue de la loi $MEGE$, alors :*
(i) $h'(x) < 0$ pour tout $x > 0$ si $\alpha > \eta$, alors la fonction de risque de $MEGE$ est croissante.
(ii) $h'(x) > 0$ pour tout $x > 0$ si $\alpha < \eta$, alors la fonction de risque de $MEGE$ est décroissante.
(iii) $h'(x) > 0$ pour tout $x > 0$ si $\alpha = \eta$, alors la fonction de risque de $MEGE$ est constante.
(iv) la densité de $MEGE\ (.; \alpha\ ,\ \beta,\ \lambda,\ \eta)$ est log-concave si $\alpha > \eta$ et log-convexe si $\alpha < \eta$.

Preuve. La preuve se résulte de l'utilisation des équations (2.20), (2.21) et le lemme 2.1.16. Comme cas particulier, pour $\eta = 1$ on retrouve le résultat obtenu par Gupta et à Kundu (1999, 2000, 2001). ∎

L'équation différentielle ordinaire de la distribution MEGE

Soit f_X une fonction à valeurs réelles monotone continue, nous supposons que f est une solution unique de certain ODE à valeur initiale. En effet, l'unicité de la solution caractérise la fonction de densité.

Théorème 2.1.18 *Soit g une fonction à valeurs réelles continue, alors g est une solution du problème* (2.22) *à valeur initiale si et seulement si $g = f_X$.*

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right) g'(x) + \lambda \left(\beta - \alpha e^{-\lambda x}\right) g(x) = 0 \\ g(0) = \dfrac{\alpha\lambda (\beta - \eta)^{\frac{\alpha}{\eta}-1}}{\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta - \eta)^{\frac{\alpha}{\eta}}} \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Preuve. Étant donné

$$\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right) g'(x) + \lambda \left(\beta - \alpha e^{-\lambda x}\right) g(x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{\lambda \left(\beta - \alpha e^{-\lambda x}\right)}{\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)} dx;$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \lambda \left(\alpha \int \frac{e^{-\lambda x}}{\left(\beta - e^{-\lambda x}\right)} dx - \beta \int \frac{dx}{\left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)} \right) \tag{2.23}$$

si nous prenons $u = \beta - \eta e^{-\lambda x}$; $\Longrightarrow du = \lambda \eta e^{-\lambda x} dx$, donc (2.23)

$$\Leftrightarrow \ \ln g(x) = \left(\left(\frac{\alpha}{\eta} \right) \int \frac{du}{u} - \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{\beta - u} \right) du \right)$$

$$\Leftrightarrow \ \ln g(x) = \ln \left(u^{\frac{\alpha}{\eta}-1} (\beta - u) C \right); \quad \Longrightarrow g(x) = u^{\frac{\alpha}{\eta}-1} (\beta - u) C;$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \eta e^{-\lambda x} \left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} C. \tag{2.24}$$

en utilisant la condition initiale, nous obtenons

$$C = \frac{\alpha\lambda}{\eta \left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta - \eta)^{\frac{\alpha}{\eta}} \right]}.$$

par substitution C dans (2.24), nous obtenons

$$g(x) = \frac{\alpha\lambda \left(\beta - \eta e^{-\lambda x}\right)^{\frac{\alpha}{\eta}-1} e^{-\lambda x}}{\left[\beta^{\frac{\alpha}{\eta}} - (\beta - \eta)^{\frac{\alpha}{\eta}} \right]}.$$

■

2.2 Distribution inverse exponentielle généralisée

Cette section considère une distribution exponentielle généralisée inversée à trois paramètres notée IGE. Elle se concentre sur l'analyse théorique de la distribution exponentielle généralisée inverse au modèle dans laquelle un certain temps de fonctionnement a déjà été accumulé pour l'équipement d'intérêt. Aussi, elle présente la relation entre le paramètre de forme et d'autres propriétés telles que $f_{IGE}(t)$, $F_{IGE}(t)$, $S_{IGE}(t)$, $h_{IGE}(t)$, $H_{IGE}(t)$. Le coefficient de variation, le coefficient de skewness et de coefficient de kurtosis sont présentés mathématiquement.

2.2.1 Analyse des modèles exponentiels généralisées inverses

Cette nouvelle distribution a été traîté par M. Suhaib Khan dans l'article "Theoretical Analysis of Inverse Generalized Exponential Models" en 2011.

Densité de probabilité

Définition 2.2.1 *La distribution exponentielle généralisée inverse* (IGE) *à trois paramètres* $\beta > 0, \eta > 0$ *et* $t_0 > 0$ *peut être employée pour représenter la fonction de densité de probabilité d'une durée de vie d'une v.a* T *qui est donnée par*

$$f_{IGE}(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right]^{\beta}, \ \eta > 0, \ \beta > 0, \ t_0 > 0, \ -\infty < t_0 < t. \quad (2.25)$$

où $\beta > 0$ *est le paramètre de forme qui représente le motif différent de la densité de probabilité de l'IGE,* $\eta > 0$ *est le paramètre d'échelle et* t_0 *est la paramètre de position ou de seuil (parfois appelé un temps de garantie, temps échec-libre ou vie minimum).*

- Quand $t_0 = 0$, la distribution IGE est considérée comme une distribution exponentielle généralisée inverse à deux paramètres et sa densité doit être donnée par

$$f_{IGE}(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\beta}, \eta > 0, \beta > 0.$$

- Si $t_0 > 0$ alors l'origine de la densité se trouve à gauche de la densité des données de vie enregistrées.

- Quand $t_0 < 0$, l'origine de la fonction de densité de la distribution IGE se trouve à droite de densité de probabilité.

Fonction de répartition

Définition 2.2.2 *La fonction de répartition de la distribution IGE est donnée par*

$$F_{IGE}(t) = \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right]^{\beta}, \ \eta > 0, \ \beta > 0, \ t_0 > 0, \quad -\infty < t_0 < t.$$

- Quand $t = t_0 + \eta$ alors $F_{IGE}(t_0 + \eta) = \left(\exp\left(-\frac{1}{\eta}\right)\right)^{\beta}$.

- Pour $\eta = 1$ alors $F_{IGE}(t_0 + 1) = (\exp(-1))^{\beta} = (0.3678)^{\beta}$, il représente la vie caractéristique ou la valeur caractéristique.

Fonction de survie

Définition 2.2.3 *C' est la fonction connu par la fonction de fiabilité, est définie comme suit*

$$S_{IGE}(t) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right]^{\beta}, \ \eta > 0, \ \beta > 0, \ t_0 > 0, \quad -\infty < t_0 < t.$$

- Nous voyons que $S_{IGE}(t) + F_{IGE}(t) = 1$.

Fonction de hasard

Définition 2.2.4 *La fonction de risque est également connue sous le nom de fonction de risque ou de taux d'échec instantanné, et est donnée par*

$$h_{IGE}(t) = \frac{\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right]^{\beta}}{1 - \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right]^{\beta}}, \ \beta, \ \eta, \ t_0 > 0, \quad -\infty < t_0 < t.$$

- Quand $\beta = 1$, la distribution est identique à la distribution exponentielle inverse avec une fonction de risque constante.

- Quand $\beta < 1$, la fonction de risque est continûment décroissante et représente des défaillances constatées.

- Quand $\beta > 1$, la fonction de risque est continûment croissante et représente des défaillances survenues.

Fonction de hasard cumulée

Définition 2.2.5 *Cette fonction est définie par*

$$H_{IGE} = -\ln \left| 1 - \exp\left[-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right]^{\beta} \right|, \ \beta, \ \eta, \ t_0 > 0, \ \ -\infty < t_0 < t.$$

Remarque 2.2.6 *1- l'inverse exponentielle généralisé est une distribution très robuste. Il peut être utilisé pour représenter Une grande variété de modèles de durrée de vie en cours d'utilisation pour de nombreux types de produits.*
2- Les relations entre la répartition et la fonction de hasard cumulée de la distribution IGE sont représenté par

$$F_{IGE}(t) = 1 - \exp\left[-H_{IGE}(t)\right] \ \text{ ou } H_{IGE}(t) = -\ln\left[1 - F_{IGE}(t)\right].$$

Evaluation des moments inverses du modèle inverse exponentiel généralisé

L'estimateur des moments inverse du modèle inverse exponentiel généralisé est définie comme

$$\mu_{r^{-1}} = \left(\frac{n}{\beta}\right)^r \Gamma(1+r), \ r = 1, 2, 3, 4, ...$$

L'estimateur des moments inverse est utile pour trouver les propriétés de la distribution inverse exponentielle généralisée. L'estimation par les moments inverses pour les paramètres est

$$m_{r^{-1}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i^r}.$$

Coefficient de variation

Le coefficient de variation CV_{IGE} est le rapport entre la fonction de survie et le $MTTF$ de l'IGE et

$$CV_{IGE} = 1.$$

Il est clair qu'il existe un coefficient de variation unique de la vie. La relation entre β et CV_{IGE} est fixée. La plus grande ou la plus petite valeur de β n'a aucun effet sur la valeur de CV_{IGE}.

Coefficient de Skewness

Le coefficient de Skewness CS_{IGE} est définie comme $\dfrac{E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^3}{\left(E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ tel que

$$\begin{aligned} E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^3 &= \frac{2\eta^3}{\beta^3}, \\ E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^2 &= \frac{\eta^2}{\beta^2}. \end{aligned}$$

où $CS_{IGE} = 2$ est la quantité utilisée pour mesurer le skewness de la distribution IGE, ici $CS_{IGE} > 0$.

- Lorsque $\beta < 0$, il est clair que le skewness n'est pas défini.

Coefficient de Kurtosis

Le coefficient de Kurtosis défini comme $\dfrac{E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^4}{\left(E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^2\right)^2}$ tel que

$$E\left(t^{-1}-E\left(t^{-1}\right)\right)^4 = \frac{9\eta^4}{\beta^4}.$$

où $CK_{IGE} = 9$, cette quantité est utilisée pour mesurer le kurtosis ou la décroissance de la distribution.

Ces propriétés $f_{IGE}(t)$, $F_{IGE}(t)$, $h_{IGE}(t)$, $H_{IGE}(t)$, $S_{IGE}(t)$ peuvent être utilisés pour mesurer la vie du système ou du processus. Il est important de noter que CV_{IGE}, CS_{IGE} et CK_{IGE} sont indépendants de t_0 et CV_{IGE}, CS_{IGE} et CK_{IGE} sont tous des valeurs fixes. Il convient de mentionner que lorsque $\eta = 1$ et $t_0 = 0$, la distribution est parfois appelée la distribution exponentielle inverse généralisée standard sous la relation entre β et ces propriétés.

2.3 Distribution de Pareto généralisée

La distribution Pareto généralisée (GP) a été introduite par Pikands (1975) et a encore été étudié par Davison, Smith (1984), Castillo (1997, 2008) et autres. Cette distribution peut être utilisée pour approcher la loi des excès.

La GP a des applications dans certains de domaines, à savoir des études de fiabilité, la modélisation dans le domaine d'assurance. Ainsi joue un rôle important dans la modélisation des évènements extrêmes. Par exemple pour l'analyse des données sur les précipitations, dans l'analyse de la fréquence des inondations annuelles, dans l'analyse des données de la plus grande hauteur de vagues ou le niveau de la mer, les vents maximaux, analyse maximale de la chute de pluie, de rupture force des matériaux, charges d'avion, etc (voir [11]).

Fonction de répartition

Définition 2.3.1 *Considérons une v.a Y de distribution exponentielle standard. Soit une v.a X défini comme*

$$X = b\left(1 - \exp\left(-aY\right)\right)/a,$$

où a et b sont des paramètres.
Alors, la distribution de X est de Pareto généralisée à deux paramètres.
Si c est le seuil ou la limite inférieure de X, alors la distribution de X est la distribution de Pareto généralisée que l'on note GP à trois paramètres qui peut être exprimé par

$$F_{GP}\left(x;\ a,\ b,\ c\right) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{a(x-c)}{b}\right]^{\frac{1}{a}} & ,\ si\ a \neq 0 \\ 1 - \exp\left[-\frac{x-c}{b}\right] & ,\ si\ a = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

avec $b > 0$, $x \geq 0$ pour $a \geq 0$ et $0 \leq x \leq \dfrac{-b}{a}$ pour $a < 0$.
où c est le paramètre de position, b est le paramètre d'échelle, a est le paramètre de forme, et $F\left(x\right)$ est la fonction de répartition.

Densité de probabilité

Définition 2.3.2 *La fonction de densité de probabilité de la distribution GP est donnée par*

$$f_{GP}\left(x;\ a,\ b,\ c\right) = \begin{cases} \frac{1}{b}\left[1 - \frac{a(x-c)}{b}\right]^{\frac{1}{a}-1} & ,\ si\ a \neq 0 \\ \frac{1}{b}\exp\left[-\frac{x-c}{b}\right] & ,\ si\ a = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.3.3 *1- La distribution GP se réduit à la distribution GP de deux paramètres pour $c = 0$.*
2- Pour $a = 0$ et $c = 0$, GP se réduit à la distribution exponentielle.
3- Quand $c = 0$ et $a = 1$, GP se réduit à la distribution uniforme sur $[a, b]$.

