REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité Mathématiques Appliquées

Par

Farid MESBOUT

Thème

Sur les propriétés des solutions méromorphes de certaines classes d'équations différentielles et d'équations aux différences

Soutenue publiquement le : 03/05/2018

Devant le jury composé de

Président :	**D. AZZAM-LAOUIR**	**Prof.**	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
Rapporteur :	**T. ZERZAIHI**	**Prof.**	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
Co-rapporteur :	**A. BOUTABAA**	**Prof.**	Univ. Clermont Auvergne (France)
Examinateurs :	**A. AIBECHE**	**Prof.**	Univ. Setif 1
	M. YAROU	**Prof.**	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
	A. BOUCHAIR	**M.C.A.**	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a données pour terminer cette thèse.

Je voudrais remercier tout particulièrement Monsieur **Tahar ZERZAIHI**, Professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel), qui m'a dirigé tout au long de ma formation. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancement de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Enfin, ses nombreuses lectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup. merci Pour tout cela.

Je tiens à remercier Madame **Dalila AZZAM-LAOUIR**, Professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (jijel), d'avoir accepté d'être président du jury.

Je remercie également Messieurs **Aissa AIBECHE**, Professeur à l'université de Setif 1, **Mustapha YAROU**, Professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (jijel), **Abderrahmane BOUCHAIR**, Maître de Conférences à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (jijel), d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail, ils ont bien voulu établir un rapport sur ma thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'aimerais aussi remercier Monsieur le Professeur **Abdelbaki BOUTABAA** pour son accueil chaleureux à l'université de Clermont Auvergne (France), pour sa participation dans cette thèse, ainsi que pour ses nombreuses remarques qui ont contribué au bon déroulement de cette recherche.

Par ailleurs, je remercie aussi tous mes collègues, toute la famille du laboratoire de Mathématiques pures et appliquées, et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (jijel).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude de l'ordre de croissance d'une fonction analytique est un moyen efficace pour étudier les propriétés asymptotiques de cette fonction. Cet ordre de croissance est défini pour une fonction analytique, à partir de maximum du module $M(r,f) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$, lequel est atteint sur la circonférence du disque $|z| \leq r$. Ce principe de maximum atteint sur la frontière du disque n'est pas vrai dans le cas d'une fonction méromorphe sur un disque $|z| \leq r$, sachant qu'une fonction méromorphe est par définition le rapport des deux fonctions analytiques. Pour contourner cette défaillance dans le cas méromorphe, le mathématicien finlandais R. Nevanlinna a établi en 1924 une théorie qui porte son propre nom et qui permet d'étudier la taille d'une fonction méromorphe en se servant d'une fonction $T(r,f)$ qui s'appelle fonction caractéristique de Nevanlinna.

L'ordre de croissance, défini en fonction de $\log T(r,f)$ et $\log r$, joue un rôle important dans l'étude des solutions des équations différentielles et des équations aux différences complexes. Il change de propriété en fonction de la forme de l'équation et de la nature de ses coefficients. Dans cette thèse, nous étudions deux types d'équations d'ordre n ; le premier est une classe d'équations différentielles et le second est une classe d'équations aux différences. Cette étude est faite à partir de certaines notions mathématiques comme : l'ordre de croissance $\rho(f)$, l'exposant de convergence $\lambda(f)$ et le second ordre de croissance $\rho_2(f)$.

Cette thèse est répartie sur l'introduction et trois chapitres. Dans la première partie du premier chapitre, on expose la formule de Poisson-Jensen qui relie les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe f à l'intérieur d'un disque à la valeur moyenne de f sur la frontière de ce disque. Cette formule joue un rôle important dans la théorie de Nevanlinna. Après, on donne les définitions des fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ et quelques propriétés de ces trois fonctions. Ensuite, on aborde le premier théorème de Nevanlinna qui est une conséquence de la formule de Jensen. Il décrit la taille du nombre des racines de l'équation $f(z)=a$, pour tout $a\in\mathbb{C}$. Dans la deuxième partie de ce chapitre on parle de l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe. En particulier si f est entière alors, $\rho(f)$ est exactement l'ordre de croissance défini à l'aide de $M(r,f)$. Ensuite, on donne quelques propriétés de $\rho(f)$ qui sont nécessaires à la suite du travail. On définit aussi l'exposant de convergence en lui associant quelques propriétés fondamentales.

Dans le début du deuxième chapitre, on expose une application de la théorie de Nevanlinna aux équations différentielles. Il s'agit d'une généralisation de deux travaux appartenant à F. Peng et Z. X. Chen [51]. Ils considèrent une équation différentielle du second ordre de la forme

$$f''+e^{-z}f'+(A_1e^{a_1z}+A_2e^{a_2z})f=0,$$

où A_1,A_2 sont des fonctions entières et $a_1,a_2\in\mathbb{C}$. Ils ont montré, sous certaines conditions, que toute solution méromorphe non nulle de cette équation satisfait

$$\rho(f)=+\infty \quad \text{et} \quad \rho_2(f)=1.$$

Le deuxième travail est celui de J. Xu et X. Zhang [60]. En développant le résultat précédent, ils ont étudié une équation différentielle de la forme

$$f''+A_0e^{a_0z}f'+(A_1e^{a_1z}+A_2e^{a_2z})f=0,$$

où A_0,A_1,A_2 sont des fonctions méromorphes et $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}$. En imposant certaines conditions, ils ont démontré le résultat déjà obtenu par F. Peng et Z. X. Chen [51] sur l'ordre et le seconde ordre de la solution f. Nous avons remarqué, à partir de ces deux résultats, que $\rho(f)$ est égal au degré des trois monômes utilisés dans les deux équations et sans perte de généralité, on peut remplacer le degré 2 de l'équation par un degré quelconque. Dans notre travail, nous avons remplacé les trois monôme par trois polynômes de degré k et leurs équations par une équation plus générale de degré n de la forme

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}A_j(z)f^{(j)}(z)+A_m(z)e^{p_m(z)}f^{(m)}(z)+\left(A_0(z)e^{p(z)}+B_0(z)e^{q(z)}\right)f(z)=0, \qquad (0.1)$$

où $B_0, A_j, j = 0, ..., n$ sont des fonctions méromorphes et $p_m(z), p(z), q(z)$ sont des polynômes de degré k. En supposant que les coefficients vérifient certaines conditions, on a démontré que toute solution méromorphe non nulle de cette équation satisfait

$$\rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \rho_2(f) = k.$$

A la fin de ce chapitre, nous avons étudié l'exposant de convergence des solutions de l'équation (0.1) et de leurs dérivées premières et secondes. Nous avons obtenu un résultat important qui est

$$\lambda(f - \psi) = \lambda(f' - \psi) = \lambda(f'' - \psi) = \infty,$$

où ψ est une fonction méromorphe d'ordre $< k$ et f est une solution méromorphe non nulle de l'équation (0.1). Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous avons montré que toute solution méromorphe de cette équation a un nombre infini de points fixes.
Dans le troisième chapitre, nous avons généralisé les travaux de Z. L. Yuan et Q. Ling [65]. Ils ont considéré une équation aux différences de la forme

$$\sum_{j=2}^{n} A_j(z)f(z+j) + A_1(z)e^{\alpha_1 z}f(z+1) + (A_0(z)e^{\alpha_0 z} + B_0(z)e^{\beta_0 z})f(z) = 0,$$

où $B_0, A_j,\ j = 0, ..., n$ sont des fonctions méromorphes et $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0 \in \mathbb{C}$. Ils ont démontré, sous certaines conditions, que $\rho(f) \geq 2$ où f est une solution méromorphe non nulle.
Dans notre travail, nous avons obtenu un résultat plus général. Nous considérons l'équation

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} A_j(z)f(z+j) + A_m(z)e^{p_m(z)}f(z+m) + (A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)})f(z) = 0,$$

où $B_0, A_j, j = 0, ..., n$ sont des fonctions méromorphes et $p(z), p_m(z), q(z)$ sont des polynômes de degré k. Nous avons imposé des conditions sur les coefficients et on a démontré que $\rho(f) \geq k+1$. Puis on a étudié l'ordre de croissance des solutions de l'équation aux différences

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z)f(z+j) = 0, \tag{0.2}$$

où, $a_j(z) = A_j(z)e^{p_j(z)} + D_j(z)$ et $A_j(z)$, $D_j(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $< k$ et $p_j(z)$ est un polynôme de degré k. On a prouvé que toute solution méromorphe de cette équation a un ordre supérieur ou égal à $k+1$. Ce résultat est une généralisation des travaux de Z. L. Yuan et Q. Ling [65]. On termine ce chapitre par l'étude de l'ordre de croissance et l'exposant de convergence des solutions méromorphe de l'équation non homogène associée à l'équation (0.2).

CHAPITRE 1

THÉORIE DE NEVANLINNA

Dans ce chapitre, nous allons introduire toutes les notions et tous les résultats que nous avons employé dans cette thèse. Plus particulièrement, les définitions et les théorèmes qui nous sont indispensables pour une bonne étude des équations différentielles et équations aux différences. Pour plus de détails sur ce chapitre voir, [32, 45, 64].

1.1 Premier théorème de Nevanlinna

1.1.1 Formule de Poisson-Jensen

Pour simplifier la démonstration de la formule de Poisson-Jensen, on a besoin de la proposition suivante

Proposition 1.1.1. *Soient $r > 0$ et $f(z)$ une fonction analytique sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$. Supposons que $f(z)$ n'a pas de zéros dans D, alors pour tout $z \in int(D)$, on a*

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)} d\xi \tag{1.1}$$

Preuve.

On distingue deux cas :

1) Si $z = 0$, d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |0|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi.0)(\xi - 0)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{\log f(\xi)}{\xi} d\xi$$
$$= \log f(0)$$

2) Si $z \neq 0$, on pose :

$$g(\xi) = \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)},$$

on remarque que le seul point singulier de $g(\xi)$ dans D est $\xi_0 = z$, car si $r^2 - \xi\bar{z} = 0$ on a $\xi = \frac{r^2}{\bar{z}}$, implique $|\xi| = \frac{r^2}{|\bar{z}|} > \frac{r^2}{r} = r$, d'où $\xi \notin D$. Et comme $\xi_0 = z$ est un pôle simple, on applique le théorème de Résidu sur la fonction $g(\xi)$ (sachant que $z\bar{z} = |z|^2$), on obtient

$$\int\limits_{|\xi|=r} g(\xi) d\xi = 2\pi i \lim_{\xi \to z} ((\xi - z) g(\xi))$$
$$= 2\pi i \lim_{\xi \to z} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})}$$
$$= 2\pi i \log f(z),$$

d'où $\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)} d\xi$. De 1) et 2) on a le résultat. □

Corollaire 1.1. 1) *En utilisant la formule* (1.1) *et en posant*

$$\xi = re^{i\varphi} \quad et \quad z = \delta e^{i\theta},$$

tel que $0 \leq \delta < r$, *on obtient*

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - \delta^2) \log f(re^{i\varphi})}{r^2 - 2r\delta \cos(\varphi - \theta) + \delta^2} d\varphi \tag{1.2}$$

2) *En séparant la partie réelle dans* (1.2), *on obtient*

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - \delta^2) \log |f(re^{i\varphi})|}{r^2 - 2r\delta \cos(\varphi - \theta) + \delta^2} d\varphi \tag{1.3}$$

Preuve.

1) On sait que $\xi\bar{\xi} = |\xi|^2 = r^2$. D'où

$$\begin{aligned}(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z) &= (\xi\bar{\xi} - \xi\bar{z})(\xi - z)\\ &= \xi(\bar{\xi} - \bar{z})(\xi - z)\\ &= \xi(\overline{\xi - z})(\xi - z)\\ &= re^{i\varphi}|\xi - z|^2,\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\xi - z = re^{i\varphi} - \delta e^{i\theta} = (r\cos\varphi - \delta\cos\theta) + i(r\sin\varphi - \delta\sin\theta),$$

donc

$$\begin{aligned}|\xi - z|^2 &= (r\cos\varphi - \delta\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi - \delta\sin\theta)^2\\ &= r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2\delta r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) + \delta^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\\ &= r^2 - 2\delta r\cos(\varphi - \theta) + \delta^2, \qquad (1.4)\end{aligned}$$

car :

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \text{et} \quad \cos(\varphi - \theta) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta.$$

En multipliant (1.4) par $re^{i\varphi}$, on trouve

$$(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z) = re^{i\varphi}(r^2 - 2\delta r\cos(\varphi - \theta) + \delta^2), \qquad (1.5)$$

ensuite, en remplaçant (1.5) dans (1.1) et sachant que $d\xi = ire^{i\varphi}$ on obtient l'égalité (1.2). □

Dans le théorème suivant on expose la formule de Poisson-Jensen dans le cas général, autrement dit, ce théorème est valable pour une fonction méromorphe qui possède comme zéro le point $z_0 = 0$, ainsi que pour une fonction qui n'a ni zéros ni pôles en ce point.

Théorème 1.1.2. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe non constante, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, avec $r > 0$ et $a_1, ..., a_N$ (resp. $b_1, ..., b_P$) les zéros (resp. les pôles) de $f(z)$ dans int(D). Supposons que chaque zéro (resp. pôle) est compté avec sa multiplicité, alors on a*

Pour $z = \delta e^{i\theta}$ *avec* $0 \leq \delta < r$, *on a*

$$\log|f(z)z^{-m}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-\delta^2)\log|f(re^{i\varphi})|}{r^2 - 2r\delta\cos(\theta-\varphi)+\delta^2}d\varphi + \sum_{j=1}^{P}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\log\left|\frac{r^2-\bar{a}_i z}{r(z-a_i)}\right| - m\log r. \tag{1.6}$$

avec, $f(z) = \sum\limits_{i=m}^{+\infty} c_i z^i$, $c_m \neq 0$ *(série de Laurent de* $f(z)$ *en zéro)*

Preuve.

On définit une fonction $\psi(\xi)$ comme suit

$$\psi(\xi) = \frac{r^m}{\xi^m} f(\xi)\prod_{i=1}^{N}\frac{r^2-\bar{a}_i\xi}{r(\xi-a_i)} \Big/ \prod_{j=1}^{P}\frac{r^2-\bar{b}_j\xi}{r(\xi-b_j)}. \tag{1.7}$$

On remarque que la fonction $\psi(\xi)$ est méromorphe et n'admet ni zéros ni pôles sur D. Donc, elle est analytique sur D et comme elle n'a pas de zéros dans ce domaine, alors d'après le corolaire 1.1, on a

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-\delta^2)\log|\psi(re^{i\varphi})|}{r^2-2r\delta\cos(\varphi-\theta)+\delta^2}d\varphi. \tag{1.8}$$

D'autre par si $|\xi| = r$, on a $\xi\bar{\xi} = |\xi|^2 = r^2$, d'où

$$r^2 - \bar{a}_i\xi = \xi\bar{\xi} - \bar{a}_i\xi = \xi(\bar{\xi} - \bar{a}_i) = \xi(\overline{\xi - a_i}),$$

de même on a $r^2 - \bar{b}_j\xi = \xi(\overline{\xi - b_j})$, donc

$$\left|\frac{r^2-\bar{a}_i\xi}{r(\xi-a_i)}\right| = \left|\frac{\xi(\overline{\xi-a_i})}{r(\xi-a_i)}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{r^2-\bar{b}_j\xi}{r(\xi-b_j)}\right| = \left|\frac{\xi(\overline{\xi-b_j})}{r(\xi-b_j)}\right| = 1. \tag{1.9}$$

De (1.7) et (1.9), on trouve

$$|f(\xi)| = |\psi(\xi)| \quad \text{sur} \quad |\xi| = r$$

et (1.8) devient

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-\delta^2)\log|f(re^{i\varphi})|}{r^2-2r\delta\cos(\varphi-\theta)+\delta^2}d\varphi, \tag{1.10}$$

d'autre part de l'égalité (1.7), on obtient

$$\log|\psi(z)| = \log|f(z)z^{-m}| + m\log r - \sum_{j=1}^{P}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_j z}{r(z-b_j)}\right| + \sum_{i=1}^{N}\log\left|\frac{r^2-\bar{a}_i z}{r(z-a_i)}\right|, \tag{1.11}$$

enfin de (1.10) et (1.11), on obtient la relation (1.6). □

Corollaire 1.2. *Pour $z = 0$ i.e. $\delta = 0$ dans* (1.6), *on a*

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{j=1}^{P}\log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{i=1}^{N}\log\frac{r}{|a_i|} - m\log r. \tag{1.12}$$

En effet :

On pose $h(z) = f(z)z^{-m}$, alors on a

$$h(z) = z^{-m}f(z) = z^{-m}(c_m z^m + c_{m+1}z^{m+1} + \cdots) = (c_m + c_{m+1}z + \cdots).$$

D'où $h(0) = c_m$, aussi :

$$\log|h(0)| = \log|c_m| = \log|f(z)z^{-m}|_{z=0}$$

et en remplaçant dans (1.6), *on obtient le résultat.*

Remarque 1.1.1. la relation (1.6) s'appelle formule de **Poisson** et la relation (1.12) s'appelle formule de **Jensen**.

Dans ce qui suit, nous allons définir les fonctions $N(r, f)$, $m(r, f)$ et $T(r, f)$ et on leur associe quelques propriétés. Tout cela, pour simplifier au maximum la formule de Jensen et pour arriver à démontrer le premier théorème de Nevanlinna qui est une conséquence immédiate de cette formule.

Notation 1.1.1. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et $t > 0$, on note par $n(t, f)$ le nombre de pôles de $f(z)$ dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq t\}$.*

Lemme 1.1. *Sous les conditions du théorème 1.1.2 et en supposant de plus que*

$$|a_1| \leq |a_2| \leq ... \leq |a_N| \ (resp.\ |b_1| \leq |b_2| \leq ... \leq |b_P|),$$

on a

$$\sum_{j=1}^{P}\log\frac{r}{|b_j|} = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t}dt$$

$$\sum_{i=1}^{N}\log\frac{r}{|a_i|} = \int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f}) - n(0,\frac{1}{f})}{t}dt$$

Preuve.

