REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique
UNIVERSITE DE JIJEL

N° d'ordre :
Série :

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité Mathématiques Appliquées

Par

Fatine ALIOUANE

Thème

Existence de solutions pour des inclusions différentielles du second ordre gouvernées par le cône proximal dans des espaces de dimension infinie

---

Soutenue publiquement le 24/06/2015

Devant le jury composé de

Président :	**Prof. A. AIBECHE**	Univ. de Sétif 1
Directeur :	**Prof. D. AZZAM-LAOUIR**	Univ. de Jijel
Examinateurs :		
	Prof. M. BOUNKHEL	Univ. King Saoud (Arabie Saoudite)
	Prof. M. YAROU	Univ. de Jijel
	Prof. T. ZERZAIHI	Univ. de Jijel

Remerciements

Je ne peux commencer sans dire Merci au bon Dieu qui m'a donné la volonté, me permettant de mener mon travail jusqu'au bout.

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder, paraît-il ! Alors j'y cède en disant Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis de finaliser ma thèse.

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Madame **le Professeur D. AZZAM-LAOUIR** qui fut pour moi une directrice de thèse attentive et disponible malgrè ses nombreuses responsabilités. Je la remercie de m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant. Son enthousiasme, ses questions pertinentes ont été pour une grande part à l'origine de ma motivation. Ses nombreux conseils et sa bonne humeur ont très largement contribué au bon déroulement de cette thèse. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs dans mes travaux de chercheur.

Je voudrais adresser mes remerciements à Monsieur **le Professeur A. AIBECHE** qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieurs **les Professeurs M. BOUNKHEL, M. YAROU et T. ZERZAIHI** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant d'examiner et de juger cette thèse.

J'en profite pour remercier profondément Monsieur **le Professeur Lionel THIBAULT** pour son accueil chaleureux à l'université de Montpellier II. C'est toujours un grand plaisir de le rencontrer, d'échanger des discussions avec lui, d'écouter ses bons conseils et de bénéficier de

ses connaissances et sa rigueur mathématique.

Bien évidemment, cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'enseignement de qualité que j'ai reçu tout au long de ma formation. J'en profite pour remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui y ont contribué.

J'exprime ici toute ma gratitude à **Mon père** (mon enseignant) qui m'a donné le goût et l'envie de faire les mathématiques. C'est avec son soutien, sa patience en m'écoutant et sa tendresse que je trouve mon équilibre. Sans lui, rien de tout cela n'aurait été possible.

A mon enseignante **Chabou Hayet**, merci pour votre présence à ma soutenance.

A Monsieur le professeur **Nekhoul Bachir**, votre présence m'a fait honneur.

Un grand merci à l'équipe des doctorants avec qui j'ai mené ces années de thèse, plus spécialement à ceux du laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) pour la très bonne ambiance qui y règne.

Je dédie ma thèse :

A mes parents (Messaoud et Zigha Naima) qui m'ont soutenu aussi bien financièrement que moralement tout au long de mes études. A toi papa, pour qui notre avenir compte tant. A toi maman, qui m'a toujours fait confiance dans mes choix. Tu es la femme honnête, juste et agréable aux yeux de tous (comme ils me le disent). Je vous aime.

A mes grand parents (Omar et Khadija)
votre tendresse, votre amour et votre confiance me portent et me guident dans mon quotidien. Je suis fière de vous mes deuxièmes parents.

A ma grande mère (Jouher) Je suis fière d'être votre petite fille. Une pensée à **mon grand père (Mokhtar)** qui n'a pas pu voir l'aboutissement de mon travail, je sais qu'il aurait été fière de moi.

A mes soeurs Loubna et Majda et à notre poulet Omar j'espère que vous suivrez le même chemin mieux encore, je compte sur vous.

A mes oncles, leurs épouses et leurs enfants

Djamel, je n'ai pas oublié mes premiers pas à l'école, tu étais toujours à mes côtés. je te souhaite beaucoup de bonheur à toi et ta famille.

Rezak J'ai vraiment bénéficié de tes conseils.

Moad, **Ilias**, **Bilel**, **Mohamed**, **Azzou**, **Zidou** et **Toufik**, merci à vous.

Smain et sa femme Nadia ainsi qu'à sa famille Merci pour votre accueil en France, votre soutien et vos encouragements m'ont beaucoup aidé. Retrouvez ici ma profonde reconnaissance.

Brahim Tu m'as considéré comme ta soeur non pas nièce. Je te souhaite la réussite dans ta vie privée professionnelle.

Moussa je t'ai toujours cassé la tête. Je te remercie énormément, je n'oublirais jamais ça. A ton chouchou **Kenzi** que j'aime de tout mon coeur.

Mounir. Je n'oublirais jamais ton aide. Merci beaucoup.

A mes tantes (Souad, Chafika et Nadira), leurs maris et leurs enfants.

A ma jumelle **Sophia**, enfin nous avons pu arriver à nos buts...

A mes amies, notamment celles qui vont soutenir bientôt leurs thèses de doctorat (Selma, Moufida, Sihem, Nabila, Amira...), ainsi que celles qui ont choisi l'enseignement depuis déjà quelques années (Fatma, Zineb,...). Loin de mon parcours mathématique, certaines personnes me suivent depuis bien longtemps, maintenant me sont très chères et méritent plus qu'une ligne de remerciements dans ma thèse...

Ma meilleure amie **Karima**, qui m'écoute, me comprend, me fait rire, partage mes joies et mes peines, m'a toujours soutenu...Je lui souhaite une réussite professionnelle et surtout dans sa vie privée.

A mes chères **Djanet et Hana**, je n'oublirais jamais les bon moments qu'on a passé ensemble...

A mes amis **Ahmed, Mehdi, Hamza, Mohamed, Ishak**...

A mes amies d'enfance, la liste serait longue et les feuilles ne vont pas suffir pour citer tous les noms...

Je tourne une page et j'en ouvre une autre : vivement la suite.

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction générale **6**

2 Notations et résultats préliminaires **11**

2.1 Notations 12

2.2 Géométrie des espaces de Banach 14

2.2.1 Notions sur les multi-applications 15

2.2.2 Les multi-applications J_σ 16

2.2.3 Espaces uniformément convexes 18

2.2.4 Espaces uniformément lisses 20

2.2.5 Espaces strictement convexes 22

2.3 Quelques notions sur les espaces de Sobolev 23

2.4 Cônes normaux et sous différentiels 26

2.4.1 Cônes normaux 27

2.4.2 Sous différentiels 29

2.5 Enveloppe locale de Moreau. 30

2.6 Ensembles prox-réguliers 34

2.7 Ensembles uniformément r-prox-réguliers 35

3 Existence de solutions pour une incluion différentielle du second ordre avec une perturbation bornée dans les espaces de Banach **41**

3.1 Ensemble I-lisse faiblement compact 42

3.2 Inclusion différentielle avec une perurbation F semicontinue supérieurement . . . 50

3.3 Inclusion différentielle avec une perturbation F de type Carathéodory 63

4 Existence de solutions pour une incluion différentielle du second ordre avec une perturbation F multivoque à croissance linéaire dans les espaces de Banach **72**

5 Existence de solutions pour une incluion différentielle du second ordre avec une perturbation univoque Lipschitzienne dans un espace de Hilbert **89**

5.1 Caractérisations des ensembles r-prox-réguliers 91

5.2 Etude d'une inclusion différentielle du second ordre dans un espace de Hilbert . 95

CHAPITRE 1

Introduction générale

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour certains processus de la rafle non-convexes.

Le processus de la rafle, en englais "sweeping process" joue un rôle très important en elasto-plasticité, en quasistatique et en dynamique (cf. [50, 52, 65] et leurs références). Un processus de la rafle se compose de deux ingrédients principaux : l'un qui balaie et l'autre qui est balayé. A titre d'exemple, considérons un grand anneau qui contient une petite boule à l'intérieur et supposons que l'anneau va commencer à se déplacer au temps $t = 0$. Selon le mouvement de l'anneau, la boule va juste rester immobile (au cas où elle n'est pas touchée par l'anneau), dans d'autres cas, elle est poussée vers l'intérieur de l'anneau, ici, la vitesse de la boule est dirigée vers l'intérieur de l'anneau de sorte qu'elle ne quitte pas l'anneau voir Fig. 1.1.

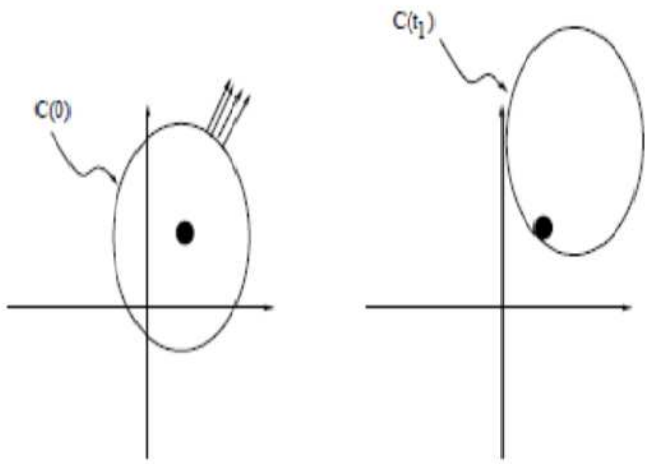

Fig. 1.1 – Processus de la rafle

En termes plus mathématiques, cela se traduit par

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \text{ p.p. dans } [0,T],\ u(0) = u_0 \in C(0), \tag{1.0.1}$$

où $u(t)$ est la position de la boule au temps t, tandis que $C(t)$ représente l'anneau au temps t. L'expression $N_{C(t)}(u(t))$ désigne le cône normal vers l'extérieur de l'ensemble $C(t)$ à la position $u(t)$, donc (1.0.1) dit simplement que la vitesse $\dot{u}(t)$ de la boule doit être dirigée vers l'intérieur de l'anneau pour presque tout temps $t \in [0,T]$. La restriction de presque partout est due au fait que généralement nous ne trouvons pas de solution lisse $t \longmapsto u(t)$ de (1.0.1), mais seulement des solutions absolument continues, et donc qui sont différentiables partout en dehors d'un sous ensemble de $[0,T]$ de mesure nulle. La condition initiale $u_0 \in C(0)$ indique que la boule est initialement contenue dans l'anneau. L'équation (1.0.1) est le cas le plus simple du processus de la rafle introduit par J.J. Moreau vers les années 70 (cf. [54] et ses références). Il a considéré l'inclusion différentielle suivante

$$-\dot{u}(t) \in \partial\psi_{C(t)}(u(t)), \tag{1.0.2}$$

où $\partial\psi_{C(t)}$ est le sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble convexe $C(t)$. Dans ce travail, l'ensemble $C(t)$ est supposé être convexe et donc $\partial\psi_C$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps. Pour résoudre ce problème, J.J. Moreau apporte une nouvelle idée très importante, en proposant un "algorithme de rattrapage". Pour montrer l'existence de solution, il construit des solutions discrétisées en divisant l'intervalle de temps I en sous intervalles où l'ensemble $C(t)$ ne varie pas. Donc, par les arguments subtiles de majoration, il a montré qu'ont peut construire une fonction limite (lorsque la longueur des sous-intervalles tend vers 0) qui satisfait l'inclusion différentielle désirée. En effet, il est bien connu en analyse convexe, d'après la convexité de $C(t)$, que nous avons $\partial\psi_{C(t)}(x) = N_{C(t)}(x)$. C'est donc, le premier résultat d'existence de solution pour le processus de la rafle. Depuis, divers autres travaux ont été développés afin d'obtenir des résultats d'existence de solution dans divers autres contextes. Une première direction consiste à ajouter une perturbation comme suit :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t,u(t)), p.p.\ t \in [0,T] \\ u(t) \in C(t) \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{1.0.3}$$

où $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes.

Un des domaine où ce problème se pose de manière naturelle est celui de l'économie mathématique. En effet, pour étudier un problème de planification, Henry [42] avait introduit

l'inclusion différentielle

$$\dot{u}(t) \in P_{T_K(u(t)}F(u(t)),\ u(0) = u_0 \in K, \tag{1.0.4}$$

où K est un convexe fermé non vide dont le cône tangent en $u \in K$ est noté $T_K(u)$. Quelques années plus tard, ce problème avait été relié, d'une certaine manière, par Cornet (voir [35] et [36]) et Henry à l'existence d'une solution de l'inclusion différentielle

$$\dot{u}(t) \in -N_K(u(t)) + F(u(t)),\ u(0) = u_0 \in K, \tag{1.0.5}$$

laquelle est de la forme (1.0.3).

En mécanique une perturbation $F \not\equiv \{0\}$ peut être interprétée comme une contribution de forces externes.

Dans le cadre d'une multi-application $C(.)$ non convexe, mais avec $F \equiv \{0\}$, l'existence de solution pour le problème (1.0.3) peut être établie via les méthodes utilisées par Castaing [22], par la translation d'un ensemble non convexe indépendant de t par un vecteur dépendant du temps.

Dans [64], M. Valadier a traité le processus de la rafle avec l'ensemble $C(t) = \mathbb{R}^n \backslash int(K(t))$ où $K(t)$ est un convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Puis dans [27], C. Castaing, T.X. Dúc Hā et M. Valadier ont étudié le problème perturbé en dimension finie ($E = \mathbb{R}^n$) avec l'ensemble $C(t)$ convexe (ou complément d'ensemble convexe). Dans ce cadre, ils ont prouvé l'existence de solution pour (1.0.3) en supposant que $C(.)$ est une multi-application Lipschitzienne. Plus tard dans [23], C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques ont considéré des problèmes similaires en supposant la semicontinuité supérieure de F et une "croissance linéaire compacte"

$$F(t,x) \subset \beta(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}(0,1);\ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n. \tag{1.0.6}$$

De plus, la multi-application C est supposée Hausdorff continue et satisfait une "condition de boule intérieure"

$$\exists r > 0;\ \mathbf{B}(0,r) \subset C(t),\ \forall t \in I. \tag{1.0.7}$$

Puis, l'existence de solution pour (1.0.1) a été établie en dimension finie pour les fermés $C(t)$ quelconques avec le cône de Clarke par H. Benabdellah dans [7] et par G. Colombo et V. V. Goncharov dans [33] ; dans le même contexte en dimension finie l'existence de solution de (1.0.3) avec un fermé quelconque $C(t)$ est démontrée par L. Thibault [63].

Par la suite, en dimension infinie la convexité des ensembles $C(t)$ a été remplacée par la notion de "prox-régularité uniforme". Cette propriété est très bien adaptée à la résolution de (1.0.3). Un ensemble fermé S est dit r-prox-régulier si la projection sur S est univoque et continue en tout point dont la distance à S est inférieure à r.

De nombreux travaux ont été consacrés à des applications de prox-régularité dans l'étude de processus de la rafle. Le cas sans perturbation ($F \equiv 0$) a été d'abord traité par G. Colombo, V.V. Goncharov dans [33], et ensuite par L. Thibault dans [63] et par G. Colombo, M.D.P. Monteiro Marques dans [32].

L'existence et l'unicité de solution de (1.0.1) ont été montré par les même arguments que précédemment. Dans les espaces de Hilbert de dimension infinie, le problème perturbé (1.0.3) est étudié par M. Bounkhel et L. Thibault, J.F. Edmond et L. Thibault dans [18, 39, 40, 63].

Dans [40], les auteurs montrent que le problème suivant est bien posé

$$\begin{cases} -du \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t))dt, \\ u(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.0.8}$$

si la multi-application C est à valeurs r-prox-régulières (pour tout $r > 0$) et vérifie

$$\mid d\big(y, C(t)\big) - d\big(y, C(s)\big) \mid \leq \mu(]s, t[), \ \forall y \in H, \ \forall s, t \in I \ s \leq t, \tag{1.0.9}$$

où μ est une mesure positive qui satisfait

$$\sup_{s \in I} \mu(\{s\}) < \frac{r}{2}. \tag{1.0.10}$$

La preuve utilise l'algorithme développé par J.J. Moreau avec des arguments supplémentaires pour se servir de l'hypothèse de prox-régularité.

En effet, la difficulté principale de ce problème est la continuité du cône normal proximal. Pour un sous ensemble fermé fixe S, la multi-application $x \longmapsto N_S(x)$ n'est pas s.c.s., ce qui est nécessaire pour la preuve. La prox-régularité fournit cette semi-continuité.

H. Benabdellah [8], traite le processus de la rafle dans le cadre d'espace de Banach, en supposant que le cône normal de Clarke satisfait la propriété de la s.c.s.

La version du second ordre de (1.0.3) a fait l'objet de divers articles (voir [5, 15, 16, 17]...).

Notons que tous les résultats cités dessus ont été obtenus dans le cas de dimension finie ou dans les espaces de Hilbert. Récemment, certaines extensions des processus de la rafle convexe ont été étudiées dans les espaces de Banach dans [8, 10, 14, 16, 50]...

Après cette description des résultats d'existence pour les processus de la rafle, nous arrivons à notre contribution dans cette thèse qui est constituée de 5 chapitres. Dans le premier chapitre on présente une introduction générale. Le deuxième chapitre est consacré à quelques résultats préliminaires concernant la géométrie des espaces de Banach, nous présentons aussi une propriété de la r-prox-régularité nécéssaire pour la démonstration de nos résultats d'existence. Dans le troisième chapitre, nous montrons un résultat d'existence dans un espace de Banach

séparable pour le processus de la rafle du second ordre suivant :

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), \ \forall t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

où $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes fermées telle que

$$F(t, x, y) \subset m\overline{\mathbf{B}}, \ \forall (t, x, u) \in I \times E \times E$$

et K une E-multi-application à valeurs non vides et boule-compactes. Dans un premier temps, nous donnons un résultat d'existence dans le cas où la perturbation F est s.c.s., ensuite nous étudions le cas où F est de type Carathéodory. Dans le quatrième chapitre nous reprenons le même problème, et un résultat dans le cas où la perturbation F est à croissance linéaire i.e.

$$F(t, x, u) \subset (1 + \|x\| + \|u\|)\overline{\mathbf{B}}_E, \ \forall (t, x, u) \in I \times E \times E$$

est établi.

Le cinquième chapitre voit l'étude du problème $(\mathcal{P}_F)$ dans le cas d'un espace de Hilbert et avec une perturbation F univoque, disons f, que nous supposons Lipschitzienne. La démonstration de ce résultat est donnée par deux méthodes différentes. La première consiste à étudier directement l'existence de soltusions via l'algorithme de discrésation, tandis que dans la deuxième on ramène le problème considéré à un problème du premier ordre.

Notons que les résultats du troisième chapitre ont fait l'objet d'une publication dans le journal "Topological Methods in Nonlinear Analysis" voir [2]. La publication du résultat du quatrième chapitre est acceptée dans "Journal of Algerian Mathematical Society". Enfin, les résultats du dernier chapitre sont soumis dans une revue internationale.

CHAPITRE 2

Notations et résultats préliminaires

Sommaire

2.1 Notations **12**

2.2 Géométrie des espaces de Banach **14**

2.2.1 Notions sur les multi-applications 15

2.2.2 Les multi-applications J_σ 16

2.2.3 Espaces uniformément convexes 18

2.2.4 Espaces uniformément lisses 20

2.2.5 Espaces strictement convexes 22

2.3 Quelques notions sur les espaces de Sobolev **23**

2.4 Cônes normaux et sous différentiels **26**

2.4.1 Cônes normaux 27

2.4.2 Sous différentiels 29

2.5 Enveloppe locale de Moreau. **30**

2.6 Ensembles prox-réguliers **34**

2.7 Ensembles uniformément r-prox-réguliers **35**

Dans ce chapitre on se propose à donner quelques résultats qui nous seront utiles dans la démonstration de nos résultats d'existence de solutions. Dans un premier temps, on rappelle quelques notions concernant la géométie des espaces de Banach. Après, nous donnons une notion très importante de la prox-régularité d'un ensemble fermé C de E.

La prox-régularité d'un ensemble C au point $x \in C$ est une condition variationelle reliée au vecteur normal. Dans le context des espaces de Banach uniformément convexes, la prox-régularité d'un ensemble fermé C au point x a été montrée être équivalente à la différentiablilité de la fonction distance en dehors de C pour un voisinage de x.

Des caractéristiques additionelles sont données en terme de l'application de projection. On examine aussi la différentiabilité de la fonction distance sur le tube ouvert autour de C.

2.1 Notations

Soient E un espace de Banach, E^* son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité et $\|.\|$ la norme de E.

On note par

- $\sigma(E, E^*)$ (resp. $\sigma(E^*, E)$) la topologie faible (resp. faible*) sur E (resp. E^*).
- $\overline{\mathbf{B}}_E(0, r)$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon r, $\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E et $\mathbf{S}_E$ la sphère unité de E.
- $\mathbf{C}_E([0, T])$ $(T > 0)$ l'espace de Banach des applications continues $u : [0, T] \to E$, muni de la norme-sup $\|.\|_{\mathbf{C}}$, et $\mathbf{C}^1_E([0, T])$ l'espace de Banach des applications continues $u : [0, T] \to E$ ayant une dérivé continue, muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

- $\mathcal{L}([0, T])$ la tribu de Lebesgue sur $[0, T]$.
- $\lambda(.)$ la mesure de Lebesgue.
- $(\mathbf{L}^1_E([0, T]), \|.\|_1)$ l'espace des applications Lebesgue-Bockner intégrables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace de Banach E, c'est à dire, les applications f Lebesgue-Bockner intégrables et telles que $\int_{[0,T]} f d\lambda$ est finie.
- $(\mathbf{L}^\infty_E([0, T]), \|.\|_\infty)$ est l'espace de Banach des applications f essentiellement bornées sur E.
- On dit qu'une application $u : [0, T] \to E$ est absolument continue s'il exite une application $v \in \mathbf{L}^1_E([0, T])$ telle que $u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)ds$, $\forall t \in [0, T]$, dans ce cas $v = \dot{u}$ p.p.

– $l^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$ désigne l'espace de Lebesgue défini par

$$l^p(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Z}/ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$
$$l^\infty(\mathbb{Z}) = \{(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Z}/ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty\}.$$

– Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

– $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.

– $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions test.

– $\mathcal{D}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions sur Ω.

– $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme $\|.\|_{m,p}$ définie par

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \; si \; 1 \leq p < \infty$$
$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \; si \; p = \infty.$$

– Pour $A \subset E$, $co(A)$ est l'enveloppe convexe de A et $\overline{co}(A)$ son enveloppe convexe fermée. Nous avons la caractérisation suivante

Théorème 2.1.1 *Soit K un sous ensemble non vide de E. Alors,*

$$\overline{co}(K) = \{x \in E/ \; \forall x^* \in E^*; \langle x^*, x\rangle \leq \delta^*(x^*, K)\},$$

où $\delta^*(x^*, K)$ est la fonction support associée à K, i.e.,

$$\delta^*(x^*, K) = \sup_{y\in K} \langle x^*, y\rangle.$$

– ψ_C la fonction indicatrice de l'ensemble C définie par

$$\psi_C(x) = \begin{cases} 0 & si \; x \in C; \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Pour tous sous ensembles fermés A et B de E, la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \sup(e(A, B), e(B, A))$$

où

$$e(A, B) = \sup_{a\in A} d(a, B)$$

est l'écart entre A et B et

$$d(a, B) = \inf_{x\in B} \|a - x\|.$$

On rappelle que pour un sous ensemble convexe fermé A de E, on a

$$d(x, A) = \sup_{x^*\in\overline{\mathbf{B}}_{E^*}} \Big(\langle x^*, x\rangle - \delta^*(x^*, A) \Big). \tag{2.1.1}$$

2.2 Géométrie des espaces de Banach

Dans cette section, nous explorons les propriétés géométriques des espaces de Banach qui jouent un rôle crucial dans l'étude des algorithmes itératifs pour des opérateurs non linéaires. Les résultats présentés sont standards et peuvent être trouvés dans la littérature, voir par exemple [28], [38]...

Soient $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ deux espaces normés. On désigne par f une application définie sur une partie Ω de X à valeurs dans Y. On supposera que Ω est ouvert. Pour $x_0 \in X$ fixé, on note par $\mathbf{S}(x_0, r)$ la sphère centrée en x_0 et de rayon r, i.e.,

$$\mathbf{S}(x_0, r) = \{x \in X,\ \|x - x_0\| = r\}.$$

Définition 2.2.1 ***(Dérivées directionnelles)*** *On dit que f a une dérivée directionnelle au point $x \in \Omega$ (ici Ω n'est pas forcément ouvert) dans la direction $h \in X$ si, pour $t > 0$ suffisamment petit, $x + th \in \Omega$ et si la limite*

$$f'(x; h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + th) - f(x)\big)$$

existe.

Remarque 2.2.2 *Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pourra admettre des dérivées directionnelles valant ∞, c'est-à-dire de prendre la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Définition 2.2.3 ***(Gâteaux différentiabilité)***
On dit qu'une fonction f est Gâteaux-différentiable au point $x \in \Omega$ si elle admet une dérivée directionnelle en x suivant toutes les directions $h \in X$ et si l'application

$$h \in X \longrightarrow f'(x; h) \in Y$$

est linéaire continue. On note $\nabla f(x)$ cet opérateur.

Définition 2.2.4 ***(Fréchet différentiabilité)*** *On dit que f est Fréchet-différentiable au point $x \in \Omega$ s'il existe un opérateur linéaire continu L de X dans Y tel que*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|}\big(f(x + h) - f(x) - Lh\big) = 0.$$

L'opérateur L est appelé dérivée de f en x.

La notion de Fréchet différentiabilité est plus forte que celle de Gâteaux différentiabilité. Nous avons la propriété suivante : si $f : \Omega \to Y$ est F-différentiable au point $x \in \Omega$ avec une dérivée L, alors f est G-différentiable au point x et on a $L = f'(x)$.

Définition 2.2.5 ***(Norme uniformément Fréchet différentiable)***
On dit que la norme de X est uniformément Fréchet différentiable (loin de zéro) ssi,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|x+hy\| - \|x\|}{h}$$

existe uniformément pour $x, y \in \mathbf{S}_X$.

Définition 2.2.6 *Un sous ensemble $A \subset E$ est dit boule-compact si pour toute boule fermée $\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}(x, R)$ de E, l'ensemble $\overline{\mathbf{B}} \cap A$ est compact.*

Il est clair que, tout boule-compact A est fermé. En effet,
soit (x_n) une suite de A qui converge vers x, on montre que $x \in A$. On a (x_n) converge dans A, donc elle est bornée i.e. il existe $\alpha > 0$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A \cap \overline{\mathbf{B}}(0, \alpha)$ qui est compact, donc on peut extraire une sous suite qui converge vers x et par suite A est fermé. ■

2.2.1 Notions sur les multi-applications

Nous donnons dans cette section quelques définitions concernant les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multifonctions.

Définition 2.2.7 *Soient T, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur T à valeurs dans Y, toute application de T ayant sa valeur dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble des parties de Y). On note*

$$\begin{aligned} F : T &\rightrightarrows Y \\ t &\mapsto F(t) \end{aligned}$$

c'est à dire, pour tout $t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de Y.

- *On appelle domaine de F qu'on note $D(F)$ l'ensemble suivant $D(F) = \{t \in T : F(t) \neq \emptyset\}$.*
- *On appelle image de F qu'on note $R(F)$ l'ensemble $R(F) = \{x \in Y / \exists t \in T, x \in F(t)\}$.*

Définition 2.2.8 *Soit $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application, on appelle graphe de F qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $T \times Y$ défni par $gph(F) = \{(t, y) \in T \times Y : y \in F(t)\}$.*

Les concepts de multi-applications semi continues ont été introduits en 1932 par G. Bouligand et par K. Kuratowski. On définit ici les multi-applications semi continues supérieurement.

Définition 2.2.9 *Soient T, Y deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

On dit que F est semi continue supérieuremnet (s.c.s. en abrégé) au point t_0 si et seulement si pour tout ouvert $U \subset Y$ contenant $F(t_0)$ i.e. $F(t_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$ i.e. $F(z) \subset U$, pour tout $z \in \Omega$.

On dit que F est s.c.s. sur T si elle est s.c.s. en tout point de T.