Quelques propriétés importantes de la distribution GP

Certaines propriétés importantes de la distribution GP méritent d'être mentionnées :

1- Pickands(1975) a montré que la distribution GP donné par l'équation (2.26) est la distribution limite pour les excès au delà d'un seuil si et seulement si la distribution est dans le domaine d'attraction de l'une des distributions de valeurs extrêmes.

2- Par comparaison avec la distribution exponentielle, la distribution GP a une queue plus lourde pour $a < 0$ (distribution à queue longue) et une queue plus légère pour $a > 0$ (distribution à queue courte).

3- Soit $Z = \max(c,\ X_1,\ X_2, ...,\ X_N)$, où $N > 0$ est un entier. Si $X_i,\ i = 1,\ 2, ...,\ N$, sont $i.i.d$ de la distribution GP, et N a une distribution de Poisson, alors Z a la distribution généralisée des valeurs extrêmes. Ainsi, un processus de Poisson des temps de dépassement avec des excès GP implique la distribution classique de la valeur extrême. En cas particulier, le maximum d'un nombre de Poisson de variantes exponentielles est une distribution de Gumbel. Alors les pics exponentiels mènent à Gumbel maxima et les pics de distribution GP conduire à des maxima des GEV. La GEV peut être exprimé comme suit

$$F(z) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1-\delta\dfrac{z-\gamma}{\beta}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right] & ;\ \delta \neq 0, z \geq 0 \\ \exp\left[-\exp\left(-\dfrac{z-\gamma}{\beta}\right)\right] & ;\ \delta = 0. \end{cases}$$

où les paramètres δ, β et γ sont indépendants de z. En outre, $\delta = a$; c'est-à-dire que les paramètres de forme des distributions GEV et GP sont les mêmes. Notez que Z n'est pas autorisé à prendre des valeurs négatives, et

$$\Pr(Z < 0) = 0 \text{ et } \Pr(Z = 0) = \exp(-x),$$

4- La fonction de taux de hasard est exprimée comme suit

$$h(t) = \frac{1}{[b - a(x-c)]}.$$

c'est une fonction monotone, décroissante si $a < 0$, constante si $a = 0$ et croissante si $a > 0$.

2.4 Distribution de classe x-exponentielle généralisée (G x-exponentielle)

Considérons la fonction de répartition,

$$F(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \beta) = \left[1 - \left(\beta + \lambda x^2\right) e^{-\lambda x}\right]^{\alpha};\ x,\ \alpha,\ \lambda\ ,\beta > 0.$$

La fonction de taux de hasard, a fourni différents modèles en forme de baignoire selon les valeurs des paramètres α, λ et β. Elle est donnée par

$$h(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \beta) = \frac{\alpha e^{-\lambda x}\left(\lambda^2 x^2 - 2\lambda x + \lambda\right)\left(1 - \left(\beta + \lambda x^2\right) e^{-\lambda x}\right)^{\alpha - 1}}{1 - \left(1 - \left(\beta + \lambda x^2\right) e^{-\lambda x}\right)^{\alpha}};\ x,\ \alpha,\ \lambda\ ,\beta > 0.$$

- La fonction de survie associée à ce modèle est

$$S(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \beta) = 1 - \left(1 - (\beta + \lambda x) e^{-\lambda x}\right)^{\alpha};\ x,\ \alpha,\ \lambda\ ,\beta > 0.$$

- La fonction de hasard cumulée définie comme $[-\ln(S(x))]$ est

$$H(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \beta) = -\ln\left[1 - \left(1 - \left(\beta + \lambda x^2\right) e^{-\lambda x}\right)^{\alpha}\right];\ x,\ \alpha,\ \lambda\ ,\beta > 0.$$

Le taux de hasard est en forme de baignoire renversé pour

$$F(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \beta) = \left(1 - (\beta + \lambda x) e^{-\lambda x}\right)^{\alpha};\ x,\ \alpha,\ \lambda\ ,\beta > 0.$$

Toutes les procédures pour trouver les moments, la fonction génératrice des moments, et la fonction caractéristique sont similaires à celles de la distribution x-exponentielle. Si nous insérons un autre paramètre θ dans le modèle nous obtenons toujours la forme en baignoire et en baignoire renversée pour ses fonctions de hasard pour

$$F(x;\ \alpha,\ \lambda,\ \beta,\ \theta) = \left(1 - \left(\beta + \lambda x + \theta x^2\right) e^{-\lambda x}\right)^{\alpha};\ x,\ \lambda,\ \alpha,\ \beta,\ \theta > 0.$$

2.5 Distribution gaussienne inverse généralisée

La loi inverse-gaussienne généralisée est une loi de probabilité continue qui généralise la loi inverse-gaussienne en introduisant un troisième paramètre. Cette loi est utilisée, par exemple, en géostatistique, en hydrologie ou en finance. Elle a été initialement proposée par le statisticien et hydraulicien Etienne Halphen, la loi est également connue sous le nom de loi Sichel. Elle intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes réels, notamment la modélisation de données concernant des temps d'attente, des phénomènes extrêmes en hydrologie (voir [1]).

Soit X une v.a suit une loi inverse-gaussienne généralisée, alors

- Sa fonction de densité est

$$f\left(x;\ \lambda,\ \delta,\ \gamma\right)=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\lambda}\frac{1}{2K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)}x^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma^{2}x+\frac{\delta^{2}}{x}\right)};x>0,\ \delta,\ \gamma\geq 0,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

où K_{λ} est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce et de paramètre λ, tel que ces paramètres vérifient

$$\begin{cases}\delta\geq 0\ ,\gamma>0\ \text{ si }\ \lambda>0,\\ \delta>0\ ,\gamma>0\ \text{ si }\ \lambda=0,\\ \delta>0\ ,\gamma\geq 0\ \text{ si }\ \lambda<0,\end{cases}$$

On note $X\rightsquigarrow GIG\left(\lambda,\ \delta,\ \gamma\right).$

- Sa moyenne est

$$E(X)=\frac{\delta K_{\lambda+1}\left(\delta\gamma\right)}{\gamma K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)}.$$

- Son mode est

$$\text{mod}=\frac{(\lambda-1)+\sqrt{(\lambda-1)^{2}+(\delta\gamma)^{2}}}{\gamma^{2}}.$$

- Sa variance est

$$Var(X)=\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{2}\left[\frac{K_{\lambda+2}\left(\delta\gamma\right)}{K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)}-\left(\frac{K_{\lambda+1}\left(\delta\gamma\right)}{K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)}\right)^{2}\right].$$

- Sa fonction génératrice des moments est

$$M_{X}\left(t\right)=\left(\frac{\gamma^{2}}{\gamma^{2}-2t}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{K_{\lambda}\left(\sqrt{\delta^{2}\left(\gamma^{2}-2t\right)}\right)}{K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)}.$$

- Sa fonction caractéristique est

$$\Phi_{X}\left(t\right)=\left(\frac{\gamma^{2}}{\gamma^{2}-2it}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{K_{\lambda}\left(\sqrt{\delta^{2}\left(\gamma^{2}-2it\right)}\right)}{K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)}.$$

- Son entropie est

$$\begin{aligned} H\left(f\left(x\right)\right) &= \left[\log\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) + \log\left(2K_{\lambda}\left(\delta\gamma\right)\right) - \left(\lambda-1\right)\frac{\left[\frac{d}{dv}K_{v}\left(\delta\gamma\right)\right]_{v=\lambda}}{K_{v}\left(\delta\gamma\right)} + \right. \\ &\qquad \left. \frac{\delta\gamma}{2K_{v}\left(\delta\gamma\right)}\left(K_{\lambda+1}\left(\delta\gamma\right) + K_{\lambda-1}\left(\delta\gamma\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

où $\left[\frac{d}{dv}K_{v}\left(\delta\gamma\right)\right]_{v=\lambda}$ est la dérivée par rapport à l'ordre v de la fonction de Bessel modifiée et évaluée en $v=\lambda$.

Remarque 2.5.1 *1- Lorsque $\lambda=-\frac{1}{2}$, la loi $GIG\left(-\frac{1}{2},\ \delta,\ \gamma\right)$ est une loi inverse-gaussienne.*

2- La loi gamma est un cas particulier de la loi inverse-gaussienne généralisée pour $\delta=0$.

Chapitre 3

Application sur quelques distributions généralisées

Au troisième chapitre nous donnons des applications des distributions généralisées en fiabilité et en analyse des données en réalisant l'impact de ces dernières sur la qualité de la modélisation en utilisant des critères d'information comme AIC, BIC, AIC_C.

3.1 Critères d'information pour la sélection des modèles

Dans cette partie nous avons définie quelques critères d'information pour séletionner le bon modèle.

3.1.1 Critère d'information d'Akaike

Le critère d'information d'Akaike (AIC) est une mesure de la qualité d'un modèle statistique proposée par Hirotugu Akaike en 1973. Ce critère permet de pénaliser les modèles en fonction du nombre de paramètres. On choisit alors le critère d'information d'Akaike le plus faible.

Définition 3.1.1 *Le critère d'information d'Akaike définie comme suit*

$$AIC = 2k - 2\ln(l) .$$

où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle et l est la fonction du maximum de vraisemblance du modèle.

L'AIC est basé sur la théorie de l'information : il propose une estimation de la perte d'information lorsqu'on utilise le modèle considéré pour représenter le processus qui génère les données. L'AIC ne fournit pas un test de modèle dans le sens d'une hypothèse nulle, c'est-à-dire que ce test ne dit rien de la qualité absolue du modèle.

3.1.2 Utilisation pratique de l'AIC

Supposons disposer d'un ensemble de modèles candidats, dont on calcule les valeurs d'AIC associées. Il y aura toujours une perte d'information, du fait qu'on utilise un modèle pour représenter le processus générant les données réelles, et nous cherchons donc à sélectionner le modèle qui minimise cette perte d'information (ou plus exactement son estimation par l'AIC).

Notons les diverses valeurs d'AIC des différents modèles AIC_1, $AIC_2, ...,$ AIC_R et $AIC_{\min}$ le minimum de ces valeurs. Dans ce cas $\exp\left(\left(\frac{AIC_{\min}-AIC_i}{2}\right)\right)$ peut être interprété comme la probabilité pour que le $i^{ème}$ modèle candidat minimise l'estimation de la perte d'information, où la quantité $\exp\left(\left(\frac{AIC_{\min}-AIC_i}{2}\right)\right)$ est la vraisemblance relative au modèle i.

3.1.3 Critère d'information d'Akaike corrigé AIC$_C$

L'$AICc$ a été proposé en premier lieu par Hurvich et Tsai (1989).

Définition 3.1.2 *L'AIC_C est une correction de l'AIC pour le cas d'échantillons de petite taille, est donnée par*

$$AIC_C = AIC + \frac{2k\,(k+1)}{n-k-1}.$$

où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle et n est la taille de l'échantillon.

L'utilisation de l'AIC_C à la place de l'AIC lorsque n n'est pas assez grand que k augmente la probabilité de sélectionner un modèles avec un trop grand nombre de paramètres, c'est-à-dire de sur-ajuster. Cette probabilité de sur-ajustement avec l'AIC peut être élevée dans certains cas. On note d'ailleurs que l'AIC_C tend vers l'AIC lorsque n devient grand. On remarquera que lorsque le nombre de paramètres k est le même pour tous les modèles, alors l'AIC_C et l'AIC auront des valeurs relatives identiques. Dans cette situation l'AIC peut donc toujours être utilisé.

3.1.4 Critère d'information Bayésien

Le critère d'information Bayésien est un critère d'information dérivé du critère d'information d'Akaike (AIC) proposé par Gideon Schwarz en 1978.

Définition 3.1.3 *Sa formule est donnée par*

$$BIC = k \ln (n) - 2 \ln (l) .$$

avec l la fonction du maximum de vraisemblance du modèle, n le nombre d'observations dans l'échantillon et k le nombre de paramètres du modèle.

La sélection du modèle

Le modèle qui sera sélectionné est celui qui minimise le critère BIC, soit

$$M_{BIC} = \arg_{\mathrm{mod}\, els} \min BIC (M) .$$

3.1.5 Comparaison au BIC

- L'AIC pénalise le nombre de paramètres moins fortement que le BIC.

- L'AIC et l'AIC_C possèdent certains avantages théoriques sur le BIC : d'abord parce que l'AIC/AIC_C est dérivé des principes de la théorie de l'information, au contraire du BIC.

- L'AIC est asymptotiquement optimal lorsque l'on souhaite sélectionner le modèle avec l'erreur quadratique moyenne (si l'on fait l'hypothèse que le modèle générant les données n'est pas parmi les candidats, ce qui est en fait presque toujours le cas en pratique) ; ce n'est pas le cas du BIC.

- La vitesse de convergence de l'AIC vers l'optimum est, dans un certain sens, la meilleure possible.