On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{P}\log\frac{r}{|b_j|} &= P\log r-\sum_{j=1}^{P}\log|b_j|\\
&= P\log r-\sum_{j=1}^{P}\log|b_j|-\sum_{j=1}^{P-1}j\log|b_{j+1}|+\sum_{j=1}^{P-1}j\log|b_{j+1}|\\
&= P\log r-\sum_{j=1}^{P}\log|b_j|-\sum_{j=1}^{P}(j-1)\log|b_j|+\sum_{j=1}^{P-1}j\log|b_{j+1}|\\
&= P\log r-\sum_{j=1}^{P}j\log|b_j|+\sum_{j=1}^{P-1}j\log|b_{j+1}|\\
&= P(\log r-\log|b_P|)-\sum_{j=1}^{P-1}j\log|b_j|+\sum_{j=1}^{P-1}j\log|b_{j+1}|\\
&= \sum_{j=1}^{P-1}j(\log|b_{j+1}|-\log|b_j|)+P(\log r-\log|b_P|)\\
&= \sum_{j=1}^{P-1}\int\limits_{|b_j|}^{|b_{j+1}|}\frac{j}{t}dt+\int\limits_{|b_P|}^{r}\frac{P}{t}dt. \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

Si $|b_j|<|b_{j+1}|$, on a pour $t\in]|b_j|,|b_{j+1}|[$, $n(t,f)=j+n(0,f)$, d'où $j=n(t,f)-n(0,f)$ et pour $t\in]|b_P|,r[$ on a $p=n(t,f)-n(0,f)$, donc

$$\int_{|b_j|}^{|b_{j+1}|}\frac{j}{t}dt=\int_{|b_j|}^{|b_{j+1}|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt$$

et

$$\int_{|b_P|}^{r}\frac{P}{t}dt=\int_{|b_P|}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt.$$

D'autre part, si $|b_j|=|b_{j+1}|$, on a aussi

$$\int_{|b_j|}^{|b_{j+1}|}\frac{j}{t}dt=\int_{|b_j|}^{|b_{j+1}|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt=0,$$

d'où, la relation (1.13) devient □

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{P}\log\frac{r}{|b_j|} &= \sum_{j=1}^{P-1}\int\limits_{|b_j|}^{|b_{j+1}|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+\int\limits_{|b_P|}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt\\
&= \int\limits_{0}^{|b_1|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+\int\limits_{|b_1|}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt=\int\limits_{0}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt,
\end{aligned}
$$

car

$$\int_0^{|b_1|} \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt = 0.$$

Définition 1.1.1. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et $r > 0$. On appelle **fonction de comptage** des pôles de $f(z)$ dans $|z| \leq r$ qu'on note $N(r,f)$, la fonction définie par*

$$N(r,f) = \int_0^{r} \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r.$$

Remarque 1.1.2. Avec les nouvelles notations, la formule de Jensen (1.12), devient

$$\begin{aligned}
\log|c_m| =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \int_0^{r} \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt - \int_0^{r} \frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt - m\log r \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \int_0^{r} \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r \\
& - \int_0^{r} \frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt - n(0,\frac{1}{f})\log r \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}),
\end{aligned} \tag{1.14}$$

car on a $\quad m = n(0,\frac{1}{f}) - n(0,f).$

Proposition 1.1.3. *Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes. On a*

a) $N(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i)$, $\forall r \geq 1.$

b) $N(r,f^k) = kN(r,f)$, $\forall k \in \mathbb{N}.$

c) $N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i)$, $\forall r \geq 1.$

d) $N(r,f^{(n)}) = (n+1)N(r,f).$

e) $N(r,f(cz)) = N(|c|r,f)$, $\forall c > 0.$

1.1.2 Fonction caractéristique

Définition 1.1.2. *On définit la fonction* $\log^+$ *comme suit :*

$$\log^+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

$$\alpha \mapsto \log^+ \alpha = \begin{cases} \max\{0, \log\alpha\} & si \quad \alpha > 0 \\ 0 & si \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Lemme 1.2. *La fonction* $\log^+$ *admet les propriétés suivantes :*

a) $\log\alpha \leq \log^+\alpha$, $\forall\alpha > 0$.

b) *Si* $\alpha \leq \beta$, *alors* $\log^+\alpha \leq \log^+\beta$, $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+$.

c) $\log\alpha = \log^+\alpha - \log^+\dfrac{1}{\alpha}$, $\forall\alpha > 0$.

d) $|\log\alpha| = \log^+\alpha + \log^+\dfrac{1}{\alpha}$, $\forall\alpha > 0$.

e) $\log^+(\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\log^+\alpha_i$, *tel que* $\forall i = 1,...,n$ *on a* $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$.

f) $\log^+(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i) \leq \log n + \sum\limits_{i=1}^{n}\log^+\alpha_i$, *tel que* $\forall i = 1,...,n$ *on a* $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$.

Preuve.

Les propriétés de *a*) jusqu'à *d*) sont des conséquences immédiates de la définition de la fonction $\log^+$. Il suffit de montrer les inégalités *e*) et *f*).

e) On distingue deux cas :

Ou bien $\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i \leq 1$, alors

1) Si $\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$, on a $\log^+(\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i) = 0$.

2) Si $0 < \prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i \leq 1$, on a $\log^+(\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i) = \max\{0, \log(\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i)\} = 0$.

De 1) et 2), on a $\log^+(\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i) = 0 \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\log^+\alpha_i$.

Ou bien $\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i > 1$, en appliquant l'inégalité *a*), on a

$$\log^+(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i) = \max\{0, \log(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i)\} = \log(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n}\log\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n}\log^+\alpha_i.$$

f) D'après les assertions *b*) et *f*) et sachant que $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i \leq n\max\limits_{0\leq i\leq n}\alpha_i$, on a

$$\log^+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i) \leq \log^+(n\max_{0\leq i\leq n}\alpha_i) \leq \log^+ n + \log^+\max_{0\leq i\leq n}\alpha_i \leq \log n + \sum_{i=1}^{n}\log^+\alpha_i$$

□

Définition 1.1.3. *Soient* $f(z)$ *une fonction méromorphe et* $r > 0$. *On appelle* ***fonction de compensation*** *qu'on note* $m(r, f)$, *la fonction définie par*

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi.$$

Remarque 1.1.3. D'après l'égalité c) du lemme 1.2, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\varphi})| - \log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\right)d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi \\ &= m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}).\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, la formule (1.14) devient

$$\begin{aligned}\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) \\ &= m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Proposition 1.1.4. *Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes. On a*

a) $m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i)$, $\forall r \geq 1$.
b) $m(r, f^k) = km(r, f)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
c) $m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i)$, $\forall r \geq 1$.
d) $m(r, f(cz)) = m(|c|r, f)$, $\forall c > 0$.

Définition 1.1.4. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe et $r > 0$. On appelle* ***fonction caractéristique*** *de f ou* ***fonction de Nevanlinna*** *qu'on note $T(r, f)$, la fonction définie par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Conclusion 1. *En utilisant les nouvelles notations et la relation* (1.15)*, on a*

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) - \log|c_m|, \tag{1.16}$$

c'est la forme la plus simple de la formule de Jensen.

L'exemple suivant est nécessaire dans la section consacré à l'ordre de croissance, pour déduire l'ordre de la fonction $e^{p(z)}$, où $p(z)$ est un polynôme de degré supérieure ou égale à un.

Exemple 1.1.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors*

$$T(r, e^{\alpha z^n}) = \frac{|\alpha|}{\pi} r^n.$$

En effet :

Supposons que $\alpha = |\alpha| e^{i\theta_0}$. Comme $e^{\alpha z^n}$ est analytique, alors $N(r, e^{\alpha z^n}) = 0$, donc

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \exp\{|\alpha| e^{i\theta_0} (re^{i\varphi})^n\} \right| d\varphi,$$

or

$$\begin{aligned} \exp\{|\alpha| e^{i\theta_0} (re^{i\varphi})^n\} &= \exp\{|\alpha| r^n e^{i(\theta_0 + n\varphi)}\} \\ &= \exp\{|\alpha| r^n \cos(\theta_0 + n\varphi) + i|\alpha| r^n \sin(\theta_0 + n\varphi)\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \exp\{|\alpha| e^{i\theta_0} (re^{i\varphi})^n\} \right| = \exp\{|\alpha| r^n \cos(\theta_0 + n\varphi)\},$$

et on a

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|\alpha| r^n \cos(\theta_0 + n\varphi)} d\varphi \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2n\pi} \log^+ e^{|\alpha| r^n \cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2n\pi} \max\{0, |\alpha| r^n \cos\varphi\} d\varphi \\ &= \frac{|\alpha| r^n}{2n\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2n\pi} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi. \end{aligned} \tag{1.17}$$

On sait que, pour toute fonction périodique f de période 2π, on a

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2n\pi} f(x) dx = n \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} f(x) dx.$$

En utilisant ce résultat, l'égalité (1.17) devient

$$T(r, f) = \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi, \tag{1.18}$$

et on distingue deux cas

1) *Si* $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *l'égalité* (1.18) *devient*

$$T(r,f) = \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi + \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi + \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\theta_0 + 2\pi} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi$$

$$= \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \; d\varphi + \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\theta_0 + 2\pi} \cos\varphi \; d\varphi$$

$$= \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} (1 - \sin\theta_0 + \sin(\theta_0 + 2\pi) + 1) = \frac{|\alpha| r^n}{\pi}.$$

2) *Si* $\theta_0 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, *l'égalité* (1.18) *devient*

$$T(r,f) = \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi + \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi + \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\frac{5\pi}{2}}^{\theta_0 + 2\pi} \max\{0, \cos\varphi\} d\varphi$$

$$= \frac{|\alpha| r^n}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos\varphi \; d\varphi$$

$$= \frac{|\alpha| r^n}{\pi}.$$

La proposition suivante donne une relation entre la fonction caractéristique de Nevanlinna et le module maximum d'une fonction entière. On a besoin de ce résultat, dans la section qui concerne l'ordre de croissance, pour affirmer que l'ordre de croissance d'une fonction analytique coïncide avec celui défini en fonction de $T(r,f)$.

Proposition 1.1.5. *Soient* $g(z)$ *une fonction analytique et* $r, R \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < r < R$. *Si le module maximum vérifie*

$$M(r,g) = \max_{|z|=r} |g(z)| \geq 1,$$

Alors

$$T(r,g) \leq \log M(r,g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,g).$$

Preuve.

Comme $g(z)$ est analytique, la première inégalité est triviale car

$$\begin{aligned} T(r,g) = m(r,g) &= \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \log^+ M(r,g) = \log M(r,g). \end{aligned}$$

Montrons maintenant la deuxième inégalité.
Supposons que $g(z) = \sum_{i=m}^{+\infty} c_i z^i$, $c_m \neq 0$ (série de Laurent de $g(z)$ en zéro) et soit $z_0 = re^{i\theta_0}$, tel que $|g(z_0)| = M(r,g)$ et soient $a_1, ..., a_N$ les zéros de $g(z)$ dans $|z| < R$.
Comme $|z_0| < R$, alors on a $\left| \frac{R(z_0 - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z_0} \right| < 1$, en effet :
si on pose $a_j = |a_j| e^{i\theta_j}$, on a

$$\begin{aligned} |R(z_0 - a_j)| &= \sqrt{(rR)^2 + (|a_j|R)^2 - 2R^2|a_j| r \cos(\theta_0 - \theta_j)} \\ &= \sqrt{(rR - |a_j|R)^2 + 2R^2|a_j| r (1 - \cos(\theta_0 - \theta_j))} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |R^2 - \bar{a}_j z_0)| &= \sqrt{R^4 + (|a_j|r)^2 - 2R^2|a_j| r \cos(\theta_0 - \theta_j)} \\ &= \sqrt{(R^2 - |a_j|r)^2 + 2R^2|a_j| r (1 - \cos(\theta_0 - \theta_j))}, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$R(R-r) + |a_j|(R-r) > 0,$$

ce qui implique

$$R^2 - rR + R|a_j| - r|a_j| > 0,$$

d'où

$$R^2 - |a_j| r > Rr - |a_j| R,$$

donc

$$(R^2 - |a_j| r)^2 > (Rr - |a_j| R)^2,$$

ce qui implique

$$\left| \frac{R(z_0 - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z_0} \right| < 1.$$

Donc d'après la formule Poisson-Jensen, on a

$$\begin{aligned}
\log|g(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\log|g(Re^{i\varphi})|}{R^2-2Rr\cos(\theta_0-\varphi)+r^2}d\varphi+\sum_{i=1}^{N}\log\left|\frac{R(z_0-a_i)}{R^2-\bar{a}_iz_0}\right|+m(\log r-\log R)\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\log^+|g(Re^{i\varphi})|}{R^2-2Rr-2Rr\cos(\theta_0-\varphi)+r^2+2Rr}d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\log^+|g(Re^{i\varphi})|}{(R-r)^2+2Rr(1-\cos(\theta_0-\varphi))}d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\log^+|g(Re^{i\varphi})|}{(R-r)^2}d\varphi\\
&= \frac{(R+r)}{(R-r)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|g(Re^{i\varphi})|d\varphi=\frac{(R+r)}{(R-r)}m(R,g)=\frac{(R+r)}{(R-r)}T(R,g)
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.1.6. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, alors*

$f(z)$ est une fraction rational si et seulement si $T(r,f)=O(\log r)$.

1.1.3 Premier théorème de Nevanlinna

Théorème 1.1.7. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe et $a\in\mathbb{C}$. Supposons que $f(z)-a$ s'écrit sous forme de la série de Laurent suivante :*

$$f(z)-a=\sum_{i=m}^{+\infty}c_iz^i,\ \ m\in\mathbb{Z},\ \ c_m\neq 0,$$

alors, on a

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\log|c_m|+\phi(r,a),$$

où $|\phi(r,a)|\leq\log 2+\log^+|a|$.

Preuve.

D'après la relation (1.16), on a

$$\begin{aligned}
T(r,\frac{1}{f-a}) &= T(r,f-a)-\log|c_m|\\
&= N(r,f-a)+m(r,f-a)-\log|c_m|\\
&= N(r,f)+m(r,f)+m(r,f-a)-m(r,f)-\log|c_m|\\
&= T(r,f)-\log|c_m|+\phi(r,a),
\end{aligned}$$

avec $\phi(r,a) = m(r, f-a) - m(r,f)$. Il nous reste à montrer que $|\phi(r,a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|$.

D'après le lemme 1.2, on a

$$\begin{aligned}
m(r, f-a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a| d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ (|f(re^{i\varphi})| + |a|) d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\log 2 + \log^+ |f(re^{i\varphi})| + \log^+ |a|) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \log 2 + \log^+ |a| \\
&= m(r,f) + \log 2 + \log^+ |a|, \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
m(r, f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a + a| d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ (|f(re^{i\varphi}) - a| + |a|) d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\log 2 + \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a| + \log^+ |a|) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a| d\varphi + \log 2 + \log^+ |a| \\
&= m(r, f-a) + \log 2 + \log^+ |a|. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

De (1.19) et (1.20), on trouve $|\phi(r,a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|$. □

Proposition 1.1.8. *Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Alors, on a*

a) $T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$, $\forall r \geq 1$.

b) $T(r, f^k) = kT(r,f)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

c) $T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r,f) + o(T(r,f))$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

d) $T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$, $\forall r \geq 1$.

e) $T(r, \frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}) = T(r,f) + O(1)$, *tel que* $f \not\equiv \frac{-\delta}{\gamma}$.
f) $T(r, f(cz)) = T(|c|r, f)$, $\forall c > 0$.
g) $m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = o(T(r,f))$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

1.2 Ordre de croissance des fonctions méromorphes

Définition 1.2.1. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. On appelle* ***Ordre de croissance*** *de f qu'on note $\rho(f)$, la limite supérieure définie par*

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit $g(z)$ une fonction analytique telle que*

$$M(r,g) = \max_{|z|=r} |g(z)| \geq 1,$$

alors on a : $\rho(g) = \sigma(g)$, avec

$$\sigma(g) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,g)}{\log r}.$$

Preuve.

De la proposition 1.1.5, on a

$$T(r,g) \leq \log M(r,g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,g). \tag{1.21}$$

La première inégalité nous donne $\rho(g) \leq \sigma(g)$.

D'autre part, En prenant $R = 2r$ dans (1.21) et en introduisant la fonction log, on obtient

$$\log\log M(r,g) \leq \log 3 + \log T(2r,g),$$

ensuite, on divise par $\log r$ et on passe à limite supérieure, on trouve

$$\begin{aligned} \sigma(g) &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,g)}{\log r} \\ &\leq \limsup_{r\to+\infty} (\frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log T(2r,g)}{\log r}) \\ &\leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log 3}{\log r} + \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log r} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log 2r}\frac{\log 2r}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log 2r}\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log 2r}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log 2r} = \rho(g)
\end{aligned}
$$

□

Dans notre travail on a besoin des propriétés de l'ordre de croissance. Le théorème suivant résume quelques de ces propriétés.

Théorème 1.2.2. *Soient $f(z)$, $g(z)$ deux fonctions méromorphes et $a \in \mathbb{C}$. Supposons que $fg(f-a)(f+g) \not\equiv 0$, alors on a les propriétés suivantes*

1) $\rho(\frac{1}{f}) = \rho(f)$.

2) $\rho(\frac{1}{f-a}) = \rho(f)$.

3) $\rho(\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}) = \rho(f)$, *tels que* $f \not\equiv \frac{-\delta}{\gamma}$ *et* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

4) $\rho(f^n) = \rho(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5) $\rho(f^{(n)}) \leq \rho(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6) $\rho(f(cz)) = \rho(f)$.

7) $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.

8) $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.

Preuve.

1) D'après la formule (1.16), on a

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1),$$

ce qui implique

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r,f)(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)}),$$

ensuite en introduisant la fonction log et en devisant par $\log r$, on obtient

$$\frac{\log T(r,\frac{1}{f})}{\log r} = \frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}. \tag{1.22}$$

Par passage à la limite dans (1.22), on trouve

$$\rho(\frac{1}{f}) = \limsup_{r+\to\infty} \left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r} \right), \tag{1.23}$$

il suffit donc de montrer que $\limsup_{r+\to\infty}\left(\dfrac{\log T(r,f)}{\log r}+\dfrac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)=\rho(f)$.

D'après les propriétés de la limite supérieure, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{r+\to\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)&\leq\limsup_{r+\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\\&=\limsup_{r+\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\rho(f),\end{aligned}\tag{1.24}$$

car

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}=0.$$

D'autre par, on a

$$\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}-\frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}$$

et en utilisant les propriété de la limite supérieure, on trouve

$$\begin{aligned}\rho(f)&=\limsup_{r+\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}\\&=\limsup_{r+\to\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}-\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)\\&\leq\limsup_{r+\to\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)+\limsup_{r\to+\infty}-\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\\&=\limsup_{r+\to\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right),\end{aligned}\tag{1.25}$$

car

$$\lim_{r\to+\infty}-\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}=0.$$

De (1.24) et (1.25), on a

$$\limsup_{r+\to\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\frac{\log(1+\dfrac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)=\rho(f),$$

et alors (1.23) donne $\rho(\frac{1}{f}) = \rho(f)$.

En utilisant les théorème 1.1.7 et 1.1.8 et en suivant les mêmes étapes de la preuve de 1) on obtient les égalités 2), 3), 4) et 5).