Corollaire 2.2.10 *Soit F une multi-application définie d'un espace métrique X à valeurs dans un espace normé Y semicontinue supérieurement à valeurs compactes, alors la fonction $(x, q) \in X \times Y^* \mapsto \delta^*(F(x), q)$ est s.c.s.*

Cette propriété reste vrai si Y est muni de la topologie faible. On peut avoir l'inverse si F est à valeurs convexes compactes.

Théorème 2.2.11 *Soient $F : T \rightrightarrows Y$ et $G : T \rightrightarrows Y$ deux multi-applications telles que pour tout $t \in T$: $F(t) \cap G(t) \neq \emptyset$. On suppose que*

- *F est s.c.s. au point $t_0 \in T$*
- *$F(t_0)$ est compact*
- *le graphe de G est fermé.*

Alors, la multi-application $F \cap G$ est s.c.s. au point t_0.

Corollaire 2.2.12 *Soit $G : T \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides avec Y un espace compact. Si le graphe de G est fermé alors G est s.c.s.*

2.2.2 Les multi-applications J_σ

Ces multi-applications ont fait leur apparition dans l'étude de la prox-régularité d'un ensemble, par exemple dans le travail de F. Bernard, L. Thibault et N. Zlateva (voir [12]). On peut consulter aussi le travail de Z. B. Xu et G. F. Roach [67] pour plus de détails sur ces applications dans un cadre abstrait.

Définition 2.2.13 *Pour un nombre réel $\sigma > 1$, considérons la multi-application $J_\sigma : E \rightrightarrows E^*$ définie par*

$$J_\sigma(x) = \{x^* \in E^*,\ \langle x^*, x\rangle = \|x\|\|x^*\| \text{ et } \|x^*\| = \|x\|^{\sigma-1}\}.$$

Pour $\sigma = 2$, J_2 sera notée J et on l'appelle multi-application duale normalisée.
Nous avons (par le corollaire du théorème de Hahn-Banach) $\forall x \in E$, $\exists x^* \in E^*$, $\|x^*\| = 1$ et $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$. Soit $y^* = \|x\|^{\sigma-1}x^*$, on a

$$\langle y^*, x\rangle = \langle \|x\|^{\sigma-1}x^*, x\rangle = \|x\|^{\sigma-1}\|x\| = \|y^*\|\|x\|,$$

donc $J_\sigma(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in E$.

Remarque 2.2.14 *1. Pour tout $x \in E$, $J_\sigma(x)$ est convexe.*

En effet, soient $x^*, y^* \in J_\sigma(x)$, $\alpha \in [0, 1]$ on a

$$x^* \in J_\sigma(x) \Leftrightarrow \|x^*\| = \|x\|^{\sigma-1} \text{ et } \langle x^*, x\rangle = \|x\|\|x^*\| = \|x\|^\sigma$$

$$y^* \in J_\sigma(x) \Leftrightarrow \|y^*\| = \|x\|^{\sigma-1} \text{ et } \langle y^*, x\rangle = \|x\|\|y^*\| = \|x\|^\sigma.$$

D'autre part, on a

$$\langle \alpha x^* + (1-\alpha)y^*, x\rangle \leq \|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\|\|x\|.$$

De plus,

$$\langle \alpha x^* + (1-\alpha)y^*, x\rangle = \alpha\langle x^*, x\rangle + (1-\alpha)\langle y^*, x\rangle = \|x\|^\sigma,$$

ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\|x\|^{\sigma-1} \leq& \|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\| \\ \leq& \alpha\|x^*\| + (1-\alpha)\|y^*\| \\ =& \alpha\|x\|^{\sigma-1} + (1-\alpha)\|x\|^{\sigma-1} = \|x\|^{\sigma-1}.\end{aligned}$$

Donc, $\langle \alpha x^* + (1-\alpha)y^*, x\rangle = \|x\|^\sigma = \|x\|\|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\|$ *ce qui implique que,*

$$\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in J_\sigma(x),\ \forall x \in E.$$

2. *La multi-application inverse de* J_σ *sera notée* J_σ^{-1} *et on a pour tout* $x \in E$, $x^* \in J_\sigma(x) \Leftrightarrow x \in J_\sigma^{-1}(x^*)$. *Si* $\sigma = 2$, *la multi-application inverse* J^{-1} *de* J *sera notée* J^*.
3. *Pour tout* $t \geq 0,\ J_\sigma(tx) = t^{\sigma-1}J_\sigma(x)$.
4. *La multi-application* J_σ *est le sous différentiel de la fonction convexe* $\frac{1}{\sigma}\|.\|^\sigma$ *i.e.* $J_\sigma = \partial(\frac{1}{\sigma}\|.\|^\sigma)$. *En effet, soit* φ_σ *la fonction convexe définie par*

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma : E \to& \mathbb{R} \\ x \mapsto& \varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma}\|x\|^\sigma.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\partial\varphi_\sigma(x) = \{x^* \in E^*,\ \varphi_\sigma(y) \geq \varphi_\sigma(x) + \langle x^*, y-x\rangle,\ \forall y \in E\} = A(x).$$

On montre que $A(x) = J_\sigma(x)$, *pour* $\sigma > 1$ *et* $x \in E$.

– *Si* $x = 0$, *on a* $J_\sigma(0) = \{0\} = A(0)$.
– *Si* $x \neq 0$, *on montre que* $A(x) \subset J_\sigma(x)$.
  Soit $x^* \in A(x)$, *i.e.,*

$$\langle x^*, y-x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma - \frac{1}{\sigma}\|x\|^\sigma,\ \forall y \in E. \tag{2.2.1}$$

  • *Pour* $y = \lambda x$ *avec* $\lambda > 1$, *on aura par la relation (2.2.1),*

$$\langle x^*, x\rangle \leq \frac{\lambda^\sigma - 1}{\sigma(\lambda-1)}\|x\|^\sigma,\ \forall \lambda > 1.$$

Faisant tendre λ vers 1, on trouve

$$\langle x^*, x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}\lim_{\lambda\to 1}\frac{\lambda^\sigma - 1}{\lambda - 1}\|x\|^\sigma = \|x\|^\sigma. \tag{2.2.2}$$

• *Pour $y = (1-\lambda)x$, avec $\lambda > 0$ on aura $-\lambda\langle x^*, x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}((1-\lambda)^\sigma - 1)\|x\|^\sigma$ ce qui est équivalent à $\langle x^*, x\rangle \geq \frac{(1-(1-\lambda)^\sigma)}{\sigma\lambda}\|x\|^\sigma$. Faisant tendre λ vers 0, on obtient*

$$\langle x^*, x\rangle \geq \|x\|^\sigma. \tag{2.2.3}$$

De (2.2.2) et (2.2.3), on déduit que

$$\langle x^*, x\rangle = \|x\|^\sigma. \tag{2.2.4}$$

D'autre part, prenons $y \in E$ tel que $\|y\| \leq \|x\|$. Par la relation (2.2.1), on a

$$\langle x^*, \frac{y}{\|x\|}\rangle \leq \|x\|^{\sigma-1},$$

donc $\langle x^*, z\rangle \leq \|x\|^{\sigma-1}$, $\forall z \in \overline{\mathbf{B}}_E$ alors $\|x^*\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1}|\langle x^*, z\rangle| \leq \|x\|^{\sigma-1}$,
d'où, $\|x^*\| = \|x\|^{\sigma-1}$, ce qui prouve que $A(x) \subset J_\sigma(x)$.
Montrons maintenant que $J_\sigma(x) \subset A(x)$.
Fixons $x^* \in J_\sigma(x)$, considérons la fonction $f(t) = -\ln t$, $t > 0$, qui est une fonction convexe puisque $f''(t) > 0$,i.e.

$$-\ln(\frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma + \frac{\sigma-1}{\sigma}\|x\|^\sigma) \leq -\frac{1}{\sigma}\ln\|y\|^\sigma - \frac{\sigma-1}{\sigma}\ln\|x\|^\sigma,\ \forall y \in E,$$

d'où, $\frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma + \frac{\sigma-1}{\sigma}\|x\|^\sigma \geq \|y\|\|x\|^{\sigma-1}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma - \frac{1}{\sigma}\|x\|^\sigma \geq& \|y\|\|x\|^{\sigma-1} - \|x\|^\sigma\\ =& \|y\|\|x^*\| - \langle x^*, x\rangle\\ \geq& \langle x^*, y - x\rangle,\end{aligned}$$

on obtient $\frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma - \frac{1}{\sigma}\|x\|^\sigma \geq \langle x^*, y - x\rangle$, $\forall y \in E$, ceci implique que $x^* \in A(x)$. D'où, $A(x) = J_\sigma(x)$, $\forall x \in E$.

2.2.3 Espaces uniformément convexes

Définition 2.2.15 ***(Espace uniformément convexe)*** *Un espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dit uniformément convexe ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que si x, $y \in X$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| > \epsilon$, alors $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$.*

C'est à dire, un espace vectoriel normé est uniformément convexe si pour tous points x et y distincts sur la sphère unité centrée à l'origine, le milieu du segment joignant x et y n'est jamais sur la sphère, mais est proche de la sphère si x et y sont suffisamment près l'un de l'autre.

Définition 2.2.16 ***(Module de convexité)*** *On définit la fonction appelée module de convexité d'un espace normé $(X, \|.\|)$ par $\delta_{\|.\|} : (0,2] \to [0,1]$, telle que*

$$\delta_{\|.\|}(\epsilon) := \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\|,\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geq \epsilon\}.$$

Théorème 2.2.17 *Un espace de Banach est uniformément convexe ssi $\delta_{\|.\|}(\epsilon) > 0$, pour tout $\epsilon \in (0,2]$.*

Définition 2.2.18 *On dit que X est q-uniformément convexe ou le module de convexité de la norme est de type puissance ssi pour tout $k \geq 0$, $\delta_{\|.\|}(\epsilon) \geq k\epsilon^q$, pour tout $\epsilon \in (0,2]$.*
Du théorème de Dvoretzky nécessairement $q \geq 0$.

Le théorème suivant affirme l'uniforme convexité des espaces classiques de Lebesgue réflexifs. Ce résultat était à l'origine due à J. Clarkson, il a été établi dans le but de donner des exemples concrets d'espaces possédant la propriété de Radon-Nikodym.

Si X est uniformément convexe et $1 < p < \infty$ alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\frac{x+y}{2}\|^p \leq (1-\delta)(\|x\|^p + \|y\|^p), \tag{2.2.5}$$

pour tous $x, y \in X$ tels que $\|x-y\| \geq \epsilon \max(\|x\|, \|y\|)$.

Théorème 2.2.19 *Les espaces L^p, $1 < p < \infty$ sont uniformément convexes.*

Preuve Soit $\epsilon > 0$ donné, choisissant $\delta > 0$ qu'on fera correspondre à $\epsilon 4^{\frac{-1}{p}}$. Soient $u, v \in L^p(\lambda)$, tels que $\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1$ avec $\|u-v\|_p \geq \epsilon$. On pose

$$M = \{w :\ \epsilon^p(|u(w)|^p + |v(w)|^p) \leq 4|u(w) - v(w)|^p\}.$$

Appliquant (2.2.5), on aura pour presque tout $w \in M$

$$|\ \frac{u(w)+v(w)}{2}\ |^p \leq (1-\delta)(\frac{|u(w)|^p + |v(w)|^p}{2}). \tag{2.2.6}$$

D'autre part, sur M^C on a

$$\int_{M^C} |u(w) - v(w)|^p d\lambda(w) < \frac{\epsilon^p}{4} \int (|u(w)|^p + |v(w)|^p) d\lambda(w) \leq \frac{\epsilon^p}{2}.$$

Utilisant le fait que $\|u-v\|_p \geq \epsilon$, on obtient

$$\int_M |u(w) - v(w)|^p d\lambda(w) \geq \frac{\epsilon^p}{2},$$

i.e., restreignant u, v à M on trouve

$$\|u - v\|_M \geq \epsilon 2^{\frac{-1}{p}}.$$

Donc, $\sup(\|u\|_M, \|v\|_M) \geq \epsilon 2^{\frac{-(1+p)}{p}}$, i.e.,

$$\sup\left(\int_M |u|^p d\lambda, \int_M |v|^p d\lambda\right) \geq \frac{\epsilon^p}{2^{p+1}}. \tag{2.2.7}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\int \left[\left(\frac{|u(w)|^p + |v(w)|^p}{2}\right) - \left(|\frac{u(w)+v(w)}{2}|^p\right)\right] d\lambda(w) \\
&\geq \int_M \left[\left(\frac{|u(w)|^p + |v(w)|^p}{2}\right) - \left(|\frac{u(w)+v(w)}{2}|^p\right)\right] d\lambda(w) \\
&\geq \int_M \left[\left(\frac{|u(w)|^p + |v(w)|^p}{2}\right) + \left((\delta-1)(\frac{|u(w|^p) + |v(w)|^p}{2})\right)\right] d\lambda(w) \\
&= \delta \int_M \frac{|u(w)|^p + |v(w)|^p}{2} d\lambda(w) \geq \delta \frac{\epsilon^p}{2^{p+2}}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\|\frac{u+v}{2}\|^p &= \int |\frac{u(w)+v(w)}{2}|^p d\lambda(w) \\
&\leq \int \frac{|u(w)|^p + |v(w)|^p}{2} d\lambda(w) - \delta \frac{\epsilon^p}{2^{p+2}} \\
&\leq 1 - \delta \frac{\epsilon^p}{2^{p+2}}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. ■

Un résultat intéressant à propos de l'uniforme convexité est le théorème de Milman-Pettis. Pour la preuve on peut référer le lecteur à [47, 59].

Théorème 2.2.20 ***(Milman-Pettis)***
Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

2.2.4 Espaces uniformément lisses

Dans la suite, nous introduisons la classe des espaces lisses. On remarque immédiatement qu'il y a une relation de dualité entre la licissité uniforme et la convexité uniforme. Nous commençons par la définition suivante.

Définition 2.2.21 ***(Espace lisse)*** *Un espace de Banach $(E, \|.\|)$ est dit lisse si pour tout élément non nul $x_0 \in E$, il existe un unique élement $x^* \in E^*$ tel que $\|x^*\| = 1$ et $\langle x^*, x_0\rangle = \|x_0\|$.*

Théorème 2.2.22 *Soit $x_0 \in E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- *E est lisse au point x_0,*
- *la norme de E est Gâteaux différentiable au point x_0.*

Définition 2.2.23 ***(Espace uniformément lisse)*** *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément lisse si sa norme est uniformément Fréchet différentiable.*

Remarque 2.2.24 *Si E est uniformément lisse, alors $\|x\|_E$ est $\mathbf{C}^1_E$ sur $E \setminus \{0\}$.*

Proposition 2.2.25 *Un espace de Banach E est uniformément lisse ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour tous $x, y \in E$ vérifiant $\|x\| = 1,\ \|y\| = \delta$*

$$\|x + y\| + \|x - y\| < 2 + \epsilon\|y\|.$$

Proposition 2.2.26 *Si E est uniformément lisse, alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a*

$$\langle(\nabla\|.\|_X)(x), x\rangle = \|x\|_E.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a $\|(\nabla\|.\|_E)(x)\|_{E^*} = 1$.

Maintenant, sachant que la norme pourrait être non différentiable à l'origine 0, nous étudions la fonction $x \mapsto \|x\|^p$ pour un exposant $p > 1$.

Proposition 2.2.27 *Soient E un espace de Banach uniformément lisse, $p \in (1, \infty)$. Alors la fonction $x \mapsto \|x\|^p$ est $\mathbf{C}^1_E$ sur E.*

Définition 2.2.28 ***(Module de lissicité)*** *On définit la fonction appelée module de lissicité d'un espace normé $(X, \|.\|)$ par $\rho_{\|.\|} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, telle que*

$$\rho_{\|.\|}(\tau) := \sup\left\{\frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\|}{2} - 1,\ \|x\| = \|y\| = 1\right\}.$$

Théorème 2.2.29 *Un espace de Banach est uniformément lisse ssi $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\rho_{\|.\|}(\tau)}{\tau} = 0$.*

Théorème 2.2.30 *Un espace de Banach E uniformément lisse est lisse.*

Preuve

Supposons que E n'est pas lisse, donc il existe $x_0 \in E$ et $x_1^*,\ x_2^* \in E^*$ tels que $x_1^* \neq x_2^*$, $\|x_1^*\| = \|x_2^*\| = 1$ et $\langle x_1^*, x_0\rangle = \|x_0\| = \langle x_2^*, x_0\rangle$. Evidemment, on peut supposer que $\|x_0\| = 1$. Soit $y_0 \in E$ telle que $\|y_0\| = 1$ et $\langle y_0, x_1^* - x_2^*\rangle > 0$. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\begin{aligned}
0 <& \tau\langle y_0, x_1^* - x_2^*\rangle \\
=& \tau(\langle y_0, x_1^*\rangle - \langle y_0, x_2^*\rangle) \\
=& \frac{\langle x_0 + \tau y_0, x_1^*\rangle + \langle x_0 - \tau y_0, x_2^*\rangle}{2} - 1 \\
\leq& \frac{\|x_0 + \tau y_0\| + \|x_0 - \tau y_0\|}{2} - 1,
\end{aligned}$$

alors, $0 < \langle y_0, x_1^* - x_2^*\rangle \leq \frac{\rho_{\|.\|}(\tau)}{\tau}$ pour tout $\tau > 0$ et donc E n'est pas uniformément lisse. ■

Définition 2.2.31 *On dit que E est s-uniformément lisse ou le module de lissicité de la norme est de type puissance $s > 1$ ssi pour tous $c \geq 0$, $\rho_{\|.\|}(\tau) \leq c\tau^s$, $\forall s \in (1, 2]$.*

Théorème 2.2.32 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) la norme de E est uniformément Fréchet différentiable ;

(ii)E est uniformément lisse ;

(iii)E^* est uniformément convexe.

Exemple 2.2.33 *Tout espace de Hilbert H est lisse, uniformément convexe et uniformément lisse.*

Preuve

Soient $\epsilon > 0$, $x, y \in H$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| \geq \epsilon$. Nous avons,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 =& \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - \|x-y\|^2\\ =& 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2\\ \leq& 4 - \epsilon^2.\end{aligned}$$

Donc, pour $\delta = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4-\epsilon^2}$, $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$. Alors, H est uniformément convexe et en vertu des Théorème 2.2.32 et 2.2.30, H est uniformément lisse et donc lisse. ■

2.2.5 Espaces strictement convexes

Définition 2.2.34 *Une norme est dite strictement convexe si et seulement si pour tous éléments non nuls x, y d'un espace vectoriel normé telle que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, il existe $\mu > 0$ tel que $y = \mu x$.*

Théorème 2.2.35 *Tout espace uniformément convexe est strictement convexe et réflexif.*

Remarque 2.2.36

Si E est un espace de Banach uniformément convexe muni d'une norme uniformément convexe et uniformément lisse alors J_σ est univoque. En effet ;
nous avons d'après le Théorème 2.2.35, $\|.\|_{E^*}$ est strictement convexe. Soient $x^*, y^* \in E^*$ tels que $x^*, y^* \in J_\sigma(x)$, $\forall x \in E$. On a, E^* est strictement convexe, donc pour tous $x^*, y^* \in E^*$, $x^* \neq y^*, \forall \alpha \in [0, 1]$;

$$\|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\| < \alpha\|x^*\| + (1-\alpha)\|y^*\| < \|x\|^{\sigma-1}.$$

D'autre part, J_σ est à valeurs convexes donc $\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in J_\sigma(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, i.e. $\|x\|^{\sigma-1} = \|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\| < \|x\|^{\sigma-1}$. Contradiction, d'où $x^* = y^*$ et donc J_σ est univoque.

Le Théorème 2.2.19 fournit des exemples d'espaces uniformément convexes. Certains espaces bien connus ne sont pas uniformément convexes, nous montrons que effectivement ces espaces ne sont pas strictement convexes.

Exemple 2.2.37 *L'espace $l^1(.)$ n'est pas strictement convexe. Pour voir ça, prenons $\epsilon = 1$ et choisissons $\bar{x} = (1, 0, 0, 0, ...)$, $\bar{y} = (0, -1, 0, 0, ...)$. Il est clair que $\bar{x}, \bar{y} \in l^1$ et $\|\bar{x}\|_{l^1} = 1 = \|\bar{y}\|_{l^1}$, $\|\bar{x} - \bar{y}\|_{l^1} = 2 > \epsilon$. Par contre, $\|\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y})\|_{l^1} = 1$. Ceci montre que l^1 n'est pas strictement convexe.*

Exemple 2.2.38 *l'espace $l^\infty(.)$ n'est pas strictement convexe. Considérons $\bar{u} = (1, 1, 0, 0, 0, ...)$ et $\bar{v} = (-1, 1, 0, 0, 0, ...)$. Il est clair que $\bar{u}, \bar{v} \in l^\infty$.*
Posons $\epsilon = 1$. Donc, $\|\bar{u}\|_\infty = 1 = \|\bar{v}\|_\infty$ et $\|\bar{u} - \bar{v}\|_\infty = 2 > \epsilon$. Par contre, $\|\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}\| = 1$ et donc l^∞ n'est pas strictement convexe.

La dualité entre stricte convexité et lissicité est illustrée dans le théorème suivant (V.Klee [46])

Théorème 2.2.39 *Soit E un espace de Banach et E^* son dual topologique,*

1. *Si E^* est strictement convexe alors E est lisse.*
2. *Si E^* est lisse alors E est strictement convexe.*

Remarque 2.2.40 *Si E est réflexif, alors on a équivalence entre les assertions (1) et (2).*

Dans la proposition suivante, on illustre une propriété trés utile de la multi-appliation J_σ. Pour la preuve nous renvoyons le lecteur à [10].

Proposition 2.2.41 *Soit E un espace de Banach uniformément lisse et $\sigma \in [2, \infty)$. Alors, J_σ est localement uniformément continue, i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous $x, y \in E$*

$$\begin{cases} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x - y\| \leq \delta \end{cases} \Longrightarrow \|J_\sigma(x) - J_\sigma(y)\| \leq \epsilon. \tag{2.2.8}$$

2.3 Quelques notions sur les espaces de Sobolev

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles.

Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme $\mathbf{L}^p$ de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet.

Pour plus des détails concernant les espace de Sobolev nous renvoyons le lecteur à [1]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Fonctions tests

Une suite (ϕ_j) de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact) est dite convergente vers une fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ si les conditions suivantes sont satisfaites

($\boldsymbol{i}$) Il existe $K \subset \Omega$ tel que $Supp(\phi_j - \phi) \subset K$, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

($\boldsymbol{ii}$) $\lim\limits_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformément sur K pour tout multi-indice α.

Il existe une topologie localement convexe sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ pour laquelle une fonction linéaire T est continue si et seulement si $T\phi_j \longrightarrow T\phi$ sur $\mathbb{C}$ pour tout $\phi_j \to \phi$.

Muni de cette topologie, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique nommé $\mathcal{D}(\Omega)$ et ces éléments sont les fonctions tests.

Définition 2.3.1 (Distribution) *L'espace dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dit espace de distribution ou espace de Schwartz sur Ω. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est muni de la topologie faible* comme espace dual est localement convexe.*

Définition 2.3.2 (Dérivée d'une distribution) *Soient $u \in \mathbf{C}_E^1(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Puisque ϕ s'annule en dehors de tout ensemble compact de Ω, on obtiendra par intégtration par parties*

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j}dx.$$

Similairement, si $u \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$. Alors, une intégration par parties nous donne

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^{|\alpha|}\phi(x)dx.$$

Cette dernière motive la définition de la dérivée $D^\alpha T$ de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et on a

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}TD^\alpha\phi. \tag{2.3.1}$$

Définition 2.3.3 (Dérivée partielle faible) *Soit $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$, donc il existe une fonction $v_\alpha \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$ telle que $Tv_\alpha = D^\alpha T_u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Si v_α existe, alors il est unique et on l'appelle dérivée partielle faible de u et on la note $D^\alpha u$, i.e. $D^\alpha u = v_\alpha$ dans le sens faible avec $v_\alpha \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$ et satisfait pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)dx.$$

Définition 2.3.4 (Normes de Sobolev) *On définit une fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$, où m est un entier positif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit,*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \; si \; 1 \leq p < \infty \tag{2.3.2}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \; si \; p = \infty. \tag{2.3.3}$$

Pour une fonction u pour laquelle le côté droit prend un sens. Evidemment (2.3.2) ou (2.3.3) définit une norme sur un espace vectoriel des fonctions sur lesquelles le côté droit prend des valeurs finies pourvu que les fonctions sont identifiées dans l'espace si elles sont égales presque partout dans Ω.
On considère l'espace vectoriel sous lequel $\|.\|_{m,p}$ est une norme,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathbf{L}^p(\Omega) \; pour \; 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée partielle faible de u.
Muni d'une norme approprié (2.3.2) ou (2.3.3), $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Sobolev sur Ω. Il est clair que $W^{0,p}(\Omega) = \mathbf{L}^p(\Omega)$.

Théorème 2.3.5 *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif, séparable et uniformément lisse.*

Soient p, q deux réels vérifiant $1 < q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On appelle espace de Sobolev et on note $W^{-m,q}(\Omega)$ le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, où $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

L'application définie de $W_0^{m,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^n$ par $u \longmapsto |||u||| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ équivalente à la norme de $W^{m,p}(\Omega)$.

La forme de dualité est définie par

$$\langle u, f \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega v_\alpha D^\alpha u d\mu, \; \forall (u, f) \in W_0^{m,p}(\Omega) \times W^{-m,q}(\Omega);$$

où $(v_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \subset (\mathbf{L}^p(\Omega))^N$ avec $N = card\{\alpha \in \mathbb{N}; |\alpha| \leq m\}$.
Si $m = 1$, on a pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et tout $f \in W^{-1,q}(\Omega)$, il existe $(v_0, ..., v_n) \in (\mathbf{L}^q(\Omega))^n$ telle que

$$\langle u, f \rangle = \int_\Omega v_0 u dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

2.4 Cônes normaux et sous différentiels

L'un des problèmes du calcul différentiel classique est la recherche des points minimums et maximums d'une fonction à valeurs réelles. La théorie du sous différentiel a trouvé plusieurs applications dans les travaux de Moreau et Rockafellar pendant les années 60.

De même, l'origine de l'analyse non lisse provient des problèmes d'extrémums avec des données non différentiables. A l'heure actuelle, un large éventail de concepts et de méthodes calquées sur la théorie de l'annalyse différentiable ont été développées.

Les cônes normaux d'ensembles convexes ont été introduits par Minkowski en 1911 et ont été étudiés systématiquement par Fréchet en 1951. La thèse de doctorat de Clarke en 1973 marquât un début dans ce sens, où il donnât la première définition de la dérivée directionnelle généralisée des fonctions Lipschitziennes dans $\mathbb{R}^n$.

Le concept du sous différentiel de Fréchet a été introduit par Bazaraa et Goode en 1970 et dévelloppé par Kruger et Mordukhovich en 1980, et bien d'autres. Le progrés crucial dans l'étude du sous différentiel de Fréchet a été possible plus tard. Enfin, celui du sous différentiel proximal a été initié par Rockafellar en 1981.

Nous aurons besoin du résultat élémentaire suivant concernant les points d'un sous ensemble fermé C les plus proches à un point de E où E est un espace de Banach. Rappelons que pour tout $u \in E$ la notation $P_C(u)$ signifie l'ensemble des points de C les plus proches de u, i.e.

$$P_C(u) = \{x \in C;\ \|u - x\| = d_C(u)\}.$$

Si $P_C(u)$ est réduit au singleton x, on notera plus simplement $x = P_C(u)$.

Lemme 2.4.1 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé strictement convexe et soient C un sous ensemble fermé de X et $u \notin C$. Supposons que $P_C(u) \neq \emptyset$. Alors pour tout $p \in P_C(u)$ et tout $t \in]0, 1]$, on a $\{p\} = P_C(u + t(p - u))$.*

Preuve .

Le cas $t = 1$ étant évident, on suppose que $t \in]0, 1[$. Posons $u_t = u + t(p - u)$, on a

$$\|u_t - p\| = \|u + t(p - u) - p\| = (1 - t)\|u - p\|$$

et puisque $p \in P_C(u)$, $\|u_t - p\| = (1 - t)d(u, C)$.