3.2 Distribution exponentiel généralisée de Weibull-Gompertz

Dans cette section on présente des études sur la distribution généralisée de Weibull-Gompertz à l'échelle exponentielle $EGWGD\ (a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ qui généralise plusieurs distributions. Plusieurs propriétés de la $EGWGD$ tel que la fonction de hasard, la fonction renversée de risque, les moments, l'estimation du maximum de vraisemblance, $MTTF$, $MTTR$, $MTBF$ sont étudiés dans cette section. Un ensemble de données réelles est analysé et on constate que cette distribution peut offrir un meilleur ajustement que d'autres distributions très connues. On utilise souvent Weibull, Gompertz, Weibull-Gompertz, Gompertz généralisé, distribution généralisée de Weibull-Gompertz à l'analyse les données des durées de vie (voir [3]).

Définition 3.2.1 *La v.a X suit la loi $EGWGD$ si elle a la fonction de répartition suivante*

$$F_X(x;\ \phi) = \left[1 - e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^\theta,\ a,\ b,\ c,\ d,\ \theta > 0 \tag{3.1}$$

où $\phi = (a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ tel que b, θ et d sont les paramètres de forme, a est le paramètre d'échelle et c est le paramètre d'accélération, .

- La densité de probabilité de $EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ est

$$f_X(x;\ \phi) = ab\theta x^{b-1} e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)+cx^d}\left(1 + \frac{cd}{b}x^d - e^{-cx^d}\right)\left[1 - e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}. \tag{3.2}$$

alors La fonction de survie associée est

$$S(x;\ \phi) = 1 - \left[1 - e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^\theta.$$

- La fonction de risque est

$$h\left(x;\ \phi\right) = \frac{ab\theta x^{b-1} e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)+cx^d}\left(1 + \frac{cd}{b}x^d - e^{-cx^d}\right)\left[1 - e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}}{1 - \left[1 - e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^\theta}.$$

- La fonction de risque renversée l'$EGWGD\left(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta\right)$ est

$$r\left(x;\ \phi\right) = ab\theta x^{b-1} e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)+cx^d}\left(1 + \frac{cd}{b}x^d - e^{-cx^d}\right)\left[1 - e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}.$$

Remarque 3.2.2 *Dans une distribution $EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$, les cas particuliers suivants peuvent être envisagés :*
1- La distribution Gompertz $GD(a,\ c)$, quand $\theta = 1$, $b = 0$ et $d = 1$.
2- Distribution exponentielle $ED(a)$, quand c tend à zéro, et $d = 1$, $\theta = 1$ et $b = 0$.
3- Distribution exponentielle généralisée $GED(a,\ \theta)$, quand c tend à zéro, $d = 1$ et $b = 0$.

3.2.1 Propriétés Statistiques

La médiane

On remarque que la moyenne d'$EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ ne peut pas être obtenue sous une forme explicite, elle peut être obtenue en tant qu'une puissance infinie de série ainsi, en général les différents moments d'$EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$. En outre, nous ne pouvons pas obtenir le quartile x_q d'$EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ sous une forme explicite en employant l'équation

$F_X(x_q; a,\ b,\ c,\ d,\ \theta) - q = 0$. Ainsi, en employant l'équation (3.1), nous trouvons cela

$$(x_q)^b\, e^{c(x_q)^d} = -\frac{1}{a} \ln \left[1 - (q)^{\frac{1}{\theta}}\right], 0 < q < 1. \tag{3.3}$$

- La médiane d'$EGWGD(a, b, c, d, \theta)$ peut être obtenue à partir de (3.3), quand $q = 0.5$, comme suit

$$(x_{0.5})^b\, e^{c(x_{0.5})^d} = -\frac{1}{a} \ln \left[1 - (0.5)^{\frac{1}{\theta}}\right].$$

De plus, le mode de $EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ est la solution de l'équation non linéaire suivante

$$\frac{d}{dx} f_X(x;\ a,\ b,\ c,\ d,\ \theta) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{b-1} e^{-ax^b(e^{cx^d}-1)+cx^d}\left(1 + \frac{cd}{b}x^d - e^{-cx^d}\right)\left[1 - e^{-ax^b(e^{cx^d}-1)}\right]^{\theta-1}\right] = 0.$$

Il est impossible d'obtenir une solution explicite dans un cas général. Elle peut être obtenue numériquement. Les formes explicites peuvent être obtenues seulement dans des cas particuliers.

Moments

Le lemme suivant donne le $r^{ième}$ moment d'$EGWGD(a,\, b,\, c,\, d,\, \theta)$.

Lemme 3.2.3 *Si $X \rightsquigarrow EGWGD(a,\, b,\, c,\, d,\, \theta)$ le moment d'ordre r de X, noté μ_r est donné par*
pour $a,\, b,\, c,\, d > 0,\, x > 0$ et $\theta > 1$

$$\mu_r = \frac{ab\theta}{d}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j+k}\,c^l}{j!l!d\,(ck)^{\frac{r+b(j+1)+ld}{d}}}\binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i}\times$$

$$\left\{\left((1+j)^l - j^l\right)\Gamma\left(\frac{r+b\,(j+1)+d\,(l-1)}{d}+1\right)+\frac{d\,(1+j)^l}{kb}\Gamma\left(\frac{r+b\,(j+1)+dl}{d}+1\right)\right\}. \tag{3.4}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mu_r &= \int_0^{\infty} x^r f_X\,(x;\ a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)\,dx \\ &= ab\theta\int_0^{\infty} x^{r+b-1}e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)+cx^d}\left(1+\frac{cd}{b}x^d - e^{-cx^d}\right)\left[1-e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}dx\end{aligned}$$

$$\mu_r = ab\theta I_1 - ab\theta I_2 + a\theta cd I_3. \tag{3.5}$$

où

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\infty} x^{r+b-1}e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)+cx^d}\left[1-e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}dx, \\ I_2 &= \int_0^{\infty} x^{r+b-1}e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\left[1-e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}dx, \\ I_3 &= \int_0^{\infty} x^{r+b+d-1}e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)+cx^d}\left[1-e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1}dx,\end{aligned}$$

et comme $0 < \left[1-e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1} < 1$ pour $x > 0$, alors en employant la série binomiale nous obtenons

$$\left[1-e^{-ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}\right]^{\theta-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{\theta-1}{i}e^{-iax^b\left(e^{cx^d}-1\right)}.$$

alors

$$I_1 = \int_0^\infty x^{r+b-1} e^{cx^d} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} e^{-(i+1)ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)} dx,$$

et comme

$$e^{-(1-i)ax^b\left(e^{cx^d}-1\right)} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^{k+j}\left(a\left(1+i\right)\right)^j x^{bj}}{j!} \binom{j}{k} e^{cjx^d} e^{-ckx^d}$$

donc,

$$I_1 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}\left(c\left(1-j\right)\right)^l \left(a\left(1+i\right)\right)^j}{j!l!d!} \binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i} \int_0^\infty x^{r+b+bj+ld-1} e^{-ckx^d} dx.$$

Soit $y = ckx^d \Rightarrow dx = \frac{1}{d}\left(\frac{y}{ck}\right)^{\frac{1}{d}-1}\left(\frac{1}{ck}\right) dy$ alors

$$I_1 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}\left(c\left(1-j\right)\right)^l \left(a\left(1+i\right)\right)^j}{j!l!d!} \binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i} \int_0^\infty y^{\frac{r+b(j+1)+d(l-1)}{d}} e^{-y} dy$$

$$I_1 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}\left(c\left(1-j\right)\right)^l \left(a\left(1+i\right)\right)^j}{j!l!d!} \left[\binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i} \times \Gamma\left(\frac{r+b\left(j+1\right)+d\left(l-1\right)}{d}+1\right)\right]. \tag{3.6}$$

de même, nous trouvons

$$I_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k} c^l \left(a\left(1+i\right)\right)^j}{j!l!d!^{\frac{r+b(j+1)+ld}{d}}} \binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i} \Gamma\left(\frac{r+b\left(j+1\right)+d\left(l-1\right)}{d}+1\right). \tag{3.7}$$

$$I_3 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k} c^l \left(a\left(1+i\right)\right)^j}{j!l!d!^{\frac{r+b(j+1)+ld}{d}}} \binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i} \Gamma\left(\frac{r+b\left(j+1\right)+ld}{d}+1\right). \tag{3.8}$$

en substitutiant (3.6), (3.7) et (3.8) dans (3.5), nous obtenons (3.4). Ceci accomplit la preuve.

■

3.2.2 Analyse de fiabilité

Temps moyen de panne

Afin de concevoir et de fabriquer un système maintenable, il est nécessaire de prévoir le temps moyen de panne (réparation), $MTTF$ ($MTTR$) respectivement, pour différentes conditions de panne qui pourraient se produire. Ceci est généralement basé sur des expériences antérieures des concepteurs et d'expertise disponible. Le lemme suivant donne le temps moyen de panne (réparation) de la v.a T qui suit $EGWGD(a,\ b,\ c\ ,\ d,\ \theta)$.

Lemme 3.2.4 *Si T est une variable aléatoire de loi $EGWGD(a,\ b, c,\ d,\ \theta)$ le temps moyen de panne (réparation) est donnée pour $a, b, c, d > 0$ et $\theta > 1$*

$$\begin{aligned} MTTF \;&=\; \frac{ab\theta}{d}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j+k}\,c^{l}}{j!l!d\,(ck)^{\frac{r+b(j+1)+ld}{d}}}\binom{j}{k}\binom{\theta-1}{i}\times\left\{\left((1+j)^{l}-j^{l}\right)\times\right. \\ & \left.\Gamma\left(\frac{r+b\,(j+1)+d\,(l-1)}{d}+1\right)+\frac{d\,(1+j)^{l}}{kb}\Gamma\left(\frac{r+b\,(j+1)+dl}{d}+1\right)\right\} \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons

$$MTTF=\int_{0}^{\infty}S\,(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}tf\,(t;\ a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)\,dt=\mu_{1},$$

La preuve découle de l'équati on (3.4) en posant $r=1$. ■

Même chose pour $MTTR$ en changeant f par la densité de réparation.

3.2.3 Estimation des paramètres

Estimateur du maximum de vraisemblance

Dans cette section, nous dérivons les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres inconnus $a,\ b,\ c,\ d$ et θ d'$EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$, dans un échantillon complet. Considérons un échantillon des v.a $X_1,\ldots,X_n$ d'$EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$. La fonction de probabilité de cet échantillon est

$$l=\prod_{i=1}^{n}f\,(x_i;\ a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)\,. \tag{3.9}$$

Par la substitution de l'équation (3.2) dans l'équation (3.9), nous obtenons

$$l=\prod_{i=1}^{n}ab\theta x_i^{b-1}e^{-ax_i^{b}(e^{cx_i^{d}}-1)+cx_i^{d}}\left(1+\frac{cd}{b}x_i^{d}-e^{-cx_i^{d}}\right)\left[1-e^{-ax_i^{b}(e^{cx_i^{d}}-1)}\right]^{\theta-1}. \tag{3.10}$$

La fonction log-vraisemblance devient

$$L = n\ln n + n\ln b + n\ln\theta + c\sum_{i=1}^{n}(x_i)^d - a\sum_{i=1}^{n}(x_i)^b\left(e^{c(x_i)^d}-1\right) + (b-1)\times$$
$$\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-a(x_i)^b\left(e^{c(x_i)^d}-1\right)}\right) + \ln\left(1+\tfrac{cd}{b}(x_i)^d - e^{-c(x_i)^d}\right).$$

Ainsi, les équations normales sont

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{n}{\widehat{a}} - \sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right) + (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}}{\left(1-e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}\right)} = 0. \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{n}{\widehat{b}} - \sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)\ln x_i + \frac{\widehat{cd}}{\widehat{b}^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{\widehat{d}}}{\left(1+\frac{\widehat{cd}}{\widehat{b}}(x_i)^{\widehat{d}} - e^{-c(x_i)^{\widehat{d}}}\right)}+$$
$$\widehat{a}\left(\widehat{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}\left(1-e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}\right)^{-1} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{d}} - \widehat{a}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{b}+\widehat{d}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\right) + \widehat{a}\left(\widehat{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{b}+\widehat{d}}e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)+\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\times$$
$$\left(1-e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{\widehat{d}}\left(\frac{\widehat{d}}{\widehat{b}}(x_i)^{\widehat{d}} - e^{-\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\right)}{\left(1-\frac{\widehat{cd}}{\widehat{b}}(x_i)^{\widehat{d}} - e^{-\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\right)} = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \widehat{c}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{d}}\ln x_i - \widehat{ac}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\widehat{b}+\widehat{d}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\right) + \widehat{ac}\left(\widehat{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{\widehat{b}+\widehat{d}}e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}-1}\ln x_i}{\left(1-e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}\right)}+$$

$$\frac{\widehat{c}}{\widehat{b}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{\widehat{d}}\left(1+\widehat{d}\ln x_i + \widehat{b}e^{-\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\ln x_i\right)}{\left(1+\frac{\widehat{cd}}{\widehat{b}}(x_i)^{\widehat{d}} - e^{-\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}\right)} = 0. \tag{3.14}$$

Les équations normales n'ont pas une solution explicite. Le MLE de θ, $\widehat{\theta}\left(\widehat{a},\ \widehat{b},\ \widehat{c},\ \widehat{d}\right)$ est donné

$$\widehat{\theta}\left(\widehat{a},\ \widehat{b},\ \widehat{c},\ \widehat{d}\right) = -n\left(\sum_{i=0}^{n}\ln\left[1-e^{-\widehat{a}(x_i)^{\widehat{b}}\left(e^{\widehat{c}(x_i)^{\widehat{d}}}-1\right)}\right]\right)^{-1}. \tag{3.15}$$

Ainsi, le MLE de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ et $\widehat{d}$ peut être obtenu en résolvant quatre équations non linéaires de (3.11) à (3.14) en employant l'équation (3.15).