6) En appliquant la proposition 1.1.8, on a

$$\frac{\log T(r, f(cz))}{\log r} = \frac{\log T(|c|r, f)}{\log r}.$$

ceci nous donne

$$\begin{aligned}
\rho(f(cz)) &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r, f(cz))}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(|c|r, f)}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(|c|r, f)}{\log |c|r} \frac{\log |c|r}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(|c|r, f)}{\log |c|r} \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log |c| + \log r}{\log r} \\
&= \rho(f),
\end{aligned}$$

car $\lim_{r\to+\infty} \frac{\log |c| + \log r}{\log r} = 1$.

Pour démontrer 7) et 8), Sans perte de généralité, on suppose que $\rho(f) \leq \rho(g) < +\infty$, car l'inégalité demandée est toujours vérifiée si $\rho(g) = +\infty$.

7) En utilisant les propriété de la limite supérieure, on peut facilement vérifier que

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r, f) + \log 2)}{\log r} = \rho(f) \leq \rho(g) \quad \text{et} \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r, g) + \log 2)}{\log r} = \rho(g).$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $r > \delta$, on a

$$\log(2T(r, f) + \log 2) < (\rho(g) + \varepsilon) \log r \quad \text{et} \quad \log(2T(r, g) + \log 2) < (\rho(g) + \varepsilon) \log r.$$

Ce qui implique

$$2T(r, f) + \log 2 < r^{\rho(g)+\varepsilon} \ et \ 2T(r, g) + \log 2 < r^{\rho(g)+\varepsilon}. \tag{1.26}$$

En divisant par deux dans la relation (1.26) et en faisant la somme, on obtient

$$T(r, f) + T(r, g) + \log 2 < r^{\rho(g)+\varepsilon}, \tag{1.27}$$

et d'après la proposition 1.1.8, on a

$$T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \log 2. \tag{1.28}$$

De (1.27) et (1.28), on trouve $T(r, f+g) < r^{\rho(g)+\varepsilon}$, ce qui implique $\rho(f+g) \leq \rho(g)$.

8) On peut vérifier que

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,f))}{\log r} = \rho(f) \leq \rho(g) \quad \text{et} \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,g))}{\log r} = \rho(g),$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que, pour tout $r > \delta$, on a

$$\log(2T(r,f)) < (\rho(g)+\varepsilon)\log r \ et \ \log(2T(r,g)) < (\rho(g)+\varepsilon)\log r,$$

ce qui implique

$$2T(r,f) < r^{\rho(g)+\varepsilon} \ et \ 2T(r,g) < r^{\rho(g)+\varepsilon}. \tag{1.29}$$

En divisant par deux dans la relation (1.29) et en faisant la somme on obtient

$$T(r,f) + T(r,g) < r^{\rho(g)+\varepsilon}, \tag{1.30}$$

et d'après la proposition 1.1.8, on a

$$T(r,fg) \leq T(r,f) + T(r,g). \tag{1.31}$$

De (1.30) et (1.31), on trouve $T(r,fg) < r^{\rho(g)+\varepsilon}$. Ce qui implique $\rho(fg) \leq \rho(g)$. □

Remarque 1.2.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J. M. Whittaker [58] a montré $\rho(f^{(n)}) = \rho(f)$.

Conclusion 2. *Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes telles que $\sum_{i=1}^{n} f_i \prod_{i=1}^{n} f_i \not\equiv 0$, alors on a*

1) $\rho(\sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \max_{1\leq i\leq n} \rho(f_i)$.
2) $\rho(\prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \max_{1\leq i\leq n} \rho(f_i)$.

Proposition 1.2.3. *Soient f et g des fonctions méromorphes telles que $fg(f+g) \not\equiv 0$. Si $\rho(f) < \rho(g)$, alors on a*

1) $\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(g)$.
2) $T(r,f) = o(T(r,g))$ *i.e.*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{T(r,g)} = 0.$$

Preuve.

1) D'après le théorème 1.2.2, on a

$$\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(g), \tag{1.32}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\rho(g) = \rho(f+g-f) &\leq \max\{\rho(f+g), \rho(f)\} \\ &= \rho(f+g), \qquad (1.33)\end{aligned}$$

car si $\max\{\rho(f+g), \rho(f)\} = \rho(f)$, on obtient $\rho(g) \leq \rho(f)$. Ce qui contredit la supposition. De (1.32) et (1.33), on trouve l'égalité.

Montrons maintenant que $\rho(fg) = \rho(g)$. On applique le théorème 1.2.2 pour obtenir

$$\begin{aligned}\rho(g) = \rho(fg\frac{1}{f}) &\leq \max\{\rho(fg), \rho(\frac{1}{f})\} \\ &= \max\{\rho(fg), \rho(f)\} \\ &= \rho(fg), \qquad (1.34)\end{aligned}$$

car si $\max\{\rho(fg), \rho(f)\} = \rho(f)$, on obtient $\rho(g) \leq \rho(f)$. Contradiction avec $\rho(f) < \rho(g)$. D'autre part d'après le théorème 1.2.2, on a toujours $\rho(fg) \leq \rho(g)$, alors (1.34) nous donne l'égalité.

2) Tout d'abord on va montrer que $\limsup_{r\to+\infty} \dfrac{\log T(r,f)}{\log T(r,g)} < 1$.
Comme on a $\rho(f) < \rho(g)$, alors

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log T(r,g)} &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}\frac{\log r}{\log T(r,g)} \\ &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log r}{\log T(r,g)} \\ &= \rho(f)\frac{1}{\rho(g)} < 1, \qquad (1.35)\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{T(r,f)}{T(r,g)} &= e^{\log T(r,f) - \log T(r,g)} \\ &= e^{\log T(r,g)(\frac{\log T(r,f)}{\log T(r,g)} - 1)} \\ &= e^{\log r \frac{\log T(r,g)}{\log r}(\frac{\log T(r,f)}{\log T(r,g)} - 1)}. \qquad (1.36)\end{aligned}$$

De (1.35) et (1.36), on déduit que $\lim_{r\to+\infty} \dfrac{T(r,f)}{T(r,g)} = 0$. □

Maintenant, on va utiliser l'exemple 1.1.1, pour déduire le résultat suivant

Corollaire 1.3. *Soit $p(z)$ un polynôme de degré n, alors on a*

$\rho(e^{p(z)}) = \deg p = n.$

Preuve.

Supposons que $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$. D'après l'exemple 1.1.1 pour tout $j = 1, ..., n$, on a $T(r, e^{a_j z^j}) = \frac{|a_j|}{\pi} r^j$, donc

$$\begin{aligned}\rho(e^{a_j z^j}) &= \lim_{r\to+\infty} \frac{\log(\frac{|a_j|}{\pi} r^j)}{\log r} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \frac{\log(\frac{|a_j|}{\pi}) + j \log r}{\log r} = j,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\rho(\exp\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\}) &= \rho(\prod_{j=0}^{n-1} e^{a_j z^j}) \\ &\leq \max_{0\leq j\leq n-1} \rho(e^{a_j z^j}) \\ &= \max_{0\leq j\leq n-1} j = n-1 \\ &< n = \rho(e^{a_n z^n}),\end{aligned} \tag{1.37}$$

d'après la proposition 1.2.3, on a

$$\rho(e^{a_n z^n} \exp\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\}) = \rho(e^{p(z)}) = \rho(e^{a_n z^n}) = n.$$

□

Corollaire 1.4. *Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes telles que $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \prod\limits_{i=1}^{n} f_i \not\equiv 0$. Supposons qu'il existe $l \in \{1, ..., n\}$ vérifie $\max\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq l}} \rho(f_i) < \rho(f_l)$, alors on a*

$\rho(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i) = \rho(\prod\limits_{i=1}^{n} f_i) = \rho(f_l).$

Proposition 1.2.4. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $0 < \alpha < \rho(f)$, alors on a*

$r^\alpha = o(T(r, f))$ *i.e.*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r^\alpha}{T(r, f)} = 0.$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}\frac{r^{\alpha}}{T(r,f)} &= e^{\alpha\log r - \log T(r,f)}\\ &= e^{\log T(r,f)(\frac{\alpha\log r}{\log T(r,f)}-1)}\\ &= e^{\log r\frac{\log T(r,f)}{\log r}(\frac{\alpha\log r}{\log T(r,f)}-1)}.\end{aligned} \tag{1.38}$$

D'autre part, comme $\alpha < \rho(f)$, alors

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to+\infty}(\frac{\alpha\log r}{\log T(r,f)}-1) &\leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\alpha\log r}{\log T(r,f)}-1\\ &= \alpha\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log r}{\log T(r,f)}-1\\ &= \frac{\alpha}{\rho(f)}-1<0,\end{aligned} \tag{1.39}$$

en utilisant (1.39) et en passant à la limite dans (1.38), on trouve $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{r^{\alpha}}{T(r,f)}=0.$ □

Corollaire 1.5. *Si $\rho(f)=+\infty$ dans la proposition 1.2.4, alors*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{r^{\alpha}}{T(r,f)}=0,\ \forall\alpha>0.$$

Corollaire 1.6. *Si $\rho(f)\neq 0$, on a*

$\lim\limits_{r\to+\infty}\log T(r,f)=+\infty.$

En effet : il suffit de remarquer que $\log T(r,f)=\log r\dfrac{\log T(r,f)}{\log r}$.

1.2.1 Exposant de convergence

Définition 1.2.2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. On appelle* ***Exposant de convergence*** *de la suite des zéros de f qu'on note $\lambda(f)$, la limite supérieure définie par*

$$\lambda(f)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log N(r,\frac{1}{f})}{\log r}.$$

Remarque 1.2.2. On a $\lambda(f)\leq\rho(f)$. En effet :
On sait que $m(r,\frac{1}{f})\geq 0$, alors $T(r,\frac{1}{f})=m(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f})\geq N(r,\frac{1}{f})$, d'où $\rho(\frac{1}{f})\geq\lambda(f)$ et d'après le théorème 1.2.2, on a $\rho(\frac{1}{f})=\rho(f)$.

Dans la proposition suivante, on donne une autre définition de $\lambda(f)$.

Proposition 1.2.5. *Soit $f(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe. Alors on a*

$$\lambda(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r, \frac{1}{f})}{\log r}.$$

Preuve.

D'une part, pour tout $r \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
N(3r, \frac{1}{f}) &= \int_0^{3r} \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log 3r \\
&\geq \int_r^{3r} \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log 3r \\
&\geq \int_r^{3r} \frac{n(r, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log 3r \\
&= (n(r, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})) \int_r^{3r} \frac{1}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log 3r \\
&= (n(r, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})) \log 3 + n(0, \frac{1}{f}) \log 3r \\
&= n(r, \frac{1}{f}) \log 3 + n(0, \frac{1}{f}) \log r \\
&\geq n(r, \frac{1}{f}),
\end{aligned} \tag{1.40}$$

On passe à la limite dans (1.40), on obtient

$$\begin{aligned}
\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r, \frac{1}{f})}{\log r} &\leq \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log N(3r, \frac{1}{f})}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log N(3r, \frac{1}{f})}{\log 3r} \frac{\log 3r}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log N(3r, \frac{1}{f})}{\log 3r} \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log 3r}{\log r} \\
&= \lambda(f).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

D'autre part, pour $r \geq 1$ et d'après le lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned} N(r, \frac{1}{f}) &= \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log r \\ &= \int_{|a_1|}^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log r \\ &\leq (n(r, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})) \int_{|a_1|}^r \frac{1}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log r \\ &= (n(r, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})) \log \frac{r}{|a_1|} + n(0, \frac{1}{f}) \log r \\ &\leq n(r, \frac{1}{f}) \log \frac{r}{|a_1|} + n(r, \frac{1}{f}) \log r \\ &= n(r, \frac{1}{f}) \log \frac{r^2}{|a_1|}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Par passage à la limite dans (1.42), on trouve

$$\begin{aligned} \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r} &\leq \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r, \frac{1}{f})}{\log r} + \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log(2 \log r - \log |a_1|)}{\log r} \\ &= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r, \frac{1}{f})}{\log r}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

De (1.41) et (1.41), on a l'égalité. □

Voici maintenant quelques propriétés de $\lambda(f)$, il sont résumées dans le théorème suivant

Théorème 1.2.6. *Soit $f(z)$, $g(z)$ des fonctions méromorphes et $a \in \mathbb{C}$. Supposons $fg(f - a)(f + g) \not\equiv 0$, alors on a les propriétés suivantes*

1) $\lambda(f - a) = \lambda(f)$.

2) $\lambda(f^n) = \lambda(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3) $\lambda(f(cz)) = \lambda(f)$.

4) $\lambda(f + g) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(g)\}$.

5) $\lambda(fg) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(g)\}$.

6) $\lambda(f^{(n)}) \leq \lambda(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On suit les mêmes étapes de la preuve du théorème 1.2.2 pour démontrer ce théorème.

Remarque 1.2.3. Tous les résultats qui suivent le théorème 1.2.2 (sauf le corollaire 1.3) restent vrais si on remplace $\rho(f)$ par $\lambda(f)$.

CHAPITRE 2

ORDRE DE CROISSANCE DES SOLUTIONS MÉROMORPHES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE N

Dans la première partie de ce chapitre, on étudie l'ordre $\rho(f)$ et le second ordre $\rho_2(f)$ d'une solution méromorphe non nulle f de l'équation différentielle

$$\sum_{j=1, j\neq m}^{n} A_j(z) f^{(j)}(z) + A_m(z) e^{p_m(z)} f^{(m)}(z) + \left(A_0(z) e^{p(z)} + B_0(z) e^{q(z)}\right) f(z) = 0,$$

où k, m, n sont des entiers naturels tels que $k \geq 1$, $n \geq 2$ et $1 \leq m \leq n$, $B_0(z)$, $A_0(z), \cdots, A_n(z)$ sont des fonctions méromorphes telles que $A_0 A_m A_n B_0 \not\equiv 0$
et $\max\{\rho(B_0), \rho(A_0), \cdots, \rho(A_n)\} < k$, $p(z)$, $q(z)$, $p_m(z)$ sont des polynômes de degré k. Sous certaines conditions, on montre que $\rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) = k$, où

$$\rho_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Dans la deuxième partie, on prend une solution méromorphe non nulle f de l'équation ci-dessus et on montre que la fonction de comptage des zéros et la fonction de comptage des pôles des fonctions $f - \psi$, $f' - \psi$ et $f'' - \psi$ tendent vers $+\infty$ où ψ est une fonction méromorphe non nulle d'ordre fini. Ensuite, en prenant $\psi = z$, on conclut que f, f' et f'' ont une infinité de points fixes.

Il s'agit donc d'une extension de certains résultats récents de F. Peng, Z. X. Chen [51] et J. Xu, X. Zhang [60], relatifs aux équations différentielles linéaires du second ordre.

2.1 Quelques résultats préliminaires

La mesure linéaire (resp. logarithmique) d'un ensemble $E \subset]0, \infty[$ (resp. $F \subset]1, \infty[$) est définie par $\int_E dt$ (resp. $\int_F \frac{dt}{t}$).

Lemme 2.1. [26] *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini ρ et $k, j \in \mathbb{N}$ tels que $k > j \geq 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset]1, \infty[$, de mesure logarithmique finie tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \notin [0, 1] \cup E_1$, on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\epsilon)}.$$

Lemme 2.2. [19] *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini ρ, Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset]1, \infty[$, de mesure logarithmique finie tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \notin [0, 1] \cup E_2$, on a*

$$|f(z)| \leq \exp\{|z|^{\rho+\epsilon}\}.$$

Lemme 2.3. [26] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et $\lambda > 1$, et soient k et j des entiers naturels satisfont $k > j \geq 0$. Il existe alors un ensemble $E_3 \subset]1, \infty[$ de mesure logarithmique finie et une constante $C > 0$, tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq C \left[\frac{T(\lambda r, f)}{r} (\log r)^{\lambda} \log T(\lambda r, f) \right]^{(k-j)}.$$

Lemme 2.4. *Soient $\varphi, \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ et k un entier naturel ≥ 1. Soit $E \subset \left[-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k} \right[$ un ensemble de mesure linéaire zéro. Si $\varphi \neq \psi$, Alors il existe une infinité de $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k} \right[\setminus E$, tel que, $\cos(\varphi + k\theta) \cos(\psi + k\theta) < 0$.*

Preuve.

Sans perte de généralité, on suppose que $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \psi < \frac{3\pi}{2}$.

On distingue les cas suivant

Cas 1. Supposons que $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Alors on a

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \psi < \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi \leq \frac{3\pi}{2} - \psi. \tag{2.1}$$

Puisque E est de mesure linéaire zéro, il est clair que $\left] \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right), \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right[\setminus E$ est un ensemble infini de $\left] -\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k} \right[\setminus E$.

En utilisant l'inégalité (2.1) et pour tout $\theta \in \left]\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right), \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right[\setminus E$, on a

$$0 \leq \frac{\pi}{2}-\psi < k\theta < \frac{\pi}{2}-\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}-\psi < k\theta < \frac{\pi}{2}-\varphi \leq \frac{3\pi}{2}-\psi.$$

Donc,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \varphi + k\theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} < \psi + k\theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Par conséquent, dans ce cas, on a

$$\cos(\varphi + k\theta) > 0 \quad \text{et} \quad \cos(\psi + k\theta) < 0.$$

Cas 2. Supposons que $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \psi < \frac{3\pi}{2}$, et soient $\varphi' = \varphi - \pi$ et $\psi' = \psi - \pi$. Alors on a

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi' < \psi' < \frac{\pi}{2}.$$

D'après le premier cas, pour tout $\theta \in \left]\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\psi'\right), \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi'\right)\right[\setminus E \subset \left]-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}\right[\setminus E$, on a

$$\cos(\varphi' + k\theta)\cos(\psi' + k\theta) < 0.$$

Comme

$$\cos(\varphi' + k\theta) = -\cos(\varphi + k\theta) \quad \text{et} \quad \cos(\psi' + k\theta) = -\cos(\psi + k\theta),$$

alors on déduit que

$$\cos(\varphi + k\theta)\cos(\psi + k\theta) < 0.$$

Cas 3. Supposons que $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}$. Alors,

$$0 < \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 < \frac{3\pi}{2} - \psi < \pi.$$

Posons $\alpha = \min\{\frac{\pi}{2}-\varphi, \frac{3\pi}{2}-\psi\}$. Donc $\left]0, \frac{\alpha}{k}\right[\setminus E$ est un sous ensemble infini de $\left]-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}\right[\setminus E$. De plus pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\alpha}{k}\right[\setminus E$, on a

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \varphi + k\theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} < \psi < \psi + k\theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Il résulte, dans ce cas que

$$\cos(\varphi + k\theta) > 0 \quad \text{et} \quad \cos(\psi + k\theta) < 0.$$

$\square$

Lemme 2.5. [18] *Soient $k \geq 2$ et $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ des fonctions méromorphes. On pose $\rho = \max\{\rho(A_j), j = 0, 1, ..., k-1\}$. soit $f(z)$ une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0,$$

si tous les pôles de $f(z)$ sont de multiplicité uniformément bornée, alors $\rho_2(f) \leq \rho$.