De plus, pour $y \in C$,

$$\begin{aligned}\|u_t - y\| = \|u + t(p - u) - y\| \geq & \|u - y\| - t\|u - p\| \\ \geq & d(u, C) - t\|u - p\| \\ = & (1 - t)d(u, C) \\ = & \|u_t - p\|,\end{aligned}$$

et donc $p \in P_C(u_t)$, i.e., $\|u_t - p\| = d(u_t, C)$.
Supposons qu'il existe $p_t \neq p$ avec $p_t \in P_C(u_t)$. Remplaçant y par p_t dans les inégalités précédentes on trouve

$$\begin{aligned} d(u_t, C) = \|u_t - p_t\| = \|u - p_t + t(p-u)\| \geq & \|u - p_t\| - t\|u - p\| \\ \geq & d(u, C) - t\|u - p\| = (1-t)\|u - p\| \\ = & \|u_t - p\| = d(u_t, C). \end{aligned}$$

Toutes les inégalités deviennent alors des égalités et donc

$$\|u - p_t\| = d(u, C) \tag{2.4.1}$$

et

$$\|u - p_t\| = \|u - p_t + t(p-u)\| + t\|u - p\|.$$

De plus, il est claire que $t(u-p) \neq 0$, et que $u - p_t + t(p-u) \neq 0$ car $\|u - p_t + t(p-u)\| \geq (1-t)d(u, C) > 0$. Donc, en vertu de la Définition 2.2.34, il existe $\mu > 0$ tel que

$$u - p_t + t(p-u) = \mu t(u-p),$$

i.e.,

$$u - p_t = t(\mu + 1)(u - p). \tag{2.4.2}$$

Par la relation (2.4.1) et en prenant la norme dans l'inégalité (2.4.2), on trouve $d(u, C) = t(\mu+1)d(u, C)$ et puisque $d(u, C) > 0$ on aura $t(\mu + 1) = 1$. Par (2.4.2) on obtient $p_t = p$. Contradiction, d'où l'unicité de p dans $P_C(u_t)$. Ceci achève la preuve. ■

2.4.1 Cônes normaux

Dans la suite, on considère $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, C un sous ensemble de E fermé.

Définition 2.4.2 (Cône normal proximal) *Soit $x \in C$, on appelle vecteur primal normal proximal à C en x tout vecteur p s'écrivant $p = \alpha^{-1}(u - x)$, où $\alpha > 0$ et $u \notin C$ vérifient $x \in P_C(u)$.*
L'ensemble de tous les vecteurs primaux normaux proximaux à C au point x sera noté $PN_C(x)$ i.e.

$$PN_C(x) = \{p \in E / \ \exists \alpha > 0, \ x \in P_C(x + \alpha p)\}.$$

Définition 2.4.3 *Une forme linéaire continue $p^* \in E^*$ est dite fonctionnelle normale proximale à C au point $x \in C$ ssi*

$$J^*(p^*) \in PN_C(x), \ i.e. \ \exists \alpha > 0; \ x \in P_C(x + \alpha J^*(p^*)).$$

Le Cône de tous les fonctionnelles normales proximales à C au point x est noté $N_C^p(x)$ ou bien $N^p(C;x)$. On peut aisément vérifier que si $p \in PN_C(x)$, alors $J(p) \in N_C^p(x)$, et que si $p^* \in N_C^p(x)$, alors $J^*(p^*) \in PN_C(x)$. Donc, chacun des ensembles $N_C^p(x)$ et $PN_C(x)$ détermine l'autre.

Dans le contexte où la norme est associée à un produit scalaire i.e. $(H, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert, on a $x \in P_C(x + \alpha p)$ veut dire que $\langle p, u - x\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}\|u - x\|^2,\ \forall u \in C$. Dans ce cas,

$$N_C^p(x) = \{p \in H,\ \exists \alpha > 0,\ \langle p, u - x\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}\|u - x\|^2,\ \forall u \in C\}.$$

Nous avons, si $x \in Int(C)$, alors $N_C^p(x) = \{0\}$.

Dans notre travail, nous n'utiliserons que la notion du cône normal proximal, c'est pourquoi le cône $N_C^p(x)$ sera simplement noté $N_C(x)$.

Définition 2.4.4 *Pour tout point $x \in A$ et $r > 0$, on définit $\Gamma^r(x, A)$ comme suit,*

$$\Gamma^r(x, C) = \{v \in E,\ x \in P_C(x + rv)\}.$$

Remarque 2.4.5 *Pour tout $x \in C$, nous avons*

$$N_C(x) = \bigcup_{r>0} \Gamma^r(x, C).$$

On renvoie le lecteur à ([12] Lemme 2.1) pour le lemme suivant.

Lemme 2.4.6 *Soit E un espace de Banach et soit C un sous ensemble fermé de E. Pour tous $x \in C$ et $v \in \Gamma^r(x, C)$, on a $\lambda v \in \Gamma^r(x, C)$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$. De plus, si on suppose que E est uniformément convexe alors pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a $x \in P_C(x + \lambda rv)$.*

Définition 2.4.7 (Cône tangent de Clarke) *On note par $T_C(x)$ le cône tangent de Clarke (voir [29]) qui est défini comme suit, un vecteur $v \in T_C(x)$ si pour toute suite $(x_n)_n$ dans C convergeant vers x et pour toute suite de nombre positif $(t_n)_n$ convergeant vers 0, il existe une suite $(v_n)_n \subset E$ qui converge vers v telle que $x_n + t_n v_n \in C$ pour tout n.*

Définition 2.4.8 (Cône normal de Clarke) *Comme le cône tangent de Clarke, le cône normal de Clarke $N_C^{Cl}(x)$ de C au point $x \in C$ est défini comme le polaire négatif de ce dérnier i.e.,*

$$N_C^{Cl}(x) = \{x^* \in E^* : \langle x^*, v\rangle \leq 0,\ \forall v \in T_C(x)\}.$$

2.4.2 Sous différentiels

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Le domaine effectif de f est $dom(f) = \{(x, r); f(x) < +\infty\}$ et l'épigraphe de f est

$$epi(f) = \{(x, r) \in E \times \mathbb{R};\ f(x) \leq r\}.$$

Définition 2.4.9 *Le sous différentiel proximal de f au point x noté par $\partial^p f(x)$ est défini par : $p^* \in \partial^p f(x)$ ssi $(p^*, -1) \in N^p_{epi(f)}(x, f(x))$.*

Nous avons $\forall x \in C,\ \partial^p \psi_C(x) = N^p_C(x)$.

Définition 2.4.10 *On définit le sous différentiel proximal de f au point x_0 comme suit, un vecteur $x^* \in \partial^p f(x_0)$, s'il existe $r > 0, \epsilon > 0$ tels que pour tout $x \in \overline{\mathbf{B}}(x_0, \epsilon)$*

$$\langle x^*, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0) + \frac{r}{2}\|x - x_0\|^2.$$

Nous avons par convention, si $f(x_0) = +\infty$ alors $\partial^p f(x_0) = \emptyset$.

Définition 2.4.11 *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Le sous différentiel au sens de Fréchet de f au point x_0, noté $\partial^F f(x_0)$ est donné par l'ensemble de tous les vecteurs $x^* \in E^*$ vérifiant pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\langle x^*, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0) + \epsilon\|x - x_0\|,$$

pour tout $x \in x_0 + \delta\overline{\mathbf{B}}$.

Par convention, si $f(x_0) = +\infty$ alors $\partial^F f(x_0) = \emptyset$.

Définition 2.4.12 *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semicontinue inférieurement, alors le sous différentiel au sens de Fréchet de f est donné par : $x^* \in \partial^F f(x_0)$ si et seulement si*

$$\liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \langle x^*, y - x\rangle}{\|y - x\|} \geq 0.$$

Il est bien connu que dans un espace de Banach uniformément convexe le sous différentiel au sens de Fréchet permet de définir la notion du sous différentiel limite (de Mordukhovich)

$$\begin{aligned}\partial^L f(x) =& w^* - \limsup_{y \to x} \partial^F f(y)\\ =& \{w^* - \lim x_n^*;\ x_n^* \in \partial^F f(x_n),\ x_n \to x\}.\end{aligned}$$

Définition 2.4.13 *La dérivé directionnelle au sens de Clarke de f au point x_0 dans la direction $v \in E$, notée $f^o(x_0; v)$ est définie par*

$$f^o(x_0; v) = \limsup_{\substack{x \to x_0\\ t \searrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

où x est un vecteur de E et t un scalaire positif.

Définition 2.4.14 *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Alors, le sous différentiel de Clarke de f au point x_0, notée $\partial^C f(x_0)$ est définie par*

$$\partial^C f(x_0) = \{x^* \in E^*; f^o(x_0; v) \geq \langle x^*; v\rangle;\ \forall v \in E\}.$$

On sait que $\partial^C f(x) = \overline{co}^{w^*} \partial^L f(x)$.

Proposition 2.4.15 *Pour tout sous ensemble fermé C de H et tout $x \in C$, nous avons*

$$\partial^P d(x, C) = N^P(S, x) \cap \overline{\mathbf{B}} \tag{2.4.3}$$

et

$$\partial^C d(x, C) \subset N^C(S, x) \cap \overline{\mathbf{B}}. \tag{2.4.4}$$

2.5 Enveloppe locale de Moreau.

Plusieurs propriétés de d_C^2 et P_C se dérivent de l'enveloppe locale de Moreau d'une fonction. Dans cette section, on donne la définition et quelques propriétés de cette enveloppe.
Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. et soit $W \subset E$ un sous ensemble non vide fermé sur lequel f est bornée inférieurement et finie en quelques points. L'enveloppe locale de Moreau d'indice $\lambda > 0$ de f (relative à W), est définie par

$$e_\lambda f(x) = \inf_{y \in W} \{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\}. \tag{2.5.1}$$

Notons que l'inf dans (2.5.1) peut être pris sur E pour toute fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in W$ et $\tilde{f}(x) = +\infty$ sinon. Il est facile de voir que les fonctions $e_\lambda(f)$ sont définies partout et Lipschitziennes sur tout sous ensemble borné. On définit l'ensemble (éventuellement vide) $P_\lambda f$ comme suit

$$P_\lambda f(x) = \{y \in W : e_\lambda f(x) = f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\}.$$

S'il existe un $p_\lambda(x) \in P_\lambda f(x)$ nous avons par [37]

$$\partial^F e_\lambda f(x) \subset \{\lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))\} \cup \partial^F e_\lambda \tilde{f}(x)\}, \tag{2.5.2}$$

donc $P_\lambda f(x)$ est vide ou un singleton par la propriété de J. On sait aussi par le Théorème 11 de [20] que l'inf est atteind si x est un point du Fréchet sous différentiel de $e_\lambda f$. Notons par G_λ le sous ensemble de E où $e_\lambda f$ est Fréchet sous différentiable, nous obtiendrons pour $x \in G_\lambda$, $P_\lambda f(x) = \{p_\lambda(x)\}$ et $\partial^F e_\lambda f(x) = \{\lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))\}$. Si $P_\lambda f(x) = \{p_\lambda(x)\}$ est un singleton, on écrira souvent $P_\lambda f(x)$ au lieu de $\{p_\lambda(x)\}$.

Le Lemme suivant est dù à Borwein et Giles dans [20].

Lemme 2.5.1 *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. bornée inférieurement sur W avec $W \cap dom(f) \neq \emptyset$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\partial^F e_\lambda f(x) \neq \emptyset$;

(b) $e_\lambda f$ est F.D. au point x.

De plus, dans le cas (a) ou (b), $\nabla^F e_\lambda f(x) = \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))$.

Preuve

$(b) \Longrightarrow (a)$. Supposons que $e_\lambda f$ est F.D. au point x, i.e. il existe $x^* \in E$

$$\forall r > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0; |\ \frac{f(x + tx_0) - f(x)}{t} - \langle x^*, x_0 \rangle\ | \leq \epsilon,\ \forall |t| < \delta,\ \|x_0\| < r.$$

on obtient,

$$\langle x^*, tx_0 \rangle \leq f(x + tx_0) - f(x) + \epsilon t,$$

d'où la nonvacuité de $\partial^F e_\lambda f(x)$.

Maintenant, supposons que (a) eû lieu. Comme on a vu ci-dessus, $P_\lambda f(x)$ est univoque avec l'unique élément $p_\lambda(x)$ et $\partial^F e_\lambda f(x) = \{\lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))\}$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$ il exist $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \delta[$ et tout $y \in \overline{\mathbf{B}}$

$$\langle \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x)), ty \rangle \leq e_\lambda f(x + ty) - e_\lambda f(x) + \epsilon t,$$

donc

$$t^{-1}[e_\lambda f(x + ty) - e_\lambda f(x)] - \langle \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x)), y \rangle \geq -\epsilon. \tag{2.5.3}$$

D'autre part, prenons δ assez petit et utilisant la définition de $e_\lambda f$ et le fait que $\frac{1}{2}\|.\|^2$ est Fréchet différentiable avec

$$J(x - p_\lambda(x)) = \nabla(\frac{1}{2}\|.\|^2)(x - p_\lambda(x)),$$

on trouve pour $y \in \overline{\mathbf{B}}$

$$\begin{aligned} e_\lambda f(x + ty) - e_\lambda f(x) \leq & f(p_\lambda(x)) + \frac{1}{2\lambda}\|x - p_\lambda(x) + ty\|^2 - f(p_\lambda(x)) + \frac{1}{2\lambda}\|x - p_\lambda(x)\|^2 \\ = & \frac{1}{2\lambda}(\|x - p_\lambda(x) + ty\|^2 - \|x - p_\lambda(x)\|^2) \\ \leq & \langle \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x)), ty \rangle + \epsilon t, \end{aligned}$$

i.e.,

$$t^{-1}[e_\lambda f(x + ty) - e_\lambda f(x)] - \langle \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x)), y \rangle \leq \epsilon. \tag{2.5.4}$$

Conbinant (2.5.3) et (2.5.4) on obtient la Fréchet différentiabilité de $e_\lambda f$ au point x. De plus, l'égalité $\nabla^F e_\lambda f(x) = \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))$. ■

Le lemme suivant établit la différentiabilité de $e_\lambda f$ sous la continuité de $P_\lambda f$.

Lemme 2.5.2 *Sous les hypothèses du Lemme 2.5.1, pour un ouvert U de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(c) $e_\lambda f$ est $\mathbf{C}^1_E$ sur U,

(d) $P_\lambda f$ est (non vide) univoque et norme-à-norme continue sur U.
Dans n'importe quel cas de ces derniers, $e_\lambda f$ est F.D. sur U avec $\nabla^F e_\lambda f = \lambda^{-1} J \circ (I - p_\lambda f)$.

Preuve
$(c) \Rightarrow (d)$ Supposons que $e_\lambda f$ est $\mathbf{C}^1_E$ sur U, i.e. $e_\lambda f$ est Fréchet-différentiable sur U. D'après le Lemme 2.5.1 on déduit que $P_\lambda f$ est univoque et continue sur U, d'où l'implication.
$(d) \Rightarrow (c)$ Supposons maintenant que $P_\lambda f$ est univoque et continue sur U.
Soit $u \in U$ et soit $u^* \in \partial^L e_\lambda f(u)$. Par définition, il existe $(u^*_n)_n \subset \partial^F e_\lambda f(u_n)$ telle que $u^*_n \rightharpoonup^* u^*$ et $u_n \to u$ dans U. Par la relation (2.5.2) et pour n suffisamment grand, on a $u^*_n = \lambda^{-1} J(u_n - x_n)$ et $x_n = P_\lambda f(u_n)$. Par la continuité de $P_\lambda f$, on obtient $x_n \to x = P_\lambda f(x)$ donc, $u^* = \lambda^{-1} J(u_x)$. Par conséquent,

$$\partial^L e_\lambda f(u) \subset \{\lambda^{-1} J(u - P_\lambda f(u)\}, \ \forall u \in U, \tag{2.5.5}$$

i.e. $\partial^L e_\lambda f$ est vide ou un singleton. Puisque $e_\lambda f$ est localement Lipschitzienne, de (2.5.5) on déduit que $e_\lambda f$ est un singleton. On conclut qu'on aura, $\partial^C e_\lambda f$ est un singleton et est égal à $\{\lambda^{-1} J(u - P_\lambda f(u)\}$ (voir [58]). Donc $e_\lambda f$ est Gâteaux différentiable sur U avec $\nabla^G e_\lambda f(u) = \lambda^{-1} J(u - P_\lambda f(u)$. Utilisant une autre fois la continuité de $P_\lambda f$, on a l'existence de $\nabla^F e_\lambda f$ qui est continu sur U. Ce qui achève la preuve du lemme. ■

Remarque 2.5.3 *Dans le cas où la fonction f est la fonction indicatrice ψ_C d'un ensemble non vide fermé C, les conclusions ci-dessus auront lieu pour $W = E$ et $\lambda > 0$. De plus, on a $e_\lambda f(x) = \frac{1}{2\lambda} d^2(x, C)$ et $P_\lambda f(x) = P_C(x)$, pour tout $x \in E$.*

L'énoncé de la proposition suivante montre que la continuité de l'application de projection métrique d'un ensemble fermé C est équivalente à la différentiabilité continue de la fonction distance $d(., C)$, comme indiqué dans [60] dans le cas hilbertien, où les auteurs ont montré que ces propriétés caractérisent la prox-régularité d'un ensemble dans un espace de Hilbert. Sa preuve découle directement du Lemme 2.5.2 avec $f = \psi_C$.

Proposition 2.5.4 *Soient C un sous ensemble fermé de E et U un sous ensemble ouvert de E. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) P_C est univoque et norme-à-norme continue sur U,

(b) $d^2(., C)$ est de classe $\mathbf{C}^1_E$ sur U.

En fait, ces propriétés sont équivalentes à la Fréchet sous différentiabilité de la fonction distance que nous pouvons voir dans la proposition suivante.

Proposition 2.5.5 *Pour tout ensemble fermé $C \subset E$ et tout ouvert $U \subset E$ les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\partial^F d(x, C)$ est non vide sur U ;

(b) $\partial^F d^2(x, C)$ est non vide sur U ;

(c) $d(., C)$ est Fréchet différentiable sur $U \setminus C$.

Preuve

$(a) \Rightarrow (b)$. Supposons que pour tout $x \in U$, $\partial^F d(x, C) \neq \emptyset$, i.e. il existe $x^* \in E^*,\ x^* \in \partial^F d(x, C)$. D'où, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in \overline{\mathbf{B}}(x, \delta)$;

$$\langle x^*, y - x\rangle \leq d(y, C) - d(x, C) + \epsilon\|y - x\|. \tag{2.5.6}$$

D'autre part, nous avons

$$d^2(y, C) - d^2(x, C) = 2d(x, C)\Big(d(y, C) - d(x, C)\Big) + (d(y, C) - d(x, C))^2,$$

donc par la relation (2.5.6), on trouve

$$d^2(y, C) - d^2(x, C) \geq \langle 2d(x, C)x^*, y - x\rangle - 2\epsilon\|y - x\|,$$

ceci montre la nonvacuité de $\partial^F d^2(x, C)$ sur U.

$(b) \Rightarrow (c)$. D'après le Lemme 2.5.1, $d^2(., C)$ est Fréchet différentiable au point $x \in U$, donc il existe $x^* \in E^*$, tel que

$$\begin{aligned} 0 =& \lim_{y \to x} \frac{d^2(y, C) - d^2(x, C) - \langle x^*, y - x\rangle}{\|y - x\|} \\ =& 2d(x, C) \lim_{y \to x} \frac{d(y, C) - d(x, C) - \langle \frac{x^*}{2d(x,C)}, y - x\rangle}{\|y - x\|},\ \forall x \in U \setminus C, \end{aligned}$$

il s'ensuit que $d(., C)$ est Fréchet différentiable sur $U \setminus C$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Evident (Lemme 2.5.1). ■

Lemme 2.5.6 *Soit C un sous ensemble fermé de E. Supposons que $d(., C)$ est Fréchet différentiable sur un voisinage d'un point $\bar{u} \notin C$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in \overline{\mathbf{B}}(\bar{u}, \delta)$ et tout $x = P_C(u)$, il existe $t > 0$ tel que $x = P_C(u_t)$ où $u_t = u + t(u - x)$.*

2.6 Ensembles prox-réguliers

La notion de prox-régularité apparait sous différents noms en litérature. Federer dans [41], à introduit cette notion en dimension finie sous le nom d'ensembles "positively reached", afin d'étendre la formule polynomiale de Steiner à une plus large classe d'ensembles que celle des ensembles convexes. Plus tard, motivé par différents objectifs, d'autres auteurs ont concentré leur analyse sur des propriétés distinctes d'ensembles et ont pris en considération les classes d'ensembles "p-convexes" ([21]), ensembles à "2-order tengential" ([62]), ensembles "proximalement lisse" ([30]), ensembles "prox-regulier" ([60], [12], [13]) et ainsi de suite. Tout ces concepts sont actuellement connu par le même nom et équivalente dans $\mathbb{R}^n$ à la notion d'ensemble "positively reached".

Dans toute la suite, E est un espace de Banach réel uniformément convexe muni d'une norme uniformément convexe et uniformément lisse et C est un sous ensemble fermé de E.

Définition 2.6.1 *On dit que C est prox-régulier ou $\|.\|$-prox-régulier au point $\bar{x} \in C$ s'il existe $\epsilon > 0$, $r > 0$ tels que pour tout $x \in C$ et tout $p^* \in N_C^p(x)$ avec $\|x - \bar{x}\| < \epsilon$ et $\|p^*\| < 1$, le point x est le point de $\{x' \in C;\ \|x' - \bar{x}\| < \epsilon\} = K$, le plus proche de $x + rJ^*(p^*)$, i.e. $x \in P_K(x + rJ^*(p^*))$.*

Définition 2.6.2 *Une multi-application $T : E \rightrightarrows E^*$ est dite J-hypomonotone de degré $t \geq 0$ sur un sous ensemble $U \subset E$ si pour, $(x_i, x_i^*) \in gph(T)$, $i = 1, 2$ on a*

$$\langle J[J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)] - J[J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)], x_1 - x_2\rangle \leq 0.$$

Il est commode pour $\delta \geq 0$ de noter par $N_C^{p,\delta}$ la m.a. N_C^p tronqué à $\delta\overline{\mathbf{B}}_{E^*}$, i.e.

$$N_C^{p,\delta}(x) = N_C^p(x) \bigcap \delta\overline{\mathbf{B}}_{E^*},\ \forall x \in C.$$

Les propriétés suivantes (et plus) sont données dans [60] dans un espace de Hilbert, et dans [12] dans le cadre des espaces uniforméments convexes.

Théorème 2.6.3 *Supposons que les modules de convexité uniforme et de licissité sont de type puissance. Alors un sous ensemble fermé $C \subset E$ est dit prox-régulier au point $\bar{x}$ si l'une des propriétés suivantes est satisfaite.*

(i) Il existe $\epsilon > 0$ et $r > 0$ tels que pour tout $x \in C$ et tout $p^* \in N_C^p(x)$ avec $\|x - \bar{x}\| < \epsilon$ et $\|p^*\| \leq 1$,

$$0 \geq \langle J[J^*(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle,\ \forall x' \in C \cap \mathbf{B}(\bar{x}, \epsilon);$$

(ii) pour ϵ, $\tau > 0$, la multi-application $N_C^{p,\epsilon} : E \rightrightarrows E^*$ est J-hypomonotone de degré τ sur $\overline{\mathbf{B}}(\bar{x}, \epsilon)$;

(iii) P_C *est univoque et continue sur un voisinage* U *de* $\bar{x}$ *;*

(iv) $d^2(.,C)$ *est de classe* $\mathbf{C^1}$ *sur un voisinage* U *de* $\bar{x}$ *;*

(v) $d(.,C)$ *est Fréchet différentiable sur* $U \setminus C$ *sur un voisinage* U *de* $\bar{x}$.

Une autre caractérisation peut être donnée en terme de la multi-application J_σ à la place de la multi-application duale normalisée J.

Proposition 2.6.4 *Soit* $\sigma > 1$ *un nombre réel. La condition* (i) *du Théorème 2.6.3 est équivalente à l'une des assertions suivantes.*

(i_σ*) Il existe* $\epsilon > 0$ *et* $r > 0$ *tel que* $\forall x \in C$, $\forall p^* \in N_C^p(x)$ *avec* $\|x - \bar{x}\| < \epsilon$ *et* $\|p^*\| \leq 1$,

$$0 \geq \langle J_\sigma[J_\sigma^{-1}(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle, \ \forall x' \in C \cap \mathbf{B}(\bar{x}, \epsilon);$$

(i'_σ*) Il existe* $\epsilon > 0$ *et* $r > 0$ *tel que* $\forall x \in C$, $\forall p^* \in N_C^p(x)$, $\forall t \geq 0$ *avec* $\|x - \bar{x}\| < \epsilon$ *et* $\|p^*\| \leq r^{\sigma-1}t^{\sigma-1}$,

$$0 \geq \langle J_\sigma[J_\sigma^{-1}(p^*) - t(x' - x)], x' - x\rangle, \ \forall x' \in C \cap \mathbf{B}(\bar{x}, \epsilon);$$

Définition 2.6.5 *Soient* X, Y *deux espaces normés. Une multi-application* $G : X \rightrightarrows Y$ *est dite* $\frac{1}{q}$*-Hölder continue sur son domaine de définition s'il existe* $\gamma \geq 0$, *pour tous* $x, x' \in DomG$ *et tous* $y \in G(x)$, $y' \in G(x')$,

$$\|y - y'\| \leq \gamma \|x - x'\|^{\frac{1}{q}}.$$

2.7 Ensembles uniformément r-prox-réguliers

Dans cette section, nous procédons à l'étude du contexte globale de l'ensemble prox-régulier C, correspondant (voir [30]) à la Fréchet différentiabilité de la fonction distance d_C sur l'ensemble d'un tube ouvert d'épaisseur uniforme autour de l'ensemble C. Nous avons encore la plupart des caractérisations de ces ensembles donnés dans [41] pour les espaces de dimension finie, et dans [30] et [60] dans le cas des espaces de Hilbert. D'autre caractérisations sont aussi exposées.

Définition 2.7.1 *Un sous ensemble fermé* C *de* E *est dit uniformément* r*-prox-régulier ou* r*-uniformément prox-régulier si pour tous* $x \in C$ *et* $p^* \in N_C^p(x)$ *avec* $\|p^*\| \leq 1$, x *est l'unique point de* C *le plus proche de* $x + rJ^*(p^*)$, *i.e.*

$$x = P_C(x + rJ^*(p^*)).$$

Définissons (voir [60])
le r-enlargement $C(r)$ de C,

$$C(r) := \{x \in E;\ d(x, C) \leq r\},$$

le r-tube ouvert $U_C(x)$ autour de C,

$$U_C(r) := \{x \in E;\ 0 < d(x, C) < r\}$$

et l'ensemble des points r-distants à C par

$$D_C(r) := \{x \in E;\ d(x, C) = r\}.$$

Théorème 2.7.2 *Supposons que le module de convexité et le module de licissité de la norme de E sont de type puissance.*

(i) Si C est un sous ensemble uniformément r-prox-régulier de E, alors les assertions ci-dessous auront lieu. Inversement (a) ou (b) entraine que C est uniformément r-prox-régulier et (f) implique que C est uniformément $\frac{r}{2}$-prox-régulier.

(a) $d^2(., C)$ est de classe $\mathbf{C}^1_E$ sur $U_C(r)$;

(b) $d(., C)$ est Fréchet différentiable sur $U_C(r) \setminus C$;

(c) P_C est univoque et norme-à-norme continue sur $U_C(r)$;

(d) pour $0 \neq p \in PN_C(x)$ avec $x \in C$, on a $x \in P_C(x + r\frac{p}{\|p\|})$;

(e) si $u \in U_C(r)$ et $x \in P_C(u)$ alors $x \in P_C(u')$ où $u' = x + r\frac{u-x}{\|u-x\|}$;

(f) la multi-application $N_C^{p,r}$ est J-hypomonotone de degré $t \geq 1$.