Limites de confiance asymptotiques

Dans cette section, nous dérivons les intervalles asymptotiques de confiance de ces paramètres quand a, b, c, $d > 0$ et $\theta > 0$ comme $MLEs$ des paramètres inconnus a, b, c, d ne peuvent pas être obtenus sous les formes explicites, en employant la matrice I_0^{-1} de variance covariance, où I_0^{-1} est l'inverse de la matrice d'information.

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 L}{\partial a^2} & \frac{-\partial^2 L}{\partial a \partial b} & \frac{-\partial^2 L}{\partial a \partial c} & \frac{-\partial^2 L}{\partial a \partial d} & \frac{-\partial^2 L}{\partial a \partial d} \\ \frac{-\partial^2 L}{\partial b \partial a} & \frac{-\partial^2 L}{\partial b^2} & \frac{-\partial^2 L}{\partial b \partial c} & \frac{-\partial^2 L}{\partial b \partial b} & \frac{-\partial^2 L}{\partial b \partial \theta} \\ \frac{-\partial^2 L}{\partial c \partial a} & \frac{-\partial^2 L}{\partial c \partial b} & \frac{-\partial^2 L}{\partial c^2} & \frac{-\partial^2 L}{\partial c \partial d} & \frac{-\partial^2 L}{\partial c \partial \theta} \\ \frac{-\partial^2 L}{\partial d \partial a} & \frac{-\partial^2 L}{\partial d \partial b} & \frac{-\partial^2 L}{\partial d \partial c} & \frac{-\partial^2 L}{\partial d^2} & \frac{-\partial^2 L}{\partial d \partial \theta} \\ \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta \partial a} & \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta \partial b} & \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta \partial c} & \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta \partial d} & \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}^{-1}.$$

ainsi

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} var(\widehat{a}) & cov\left(\widehat{a}, \widehat{b}\right) & cov(\widehat{a}, \widehat{c}) & cov\left(\widehat{a}, \widehat{d}\right) & cov\left(\widehat{a}, \widehat{\theta}\right) \\ cov\left(\widehat{b}, \widehat{a}\right) & var\left(\widehat{b}\right) & cov\left(\widehat{b}, \widehat{c}\right) & cov\left(\widehat{b}, \widehat{d}\right) & cov\left(\widehat{b}, \widehat{\theta}\right) \\ cov(\widehat{c}, \widehat{a}) & cov\left(\widehat{c}, \widehat{b}\right) & var(\widehat{c}) & cov\left(\widehat{c}, \widehat{d}\right) & cov\left(\widehat{c}, \widehat{\theta}\right) \\ cov\left(\widehat{d}, \widehat{a}\right) & cov\left(\widehat{d}, \widehat{b}\right) & cov\left(\widehat{d}, \widehat{c}\right) & var\left(\widehat{d}\right) & cov\left(\widehat{d}, \widehat{\theta}\right) \\ cov\left(\widehat{\theta}, \widehat{a}\right) & cov\left(\widehat{\theta}, \widehat{b}\right) & cov\left(\widehat{\theta}, \widehat{c}\right) & cov\left(\widehat{\theta}, \widehat{d}\right) & var\left(\widehat{\theta}\right) \end{bmatrix}^{-1}.$$

Les termes de I_0 sont donnés comme suit

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \left(e^{cx_i d} - 1\right) e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)}}{1 - e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ax_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)} \ln x_i}{1 - e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)}}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial c} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ax_i^{b+d} e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)+cx_i^d}}{1 - e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)}}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{acx_i^{b+d} e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)+cx_i^d} \ln x_i}{1 - e^{-ax_i^b\left(e^{cx_i^d}-1\right)}}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b^2} = \frac{-n}{b^2} - \sum_{i=1}^{n} x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)(\ln x_i)^2 - \frac{cd}{b^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{2b^{-1} x_i^b \left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right) - \left(\frac{cd}{b^2} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right) x_i^d}{\left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)^2} +$$
$$a \left(\theta - 1 \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)} \ln x_i}{1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial a} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) \ln x_i + a(\theta - 1) \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)} \ln x_i}{1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial c} = -a \sum_{i=1}^{n} x_i^{b+d} e^{cx_i^d} \ln x_i - \frac{d}{b^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^d \left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right) - \frac{cx^{2d}\left(\frac{d}{b} - e^{-cx_i^d}\right)}{\left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)^2} \times$$
$$a(\theta - 1) \frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^{n} x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)} \ln x_i \left(1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}\right).$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial d} = -ac \sum_{i=1}^{n} x_i^{b+d} e^{cx_i^d} (\ln x_i)^2 + a(\theta - 1) \frac{\partial}{\partial d} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)} \ln x_i}{1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}} -$$
$$\frac{c}{b^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^d \left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)(1 + d \ln x_i) - d x_i^{2d} \left[\frac{c}{b}(1 + d \ln x_i) + c e^{-cx_i^d} \ln x_i\right]}{\left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} = \frac{-n}{a}^2 - (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2b} \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}}{\left(1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}\right)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial c} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^{b+d} e^{cx_i^d} + (\theta - 1) \frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}}{\left(1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}\right)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial d} = -c \sum_{i=1}^{n} x_i^{b+2d} e^{cx_i^d} \ln x_i + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}}{\left(1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}\right)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial c^2} = -a \sum_{i=1}^{n} x_i^{b+2d} e^{cx_i^d} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2d} e^{cx_i^d} \left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right) + x_i^{2d} \left(\frac{d}{b} + e^{-cx_i^d}\right)^2}{\left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)^2} +$$
$$a(\theta - 1) \frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{b+d} e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) + cx_i^d}}{1 - e^{-a x_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial d} = \sum_{i=1}^{n} x_i^d \ln x_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^{b+d} e^{cx_i^d} \left(1 + cx_i^d\right) \ln x_i +$$
$$a(\theta - 1) \tfrac{\partial}{\partial d} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^{b+d} e^{-ax_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right) + cx_i^d}}{1 - e^{-ax_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}} + \frac{x_i^d \left(\frac{d}{b} - e^{-cx_i^d}\right)}{\left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)^2} \right).$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial d^2} = c \sum_{i=1}^{n} x_i^d (\ln x_i)^2 - ac \sum_{i=1}^{n} x_i^{b+d} e^{cx_i} \left(1 + cx_i^d\right) (\ln x_i)^2 +$$
$$ac(\theta - 1) \frac{\partial}{\partial d} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^{b+d} e^{-cx_i^b} \ln x_i}{1 - e^{-ax_i^b \left(e^{cx_i^d} - 1\right)}} + \frac{cx_i^d \left(1 + d \ln x_i + b e^{-cx_i^b} \ln x_i\right)}{b \left(1 + \frac{cd}{b} x_i^d - e^{-cx_i^d}\right)^2} \right),$$

Nous pouvons trouver les intervalles de confiance approximatifs au niveau $(1 - \delta)\, 100\%$ des paramètres a, b, c, d, θ en employant la matrice de variance-covariance dans les formes suivantes

$$\widehat{a} \pm Z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{var\left(\widehat{a}\right)},\ \widehat{b} \pm Z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{var\left(\widehat{b}\right)},\ \widehat{c} \pm Z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{var\left(\widehat{c}\right)},$$
$$\widehat{d} \pm Z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{var\left(\widehat{d}\right)} \text{ and } \widehat{\theta} \pm Z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{var\left(\widehat{\theta}\right)},$$

où $Z_{\frac{\delta}{2}}$ est le quantile d'ordre $\left(\frac{\delta}{2}\right)$ au niveau de $(1 - \delta)\, 100\%$ de la distribution normale standard.

3.2.4 Analyse des données et discussion

Dans cette section, nous présentons l'analyse d'un ensemble de données réelles à l'aide du modèle d'$EGWGD\,(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ et le comparons à d'autres modèles, comme la distribution généralisé Gompretz $GD\,(a,\ c)$, distribution exponentielle $ED\,(a)$, distribution exponentiel généralisé de Gompertz $GED\,(a,\ \theta)$, Weibull inverse $IW\,(\theta)$, inverse Weibull généralisé $GIW(\theta,\ \beta)$, inverse exponentiel Weibull généralisé $EGIW(a,\ \theta,\ \beta)$. Les données qui ont été obtenues à partir de [5] qui comme suit pour les donnée de vies de 50 dispositifs.

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6
7	11	12	18	18	18	18	18	21	32
36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83
84	84	84	85	85	85	85	85	86	86

Le modèle d'$EGWGD$ est utilisé pour ajuster cet ensemble de donnée. Le $MLEs$ du (des) paramétre(s) inconnu (s), la valeur de log-vraisemblance (L), Kolmogorov-Smirnov (K-S), les critères d'information (AIC), critère d'information corrigé (AIC_c) et le critère d'information bayésien (BIC) et ses P-valeurs respectives pour sept modèles différents sont donnés dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Le MLE(s) du paramétre(s), du L, de l'AIC, du AIC$_C$, du BIC, des valeurs de K-s et des P-valeurs

Le Modèle	MLE(s)	K-s	-L	AIC	AIC$_C$	BIC	P-valeurs
$ED\,(a)$	$\widehat{a} = 0.022$	0.191	241.09	484.18	484.16	486.09	0.045
$GED\,(a,\ \theta)$	$\widehat{\alpha} = 0.021$ $\widehat{\theta} = 0.902$	0.194	240.36	484.72	484.96	488.54	0.0402
$GD\,(a, c)$	$\widehat{a} = 0.011$ $\widehat{c} = 0.018$	0.157	235.39	474.78	475.024	478.60	0.155
$IW\,(\theta)$	$\widehat{\theta} = 0.397$	0.435	281.07	566.14	566.39	569.96	$5.9{\times}10^{-9}$
$GIW\,(\theta,\ \beta)$	$\widehat{\theta} = 0.274$ $\widehat{\beta} = 1.273$	0.324	287.47	580.95	581.47	586.68	0.000035
$EGIW$ $(\alpha,\ \theta,\ \beta)$	$\widehat{\alpha} = 0.75$ $\widehat{\theta} = 0.61$ $\widehat{\beta} = 2.142$	0.254	254.91	517.83	518.72	525.48	0.002477
EGWGD $(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$	$\widehat{a} = 0.000085$ $\widehat{b} = 0.128$ $\widehat{c} = 0.401$ $\widehat{d} = 0.69901$ $\widehat{\theta} = 0.246$	0.143	224.54	467.96	469.264	477.52	0.241

Le tableau 2 montre que les distributions $GD(a,\ c)$ et $EGWGD(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ sont les plus adaptés (bon ajustements) à cette situation. Mais, nous voyons que le modèle d'$EGWGD\,(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta)$ est le meilleur parmi ces distributions car il a la plus petite valeur de test (K-s), d'AIC, d'AIC_c et de BIC. En substituant le MLE des paramètres inconnus dans l'équation (3.8), nous obtenons une estimation de la matrice de variance-covariance comme

$$\widehat{I}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 5.854\times10^{-10} & -1.581\times10^{-4} & 8.574\times10^{-6} & 3.987\times10^{-8} & 4.158\times10^{-4} \\ -1.581\times10^{-4} & 3.101\times10^{-5} & -7.004\times10^{-4} & -1.012\times10^{-5} & 2.175\times10^{-4} \\ 8.574\times10^{-6} & -7.004\times10^{-4} & 3.215\times10^{-7} & -5.274\times10^{-4} & -2.158\times10^{-6} \\ 3.987\times10^{-8} & -1.012\times10^{-5} & 5.854\times10^{-10} & 9.257\times10^{-9} & -5.254\times10^{-5} \\ 4.158\times10^{-4} & 2.175\times10^{-4} & 5.854\times10^{-10} & -5.254\times10^{-5} & 8.154\times10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Les intervalle approximatifs de confiance au risque de 5% pour les paramètres a, b, c, d et θ sont $[0.000037, 0.000132]$, $[0.11708, 0.13891]$, $[0.39988, 0.40211]$, $[0.69881, 0.69918]$ et $[0.2285, 0.26389]$ respectivement.

3.3 La distribution à taux de hasard Bêta quadratique

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé certaines propriétés de la loi à taux de risque bêta quadratique et certaines propriètés (f, F, S, $h, ...$), et dans cette section, nous allons prendre soin des autres caractéristiques, l'estimateur du maximum de vraisemblance avec une application illustratif (voir [2]).