Lemme 2.6. [20] *Soit k un entier naturel ≥ 1 et soient $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$, $F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si $g(z)$ est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_0 g = F,$$

alors, $g(z)$ satisfait l'égalité $\lambda(g) = \lambda(\frac{1}{g}) = \infty.$

Lemme 2.7. [64] *Supposons que $f_1(z), f_2(z), ..., f_{n+1}(z)$ $(n \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes et $g_1(z), g_2(z), ..., g_n(z)$ sont des fonctions entières satisfaisant les conditions suivantes*

(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)} \equiv f_{n+1}(z).$

(ii) pour $1 \leq j \leq n+1$, $1 \leq k \leq n$, l'ordre de f_j est inférieur à l'ordre de $e^{g_k(z)}$.

(iii) L'ordre de $f_j(z)$ est inférieur à l'ordre de $e^{g_h} - g_k$ pour $n \geq 2$ et

$1 \leq j \leq n+1$, $1 \leq h < k \leq n$

Alors $f_j(z) \equiv 0$ $(j = 1, 2, ..., n+1)$.

Lemme 2.8. [45] *Soient $F(r)$ et $G(r)$ des fonctions à valeurs réelles. Supposons qu'elles sont croissantes sur $[0, \infty[$, telles que $F(r) \leq G(r)$, pour tout r en dehors d'un ensemble $E \subset]1, \infty[$ de mesure linéaire finie ou en dehors de $H \cup [0, 1]$, où $H \subset]1, \infty[$ est de mesure logarithmique finie. Alors, pour constant $\alpha > 1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $F(r) \leq G(\alpha r)$, pour tout $r > r_0$.*

2.2 Étude de l'ordre et du second ordre de la solution méromorphe de certaines équations différentielles

Les auteurs F. Peng et Z. X. Chen [51] ont considéré certaines équations différentielles de second ordre avec des coefficients entiers d'ordres inférieurs strictement à un. Ils ont obtenu les résultats suivants :

Théorème A. *Soient* $A_1(z), A_2(z)$ *des fonctions entières non nulles, telles que* $\max\{\rho(A_1), \rho(A_2)\} < 1$ *et soient* a_1, a_2 *deux nombres complexes distincts non nuls tels que* $|a_1| \leq |a_2|$. *On suppose que* $\arg a_1 \neq \pi$ *ou bien* $a_1 < -1$. *Alors, pour toute solution méromorphe non nulle* $f(z)$ *de l'équation*

$$f'' + e^{-z} f' + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) f = 0$$

On a $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = 1$.

Xu et Zhang [60] ont plus tard généralisé ce résultat au cas où les coefficients sont méromorphes

Théorème B. *Soient* $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$ *des fonctions méromorphes non nulles telles que* $\max\{\rho(A_0), \rho(A_1), \rho(A_2)\} < 1$, *et* a_1, a_2 *deux nombres complexes distincts non nuls tels que* $|a_1| \leq |a_2|$ *et* $a_0 < 0$. *Si* $\arg a_1 \neq \pi$ *ou bien* $a_1 < a_0$, *Alors, toute solution méromorphe non nulle* $f(z)$, *dont les pôles sont de multiplicités uniformément borné, de l'équation*

$$f'' + A_0 e^{a_0 z} f' + (A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}) f = 0$$

satisfait l'égalité $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = 1$.

Dans notre travail, on généralise les résultats précédents à une équation différentielle de degré quelconque n avec des coefficients méromorphes d'ordre fini.
Notre premier résultat est le théorème suivant

Théorème 2.2.1. *Soient* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *tels que* $k \geq 1$, $n \geq 2$ *et* $1 \leq m \leq n$. *Supposons que* $B_0(z), A_0(z), \cdots, A_n(z)$ *sont des fonctions méromorphes telles que* $A_0 A_m A_n B_0 \not\equiv 0$ *et* $\sigma = \max\{\rho(B_0), \rho(A_0), \cdots, \rho(A_n)\} < k$. *Soient* $p(z) = \alpha z^k + \cdots$, $q(z) = \beta z^k + \cdots$ *et* $p_m(z) = \alpha_m z^k + \cdots$ *des polynômes de degré* k. *Supposons que* $\alpha \neq \beta$ *et au moins l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite*

i) *au moins, deux nombres parmi* α, β, α_m *ont des arguments distincts,*

ii) $|\alpha_m| < \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, *dans le cas où* $\arg \alpha = \arg \alpha_m = \arg \beta$.

Alors, pour toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ *de l'équation*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + A_m(z)e^{p_m(z)}f^{(m)}(z) + \Big(A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)}\Big)f(z) = 0, \qquad (2.2)$$

on a $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) \geq k$.

Nous verrons que ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition suivante dans laquelle les polynômes $p(z)$, $q(z)$ et $p_m(z)$ ne sont que des monômes.

Proposition 2.2.2. *Soient* k, m, n *des entiers naturels tels que* $k \geq 1$, $n \geq 2$ *et* $1 \leq m \leq n$. *On suppose que* $B_0(z), A_0(z), \cdots, A_n(z)$ *sont des fonctions méromorphes telles que* $A_0A_mA_nB_0 \not\equiv 0$ *et* $\sigma = \max\{\rho(B_0), \rho(A_0), \cdots, \rho(A_n)\} < k$. *Soient* α, β, α_m *des nombres complexes tels que* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $\alpha \neq \beta$. *On suppose que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite*

i) au moins, deux des nombres α, β, α_m *ont des arguments distincts,*

ii) $|\alpha_m| < \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, *dans le cas où* $\arg\alpha = \arg\alpha_m = \arg\beta$.

Alors, pour toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ *de l'équation*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + A_m(z)e^{\alpha_m z^k}f^{(m)}(z) + \Big(A_0(z)e^{\alpha z^k} + B_0(z)e^{\beta z^k}\Big)f(z) = 0 \qquad (2.3)$$

on a $\rho(f) = +\infty$ *and* $\rho_2(f) \geq k$.

Preuve.

Montrons d'abord que toute solution méromorphe non nulle de l'équation (2.3) est d'ordre infini. En effet, supposons que (2.3) admet une solution méromorphe non nulle $f(z)$ d'ordre fini. Posons $z = re^{i\theta}$, $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, $\alpha_m = |\alpha_m|e^{i\theta_m}$ et $\beta = |\beta|e^{i\psi}$ et soit $0 < \epsilon < k - \sigma$. Soit $j \in \{0, ..., n\}$, en utilisant le théorème 1.2.2 et les hypothèses de la proposition, on a

$$\begin{aligned}\rho(\frac{A_j}{A_0}) &\leq \max\{\rho(A_0), \rho(A_j)\}\\ &\leq \max\{\rho(B_0), \rho(A_j),\ 0 \leq j \leq n\} = \sigma, \qquad (2.4)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho(\frac{A_j}{B_0}) &\leq \max\{\rho(B_0), \rho(A_j)\}\\ &\leq \max\{\rho(B_0), \rho(A_j),\ 0 \leq j \leq n\} = \sigma. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

De (2.4) et (2.5), on obtient

$$\max\left\{\rho(\frac{A_j}{A_0}), \rho(\frac{A_j}{B_0}),\ 0 \leq j \leq n\right\} \leq \sigma. \tag{2.6}$$

En utilisant (2.6) et d'après le lemme 2.2, il existe un ensemble $E_j \subset]1, \infty[$ de mesure logarithmique finie telle que, pour tout z tel que $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_j$, on obtient

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(\frac{A_j}{A_0}) + \epsilon}\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}, \tag{2.7}$$

et

$$\left|\frac{A_j(z)}{B_0(z)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(\frac{A_j}{B_0}) + \epsilon}\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}. \tag{2.8}$$

Posons maintenant $G = \cup_{j=0}^{n} E_j$ et prenant $|z| = r \notin [0, 1] \cup G$, alors $r \notin [0, 1] \cup E_j$ pour tout $j = 0, ..., n$. Donc de (2.7) et (2.8), on obtient

$$\max\left\{\left|\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\right|, \left|\frac{A_j(z)}{B_0(z)}\right|,\ 0 \leq j \leq n\right\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}. \tag{2.9}$$

D'autre part, d'après le lemme 2.1, pour tout $j = 0, ..., n$, il existe un ensemble $F_j \subset]1, \infty[$, de mesure logarithmique finie tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup F_j$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq r^{j(\rho(f)-1+\epsilon)} \leq r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}. \tag{2.10}$$

Soit $H = \cup_{j=0}^{n} F_j$ et soit $|z| = r \notin [0, 1] \cup H$. Comme $r \notin [0, 1] \cup F_j$ pour tout $j = 0, ..., n$ et à partir de (2.10), on a

$$\max_{0\leq j\leq n}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}. \tag{2.11}$$

Ensuite, si on pose $E = G \cup H$, on a pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ les relations (2.9) et (2.11) sont vérifiées et on distingue les cas suivants

1) $\varphi \neq \psi$. En vertu du lemme 2.4, il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}[$ tel que, $\cos(\varphi+k\theta)\cos(\psi+k\theta) < 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\cos(\varphi + k\theta) > 0$ et $\cos(\psi + k\theta) < 0$. Ensuite, de l'équation (2.3), on a

$$-e^{\alpha z^k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{A_0(z)f(z)} + e^{\alpha_m z^k}\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{A_0(z)f(z)} + e^{\beta z^k}\frac{B_0(z)}{A_0(z)} \tag{2.12}$$

$$-e^{\beta z^k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{B_0(z)f(z)} + e^{\alpha_m z^k}\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{B_0(z)f(z)} + e^{\alpha z^k}\frac{A_0(z)}{B_0(z)}. \tag{2.13}$$

1.1) Supposons que $\cos(\theta_m + k\theta) \leq 0$. En choisissant $z = re^{i\theta}$ tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, on a

$$\max\left\{|e^{\alpha_m z^k}|, |e^{\beta z^k}|\right\} = \max\left\{\exp\{|\alpha_m|\cos(\theta_m + k\theta)r^k\}, \exp\{|\beta|\cos(\psi + k\theta)r^k\}\right\} \leq 1.$$

En utilisant les relations (2.9), (2.11) et l'équation (2.12), nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\} &= |e^{\alpha z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{A_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right| \left|\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{A_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\beta z^k}\right| \left|\frac{B_0(z)}{A_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}$$

Ce qui est une contradiction avec $\sigma + \epsilon < k$.

1.2) Supposons que $\cos(\theta_m + k\theta) > 0$. Soit $\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{k}$, alors on a

$$\cos(\varphi + k\theta') < 0, \quad \cos(\theta_m + k\theta') < 0 \quad \text{et} \quad \cos(\psi + k\theta') > 0.$$

Donc pour $z = re^{i\theta'}$ tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, on a $\max\left\{|e^{\alpha_m z^k}|, |e^{\alpha z^k}|\right\} \leq 1$, et en utilisant les relations (2.9), (2.11) et l'équation (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi + k\theta')r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right| \left|\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\alpha z^k}\right| \left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)},
\end{aligned}$$

d'où,

$$\exp\{|\beta|\cos(\psi + k\theta')r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}$$

Ce qui contredit $\sigma + \epsilon < k$.

2) $\varphi = \psi$. Comme $\alpha \neq \beta$, alors $|\alpha| \neq |\beta|$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|\alpha| < |\beta|$. Donc, nous avons les cas suivants

2.1) $\theta_m \neq \varphi = \psi$. Grâce au lemme 2.4, il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}[$ tel que, $\cos(\varphi + k\theta)\cos(\theta_m + k\theta) < 0$. On peut supposer que $\cos(\varphi + k\theta) > 0$. Pour $z = re^{i\theta}$ tel que $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, on a $|e^{\alpha_m z^k}| = \exp\{|\alpha_m| \cos(\theta_m + k\theta)r^k\} \leq 1$. D'autre part de (2.9), (2.11) et l'équation (2.13),

on a

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi + k\theta)r^k\} = {} & |e^{\beta z^k}| \\
& \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right| \left|\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
& + \left|e^{\alpha z^k}\right| \left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
& \leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} \\
& + \exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
& \leq (n+1)\exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}.
\end{aligned}$$

d'où,

$$\exp\{|\beta|\cos(\varphi + k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} \exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\},$$

par conséquent, on a

$$\exp\{(|\beta| - |\alpha|)\cos(\varphi + k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}.$$

Ce qui est une contradiction avec $\sigma + \epsilon < k$.

2.2) $\theta_m = \varphi = \psi$. On choisit $\theta \in [-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}[$ tel que $\cos(\varphi + k\theta) > 0$. Pour tout $z = re^{i\theta}$ tel que $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, on a

- Si $|\alpha_m| \leq |\alpha|$, d'après (2.9), (2.11) et l'équation (2.13), on a

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta)r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\left|\frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right|\left|\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\alpha z^k}\right|\left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} \\
&+ \exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} \\
&+ \exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)},
\end{aligned}$$

alors,

$$\exp\{(|\beta|-|\alpha|)\cos(\varphi+k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)},$$

contradiction avec $\sigma+\epsilon<k$.

- Si $|\alpha|<|\alpha_m|<|\beta|$, d'après (2.9), (2.11) et l'équation (2.13), nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta)r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\left|\frac{A_j(z)f^{(j)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right|\left|\frac{A_m(z)f^{(m)}(z)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\alpha z^k}\right|\left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} \\
&+ \exp\{|\alpha_m|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)} \\
&+ \exp\{|\alpha_m|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\{|\alpha_m|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}.
\end{aligned}$$

D'où, on a

$$\exp\{(|\beta|-|\alpha_m|)\cos(\varphi+k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} r^{n(\rho(f)-1+\epsilon)}.$$

Ce qui est une contradiction avec $\sigma+\epsilon<k$.

On va montrer maintenant que toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation (2.3) satisfait $\rho_2(f) \geq k$.

D'après le lemme 2.3, il existe un ensemble $E_3 \subset]1, \infty[$ de mesure linéaire finie et une constante $C > 0$, tels que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq C \left[\frac{T(2r, f)}{r} (\log r)^2 \log T(2r, f)\right]^j \leq C \left[T(2r, f)\right]^{j+1}, \quad j = 1, ..., n \tag{2.14}$$

En utilisant (2.14) et à partir de la preuve de la première étape, nous avons

$$\exp\{h_1 r^k\} \leq C(n + 1) \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\} \left[T(2r, f)\right]^{n+1} \tag{2.15}$$

où $h_1 > 0$ est une constante. Comme $h_1 > 0$ et $\sigma + \epsilon < k$, grâce à la relation (2.15) et le Lemme 2.8, il existe $r_0 > 0$ tel que, pour $r > r_0$, on a $\rho_2(f) \geq k$. □

Preuve du théorème 2.2.1

Posons $\mathcal{A}_0(z) = A_0(z)e^{p(z) - \alpha z^k}$, $\mathcal{B}_0(z) = B_0(z)e^{q(z) - \beta z^k}$,

$\mathcal{A}_m(z) = A_m(z)e^{p_m(z) - \alpha_m z^k}$, et $\mathcal{A}_j(z) = A_j(z)$ pour $j = 1, ..., n; j \neq m$.

Avec ces notations, l'équation (2.2) devient

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \mathcal{A}_j(z) f^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)e^{\alpha_m z^k} f^{(m)}(z) + \left(\mathcal{A}_0(z)e^{\alpha z^k} + \mathcal{B}_0(z)e^{\beta z^k}\right) f(z) = 0, \tag{2.16}$$

qui est de la même forme que l'équation(2.3). De plus, il est facile de vérifier que les fonctions $\mathcal{B}_0, \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$ ont les mêmes propriétés que celles des fonctions $B_0, A_0, ..., A_n$ dans la proposition (2.2.2). Il suffit donc d'appliquer la proposition (2.2.2) pour conclure.

Remarque 2.2.1. 1) Nos conditions sur les nombres α, β, α_m dans le théorème 2.2.1 sont plus faibles que les conditions des théorèmes A et B.

2) Les conditions du théorème 2.2.1 sont suffisantes et non nécessaires, pour obtenir ces résultats. En effet, considérons l'équation $f'''(z) + f''(z) - e^{2z} f'(z) - (2e^z + 4e^{2z})f(z) = 0$. Il est facile de vérifier que la fonction $f(z) = e^{e^z}$ est une solution de cette équation, de plus on a $\rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) = k = 1$. Néanmoins, les conditions (i) et (ii) du théorème ne sont pas vérifiées.

Corollaire 2.1. *Sous les hypothèse du théorème* 2.2.1*, on a ; si* $f(z)$ *est une solution méromorphe non nulle de l'équation* (2.2) *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, alors* $\rho_2(f) = k$*.*

Preuve.

Soit f une solution méromorphe non nulle de l'équation (2.2) satisfaisant les conditions du corollaire. Alors on a

$$f^{(n)}(z) + \sum_{j=0}^{n-1} C_j(z) f^{(j)}(z) = 0,$$

où $C_j(z) = \dfrac{A_j(z)}{A_n(z)}$ pour tout $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{0, m\}$, $C_0(z) = \dfrac{A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)}}{A_n(z)}$ et $C_m(z) = \dfrac{A_m(z)e^{p_m(z)}}{A_n(z)}$.

Il est clair que $\max\{\rho(C_j), 0 \leq j \leq n\} \leq k$. A partir du lemme 2.5, on a $\rho_2(f) \leq k$. D'autre part, d'après le théorème 2.2.1, on a $\rho_2(f) \geq k$. D'où, $\rho_2(f) = k$. $\square$

2.3 Quelques résultats sur la fonction de comptage

Notre deuxième résultat est le suivant

Théorème 2.3.1. *Supposons que les conditions du théorème* 2.2.1 *sont satisfaites. Alors, pour toute fonction méromorphe non nulle* $f(z)$ *de* (2.2)*, on a*

1) $\lambda(f - \psi) = \lambda(\dfrac{1}{f - \psi}) = \infty$*, pour toute fonction méromorphe non nulle* ψ *d' ordre fini.*

2) $\lambda(f' - \psi) = \lambda(\dfrac{1}{f' - \psi}) = \infty$*, pour toute fonction méromorphe non nulle* ψ *d' ordre* $< k$*.*

3) $\lambda(f'' - \psi) = \lambda(\dfrac{1}{f'' - \psi}) = \infty$*, pour toute fonction méromorphe non nulle* ψ *d' ordre* $< k$*.*

Preuve.