Preuve

Pour la démonstration, nous allons suivre le schéma suivant ;

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & (b) & & & & \\ & & & & \Downarrow & & & & \\ (i) & \Leftrightarrow & (d) & \Leftrightarrow & (e) & \Rightarrow & (a) & \Leftrightarrow & (c) \\ \Downarrow & & & & & & \Updownarrow & & \\ (f) & & & & & & (b) & & \end{array}$$

$(d) \Rightarrow (i)$ découle du Lemme 2.4.1.

$(i) \Rightarrow (d)$. Fixons $0 \neq p \in PN_C(x)$ et soit $p_n = \frac{p}{\|p\|+\frac{1}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons $\|p_n\| = \frac{\|p\|}{\|p\|+\frac{1}{n}} < 1$ et $\frac{1}{\|p\|+\frac{1}{n}} J(p) \in N_C^p(x)$. Donc par (i), il existe $r > 0$ tel que $x \in P_C(x + rp_n)$, d'où,

$$r\frac{\|p\|}{\|p\| + \frac{1}{n}} \leq \|x + rp_n - x'\|,\ \forall x' \in C,$$

Passant à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve $r \leq \|x' - (x + r\frac{p}{\|p\|})\|$, $\forall x' \in C$. Donc $x \in P_C(x + r\frac{p}{\|p\|})$.
$(e) \Leftrightarrow (d)$. Evidente.
$(a) \Leftrightarrow (b)$. Conséquence de la Proposition 2.5.4 et du Proposition 2.5.5.
$(b) \Rightarrow (e)$. Nous avons besoin du lemme suivant [12].

Lemme 2.7.3 *Soit C un sous ensemble fermé de E. Supposons que d_C est Fréchet différentiable sur un voisinage d'un point $\bar{u} \notin C$. Donc, il existe $\delta > 0$ tels que pour tout $\overline{\mathbf{B}}(\bar{u}, \delta)$ et $P_C(u) = x$, il existe $t > 0$ tel que $P_C(u_t) = x$ et $u_t := u + t(u - x)$.*

Soit $u \in U_C(r)$ et $x = P_C(u)$. Puisque (b) eu lieu, par le Lemme 2.7.3 il existe $t_0 > 0$ tel que $x = P_C(u_t)$ avec $u_t = u + t\frac{u-x}{\|u-x\|}$ et $0 < t < t_0$.

Soit $\lambda_0 = \sup\{t \in [0, r - d(u, C)],\ x = P_C(u_t)\}$. Utilisons l'équivalence (on note que $x \in C$ et $\|x - u_t\| = d(u, C) + t$)

$$x \in P_C(u_t) \Leftrightarrow \forall x' \in C,\ \|x' - u_t\| \geq d(u, C) + t,$$

il est facile de voir que le sup λ_0 est atteind. Montrons que $\lambda_0 = r - d(u, C)$. Supposons le contraire, i.e., $\lambda_0 < r - d(u, C)$. Donc, d'une part, on a $x \in U_C(r)$ et d'autre part $x = P_C(u_{\lambda_0})$ par (b) et la Proposition 2.5.4. Appliquant le Lemme 2.7.3 on obtient une contradiction. Par conséquent, $\lambda_0 = r - d(u, C)$. u_t peut s'écrire sous la forme $u_t = x + (d(u, C) + t)\frac{(u-x)}{\|u-x\|}$, $t = \lambda_0$ donne (e).
$(e) \Rightarrow (a)$. On montre que (e) implique "P_C est univoque et localement $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur $U_C(r)$." On procède en cinq étapes.

Etape 1. On montre que $N_C^{p,r}(x)$ est J-hypomonotone de degré $t \geq 1$. Supposons que (e) est satisfaite. Pour tout $x^* \in N_C^{p,r}(x) = N_C^p(x) \bigcap r\overline{\mathbf{B}}_{E^*}$ avec $x \in C$, alors de $(e) \Leftrightarrow (d)$, $x \in P_C(x + r\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|})$, et d'après le Lemme 2.4.1, pour tout $\alpha \in]0, 1]$, $x \in P_C(x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|})$. C'est à dire, $\forall x' \in C$,

$$\|x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x\| \leq \|x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x'\|.$$

En outre, puisque $J = \nabla(\frac{1}{2}\|.\|^2)$, on a aussi

$$\frac{1}{2}\|x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x'\| + \left\langle J(x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x'), x' - x\right\rangle \leq \frac{1}{2}\|r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|}\|^2.$$

D'où, $\langle J(J^*(x^*) - \frac{\|x^*\|}{r\alpha}(x' - x)), x' - x\rangle \leq 0$. Donc, il est possible de prendre $\alpha \in]0, \frac{\|x^*\|}{r}]$. De là, pour tout $x_i \in C$, $x_i^* \in N_C^{p,r}(x_i)$, $i = 1, 2$ et $t \geq 0$, on a

$$\left\langle J(J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)), x_2 - x_1\right\rangle \leq 0$$

et

$$\left\langle J(J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)), x_1 - x_2 \right\rangle \leq 0.$$

En additionant ces deux inégalités, on trouve

$$\left\langle J(J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)) - J(J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)), x_1 - x_2 \right\rangle \leq 0$$

d'où la J-hypomonotonie de $N_C^{p,r}$ de degré t pour tout $t \geq 0$. Et par conséquent, $(i) \Rightarrow (f)$.

Etape 2. On montre que P_C est non vide univoque et localement $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur $U_C(\frac{r}{2})$. Pour cela, on utilise le Lemme suivant

Lemme 2.7.4 *Soit $T : E \rightrightarrows E^*$ une multi-application bornée et J-hypomonotone de degré $\bar{r}$. Alors, pour tout $r > 2\bar{r}$, $(I + r^{-1}J^* \circ T)^{-1}$ est univoque sur son domaine de définition et $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur l'intersection de son domaine de définition avec tout sous ensemble borné.*

Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, nous avons de l'étape (1) et du Lemme 2.7.4, $(I + J^* \circ N_C^{p\alpha r})^{-1}$ est $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur l'intersection de son domaine de définition avec tout sous ensemble borné. Nous avons aussi, pour tout $r' > 0$

$$P_C(x) \subset (I + J^* \circ N_C^{p,r'})^{-1}(x), \ \forall x \in U_C(r'). \tag{2.7.1}$$

En effet, pour tout $x \in U_C(r')$, l'inclusion $y \in P_C(x)$ donne $J(x - y) \in N_C^p(y)$ et $\|y - x\| < r'$, par suite $J(x - y) \in N_C^{p,r'}(y)$, i.e. $y \in (I + J^* \circ N_C^{p,r'})^{-1}(x)$. Donc, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, P_C est $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur l'intersection de tout sous ensemble borné avec $Dom(P_C) \cap U_C(\alpha r)$, i.e. il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous $x, x' \in Dom(P_C) \cap U_C(\alpha r)$

$$\|P_C(x) - P_C(x')\| \leq \gamma \|x - x'\|^{\frac{1}{q}}. \tag{2.7.2}$$

Montrons maintenant que $U_C(\alpha r) \subset Dom(P_C)$.
Soit $x \in U_C(\alpha r)$ et soit $k \geq 1$ avec $\overline{\mathbf{B}}(x, \frac{1}{n}) \subset U_C(\alpha r)$. Puisque $\overline{G_\lambda} = E$, donc pour tout $n \geq k$, il existe $x_n \in G_\lambda \cap \overline{\mathbf{B}}(x, \frac{1}{n})$. Par la relation (2.7.2), pour tous entiers $n, m \geq k$,

$$\|P_C(x_n) - P_C(x_m)\| \leq \gamma \|x_n - x_m\|^{\frac{1}{q}}.$$

Ceci montre que $(P_C(x_n))_n$ est une suite de Cauchy. Soit z sa limite. Par définition, nous avons

$$\|P_C(x_n) - x_n\| = d(x_n, C) \leq \gamma \|x_n - y\|, \ \forall y \in C.$$

Passant à la limite, on aura

$$\|z - x\| \leq \gamma \|x - y\|^{\frac{1}{q}}, \ \forall y \in C,$$

c'est à dire, $z = P_C(x)$, d'où $x \in Dom(P_C)$. Par conséquent, P_C est non vide univoque sur $U_C(\alpha r)$ et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, P_C est non vide univoque et $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur $U_C(\frac{1}{2r})$.

Etape 3. On utilisera les deux lemmes suivants (voir [12]). Le premier complète le résultat du Lemme 3.1 dans [18]. Rappelons que le segment reliant les deux point $u, v \in E$ est défini par $[u, v] := \{tu + (1-t)v,\ t \in [0,1]\}$.

Lemme 2.7.5 *Soit C un sous ensemble non vide fermé d'un espace vectoriel normé $(Y, \|.\|)$. Soit $\rho > 0$ et $u \notin C(\rho)$. Alors les assertions suivantes ont lieu.*

(i) $d(u, C) = \rho + d(u, C(\rho)) = \rho + d(u, D_C(\rho))$;

(ii) si $u_0 \in P_C(u)$ et $y_0 \in [u_0, u] \cap D_C(\rho)$, alors $y_0 \in P_{C(\rho)}(u)$;

(iii) si $y \in P_{C(\rho)}(u)$ et $z \in P_C(y)$, alors $z \in P_C(u)$. De plus, si $P_{C(\rho)}(u) = \{y\}$ et $z \in P_C(y)$, alors $y \in [z, u]$ et $P_C(u) = \{z\}$.

Lemme 2.7.6 *Si C satisfait l'assertion (e) du Théorème 2.7.2 avec un paramètre r et P_C est non vide univoque sur $U_C(\alpha r)$ pour $\alpha \in]0, 1]$. Alors, pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$, l'ensemble $C(\alpha' r)$ satisfait (e) avec le paramètre $r(1-\alpha')$.*

Etape 4. Pour $\alpha \in]0.1]$, considérons la propriété suivante

$$\mathcal{P}(\alpha) \begin{cases} C \text{ satisfait (e) avec un paramètre } r \text{ et} \\ P_C \text{ est univoque localement Hölder continue sur } U_C(\alpha r). \end{cases}$$

On montre que $\mathcal{P}(\alpha) \Rightarrow \mathcal{P}(\frac{\alpha+1}{2})$.
Supposons que $\mathcal{P}(\alpha)$ est satisfaite. De l'étape 3, 1 et 2, on a pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$

$$P_{C(\alpha' r)} \text{ est univoque localement Hölder continue sur } U_{C(\alpha' r)}\left(\frac{r(1-\alpha')}{2}\right). \tag{2.7.3}$$

Soit $u \in U_C(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2})$ tel que $r' := d(u, C) > \alpha' r$. Par (i) du Lemme 2.7.5 on a $d(u, C(\alpha' r)) = r' - \alpha' r$, et donc

$$u \in U_{C(\alpha' r)}\left(\frac{r(1-\alpha')}{2}\right) \tag{2.7.4}$$

puisque $r' - \alpha' r < \frac{r(1-\alpha')}{2}$ car on a $u \in U_C(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2})$. On pose (par la relation 2.7.3) $y := P_{C(\alpha' r)}(u)$ et par la deuxième assertion de $\mathcal{P}(\alpha)$, $z := P_C(y)$. Donc, par (iii) du Lemme 2.7.5, $z = P_C(u)$ et par suite $P_C(u) = z = P_C \circ P_{C(\alpha' r)}(u)$.
Donc, pour $\alpha \in]0, \alpha[$, les relations (2.7.3), (2.7.4) et $\mathcal{P}(\alpha)$ assurent que P_C est univoque et localement Hölder continue sur $U_C(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2}) \setminus C(\alpha' r)$. Par hypothèse elle est aussi localement Hölder continue sur $U_C(\alpha r)$ et donc P_C est univoque, localement Hölder continue sur

$U_C(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2})$ pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$ et donc sur $U_C(\alpha r + \frac{r(1-\alpha)}{2}) = U_C(\frac{r(1-\alpha)}{2})$. D'où, $\mathcal{P}(\frac{\alpha+1}{2})$ est satisfaite. Ce qui achève la preuve de l'étape 4.

Etape 5. Définissons $(\alpha_n)_n$ par $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n+1}{2}$. On a $\alpha_n \longrightarrow 1$, et par l'étape 1, $\mathcal{P}(\alpha_n) \Rightarrow \mathcal{P}(\frac{\alpha_n+1}{2})$. Puisque $\mathcal{P}(\alpha_0)$ est satisfaite par l'étape 1, donc $\mathcal{P}(\alpha_n)$ l'est aussi, et par conséquent, $\mathcal{P}(1)$, i.e. P_C est univoque localement Hölder continue sur $U_C(r)$, d'où (c). ■

Théorème 2.7.7 *Soit C un sous ensemble fermé r-prox-régulier au point $\bar{x} \in C$. Alors, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que pour tout $x \in U \cap C$, nous avons les régularités normales suivantes*

$$N_C^p(x) = N_C^F(x) = N_C^L(x) = N_C^C(x)$$

et donc

$$\partial^p d(x, C) = \partial^F d(x, C) = \partial^L d(x, C) = \partial^C d(x, C),$$

i.e., la fonction distance est sous différentiable en tout point de $U \cap C$.

CHAPITRE 3

Existence de solutions pour une incluion différentielle du second ordre avec une perturbation bornée dans les espaces de Banach

Sommaire

3.1 Ensemble I-lisse faiblement compact **42**

3.2 Inclusion différentielle avec une perurbation F semicontinue supérieurement **50**

3.3 Inclusion différentielle avec une perturbation F de type Carathéodory **63**

Les processus de la rafle ont été étudiés dans de nombreux articles dans le cas des espaces Euclidiens d'abord, puis dans les espaces de Hilbert (voir par exemple [5], [27], [40], [46], [64]...). La difficulté principale dans l'étude de ce type de problèmes est d'obtenir une sorte de "continuité faible" de l'opérateur de projection P_C. Par ailleurs, on a pu résoudre cette dernière grâce à la semi-continuité supérieure du sous différentiel de la fonction distane $d(., C)$, dans le cas où C est uniformément prox-régulier [10], [16]...

Nous exposons ici de nouveaux arguments nous permettant de contourner cette difficulté dans le context des espaces de Banach séparables, sur lesquels des résultats d'éxistence de solutions pour les processus de la rafle du premier ordre ont été démontrés [43], en apportant à la littérature de ces derniers une généralisation des résultats d'existence des espaces de Hilbert aux espaces de Banach. Ces arguments nous permettent aussi de comprendre les hypothèses supposées sur l'espace, utiles aux preuves des théorèmes d'existence.

Notre objectif dans ce travail est d'étendre ces résultats au second ordre, précisément, on s'intéresse à l'étude d'une inclusion différentielle du second ordre de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ \dot{x}(t) \in K(t), \ \forall t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans la section 2, on étudie dans un espace de Banach E séparable le problème $(\mathcal{P}_F)$ où $K : [0, T] \rightrightarrows E$ est une application multivoque à valeurs non vides, boule-compactes et r-prox-régulières, et $F : [0, T] \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées. De plus, on étend ce résultat au cas où l'ensemble K dépend de la variable d'état, i.e., on donne un théorème d'existence pour le problème

$$(\mathcal{P}'_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), \ \forall t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0. \end{cases}$$

Par la suite dans la section 3, on montre que ce problème admet aussi une solution dans le cas où la perturbation F est Lebesgue-mesurable par rapport à la première variable est semicontinue supérieurement par rapport à la deuxième et la troisième variables.

3.1 Ensemble I-lisse faiblement compact

Nous commencons par décrire une hypothèse nécessaire à notre étude (voir [10]).

Définition 3.1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Un espace de Banach E réflexif séparable et uniformément lisse est dit "I-lisse faiblement compact" pour un exposant $p \in (1, \infty)$ si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, on peut extraire une sous suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui converge faiblement* vers $y \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et telle que pour tous $z \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_I \Big\langle J_p\big(z(t)+y_n(t)\big) - J_p\big(y_n(t)\big), y_n(t)\Big\rangle \phi(t)dt = \int_I \Big\langle J_p\big(z(t)+y(t)\big) - J_p\big(y(t)\big), y(t)\Big\rangle \phi(t)dt. \tag{3.1.1}$$

La notion de "I-lisse faiblement compact" ne dépend pas de l'intervalle de temps I.

Remarque 3.1.2 *Puisque E est réflexif et séparable, $\mathbf{L}^\infty_E(I) = [\mathbf{L}^1_{E^*}(I)]^*$ et par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on sait qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous suite $(y_n)_n$ qui converge faiblement*. Par contre cette convergence n'est pas suffisante pour assurer (3.1.1) en général.*

On commence par donner quelques exemples afin d'illustrer cette définition et montrer qu'elle a un sens «non triviale».

Proposition 3.1.3 *Tout espace de Hilbert H est I-lisse faiblement compact pour $p = 2$.*

Preuve Il est bien connu que dans un espace de Hilbert, J_2 est donnée par $J_2(x) = x$. Donc (3.1.1) correspond à

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle z(t), y_n(t)\rangle \phi(t)dt = \int_I \langle z(t), y(t)\rangle \phi(t)dt. \tag{3.1.2}$$

Sachant que $\mathbf{L}^\infty_H(I) = [\mathbf{L}^1_H(I)]^*$ et comme $(y_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$, on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement* vers $y \in \mathbf{L}^\infty_H(I)$. Pour tout $z \in \mathbf{L}^\infty_H(I)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$, on a $z(.)\phi(.) \in \mathbf{L}^1_H(I)$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle z(t)\phi(t), y_n(t)\rangle dt = \int_I \langle z(t)\phi(t), y(t)\rangle dt.$$

D'où la relation (3.1.2). Ceci achève la preuve. ■

On ne peut pas montrer que les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev sont I-lisses faiblement compacts pour un exposant. Cependant, sous une hypothèse supplémentaire sur la suite $(y_n)_n$, on arrive à la conclusion souhaitée.

Proposition 3.1.4 *Soit U un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou une variété Riemannienne. Pour tout entier $p \in [2, \infty)$, l'espace de Sobolev $E = W^{1,p}(U, \mathbb{R}^n)$ est I-lisse faiblement compact pour p sous la contrainte suivante : de toute suite bornée $(x_n)_n$ de $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, bornée aussi dans $\mathbf{L}^\infty(I, W^{2,p}(U, \mathbb{R}^n))$, on peut extraire une sous suite $(y_n)_n$ satisfaisant (3.1.1).*

Preuve

Considérons une suite bornée $(x_n)_n$ de $\mathbf{L}^\infty(I, W^{1,p}(U))$. Nous avons pour $f, h \in W^{1,p}(U)$

$$ {}_{W^{-1,p'}}\langle J_p(f), h\rangle_{W^{1,p}} = {}_{\mathbf{L}^{p'}}\langle f^{p-1}, h\rangle_{\mathbf{L}^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{p-1}, \frac{\partial h}{\partial x_i}\right\rangle. \tag{3.1.3} $$

Pour montrer (3.1.1), il suffit de montrer qu'il existe une sous suite $(y_n)_n$ qui converge faiblement* vers $y \in \mathbf{L}^\infty(I, W^{1,p}(U))$ telles que pour tous $g \in \mathbf{L}^\infty(I, W^{1,p}(U))$ et $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_I \big\langle J_p\big(g(t,.) + y_n(t,.)\big) - J_p\big(y_n(t,.)\big), y_n(t,.)\big\rangle \phi(t)dt \\ = \int_I J_p\big(g(t,.) + y(t,.)\big) - J_p\big(y(t,.)\big), y(t,.)\phi(t)dt, \end{aligned} $$

par la relation (3.1.3), on montre que

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_I \big\langle \big(g(t,.) + y_n(t,.)\big)^{p-1} - \big(y_n(t,.)\big)^{p-1}, y_n(t,.)\big\rangle \phi(t)dt \\ = \int_I \big\langle \big(g(t,.) + y(t,.)\big)^{p-1} - \big(y(t,.)\big)^{p-1}, y(t,.)\big\rangle \phi(t)dt, \end{aligned} $$

et

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_I \sum_{i=1}^{n} \big\langle \big(\partial_{x_i} g(t,.) + \partial_{x_i} y_n(t,.)\big)^{p-1} - \big(\partial_{x_i} y_n(t,.)\big)^{p-1} \partial_{x_i} y_n(t,.)\big\rangle \phi(t)dt \\ = \int_I \sum_{i=1}^{n} \big\langle \big(\partial_{x_i} g(t,.) + \partial_{x_i} y(t,.)\big)^{p-1} - \big(\partial_{x_i} y(t,.)\big)^{p-1} \partial_{x_i} y(t,.)\big\rangle \phi(t)dt, \end{aligned} $$

i.e.

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{I\times U} \big[\big(g(t,x) + y_n(t,x)\big)^{p-1} - \big(y_n(t,x)\big)^{p-1}\big] y_n(t,x)\phi(t)dtdx \\ = \int_{I\times U} \big[\big(g(t,x) + y(t,x)\big)^{p-1} - \big(y(t,x)\big)^{p-1}\big] y(t,x)\phi(t)dtdx \end{aligned} \tag{3.1.4} $$

et pour $i \in \{1, ..., n\}$

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{I\times U} \big[\big(\partial_{x_i} g(t,x) + \partial_{x_i} y_n(t,x)\big)^{p-1} - \big(\partial_{x_i} y_n(t,x)\big)^{p-1}\big] \partial_{x_i} y_n(t,x)\phi(t)dtdx \\ = \int_{I\times U} \big[\big(\partial_{x_i} g(t,x) + \partial_{x_i} y(t,x)\big)^{p-1} - \big(\partial_{x_i} y(t,x)\big)^{p-1}\big] \partial_{x_i} y(t,x)\phi(t)dtdx. \end{aligned} \tag{3.1.5} $$

Puisque p est un entier, on utilise la "formule binomiale", on trouve

$$ y_n\big[(g + y_n)^{p-1} - y_n^{p-1}\big] = \sum_{k=0}^{p-2} \begin{pmatrix} p-1 \\ k \end{pmatrix} y_n^{k+1} g^{p-1-k}. $$

Sachant que $g(t,.) \in \mathbf{L}^p$ implique que $g(t,.)^{p-1-k} \in \mathbf{L}^{(p/(k+1))'}$ et que $y_n(t,.) \in \mathbf{L}^p$ implique que $y_n(t,.)^{k+1} \in \mathbf{L}^{p/(k+1)}$. De la suite initiale $(x_n)_n$ bornée, on sait qu'on peut extraire une sous suite $(y_n)_n$ qui converge faiblement* et presque partout vers une fonction $y \in \mathbf{L}^\infty(I, W^{1,p}(U))$. Cette propriété est connu dans les espaces de Sobolev (voir [56] par exemple). De plus, pour $k \in \{0, ..., p-2\}$, $(y_n^{k+1})_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(I, W^{1,p/(k+1)}(U))$. Similairement il existe $z_{k+1} \in \mathbf{L}^\infty(I, W^{1,p/(k+1)}(U))$ telle que $(y_n^{k+1})_n$ converge faiblement* et presque partout vers z_{k+1}, par extraction d'une sous suite. On montre que $y^{k+1} = z_{k+1}$ p.p. D'où (3.1.4) eu lieu.

Par un même raisonement, puisque la suite $(y_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(I, W^{2,p}(U))$, on trouve (3.1.5), d'où la preuve de la proposition. ■

Proposition 3.1.5 *Pour tout entier $p \in [2, \infty)$, l'espace $l^p(\mathbb{Z})$ est I-lisse faiblement compact pour p.*

Preuve

On a pour toute suite $(x_n)_n$ bornée, on peut extraire une sous suite $(y_n) \subset \mathbf{L}^\infty(I, l^p(\mathbb{Z}))$ qui converge faiblement* vers $y \in \mathbf{L}^\infty(I, l^p(\mathbb{Z}))$ telle que (3.1.1) est satisfaite.

Nous avons, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^1(I, l^{p'}(\mathbb{Z}))$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle y_n(t), \xi(t) \rangle dt = \int_I \langle y(t), \xi(t) \rangle dt,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \langle y_n^k(t), \xi^k(t) \rangle dt = \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \langle y^k(t), \xi^k(t) \rangle dt,$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \langle y_n^k(t), \xi^k(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \langle y^k(t), \xi^k(t) \rangle dt.$$

Ceci étant vérifier pour tout $\xi \in \mathbf{L}^1(I, l^{p'}(\mathbb{Z}))$, en particulier,
pour $\xi = (1, 0, ..., 0, ...)$ on trouve $\lim_{n\to\infty} \int_I y_n^1(t)dt = \int_I y^1(t)dt$,
pour $\xi = (0, 1, ..., 0, ...)$ on trouve $\lim_{n\to\infty} \int_I y_n^2(t)dt = \int_I y^2(t)dt$,
donc $\forall k \in \mathbb{N}$, pour $\xi = (0, 0, ..., 1, ...)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_I y_n^k(t)dt = \int_I y^k(t)dt.$$

D'où, la suite $(y_n^k(t))_n$ converge presque partout vers $y^k(t)$. Par conséquent, en vertu de la proposition 2.2.41 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_I \langle J_p(z(t)+y_n(t))-J_p(y_n(t)), y_n(t)\rangle dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_I \left\langle J_p\Big(z(t)+\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)}(t)\Big) - J_p\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(y_k^{(n)}(t))\Big), \sum_{k=1}^{\infty}(y_k^{(n)}(t))\right\rangle dt \\ &= \int_I \left\langle J_p\Big(z(t)+\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\Big) - J_p\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(y_k(t))\Big), \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\right\rangle dt \\ &= \int_I \langle J_p(z(t)+y(t)) - J_p(y(t)), y(t)\rangle dt.\end{aligned}$$

On obtient (3.1.1). Par conséquent, $l^p(\mathbb{Z})$ est I-lisse faiblement compact. ■

Dans la suite, nous allons présenter la propriété de la "continuité faible de la multi-application $x \longmapsto \Gamma^r(x, C)$" voir [10]. Pour la commodité de lecture nous exposons sa démonstration.

Proposition 3.1.6 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse. Soit $C \subset E$ un sous ensemble fermé. Supposons que pour un exposant $p \in [2, \infty)$ et une suite bornée $(v_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{L}_E^\infty(I)$, on peut extraire une sous suite $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement* vers $v \in \mathbf{L}_E^\infty(I)$ telle que pour tous $z \in \mathbf{L}_E^\infty(I)$ et $\phi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(I)$,*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_I \langle J_p(z(t)+v_{k(n)}(t))-J_p(v_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle \phi(t) dt \\ \leq \int_I \langle J_p(z(t)+v(t)) - J_p(v(t)), v(t)\rangle \phi(t) dt. \qquad (3.1.6)\end{aligned}$$

Alors, la projection P_C est faiblement continue dans $\mathbf{L}_E^\infty(I)$ (relativement aux directions données par la suite $(v_n)_n$ dans le sens suivant : pour tout $r > 0$ et toute suite bornée $(u_n)_n$ de $\mathbf{L}_E^\infty(I)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathbf{L}_E^\infty(I) \\ u_n(t) \in P_C\big(u_n(t) + r v_n(t)\big) \text{ p.p. } t \in I, \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_C\big(u(t) + r v(t)\big).$$

L'assertion ci-dessus est satisfaite si l'espace de Banach E est supposé "I-lisse faiblement compact" pour un exposant $p \in [2, \infty)$. On peut réecrire la conclusion comme suit. Si pour tout $t \in I$, $v_n(t) \in \Gamma^r(u_n(t), C)$, à la limite on trouve que $v(t) \in \Gamma^r(u(t), C)$, pour presque tout $t \in I$.