3.3.1 Estimateurs des moindres carrés et des moindres carrés pondérés

Dans cette section nous fournissons la régression basée sur la méthode des estimateurs de méthode des paramètres inconnus de. La méthode proposée emploie la distribution de $G(X_{(i)})$. Pour un échantillon de la taille n, nous prenons

$E\left(G\left(X_{(i)}\right)\right) = \dfrac{i}{n+1}$, $\quad V\left(G\left(X_{(i)}\right)\right) = \dfrac{i\left(n-i+1\right)}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}$

et $Cov\left(G\left(X_{(i)}\right), G\left(X_{(j)}\right)\right) = \dfrac{i\left(n-j+1\right)}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}$; si $i < j$, où G est la fonction de répartition du distribution à taux de hasard Bêta quadratique.

voir Johnson, Kotz et le Balakrishnan (1995) pour beaucoup de détails.

Estimateurs des moindres carrés

Obtenir les estimateurs en réduisant au minimum

$$BQHR\left(\alpha,\ \theta,\ \beta,\ a,\ b\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(G\left(X_{(i)}\right)-\frac{i}{n+1}\right)^{2}. \tag{3.16}$$

En ce qui concerne les paramètres inconnus. Par conséquent en cas de distribution de $BQHR$ les estimateurs des moindres carrés de $\alpha,\ \theta,\ \beta,\ a$ et b, $\widehat{\alpha}_{LSE}$, $\widehat{\theta}_{LSE}$, $\widehat{\beta}_{LSE}$, $\widehat{a}_{LSE}$ et $\widehat{b}_{LSE}$ respectivement, en employant (1.2) et (3.16) nous avons l'équation suivante.

$$BQHR\left(\alpha,\ \theta,\ \beta,\ a,\ b\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[I_{\left\{1-e^{-\left(\alpha x_{(i)}+\frac{\theta}{2}x_{(i)}^{2}+\frac{\beta}{3}x_{(i)}^{3}\right)}\right\}}\left(a,b\right)-\frac{i}{n+1}\right]^{2}.$$

3.3.2 Estimation du maximum de vraisemblance

Dans cette section nous considérons les estimateurs du maximum de vraisemblance de la distribution de $BQHR$. Soit $\phi=\left(\alpha,\ \beta,\ \theta,\ a,\ b\right)^{T}$, afin d'estimer les paramètres $\alpha,\ \beta,\ \theta,\ a$ et b de la loi de taux de risque Beta quadratique, soit $X_1,\ X_2\ldots,\ X_n$ un échantillon aléatoire de taille n de $BQHR(x;\ \phi)$. La fonction de score associée est donnée par

$$U_n\left(\phi\right)=\left[\frac{\partial L}{\partial\alpha},\ \frac{\partial L}{\partial\theta},\ \frac{\partial L}{\partial\beta},\ \frac{\partial L}{\partial a},\ \frac{\partial L}{\partial b}\right]^{T}$$

La fonction log- vraisemblance peut être écrite comme suit

$$\begin{aligned}L\left(\phi,x_{(i)}\right)=-n\ln\Gamma\left(a\right)-n\ln\Gamma\left(b\right)+n\ln\Gamma\left(a+b\right)+\sum_{i=1}^{n}\log\left(\alpha+\theta x_{(i)}+\beta x_{(i)}^{2}\right)-\\ b\alpha\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}-\tfrac{b\theta}{2}\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{2}-\tfrac{b\beta}{3}\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{3}+\\ \left(a-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left[1-e^{-\left(\alpha x_{(i)}+\frac{\theta}{2}x_{(i)}^{2}+\frac{\beta}{3}x_{(i)}^{3}\right)}\right].\end{aligned}$$

Différenciant L par rapport à chaque paramètre α, β, θ, a et b et posons les résultat égal à zéro, nous obtenons des évaluations de maximum de vraisemblance.

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha+\theta x_{(i)}+\beta x_{(i)}^{2}}-b\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}+\left(a-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(i)}e^{-\left(\alpha x_{(i)}+\frac{\theta}{2}x_{(i)}^{2}+\frac{\beta}{3}x_{(i)}^{3}\right)}}{1-e^{-\left(\alpha x_{(i)}+\frac{\theta}{2}x_{(i)}^{2}+\frac{\beta}{3}x_{(i)}^{3}\right)}}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(i)}}{\alpha+\theta x_{(i)}+\beta x_{(i)}^{2}}-\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{2}+\left(a-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(i)}^{2}e^{-\left(\alpha x_{(i)}+\frac{\theta}{2}x_{(i)}^{2}+\frac{\beta}{3}x_{(i)}^{3}\right)}}{2\left[1-e^{-\left(\alpha x_{(i)}+\frac{\theta}{2}x_{(i)}^{2}+\frac{\beta}{3}x_{(i)}^{3}\right)}\right]}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{(i)}^2}{\alpha + \theta x_{(i)} + \beta x_{(i)}^2} - \frac{b}{3} \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}^3 + (a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{(i)}^3 e^{-\left(\alpha x_{(i)} + \frac{\theta}{2} x_{(i)}^2 + \frac{\beta}{3} x_{(i)}^3\right)}}{3\left[1 - e^{-\left(\alpha x_{(i)} + \frac{\theta}{2} x_{(i)}^2 + \frac{\beta}{3} x_{(i)}^3\right)}\right]}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = -n\psi(a) + n\psi(a+b) + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\left(\alpha x_{(i)} + \frac{\theta}{2} x_{(i)}^2 + \frac{\beta}{3} x_{(i)}^3\right)}\right), \quad (3.20)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -n\psi(b) + n\psi(a+b) - \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x_{(i)} + \frac{\theta}{2} x_{(i)}^2 + \frac{\beta}{3} x_{(i)}^3\right). \quad (3.21)$$

où $\psi(.)$ est la fonction de digamma.

L'estimateur MLE de ϕ, $\widehat{\phi}$ est obtenu en résolvant le système non linéaire $U_n(\phi) = 0$. Pour résoudre les équations de (3.17) à (3.21), il est, habituellement plus pratique, d'utiliser des algorithmes d'optimisation non linéaire tels que l'algorithme quasi-Newton pour maximiser numériquement la fonction log-vraisemblance. Afin de calculer les erreurs et les intervalles de confiance asymptotiques, nous employons l'approximation habituelle de grand échantillon, dans lequel les $MLEs$ peuvent être traités comme étant approximativement multi normales.

Par conséquent comme $n \to \infty$, la distribution asymptotique du MLE est donnée par (voir [2]) :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\beta} \\ \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\beta} \\ \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{V}_{11} & \widehat{V}_{12} & \widehat{V}_{13} & \widehat{V}_{14} & \widehat{V}_{15} \\ \widehat{V}_{21} & \widehat{V}_{22} & \widehat{V}_{23} & \widehat{V}_{24} & \widehat{V}_{25} \\ \widehat{V}_{31} & \widehat{V}_{32} & \widehat{V}_{33} & \widehat{V}_{34} & \widehat{V}_{35} \\ \widehat{V}_{41} & \widehat{V}_{42} & \widehat{V}_{43} & \widehat{V}_{44} & \widehat{V}_{45} \\ \widehat{V}_{51} & \widehat{V}_{52} & \widehat{V}_{53} & \widehat{V}_{54} & \widehat{V}_{55} \end{pmatrix} \right],$$

où $\left(\widehat{V}_{ij} = V_{ij} \backslash \varphi = \widehat{\varphi}\right)$, et

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} & V_{15} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} & V_{25} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} & V_{35} \\ V_{41} & V_{42} & V_{43} & V_{44} & V_{45} \\ V_{51} & V_{52} & V_{53} & V_{54} & V_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix},$$

est la matrice de variance-covariance approximative avec ses éléments obtenus à partir du système suivant

$$
\begin{array}{lllll}
A_{11} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} & A_{12} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \theta} & A_{13} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} & A_{14} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial a} & A_{15} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial b} \\
 & A_{22} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} & A_{23} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \beta} & A_{24} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial a} & A_{25} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial b} \\
 & & A_{33} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} & A_{34} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial a} & A_{35} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial b} \\
 & & & A_{44} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} & A_{45} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial a \partial b} \\
 & & & & A_{55} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial b^2}
\end{array}
$$

La matrice de dispersion inverse, donne les variances et les covariances asymptotiques des $MLEs$ pour α, θ, β, a et b.

Les intervalles de confiance approximatifs au risque $100\,(1-\alpha)\,\%$ pour α, θ, β, a et b peuvent être donnés par

$$
\widehat{\alpha} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{11}}, \quad \widehat{\theta} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{22}}, \quad \widehat{\beta} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{33}}, \quad \widehat{a} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{44}}, \quad \widehat{b} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{55}}.
$$

où $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre α de la distribution normale standard.

3.3.3 Application

Dans cette section, nous exploitons des ensembles des données réelles pour vérifier que la distribution de $BQHR$ est mieux adapté que la distribution $QHRD$. Cet ensemble de données donne le temps d'échec ($10^3 h$) du turbocompresseur d'un type de moteur donné dans [2].

1.6, 2.0, 2.6, 3.0, 3.5, 3.9, 4.5, 4.6, 4.8, 5.0, 5.1, 5.3, 5.4, 5.6, 5.8, 6.0, 6.0, 6.1, 6.3, 6.5, 6.5, 6.7, 7.0, 7.1, 7.3, 7.3, 7.3, 7.7, 7.7, 7.8, 7.9, 8.0, 8.1, 8.3, 8.4, 8.4, 8.5, 8.7, 8.8, 9.0.

La matrice $I\left(\widehat{\phi}\right)^{-1}$ de variance-covariance des $MLEs$ est

$$
\begin{pmatrix}
3.429e-03 & -8.939e-04 & 1.008e-05 & 0.409 & 0.390 \\
-8.939e-04 & 2.772e-04 & -4.14e-06 & -0.124 & -0.1433 \\
1.008e-05 & -4.148e-06 & 1.302e-06 & 0.008 & 0.013 \\
4.090e-01 & -1.242e-01 & 8.0521e-03 & 32.924 & 19.232 \\
3.906e-01 & -1.433e-01 & 1.368e-02 & 19.232 & 2.385
\end{pmatrix}
$$

Les variances des MLE de α, β, θ, a et b sont $var\left(\widehat{\alpha}\right) = 3.429 \times 10^{-3}$, $var\left(\widehat{\theta}\right) = 2.772 \times 10^{-4}$, $var\left(\widehat{\beta}\right) = 1.302 \times 10^{-6}$, $var\left(\widehat{a}\right) = 32.924$ et $var\left(\widehat{b}\right) = 2.385$.

Par conséquent, les intervalles de confiance au niveau 95% pour α, β, θ, a et b sont $[0.163, 0.273]$, $[-0.098, -0.066]$, $[0.008, 0.011]$, $[4.976, 15.879]$ et $[11.237, 14, 1715]$ respectivement.

Tableau 3 :
Les estimateurs de ML, log-vraisemblance, AIC et AIC$_c$ pour l'ensemble de données

Modèle	a	b	θ	α	β	**AIC**	**BIC**	**AIC$_C$**
BQHRD	10.428	12.704	-0.082	0.218	0.009	168.413	176.857	170.177
QHRD	1	1	-0.024	0.006	0.009	173.143	178.21	173.810
BGE	0.171	91.54	0.224	32.27	1	170.307	177.062	171.449
BW	0.907	0.380	0.177	1	4.282	172.258	179.014	173.401
GW	1	1	0.481	11.93	1.010	186.859	191.926	187.526
BE	7.701	17.47	0.059	1	1	180.929	185.995	181.595
GE	1	1	0.449	9.514	1	184.285	187.663	184.609

Afin de comparer les deux modèles de distribution, nous considérons des critères comme, AIC, AIC_c et BIC pour l'ensemble de données. La meilleure répartition correspond à la plus petite valeur, AIC, AIC_c et BIC (les formules sont données au début de la section).

Le tableau 3 montre les paramètres des $MLEs$ pour chacune des trois distributions et les valeurs d'AIC et d'AIC_c. Les valeurs dans le tableau 3, indiquent que le $BQHRD$ est un concurrent fort pour d'autres distributions utilisées ici pour l'ajustement des données.

3.4 Exponentielle généralisée à trois paramètres

3.4.1 Estimateurs du maximum de vraisemblance

Dans cette sous-section, nous discutons comment obtenir les $MLEs$ et en discutant leurs propriétés asymptotiques (voir [6]). Nous donnons d'abord les résultats pour un échantillon complet, puis pour les données censurées de type II (type Fréchet). Nous considérons le modèle GE à trois paramètres, et pour des raisons de simplicité, nous réparamétrisons $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de taille n de $GE\left(\alpha,\ \frac{1}{\beta},\ \mu\right)$; alors la fonction log-vraisemblance $L\left(\alpha,\ \beta,\ \mu\right)$ pour $\mu < x_{(1)}$ est

$$\begin{aligned} L(\alpha,\ \beta,\mu) &= \Bigg[n\log(\alpha) + n\log(\beta) - \sum_{i=1}^{n}\beta(x_i-\mu) + \\ &\qquad (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-e^{-(x_i-\mu)\beta}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

où $\alpha,\ \beta,\ \mu > 0$.