Soit $f(z)$ une solution méromorphe non nulle de l'équation (2.2). En faisant les mêmes modifications que celles dans la preuve du théorème (2.2.1), on peut se ramener à une équation de la même forme que (2.16). De plus, ces deux équation ont les mêmes propriétés. Donc, sans perte de généralité, on suppose que les polynômes $p(z)$, $q(z)$ et $p_m(z)$ sont des monômes. autrement dit, il suffit de supposer que l'équation (2.2) dans le théorème 2.2.1 est de la forme

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + A_m(z)e^{\alpha_m z^k} f^{(m)}(z) + \left(A_0(z)e^{\alpha z^k} + B_0(z)e^{\beta z^k}\right) f(z) = 0, \tag{2.17}$$

et d'après le théorème 2.2.1, on a $\rho(f) = \infty$.

Posons $g_0(z) = f(z) - \psi(z)$, alors $\rho(g_0) = \rho(f) = \infty$, et remplaçons $f(z) = g_0(z) + \psi(z)$ dans (2.17). On obtient

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} A_j(z)g_0^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)g_0^{(m)}(z) + \mathcal{A}_0(z)g_0(z) = F_0(z), \tag{2.18}$$

avec $\mathcal{A}_m(z) = A_m(z)e^{\alpha_m z^k}$, $\mathcal{A}_0(z) = A_0(z)e^{\alpha z^k} + B_0(z)e^{\beta z^k}$ et $-F_0(z) = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} A_j(z)\psi^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)\psi^{(m)}(z) + \mathcal{A}_0(z)\psi(z)$.

Il est clair que $F_0 \not\equiv 0$. En effet, si $F_0 \equiv 0$, d'après le théorème 2.2.1, on a $\rho(\psi) = \infty$. Ce qui est une contradiction avec $\rho(\psi) < \infty$. D'où $F_0 \not\equiv 0$. De plus, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_m$ et F_0 sont d'ordre fini. D'où d'après le lemme 2.6 et l'équation (2.18), on obtient $\lambda(g_0) = \lambda(f-\psi) = \lambda(\frac{1}{f-\psi}) = \infty$.

Montrons maintenant que $\lambda(f' - \psi) = \infty$.

On pose $g_1(z) = f'(z) - \psi(z)$, alors $\rho(g_1) = \rho(f') = \infty$. En dérivant les deux membres de l'équation (2.17), on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} \left(A_j(z)f^{(j+1)}(z) + A_j'(z)f^{(j)}(z)\right) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)\\ &+ \mathcal{A}_0(z)f'(z) + \mathcal{A}_0'(z)f(z) = 0.\end{aligned} \tag{2.19}$$

D'autre par, de l'équation (2.17) on a

$$f(z) = -\frac{1}{\mathcal{A}_0(z)}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z)\right). \tag{2.20}$$

En remplaçant (2.20) dans (2.19), on trouve

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} \left(A_j(z)f^{(j+1)}(z) + A_j'(z)f^{(j)}(z)\right) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)\\ &+ \mathcal{A}_0(z)f'(z) - \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z)\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Comme $f' = g_1 + \psi$, (2.21) devient

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left(A_j(z)g_1^{(j)}(z) + A_j'(z)g_1^{(j-1)}(z)\right) + \mathcal{A}_m(z)g_1^{(m)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)g_1^{(m-1)}(z)$$

$$+ \mathcal{A}_0(z)g_1(z) - \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)g_1^{(j-1)}(z) + \mathcal{A}_m(z)g_1^{(m-1)}(z) \right) = F_1(z), \tag{2.22}$$

où,

$$- F_1(z) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left(A_j(z)\psi^{(j)}(z) + A_j'(z)\psi^{(j-1)}(z)\right) + \mathcal{A}_m(z)\psi^{(m)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)\psi^{(m-1)}(z)$$

$$+ \mathcal{A}_0(z)\psi(z) - \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)\psi^{(j-1)}(z) + \mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-1)}(z) \right).$$

Pour appliquer le lemme 2.6 à l'équation (2.22), il faut d'abord montrer que $F_1 \not\equiv 0$. Supposons que $F_1 \equiv 0$, on a alors

$$\begin{aligned} G(z) + \mathcal{A}_m(z)\psi^{(m)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)\psi^{(m-1)}(z) \\ + \mathcal{A}_0(z)\psi(z) - \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \left(H(z) + \mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-1)}(z)\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

où, $G(z) = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left(A_j(z)\psi^{(j)}(z) + A_j'(z)\psi^{(j-1)}(z)\right)$ et $H(z) = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)\psi^{(j-1)}(z)$.
De plus on a $\max\{\rho(G), \rho(H)\} < k$ et de (2.23), on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\psi(z)} \left(G(z)A_0(z) - H(z)(A_0'(z) + k\alpha z^{k-1}A_0(z))\right) e^{\alpha z^k} \\ &+ \frac{1}{\psi(z)} \left(G(z)B_0(z) - H(z)(B_0'(z) + k\beta z^{k-1}B_0(z))\right) e^{\beta z^k} + H_1(z)e^{(\alpha+\alpha_m)z^k} \\ &+ H_2(z)e^{(\alpha_m+\beta)z^k} + 2A_0(z)B_0(z)e^{(\alpha+\beta)z^k} + A_0^2(z)e^{2\alpha z^k} + B_0^2(z)e^{2\beta z^k} = 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

où $H_1(z) = \dfrac{\psi^{(m)}(z)}{\psi(z)}(A_0(z)A_m(z)) + \dfrac{\psi^{(m-1)}(z)}{\psi(z)}\Big[A_0(z)(A_m'(z) + k\alpha_m z^{k-1}A_m(z)) - (A_0'(z) + k\alpha z^{k-1}A_0(z))A_m(z)\Big]$
et $H_2(z) = \dfrac{\psi^{(m)}(z)}{\psi(z)}(A_m(z)B_0(z)) + \dfrac{\psi^{(m-1)}(z)}{\psi(z)}\Big[(A_m'(z) + k\alpha_m z^{k-1}A_m(z))B_0(z) - A_m(z)(B_0'(z) + k\beta z^{k-1}B_0(z))\Big]$. Ainsi, nous remarquons que tous les coefficients de l'équation (2.24) ont un ordre $< k$.

Comme $\alpha \neq \beta$, alors on a $2\alpha \notin \{2\beta, \alpha+\beta, \alpha\}$ et on discute les cas suivants

1) Si $2\alpha \notin \{\alpha_m + \beta, \alpha + \alpha_m, \beta\}$. D'après le lemme 2.7, on a $A_0^2 \equiv 0$. Contradiction.

2) Si $2\alpha = \alpha_m + \beta$. En utilisant les conditions du théorème 2.2.1, on peut facilement montrer que $2\beta \notin \{2\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\alpha_m, \beta, \alpha\}$. Le lemme 2.7 implique $B_0^2 \equiv 0$. Ceci est une contradiction.

3) Si $2\alpha = \alpha + \alpha_m$. Sous les conditions du théorème 2.2.1, on peut facilement montrer que $2\beta \notin \{2\alpha, \alpha+\beta, \alpha_m+\beta, \beta, \alpha\}$. Le lemme 2.7 implique $B_0^2 \equiv 0$, et ceci est une contradiction.

4) Si $2\alpha = \beta$. Alors, les conditions du théorème 2.2.1 donnent $2\beta \notin \{2\alpha, \alpha+\beta, \alpha_m+\beta, \alpha+\alpha_m, \alpha\}$. En utilisant le lemme 2.7, on a $B_0^2 \equiv 0$. Absurde.
Donc $F_1 \not\equiv 0$ et comme on a $\rho(g_1) = \infty$, alors on peut appliquer le lemme (2.6) à l'équation (2.22), et on obtient $\lambda(g_1) = \lambda(f' - \psi) = \lambda(\frac{1}{f' - \psi}) = \infty$.

Il nous reste à montrer que $\lambda(f'' - \psi) = \lambda(\frac{1}{f'' - \psi}) = \infty$. On pose $g_2 = f'' - \psi$, alors $\rho(g_2) = \rho(f'') = \infty$ et on distingue deux cas.

Cas 1 si $m = 1$.
Soit $D_0(z) = \mathcal{A}_0(z) + \mathcal{A}_1'(z) - \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\mathcal{A}_1(z)$, et de la même manière précédente, on peut vérifier que $D_0(z) \not\equiv 0$ et comme $m = 1$, l'équation (2.19) devient

$$\sum_{j=2}^{n} \left(A_j(z) f^{(j+1)}(z) + A_j'(z) f^{(j)}(z)\right) + \mathcal{A}_1(z) f''(z) + (\mathcal{A}_0(z) + \mathcal{A}_1'(z)) f'(z) + \mathcal{A}_0'(z) f(z) = 0. \tag{2.25}$$

En dérivant les deux membre de l'équation (2.25), on trouve

$$\sum_{j=2}^{n} \left(A_j(z) f^{(j+2)}(z) + 2A_j'(z) f^{(j+1)}(z) + A_j''(z) f^{(j)}(z)\right) + \mathcal{A}_1(z) f^{(3)}(z) + (\mathcal{A}_0(z) + 2\mathcal{A}_1'(z)) f''(z) + (2\mathcal{A}_0'(z) + \mathcal{A}_1''(z)) f'(z) + \mathcal{A}_0''(z) f(z) = 0. \tag{2.26}$$

D'autre part l'équation (2.21) donne

$$f'(z) = \frac{1}{D_0(z)} \Bigg(-\sum_{j=2}^{n} (A_j(z) f^{(j+1)}(z) + A_j'(z) f^{(j)}(z)) - \mathcal{A}_1(z) f''(z)$$
$$+ \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \sum_{j=2}^{n} A_j(z) f^{(j)}(z) \Bigg). \tag{2.27}$$

Et les équations (2.20), (2.26) et (2.27), entrainent

$$\sum_{j=2}^{n} \left(A_j(z) f^{(j+2)}(z) + 2A_j'(z) f^{(j+1)}(z) + A_j''(z) f^{(j)}(z) \right)$$
$$+ \mathcal{A}_1(z) f^{(3)}(z) + (\mathcal{A}_0(z) + 2\mathcal{A}_1'(z)) f''(z)$$
$$+ \frac{(2\mathcal{A}_0'(z) + \mathcal{A}_1''(z))}{D_0(z)} \Bigg(-\sum_{j=2}^{n} (A_j(z) f^{(j+1)}(z) + A_j'(z) f^{(j)}(z)) - \mathcal{A}_1(z) f''(z)$$
$$+ \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \sum_{j=2}^{n} A_j(z) f^{(j)}(z) \Bigg) - \frac{\mathcal{A}_0''(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \sum_{j=2}^{n} A_j(z) f^{(j)}(z)$$
$$- \frac{\mathcal{A}_0''(z)\mathcal{A}_1(z)}{\mathcal{A}_0(z) D_0(z)} \Bigg(-\sum_{j=2}^{n} (A_j(z) f^{(j+1)}(z) + A_j'(z) f^{(j)}(z)) - \mathcal{A}_1(z) f''(z)$$
$$+ \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} \sum_{j=2}^{n} A_j(z) f^{(j)}(z) \Bigg) = 0. \tag{2.28}$$

Remplaçant $f'' = g_2 + \psi, ..., f^{(n+2)} = g_2^{(n)} + \psi^{(n)}$ dans (2.28), on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} e_j(z) g_2^{(j)}(z) = -\sum_{j=0}^{n} e_j(z) \psi^{(j)}(z), \tag{2.29}$$

Où e_j $(j = 1, ..., n)$ sont des fonctions méromorphes et $\rho(e_j) \leq k$.

Montrons maintenant que $\sum_{j=0}^{n} e_j(z)\psi^{(j)}(z) \not\equiv 0$ pour pouvoir appliquer le lemme 2.6 à l'équation (2.29). En effet, si $\sum_{j=0}^{n} e_j(z)\psi^{(j)}(z) \equiv 0$, alors

$$h_1(z) + \psi'(z)\mathcal{A}_1(z) + \psi(z)(\mathcal{A}_0(z) + 2\mathcal{A}_1'(z))$$
$$+ \frac{(2\mathcal{A}_0'(z) + \mathcal{A}_1''(z))}{D_0(z)} \left(h_2(z) + h_3(z)\frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} - \psi(z)\mathcal{A}_1(z) \right) - h_3(z)\frac{\mathcal{A}_0''(z)}{\mathcal{A}_0(z)}$$
$$- \frac{\mathcal{A}_0''(z)\mathcal{A}_1(z)}{\mathcal{A}_0(z) D_0(z)} \left(h_2(z) + h_3(z)\frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)} - \psi(z)\mathcal{A}_1(z) \right) = 0, \tag{2.30}$$

où, $h_1(z) = \sum_{j=2}^{n} \big(A_j(z)\psi^{(j)}(z) + 2A'_j(z)\psi^{(j-1)}(z) + A''_j(z)\psi^{(j-2)}(z)\big)$,
$h_2(z) = -\sum_{j=2}^{n} \big(A_j(z)\psi^{(j-1)} + A'_j(z)\psi^{(j-2)}(z)\big)$ et $h_3(z) = \sum_{j=2}^{n} A_j(z)\psi^{(j-2)}(z)$.
Si on multiplie (2.30) par $\dfrac{\mathcal{A}_0(z)D_0(z)}{\psi(z)}$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{h_1(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_0(z)D_0(z) + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_0(z)D_0(z)\mathcal{A}_1(z) + \mathcal{A}_0(z)D_0(z)(\mathcal{A}_0(z) + 2\mathcal{A}'_1(z))\\
&+ \frac{h_2(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_0(z)(2\mathcal{A}'_0(z) + \mathcal{A}''_1(z)) + \frac{h_3(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}'_0(z)(2\mathcal{A}'_0(z) + \mathcal{A}''_1(z))\\
&- \mathcal{A}_0(z)\mathcal{A}_1(z)(2\mathcal{A}'_0(z) + \mathcal{A}''_1(z)) - \frac{h_3(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}''_0(z)D_0(z) - \frac{h_2(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}''_0(z)\mathcal{A}_1(z)\\
&- \frac{h_3(z)}{\psi(z)}\frac{\mathcal{A}'_0(z)\mathcal{A}''_0(z)\mathcal{A}_1(z)}{\mathcal{A}_0(z)} + \mathcal{A}''_0(z)\mathcal{A}_1^2(z) = 0,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ainsi, on peut écrire (2.31) sous la forme

$$\begin{aligned}
&f_1(z)e^{(\alpha+\alpha_1)z^k} + f_2(z)e^{(\alpha_1+\beta)z^k} + f_3(z)e^{2\alpha z^k} + f_4(z)e^{2\beta z^k} + f_5(z)e^{(\alpha+\beta)z^k}\\
&+ f_6(z)e^{(2\alpha+\beta)z^k} + f_7(z)e^{(\alpha+2\beta)z^k} + f_8(z)e^{(2\alpha_1+\alpha)z^k} + f_9(z)e^{(2\alpha_1+\beta)z^k}\\
&+ f_{10}(z)e^{(2\alpha+\alpha_1)z^k} + f_{11}(z)e^{(\alpha_1+2\beta)z^k} + f_{12}(z)e^{(\alpha+\alpha_1+\beta)z^k}\\
&+ f_{13}(z)e^{3\alpha z^k} + f_{14}(z)e^{3\beta z^k} = 0,
\end{aligned}$$

où $f_{13}(z) = A_0^3(z)$ et $f_{14}(z) = B_0^3(z)$. Ces coefficients viennent du terme $\mathcal{A}_0^3(z)$, de plus on a $\rho(f_j) < k$ $(j = 1, ..., 14)$.

Soit $\Omega = \{3\alpha, \alpha+\alpha_1+\beta, \alpha_1+2\beta, 2\alpha+\alpha_1, 2\alpha_1+\beta, 2\alpha_1+\alpha, \alpha+2\beta, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, 2\beta, 2\alpha, \alpha_1+\beta, \alpha+\alpha_1\}$. Comme $\alpha \neq \beta$, on a $3\alpha \neq 3\beta, \alpha+2\beta, 2\alpha+\beta, 2\alpha$ et $3\beta \neq 3\alpha, \alpha+2\beta, 2\alpha+\beta, 2\beta$.
Posons $\Omega_1 = \{\alpha+\alpha_1+\beta, \alpha_1+2\beta, 2\alpha+\alpha_1, 2\alpha_1+\beta, 2\alpha_1+\alpha, \alpha+\beta, 2\beta, \alpha_1+\beta, \alpha+\alpha_1\}$, alors, on a

- Si $3\alpha \notin \Omega_1$, on déduit d'après le lemme 2.7 que $f_{13} \equiv 0$, i.e. $A_0 \equiv 0$. Ce qui est une contradiction.

- Si $3\alpha \in \Omega_1$, nous avons $3\beta \notin \Omega$. Ainsi d'après le lemme 2.7, $f_{14} \equiv 0$, i.e. $B_0 \equiv 0$. Absurdité.
D'où, $F_2 \not\equiv 0$ et comme $\rho(g_2) = \infty$, alors l'équation (2.29) et le lemme (2.6) donnent $\lambda(g_2) = \lambda(f'' - \psi) = \lambda(\dfrac{1}{f''-\psi}) = \infty$.