Remarque 3.1.7 *Soulignons que cette proposition n'a aucun lien avec la prox-régularité de l'ensemble C. Cette propriété est purement topologique et dépend seulement de l'espace de Banach considéré.*

Preuve

Par l'homogénité de J_p ($J_p(sx) = s^{p-1}J_p(x)$), en remplaçant $sz(t)$ par $z(t)$ dans (3.1.6), on a pour tout $s \in (0, r)$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_I \langle J_p(z(t)+sv_{k(n)}(t)) - J_p(sv_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle \phi(t)dt$$
$$\leq \int_I \langle J_p(z(t) + sv(t)) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle \phi(t)dt. \tag{3.1.7}$$

Il reste à montrer que pour presque tout $t \in I$, $v(t) \in \Gamma^r(u(t), C)$. Fixons $\xi \in C$, pour tout entier n et presque tout $t \in I$, puisque $u_{k(n)}(t) \in P_C(u_{k(n)}(t) + rv_{k(n)}(t))$, on a

$$\|u_{k(n)}(t) + rv_{k(n)}(t) - \xi\|^p - \|rv_{k(n)}(t)\|^p \geq 0.$$

Par la Proposition 2.2.27, cette inégalité peut s'écrire sous la forme

$$\int_0^r \frac{d}{ds}[\|u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\|^p - \|sv_{k(n)}(t)\|^p]ds \geq -\|u_{k(n)}(t) - \xi\|^p$$

et donc

$$\int_0^r \langle J_p(u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi) - J_p(sv_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle ds \geq -\frac{1}{p}\|u_{k(n)}(t) - \xi\|^p.$$

Alors pour toute fonction strictement positive $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$, on a

$$\int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p(u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi) - J_p(sv_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle dtds \geq -\frac{1}{p}\int_I \|u_{k(n)}(t) - \xi\|^p dt. \tag{3.1.8}$$

Nous cherchons maintenant le passage à la limite dans cette dernière inégalité afin d'obtenir

$$\int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p(u(t) + sv(t) - \xi) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle dtds \geq -\frac{1}{p}\int_I \|u(t) - \xi\|^p dt. \tag{3.1.9}$$

Puisque $(u_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ et converge fortement vers u dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \phi(t)\|u_{k(n)}(t) - \xi\|^p dt = \int_I \phi(t)\|u(t) - \xi\|^p dt.$$

Considérons la partie gauche dans l'inégalité (3.1.8). On sait que J_p est localement bornée dans E^* et localement uniformément continue puisque E est uniformément lisse (Proposition 2.2.27). Pour presque tout $t \in I$ et $s \in [0, r]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle J_p\big(u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big) - J_p\big(u(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big), v_{k(n)}(t)\rangle = 0,$$

et cette convergence est uniforme pour tout $t \in I$ et $s \in (0, r)$. Donc la limite et les intégrales peuvent être inversés (selon le Théorème de Lebesgue) et alors

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p\big(u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big) - J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big), v_{k(n)}(t)\rangle dtds$$
$$- \int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p\big(u(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big) - J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big), v_{k(n)}(t)\rangle dtds \Big| = 0.$$

De (3.1.7) avec $z(t) = u(t) - \xi$ et par le Lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p\big(u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big) - J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big), v_{k(n)}(t)\rangle dtds \\
&\leq \int_0^r \int_I \limsup_{n\to\infty} \phi(t)\Big\langle J_p\big(u_{k(n)}(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big) - J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big), v_{k(n)}(t)\Big\rangle dtds \\
&= \int_0^r \int_I \limsup_{n\to\infty} \phi(t)\Big\langle J_p\big(u(t) + sv_{k(n)}(t) - \xi\big) - J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big), v_{k(n)}(t)\Big\rangle dtds \\
&\leq \int_0^r \int_I \phi(t)\Big\langle J_p\big(u(t) + sv(t) - \xi\big) - J_p\big(sv(t)\big), v(t)\Big\rangle dtds. \qquad (3.1.10)
\end{aligned}$$

Par (3.1.8) et (3.1.10), on peut conclure la preuve de (3.1.9).

Nous produisons le raisonnement inverse en intégrant le gradient J_p. On a,

$$\frac{d}{ds}(\|u(t) + sv(t) - \xi\|^p - \|sv(t)\|^p) = p\langle J_p(u(t) + sv(t) - \xi) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{d}{ds}(\|u(t) + sv(t) - \xi\|^p - \|sv(t)\|^p)ds &= \int_0^r p\langle J_p(u(t) + sv(t) - \xi) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle ds \\
&= \|u(t) + rv(t) - \xi\|^p - \|rv(t)\|^p - \|u(t) - \xi\|^p.
\end{aligned}$$

Alors, pour toute fonction non négative $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$, on a par (3.1.9)

$$\begin{aligned}
\int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p(u(t) + sv(t) - \xi) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle dtds \\
&= \frac{1}{p}\int_I \phi(t)(\|u(t) + rv(t) - \xi\|^p - \|rv(t)\|^p - \|u(t) - \xi\|^p)dt \\
&\geq -\frac{1}{p}\int_I \phi(t)\|u(t) - \xi\|^P dt.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_I \phi(t)(\|u(t) + rv(t) - \xi\|^p - \|rv(t)\|^p)dt \geq 0. \qquad (3.1.11)$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour toute fonction non négative $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$, donc on déduit qu'il existe un ensemble mesurable $A_\xi \subset I$ satisfaisant $\lambda(A_\xi) = 0$ et tel que pour tout $t \in I\backslash A_\xi$

$$\|u(t) + rv(t) - \xi\| \geq \|rv(t)\|.$$

Maintenant, sachant que E est séparable, C l'est aussi. Prenons une suite dense $(\xi_i)_{i\geq 0}$ de C, on définit $A := \cup_{i\geq 0} A_{\xi_i}$. D'où, $\lambda(A) = 0$ et pour tout $t \in I\backslash A$ et tout $i \geq 0$, on aura

$$\|u(t) + rv(t) - \xi_i\| \geq \|rv(t)\|.$$

Par la définition de la densité, on trouve que cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $\xi \in C$. Cela prouve que

$$u(t) \in P_C(u(t) + rv(t)).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.1.8 *Dans la preuve de la proposition précédente, on a fixé un point $\xi \in C$. Nous soulignons que pour une fonction bornée $\xi(.)$ définie sur I à valeurs dans C, (3.1.11) est aussi satisfaite en utilisant la séparabilité de $\mathbf{L}^\infty(I,E)$ pour la norme de $\mathbf{L}^1(I,E)$.*

Par cet argument, on généralise le résultat de la proposition 3.1.6 au cas d'un l'ensemble mobile $C(t)$.

Proposition 3.1.9 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse. Soient C_n et $C : I \rightrightarrows E$ des multi-applications à valeurs non vides fermées, satisfaisant*

$$\sup_{t\in I} \mathcal{H}(C_n(t), C(t)) \longrightarrow 0. \tag{3.1.12}$$

Supposons que pour un exposant $p \in [2,\infty)$ et une suite bornée $(v_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, on peut extraire une sous suite $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement vers $v \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et telle que pour tous $z \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int_I \langle J_p(z(t) + v_{k(n)}(t)) - J_p(v_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle \phi(t)dt \\ \leq \int_I \langle J_p(z(t) + v(t)) - J_p(v(t)), v(t)\rangle \phi(t)dt.\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Alors, la projection $P_{C(.)}$ est faiblement continue dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ (relativement aux directions données par la suite $(v_n)_n$) dans le sens suivant : pour tout $r > 0$ et toute suite bornée $(u_n)_n$ de $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathbf{L}^\infty_E(I) \\ u_n(t) \in P_{C_n(t)}(u_n(t) + rv_n(t)) \text{ p.p. } t \in I, \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{C(t)}\big(u(t) + rv(t)\big).$$

Preuve

Soit $\xi(.) \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ une fonction vérifiant $\xi(t) \in C(t)$ pour tout $t \in I$. Soit $\xi_n(t) \in P_{C_n(t)}(\xi(t))$ pour tout $t \in I$. Par la relation (3.1.12) $(\xi_n)_n$ converge vers ξ dans $\mathbf{L}^\infty(I,E)$ et donc elle est bornée. Les arguments de la Proposition 3.1.6 sont satisfaits pour l'application non-constante $\xi(.)$ et permettent de montrer que pour tout $\phi \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R})$,

$$\int_I \phi(t)(\|u(t) + rv(t) - \xi\|^p - \|rv(t)\|^p)dt \geq 0. \tag{3.1.14}$$

La remarque 3.1.8, nous conduit à l'achevement de la preuve. ■

Nous sommes maintenant en mesure de décrire nos résultats d'existence de solutions pour nos problèmes considérés.

3.2 Inclusion différentielle avec une perurbation F semicontinue supérieurement

Cette section consiste à montrer le résultat d'existence de solution pour le processus de la rafle du second ordre dans un espace de Banach sous une condition de boule-compacité supposée sur l'ensemble K. La démonstration de notre résultat d'existence est inspiré de celle donnée dans [10] pour le problème du premier ordre.

Théorème 3.2.1 *Soit $I = [0,T]$ $(T > 0)$ et soit E un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse et I-lisse faiblement compact pour un exposant $p \in [2,\infty)$.*
Soit $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées. On suppose qu'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$F(t,x,u) \subset m\overline{\mathbf{B}}_E,\ \forall (t,x,u) \in I \times E \times E. \tag{3.2.1}$$

Soient $r > 0$, $K : [0,T] \rightrightarrows E$ une m.a. à valeurs non vides boule-compactes et r-prox-régulières. Supposons que $K(.)$ est Lipschitzienne, i.e. il existe une constante $k > 0$ telle

$$\mathcal{H}(K(t),K(s)) \leq k|t-s|,\ \forall t,s \in I. \tag{3.2.2}$$

Alors, pour tous $x_0 \in E$ et $u_0 \in K(0)$, il existe deux applications Lipschitziennes $u, x : I \to E$ satisfaisant l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} u(0) = u_0; \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds,\ \forall t \in I; \\ u(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(u(t)) + F(t,x(t),u(t)),\ p.p.\ t \in I, \end{cases}$$

De plus, on a $\|\dot{u}(t)\| \leq 2m + k$ pour presque tout $t \in I$. En d'autres termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + F(t,x(t),\dot{x}(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = u_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$.

La preuve se base sur la construction des solutions discrétisées et sur la Proposition 3.1.9 qui nous permet d'étudier les limites des applications approximantes.

Preuve

***Etape 1*. Construction des "solutions discrétisées".**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{T}{n_0}(m+k) \leq \frac{r}{2}. \tag{3.2.3}$$

Considérons la partition $\big(\{t_{n,0}\}, I_{n,i}\big)$, $0 \leq i \leq n$ de l'intervalle $I = [0,T]$ définie par $I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$, $t_{n,i} = ih$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{T}{n}$. Pour tout $n \geq n_0$ on définit les applications approximantes sur chaque intervalle $I_{n,i}$ comme suit :

$$\begin{cases} u_n(t) = u_{n,i} + (\frac{t}{h} - i)(u_{n,i+1} - u_{n,i}); \\ x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds; \\ x_{n,i} = x_n(t_{n,i}); \\ K_n(t) = K(t_{n,i+1}), \end{cases} \tag{3.2.4}$$

et puisque F est à valeurs non vides, on choisit un point

$$z_{n,i} \in F(t_{n,i}, x_{n,i}, u_{n,i}), \tag{3.2.5}$$

et on définit l'application z_n de I dans E par $z_n(t) = z_{n,i}$, pour tout $t \in I_{n,i}$, où $u_{n,0} = u_0$; $x_{n,0} = x_0$, et pour tout $0 \leq i \leq n-1$ les points $u_{n,i+1}$ sont donnés par

$$u_{n,i+1} = P_{K(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - hz_{n,i}). \tag{3.2.6}$$

Cette opération est bien définie puisque les constantes m et k satisfont la relation (3.2.3), K satisfait (3.2.2) et les ensembles $K(t)$ sont r-prox-réguliers. En effet, on a $u_{n,0} \in K(t_{n,0})$ et donc

$$\begin{aligned} d(u_{n,0} - hz_{n,0}, K(t_{n,1})) \leq & d\big(u_{n,0} - hz_{n,0}, K(t_{n,0})\big) + \mathcal{H}\big(K(t_{n,1}), K(t_{n,0})\big) \\ \leq & \|u_{n,0} - hz_{n,0} - u_{n,0}\| + k|t_{n,1} - t_{n,0}| \\ = & h(\|z_{n,0}\| + k) \\ \leq & h(m+k) \leq \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.7.2, on a $P_{K(t_{n,1})}(u_{n,0} - hz_{n,0})$ est un ensemble non vide et univoque. Donc on définit le point $u_{n,1} \in K(t_{n,1})$, par

$$u_{n,1} = P_{K(t_{n,1})}(u_{n,0} - hz_{n,0}).$$

Similairement, on a par induction, pour $0 \leq i \leq n-1$ et puisque $u_{n,i} \in K(t_{n,i})$

$$\begin{aligned} d(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(t_{n,i+1})) \leq & d(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(t_{n,i})) + \mathcal{H}(K(t_{n,i+1}), K(t_{n,i})) \\ \leq & \|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i}\| + k|t_{n,i+1} - t_{n,i}| \\ = & h(\|z_{n,i}\| + k) \\ \leq & h(m+k) \leq \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.7.2, on a $P_{K(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - hz_{n,i})$ est un ensemble non vide et univoque. Donc on définit le point $u_{n,i+1} \in K(t_{n,i+1})$, par

$$u_{n,i+1} = P_{K(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - hz_{n,i}).$$

Observons que la relation (3.2.6) et le Théorème 2.7.2 donnent

$$u_{n,i+1} = P_{K(t_{n,i+1})}\left(u_{n,i+1} + r\frac{u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}\|}\right), \tag{3.2.7}$$

donc,

$$\frac{u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}\|} \in \Gamma^r\Big(u_{n,i+1}, K(t_{n,i+1})\Big).$$

D'autre part, on a par (3.2.4), pour tout $t \in I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$

$$u_n(t) = u_{n,i} + (\frac{t}{h} - i)(u_{n,i+1} - u_{n,i}),$$

et pour tout $t \in I_{n,i-1} = (t_{n,i-1}, t_{n,i}]$

$$u_n(t) = u_{n,i-1} + (\frac{t}{h} - (i-1))(u_{n,i} - u_{n,i-1}).$$

On trouve

$$\begin{aligned} u_n(t_{n,i}) =& u_{n,i-1} + \left(\frac{t_{n,i}}{h} - (i-1)\right)(u_{n,i} - u_{n,i-1}) \\ =& u_{n,i-1} + (i - i + 1)(u_{n,i} - u_{n,i-1}) \\ =& u_{n,i}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to^{>} t_{n,i}} u_n(t) =& u_{n,i} + (\frac{t_{n,i}}{h} - i))(u_{n,i+1} - u_{n,i}) \\ =& u_{n,i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, l'application u_n est continue et $x_n \in \mathbf{C}^1_E(I)$.

Etape 2.

Pour presque tout $t \in I_{n,i}$, nous avons par (3.2.4)

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}) - z_{n,i}.$$

Posons

$$\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}).$$

Nous allons montrer que $-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(m+k)}}\big(u_{n,i+1}, K_n(t)\big) \cap \overline{\mathbf{B}}(0,(m+k))$, qui est équivalent à

$$\|\Delta_n(t)\| \leq (m+k) \text{ et } u_{n,i+1} \in P_{K_n(t)}\left(u_{n,i+1} - \frac{r}{(m+k)}\Delta_n(t)\right).$$

Tout d'abord, nous vérifions que $\Delta_n(t)$ est un vecteur borné. Utilisons la construction des points $u_{n,i+1}$ (voir la relation (3.2.6)) et le fait que $u_{n,i} \in K(t_{n,i})$, on a pour presque tout $t \in I_{n,i}$

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n(t)\| =& \|\frac{1}{h}\big(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}\big)\| \\
=& \frac{1}{h}\|P_{K(t_n,i+1)}\big(u_{n,i} - hz_{n,i}\big) - (u_{n,i} - hz_{n,i})\| \\
=& \frac{1}{h}d\big(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(t_{n,i+1})\big) \\
\leq& \frac{1}{h}\left(d\big(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(t_{n,i})\big) + \mathcal{H}\big(K(t_{n,i+1}), K(t_{n,i})\big)\right) \\
\leq& \frac{1}{h}\big(\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i}\| + k|t_{n,i+1} - t_{n,i}|\big) \\
\leq& \frac{1}{h}(h(m+k)) = m+k.
\end{aligned}$$

D'où, pour presque tout $t \in I_{n,i}$,

$$\|\Delta_n(t)\| \leq (m+k). \tag{3.2.8}$$

En suite, en considérant le vecteur $v = u_{n,i} - hz_{n,i}$ et puisque K a des valeurs r-prox-régulières, la relation (3.2.7) donne

$$u_{n,i+1} = P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}\right). \tag{3.2.9}$$

Observons, que par la relation (3.2.8), on a $\frac{\|P_{K_n(t)}(v)-v\|}{h(m+k)} \leq 1$. Donc, appliquant le Lemma 2.4.6 à la the relation (3.2.9), avec $\lambda = \frac{1}{h(m+k)}\|P_{K_n(t)}(v) - v\|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_{n,i+1} =& P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{h}\frac{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}{(m+k)}\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}\right) \\
=& P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{h(m+k)}(P_{K_n(t)}(v) - v)\right) \\
=& P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{(m+k)}\Delta_n(t)\right),
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(m+k)}}(u_{n,i+1}, K_n(t)),$$

ou de façon équivalente

$$u_{n,i+1} \in P_{K_n(t)}\left(u_{n,i+1} - \frac{r}{(m+k)}\Delta_n(t)\right) \text{ } p.p. \text{ sur } I_{n,i}. \tag{3.2.10}$$

Etape 3. **Existence des limites**.

Tout d'abord, on montre la convergence de la suite $(u_n(.)) \subset \mathbf{C}_E(I)$. Par la relation (3.2.8), on a pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_n(t)\| \leq & \|\dot{u}_n(t) + z_n(t)\| + \|z_n(t)\| \\ = & \|\Delta_n(t)\| + \|z_n(t)\| \\ \leq & 2m + k,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq 2m + k. \tag{3.2.11}$$

Ceci montre que $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $(2m + k)$. Donc $(u_n(.))$ est une suite bornée de $\mathbf{C}_E(I)$ puisque pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \|u_0\| + T(2m + k) := M. \tag{3.2.12}$$

Maintenant, nous allons montrer que $(u_n(.))_{n \geq n_0}$ est relativement compacte. Evidemment, $(u_n(.))$ est équicontinue. En effet, pour tous $t, s \in I$ $(t > s)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\| = & \|u_0 + \int_0^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau - u_0 - \int_0^s \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau\| \\ \leq & \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \\ \leq & M|t - s|.\end{aligned}$$

Prouvons que pour chaque t fixé, la suite $(u_n(t))_{n \geq n_0}$ est relativement compacte. Pour chaque $0 \leq i \leq n - 1$ et pour tout $t \in I_{n,i}$, utilisant les relations (3.2.4), (3.2.8) et le fait que $u_{n,i} \in K(t_{n,i})$, on a

$$\begin{aligned}d(u_n(t), K(t)) \leq & d(u_n(t), K(t_{n,i})) + \mathcal{H}(K(t_{n,i}), K(t)) \\ \leq & \|u_n(t) - u_{n,i}\| + k|t - t_{n,i}| \\ = & \|u_{n,i} + (\frac{t}{h} - i)(u_{n,i+1} - u_{n,i}) - u_{n,i}\| + k|t - t_{n,i}| \\ \leq & (\frac{t_{n,i+1}}{h} - i)\|(u_{n,i+1} - u_{n,i})\| + k(t_{n,i+1} - t_{n,i}) \\ = & \|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + kh \\ = & \|u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i} - hz_{n,i}\| + kh \\ = & \|h\Delta_n(t) - hz_{n,i}\| + kh \\ \leq & h\|\Delta_n(t)\| + hm + kh \\ \leq & h(m + k) + hm + kh = 2h(m + k) = 2\frac{T}{n}(m + k).\end{aligned}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$ il existe $y_n(t) \in K(t)$ telle que

$$d(u_n(t), K(t)) \leq \|y_n(t) - u_n(t)\| < 2\frac{T}{n}(m+k) + \frac{T}{n}(m+k) = 3\frac{T}{n}(m+k).$$

Posons $e_n(t) = u_n(t) - y_n(t)$, et observons que

$$\|e_n(t)\| < 3\frac{T}{n}(m+k), \text{ et } u_n(t) - e_n(t) \in K(t).$$

Grâce à cette dernière inégalité et la relation (3.2.12), on trouve pour tout $n \geq n_0$,

$$\|u_n(t) - e_n(t)\| \leq M + 3\frac{T}{n}(m+k) \leq M + 3\frac{T}{n_0}(m+k) := M',$$

i.e.,

$$\big(u_n(t) - e_n(t)\big) \in K(t) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M'),$$

ou d'une manière équivalente

$$u_n(t) \in K(t) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M') + \big(\{0\} \cup \{e_k(t)/k \geq n_0\}\big) := \widetilde{K}(t). \tag{3.2.13}$$

Remarquons que l'ensemble $\widetilde{K}(t)$ est compact car $K(t)$ est boule-compact et $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(t) = 0$. Par conséquent, $(u_n(t))_{n\geq n_0}$ est relativement compacte. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(.))_{n\geq n_0}$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}_E(I)$, on peut extraire de $(u_n(.))$ une sous suite notée similairement et qui converge uniformément vers une application $u(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. Il est claire que $u(0) = u_0$, $u(.)$ est Lipschitzienne de rapport $(2m+k)$. En effet, pour tous $t, s \in I$, on a

$$\begin{aligned}\|u(t) - u(s)\| \leq& \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u(s) - u_n(s)\| \\ \leq& \|u(t) - u_n(t)\| + (2m+k)|t-s| + \|u(s) - u_n(s)\|,\end{aligned}$$

passant à la limite quand $n \to \infty$, on trouve

$$\|u(t) - u(s)\| \leq (2m+k)|t-s|.$$

Et pour tout $t \in I$

$$u(t) \in K(t) \tag{3.2.14}$$

en vertu de la fermeture de $K(t)$.

D'autre part, on montre la convergence de la suite $(x_n(.))$ dans $\mathbf{C}_E(I)$. Pour tous $t, s \in I$ $(t > s)$ et pour tour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq& \|x_0 + \int_0^t u_n(\tau)d\tau - x_0 - \int_0^t u_n(\tau)d\tau\| \\ \leq& \int_0^t \|u_n(\tau)\|d\tau \\ \leq& M|t-s|.\end{aligned}$$

Donc, $(x_n(.))$ est équicontinue. En outre, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|x_n(t)\| =& \|x_0 + \int_0^t u_n(s)ds\| \\ \leq& \|x_0\| + \int_0^t \|u_n(s)\|ds \\ \leq& \|x_0\| + MT.\end{aligned}$$

De plus, vu que

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds,$$

par la relation (3.2.13), on trouve

$$x_n(t) \in x_0 + \int_0^t \overline{co}(\widetilde{K}(s))ds := \Gamma(t),$$

qui est compact puisque pour tout $t \in I$, $\overline{co}(\widetilde{K}(t))$ est un ensemble convexe compact (voir [26] pour plus de détails). Donc, $(x_n(.))_{n \geq n_0}$ est relativement compacte. Alors, on peut appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà pour conclure l'existence d'une sous suite, encore notée $(x_n(.))$, qui converge uniformément sur I vers $x(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. Il est claire que $x(0) = x_0$ et $x(.)$ est Lipschitzienne de rapport M.

Observons que pour tout $t \in I$,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} u_n(s)ds = x_0 + \int_0^t u(s)ds \tag{3.2.15}$$

utilisons le théorème de Lebesgue car $(u_n(.))$ est équibornée (relation (3.2.12)), d'où, $\dot{x}(.) = u(.)$ presque partout.

Enfin, prouvons les convergences des suites $(z_n(.))$ et $(\dot{u}_n(.))$.
Posons pour chaque $t \in I_{n,i}$, $\theta_n(t) = t_{n,i+1}$, $\delta_n(t) = t_{n,i}$, et observons que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |\delta_n(t) - t| &= \lim_{n\to\infty} (t - t_{n,i}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{T}{n} = 0,\end{aligned}$$

c'est à dire, $\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$. Par le même calcul on obtient $\lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$. Donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \big(\|x_n(\delta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\|\big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \big(M|\delta_n(t) - t| + \|x_n(t) - x(t)\|\big) = 0.\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| = 0.$$

Similairement, nous avons pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \big(\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|\big)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \big((2m+k)|\delta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\|\big),\end{aligned}$$

d'où, $\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0$. La convergence de la suite $(x_n(\theta_n(.)))_n$ et de $(u_n(\theta_n(.)))_n$ vers $x(.)$ et $u(.)$ respectivement, est obtenue par la même manière.