Si $\alpha > 1$ en prenant la dérivée par rapport à α, β et μ et égalant à 0, on obtient les équations normales suivantes

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \log\left(1-e^{-(x_i-\mu)\beta}\right) = 0, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)\,e^{-(x_i-\mu)\beta}}{1-e^{-(x_i-\mu)\beta}} = 0, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = n\beta - \beta(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-(x_i-\mu)\beta}}{1-e^{-(x_i-\mu)\beta}} = 0. \tag{3.24}$$

Les trois équations peuvent être réduites à deux équations si nous remplaçons α en termes de β et μ dans (3.22). Nous devons utiliser l'algorithme de notation ou l'algorithme de Newton-Raphson pour résoudre simultanément les deux équations non linéaires. Considérons les secondes dérivées de $L(\alpha,\ \beta,\ \mu)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2},\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)\,e^{-(x_i-\mu)\beta}}{1-e^{-(x_i-\mu)\beta}},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2\,e^{-(x_i-\mu)\beta}}{\left(1-e^{-(x_i-\mu)\beta}\right)^2},\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \mu} = -\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-(x_i-\mu)\beta}}{1-e^{-(x_i-\mu)\beta}},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \mu} = n + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\beta(x_i-\mu)-1+e^{-(x_i-\mu)\beta}\right)e^{-(x_i-\mu)\beta}}{\left(1-e^{-(x_i-\mu)\beta}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = -\beta^2(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-(x_i-\mu)\beta}}{\left(1-e^{-(x_i-\mu)\beta}\right)^2}.$$

pour $\alpha > 2$,

$$E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\right) = -\frac{n}{\alpha^2},$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta}\right) &= nE\left(\frac{(X-\mu)\,e^{-(X-\mu)\beta}}{1-e^{-(X-\mu)\beta}}\right) \\ &= n\left[\frac{\alpha}{\beta(\alpha-1)}\left(\psi(\alpha)-\psi(1)\right)-\frac{1}{\beta}\left(\psi(\alpha+1)-\psi(1)\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^2}\right) &= -n\left[\frac{1}{\beta^2}+(\alpha-1)\,E\left(\frac{(X-\mu)^2 e^{-(X-\mu)\beta}}{\left(1-e^{-(X-\mu)\beta}\right)^2}\right)\right] \\ &= \frac{-n}{\beta^2}-\frac{n\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-2)\,\beta^2}\left(\psi^{'}(1)-\psi^{'}(\alpha-1)+\left(\psi(\alpha-1)-\psi(1)\right)^2\right) \\ &\quad +\frac{n\alpha}{\beta^2}\left(\psi^{'}(1)-\psi(\alpha)+\left(\psi(\alpha)-\psi(1)\right)^2\right), \end{aligned}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\mu}\right) = -\beta nE\left(\frac{e^{-(X-\mu)\beta}}{1-e^{-(X-\mu)\beta}}\right) = -\beta n\frac{1}{1-\alpha},$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\mu}\right) &= n\left[1+(\alpha-1)\,E\left(\frac{e^{-(X-\mu)\beta}\left(\beta(X-\mu)-1+e^{-(X-\mu)\beta}\right)}{\left(1-e^{-(X-\mu)\beta}\right)^2}\right)\right] \\ &= \frac{n\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}\left(\psi(\alpha-1)-\psi(1)\right)-n\alpha\left(\psi(\alpha)-\psi(1)\right), \end{aligned}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2}\right) = -n\beta^2(\alpha-1)\,E\left(\frac{e^{-(X-\mu)\beta}}{\left(1-e^{-(X-\mu)\beta}\right)^2}\right) = -n\beta^2\frac{\alpha}{\alpha-2}.$$

où $\psi(.)$ et $\psi^{'}(.)$ sont la fonction digamma et sa dérivée poly-gamma respectivement.

Pour $\alpha > 2$, La famille GE satisfait toutes les conditions de régularité (voir [6]) d'une manière similaire à la famille gamma ou à la famille Weibull, et nous avons donc le résultat dans le théorème suivant

Théorème 3.4.1 *Pour $\alpha > 2$, les estimateurs du maximum de vraisemblance $\left(\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\mu}\right)$ de $(\alpha,\ \beta,\ \mu)$ sont des estimateurs sans biais et $\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}-\alpha,\ \widehat{\beta}-\beta,\ \widehat{\mu}-\mu\right)$ sont asymptotiquement normaux avec le vecteur moyen 0 et la matrice de variance-covariance I^{-1}, où*

$$I = -\frac{1}{n}\begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\mu}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\mu}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\mu\partial\alpha}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\mu\partial\beta}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2}\right) \end{bmatrix}.$$

Même pour la distribution de Weibull à trois paramètres ou la distribution gamma à trois paramètres, les conditions de régularité ne sont pas remplies pour $\alpha \leq 2$ (voir [6]). Les résultats asymptotiques ne sont pas connus pour $\alpha \leq 2$ bien que certains cas spéciaux ont été étudiés numériquement par Harter (1969) pour la distribution gamma.

Comme les données des durées de vie sont souvent censurées, nous dérivons des équations normales pour les données censurées de type II. La fonction de vraisemblance logarithmique pour les premières observations commandées d'un échantillon de taille n peut être écrite comme

$$\begin{aligned} L(\alpha,\ \beta,\ \mu) &= C + r(\log\alpha + \log\beta) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{r}\log\left(1 - e^{-\left(x_{(i)}-\mu\right)\beta}\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r}\left(x_{(i)} - \mu\right)\beta + \alpha(n-r)\log\left(1 - e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}\right). \end{aligned}$$

Les équations normales deviennent

$$\frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^{r}\log\left(1 - e^{-\left(x_{(i)}-\mu\right)\beta}\right) + (n-r)\log\left(1 - e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}\right) = 0,$$

$$\frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^{r}\left(x_{(i)} - \mu\right) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(x_{(i)} - \mu\right)e^{-\left(x_{(i)}-\mu\right)\beta}}{1 - e^{-\left(x_{(i)}-\mu\right)\beta}} + \alpha(n-r)\frac{\left(x_{(r)} - \mu\right)e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}}{1 - e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}} = 0,$$

$$r\beta - \beta(\alpha - 1)\sum_{i=1}^{r}\frac{e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}}{1 - e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}} - \beta(n-r)\frac{e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}}{1 - e^{-\left(x_{(r)}-\mu\right)\beta}} = 0.$$

Notons que la matrice d'information de Fisher est de même type que le cas d'échantillonnage complet. La distribution de la $i^{ème}$ statistique d'ordre $X_{(i)}$ est donnée par

$$\frac{n!}{(i-1)!\,(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}\frac{(-1)^j}{(i+j)}GE\left(\alpha(i+j),\frac{1}{\beta},\mu\right).$$

Tableau 4

Estimations, log-vraisemblance, chi-deux et statistiques de Kolmogorov-Smirnov

	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{\mu}$	LL	χ^2	K-S
Gamma	2.7316	0.0441	10.2583	-112.8501	0.950	0.107
Weibull	1.5979	0.0156	14.8479	-112.9767	1.321	0.118
GE	4.1658	0.0314	4.7476	-112.7666	0.675	0.103

Par conséquent, la matrice d'information de Fisher peut être calculée à l'aide de cette distribution.

Si le paramètre de position est connu, les $MLEs$ de α et β peuvent être obtenus en résolvant les équations (3.22) et (3.23). Il est possible d'écrire en termes de β ; Donc, il réduit à la résolution d'une seule équation. Si le paramètre de position est connu, alors, sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il soit nul. Dans ce cas, les $MLSs$ existent toujours et la famille $GE\left(\alpha, \frac{1}{\beta}\right)$ satisfait les conditions de régularité pour toutes les valeurs possibles de α et β. Si, $\alpha > 2$ la matrice de variance-covariance asymptotique de $\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right)$ est l'inverse de la première sous-matrice (2×2) de I, et pour $0 < \alpha \leq 2$, c'est l'inverse de la matrice carrée (2×2) symétrique $A = (a_{ij})$, où

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\alpha^2},\ a_{12} = a_{21} = -\frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty xe^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)^{\alpha-2}dx, \alpha > 0. \\ a_{22} &= \frac{1}{\beta^2} + \frac{(\alpha-1)\,\alpha}{\beta^2}\int_0^\infty x^2e^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)^{\alpha-3}dx, \alpha > 0. \end{aligned}$$

3.4.2 L'analyse des données

Dans cette section, nous considérons le jeu de données réel d'Lawless (1982 p. 228). Les données sont apparues dans les tests sur l'endurance des roulements à billes à rainure profonde. Ils ont d'abord été abordés par Lieblein et Zelen (1956) et par Gupta et Kundu (1997). Les données sont le nombre de millions de tours avant l'échec pour chacun des 23 roulements à billes dans le test de vie et sont les suivants : 17.88 28.92 33.00 41.52 42.12 45.60 48.40 51.84 51.96 54.12 55.56 67.80 68.64 68.88 84.12 93.12 98.64 105.84 127.92 128.04 173.40.

Nous avons utilisé les trois distributions, à savoir gamma à trois paramètres, Weibull à trois paramètres et GE à trois paramètres. Nous présentons les estimations, le log-vraisemblance LL, les valeurs observées et les valeurs attendues, les statistiques de Kolmogorov-Smirnov (K-S) et de Chi-deux dans le tableau 4, avec les fréquences observées et attendues dans le tableau 5.

Tableau 5 :

Fréquences observées et attendues

Intervalles	Observé	Gamma	Weibull	GE
0-40	3	4.493	4.738	4.322
40-80	12	10.658	10.016	10.913
80-120	5	5.423	5.627	5.303
120-160	2	1.805	1.992	1.739
160-200	1	0.621	0.627	0.723

Nous observons que le GE à trois paramètres correspond légèrement mieux que le gamma à trois paramètres ou Weibull à trois paramètres, dans ce cas.

Conclusion générale

Dans le domaine de la modélisation, il existe de nombreuses distributions statistiques réalistes du point de vu pratique à cause de leurs propriétés intéressantes comme la forme en baignoire du taux de hasard et les distributions limites non dégénérées. Cependant la plupart d'entre elles sont compliquées pour discuter certaines propriétés, comme les moments, la fiabilité, etc. De plus, le nombre accru de paramètres entraine la complication et la difficulté dans le processus d'estimation. Certaines distributions généralisées proposés sont similaires à des distributions classiques de sorte que toutes les procédures de calcul sont les mêmes, la distribution exponentielle généralisée peut être considérée comme une distribution de $\min(X_1, ..., X_n)$ où les $\{X_i\}$ sont $i.i.d$ de fonction de distribution $1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $\lambda > 0$ qui est un modèle à taux de hasard linéaire.

Dans l'analyse des données avec un support réel, une raison évidente par exemple pour généraliser une distribution standard QHR est parce que la forme généralisée offre une plus grande flexibilité dans la modélisation des données réelles où nous pouvons donner des extensions pour les moments et pour la fonction génératrice des moments.

Bibliographie

[1] Angelo Efo evi Koudou & Christophe Ley (2014). Caractérisations de la loi gaussienne inverse généralisée : deux nouveaux résultats et une revue de la littérature. Boulevard du Triomphe, CP210, B-1050 Brussels, Belgium, chrisley@ulb.ac.be.

[2] Faton Merovci and Ibrahim Elbatal (2015). The Beta Quadratic hazard rate distribution. Pak.J.Statist. 31(5), 427-446.

[3] M.A.EL-Damcese, Abdelfattah Mustafa and M.S.Eliwa (2015). Exponentaited generalized Weibull-Gompertz distribution .

[4] M.Shuaib Khan. Theoretical analysis of inverse generalized exponential models , 2009 International Conference on Machine Learning and Computing IPCSIT vol.3 (2011) © (2011) IACSIT Press, Singapore.

[5] Okoli O.C, Osuji G.A, Nwosu D.F and Njoku K.N.C (2016). On The Modified Extended Generalized Exponential Distribution. European Journal of Statistics and Probability Vol.4, No.4, pp.1-11.

[6] Rameshwar D.Gupta and Kundu Debasis (1999). Generalized Exponential Distributions . Austral. & New Zealand J. Statist.41(2), 173-188.

[7] Rameshwar D.Gupta and Kundu Debasis (2006). Generalized Exponential Distribution : Existing Results And Some Recent Developments.

[8] Saint Pierre Philippe (2015). Introduction à l'analyse des durée de survie.

[9] Site Web (Wikipédia).

[10] V.M. Chacko (2016). X-Exponential Bathtub Failure Rate Model . RT&A, No4 (43) Volume 11.

[11] V. P. SINGH & H (1995). GUO.Parameter estimation for 3-parameter generalized pareto distribution by the principle of maximum entropy (POME). Hydrological Sciences - Journal- des Sciences Hydrologiques,40,2.

Annexe

3.5 Fonctions usuelles

3.5.1 Fonction digamma

La fonction digamma ou fonction psi est définie comme la dérivée logarithmique de la fonction gamma.