Cas 2 Si $m > 1$, l'équation (2.17) devient

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z) + A_1(z)f'(z) + \mathcal{A}_0(z)f(z) = 0, \tag{2.32}$$

et de (2.32) on a

$$f(z) = -\frac{1}{\mathcal{A}_0(z)}\left(\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z) + A_1(z)f'(z)\right). \tag{2.33}$$

En dérivant (2.32), on obtient

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}\big(A_j(z)f^{(j+1)}(z) + A_j'(z)f^{(j)}(z)\big) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)$$

$$+A_1(z)f''(z) + (\mathcal{A}_0(z) + A_1'(z))f'(z) + \mathcal{A}_0'(z)f(z) = 0. \tag{2.34}$$

D'autre part, (2.33) et (2.34) entrainent

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}\big(A_j(z)f^{(j+1)}(z) + A_j'(z)f^{(j)}(z)\big) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z) + \mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)$$

$$+ A_1(z)f''(z) + (\mathcal{A}_0(z) + A_1'(z))f'(z) - \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z)$$

$$+ \mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z) + A_1(z)f'(z)\Big) = 0. \tag{2.35}$$

Ensuite, de (2.35), nous avons

$$f'(z) = \frac{1}{D_1(z)}\Big(- \sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}(A_j(z)f^{(j+1)}(z) + A_j'(z)f^{(j)}(z)) - \mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z) - \mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)$$

$$- A_1(z)f''(z) + \frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + \mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z)\Big)\Big), \tag{2.36}$$

où $D_1(z) = \Big(\mathcal{A}_0(z) + A_1'(z) - \dfrac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}A_1(z)\Big)$. Il est clair que $D_1(z) \not\equiv 0$.
Maintenant, en dérivant (2.34), on obtient

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}\big(A_j(z)f^{(j+2)}(z) + 2A_j'(z)f^{(j+1)}(z) + A_j''(z)f^{(j)}(z)\big)$$

$$+ \mathcal{A}_m(z)f^{(m+2)}(z) + 2\mathcal{A}_m'(z)f^{(m+1)}(z) + \mathcal{A}_m''(z)f^{(m)}(z) + A_1(z)f^{(3)}(z)$$

$$+ (\mathcal{A}_0(z) + 2A_1'(z))f''(z) + (2\mathcal{A}_0'(z) + A_1''(z))f'(z) + \mathcal{A}_0''(z)f(z) = 0, \tag{2.37}$$

et en utilisant (2.33), (2.36) et (2.37), on trouve

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}\big(A_j(z)f^{(j+2)}(z)+2A_j'(z)f^{(j+1)}(z)+A_j''(z)f^{(j)}(z)\big)+\mathcal{A}_m(z)f^{(m+2)}(z)$$

$$+2\mathcal{A}_m'(z)f^{(m+1)}(z)+\mathcal{A}_m''(z)f^{(m)}(z)+A_1(z)f^{(3)}(z)+(\mathcal{A}_0(z)+2A_1'(z))f''(z)$$

$$+\frac{(2\mathcal{A}_0'(z)+A_1''(z))}{D_1(z)}\Bigg(-\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}(A_j(z)f^{(j+1)}(z)+A_j'(z)f^{(j)}(z))-\mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z)-\mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)$$

$$-A_1(z)f''(z)+\frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}A_j(z)f^{(j)}(z)+\mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z)\Big)\Bigg)$$

$$-\frac{\mathcal{A}_0''(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}A_j(z)f^{(j)}(z)+\mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z)\Big)$$

$$-\frac{\mathcal{A}_0''(z)A_1(z)}{\mathcal{A}_0(z)D_1(z)}\Bigg(-\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}(A_j(z)f^{(j+1)}(z)+A_j'(z)f^{(j)}(z))-\mathcal{A}_m(z)f^{(m+1)}(z)-\mathcal{A}_m'(z)f^{(m)}(z)$$

$$-A_1(z)f''(z)+\frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(\sum_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}A_j(z)f^{(j)}(z)+\mathcal{A}_m(z)f^{(m)}(z)\Big)\Bigg)=0. \tag{2.38}$$

Sachant que $f''=g_2+\psi,...,f^{(n+2)}=g_2^{(n)}+\psi^{(n)}$, alors (2.38), devient

$$\sum_{j=0}^{n}e_j(z)g_2^{(j)}(z)=-\sum_{j=0}^{n}e_j(z)\psi^{(j)}(z), \tag{2.39}$$

où, e_j $(j=1,...,n)$ sont des fonctions méromorphes et $\rho(e_j)\leq k$.

Démontrons que $\sum\limits_{j=0}^{n}e_j(z)\psi^{(j)}(z)\not\equiv 0$. En effet, si $\sum\limits_{j=0}^{n}e_j(z)\psi^{(j)}(z)\equiv 0$, alors

$$\begin{aligned}
&h_1(z)+\mathcal{A}_m(z)\psi^{(m)}(z)+2\mathcal{A}_m'(z)\psi^{(m-1)}(z)+\mathcal{A}_m''(z)\psi^{(m-2)}(z)+\mathcal{A}_0(z)\psi(z)\\
&+\frac{(2\mathcal{A}_0'(z)+A_1''(z))}{D_1(z)}\Bigg(h_2(z)-\mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-1)}(z)-\mathcal{A}_m'(z)\psi^{(m-2)}(z)\\
&+\frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(h_3(z)+\mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-2)}(z)\Big)\Bigg)-\frac{\mathcal{A}_0''(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(h_3(z)+\mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-2)}(z)\Big)\\
&-\frac{\mathcal{A}_0''(z)A_1(z)}{\mathcal{A}_0(z)D_1(z)}\Bigg(h_2(z)-\mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-1)}(z)-\mathcal{A}_m'(z)\psi^{(m-2)}(z)\\
&+\frac{\mathcal{A}_0'(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(h_3(z)+\mathcal{A}_m(z)\psi^{(m-2)}(z)\Big)\Bigg)=0,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

avec, $h_1(z)=\sum\limits_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}\big(A_j(z)\psi^{(j)}(z)+2A_j'(z)\psi^{(j-1)}(z)+A_j''(z)\psi^{(j-2)}(z)\big)+A_1(z)\psi'(z)+2A_1'(z)\psi(z)$,

$h_2(z)=-\sum\limits_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}(A_j(z)\psi^{(j-1)}(z)+A_j'(z)\psi^{(j-2)}(z))-A_1(z)\psi(z)$ et $h_3(z)=\sum\limits_{\substack{j=2\\ j\neq m}}^{n}A_j(z)\psi^{(j-2)}(z)$.

En multipliant (2.40) par $\dfrac{\mathcal{A}_0(z)D_1(z)}{\psi(z)}$, on a

$$
\begin{aligned}
&\frac{h_1(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_0(z)D_1(z) + \Big(\frac{\psi^{(m)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_m(z) + 2\frac{\psi^{(m-1)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}'_m(z) + \frac{\psi^{(m-2)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}''_m(z)\Big)\mathcal{A}_0(z)D_1(z)\\
&+ \mathcal{A}_0^2(z)D_1(z) + \frac{h_2(z)}{\psi(z)}(2\mathcal{A}'_0(z) + A''_1(z))\mathcal{A}_0(z)\\
&- \Big(\frac{\psi^{(m-1)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_m(z) + \frac{\psi^{(m-2)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}'_m(z)\Big)(2\mathcal{A}'_0(z) + A''_1(z))\mathcal{A}_0(z)\\
&+ \mathcal{A}'_0(z)(2\mathcal{A}'_0(z) + A''_1(z))\Big(\frac{h_3(z)}{\psi(z)} + \frac{\psi^{(m-2)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_m(z)\Big) - \mathcal{A}''_0(z)D_1(z)\Big(\frac{h_3(z)}{\psi(z)} + \frac{\psi^{(m-2)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_m(z)\Big)\\
&- \frac{h_2(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}''_0(z)A_1(z) + \Big(\frac{\psi^{(m-1)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_m(z) + \frac{\psi^{(m-2)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}'_m(z)\Big)\mathcal{A}''_0(z)A_1(z)\\
&- \frac{\mathcal{A}''_0(z)A_1(z)\mathcal{A}'_0(z)}{\mathcal{A}_0(z)}\Big(\frac{h_3(z)}{\psi(z)} + \frac{\psi^{(m-2)}(z)}{\psi(z)}\mathcal{A}_m(z)\Big) = 0. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Ainsi, (2.41) peut s'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
&f_1(z)e^{(\alpha+\alpha_m)z^k} + f_2(z)e^{(\alpha_m+\beta)z^k} + f_3(z)e^{2\alpha z^k} + f_4(z)e^{2\beta z^k} + f_5(z)e^{(\alpha+\beta)z^k}\\
&+ f_6(z)e^{(2\alpha+\beta)z^k} + f_7(z)e^{(\alpha+2\beta)z^k} + f_8(z)e^{\alpha z^k} + f_9(z)e^{\beta z^k} + f_{10}(z)e^{(2\alpha+\alpha_m)z^k}\\
&+ f_{11}(z)e^{(\alpha_m+2\beta)z^k} + f_{12}(z)e^{(\alpha+\alpha_m+\beta)z^k} + f_{13}(z)e^{3\alpha z^k} + f_{14}(z)e^{3\beta z^k} = 0,
\end{aligned}
$$

avec $f_{13}(z) = A_0^3(z)$ et $f_{14}(z) = B_0^3(z)$, où elles viennent du terme $\mathcal{A}_0^3(z)$, de plus $\rho(f_j) < k$ $(j = 1, ..., 14)$. En fin, nous concluons de la même manière que celle dans le cas 1. □

Remarque 2.3.1. les fonctions f, f' et f'' dans le théorème 2.3.1 ont un nombre infini de points fixes.

En effet :

Pour $\psi(z) = z$ dans le théorème 2.3.1, on a $\lambda(f - z) = \lambda(f' - z) = \lambda(f'' - z) = +\infty$, c'est à dire que les fonctions $f - z$, $f' - z$ et $f'' - z$ ont un nombre infini de zéros et comme un zéro de la fonction $h - z$ est un point fixe de h, où $h \in \{f, f', f''\}$, on déduit que les fonctions f, f' et f'' ont un nombre infini de points fixes.

CHAPITRE 3

ORDRE DE CROISSANCE DES SOLUTIONS MÉROMORPHES D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES D'ORDRE N

Dans ce chapitre, on étudie l'ordre de croissance d'une solution méromorphe quelconque non nulle f de l'équation aux différences

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z)f(z+j) = 0.$$

Dans la première partie de ce chapitre, on choisit les coefficients $a_0(z) = A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)}$, $a_m(z) = A_m(z)e^{p_m(z)}$ et $a_j(z) = A_j(z)$, pour tout $j = 0, ..., n,\ j \neq 0, m$ où $m \in \mathbb{N},\ 1 \leq m \leq n$ et $B_0(z), A_0(z), ..., A_n(z)$ sont des fonctions méromorphes. $p(z),\ q(z)$ et $p_m(z)$ sont des polynômes de degré k. Dans la deuxième parties on pose $a_j(z) = A_j(z)e^{p_j(z)} + D_j(z)$, où $A_j(z),\ D_j(z)\ j = 1, ..., n$ sont des fonctions méromorphes et $p_j(z),\ j = 1, ..., n$ sont des polynômes de degré k.

Il s'agit d'une extension de certains résultats récents, de Z. L. Yuan et Q. Ling [65], consacrés aux équations aux différences linéaires de degré n.

3.1 Quelques résultats préliminaires

Pour démontrer nos résultats, nous avons besoin des lemmes suivants

Lemme 3.1. [22] *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini ρ, ϵ une constante positive, η_1 et η_2 deux nombre complexes distincts. Alors on a*

$$m\left(r, \frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right) = O(r^{\rho-1+\epsilon})$$

et il existe un ensemble $E_1 \subset]1, \infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ et pour tout r assez grand, on a

$$\exp\{-r^{\rho-1+\epsilon}\} \leq \left|\frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right| \leq \exp\{r^{\rho-1+\epsilon}\}$$

Lemme 3.2. *[48] Soit $G(z) = \sum_{j=0}^{n} B_j(z)e^{p_j(z)}$, où $p_j(z) = \alpha_{jk}z^k + \cdots + \alpha_{j0}$ est un polynôme de degré $k \geq 1$ et $B_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 0, ..., n)$ sont des fonctions méromorphes telles que $\max\limits_{0 \leq j \leq n}\{\rho(B_j)\} < k$. Si α_{jk} $(j = 0, ..., n)$ sont des nombres complexes distincts, alors $\rho(G) = k$.*

3.2 Ordre de croissance de la solution méromorphe d'une équation aux différences dont le maximum d'ordres des coefficient est atteint deux fois

Z. L. Yuan et Q. Ling [65] ont étudié une classe d'équation aux différences et ils ont obtenu les résultats suivants

Théorème A. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $B_0(z), A_0(z), ..., A_n(z)$ des fonctions entières non nulles telles que $\max\{\rho(A_j), \rho(B_0), 0 \leq j \leq n\} < k$. Soient α_0, β_0 deux nombres complexes distincts tels que $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ (on suppose que $|\alpha_0| \leq |\beta_0|$) et soit α_1 un nombre réel strictement négatif. Si $\arg \alpha_0 \neq \pi$ ou $\alpha_0 < \alpha_1$, alors toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation

$$\sum_{j=2}^{n} A_j(z)f(z+j) + A_1(z)e^{\alpha_1 z^k}f(z+1) + (A_0(z)e^{\alpha_0 z^k} + B_0(z)e^{\beta_0 z^k})f(z) = 0$$

satisfait l'inégalité $\rho(f) \geq k+1$.

Théorème B. Soient $B_0(z), A_0(z), ..., A_n(z)$ des fonctions méromorphes non nulles telles que $\max\{\rho(A_j), \rho(B_0), 0 \leq j \leq n\} < 1$. Soient α_0, β_0 deux nombres complexes distincts tels que $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ (on suppose que $|\alpha_0| \leq |\beta_0|$) et soit α_1 un nombre réel strictement négatif. Si

$\arg \alpha_0 \neq \pi$ ou $\alpha_0 < \alpha_1$, alors toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation

$$\sum_{j=2}^{n} A_j(z) f(z+j) + A_1(z) e^{\alpha_1 z} f(z+1) + (A_0(z) e^{\alpha_0 z} + B_0(z) e^{\beta_0 z}) f(z) = 0$$

satisfait l'inégalité $\rho(f) \geq 2$.

Dans notre travail, nous généralisons ces deux résultats comme suit

Théorème 3.2.1. *Soit $n, m, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq 1$, $n \geq 2$ et $1 \leq m \leq n$. Supposons que $B_0(z)$, $A_j(z) (j = 0, ..., n)$ sont des fonctions méromorphes telles que*
$\max\{\rho(A_j), \rho(B_0), 0 \leq j \leq n\} = \sigma < k$ et $A_0 A_m A_n B_0 \not\equiv 0$. Soient α, β, α_m des nombres complexes tels que $\alpha\beta(\alpha - \beta) \neq 0$. Si on a

i) au moins, deux nombres parmi α, β, α_m ont des arguments distincts,

ou

ii) $|\alpha_m| \neq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, (si $\arg \alpha = \arg \alpha_m = \arg \beta$).

Alors, pour toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} A_j(z) f(z+j) + A_m(z) e^{\alpha_m z^k} f(z+m) + (A_0(z) e^{\alpha z^k} + B_0(z) e^{\beta z^k}) f(z) = 0, \tag{3.1}$$

on a $\rho(f) \geq k+1$.

Preuve.

supposons que (3.1) admet une solution méromorphe non nulle $f(z)$, tel que $\rho(f) < k+1$. Posons $z = re^{i\theta}$, $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, $\alpha_m = |\alpha_m| e^{i\theta_m}$ et $\beta = |\beta| e^{i\psi}$.
Soit $0 < \epsilon < \min\{k - \sigma, k + 1 - \rho(f)\}$ et $j \in \{0, ..., n\}$. En utilisant le théorème 1.2.2, on a

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{A_j}{A_0}\right) &\leq \max\{\rho(A_0), \rho(A_j)\} \\ &\leq \max\{\rho(B_0), \rho(A_j),\ 0 \leq j \leq n\} = \sigma, \end{aligned} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{A_j}{B_0}\right) &\leq \max\{\rho(B_0), \rho(A_j)\} \\ &\leq \max\{\rho(B_0), \rho(A_j),\ 0 \leq j \leq n\} = \sigma, \end{aligned} \tag{3.3}$$

et

$$\rho(\frac{A_j}{A_m}) \leq \max\{\rho(A_j),\ 0 \leq j \leq n\} = \sigma. \tag{3.4}$$

De (3.2), (3.3) et (3.4), on obtient

$$\max\left\{\rho(\frac{A_j}{A_0}), \rho(\frac{A_j}{B_0}), \rho(\frac{A_j}{A_m}),\ 0 \leq j \leq n\right\} \leq \sigma. \tag{3.5}$$

Et d'après le lemme 2.2, il existe un ensemble $E_j \subset]1, \infty[$ de mesure logarithmique finie telle que, pour tout z tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E_j$ et en utilisant (3.5), nous avons :

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(\frac{A_j}{A_0}) + \epsilon}\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}, \tag{3.6}$$

$$\left|\frac{A_j(z)}{B_0(z)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(\frac{A_j}{B_0}) + \epsilon}\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}, \tag{3.7}$$

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_m(z)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(\frac{A_j}{A_m}) + \epsilon}\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}. \tag{3.8}$$

Posons maintenant $G = \cup_{j=0}^{n} E_j$ et $|z| = r \notin [0,1] \cup G$, alors on a $r \notin [0,1] \cup E_j$ pour tout $j = 0, ..., n$. Donc de (3.6), (3.7) et (3.8), on obtient

$$\max\left\{\left|\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\right|, \left|\frac{A_j(z)}{B_0(z)}\right|, \left|\frac{A_j(z)}{A_m(z)}\right|,\ 0 \leq j \leq n\right\} \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\}. \tag{3.9}$$

D'autre part, pour tout $j = 0, ..., n$, le lemme 2.1 nous donne qu'il existe un ensemble $F_j \subset]1, \infty[$, de mesure logarithmique finie tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r \notin [0,1] \cup F_j$, on a

$$\left|\frac{f(z+j)}{f(z)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}. \tag{3.10}$$

$$\left|\frac{f(z+j)}{f(z+m)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}. \tag{3.11}$$

Soient $H = \cup_{j=0}^{n} F_j$ et $|z| = r \notin [0,1] \cup H$, alors $r \notin [0,1] \cup F_j$ pour tout $j = 0, ..., n$, de plus de (3.10) et (3.11) , on a

$$\max_{0 \leq j \leq n}\left\{\left|\frac{f(z+j)}{f(z)}\right|, \left|\frac{f(z+j)}{f(z+m)}\right|\right\} \leq \exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}. \tag{3.12}$$

Ensuite, en posant $E = G \cup H$, on obtient que les relations (3.9) et (3.12) sont vérifiées pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et on distingue les cas suivants :

1) $\varphi \neq \psi$. Du lemme 2.4, il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}[$ tel que $\cos(\varphi + k\theta)\cos(\psi + k\theta) < 0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\cos(\varphi + k\theta) > 0$ et $\cos(\psi + k\theta) < 0$. De l'équation (2.3), on a

$$-e^{\alpha z^k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \frac{A_j(z)f(z+j)}{A_0(z)f(z)} + e^{\alpha_m z^k}\frac{A_m(z)f(z+m)}{A_0(z)f(z)} + e^{\beta z^k}\frac{B_0(z)}{A_0(z)} \tag{3.13}$$

$$-e^{\beta z^k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \frac{A_j(z)f(z+j)}{B_0(z)f(z)} + e^{\alpha_m z^k}\frac{A_m(z)f(z+m)}{B_0(z)f(z)} + e^{\alpha z^k}\frac{A_0(z)}{B_0(z)}. \tag{3.14}$$

$$-e^{\alpha_m z^k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \frac{A_j(z)f(z+j)}{A_m(z)f(z+m)} + e^{\alpha z^k}\frac{A_0(z)f(z)}{A_m(z)f(z+m)} + e^{\beta z^k}\frac{B_0(z)f(z)}{A_m(z)f(z+m)} \tag{3.15}$$

1.1) Supposons que $\cos(\theta_m + k\theta) \leq 0$. On choisit $z = re^{i\theta}$ tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, alors on a

$$\max\left\{|e^{\alpha_m z^k}|, |e^{\beta z^k}|\right\} = \max\left\{\exp\{|\alpha_m|\cos(\theta_m + k\theta)r^k\}, \exp\{|\beta|\cos(\psi + k\theta)r^k\}\right\} \leq 1.$$

En utilisant les relations (3.9), (3.12) et l'équation (3.13), nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\} &= |e^{\alpha z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f(z+j)}{A_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right| \left|\frac{A_m(z)f(z+m)}{A_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\beta z^k}\right| \left|\frac{B_0(z)}{A_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},
\end{aligned}$$

d'où

$$\exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}.$$

Ce qui est une contradiction avec $0 < \epsilon < \min\{k - \sigma, k + 1 - \rho(f)\}$.