Maintenant, par la relation (3.2.5) et la construction de u_n, x_n et z_n, on a pour tout $t \in I$,

$$z_n(t) \in F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))). \tag{3.2.16}$$

Puisque F satisfait la relation (3.2.1), on déduit que $(z_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, donc on peut extraire une sous suite notée $(z_n(.))$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_{E^*})$ vers une fonction $z(.)$ dans $\mathbf{L}^\infty_E(I) = (\mathbf{L}^1_{E^*}(I))^*$ car E est reflexif, i.e. pour tout $\zeta(.) \in \mathbf{L}^1_{E^*}(I)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle z(.), \zeta(.)\rangle. \tag{3.2.17}$$

Puisque $\mathbf{L}^\infty_{E^*}(I) \subset \mathbf{L}^1_{E^*}(I)$, par la relation (3.2.17) on conclut que pour tout $\zeta(.) \in \mathbf{L}^\infty_{E^*}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle z(.), \zeta(.)\rangle,$$

i.e., $(z_n(.))$ converge-$\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E^*})$ vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^1_E(I)$, par le lemme de Mazur, il existe une sous suite $(\xi_n(.))$ $\big($où $\xi_n(.)$ est une combinaison convexe de $\{z_k(.),\ k \geq n\}\big)$ qui converge vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^1_E(I)$. La convergence forte dans $\mathbf{L}^1_E(I)$ de $(\xi_n)_n$ vers $z(.)$ nous permet d'extraire de la suite $(\xi_n(.))$ une sous suite qui converge p.p. vers $z(.)$. Par suite,

$$z(t) \in \overline{\{\xi_n(t),\ n \in \mathbb{N}\}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\xi_n(t)\}},\ \text{p.p. } t \in I,$$

et d'où,

$$z(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{z_k(t),\ k \geq n\},\ \text{p.p. } t \in I.$$

Posons

$$A_n = \{z_k(t),\ k \geq n\}.$$

Alors, par le Théorème 2.1.1, on obtient pour tout $x^* \in E^*$,

$$\begin{aligned}\langle x^*, z(t)\rangle &\leq \delta^*(x^*, A_n),\ \forall n \in \mathbb{N}\\ &= \sup_{k\geq n} \langle x^*, z_k(t)\rangle,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned}\langle x^*, z(t)\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \langle x^*, z_k(t)\rangle \\ &= \limsup_{n\to\infty} \langle x^*, z_n(t)\rangle.\end{aligned}$$

De la relation (3.2.16), découle l'inégalité suivante

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(x^*, F\big(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))\big)\Big).$$

On définit pour tout $x^* \in E^*$ l'application

$$\begin{aligned}h_{x^*} : [0.T] \times E \times E &\longrightarrow E \\ (t, x, u) &\longmapsto h_{x^*}(t, x, u) = \delta^*(x^*, F(t, x, u)),\end{aligned}$$

qui est semi continue supérieurement grâce à la s.c.s de F, et donc

$$\limsup_{(t,x,u)\to(t_0,x_0,u_0)} h_{x^*}(t, x, u) \leq h_{x^*}(t_0, x_0, u_0).$$

Par conséquent, puisque $\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$, $\lim_{n\to\infty} x_n(\delta_n(t)) = x(t)$ et $\lim_{n\to\infty} u_n(\delta_n(t)) = u(t)$, on conclut que,

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*\Big(x^*, F\big(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))\big)\Big) \leq \delta^*\Big(x^*, F\big(t, x(t), u(t)\big)\Big)$$

d'où,

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \delta^*(x^*, F(t, x(t), u(t))), \quad \forall x^* \in E^*,$$

ou bien,

$$\sup_{x^*\in E^*} \Big(\langle x^*, z(t)\rangle - \delta^*\big(x^*, F(t, x(t), u(t))\big)\Big) \leq 0.$$

Comme F est à valeurs non vides fermées, par la relation (2.1.1), on obtient

$$d\big(z(t), F(t, x(t), u(t))\big) \leq 0.$$

Ce qui prouve que

$$z(t) \in F(t, x(t), u(t)), \text{ p.p. } t \in I. \tag{3.2.18}$$

Revenons maintenant à la relation (3.2.11), on a $(\dot{u}_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers une application $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$. En effet, pour tout $y \in \mathbf{L}^1_{E^*}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle = \langle w(.), y(.)\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^t \langle w(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = \mathbf{1}_{[0,t]}(.)e_j$, tels que $t \in I$, $\mathbf{1}_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,t]$, et (e_j) une suite de l'espace E^* qui sépare les points de E (une telle suite existe car E est séparable), on obtient

$$\left\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds, e_j \right\rangle = \left\langle \int_0^t w(s)ds, e_j \right\rangle, \ \forall j,$$

ce qui assure que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Puisque $(u_n(.))$ est absolument continue , on a l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty}(u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds,$$

par conséquent,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds,$$

c'est à dire, $u(.)$ est absolument continue, et donc $w(.) = \dot{u}(.)$.
Observons de plus, que pour tout $t \in I$

$$\mathcal{H}(K_n(t), K(t)) = \mathcal{H}(K(\theta_n(t)), K(t)) \leq k|\theta_n(t) - t| \to 0. \tag{3.2.19}$$

Montrons maintenant que pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(m+k)}}(u(t), K(t)),$$

ou de manière équivalente

$$u(t) \in P_{K(t)}\left(u(t) - \frac{r}{(m+k)}\left(\dot{u}(t) + z(t)\right)\right).$$

On pose $r' = \frac{r}{(m+k)}$. On a $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t)$ et par les arguments cités dessus on sait que $(\Delta_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $\dot{u}(.)+z(.) := \Delta(.)$. Utilisant la propriété "I-lisse faiblement compact" supposée sur l'espace E à la suite $(r'\Delta_n(.))_n$ nous obtenons pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \big\langle J_p(y(t) - r'\Delta_n(t)) - J_p(-r'\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\big\rangle \phi(t)dt =$$
$$\int_I \big\langle J_p(y(t) - r'\Delta(t)) - J_p(-r'\Delta(t)), \Delta(t)\big\rangle \phi(t)dt.$$

Par (3.2.10) on sait que pour presque tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in P_{K_n(t)}(u_n(\theta_n(t)) - r'\Delta_n(t)),$$

et puisque la suite $(u_n(\theta_n(.)))_n$ converge fortement dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $u(.)$, par la relation (3.2.19), on conclut par la Proposition 3.1.9, que pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t)}(u(t) - r'\Delta(t)),$$

d'après la définition 2.4.4, $-\Delta(t) \in \Gamma^{r'}(u(t), K(t))$, donc on a montré qu'il existe $r' = \frac{r}{m+k} > 0$ tel que $-\Delta(t) \in \Gamma^{r'}(u(t), K(t))$ i.e.

$$-\Delta(t) \in \bigcup_{r'>0} \Gamma^{r'}(u(t), K(t)).$$

En vertu de la remarque 2.4.5, on trouve $-\Delta(t) \in N_{K(t)}(u(t))$, d'où

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in N_{K(t)}(u(t)),\ p.p.\ t \in I,$$

et par (3.2.18) on aura

$$-\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(u(t)) + F(t, x(t), u(t)),\ p.p.\ t \in I.$$

Enfin, par les relations (3.2.14) et (3.2.15) on conclut que

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

par conséquent, notre problème $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution Lipschitzienne $x(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$. De plus,

$$\|\ddot{x}(t)\| \leq 2m + k,\ p.p.\ t \in I.$$

Ce qui complète la preuve de notre théorème. ■

Remarquons que dans le théorème 3.2.1, la multi-application K dépend du temps. Dans ce qui suit, on étend ce résultat au cas où K dépend de l'état $x(.)$. L'objectif est le résultat d'existence pour l'inclusion différentielle du second ordre suivante

$$(\mathcal{P}'_F) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)),\ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = u_0. \end{cases}$$

Théorème 3.2.2 *Soient $I = [0,T]$ $(T > 0)$ et E un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse et I-lisse faiblement compact pour un exponent $p \in [2,\infty)$.*
Soit $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application s.c.s. à valeurs non vides convexes et fermées. Supposons qu'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$F(t,x,u) \subset m\overline{\mathbf{B}}_E,\ \forall (t,x,u) \in I \times E \times E. \tag{3.2.20}$$

Soient $r > 0$, $K : E \rightrightarrows E$ à valeurs non vides fermées et r-prox-régulières. On suppose que $K(.)$ satisfait les assertions suivantes
(i) *$K(.)$ est Lipschitzienne, i.e., il existe une constant $k > 0$ telle que*

$$\mathcal{H}(K(y),K(z)) \leq k\|y-z\|; \forall y,z \in E;$$

(ii) *il existe un ensemble compact $L \subset E$ tel que*

$$K(y) \subset L \subset l\overline{\mathbf{B}},\ \forall y \in E.$$

Alors, pour tout $x_0 \in E$ et $u_0 \in K(x_0)$, l'inclusions différentielle $(\mathcal{P}'_F)$ admet au moins une solution Lipschitzienne $x(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$.

Preuve La preuve est essentiellement identique à celle du Théorème 3.2.1, avec quelqeues adaptations.

Fixons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{T}{n_0}(m+3kl) \leq \frac{r}{2}. \tag{3.2.21}$$

La première étape consiste à définir les applications approximantes comme dans (3.2.4) et (3.2.5), en posant pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $t \in I_{n,i}$

$$\begin{cases} u_n(t) = u_{n,i} + (\frac{t}{h} - i)(u_{n,i+1} - u_{n,i}); \\ x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds; \\ x_{n,i} = x_n(t_{n,i}); \\ z_{n,i} \in F(t_{n,i}, x_{n,i}, u_{n,i}); \\ K_n(t) = K(x_{n,i}), \end{cases} \tag{3.2.22}$$

où $u_{n,0} = u_0$; $x_{n,0} = x_0$ et pour tout $0 \leq i \leq n-1$ le point $u_{n,i+1}$ est donné par

$$u_{n,i+1} = P_{K(x_{n,i})}(u_{n,i} - hz_{n,i}). \tag{3.2.23}$$

D'abord, observons que cette dernière relation implique que $u_{n,i+1} \in K(x_{n,i})$, et donc par l'hypothèse (ii), on obtient pour tout $0 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\|x_{n,i} - x_{n,i-1}\| =& \| \int_0^{t_{n,i}} u_n(s)ds - \int_0^{t_{n,i-1}} u_n(s)ds \| \leq \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \|u_n(s)\|ds \\
=& \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \|u_{n,i-1} + (\frac{s}{h} - (i-1))(u_{n,i} - u_{n,i-1})\|ds \\
\leq& \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \Big(\|u_{n,i-1}\| + |\frac{s}{h} - (i-1)| \Big(\|u_{n,i}\| + \|u_{n,i-1}\| \Big) \Big) ds \\
\leq& \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \Big(l + \big(\frac{t_{n,i}}{h} - (i-1)\big)(2l) \Big) ds = 3l|t_{n,i} - t_{n,i-1}| = 3lh.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la relation (3.2.23) est bien définie. En effet, puisque $u_0 \in K(x_0)$, on a

$$\begin{aligned}
d(u_{n,0} - hz_{n,0}, K(x_{n,0})) \leq& \|u_{n,0} - hz_{n,0} - u_{n,0}\| \\
\leq& hm \leq \frac{r}{2} < r
\end{aligned}$$

par la relation (3.2.21). Alors, on pose

$$u_{n,1} = P_{K(x_{n,0})}(u_{n,0} - hz_{n,0})$$

ce qui implique que $u_{n,1} \in K(x_{n,0})$. Par conséquent, en utilisant la relation (3.2.21) une deuxième fois, on peut écrire

$$\begin{aligned}
d(u_{n,1} - hz_{n,1}, K(x_{n,1})) \leq& d(u_{n,1} - hz_{n,1}, K(x_{n,0})) + \mathcal{H}(K(x_{n,1}), K(x_{n,0})) \\
\leq& \|u_{n,1} - hz_{n,1} - u_{n,1}\| + k\|x_{n,1} - x_{n,0}\| \\
\leq& hm + k3lh \leq \frac{T}{n_0}(m + 3kl) \leq \frac{r}{2} < r.
\end{aligned}$$

On pose

$$u_{n,2} = P_{K(x_{n,1})}(u_{n,1} - hz_{n,1}).$$

Similairement, on peut définir, par induction, tous les points $(u_{n,i}),\ 0 \leq i \leq n$.

La deuxième étape de la preuve reste similaire à celle du Théorème 3.2.1 avec l'estimation suivante

$$\|\Delta_n(t)\| \leq m + 3kl,\ p.p.\ t \in I_{n,i},$$

et

$$-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(m+3kl)}}(K_n(t), u_{n,i+1})$$

ou de manière équivalente,

$$u_{n,i+1} \in P_{K_n(t)}(u_{n,i+1} - \frac{r}{(m+3kl)}\Delta_n(t)).$$

Dans l'étape 3, pour montrer que pour tout t fixé la suite $(u_n(t))_{n\geq n_0}$ est relativement compacte, on considère pour tout $0 \leq i \leq n$ et $t \in I_{n,i}$ (en utilisant le fait que $u_{n,i} \in K(x_{n,i-1})$)

$$\begin{aligned}
d(u_n(t), K_n(t)) =& d(u_n(t), K(x_{n,i})) \leq d(u_n(t), K(x_{n,i-1})) + \mathcal{H}(K(x_{n,i}), K(x_{n,i-1})) \\
\leq& \|u_n(t) - u_{n,i}\| + k\|x_{n,i} - x_{n,i-1}\| \\
=& \|u_{n,i} + (\frac{t}{h} - i)(u_{n,i+1} - u_{n,i}) - u_{n,i}\| + k\|x_{n,i} - x_{n,i-1}\| \\
\leq& \|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + 3khl \\
=& h\|\Delta_n(t) - z_{n,i}\| + 3khl \\
\leq& h\|\Delta_n(t)\| + hm + 3khl \\
\leq& 2\frac{T}{n}(m + 3kl) \leq 2\frac{T}{n_0}(m + 3kl),
\end{aligned}$$

et puisque $K_n(t) \subset L$, on conclut que pour tout $n \geq n_0$

$$d(u_n(t), L) \leq 2\frac{T}{n_0}(m + 3kl).$$

Donc $(u_n(t))_{n\geq n_0}$ est relativement compacte puisque L est compact. On complète la preuve comme dans le Théorème 3.2.1. ■

3.3 Inclusion différentielle avec une perturbation F de type Carathéodory

Dans cette section, notre but est d'obtenir un résultat d'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_F)$, dans le cas où la perturbation F est Lebesgue-mesurable sur $[0, T]$ et semicontinue supérieurement sur $E \times E$, i.e. F de type Carathéodory.

Rappelons dans un premier lieu de la version multivoque du théorème de Scorza-Dragoni suivant (voir [24, 25]).

Théorème 3.3.1 *Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$. Soient E un espace Polonais et X un espace métrique compact. Soit $F : I \times E \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées satisfaisant les hypothèses suivantes*

*(**i**) pour tout $t \in I$, $gph(F_t) = \{(x, y) \in E \times X/\ y \in F(t, x)\}$ est fermé dans $E \times X$;*

*(**ii**) pour tout $x \in E$, la multi-application $t \longmapsto F(t, x)$ admet une sélection mesurable. Alors, il existe une m.a. F_0 définie de $I \times E$ à valeurs fermés dans $X \cup \{\emptyset\}$ à graphe mesurable et telle que les propriétés suivantes*

*(**1**) il existe un ensemble négligeable N, indépendant de (t, x) telle que*

$$F_0(t, x) \subset F(t, x),\ \forall t \notin N,\ \forall x \in E;$$

(2) si $u : I \to E$ et $v : I \to X$ sont deux fonctions mesurables telle que $v(t) \in F(t, u(t))$ p.p., alors $v(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p. ;

(3) pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $J_\epsilon \subset I$ tel que $\lambda\big(I \setminus J_\epsilon\big) < \epsilon$, le graphe de la restriction $F_0 \mid_{J_\epsilon \times E}$ est fermé et $\emptyset \neq F_0(t, x) \subset F(t, x)$, $\forall (t, x) \in J_\epsilon \times E$.

Une version convexe est également utile. On note par $ck(X)$ l'ensemble des sous ensembles convexes compacts de l'espace X.

Corollaire 3.3.2 *Soient I et E comme dans le théorème 3.3.1. Soit X un sous espace métrisable convexe et compact d'un espace de Hausdorff localement convexe. Soit $F : I \times E \rightrightarrows ck(X)$ une multi-application tels que pour tout $t \in I$, $gph(F_t)$ est fermé dans $E \times X$ et pour tout $x \in E$, $t \longmapsto F(t, x)$ admet une sélection mesurable. Alors, il existe une multi-application mesurable $F_0 : I \times E \rightrightarrows ck(X) \cup \{\emptyset\}$, qui possède les propriétés (1)-(3) du théorème précédent.*

Cette version du théorème de Scorza-Dragoni a été donnée dans [61] et [45] (mais la nonvacuité dans la propriété (3) est manquante). Nous terminons ce rappel par la version multivoque du théorème de Dugundji [9].

Théorème 3.3.3 *Soient E et X deux espaces de Banach et $K \subset E$, $D \subset X$ deux sous ensembles non vides et fermés. Soit F une multi-application semicontinue supérieurement définie sur $K \times D$ à valeurs dans $cwk(X)$ (famille de tout les sous ensembles non vides convexes et faiblement compacts de X), telle que*

$$F(t, x) \subset c(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}_X, \ \forall (t, x) \in K \times D,$$

pour une certaine fonction positive $c : K \longrightarrow [0, \infty[$. Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de $E \setminus K$ tel que, pour tout λ,

$$0 < diam U_\lambda \leq d(U_\lambda, K) := \inf\{\|t' - s\| : \ (t', s) \in U_\lambda \times K\}.$$

Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition continue de $E \setminus K$ tel que $supp(\psi_\lambda) \subset U_\lambda$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, choisissons $t_\lambda \in K$ tel que $d(t_\lambda, U_\lambda) < 2d(U_\lambda, K)$. Alors, la multi-application $\widetilde{F}$ définie sur $E \times D$ par

$$\widetilde{F}(t, x) = F(t, x), \ si\, t \in K, \ x \in D,$$

$$\widetilde{F}(t, x) = \sum_\lambda \psi_\lambda(t) F(t_\lambda, x), \ si\, t \in E \setminus K, \ x \in D,$$

est une extension semicontinue supérieurement de F à $E \times D$, à valeurs dans $cwk(X)$. De plus, nous avons $\widetilde{F}(E \times D) \subset coF(K \times D)$ et, si c est constant $\widetilde{F}(t, x) \subset c(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}_X$. En particulier, si pour tout (t, x), $F(t, x) \subset C$ où C est un ensemble convexe, alors $\widetilde{F}$ satisfait encore $\widetilde{F}(t, x) \subset C$.

En utilisant ces résultats auxiliaires nous sommes en mesure d'étendre le théorème 3.2.1.

Théorème 3.3.4 *La conclusion du Théorème 3.2.1 reste vraie si on remplace la semicontinuité supérieure globale de $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ par les deux hypothèses suivantes*

$$\forall (x,u) \in E \times E,\ t \longmapsto F(t,x,u) \text{ est measurable sur } [0,T]; \tag{3.3.1}$$

$$\forall t \in I,\ (x,u) \longmapsto F(t,x,u) \text{ est semicontinue supérieurement sur } E \times E. \tag{3.3.2}$$

Preuve

Par le Théorème de Scorza-Dragoni, il existe une multi-application mesurable $F_0 : I \times E \times E \rightrightarrows E$ possédant les propriétés suivantes :

(**1**) Il existe un ensemble $N \subset I$, indépendant de (t,x,u) tel que $\lambda(N) = 0$ et $F_0(t,x,u) \subset F(t,x,u)$, pour tout $t \in I \backslash N$ et tout $(x,u) \in E \times E$;

(**2**) si $u, x, z : I \to E$ sont des applications mesurables avec $z(t) \in F(t, x(t), u(t))$ p.p., alors $z(t) \in F_0(t, x(t), u(t))$ p.p. ;

(**3**) pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous ensemble compact $J_\epsilon \subset I$ tel que $\lambda(I \backslash J_\epsilon) < \epsilon$, la restriction de F_0 à $J_\epsilon \times E \times E$ est s.c.s. et $\emptyset \neq F_0(t,x,u) \subset F(t,x,u)$, pour tout $(t,x,u) \in J_\epsilon \times E \times E$.

Par la troisième propriété, il existe une suite d'ensembles compacts $J_n \subset I$ avec $\lambda(I \backslash J_n) = \epsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ telle que la restriction de F_0 sur $J_n \times E \times E$ est s.c.s. et à valeurs non vides. Nous pouvons également supposer que (J_n) est croissante. En vertu du Théorème de Dugundji, il existe un prolongement s.c.s. $\widetilde{F}_n$ de $F_0 \backslash_{J_n \times E \times E}$ à $I \times E \times E$, et tel que

$$\widetilde{F}_n(t,x,u) \subset m\overline{\mathbf{B}},\ \forall (t,x,u) \in I \times E \times E. \tag{3.3.3}$$

Donc, $\widetilde{F}_n$ satisfait les hypothèses du Théorème 3.2.1. Par suite, pour chaque $x_0 \in E$ et $u_0 \in K(0)$, il existe deux applications Lipschitziennes $u_n,\ x_n : I \to E$ vérifiant l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u_n(0) = u_0; \\ x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds,\ \forall t \in I; \\ u_n(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ -\dot{u}_n(t) \in N_{K(t)}(u_n(t)) + \widetilde{F}_n(t, x_n(t), u_n(t)),\ p.p.\ t \in I. \end{cases}$$

De plus, nous avons pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq 2m + k. \tag{3.3.4}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application mesurable $z_n(.)$ telle que

$$z_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall t \in I, \tag{3.3.5}$$

et

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{K(t)}(u_n(t)) + z_n(t),\ p.p.\ t \in I. \tag{3.3.6}$$

En d'autre termes, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\ddot{x}_n(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}_n(t)) + \widetilde{F}_n(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}_n(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ x_n(0) = x_0;\ \dot{x}_n(0) = u_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x_n(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$.

Par la relation (3.3.4), on voit bien que $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $(2m+k)$. Donc $(u_n(.))$ est une suite bornée de $\mathbf{C}_E(I)$ puisque pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \|u_0\| + T(2m+k) := M. \tag{3.3.7}$$

Maintenant, on montre que $(u_n(.))$ est relativement compacte. Il est clair que, $(u_n(.))$ est equicontinue. En effet, pour tous $t, s \in I,\ t > s$ on a,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| =& \|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau) d\tau - u_0 + \int_0^s \dot{u}_n(\tau) d\tau\| \\ \leq& \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \\ \leq& (2m+k)|t-s|. \end{aligned}$$

De plus, pour tout t fixé, la suite $(u_n(t))$ est relativement compacte. En effet, pour tout $t \in I$,

$$u_n(t) \in K(t) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M) := \Delta(t), \tag{3.3.8}$$

et l'ensemble $\Delta(t)$ est compact puisque $K(t)$ est boule-compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(.))$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}_E(I)$, par extraction d'une sous suite notée $(u_n(.))$ on obtient la convergence uniforme de $(u_n(.))$ vers une application $u(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. Clairement $u(0) = u_0,\ u(.)$ est Lipschitzienne de rapport $(2m+k)$ et pour tout $t \in I$

$$u(t) \in K(t) \tag{3.3.9}$$

car $K(t)$ est fermé.

Maintenant, on montre la convergence de $(x_n(.))$ dans $\mathbf{C}_E(I)$. D'une part, pour tous $t, s \in I$

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_n(s)\| \leq& \|x_0 + \int_0^t u_n(\tau) d\tau - x_0 - \int_0^s u_n(\tau) d\tau\| \\ \leq& \int_s^t \|u_n(\tau)\| d\tau \leq M|t-s|. \end{aligned}$$

Donc, $(x_n(.))$ est équicontinue. D'autre part, puisque pour tout $t \in I$

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds,$$

par la relation (3.3.8), on obtient

$$x_n(t) \in x_0 + \int_0^t \overline{co}(\Delta(s))ds := \widetilde{\Delta}(t),$$

qui est un ensemble compact puisque pour tout $t \in I$, $\overline{co}(\Delta(t))$ est un ensemble convexe compact (voir [16] pour plus de détails). Donc, $(x_n(.))$ est relativement compacte. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà on conclut que $(x_n(.))$ admet une sous suite (notée $(x_n(.))$) convergeant uniformément sur I vers une application $x(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. On a $x(0) = x_0$ et $x(.)$ est Lipschitzienne de rapport M. Observons que pour tout $t \in I$,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} u_n(s)ds = x_0 + \int_0^t u(s)ds \tag{3.3.10}$$

par le Théorème de Lebesgue $(u_n(.))$ est équibornée (relation (3.3.7)), donc, $\dot{x}(.) = u(.)$ p.p.

On voit par la relation (3.3.4) que $(\dot{u}_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}_E^\infty(I)$, par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}_E^\infty(I)$ vers une fonction $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$.

Par les relations (3.3.3) et (3.3.5), $(z_n(.))$ est une suite bornée dans $\mathbf{L}_E^\infty(I)$, donc on peut extraire une sous suite notée $(z_n(.))$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}_E^\infty, \mathbf{L}_{E^*}^1)$ vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}_E^\infty(I)$.

On montre que pour tout $t \in I$, $z(t) \in F(t, x(t), u(t))$ p.p.

Puisque x_n, u_n et z_n sont mesurables et satisfont la relation (3.3.5), donc par la propriété (2), on aura

$$z_n(t) \in F_0(t, x_n(t), u_n(t)),\ p.p.,$$

i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble $N_n \subset J_n$ de mesure nulle tel que

$$z_n(t) \in F_0(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall t \in J_n \backslash N_n. \tag{3.3.11}$$

Posons $N_0 := (I \backslash \cup_n J_n) \cup (\cup_n N_n)$ qui est négligeable. En effet ;

$$\begin{aligned}\lambda(N_0) =& \lambda((I \backslash \cup_n J_n) \cup (\cup_n N_n)) \\ \leq& \lambda(I \backslash \cup_n J_n) + \lambda(\cup_n N_n)) \\ \leq& \lambda(\cap_n (I \backslash J_n)) + \sum_n \lambda(N_n),\end{aligned}$$

Nous avons que l'ensemble J_n est de mesure finie et la suite $(I \backslash J_n)$ est décroissante car (J_n) est croissante, alors

$$\lambda(\cap_n (I \backslash J_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I \backslash J_n) = \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0,$$

et donc

$$\lambda(N_0) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda(I\backslash J_n) + \sum_n \lambda(N_n) = 0.$$

Pour tout $t \in I\backslash N_0$, il existe un entier $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $t \in J_n\backslash N_n$, donc par la relation (3.3.11), on obtient

$$z_n(t) \in F_0(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall n \geq n_0.$$

D'autre part, puisque F_0 est s.c.s. sur $J_n \times E \times E$ et $x_n(t) \to x(t),\ u_n(t) \to u(t)$ quand $n \to \infty$, on trouve que pour tout $x^* \in E^*$,

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F_0(t, x_n(t), u_n(t))) \leq \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t))).$$

Pour $t \notin N_0$ et $n \geq n_0$, on a

$$\langle x^*, z_n(t)\rangle \leq \delta^*(x^*, F_0(t, x_n(t), u_n(t))),$$

donc

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle x^*, z_n(t)\rangle \leq& \limsup_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F_0(t, x_n(t), u_n(t)))\\ \leq& \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t))),\end{aligned}$$

par le Lemme de Fatou, on déduit que pour tout ensemble mesurable $A \subset I$ et tout $x^* \in E^*$,

$$\begin{aligned}\int_A \langle x^*, z(t)\rangle dt =& \lim_{n\to\infty} \int_A \langle x^*, z_n(t)\rangle dt\\ =& \limsup_{n\to\infty} \int_A \langle x^*, z_n(t)\rangle dt\\ \leq& \int_A \limsup_{n\to\infty}\langle x^*, z_n(t)\rangle dt\\ \leq& \int_A \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t)))dt.\end{aligned}$$

D'où,

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t))) \text{ p.p.},$$

alors

$$\sup_{x^*\in E^*} (\langle x^*, z(t)\rangle - \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t)))) = 0,$$

puisque F_0 est à valeurs non vides convexes et fermées, par la relation (2.1.1), on aura $d(z(t), F_0(t, x(t), u(t))) = 0$, ça implique que, $z(t) \in F_0(t, x(t), u(t))$ p.p..

On a montré qu'il existe un ensemble négligeable $N_0 \subset I$ tel que

$$z(t) \in F_0(t, x(t), u(t)),\ \forall t \in I\backslash N_0.$$

Par la properiété (1),

$$z(t) \in F(t, x(t), u(t)),\ \forall t \in I \backslash N_0,$$

ce qui prouve que,

$$z(t) \in F(t, x(t), u(t)),\ \text{p.p. } t \in I. \tag{3.3.12}$$

Maintenant, on a par (3.3.6)

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{K(t)}(u_n(t)) + z_n(t),\ p.p.\ t \in I.$$

Par la définition du cône normal proximal, on déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u_n(t) \in P_{K(t)}\Big(u_n(t) - \alpha(\dot{u}_n(t) + z_n(t))\Big),\ p.p.\ t \in I. \tag{3.3.13}$$

Posons $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t)$. Par les arguments cités dessus, $(\Delta_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $\dot{u}(.) + z(.) := \Delta(.)$. Par l'hypothèse de "I-lisse faiblement compact" supposée sur l'espace E on a pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle J_p(y(t) - \alpha\Delta_n(t)) - J_p(-\alpha\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\rangle \phi(t)dt =$$
$$\int_I \langle J_p(y(t) - \alpha\Delta(t)) - J_p(-\alpha\Delta(t)), \Delta(t)\rangle \phi(t)dt.$$

D'autre part, on sait que la suite $(u_n(.))$ converge fortement dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $u(.)$ (car elle converge uniformément vers $u(.)$ dans $\mathbf{C}_E(I)$).

Donc, par la relation (3.3.13) et la Proposition 3.1.6, on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t)}(u(t) - \alpha\Delta(t)),$$

d'où, $-\Delta(t) \in N_{K(t)}(u(t))$, i.e.

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in N_{K(t)}(u(t)),\ p.p.\ t \in I,$$

et par (3.3.12) on obtient

$$-\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(u(t)) + F(t, x(t), u(t)),\ p.p.\ t \in I.$$

Enfin, des relations (3.3.9) et (3.3.10) on conclut que le problème $(\mathcal{P}_F)$ admet au moin une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1_E(I)$. De plus,

$$\|\ddot{x}(t)\| \leq 2m + k,\ p.p.\ t \in I.$$

Ce qui achève la démontration. ■

La conclusion du Théorème 3.3.4 reste vraie si K dépend de l'état $x(.)$. Ce qui nous amène à montrer le théorème suivant

Théorème 3.3.5 *Le problème $(\mathcal{P}'_{\mathcal{F}})$ admet au moins une solution si on remplace la semicontinuité supérieure globale de $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ par les deux hypothèses (3.3.1) et (3.3.2) dans le Théorème 3.3.4.*

Preuve

La preuve est pratiquement identique à celle du Théorème 3.3.4.