Les premières dérivées de cette fonction

$$\psi(z) = \frac{d\left[\ln \Gamma(z)\right]}{dz} = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d\Gamma(z)}{dz}.$$

Une extension en série de cette fonction est donnée par

$$\psi(z+1) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \text{ pour } z \neq 0, \; -1, \; -2, \; -3, ...$$

où $\gamma = 0.5772156649$ est la constante d'Euler qui est égale à $[-\psi(1)]$.

Si la dérivée de la fonction gamma elle-même est définie, nous pouvons donc utiliser simplement

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma(z)\, \psi(z).$$

notons que certains auteurs écrivent

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z+1) = \frac{d}{dz} z!.$$

3.5.2 Fonction poly-gamma

La fonction poly-gamma d'ordre n est une fonction spéciale définie comme la $(n+1)^{ème}$ dérivée logarithmique de la fonction gamma

$$\psi^{(n)}(z) = \left(\frac{d}{dz} \right)^{n} \psi(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \ln \Gamma(z) \text{ pour } n = 1, \; 2, \; 3, ...$$

où $\psi(z) = \psi^{(0)}(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ est la fonction digamma.

Deux relations utiles utilisées pour trouver des cumulatifs pour certaines distributions sont

$$\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n!\zeta(n+1).$$

$$\psi^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} n! \left(2^{n+1}-1\right)\zeta(n+1) = \left(2^{n+1}-1\right)\psi^{(n)}(1).$$

où ξ est la fonction zêta de Riemann.

3.5.3 Fonction de Bessel modifiée

Les fonctions de Bessel modifiées génèrent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \left(x^2+n^2\right)y = 0.$$

Les fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_n et de deuxième espèce K_n sont reliées à la fonction de Bessel de première espèce J_n par

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix),$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{i^n J_{-n}(ix) - i^{-n}J_n(ix)}{\sin(n\pi)} \text{ lorsque } n \notin \mathbb{Z}.$$

$$K_n(x) = \lim_{p\to n}\frac{\pi}{2}\frac{i^p J_{-p}(ix) - i^{-p}J_p(ix)}{\sin(p\pi)} \text{ lorsque } n \in \mathbb{Z}.$$

3.5.4 Kurtosis ou d'aplatissement

C'est le moment d'ordre 4.

Définition 3.5.1 *Le coefficient d'aplatissement ou Kurtosis est le moment centré d'ordre 4*

$$\mu_4 = E\left[(X-E(X))^4\right].$$

Pearson a défini le coefficient d'aplatissement (Kurtosis) qui permet d'étudier la forme plus ou moins pointue ou aplatie

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Fisher propose d'étudier $K' = K-3$ ce qui permet de faire référence a une distribution particulière qui est la loi normale pour laquelle K vaut 3. Les logiciels statistiques vous donnent la valeur de $K\prime$.

- Le Kurtosis donne une information sur les queues de distribution. En effet, ce coefficient est grand quand il y a beaucoup de valeurs éloignées de la moyenne.

- Le Kurtosis gaussienne est nul.

Kurtosis non normalisé

Etant donnée une variable aléatoire réelle X d'espérance μ et d'écart type σ, on définit son kurtosis non normalisé comme le moment d'ordre quatre de la variable centrée réduite :

$$\beta_2 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right].$$

Losque cette espérance existe. On a donc

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

avec μ_i les moments centrée d'ordre i.

3.5.5 Skewness ou coefficient d'asymétrie

C'est un moment d'ordre 3

Définition 3.5.2 *Le coefficient d'asymétrie ou Skewness est le moment d'ordre 3 centré*

$$\mu_3 = E\left[(X - E(X))^3\right].$$

Le coefficient d'asymétrie ou skewness de Fisher est relatif

$$S = \frac{\mu_3}{\mu_4}.$$

- Lorsque la distribution est symétrique, le coefficient de skewness est nul.

- Lorsque la distribution possède une forte queue vers la droite, le coefficient de skewness est positif.

- Lorsque la distribution possède une forte queue vers la gauche, le coefficient de skewness est négatif.

3.6 Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes propose d'approximer la queue d'une distribution expérimentale par une loi théorique particulière et faire des estimations à partir de cette dernière.

Deux approches sont envisagées :

- l'analyse des maxima par intervalles de temps fixes (crues maximales décennales par exemple),

- l'analyse des valeurs au-dessus d'un seuil (toutes les crues supérieures à une certaine hauteur par exemple).

La loi généralisée des extrêmes ou GEV est utilisée dans le premier cas et la loi de Pareto généralisée GPD dans le second.

Définition 3.6.1 *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon i.i.d. Si F_X est la fonction de répartition commune des X_t alors :*

$$P(M_n \leq x) = P(\max(X_1, X_2, ..., X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = (F_X(x))^n .$$

avec $M_n = \max(X_1,\ X_2,\ ..., X_n) = -\min(-X_1,\ -X_2, ...,\ -X_n)$. Ce résultat a une double conséquence :

D'une part, dans le cas d'un échantillon i.i.d, la loi des maxima s'obtient facilement dès lors que $F_X(.)$ est connue, et d'autre part la loi des minima se déduit très simplement des résultats obtenus sur les maxima.

On considère dans la suite l'échantillon ordonné $X_{(1)},\ X_{(2)}, ...,\ X_{(n)}$; afin d'alléger les notations.

On notera parfois $X_{k,n} = X_{(n-k+1)}$, de sorte que le sous-échantillon des k valeurs les plus élevées s'écrivent : $X_{k,n} \leq ... \leq X_{1,n}$. On notera dans la suite $S(x) = 1 - F(x)$ la fonction de survie associée à F.

3.6.1 Loi des valeurs extrêmes

le théorème de GnedenKo (1943) affirme que la loi des valeurs extrêmes appartient à une famille composée de trois lois de probabilité donnée par

Types	La fonction de répartition	La fonction densité
I (Gumbel)	$G(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$	$g(x) = \exp(-x - e^{-x})$
II (Fréchet)	$G(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} 0 \\ \alpha x^{-(\alpha+1)} \exp(-x^{-\alpha}) \end{cases}$
III (weibull)	$G(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} \alpha(-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^{\alpha}) \\ 0 \end{cases}$

Voici le théorème qui donne la loi du maximum.

Théorème 3.6.2 ***(Fisher-Tippet-Gnedenko-Von Mises-Jenkinson)****. Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est une suite de v.a i.i.d, et s'il existe un paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$ et deux suites normalisantes de réels $a_n > 0$ et $b_n \in R$ et une fonction de distribution H_γ non dégénérée ($Var(Z) \neq 0$, $Z \rightsquigarrow H_\gamma$) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq x\right] = H_\gamma(x).$$

avec

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} e^{-(1+\gamma y)^{-1/\gamma}} 1_{\{1+\gamma y>0\}} & si\ \gamma \neq 0 \\ e^{-e^{-y}} & sinon \end{cases}$$

alors H_γ doit être une distribution standard des valeurs extrêmes er qui a nécessairement l'une des trois formes suivantes (Weibull, Fréchet, Gumbel).
où γ l'indice des valeurs extrêmes, il se diffère selon les distributions de valeurs extêmes comme suit

$$\begin{cases} \gamma > 0 & \text{Fréchet, distribution de type Pareto} : 1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\gamma}} l_F(x) \\ \gamma < 0 & \text{Weibull, X admet un point terminal fini} \\ \gamma = 0 & \text{Gumbel, queue à décroissance exponentielle} \end{cases}$$

Les lois des valeurs extrêmes peuvent être représentées sous une seul forme, appelée distribution des valeurs extrêmes généralisée.

3.6.2 Distribution généralisée des valeurs extrêmes

La distribution généralisée des valeurs extrêmes (GEV) est une distribution à trois paramètres, elle est utilisée en hydrologie. Von Mises et Jenkinson ont unifié ces 3 lois par la distribution GEV définie par la fonction de répartition suivante

$$H(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{pour } \ \xi \neq 0 \text{ et } 1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) & \text{pour } \quad \xi = 0 \end{cases}$$

avec μ le paramètre de position, σ le paramètre de dispersion et ξ le paramètre de forme. Elle se réduit selon la valeur de ξ de la façon suivante :

- A la loi de Gumbel si $\xi = 0$
- A la loi de Fréchet si $\xi > 0$; avec $H(x) = 0$ pour $x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}$.
- A la loi de Weibull si $\xi < 0$; avec $H(x) = 1$ pour $x \geq \mu - \frac{\sigma}{\xi}$.

Plus la valeur de ξ est élevée plus la queue de la distribution est épaisse.

- La loi GEV a pour densité de probabilité

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}e^{-\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1-\frac{1}{\xi}} & \text{pour } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\exp\left(-\exp\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) & \text{pour } \xi = 0 \end{cases}.$$

3.6.3 Autres caractéristiques

Si on considère la v.a $X \rightsquigarrow GEV\,(\mu,\ \sigma,\ \xi)$ alors on a

- L'espérance est

$$E\left(X\right) = \begin{cases} \mu + \sigma\left(g_1 - 1\right)/\xi \,;\text{ si } \xi \neq 0,\ \xi < 1 \\ \mu + \sigma\gamma & ;\text{si } \xi = 0 \\ \infty & ;\text{si } \xi \geq 1 \end{cases}$$

Où $g_k = \Gamma\left(1 + k\xi\right)$, γ est la constante d'Euler

- La médiane est

$$median = \begin{cases} \mu + \sigma\frac{(\ln 2)^{-\xi}-1}{\xi} \text{ si } \xi \neq 0 \\ \mu + \sigma\ln\ln 2 \text{ si } \xi = 0 \end{cases}$$

- Le mode est

$$\text{mod} = \begin{cases} \mu + \sigma\frac{(1+\xi)^{-\xi}-1}{\xi} \text{ si } \xi \neq 0 \\ \mu \text{ si } \xi = 0 \end{cases}$$

- La variance est

$$Var\,(X) = \begin{cases} \sigma^2\left(g_2 - g_1^2\right)/\xi^2 \text{ si } \xi \neq 0, \xi < \frac{1}{2} \\ \sigma^2 \frac{\pi^2}{6} \text{ si si } \xi = 0 \\ \infty \text{ si } \xi \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

3.7 Distributions classiques

3.7.1 Distribution x-exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire continue T de temps de la vie suit une loi x- exponentielle de paramètre $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

-Si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(t) = \alpha\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)(1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t})^{\alpha-1}, t > 0.$$

On désigne que $T \rightsquigarrow x\text{-}Exp(\lambda,\, \alpha)$.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $T \rightsquigarrow x\text{-}Exp(\lambda,\, \alpha)$ est

$$F(t) = (1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t})^{\alpha}, t > 0.$$

- Clairement $F(0) = 0,\ F(\infty) = 1$.
- La fonction F est non décroissante et continue à droite, elle est absolument continue.
- Si $T \rightsquigarrow x\text{-}Exp(\lambda,\, \alpha)$ alors
- La fonction de survie est

$$S(t) = 1-(1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t})^{\alpha},\ \ t > 0.$$

- La fonction de risque est

$$h(t) = \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)(1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t})^{\alpha-1}}{1-(1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t})^{\alpha}},\ \ t > 0.$$

- La fonction de risque cumulée est

$$H(t) = -\ln(1-(1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t})^{\alpha}),\ \ t > 0.$$

3.7.2 Distribution Gumbel

La distribution de Gumbel est une bonne approximation de la loi du maximum d'un échantillon de v.a indépendantes et de même loi. Parmi les lois appartenant au domaine d'attraction de la loi de Gumbel, on compte la loi exponentielle. La loi de Gumbel est un cas particulier de la loi d'extremum généralisée au même titre que la loi de Weibull ou la loi de Fréchet.

- Sa fonction de densité est

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = \frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{(x-\beta)}{\alpha} - \exp\left(-\frac{(x-\beta)}{\alpha}\right)\right],\ \alpha > 0,\ \beta > 0;\ x \in \mathbb{R}.$$

où β est le paramètre de position et α est le paramètre d'échelle

On dénote par $T \rightsquigarrow Gumbel\,(\alpha,\ \beta)$.

- Sa fonction répartition est

$$F(t;\ \alpha,\ \beta) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{(t-\beta)}{\alpha}\right)\right];\ t \in \mathbb{R}.$$

pour $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, on obtient la loi standard de Gumbel .

- Sa fonction de survie est

$$S(t;\ \alpha,\ \beta) = \left[1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{(t-\beta)}{\alpha}\right)\right]\right];\ t \in \mathbb{R}.$$

- Sa fonction de risque est

$$h(t;\ \alpha,\ \beta) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-\beta)}{\alpha} - \exp\left(-\frac{(x-\beta)}{\alpha}\right)\right]}{\alpha\left[1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{(t-\beta)}{\alpha}\right)\right]\right]};\ t \in \mathbb{R}.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H(t;\ \alpha,\ \beta) = -\ln\left[1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{(t-\beta)}{\alpha}\right)\right]\right];\ t \in \mathbb{R}.$$

- Sa espérance de survie est

$$e\,(t) = \frac{\beta + \alpha\gamma}{1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{(t-\beta)}{\alpha}\right)\right]}$$

- Sa moyenne est

$$E(T) = \beta + \alpha\gamma.$$

où $\gamma = 0.5772$ est la constante d'Euler.