1.2) Supposons que $\cos(\theta_m + k\theta) > 0$. Soit $\theta' = \theta + \frac{\pi}{k}$, alors on a $\cos(\theta + k\theta') < 0$, $\cos(\theta_m + k\theta') < 0$ et $\cos(\psi + k\theta') > 0$. Donc pour $z = re^{i\theta'}$ tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E$,

on a $\max\left\{|e^{\alpha_m z^k}|, |e^{\alpha z^k}|\right\} \leq 1$, et en utilisant les relations (3.9), (3.12) et l'équation (3.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta')r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f(z+j)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right| \left|\frac{A_m(z)f(z+m)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\alpha z^k}\right| \left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},
\end{aligned}$$

d'où,

$$\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta')r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}.$$

Ce qui contredit $0<\epsilon<\min\{k-\sigma, k+1-\rho(f)\}$.

2) $\varphi=\psi$. Comme $\alpha\neq\beta$, alors $|\alpha|\neq|\beta|$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|\alpha|<|\beta|$ et on a les cas suivants

2.1) $\theta_m\neq\varphi=\psi$. Du lemme 2.4, il existe $\theta\in[-\frac{\pi}{2k},\frac{3\pi}{2k}[$ tel que $\cos(\varphi+k\theta)\cos(\theta_m+k\theta)<0$, on peut supposer que $\cos(\varphi+k\theta)>0$. Pour $z=re^{i\theta}$ tel que $|z|=r\notin[0,1]\cup E$, on a $|e^{\alpha_m z^k}|=\exp\{|\alpha_m|\cos(\theta_m+k\theta)r^k\}\leq 1$. D'autre part de (3.9), (3.12) et l'équation (3.14), on a

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta)r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f(z+j)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right| \left|\frac{A_m(z)f(z+m)}{B_0(z)f(z)}\right| + \\
&\left|e^{\alpha z^k}\right| \left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} + \exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} + \\
&\exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},
\end{aligned}$$

donc

$$\exp\{|\beta|\cos(\varphi+k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}\exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\},$$

par conséquent, nous avons

$$\exp\{(|\beta|-|\alpha|)\cos(\varphi+k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}.$$

Ce qui est une contradiction avec $0<\epsilon<\min\{k-\sigma, k+1-\rho(f)\}$.

2.2) $\theta_m=\varphi=\psi$. on choisit $\theta\in[-\frac{\pi}{2k},\frac{3\pi}{2k}[$ tel que $\cos(\varphi+k\theta)>0$. Pour tout $z=re^{i\theta}$ tel que $|z|=r\notin[0,1]\cup E$, on a

- Si $|\alpha_m|\leq|\alpha|$, d'après (3.9), (3.12) et l'équation (3.14), on a

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta)r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\left|\frac{A_j(z)f(z+j)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right|\left|\frac{A_m(z)f(z+m)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\alpha z^k}\right|\left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&+ \exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&+ \exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},
\end{aligned}$$

alors,

$$\exp\{(|\beta|-|\alpha|)\cos(\varphi+k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},$$

contradiction.

- Si $|\alpha|<|\alpha_m|<|\beta|$, d'après (3.9), (3.12) et l'équation (3.14), nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\{|\beta|\cos(\psi+k\theta)r^k\} &= |e^{\beta z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}\left|\frac{A_j(z)f(z+j)}{B_0(z)f(z)}\right| + \left|e^{\alpha_m z^k}\right|\left|\frac{A_m(z)f(z+m)}{B_0(z)f(z)}\right| \\
&+ \left|e^{\alpha z^k}\right|\left|\frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&+ \exp\{|\alpha_m|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&+ \exp\{|\alpha|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\{|\alpha_m|\cos(\varphi+k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},
\end{aligned}$$

ensuite, on a

$$\exp\{(|\beta| - |\alpha_m|)\cos(\varphi + k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\}.$$

Ce qui est une contradiction.

- Si $|\beta| < |\alpha_m|$, d'après (3.9), (3.12) et l'équation (3.15), on a

$$\begin{aligned}
\exp\{|\alpha_m|\cos(\psi + k\theta)r^k\} &= |e^{\alpha_m z^k}| \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left|\frac{A_j(z)f(z+j)}{A_m(z)f(z+m)}\right| + \left|e^{\alpha z^k}\right|\left|\frac{A_0(z)f(z)}{A_m(z)f(z+m)}\right| \\
&+ \left|e^{\beta z^k}\right|\left|\frac{B_0(z)f(z)}{A_m(z)f(z+m)}\right| \\
&\leq (n-1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&+ \exp\{|\alpha|\cos(\varphi + k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&+ \exp\{|\beta|\cos(\varphi + k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\} \\
&\leq (n+1)\exp\{|\beta|\cos(\varphi + k\theta)r^k\}\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},
\end{aligned}$$

alors,

$$\exp\{(|\alpha_m| - |\beta|)\cos(\varphi + k\theta)r^k\} \leq (n+1)\exp\left\{r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},$$

contradiction. □

Dans ce qui suit, on va montrer un résultat plus général que le théorème précédent

Théorème 3.2.2. *Soit $n, m, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq 1$, $n \geq 2$ et $1 \leq m \leq n$. Supposons que $B_0(z)$, $A_j(z)(j = 0, ..., n)$ sont des fonctions méromorphes telles que $\max\{\rho(A_j), \rho(B_0), 0 \leq j \leq n\} = \sigma < k$ et $A_0 A_m A_n B_0 \not\equiv 0$. Soient $p(z) = \alpha z^k + \cdots$, $q(z) = \beta z^k + \cdots$ et $p_m(z) = \alpha_m z^k + \cdots$ des polynômes de degré k avec $\alpha \neq \beta$. Si α, β, α_m satisfont les conditions $i), ii)$ du théorème* 3.2.1 *alors, pour toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_j(z)f(z+j) + A_m(z)e^{p_m(z)}f(z+m) + \left(A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)}\right)f(z) = 0, \quad (3.16)$$

on a $\rho(f) \geq k+1$.

Preuve.

Si on pose

$\mathcal{A}_m(z) = A_m(z)e^{p_m(z) - \alpha_m z^k}$

$\mathcal{A}_0(z) = A_0(z)e^{p_0(z) - \alpha_0 z^k}$

$\mathcal{B}_0(z) = B_0(z)e^{q_0(z) - \beta_0 z^k}$ and

$\mathcal{A}_j(z) = A_j(z)$ *pour* $j = 1, ..., n; j \neq m,$

l'équation (3.16) devient

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \mathcal{A}_j(z)f(z+j) + \mathcal{A}_m(z)e^{\alpha_m z^k} f(z+m) + \left(\mathcal{A}_0(z)e^{\alpha_0 z^k} + \mathcal{B}_0(z)e^{\beta_0 z^k}\right) f(z) = 0, \quad (3.17)$$

elle est de la même forme que l'équation (3.1). De plus, il est facile de vérifier que les fonctions $\mathcal{B}_0, \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$ ont les mêmes propriétés que celles des coefficients $B_0, A_0, ..., A_n$ dans le Théorème 3.2.1. Donc, il suffit d'appliquer ce théorème pour obtenir le résultat. □

Théorème 3.2.3. *Sous l'hypothèse du théorème* 3.2.2 *concernant les coefficients de l'équation* (3.16)*, on a ; si* $f(z)$ *est une solution méromorphe non nulle d'ordre fini de l'équation* (3.16)*, alors* $\lambda(f - z) = \rho(f)$*. De plus, on a*

$$\rho(f) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(\frac{1}{f})\} + 1 \quad ou \quad \rho(f) = k + 1.$$

Preuve.

Supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe non constante de (3.16) telle que $\rho(f) < \infty$. D'abord, on va montrer que $\lambda(f - z) = \rho(f)$. En remplaçant $f(z) = g(z) + z$ dans (3.16), on obtient

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} A_j(z)g(z+j) + A_m(z)e^{p_m(z)}g(z+m) + (A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)})g(z) = D(z),$$

où

$$-D(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} A_j(z)(z+j) + A_m(z)e^{p_m(z)}(z+m) + (A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)})z \not\equiv 0.$$

Il est clair que $D \not\equiv 0$. En effet, si $D \equiv 0$, alors d'après le théorème 3.2.2, on a $\rho(z) \geq k + 1$. Contradiction. D'où, on a $\rho(D) \leq k$.

Maintenant, pour tout $\epsilon > 0$, en utilisant le lemme 3.1 et le théorème 3.2.2, on peut déduire que

$$\begin{aligned}
&m\left(r, \frac{1}{g(z)}\right)\\
&= m\left(r, \frac{\sum_{j=1, j\neq m}^{n} A_j(z)g(z+j) + A_m(z)e^{p_m(z)}g(z+m) + (A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)})g(z)}{D(z)g(z)}\right)\\
&\leq \sum_{j=0}^{n} m\left(r, \frac{g(z+j)}{g(z)}\right) + \sum_{j=0}^{n} T\left(r, A_j(z)\right) + T\left(r, e^{p(z)}\right) + T\left(r, e^{p_m(z)}\right) + T\left(r, B_0(z)e^{q(z)}\right)\\
&+ T\left(r, D(z)\right) + O(\log r)\\
&= O(r^{\rho(f)-1+\epsilon}).
\end{aligned}$$

Donc, il existe $c > 0$ tel que

$$m(r, \frac{1}{g}) \leq cr^{\rho(f)-1+\epsilon},$$

d'où

$$\frac{\log m(r, \frac{1}{g})}{\log r} \leq \frac{\log c}{\log r} + \rho(f) - 1 + \epsilon,$$

puis, en passant à la limite, on trouve

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log m(r, \frac{1}{g})}{\log r} \leq \rho(f) - 1 + \epsilon,$$

ce qui implique

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log m(r, \frac{1}{g})}{\log r} < \rho(f) = \rho(\frac{1}{g}). \tag{3.18}$$

De (3.18), on peut déduire que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{m(r, \frac{1}{g})}{T(r, \frac{1}{g})} = 0, \tag{3.19}$$

et en utilisant (3.19), on a

$$\begin{aligned}
\lambda(f - z) &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f - z}\right)}{\log r}\\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{g}\right)}{\log r}
\end{aligned}$$

$$= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(T(r,\frac{1}{g}) - m(r,\frac{1}{g}))}{\log r}$$

$$= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,\frac{1}{g}) + \log(1 - \frac{m(r,\frac{1}{g})}{T(r,\frac{1}{g})})}{\log r}$$

$$= \rho(\frac{1}{g}) = \rho(g) = \rho(f),$$

ce qui donne $\lambda(f - z) = \rho(f)$.

Ensuite, nous démontrons que $\rho(f) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(\frac{1}{f})\} + 1$ ou $\rho(f) = k + 1$. Si l'assertion n'est pas vérifiée, nous aurions $\max\{k, \lambda(f), \lambda(\frac{1}{f})\} + 1 < \rho(f) < \infty$.

Supposons que $z = 0$ est un zéro (ou pôle) de $f(z)$ d'ordre s. En appliquant la factorisation de Hadamard d'une fonction méromorphe, on peut réécrire $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = z^s \frac{p_1(z)}{p_2(z)} e^{Q(z)},$$

où $p_1(z)$ $p_2(z)$ sont des fonctions entières $\rho(p_1) = \lambda(f)$, $\rho(p_2) = \lambda(\frac{1}{f})$ et $Q(z)$ est un polynôme tel que $\deg Q(z) = q > \max\{k, \lambda(f), \lambda(\frac{1}{f})\} + 1$.

Si on remplace $f(z)$ dans (3.16), on trouve

$$\sum_{j=0}^{n} h_j(z) e^{Q(z+j)} = 0, \tag{3.20}$$

avec

$$h_0(z) = (A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)}) z^s \frac{p_1(z)}{p_2(z)}, \qquad h_m(z) = A_m(z)e^{p_m(z)}(z+m)^s \frac{p_1(z+m)}{p_2(z+m)},$$

et

$$h_j(z) = A_j(z)(z+j)^s \frac{p_1(z+j)}{p_2(z+j)}, \quad (1 \leq j \leq n,\ j \neq m).$$

Nous remarquons que $\deg(Q(z+h) - Q(z+l)) = q - 1 > \rho(h_j)$ pour tout $0 \leq h < l \leq n$ et $0 \leq j \leq n$. Par conséquent, le lemme 2.7 s'applique à l'équation (3.20). Nous obtenons $h_j(z) \equiv 0$ pour $j = 0, ..., n$. Contradiction avec l'hypothèse. Ce qui complète la démonstration. □

3.3 Equations aux différences dont tous les coefficients ont le même ordre

Z. L. Yuan et Q. Ling [65] considèrent l'équation aux différences

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z)f(z+j) = 0. \tag{3.21}$$

Ils ont obtenu les résultats suivants

Theorem C. Dans l'équation (3.21), nous supposons que $a_j(z) = A_j(z)e^{\alpha_j z}$ Pour tout $j = 0, 1, ..., n$, où α_j $(j = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes distincts et supposons aussi que $A_j(z)(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1, ..., n)$ sont des fonctions méromorphe telles que $\max\limits_{0\leq j\leq n}\{\rho(A_j)\} < 1$. Alors pour toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation (3.21) on a $\rho(f) \geq 2$.

Theorem D. Dans l'équation (3.21), nous supposons que $a_j(z) = A_j(z)e^{\alpha_j z} + D_j(z)$ Pour tout $j = 0, 1, ..., n$, où α_j $(j = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes distincts et supposons aussi que $A_j(z)(\not\equiv 0)$, $D_j(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphe telles que $\max\{\rho(A_j), \rho(D_j)\} < 1$. Alors pour toute solution méromorphe non nulle $f(z)$ de l'équation (3.21), on a $\rho(f) \geq 2$.

Dans ce travail, nous généralisons leurs résultats de la manière suivante

Théorème 3.3.1. *Dans l'équation* (3.21)*, nous supposons que* $a_j(z) = A_j(z)e^{p_j(z)} + D_j(z)$ *pour tout* $j = 0, 1, ..., n$*, où* $p_j(z) = \alpha_j z^k + \cdots + \alpha_0$ *est un polynôme de degré* $k \geq 1$*,* $A_j(z)$*,* $D_j(z)$ *sont des fonctions méromorphes non nulles telles que* $\max\{\rho(A_j), \rho(D_j)\} < k$*. Si* α_j*,* $(j = 0, 1, ..., n)$ *sont des nombres complexes distincts. Alors pour toute solution méromorphe non nulle* $f(z)$ *de l'équation* (3.21) *on a* $\rho(f) \geq k+1$*.*

Preuve.

Soit $f(z)$ une solution méromorphe non nulle de l'équation (3.21). Supposons que $\rho(f) < k+1$.

Soit $z = re^{i\theta}$, $\alpha_j = |\alpha_j|e^{i\theta_j}$, $\sigma = \max\limits_{0\leq j\leq n}\{\rho(A_j), \rho(D_j)\} < k$ et $\delta(\alpha_j z^k, \theta) = |\alpha_j|\cos(\theta_j + k\theta)$, $(j = 0, ..., n)$. Alors

$E = \{\theta \in [0, 2\pi[, \delta(\alpha_j z^k, \theta) = 0,\ j = 0, ..., n\} \cup \{\theta \in [0, 2\pi[, \delta((\alpha_j - \alpha_i)z^k, \theta) = 0, 0 \leq i < j \leq n\}$

est un ensemble de mesure linéaire zéro.

Soit $\epsilon > 0$ et soit $j \in \{0, ..., n\}$. D'après le lemme 2.2, ils existent $E_j, F_j \subset]1, +\infty[$ de mesures logarithmiques finies, tels que

$$\left|\frac{A_j(z)\exp\{p_j(z) - \alpha_j z^k\}}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\},\ \forall |z| = r \notin [0,1] \cup E_j, \tag{3.22}$$

$$\left|\frac{D_j(z)}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \leq \exp\{r^{\sigma+\epsilon}\},\ \forall |z| = r \notin [0,1] \cup F_j, \tag{3.23}$$

On pose $G = \bigcup\limits_{j=1}^{n}(E_j \cup F_j)$, alors les relations (3.22) et (3.23) sont vérifiées pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup G$.

D'autre part, d'après le lemme 2.2, il existe $H \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie, tel que, pour tout $|z| = r \notin [0,1] \cup H$, on a

$$\left|\frac{f(z+j)}{f(z+s)}\right| \leq \exp\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}\},\ \forall j \in \{0, ..., n\}. \tag{3.24}$$

Comme α_j sont des nombres complexes distincts, il existe un seul $s \in \{0, ..., n\}$ tel que $\delta(\alpha_s z^k, \theta) = \max\{\delta(\alpha_j z^k, \theta), j = 0, ..., n\}$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[\backslash E$. maintenant on prend $z = re^{i\theta_0}$, avec $r \notin [0,1] \cup G \cup H$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[\backslash E$ tel que $\delta_1 = \delta(\alpha_s z^k, \theta_0) > 0$, $\delta_2 = \max\{\delta(\alpha_j z^k, \theta_0), j = 0, ..., n, j \neq s\}$, alors on a $\delta_1 > \delta_2$ et nous distinguons les cas suivant

Cas 1. $\delta_2 < 0$. On choisit $0 < \epsilon < \min\{k + 1 - \rho(f), k - \alpha\}$, en utilisant les relations (3.22), (3.23) et (3.24), on a

$$\begin{aligned}
\exp\{\delta_1 r^k\} &\leq |e^{\alpha_s z^k}| \\
&\leq \sum_{j=0, j\neq s}^{n} \left|\frac{A_j(z)}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \left|e^{p_j(z)}\right| \left|\frac{f(z+j)}{f(z+s)}\right| \\
&+ \sum_{j=0, j\neq s}^{n} \left|\frac{D_j(z)}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \left|\frac{f(z+j)}{f(z+s)}\right| + \left|\frac{D_s(z)}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \\
&= \sum_{j=0, j\neq s}^{n} \left|\frac{A_j(z)\exp\{p_j(z) - \alpha_j z^k\}}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \left|e^{\alpha_j z^k}\right| \left|\frac{f(z+j)}{f(z+s)}\right| \\
&+ \sum_{j=0, j\neq s}^{n} \left|\frac{D_j(z)}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \left|\frac{f(z+j)}{f(z+s)}\right| + \left|\frac{D_s(z)}{A_s(z)\exp\{p_s(z) - \alpha_s z^k\}}\right| \\
&\leq n\exp\left\{r^{\rho(f)-1+\epsilon} + r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\left\{\delta_2 r^k\right\} + (n+1)\exp\left\{r^{\rho(f)-1+\epsilon} + r^{\sigma+\epsilon}\right\} \qquad (3.25) \\
&\leq (2n+1)\exp\left\{r^{\rho(f)-1+\epsilon} + r^{\sigma+\epsilon}\right\}.
\end{aligned}$$

Contradiction.