Par le Théorème de Scorza-Dragoni, il existe une multi-application mesurable $F_0 : I \times E \times E \rightrightarrows E$ possédant les propriétés (1), (2) et (3). Par la troisième propriété, il existe une suite d'ensembles compacts $J_n \subset I$ avec $\lambda(I \backslash J_n) = \epsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ telle que la restriction de F_0 sur $J_n \times E \times E$ est s.c.s. est à valeurs non vides. Nous pouvons également supposer que $(J_n)_n$ est croissante. En vertu du Théorème de Dugundji, il existe un prolongement s.c.s. $\widetilde{F}_n$ de $F_0 \backslash_{J_n \times E \times E}$ à $I \times E \times E$, et tel que

$$\widetilde{F}_n(t, x, u) \subset m\overline{\mathbf{B}},\ \forall (t, x, u) \in I \times E \times E. \tag{3.3.14}$$

Donc, $\widetilde{F}_n$ satisfait les hypothèses du Théorème 3.2.2. Par suite, pour chaque $x_0 \in E$ et $u_0 \in K(x_0)$, il existe deux applications Lipschitziennes $u_n,\ x_n : I \to E$ vérifiant l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u_n(0) = u_0; \\ x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds,\ \forall t \in I; \\ u_n(t) \in K(x_n(t)),\ \forall t \in I; \\ -\dot{u}_n(t) \in N_{K(x_n(t))}(u_n(t)) + \widetilde{F}_n(t, x_n(t), u_n(t)),\ p.p.\ t \in I. \end{cases}$$

De plus, nous avons pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq 2m + 3kl. \tag{3.3.15}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application mesurable $z_n(.)$ tel que

$$z_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall t \in I, \tag{3.3.16}$$

et

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{K(x_n(t))}(u_n(t)) + z_n(t),\ p.p.\ t \in I. \tag{3.3.17}$$

En d'autre termes, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\ddot{x}_n(t) \in N_{K(x_n(t))}(\dot{x}_n(t)) + \widetilde{F}_n(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}_n(t) \in K(x_n(t)),\ \forall t \in I; \\ x_n(0) = x_0;\ \dot{x}_n(0) = u_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x_n(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$. Par la relation (3.3.15), on voit bien que $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $(2m+3kl)$. Donc $(u_n(.))$ est une suite bornée de $\mathbf{C}_E(I)$ puisque pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \|u_0\| + T(2m+3kl) := M. \tag{3.3.18}$$

Maintenant, on montre que $(u_n(.))$ est relativement compacte. Il est clair que $(u_n(.))$ est equicontinue. En effet, pour tous $t, s \in I,\ t > s$ on a,

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\| =& \|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau) d\tau - u_0 + \int_0^s \dot{u}_n(\tau) d\tau\| \\ \leq& \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \\ \leq& (2m+3kl)|t-s|.\end{aligned}$$

De plus, pour tout t fixé, la suite $(u_n(t))$ est relativement compacte. En effet, pour tout $t \in I$,

$$u_n(t) \in K(x_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M) \subset L \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M) := \Delta(t), \tag{3.3.19}$$

et l'ensemble $\Delta(t)$ est compact puisque L est compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(.))$ est relativement compact dans $\mathbf{C}_E(I)$, par extraction d'une sous suite notée $(u_n(.))$ on obtient la convergence uniforme de $(u_n(.))$ vers une application $u(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. Clairement $u(0) = u_0,\ u(.)$ est Lipschitzienne de rapport $(2m+3kl)$. On complète la démonstration comme dans le Théorème 3.3.4. ■

CHAPITRE 4

Existence de solutions pour une incluion différentielle du second ordre avec une perturbation F multivoque à croissance linéaire dans les espaces de Banach

Dans ce chapitre, on reprend le même problème

$$(\mathcal{P}'_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), \ \forall t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

et on démontre les résultats d'existence quand F vérifie une condition de croissance linéaire (c'est à dire, en affaiblissant la condition de bornitude sur F supposée dans le chapitre précédent).

Dans un premier temps on montre que le problème $(\mathcal{P}'_F)$ admet au moins une solution quand F est une multi-application semicontnue supérieurement après on montre le même résultat quand F est de type Carathéodory.

Théorème 4.0.6 *Soient $I = [0, T]$ $(T > 0)$, E un espace de Banach séparable réflexif uniformément lisse et I-lisse faiblement compact pour un exposent $p \in [2, \infty)$.*
Soit $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes, fermées. On suppose que F satisfait la condition de croissance linéaire suivante :

$$F(t, x, u) \subset (1 + \|x\| + \|u\|)\overline{\mathbf{B}}_E, \ \forall (t, x, u) \in I \times E \times E. \tag{4.0.1}$$

Soit $r > 0$ et soit $K : E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées et r-prox-régulières. On suppose que $K(.)$ satisfait les assertions suivantes :
(i) *$K(.)$ est Lipschitzienne, i.e., il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\mathcal{H}(K(y)), K(z)) \leq k\|y - z\|, \ \forall y, z \in E \tag{4.0.2}$$

(ii) *il existe une constante $l > 0$ et un ensemble compact $L \subset E$ tel que*

$$K(y) \subset L \subset l\overline{\mathbf{B}}_E, \ \forall y \in E.$$

Alors, pour tous $x_0 \in E$ et $u_0 \in K(x_0)$, il existe deux applications Lipschitziennes $u, x : I \to E$ vérifiant l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} u(0) = u_0; \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \ \forall t \in I; \\ u(t) \in K(x(t)), \ \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}(u(t)) + F(t, x(t), u(t)), \ p.p. \ t \in I. \end{cases}$$

De plus, on a pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq 2(1 + \|x_0\| + 2l) + kl.$$

En d'autres termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \ p.p. \ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), \ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0; \ \dot{x}(0) = u_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$.

Preuve

Etape 1. Pour simplifier les calculs, on prend $T = 1$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n_0}(\mu + kl) \leq \frac{r}{2}, \tag{4.0.3}$$

où $\mu = 1 + \|x_0\| + 2l$, et soit $z : I \times E \times E \to E$ une selection mesurable de F.
Pour tout $n \geq n_0$, considérons la partition $(\{t_{n,0}\}, I_{n,i}),\ 0 \leq i \leq n$ de l'intervalle $I = [0, 1]$ définie par $t_{n,i} = ih$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{1}{n}$.
Pour tout $n \geq n_0$, on procède par induction pour définir deux suites $(u_{n,i})_{0\leq i\leq n-1}$ et $(x_{n,i})_{0\leq i\leq n-1}$ tels que $x_n(0) = x_0$, $u_n(0) = u_0 \in K(x_0)$

$$u_{n,i+1} = P_{K(x_{n,i})}(u_{n,i} - hz_{n,i}), \tag{4.0.4}$$

et

$$\begin{cases} x_{n,i+1} = x_{n,i} + (t_{n,i+1} - t_{n,i})u_{n,i} \\ z_{n,i+1} = z(t_{n,i+1}, x_{n,i+1}, u_{n,i+1}) \in F(t_{n,i+1}, x_{n,i+1}, u_{n,i+1}). \end{cases} \tag{4.0.5}$$

Dans la suite, on montre que la relation (4.0.4) est bien définie. Pour cela on procède par induction. Puisque $u_{n,0} \in K(x_0)$, nous avons grâce à la relation (4.0.3)

$$\begin{aligned} d(u_{n,0} - hz_{n,0}, K(x_{n,0})) \leq & \|u_{n,0} - hz_{n,0} - u_{n,0}\| = h\|z_{n,0}\| \\ \leq & (1 + \|x_0\| + \|u_0\|)h \\ \leq & (1 + \|x_0\| + l)h \leq h\mu \leq \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

Donc, on pose

$$u_{n,1} = P_{K(x_{n,0})}(u_{n,0} - hz_{n,0}),$$

qui est bien définie. De plus, cela nous amène à définir

$$\begin{cases} x_{n,1} = x_{n,0} + (t_{n,1} - t_{n,0})u_{n,0} \\ z_{n,1} = z(t_{n,1}, x_{n,1}, u_{n,1}) \in F(t_{n,1}, x_{n,1}, u_{n,1}). \end{cases}$$

Supposons que $u_{n,0}, ..., u_{n,i},\ x_{n,0}, ..., x_{n,i}$ ainsi que $z_{n,0}, ..., z_{n,i}$ ont été construits et satisfont (4.0.4) et (4.0.5) et on définit $u_{n,i+1},\ x_{n,i+1}\, z_{n,i+1}$. Par l'hypothèse (ii), on obtient pour tout $0 \leq j \leq i$

$$\begin{aligned} \|x_{n,j} - x_{n,j-1}\| = & \|x_{n,j-1} + (t_{n,j} - t_{n,j-1})u_{n,j-1} - x_{n,j-1}\| \\ = & \|(t_{n,j} - t_{n,j-1})u_{n,j-1}\| \\ = & h\|u_{n,j-1}\| \end{aligned}$$

d'où, puisque $u_{n,j} \in K(x_{n,j-1})$

$$\|x_{n,j} - x_{n,j-1}\| \leq hl. \tag{4.0.6}$$

D'autre part, pour tous $0 \leq j \leq i$ et $0 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned}
\|x_{n,j+1}\| =& \|x_{n,j} + (t_{n,j+1} - t_{n,j})u_{n,j}\| \\
=& \|x_{n,j-1} + (t_{n,j} - t_{n,j-1})u_{n,j-1} + (t_{n,j+1} - t_{n,j})u_{n,j}\| \\
=& \|x_0 + (t_{n,1} - t_{n,0})u_{n,0} + (t_{n,2} - t_{n,1})u_{n,1} + ... + (t_{n,j+1} - t_{n,j})u_{n,j}\| \\
=& \|x_0 + hu_0 + hu_{n,1} + ... + hu_{n,j}\| \\
\leq& \|x_0\| + h\|u_0\| + ... + h\|u_{n,j}\| \\
\leq& \|x_0\| + (j+1)hl \\
\leq& \|x_0\| + nhl
\end{aligned}$$

donc,

$$\|x_{n,j+1}\| \leq \|x_0\| + l. \tag{4.0.7}$$

D'où, par les relations (4.0.1), (4.0.5) et (4.0.7), on trouve pour tout $0 \leq j \leq i$

$$\begin{aligned}
\|z_{n,j}\| =& \|z(t_{n,j}, x_{n,j}, u_{n,j})\| \\
\leq& 1 + \|x_{n,j}\| + \|u_{n,j}\| \\
\leq& 1 + \|x_0\| + 2l = \mu.
\end{aligned}$$

Puisque $u_{n,i} \in K(x_{n,i-1})$, on a

$$\begin{aligned}
d(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(x_{n,i})) \leq& d(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(x_{n,i-1})) + \mathcal{H}(K(x_{n,i}), K(x_{n,i-1})) \\
\leq& \|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i}\| + k\|x_{n,i} - x_{n,i-1}\| \\
\leq& h\mu + khl = h(\mu + kl) \\
=& \frac{1}{n}(\mu + kl) \leq \frac{1}{n_0}(\mu + kl) \leq \frac{r}{2} < r.
\end{aligned}$$

Puisque $K(x_{n,i})$ est r-prox-régulier, on pose

$$u_{n,i+1} = P_{K(x_{n,i})}(u_{n,i} - hz_{n,i})$$

qui est bien définie. De plus, on a

$$\begin{cases}
x_{n,i+1} = x_{n,i} + (t_{n,i+1} - t_{n,i})u_{n,i} \\
z_{n,i+1} = z(t_{n,i+1}, x_{n,i+1}, u_{n,i+1}) \in F(t_{n,i+1}, x_{n,i+1}, u_{n,i+1}).
\end{cases}$$

Observons que cette dernière relation implique que

$$u_{n,i+1} \in K(x_{n,i}). \tag{4.0.8}$$

La relation (4.0.4) et le Théorème 2.7.2 donnent

$$u_{n,i+1} = P_{K(x_{n,i})}\left(u_{n,i+1} + r\frac{u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}\|}\right), \tag{4.0.9}$$

i.e.,

$$\frac{u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}\|} \in \Gamma^r(u_{n,i+1}, K(x_{n,i})).$$

Etape 2.

Pour tout $t \in I_{n,i}$, on définit les applications suivantes

$$\begin{cases} u_n(t) = u_{n,i} + \left(\frac{t}{h} - i\right)(u_{n,i+1} - u_{n,i}); \\ x_n(t) = x_{n,i} + (t - t_{n,i})u_{n,i}; \\ K_n(t) = K(x_{n,i}). \end{cases} \tag{4.0.10}$$

Nous avons pour tout $t \in I_{n,i-1} = (t_{n,i-1}, t_{n,i}]$

$$u_n(t) = u_{n,i-1} + (\frac{t}{h} - (i-1))(u_{n,i} - u_{n,i-1}).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n(t_{n,i}) =& u_{n,i-1} + \left(\frac{t_{n,i}}{h} - (i-1)\right)(u_{n,i} - u_{n,i-1}) \\ =& u_{n,i-1} + (i - i + 1)(u_{n,i} - u_{n,i-1}) \\ =& u_{n,i}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to^{>} t_{n,i}} u_n(t) =& \lim_{t \to^{>} t_{n,i}} (u_{n,i} + \left(\frac{t}{h} - i\right)(u_{n,i+1} - u_{n,i}) \\ =& u_{n,i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $n \geq n_0$, l'application u_n est continue sur I.

Pour presque tout $t \in I_{n,i}$, on a par (4.0.10)

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}) - z_{n,i}.$$

On définit l'application $z_n : I \to E$ par $z_n(t) = z_{n,i}$, pour tout $t \in I_{n,i}$.

On pose

$$\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}).$$

Montrons que

$$-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(\mu+kl)}}(u_{n,i+1}, K_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, (\mu + kl)),$$

qui est équivalent à

$$\|\Delta_n(t)\| \leq (\mu + kl) \text{ et } u_{n,i+1} \in P_{K_n(t)}\Big(u_{n,i+1} - \frac{r}{(\mu + kl)}\Delta_n(t)\Big).$$

En utilisant la construction des points $u_{n,i+1}$ (voir (4.0.4)) et le fait que $u_{n,i} \in K(x_{n,i-1})$, on a pour presque tout $t \in I_{n,i}$

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n(t)\| =& \|\frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i})\| \\
=& \frac{1}{h}\|P_{K(x_{n,i})}(u_{n,i} - hz_{n,i}) - (u_{n,i} - hz_{n,i})\| \\
=& \frac{1}{h}d(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(x_{n,i})) \\
\leq& \frac{1}{h}\Big(d\big(u_{n,i} - hz_{n,i}, K(x_{n,i-1})\big) + \mathcal{H}\big(K(x_{n,i}), K(x_{n,i-1})\big)\Big) \\
\leq& \frac{1}{h}\Big(\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i}\| + k\|x_{n,i} - x_{n,i-1}\|\Big) \\
\leq& \frac{1}{h}\big(h(\mu + kl)\big) = \mu + kl.
\end{aligned}$$

D'où, pour presque tout $t \in I_{n,i}$,

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \mu + kl. \tag{4.0.11}$$

Maintenant, on considère le vecteur $v = u_{n,i} - hz_{n,i}$, puisque K est à valeurs r-prox-régulières, la relation (4.0.9) donne

$$u_{n,i+1} = P_{K_n(t)}\Big(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}\Big). \tag{4.0.12}$$

Grâce à la relation (4.0.11), nous avons $\frac{\|P_{K_n(t)}(v)-v\|}{h(\mu+kl)} \leq 1$. Donc, en appliquant le Lemme 2.4.6 à la relation (4.0.12), avec $\lambda = \frac{1}{h(\mu+kl)}\|P_{K_n(t)}(v) - v\|$, on trouve

$$\begin{aligned}
u_{n,i+1} =& P_{K_n(t)}\Big(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{h}\frac{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}{(\mu + k)}\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}\Big) \\
=& P_{K_n(t)}\Big(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{h(\mu + k)}(P_{K_n(t)}(v) - v)\Big) \\
=& P_{K_n(t)}\Big(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{(\mu + k)}\Delta_n(t)\Big),
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(\mu+kl)}}(u_{n,i+1}, K_n(t)),$$

de manière équivalente

$$u_{n,i+1} \in P_{K_n(t)}\Big(u_{n,i+1} - \frac{r}{(\mu + kl)}\Delta_n(t)\Big) \text{ p.p. sur } I_{n,i}. \tag{4.0.13}$$

Etape 3.

D'abord, nous montrons la convergence de la suite $(u_n(.)) \in \mathbf{C}_E(I)$. Par la relation (4.0.11), on a pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_n(t)\| \leq & \|\dot{u}_n(t) + z_n(t)\| + \|z_n(t)\| \\ = & \|\Delta_n(t)\| + \|z_n(t)\| \\ \leq & 2\mu + kl,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq 2\mu + kl. \tag{4.0.14}$$

Ceci prouve que $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $(2\mu + kl)$. Par suite, $(u_n(.))$ est une suite bornée de $\mathbf{C}_E(I)$ puisque pour tout $t \in I$,

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \|u_0\| + 2\mu + kl := M. \tag{4.0.15}$$

Maintenant, on montre que $(u_n(.))$ est relativement compacte. Il est clair que $(u_n(.))$ est équicontinue. En effet, pour tous $t, s \in I$, nous avons

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\| = & \|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau) d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u}_n(\tau) d\tau\| \\ \leq & \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \\ \leq & (2\mu + kl)|t - s|.\end{aligned}$$

Prouvons que pour tout t fixé, la suite $(u_n(t))_{n \geq n_0}$ est relativement compacte.

Pour chaque $0 \leq i \leq n-1$ et $t \in I_{n,i}$, la relation (4.0.11) et le fait que $u_{n,i} \in K(x_{n,i-1})$ nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
d(u_n(t), K_n(t)) \leq & d\big(u_n(t), K(x_{n,i-1})\big) + \mathcal{H}\big(K(x_{n,i}), K(x_{n,i-1})\big) \\
\leq & \|u_n(t) - u_{n,i}\| + k\|x_{n,i+1} - x_{n,i}\| \\
= & \|u_{n,i} + (\frac{t}{h} - i)(u_{n,i+1} - u_{n,i}) - u_{n,i}\| + khl \\
\leq & \big(\frac{t_{n,i+1}}{h} - i\big)\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + khl \\
= & \|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + khl \\
= & \|u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i} - hz_{n,i}\| + khl \\
= & \|h\Delta_n(t) - hz_{n,i}\| + khl \\
\leq & h\|\Delta_n(t)\| + h\mu + khl \\
\leq & h(\mu + kl) + h\mu + klh = 2h(\mu + kl) = \frac{2}{n}(\mu + kl) \leq \frac{2}{n_0}(\mu + kl)
\end{aligned}$$

donc,

$$d(u_n(t), K_n(t)) \leq \frac{2}{n}(\mu + kl) \leq \frac{2}{n_0}(\mu + kl). \tag{4.0.16}$$

Puisque $K_n(t) \subset L$, on conclut que pour chaque $n \geq n_0$

$$d(u_n(t), L) \leq \frac{2}{n_0}(\mu + kl).$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$ il existe $y_n(t) \in L$ telle que

$$d(u_n(t), L) \leq \|y_n(t) - u_n(t)\| < \frac{2}{n}(\mu + kl) + \frac{1}{n}(\mu + kl) = \frac{3}{n}(\mu + kl).$$

Posons $e_n(t) = u_n(t) - y_n(t)$, et observons que

$$\|e_n(t)\| < \frac{3}{n}(\mu + kl), \text{ et } u_n(t) - e_n(t) \in L.$$

Grâce à cette dernière inégalité et la relation (4.0.15), on trouve pour tout $n \geq n_0$,

$$\|u_n(t) - e_n(t)\| \leq M + \frac{3}{n}(\mu + kl) \leq M + \frac{3}{n_0}(\mu + kl) := M',$$

i.e.,

$$\big(u_n(t) - e_n(t)\big) \in L \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M'),$$

ou d'une manière équivalente

$$u_n(t) \in L \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M') + \big(\{0\} \cup \{e_k(t)/k \geq n_0\}\big) := \widetilde{L}(t). \tag{4.0.17}$$

Remarquons que l'ensemble $\widetilde{L}(t)$ est compact car L est compact. Par conséquent, $(u_n(t))_{n \geq n_0}$ est relativement compacte. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(.))_{n \geq n_0}$ est relativement

compacte dans $\mathbf{C}_E(I)$. Par extraction d'une sous suite dont on ne change pas de notation on peut supposer que $(u_n(.))$ converge uniformément vers $u(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. Clairement $u(0) = u_0,\ u(.)$ est Lipschitzienne de rapport $2\mu + kl$.

On définit deux fonctions réelles $\theta_n,\ \delta_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\theta_n(t) = t_{n,i+1},\ \delta_n(t) = t_{n,i}$, pour $t \in I_{n,i}$. Observons que

$$\lim_{n\to\infty} |\theta_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t) \leq \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$. Et nous avons,

$$\lim_{n\to\infty} |\delta_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} (t - t_{n,i}) \leq \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$.
Donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \Big(\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \Big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \Big((2\mu + kl)|\theta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\| \Big),\end{aligned}$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0, \tag{4.0.18}$$

et on a,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \Big(\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \Big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \Big((2\mu + kl)|\delta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\| \Big),\end{aligned}$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0, \tag{4.0.19}$$

On montre la convergence de la suite $(x_n(.))$. Par la relation (4.0.5), on trouve pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in I$,

$$\dot{x}_n(t) = u_n(\delta_n(t)),$$

ce qui donne

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(\delta_n(s))ds. \tag{4.0.20}$$

Notons que par la relation (4.0.8), on a pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in I$, $u_n(\delta_n(t)) \in L \subset l\overline{\mathbf{B}}$, ce qui assure que la suite $(u_n(\delta_n(.)))$ est uniformément bornée. D'où, par (4.0.18), (4.0.20) et le Théorème de Lebesgue, on a pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds := x(t), \tag{4.0.21}$$

et donc, $\dot{x}(.) = u(.)$ p.p. D'autre part, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \Big(\|x_n(\delta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\| \Big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \Big(\| \int_t^{\delta_n(t)} u_n(\delta_n(s))ds\| + \|x_n(t) - x(t)\| \Big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \Big(l|\delta_n(t) - t| + \|x_n(t) - x(t)\| \Big) = 0,\end{aligned}$$

i.e., $\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| = 0$ et similairement, $\lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| = 0$. Evidemment, $x(0) = x_0$ et $x(.)$ est Lipschitzienne de rapport l. Maintenant, on a, pour tout $t \in I$

$$\mathcal{H}(K_n(t)), K(x(t))) = \mathcal{H}\Big(K\big(x_n(\delta_n(t))\big), K\big(x(t)\big) \Big) \leq k\|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| \to 0. \tag{4.0.22}$$

De plus, par (4.0.16) et (4.0.22)

$$\begin{aligned}d\big(u(t), K(x(t))\big) \leq& \|u_n(t) - u(t)\| + d\big(u_n(t), K(x(t))\big) \\ \leq& \|u_n(t) - u(t)\| + d\big(u_n(t), K_n(t)\big) + \mathcal{H}\big(K_n(t), K(x(t))\big) \\ \leq& \|u_n(t) - u(t)\| + \frac{2}{n}(\mu + kl) + \mathcal{H}(K_n(t), K(x(t))).\end{aligned}$$

Passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, on trouve due à la fermeture de $K(x(t))$,

$$u(t) \in K(x(t)), \forall t \in I. \tag{4.0.23}$$

Enfin, montrons la convergence des suites $(z_n(.))$ et $(\dot{u}_n(.))$.
Par la relation (4.0.5) et la construction de u_n, x_n et z_n, on a pour tout $t \in I$,

$$z_n(t) = z(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))) \in F\big(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))\big). \tag{4.0.24}$$

On déduit que $(z_n(.))_n$ est uniformément bornée par μ dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, donc on peut extraire une sous suite, notée $(z_n(.))$ convergeant $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E(I), \mathbf{L}^1_{E^*}(I))$ vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^\infty_E(I) = (\mathbf{L}^1_{E^*}(I))^*$ puisque E est reflexif, i.e. pour tout $\zeta(.) \in \mathbf{L}^1_{E^*}(I)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle z(.), \zeta(.)\rangle. \tag{4.0.25}$$

Puisque $\mathbf{L}^\infty_{E^*}(I) \subset \mathbf{L}^1_{E^*}(I)$, par la relation (4.0.25) on déduit que pour tout $\zeta(.) \in \mathbf{L}^\infty_{E^*}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle z(.), \zeta(.)\rangle,$$

donc, $(z_n(.))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E(I), \mathbf{L}^\infty_{E^*}(I))$ vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^1_E(I)$, le Lemme de Mazur assure l'existence d'une suite $(\xi_n(.))$ (où $\xi_n(.)$ est une combinaison convexe de $\{z_k(.),\ k \geq n\}$) qui converge

fortement vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^1_E(I)$. On peut extraire une sous suite de $(\xi_n(.))$ qui converge presque partout vers $z(.)$. Donc,

$$z(t) \in \overline{\{\xi_n(t),\ n \in \mathbb{N}\}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\xi_n(t)\}},\ \text{p.p. } t \in I,$$

d'où,

$$z(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{z_k(t),\ k \geq n\},\ \text{p.p. } t \in I.$$

Posons $A_n = \{z_k(t),\ k \geq n\}$. Donc, par le Théorème 2.1.1, on obtient pour tous $x^* \in E^*$, et $n \in \mathbb{N}$

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \delta^*(x^*, A_n) = \sup_{k\geq n}\langle x^*, z_k(t)\rangle,$$

ceci implique que

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n}\langle x^*, z_k(t)\rangle = \limsup_{n\to\infty}\langle x^*, z_n(t)\rangle.$$

De la relation (4.0.24), on obtient

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t)))).$$

On définit pour tout $x^* \in E^*$ la fonction

$$\begin{aligned} h_{x^*} : I \times E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, u) &\longmapsto h_{x^*}(t, x, u) = \delta^*(x^*, F(t, x, u)), \end{aligned}$$

qui est s.c.s. car F est s.c.s. Par conséquent, puisque $\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$, $\lim_{n\to\infty} x_n(\delta_n(t)) = x(t)$ et $\lim_{n\to\infty} u_n(\delta_n(t)) = u(t)$, on conclut que,

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))) \leq \delta^*(x^*, F(t, x(t), u(t))),$$

et donc,

$$\sup_{x^*\in E^*} (\langle x^*, z(t)\rangle - \delta^*(x^*, F(t, x(t), u(t)))) \leq 0.$$

Comme F est à valeurs convexes fermées, par la relation (2.1.1), on trouve

$$d(z(t), F(t, x(t), u(t))) \leq 0.$$

Ce qui prouve que

$$z(t) \in F(t, x(t), u(t)),\ \text{p.p. } t \in I. \tag{4.0.26}$$

D'autre part, on voit par la relation (4.0.14), que $(\dot{u}_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$. Repprenons les mêmes arguments précédents on peut extraire de $(\dot{u}_n(.))$ une sous suite qui converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$.

Montrons maintenant que pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in \Gamma^{\frac{r}{(\mu+k)}}(K(x(t)), u(t)),$$

ou de manière équivalente

$$u(t) \in P_{K(x(t))}\Big(u(t) - \frac{r}{(\mu+k)}(\dot{u}(t) + z(t))\Big).$$

Posons $r' = \frac{r}{(\mu+k)}$. On a $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t)$ et par les arguments donnés ci-dessus on sait que $(\Delta_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $\dot{u}(.) + z(.) := \Delta(.)$. Par la propriété "I-lisse faiblement compact" supposée sur l'espace E on obtient pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle J_p(y(t) - r'\Delta_n(t)) - J_p(-r'\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\rangle \phi(t)dt$$
$$= \int_I \langle J_p(y(t) - r'\Delta(t)) - J_p(-r'\Delta(t)), \Delta(t)\rangle \phi(t)dt.$$

Par (4.0.13) on a pour presque tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in P_{K_n(t)}\Big(u_n(\theta_n(t)) - r'\Delta_n(t)\Big),$$

et puisque la suite $(u_n(\theta_n(.)))_n$ converge fortement dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $u(.)$ grâce à la relation (4.0.22), on conclut par la Proposition 3.1.6, que pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(x(t))}\Big(u(t) - r'\Delta(t)\Big),$$

donc, $-\Delta(t) \in N_{K(x(t))}(u(t))$ (voir Définition 2.4.4 et Remarque 2.4.5), ce qui est équivalent à

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in N_{K(x(t))}(u(t)),\ p.p.\ t \in I,$$

et par (4.0.26) on trouve

$$-\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}(u(t)) + F(t, x(t), u(t)),\ p.p.\ t \in I.$$

Enfin, par les relations (4.0.21) et (4.0.23) on conclut que

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)),\ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

donc, notre problème $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1_E(I)$. De plus,

$$\|\ddot{x}(t)\| \leq 2\mu + kl,\ p.p.\ t \in I,$$

avec, $\mu := 1 + \|x_0\| + 2l$.