- Sa variance est

$$Var(T) = \frac{\alpha^2\pi^2}{6}.$$

- La Médiane est

$$median = \beta - \alpha \ln(\ln(2)).$$

- Le mode est

$$\mathrm{mod} = \beta.$$

- L'asymétrie est

$$\frac{12\sqrt{6}\zeta(3)}{\pi^3} \approx 1.14.$$

- Le Kurtosis normalisé est

$$\frac{12}{5}.$$

- L'entropie est

$$\ln(\alpha) + C + 1 \text{ pour } \alpha > \exp(-(C+1)).$$

- La fonction génératrice des moments est

$$\Gamma(1-\alpha t)\exp(\alpha t).$$

- La fonction caractéristique est

$$\varphi_T(t) = \Gamma(1 - i\alpha t)\exp(i\beta t).$$

3.7.3 Distribution Fréchet

- Sa fonction de densité est :

$$f(t;\ \sigma,\ \lambda) = \frac{\alpha}{s}\left(\frac{t-m}{s}\right)^{-1-\alpha}, \alpha > 0, s > 0, m \in \mathbb{R}\,;\, t > m.$$

où α est le paramètre de forme , s est le paramètre d'échelle (par défaut : $s = 1$)et m est le paramètre de position (par défaut : $m = 0$).

On dénote par $T \rightsquigarrow Frechet(\alpha,\ s,\ m)$.

- Sa fonction de répartition est

$$F(t;\ \sigma,\ \lambda) = \exp\left\{-\left(\frac{t-m}{s}\right)^{-\alpha}\right\};\ t > m.$$

- Sa fonction de survie est

$$S(t;\ \sigma,\ \lambda) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t-m}{s}\right)^{-\alpha}\right\};\ t > m.$$

- Sa fonction de risque est

$$h(t;\ \sigma,\ \lambda) = \frac{\frac{\alpha}{s}\left(\frac{t-m}{s}\right)^{-1-\alpha}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{t-m}{s}\right)^{-\alpha}\right\}};\ t > m.$$

$$median = m + \frac{s}{\sqrt[\alpha]{\log_e(2)}}.$$

- Son mode est

$$\mathrm{mod} = m + s\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

- Son entropie est

$$Entropie = 1 + \frac{\gamma}{\alpha} + \gamma + \ln\left(\frac{s}{\alpha}\right),\ \text{où } \gamma \text{ est le constante d'Euler-Mascheroni.}$$

- L'asymétrie de cette loi est

$$\begin{cases} \frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)-3\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+2\Gamma^3\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\sqrt{\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^3}} & ;\ \text{pour } \alpha > 3 \\ \infty & ;\ \text{sinon} \end{cases}.$$

- Son kurtosis normalisé est

$$\begin{cases} -6 + \frac{\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)-4\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+3\Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2} & ;\ \text{pour } \alpha > 4 \\ \infty & ;\ \text{sinon} \end{cases}.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H(t) = -\ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t-m}{s}\right)^{-\alpha}\right\}\right);\ t > m.$$

- Son l'éspérance de survie est

$$e(t) = \frac{\sigma\Gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{t}\right)^{\lambda}\right\}};\ t > 0.$$

- Sa moyenne est

$$E(T) = \begin{cases} m + s\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) & \text{pour } \alpha > 1 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Sa variance est

$$Var\left(T\right) = \begin{cases} s^2\left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right) & ; \text{pour } \alpha > 2 \\ \infty & ; \text{sinon} \end{cases}.$$

Et pour calculer la moyenne d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, il suffit utiliser la formule suivante

$$E(T^k) = \sigma^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right).$$

Remarque 3.7.1 *1- La loi de Fréchet est un cas spécial de la loi d'extremum généralisée au même titre que la loi de Gumbel ou loi de Weibull.*

2- En hydrologie, cette loi s'utilise pour des évènements extrêmes tels que le maximum annuel des précipitations journaliéres ou le débit des rivières.

3- On remarque quelques liens avec d'autres lois :

- Si $T \rightsquigarrow U\left[0,1\right]$ *alors* $m + s\left(-\log\left(T\right)\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \rightsquigarrow Frechet\left(\alpha, s, m\right).$

- Si $T \rightsquigarrow Frechet\left(\alpha, s, m\right)$ *alors* $kT + b \rightsquigarrow Frechet\left(\alpha, ks, km + b\right).$

- Si $T_i = Frechet\left(\alpha, s, m\right)$ *et* $Y = \max\{T_1, ..., T_n\}$ *alors* $Y \rightsquigarrow Frechet\left(\alpha, n^{\frac{1}{\alpha}}s, m\right).$

- Si $T \rightsquigarrow Weibull\left(k = \alpha, \lambda = m\right)$ *alors* $\frac{m^2}{T} \rightsquigarrow Frechet\left(\alpha, s, m\right).$

3.7.4 Distribution Gamma

Les distributions Gamma sont utilisées pour modéliser une grande variété de phénomènes, et tout particulièrement les phénomènes se déroulant au cours du temps où par essence, le temps écoulé est une grandeur réelle positive ; c'est le cas par exemple dans l'analyse de survie.

- Sa fonction de densité est

$$f\left(t;\ \lambda,\ \alpha\right) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma\left(\alpha\right)} t^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda t\right);\ t \geq 0 \text{ et } \lambda,\ \alpha > 0.$$

où α est le paramètre forme et λ le paramètre d'échelle.

Cette relation est notée $T \rightsquigarrow \Gamma\left(\lambda, \alpha\right).$

Dans cette formule, Γ est la fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma\left(t\right) = \int_0^\infty \exp\left(-u\right) u^{t-1} du.$$

Propriètè

1- $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour $t > 0$ (par l'intégral par partie) pour cette raison Gamma est appelée factorielle généralisée.

2- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, dt = \left. -\exp(-t)\right]_0^{+\infty} = 1.$

3- $\Gamma(n) = (n-1)!.$

4- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

5- La loi Gamma de paramètre $\lambda > 0$ et $\alpha = 1$ s'appelle loi exponentielle de paramètre λ.

6- La loi Gamma de paramètre $\lambda > 0$ et $\alpha = n$ entier ≥ 1 , est la probabilité de la somme de n v.a indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (loi d'Erlang).

7- Si T_1 et T_2 deux variables aléatoires supposées indépendantes telle que $T_1 \rightsquigarrow G(\lambda, \alpha)$ et $T_2 \rightsquigarrow G(\beta, \alpha)$ alors $T_1 + T_2 \rightsquigarrow G(\lambda + \beta, \alpha)$.

8- Si $T \rightsquigarrow \Gamma(\alpha = n, \lambda)$ avec n entièr,alors $F_T(t) = 1 - F_Y(n-1)$ avec $Y \rightsquigarrow Poi(c = \lambda x)$.

- Sa fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F(t; \lambda, \alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda t} u^{\alpha-1} \exp(-u)\, du. \\ F(t; \lambda, \alpha) &= \frac{\gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

telle que

$$\gamma(\alpha, t) = \int_0^t u^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt.$$

donc

$$\gamma(\alpha, \lambda t) = \int_0^{\lambda t} u^{\alpha-1} \exp^{-u} du; \text{ si } Re(\alpha) > 0.$$

est nommée fonction Gamma inachevée (Gamma incomplète), on Note, par définition

$$\gamma(\alpha, t) + \Gamma(\alpha, t) = \Gamma(\alpha).$$

- Sa fonction de survie est

$$S(t) = 1 - \frac{\gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}.$$

- Sa fonction de hasard est

$$h(t) = \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t)}{1-\gamma(\alpha, \lambda t)}.$$

- Son espérance mathématique d'ordre $r \in \mathbb{N}$ est

$$E(T^r) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^r \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{\lambda^r}.$$

donc

$$E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

- Sa variance est

$$Var(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- Son mode est

$$\mathrm{mod} = \frac{1}{\lambda}(\alpha-1).$$

- Son asymétrie est

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}.$$

- Son kortosis normalisé est

$$\frac{6}{\alpha}.$$

- Son entropie est

$$E[\log f(x)] = \alpha\frac{1}{\lambda} + (1-\alpha)\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \ln(\Gamma(\alpha)) + (1-\alpha)\psi(\alpha).$$

- Sa fonction génératrice des moments est

$$\left(1-\frac{1}{\lambda t}\right)^{-\alpha} \text{ pour } t < \lambda.$$

- Sa fonction caractéristique est

$$\varphi(t) = \left(1-i\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha}.$$

3.7.5 Distribution de weibull

- La fonction de densité de probabilité est donnée par

$$f(t;\ \alpha,\ \beta) = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{t}{\beta})^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}\ ;\ t \geq 0,\ \alpha, \beta > 0.$$

où α est le paramètre de forme et β est le paramètre d'échelle.

On marque ceci par $T \rightsquigarrow W(\alpha,\ \beta)$.

- Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(t;\ \alpha,\ \beta) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}\ ;\ t \geq 0.$$

Remarque 3.7.2 *1- Nous remarquons que la distribution exponentielle est une cas particulier des distributions de gamma et de Weibull.*

2- La famille des distribution de weibull a été présentée par le physicien Suédois Waloddi en 1939.

3- Quand $\alpha = 1$ la fonction de densité devient

$$f(t;\ \beta) = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{t}{\beta}}\ ;\ t \geq 0.$$

ce qui est la densité pour une distribution exponentielle avec le paramètre $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

- Sa fonction de survie est

$$S(t;\ \alpha,\ \beta) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}\ ;\ t \geq 0.$$

- Sa fonction de risque est

$$h(t;\ \alpha,\ \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}\ ;\ t \geq 0.$$

- Sa fonction de risque cumulée est

$$H(t;\ \alpha,\ \beta) = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\ ;\ t \geq 0\ .$$

- Son espérance de survie est

$$e\left(t\right) = \beta\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)e^{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}.$$

- Les moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$E(T^r) = \int_0^{+\infty} t^r f(t)dt = \alpha^r \int_0^{+\infty} y^{\frac{r}{\beta}} e^{-y} dy = \alpha^r \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right).$$

où nous avons fait même substitution $y = \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha$ afin de simplifier l'intégration

$$\mu = E(T) = \beta\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

- La variance associée à cette distribution est

$$\sigma^2 = Var(T) = \beta^2 \left\{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) + E(T)^2\right\}.$$

- La médiane est

$$median = \beta \left(\ln 2\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

- Le mode est

$$\mathrm{mod} = \beta\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \ \alpha > 1.$$

- La fonction génératrice des moments est

$$M\left(t\right) = \beta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right).$$

- Skewness est

$$\gamma_1 = \frac{\beta^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}.$$

- Le Kurtosis normalisé est

$$\gamma_2 = \frac{\beta^4 \Gamma\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right) - 4\mu\sigma^3\gamma_1 - 3\sigma^4 - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4}.$$

- L'entropie est

$$\gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha + \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité ; comme dit précédemment, elle permet de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité.

Liens avec d'autres lois

- si $T \rightsquigarrow W\left(\alpha = k, \ \beta = m\right)$, alors $\frac{m^2}{T} \rightsquigarrow Frechet\left(k, \ s, \ m\right)$.
- si $T \rightsquigarrow W\left(\alpha = k, \ \beta = m\right)$, alors $\log\left(T\right) \rightsquigarrow Gumbel\left(\alpha, \ \beta\right)$.
- si $T^\alpha \rightsquigarrow Exp\left(\lambda\right)$, alors $T \rightsquigarrow Weibull\left(\alpha, \ \beta\right)$.

الملخص

ناقشنا في هذه المذكرة بعض الخصائص الرياضية من بعض التوزيعات المعممة، بما في ذلك الوسط الحسابي، الدالة المولدة للوسط للعزوم، الدالة المميزة، الوسيط، التقدير بطريقة الحد الأقصى وختمنا هذا العمل ببعض التطبيقات على المعطيات الحقيقية. كل توزيع يمكن تطبيقه على نطاق واسع في العديد من مجالات الهندسة و علم الأحياء. هذه المجموعة هي امتداد لجميع القوانين الكلاسيكية.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons discutés certaines propriétés mathématiques de quelques distributions généralisées, y compris les moments ordinaires, la fonction génératrice des moments, la fonction caractéristique, la médiane, l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance et en fin ce travail est illustré par quelques applications sur des données réelles.

L'ensemble des distributions généralisées permet une plus grande flexibilité de ses queues et peut être largement appliquée dans de nombreux domaines de l'ingénierie et de la biologie. Cet ensemble qui étend quasiment toutes les lois classiques.

Mots clés : Généralisée, taux de hasard, génératrice, caractéristique, estimateur, excès extrême, information.

Abstract

In this work, we have discussed some mathematical properties of some generalized distribution, including ordinary moments, the moment generating function, the characteristic function and estimation by the maximum likelihood method, the median and the end this work is illustrate by some applications on real data. The set of generalized distributions allows for greater flexibility of its tails and biology. This set extends almost all the classic laws.