Cas 2. $\delta_2 > 0$. De (3.25), on a

$$\exp\{\delta_1 r^k\} \leq (2n+1)\exp\left\{r^{\rho(f)-1+\epsilon} + r^{\sigma+\epsilon}\right\}\exp\left\{\delta_2 r^k\right\}$$

Alors

$$\exp\{(\delta_1-\delta_2)r^k\} \le (n+1)\exp\left\{r^{\rho(f)-1+\epsilon}+r^{\sigma+\epsilon}\right\},$$

ce qui est une contradiction. □

3.3.1 Equations aux différences non homogènes

Dans cette partie, on donne quelques propriétés des solutions méromorphes de l'équation non homogène associée à l'équation (3.21) :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z)f(z+j) = F(z), \tag{3.26}$$

où $F(z)$ est une fonctions méromorphe non nulle.

Théorème 3.3.2. *Supposons que les coefficients de l'équation* (3.26) *satisfont les hypothèses du théorème 3.3.1 et $\rho(F) < k$, alors : au plus une solution méromorphe f_0 de l'équation* (3.26) *satisfait $k \le \rho(f_0) < k+1$ et* $\max\{\lambda(f_0), \lambda(\frac{1}{f_0})\} = \rho(f_0)$. *Les autres solutions f satisfont $\rho(f) \ge k+1$.*

Preuve.

Soit $f(z)$ une solution méromorphe non nulle de l'équation (3.26). On suppose que $\rho(f) < k$, alors d'après le lemme 3.2 et l'équation (3.26) on obtient

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{n} A_j(z)e^{p_j(z)}f(z+j)\right) = k = \rho\left(F(z) - \sum_{j=0}^{n} D_j(z)f(z+j)\right).$$

ce qui contredit $\rho\left(F(z) - \sum_{j=0}^{n} D_j(z)f(z+j)\right) < k$, donc on a $\rho(f) \ge k$.

Supposons qu'il existe deux solutions méromorphes distincts $f_1 \not\equiv 0$, $f_2 \not\equiv 0$ de l'équation (3.26) telles que $\max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\} < k+1$, alors $f_1 - f_2$ est une solution méromorphe de l'équation aux différences homogène associée à (3.26) et $\rho(f_1 - f_2) < k+1$. En appliquant le Théorème 3.3.1 on obtient une contradiction. Donc l'équation (3.26) admet au plus une solution méromorphe f_0 qui satisfait $k \le \rho(f_0) < k+1$.

Dans ce qui suit on va montrer que $\max\{\lambda(f_0), \lambda(\frac{1}{f_0})\} = \rho(f_0)$. Dans le cas $\rho(f_0) = k$, on suppose que $\max\{\lambda(f_0), \lambda(\frac{1}{f_0})\} < \rho(f_0)$, alors par la factorisation de Weierstrass, on obtient

$$f_0(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}e^{Q(z)}, \tag{3.27}$$

où $p_1(z)$, $p_2(z)$ sont des fonctions entières telles que $\rho(p_1) = \lambda(p_1) = \lambda(f_0)$, $\rho(p_2) = \lambda(p_2) = \lambda(\frac{1}{f_0})$ et $Q(z)$ est un polynôme de degré k. En remplaçant (3.27) dans (3.26), on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(z)\frac{p_1(z+j)}{p_2(z+j)}e^{p_j(z)+Q(z+j)} + \sum_{j=0}^{n} D_j(z)\frac{p_1(z+j)}{p_2(z+j)}e^{Q(z+j)} = F(z). \tag{3.28}$$

Comme on a α_j $j = 0, ..., n$ sont des nombres complexes distincts, on peut appliquer le lemme 3.2, pour trouver que l'ordre du membre gauche de l'équation (3.28) est égal à k. Ce qui contredit $\rho(F) < k$.

Il est évident que $\max\{\lambda(f_0), \lambda(\frac{1}{f_0})\} = \rho(f_0)$ si $k < \rho(f_0) < k+1$. Donc, on a

$$\max\{\lambda(f_0), \lambda(\frac{1}{f_0})\} = \rho(f_0).$$

□

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans notre travail, nous avons étudié quelques propriétés de la solution méromorphe de l'équation différentielle

$$\sum_{j=1,j\neq m}^{n} A_j(z)f^{(j)}(z) + A_m(z)e^{p_m(z)}f^{(m)}(z) + \left(A_0(z)e^{p(z)} + B_0(z)e^{q(z)}\right)f(z) = 0, \quad (3.29)$$

où k, m, n sont des entiers naturels tels que $k \geq 1$, $n \geq 2$ et $1 \leq m \leq n$, $B_0(z)$, $A_0(z), \cdots, A_n(z)$ sont des fonctions méromorphes telles que $A_0A_mA_nB_0 \not\equiv 0$
et $\max\{\rho(B_0), \rho(A_0), \cdots, \rho(A_n)\} < k$, $p(z)$, $q(z)$, $p_m(z)$ sont des polynômes de degré k.

On a pris une solution méromorphe non nulle de l'équation (3.29) et on a commencé par l'étude de $\rho(f)$. On a prouvé que ce dernier tend vers l'infini. Ce résultat nous a permis d'étudier $\rho_2(f)$ (car si $\rho(f) < \infty$, alors $\rho_2(f) = 0$). On a démontré que

$$\rho_2(f) = k = \rho(e^{P(z)}) = \rho(e^{Q(z)}) = \rho(e^{P_m(z)}). \quad (3.30)$$

Ce résultat montre l'importance de notre étude. Il explique la relation qui existe entre la solution $f(z)$ et les coefficients de l'équation (3.29).
D'autre part, si on pose $\mathcal{A}_0(z) = A_0(z)e^{p(z)}$, $\mathcal{B}_0(z) = B_0(z)e^{q(z)}$, $\mathcal{A}_m(z) = A_m(z)e^{p_m(z)}$, et $\mathcal{A}_j(z) = A_j(z)$ pour $j = 1, ..., n; j \neq m$, alors, l'équation (3.29) devient

$$\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j(z)f^{(j)}(z) = 0. \quad (3.31)$$

Si l'équation en question est l'équation (3.31), alors d'après les égalités (3.30). Sachant que $\max_{0\leq j\leq n}\{\rho(\mathcal{A}_j)\} = k$, on a

$$\rho_2(f) = \max_{0\leq j\leq n}\{\rho(\mathcal{A}_j)\}.$$

Ces résultats sont obtenus en utilisant quelques propriétés de la fonction exponentielle complexe qui est une fonction entière. Dans le domaine d'analyse p-adique $\mathbb{C}_p$, la fonction exponentielle n'est pas une fonction entière. On ne peut pas donc étudier une équation de la forme (3.29) dans $\mathbb{C}_p$. Mais à partir de la formule (3.31), on peut définir, dans le cas p-adique, une équation plus générale de la forme

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x) f^{(j)}(x) = 0, \tag{3.32}$$

où a_0, a_1, ... a_n sont des fonctions méromorphe p-adiques d'ordre fini. Ce que nous prévoyons dans des travaux futurs, est d'essayer d'étudier l'équation (3.32). Plus particulièrement, on va étudier l'ordre de croissance et le second ordre de croissance p-adiques de la solution méromorphe non nulle de l'équation (3.32). Notre but essentiel est de comparer les résultats obtenus dans $\mathbb{C}_p$ à ceux qui sont obtenus dans le cas complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. J. Ablowitz, R. Halburd and B. Herbst, *On the extension of the Painlevé property to difference,* Nonlinearity 13 (2000), 889-905.

[2] J. M. Anderson and J. Clunie, *Slowly Growing Meromorphic Functions,* Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 40, Issue 1 (1965), pp 267-280.

[3] S. Bank, *On the value distribution theory for entire solutions of second-order linear differential equations*, Proc. London Math. Soc. (3), 50 (1985), 505-534.

[4] D. C. Barnett, R. G. Halburd, R. J. Korhonen and W. Morgan, *Nevanlinna theory for the q-difference operator and meromorphic solutions of q-difference equations,* Nonlinearity 13 (2000), 889-905.

[5] B. Belaïdi, *On the Growth of Solutions of Some Second Order Linear Differential Equations With Entire Coeffcients,* An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 21(2) (2013), 35-52.

[6] W. Bergweiler and H. Bock, *On the growth of meromorphic functions of infinite order,* J. Analyse Math. 64 (1994), 327-336.

[7] W. Bergweiler and A. Eremenko, *On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order,* Rev. Mat. Iberoamericana, 11 (2) (1995), 355-373.

[8] W. Bergweiler, K. Ishizaki and N. Yangihara, *Meromorphic solutions of some functional equations,* Methods Appl. Anal., 5 (3) (1998), pp. 248-259.

[9] W. Bergweiler and J. K. Langley, *Zeros of differences of meromorphic functions,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 142 (2007), pp. 133-147.

[10] W. Bergweiler and X. Pang, *On the derivative of meromorphic functions with multiple zeros,* J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 285-292.

[11] W. Bergweiler and C. C. Yang, *On the value distribution of composite meromorphic functions,* London Math. Soc., 25 (1993), 357-361.

[12] Z. X. Chen, *Growth and zeros of meromorphic solution of some linear difference equations,* J. Math. Anal. Appl. 373 (2011), 235-241.

[13] Z. X. Chen, *On growth, zeros and poles of meromorphic solutions of linear and nonlinear difference equations,* SCIENCE CHINA Mathematics Vol. 54 No. 10 (2011), 2123-2133.

[14] J. Chen, J. Qiao and W. Zhang, *On the meromorphic solutions of some functional equations,* Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 50 (1994), 13-19.

[15] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equation with meromorphic coeficients*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. 21(4) (2005), 753-764.

[16] Z. X. Chen and K. Shon, *Some Results on Difference Riccati Equations,* Acta Mathematica Sinica, English Series , Vol. 27, No. 6 (2011), pp. 1091-1100.

[17] Z. X. Chen, *The growth of solutions of differential equation $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$,* Sci. China Ser. A 31 (9) (2001), 775-784.

[18] W. J. Chen and J. F. Xu, *Growth of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations.*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 1 (2009), 1-13.

[19] Z. X. Chen and C. C. Yang, *Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients*, Southeast Asian Bull. of Math., 23 (1999), 409-417.

[20] Z. X. Chen, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.*, Analysis 14 (1994), 425-438.

[21] Y. M. Chiang and S. J. Feng, *On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions*, Trans. Am. Math. Soc. 361(7) (2009), 3767-3791.

[22] Y. M. Chiang and S. J. Feng, *On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane.* Ramanujan J. 16 (2008), 105-129.

[23] C. T. Chuang and C. C. Yang, *Fix points and factorization of meromorphic functions*, World Scientific (1990).

[24] J. Clunie, A. Eremenko and J. Rossi, *On equilibrium points of logarithmic and Newtonian potentials,* J. London Math. Soc. (2) 47 (1993), 309-320.

[25] A. El farissi and B. Belaïdi, *Complex Oscillation Theory of Differential Polynomials,* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 50, 1 (2011), 43-52.

[26] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of meromorphic functions, plus similar estimates*, J. London Math. Soc., 37, (1988), 88-104.

[27] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations,* Transactions of the american mathematical society, Vol. 305, No. 1 (1988), 415-429.

[28] G. G. Gundersen, E. M. Steinbart, and S. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients,* Transactions of the american mathematical society, Volume 350, No. 3 (1998), P. 1225-1247.

[29] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, *Difference analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with applications to difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 314 (2006), 477-487.

[30] R.G. Halburd and R.J. Korhonen, *Finite-order meromorphic solutions and the discrete Painlevé equations*, Proc. Lond. Math. Soc. 94 (2007), 443-474.

[31] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, *Meromorphic solutions of difference equations, integrability and the discrete Painlevé equations,* J. Phys. A : Math. Theor. 40 (2007), R1-R38.

[32] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Claredon Press, Oxford (1964).

[33] W. K. Hayman, *Slowly Growing Integral and Subharmonic Functions*, Commentarii mathematici Helvetici 34 (1960), 75-84.

[34] W. K. Hayman, *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron Method,* Canad. Math. Bull. Vol. 17 (3), (1974), 317-358.

[35] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo and K. Tohge, *Complex Difference Equations of Malmquist Type,* Computational Methods and Function Theory, Volume 1, No. 1 (2001), 27-39.

[36] J. D. Hinchliffe, *The Bergweiler-Eremenko theorem for finite lower order,* Result. Math. 43 (2003), 121-128.

[37] K. Ishizaki, *An oscillation result for a certain linear differential equation of second order,* Hokkaido Mathematical Joumal Vol. 26 (1997), p. 421-434.

[38] K. Ishizaki, *On difference Riccati equations and second order linear difference equations,* Aequat. Math. 81 (2011), 185-198.

[39] K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Wiman-Valiron method for difference equations,* Nagoya Math. J., Vol. 175 (2004), 75-102.

[40] Y. Jiang and Z. Chen, *On Solutions of q-difference Riccati equations with rational coefficients,* Appl. Anal. Discrete Math. 7 (2013), 314-326.

[41] S. Junji, *On asymptotic values of slowly growing algebroid functions,* Nagoya Math. J. Vol. 41 (1971), 135-148.

[42] Y. Komatu, *The order of the derivative of a meromorphic function,* Proc. Japan Acad. 27, no. 7 (1951), 317-320.

[43] K. H. Kwon, *On the growth of meromorphic functions of infinite order,* J. Korean Math. Soc. 30 (1993), No. 1, pp. 105-122.

[44] I. Laine and C. C. Yang, *Clunie theorems for difference and q-difference polynomials,* J. London Math. Soc. (2) 76 (2007), 556-566.

[45] I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, de Gruyter, Berlin (1993).

[46] S. Li and B. Chen, *Results on meromorphic solutions of linear difference equations*, Adv. Differ. Equ. (2012), Article ID 203.

[47] Y. Liu, *On growth of meromorphic solutions for linear difference equations with meromorphic coeffcients*, Adv. Differ. Equ. (2013), Article ID 60.

[48] H. Liu and Z. Mao, *On the meromorphic solutions of some linear difference equations.* Adv. Differ. Equ. 2013 (2013), Article ID 133.

[49] F. Mesbout and T. Zerzaihi, *On the growth of meromorphic solutions of some higher order linear differential equations,* Turk J Math (accepted).

[50] G. Mora and J. M. Sepulcre, *The Zeros of Riemann Zeta Partial Sums Yield Solutions to f(x)+f(2x)+⋯+ f(nx)=0,* Mediterr. J. Math. 10 (2013), 1221-1233.

[51] F. Peng and Z. X. Chen, *On the growth of solutions of some second-order linear differential equations*, J. Inequal. Appl. (2011), Article ID 635604.

[52] J. Rieppo, *On a class of complex functional equations*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, Volumen 32, (2007), 151-170.

[53] N. Toda, *On the growth of meromorphic solutions of some higher order differential equations,* J. Math. Soc. Japan Vol. 38, No. 3, (1986), 439-451.

[54] S. Toppila, *On the spherical derivative of a meromorphic function with a Nevanlinna deficient value,* Series A. I. Mathematica Volumen 8, (1983), 235-245.

[55] S. Toppila and J. Winkler, *On the Spherical Derivative of a Meromorphic Function with a Valiron Deficient Value,* Math. Z. 180 (1982), 545-551.

[56] J. Wanga and I. Laine, *Growth of solutions of second order linear differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 342 (2008), 39-51.

[57] J. Wang, Growth and poles of meromorphic solutions of some difference equations, J. Math. Anal. Appl. 379 (2011), 367-377.

[58] J. M. Whittaker, *The order of the derivative of a meromorphic function,* J. London Math. Soc. 11 (1936), 82-87, Jbuch 62, 357.

[59] J. F. Xu and H. X. Yi, *Growth and fixed points of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations,* J. Korean Math. Soc. 46(4) (2009), 747-758.

[60] J. Xu and X. Zhang, *Some results of meromorphic solutions of second-order linear differential equations*, J. Inequal. Appl. (2013), Article ID 304.

[61] N. Yanagihara, *Meromorphic Solutions of Some Difference Equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 23 (1980), 309-326.

[62] M. Yang and P. Li, *Meromorphic solutions of certain functional equations,* Taiwanese Journal Of Mathematics Vol. 15, No. 3 (2011), pp. 1037-1057.

[63] P. Yang and S. Nevo, *Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and elliptic functions,* Acta Mathematica Sinica, vol. 29, no. 7 (2013), pp. 1257-1278.

[64] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Kluwer Academic, Dordrecht (2003).

[65] Z. L. Yuan and Q. Ling, *Results on the growth of meromorphic solutions of some linear difference equations with meromorphic coefficients*, Adv. Differ. Equ. (2014), Article ID 306.

[66] X. M. Zhenga and Z. X. Chena, *Some properties of meromorphic solutions of q-difference equations,* J. Math. Anal. Appl. 361 (2010), 472-480.

[67] X. M. Zheng, Z. X. Chen and J. Tu, *Growth of meromorphic solutions of some difference equations,* Appl. Anal. Discrete Math. 4 (2010), 309-321.

[68] X. M. Zheng and J. Tu, *Growth of meromorphic solutions of linear difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), 349-356.

ملخّص

في هذه الأطروحة نهتم بدراسة خواص الحلول الميرومورفية لنوعين من المعادلات الخطيّة ذات الدرجة n؛ النوع الأوّل عبارة عن معادلة تفاضلية أمّا النوع الثّاني فهوّ عبارة عن معادلة ذات الفروق الخطية.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des propriétés des solutions méromorphes non nulles de deux types d'équations linéaires d'ordre n ; le premier est une classe d'équations différentielles et le second est une classe d'équations aux différences.

Abstract

In this thesis, we are interested by the study of nonzero meromorphic solutions of two types of linear equations of order n ; the first is a class of differentials equations and the second is a class of differences equations.