Ceci complète la preuve de notre Théorème. ■

Théorème 4.0.7 *La conclusion du Théorème 4.0.6 reste vraie si on remplace la semicontinuité supérieure globale de $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ par les deux hypothèses suivantes*

$$\forall (x,u) \in E \times E,\ t \longmapsto F(t,x,u) \text{ est mesurable sur } [0,T]; \tag{4.0.27}$$

$$\forall t \in I,\ (x,u) \longmapsto F(t,x,u) \text{ est semicontinue supérieurement sur } E \times E. \tag{4.0.28}$$

Preuve

Par le Théorème de Scorza-Dragoni, il existe une multi-application mesurable $F_0 : I \times E \times E \rightrightarrows E$ possédant les propriétés suivantes :

(**1**) Il existe un ensemble $N \subset I$, indépendant de (t,x,u) tel que $\lambda(N) = 0$ et $F_0(t,x,u) \subset F(t,x,u)$, pour tout $t \in I \backslash N$ et tout $(x,u) \in E \times E$;

(**2**) si $u, x, z : I \to E$ sont des applications mesurables avec $z(t) \in F(t, x(t), u(t))$ p.p., alors $z(t) \in F_0(t, x(t), u(t))$ p.p. ;

(**3**) pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un sous ensemble compact $J_\epsilon \subset I$ tel que $\lambda(I \backslash J_\epsilon) < \epsilon$, la restriction de F_0 à $J_\epsilon \times E \times E$ est s.c.s. et $\emptyset \neq F_0(t,x,u) \subset F(t,x,u)$, pour tout $(t,x,u) \in J_\epsilon \times E \times E$.

Par la troisième propriété, il existe une suite d'ensembles compacts $J_n \subset I$ avec $\lambda(I \backslash J_n) = \epsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ telle que la restriction de F_0 sur $J_n \times E \times E$ est s.c.s. et à valeurs non vides. Nous pouvons également supposer que (J_n) est croissante. En vertu du Théorème de Dugundji, il existe un prolongement s.c.s. $\widetilde{F}_n$ de $F_0 \backslash_{J_n \times E \times E}$ à $I \times E \times E$, et tel que

$$\widetilde{F}_n(t,x,u) \subset (1 + \|x\| + \|u\|)\overline{\mathbf{B}},\ \forall (t,x,u) \in I \times E \times E. \tag{4.0.29}$$

Donc, $\widetilde{F}_n$ satisfait les hypothèses du Théorème 4.0.6. Par suite, pour chaque $x_0 \in E$ et $u_0 \in K(x_0)$, il existe deux applications Lipschitziennes $u_n,\ x_n : I \to E$ vérifiant l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} u_n(0) = u_0; \\ x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s)ds,\ \forall t \in I; \\ u_n(t) \in K(x_n(t)),\ \forall t \in I; \\ -\dot{u}_n(t) \in N_{K(x_n(t))}(u_n(t)) + F(t, x_n(t), u_n(t)),\ p.p.\ t \in I \end{cases}$$

De plus, nous avons pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq 2\mu + kl. \tag{4.0.30}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application mesurable $z_n(.)$ tel que

$$z_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall t \in I, \tag{4.0.31}$$

et

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{K(x_n(t))}(u_n(t)) + z_n(t),\ p.p.\ t \in I. \tag{4.0.32}$$

En d'autre termes, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\ddot{x}_n(t) \in N_{K(x_n(t))}(\dot{x}_n(t)) + \widetilde{F}_n(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}_n(t) \in K(x_n(t)),\ \forall t \in I; \\ x_n(0) = x_0;\ \dot{x}_n(0) = u_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x_n(.) \in \mathbf{C}^1_E(I)$.

Par la relation (4.0.30), on voit bien que $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $(2\mu + kl)$. Donc $(u_n(.))$ est une suite bornée de $\mathbf{C}_E(I)$ puisque pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq \|u_0\| + T(2\mu + kl) := M. \tag{4.0.33}$$

Maintenant, on montre que $(u_n(.))$ est relativement compacte. Il est clair que, $(u_n(.))$ est equicontinue. En effet, pour tous $t, s \in I,\ (t > s)$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| =& \|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau) d\tau - u_0 + \int_0^s \dot{u}_n(\tau) d\tau\| \\ \leq& \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \\ \leq& (2\mu + kl)|t - s|. \end{aligned}$$

De plus, pour tout t fixé, la suite $(u_n(t))$ est relativement compacte. En effet,

$$u_n(t) \in L \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M) := \Delta(t), \tag{4.0.34}$$

et l'ensemble $\Delta(t)$ est compact. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(.))$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}_E(I)$, par extraction d'une sous suite notée $(u_n(.))$ on obtient la convergence uniforme de $(u_n(.))$ vers une application $u(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. Clairement $u(0) = u_0,\ u(.)$ est Lipschitzienne de rapport $(2\mu + kl)$.

Maintenant, on montre la convergence de $(x_n(.))$ dans $\mathbf{C}_E(I)$. D'une part, pour tous $t, s \in I,\ (t > s)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_n(s)\| \leq& \|x_0 + \int_0^t u_n(\tau) d\tau - x_0 - \int_0^s u_n(\tau) d\tau\| \\ \leq& \int_s^t \|u_n(\tau)\| d\tau \leq M|t - s|. \end{aligned}$$

Donc, $(x_n(.))$ est équicontinue. D'autre part, puisque pour tout $t \in I$

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(s) ds,$$

par la relation (4.0.34), on obtient

$$x_n(t) \in x_0 + \int_0^t \overline{co}(\Delta(s))ds := \widetilde{\Delta}(t),$$

qui est un ensemble compact puisque pour tout $t \in I$, $\overline{co}(\Delta(t))$ est un ensemble convexe compact. Donc, $(x_n(.))$ est relativement compacte. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà on conclut que $(x_n(.))$ admet une sous suite (notée $(x_n(.))$) convergeant uniformément sur I vers une application $x(.) \in \mathbf{C}_E(I)$. On a $x(0) = x_0$ et $x(.)$ est Lipschitzienne de rapport M. Observons que pour tout $t \in I$,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} u_n(s)ds = x_0 + \int_0^t u(s)ds \tag{4.0.35}$$

par le Théorème de Lebesgue $(u_n(.))$ est équibornée (relation (4.0.33)), donc, $\dot{x}(.) = u(.)$ p.p. D'autre part, nous avons

$$\mathcal{H}\Big(K(x_n(t)), K(x(t))\Big) \leq k\|x_n(t) - x(t)\| \longrightarrow 0,$$

et

$$\begin{aligned} d\big(u(t), K(x(t))\big) \leq & \|u_n(t) - u(t)\| + d\big(u_n(t), K(x(t))\big) \\ \leq & \|u_n(t) - u(t)\| + d\big(u_n(t), K(x_n(t))\big) + \mathcal{H}\big(K_n(t), K(x(t))\big), \end{aligned}$$

passant à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve due à la fermeture de $K(x(t))$,

$$u(t) \in K(x(t)),\ \forall t \in I. \tag{4.0.36}$$

On voit par la relation (4.0.30), que $(\dot{u}_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers une fonction $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$.

Par la relation (4.0.29) et (4.0.31), nous avons

$$\begin{aligned} \|z_n(t)\| \leq & 1 + \|x_n(t)\| + \|u_n(t)\| \\ \leq & 1 + \|x_0\| + TM + M \\ = & 1 + x_0\| + (T+1)M. \end{aligned}$$

On déduit que, $(z_n(.))$ est une suite bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$, donc on peut extraire une sous suite notée $(z_n(.))$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_{E^*})$ vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$.

On montre que pour tout $t \in I$, $z(t) \in F(t, x(t), u(t))$ p.p.

Puisque x_n, u_n et z_n sont mesurables et satisfont la relation (4.0.31), donc par la propriété (2), on aura

$$z_n(t) \in F_0(t, x_n(t), u_n(t)),\ \text{p.p.},$$

i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble $N_n \subset J_n$ de mesure nulle tel que

$$z_n(t) \in F_0(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall t \in J_n \backslash N_n. \tag{4.0.37}$$

Posons $N_0 := (I \backslash \cup_n J_n) \cup (\cup_n N_n)$ qui est négligeable. Pour tout $t \in I \backslash N_0$, il existe un entier $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$ tel que our tous $n \geq n_0$, $t \in J_n \backslash N_n$,

$$z_n(t) \in F_0(t, x_n(t), u_n(t)),\ \forall n \geq n_0.$$

D'autre part, puisque F_0 est s.c.s. sur $J_n \times E \times E$ et $x_n(t) \to x(t),\ u_n(t) \to u(t)$ quand $n \to \infty$, on trouve que pour tout $x^* \in E^*$,

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F_0(t, x_n(t), u_n(t))) \leq \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t))).$$

Pour $t \notin N_0$ et $n \geq n_0$, on a

$$\langle x^*, z_n(t)\rangle \leq \delta^*(x^*, F_0(t, x_n(t), u_n(t))),$$

donc

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle x^*, z_n(t)\rangle \leq & \limsup_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F_0(t, x_n(t), u_n(t))) \\ \leq & \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t))),\end{aligned}$$

par le Lemme de Fatou, on déduit que pour tout ensemble mesurable $A \subset I$ et tout $x^* \in E^*$,

$$\begin{aligned}\int_A \langle x^*, z(t)\rangle dt &= \lim_{n\to\infty} \int_A \langle x^*, z_n(t)\rangle dt \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int_A \langle x^*, z_n(t)\rangle dt \\ &\leq \int_A \limsup_{n\to\infty} \langle x^*, z_n(t)\rangle dt \\ &\leq \int_A \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t)))dt.\end{aligned}$$

D'où,

$$\langle x^*, z(t)\rangle \leq \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t))) \text{ p.p.},$$

alors

$$\sup_{x^*\in E^*} (\langle x^*, z(t)\rangle - \delta^*(x^*, F_0(t, x(t), u(t)))) = 0,$$

puisque F_0 est à valeurs non vides convexes fermées, par la relation (2.1.1), on aura $d(z(t), F_0(t, x(t), u(t))) = 0$, ça implique que, $z(t) \in F_0(t, x(t), u(t))$ p.p..

On a montré qu'il existe un ensemble négligeable $N_0 \subset I$ tel que

$$z(t) \in F_0(t, x(t), u(t)),\ \forall t \in I \backslash N_0.$$

Par la properiété (1),

$$z(t) \in F(t, x(t), u(t)),\ \forall t \in I \backslash N_0,$$

ce qui prouve que,

$$z(t) \in F(t, x(t), u(t)),\ \text{p.p. } t \in I. \tag{4.0.38}$$

Maintenant, on a par (4.0.32)

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{K(x(t))}(u_n(t)) + z_n(t),\ p.p.\ t \in I.$$

Par la définition du cône normal proximal, on déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u_n(t) \in P_{K(x(t))}(u_n(t) - \alpha(\dot{u}_n(t) + z_n(t)));\ p.p.\ t \in I. \tag{4.0.39}$$

Posons $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t)$. Par les arguments cités dessus, $(\Delta_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $\dot{u}(.)+z(.) := \Delta(.)$. Par la l'hypothèse de "I-lisse faiblement compact" supposée sur l'espace E on a pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty_E(I)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle J_p(y(t) - \alpha\Delta_n(t)) - J_p(-\alpha\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\rangle \phi(t)dt$$
$$= \int_I \langle J_p(y(t) - \alpha\Delta(t)) - J_p(-\alpha\Delta(t)), \Delta(t)\rangle \phi(t)dt.$$

D'autre part, la suite $(u_n(.))$ converge fortement dans $\mathbf{L}^\infty_E(I)$ vers $u(.)$ (car elle converge uniformément vers $u(.)$ dans $\mathbf{C}_E(I)$).

Donc, par la relation (4.0.39) et la Proposition 3.1.6, on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(x(t))}(u(t) - \alpha\Delta(t)),$$

d'où, $-\Delta(t) \in N_{K(x(t))}(u(t))$, i.e.

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in N_{K(x(t))}(u(t)),\ p.p.\ t \in I,$$

et par (4.0.38) on obtient

$$-\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}(u(t)) + F(t, x(t), u(t)),\ p.p.\ t \in I.$$

Enfin, par les relations (4.0.35) et (4.0.36) on conclut que le problème $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1_E(I)$. De plus,

$$\|\ddot{x}(t)\| \leq 2\mu + kl,\ p.p.\ t \in I.$$

Ceci achève la démontration. ■

CHAPITRE 5

Existence de solutions pour une incluion différentielle du second ordre avec une perturbation univoque Lipschitzienne dans un espace de Hilbert

Sommaire

5.1 Caractérisations des ensembles r-prox-réguliers 91

5.2 Etude d'une inclusion différentielle du second ordre dans un espace de Hilbert 95

Soient H un espace de Hilbert réel, $T > 0$ et $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes satisfaisant la condition de croissance linéaire

$$F(t,x) \subset \beta(t)(1 + \|x\|)L, \ \forall (t,x) \in [0,T] \times H, \tag{5.0.1}$$

où $\beta(.) \in \mathbf{L}^1([0,T],\mathbb{R})$ est une fonction positive et L un sous ensemble compact de H. Supposons de plus que F est s.c.s. par rapport à la seconde variable et pour chaque $x \in H$, $F(.,x)$ admet une sélection mesurable. Sous ces conditions, les auteurs dans [40] ont montré que le problème perturbé suivant

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(u(t)) + F(t,u(t)), \ p.p. \ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in K(0); \end{cases} \tag{5.0.2}$$

admet au moins une solution absolument continue lorsque H est séparable et les ensembles $K(t)$ sont r-prox-réguliers ($r > 0$).

L'existence et l'unicité de solutions du problème (5.0.2) sont aussi obtenues dans [39] dans le cas où F est univoque, disons f, qu'elle est Lipschitzienne continue par rapport à la deuxième variable sur tout sous ensemble borné de H et satisafait la condition de croissance linéaire

$$\|f(t,x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|), \ \forall (t,x) \in [0,T] \times H.$$

Le cas couplé de [39] et [40] a été donné dans [6].

Dans ce chapitre, nous étendons le résultat du premier ordre établi dans [39], au second ordre, i.e., on montre que le problème

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + f(t,x(t),\dot{x}(t)), \ p.p. \ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(t), \ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0; \ \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution Lipschitzienne lorsque $K(.)$ est Lipschitzienne à valeurs r-prox-régulières, et f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième et la troisième variables et satisfait la condition de croissance linéaire naturelle i.e. pour un réel $c > 0$,

$$\|f(t,x,u)\| \leq c(1 + \|x\| + \|u\|), \ \forall (t,x,u) \in I \times H \times H.$$

La démonstration de ce résultat est donnée par deux méthodes différentes. La première consiste à étudier directement l'existence de solutions via l'algorithme de discrétisation, tandis que dans la deuxième on ramène le problème considéré à un problème du premier ordre.

Avant d'exposer notre résultat d'existence on donne dans une première section quelques caractérisations des ensembles prox-réguliers dans les espace de Hilbert.

5.1 Caractérisations des ensembles r-prox-réguliers

Dans cette section, on rappelle quelques résultats concernant les ensembles r-prox-réguliers et leurs caractérisations dans le contexte Hilbertien et qui nous seront utiles par la suite.

Définition 5.1.1 *Dans un espace de Hilbert H, un sous ensemble fermé C est dit uniformément r-prox régulier ssi $\forall x \in C$, $\forall p \in N_C^p(x) \setminus \{0\}$, on a*

$$\mathbf{B}(x + r\frac{p}{\|p\|}, r) \cap C = \emptyset,$$

autrement dit, si et seulement si, pour tout $x \in C$ et tout $p \in N_C^p(x)$

$$\langle \frac{p}{\|p\|}, y - x \rangle \leq \frac{1}{2r}\|y - x\|^2, \ \forall y \in C. \tag{5.1.1}$$

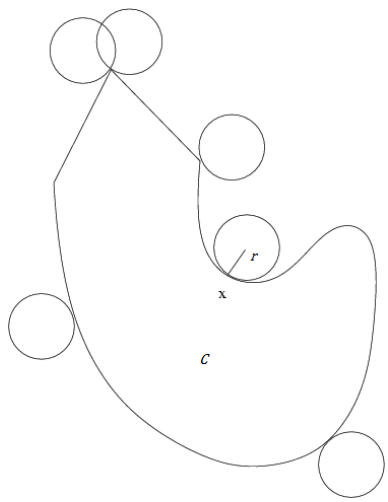

FIG. 5.1 – Ensemble r-prox-régulier

De la définition 5.1.1 illustré par FIG. 5.1, découle la propriété vérifiée par un ensemble uniformément r-prox régulier : la projection sur un ensemble C uniformément prox-régulier est bien définie pour les points se situant à une distance de C, plus petite que la constante de prox-régularité.

La proposition suivante résume certaines des conséquences importantes de la prox-régularité. Pour la preuve de ces résultats nous renvoyons le lecteur à [30, 60].

Proposition 5.1.2 *Soit C un sous ensemble non vide fermé de H et $r > 0$. Si l'ensemble C est r-prox-régulier, donc on a les assertions suivantes.*
(i) *Pour tout $x \in H$ tel que $d_C(x) < r$, $P_C(x)$ existe et est univoque ;*
(ii) *pour chaque $r' \in]0, r[$, l'ensemble $Enl(C, r') := \{x \in H,\ d_C(x) \leq r'\}$ est $(r - r')$-prox-régulier ;*
(iii) *le sous différentiel de Clarke et le sous différentiel proximal de d_C coïncide en tout point $x \in H$ vérifiant $d_C(x) < r$.*

Le résultat fondamental suivant concerne la scalaire semi continuité supérieure du sous différentiel proximal de la fonction distance aux images d'une multi-application à valeurs r-prox-régulières. Pour un résultat plus général, nous renvoyons le lecteur à [19].

Soit $C(.)$ une multi-application définie de $I = [T_0, T]$ dans H satisfaisant les hypothèses suivantes. Pour $r > 0$,
(H_1) pour tout $t \in I$, $C(t)$ est un sous ensemble non vide fermé et r-prox-régulier de H.
(H_2) La multi-application C est à variation continue, i.e., pour tout $y \in H$ et tous $t, s \in I$

$$| \, d(y, C(t)) - d(y, C(s)) \, | \leq |v(t) - v(s)|, \tag{5.1.2}$$

où $v : I \to H$ une application absolument continue.

Proposition 5.1.3 *Soit $C(.)$ une multi-application satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit (t_n) une suite de $[T_0, T]$ qui converge vers $t \in [T_0, T]$ tel que $t_n \geq t$ pour tout n. Soit (x_n) une suite convergeant vers $x \in C(t)$ telle que $x_n \in C(t_n)$ pour tout n. Alors, pour chaque $z \in H$,*

$$\limsup_{n \to \infty} \delta^*(\partial^p d(x_n, C(t_n)), z) \leq \delta^*(\partial^p d(x, C(t)), z).$$

La démonstration exige le lemme suivant qui est une variante d'un résultat de Bounkhel et Thibault [19].

Lemme 5.1.4 *Soit $C \subset H$ un sous ensemble non vide, fermé et r-prox-régulier. Soient $x \in C$, $\xi \in \partial^p d(x, C)$. Alors, pour tout $z \in H$ tel que $d(z, C) < r$, on a*

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq \frac{1}{2r} \|z - x\|^2 + \frac{1}{2r} d^2(z, C) + \big(\frac{1}{r} \|z - x\| + 1\big) d(z, C), \tag{5.1.3}$$

et

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq \frac{2}{r} \|z - x\|^2 + d(z, C). \tag{5.1.4}$$

Preuve

Fixons $z \in H$ tel que $d(z, C) < r$. L'ensemble C étant r-prox-régulier, soit y_z l'unique point de C (car la projection est univoque) tel que

$$d(z, C) = \|z - y_z\|.$$

D'où,

$$\|x - y_z\|^2 \leq \|z - x\|^2 + d^2(z, C) + 2\|z - x\|d(z, C) \tag{5.1.5}$$

et comme $d(z, C) \leq \|z - x\|$,

$$\|x - y_z\|^2 \leq 4\|z - x\|^2. \tag{5.1.6}$$

D'autre part,

$$\langle \xi, z - x\rangle \leq \langle \xi, y_z - x\rangle + \langle \xi, z - y_z\rangle \leq \langle \xi, y_z - x\rangle + \|\xi\|d(z, C).$$

Puisque $\xi \in \partial^p d(x, C)$, on a $\|\xi\| \leq 1$ par (2.4.4) et donc cette inégalité et (5.1.1) donnent

$$\langle \xi, z - x\rangle \leq \frac{1}{2r}\|y_z - x\|^2 + d(z, C).$$

Par conséquent, utilisant les relations (5.1.5) et (5.1.6), nous obtenons

$$\langle \xi, z - x\rangle \leq \frac{1}{2r}\|z - x\|^2 + \frac{1}{2r}d^2(z, C) + \frac{1}{r}\|z - x\|d(z, C) + d(z, C)$$

et

$$\langle \xi, z - x\rangle \leq \frac{2}{r}\|z - x\|^2 + d(z, C),$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

Preuve de la Proposition 5.1.3.

Fixons $z \in H$. Par extraction d'une sous suite, on suppose, sans perte de généralité que $\delta^*(\partial^p d(x_n, C(t_n)), z)$ converge et donc

$$\limsup_n \delta^*(\partial^p d(x_n, C(t_n)), z) = \lim_n \delta^*(\partial^p d(x_n, C(t_n)), z).$$

Puisque $C(t_n)$ est r-prox-régulier, par la proposition 5.1.2, on a $\partial^p d(x_n, C(t_n)) = \partial^C d(x_n, C(t_n))$, ce qui assure $\partial^p d(x_n, C(t_n))$ est faiblement compact (voir [29]). Donc, pour tout n, il existe $\xi_n \in \partial^p d(x_n, C(t_n))$ tel que

$$\delta^*(\partial^p d(x_n, C(t_n)), z) = \langle \xi_n, z\rangle.$$

Grâce à la relation (5.1.1), $\|\xi_n\| \leq 1$, pour tout n, donc $(\xi_n)_n$ converge faiblement vers $\xi \in H$. Montrons que $\xi \in \partial^C d(x, C(t))$.

Fixons $u \in H$. Puisque $x_n \in C(t_n)$, pour $s > 0$ assez petit, $d(x_n + su, C(t_n)) \leq s\|u\| < r$ pour tout n. Donc pour s assez petit, nous avons par le Lemme 5.1.4,

$$\langle \xi_n, su\rangle \leq \frac{2}{r}s^2\|u\|^2 + d(x_n + su, C(t_n));\ \forall n.$$

Sachant que $C(.)$ satisfait la relation (5.1.2), on obtient

$$\begin{aligned} |\ d\big(x_n + su, C(t_n)\big) - d\big(x + su, C(t)\big)\ | &\leq |\ d(x_n + su, C(t_n)) - d(x_n + su, C(t))\ | \\ &\quad + |\ d(x_n + su, C(t)) - d(x + su, C(t))\ | \\ &\leq |v(t_n) - v(t)| + \|x_n - x\|, \end{aligned}$$

faisant tendre n vers l'infini, on aura grâce à la convergence des suites (x_n) et (t_n) vers x et t respectivement, $d(x_n + su, C(t_n)) \to d(x + su, C(t))$, par suite

$$\langle \xi, su \rangle \leq \frac{2}{r} s^2 \|u\|^2 + d(x + su, C(t)).$$

Il résulte alors

$$\langle \xi, u \rangle \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{s} \Big(d(x + su, C(t)) - d(x, C(t)) \Big) \leq d^0_{C(t)}(x; u).$$

Cela étant vrai pour tout $u \in H$, on conclut que $\xi \in \partial^C d(x, C(t)) = \partial^p d(x, C(t))$. Par conséquent,

$$\lim_n \delta^*(\partial^p d(x_n, C(t_n)), z) = \lim_n \langle \xi_n, z \rangle = \langle \xi, z \rangle \leq \delta^*(\partial^p d(x, C(t)), z).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Nous sommes aussi besoin du résultat suivant qui est une conséquence directe du lemme de Gronwall (voir [40]).

Lemme 5.1.5 *Soit $I = [0, T]$ et soit $(x_n(.))$ une suite d'applications absolument continues définies sur I à valeurs dans H. Supposons que $\lim_n x_n(T_0) = 0$ et que pour tout n,*

$$\frac{d}{dt}(\|x_n(t)\|^2) \leq \beta_n(t)\|x_n(t)\|^2 + \alpha_n(t) \text{ p.p. } t \in I,$$

où $\alpha_n(.)$, $\beta_n(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$. Supposons de plus que $(\beta_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $\lim_n \int_{T_0}^T \alpha_n(t)dt = 0$. Alors,

$$\lim_n \|x_n(.)\|_{\mathbf{C}} = 0.$$

Preuve

Grâce au lemme de Gronwall, pour tout $t \in I$,

$$\|x_n(t)\|^2 \leq \int_{T_0}^t \Big(\alpha_n(s) exp\Big\{ \int_s^t \beta_n(\tau)d\tau \Big\} \Big) ds + \|x_n(T_0)\|^2 exp\Big\{ \int_s^t \beta_n(\tau)d\tau \Big\}.$$

Il résulte que, pour tout $t \in [T_0, T]$,

$$\|x_n(t)\|^2 \leq exp\Big\{ \int_{T_0}^T \beta_n(\tau)d\tau \Big\} \int_{T_0}^T \alpha_n(s)ds + \|x_n(T_0)\|^2 exp\Big\{ \int_{T_0}^T \beta_n(\tau)d\tau \Big\}.$$

D'où la conclusion.

5.2 Etude d'une inclusion différentielle du second ordre dans un espace de Hilbert

Nous sommes maintenant en mesure de montrer notre résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.2.1 *Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$ et H un espace de Hilbert séparable.*
Soit $f : I \times H \times H \rightrightarrows H$ une application séparément mesurable sur I telles que
(i) *pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction positive $k_\eta(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in I$ et pour chaque $(x, y), (u, v) \in \overline{\mathbf{B}}(0, \eta) \times \overline{\mathbf{B}}(0, \eta)$,*

$$\|f(t, x, u) - f(t, y, v)\| \leq k_\eta(t)(\|x - y\| + \|u - v\|);$$

(ii) *pour un nombre réel $c > 0$ satisfaisant $T(T + 1)c < \frac{1}{2}$,*

$$\|f(t, x, u)\| \leq c(1 + \|x\| + \|u\|), \forall (t, x, u) \in I \times H \times H.$$

Soient $r > 0$, $K : I \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées et r-prox-régulières. On suppose que $K(.)$ est Lipschitzienne, c'est à dire, il existe une constante $k > 0$ tel que pour tous $t, s \in I$,

$$\mathcal{H}(K(t), K(s)) \leq k|t - s|. \tag{5.2.1}$$

Alors, pour tous $x_0 \in H$ et $u_0 \in K(0)$, il existe deux applications Lipschitziennes $u, x : I \to H$ vérifiant l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} u(0) = u_0; \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \ \forall t \in I; \\ u(t) \in K(t), \ \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(u(t)) + f(t, x(t), u(t)), \ p.p. \ t \in I, \end{cases}$$

De plus, on a pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq 2\alpha c + k,$$

où

$$\alpha = 1 + \|x_0\| + (T + 1)l.$$

et

$$l = \frac{1}{1 - 2T(T + 1)c}(1 + \|u_0\| + \|x_0\| + kT).$$

En d'autres termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_f)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + f(t, x(t), \dot{x}(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution Lipschitzienne $x(.) \in \mathbf{C}^1_H(I)$.

Preuve

Première méthode.

Etape 1.Posons

$$l = \frac{1}{1 - 2T(T+1)c}\big(1 + \|u_0\| + \|x_0\| + kT\big). \tag{5.2.2}$$

Supposons que

$$\alpha + 3kT < r \tag{5.2.3}$$

avec $\alpha = 1 + \|x_0\| + (T+1)l$.

Pour tout $n \geq 1$, on considère la partition $(t_{n,0}, I_{n,i})$, $0 \leq i \leq n-1$ de l'intervalle $I = [0, T]$ définie par $I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$, $t_{n,i} = ih$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{T}{n}$.
Pour tout $n \geq 1$, on procède par induction sur l'entier i, pour définir deux suites $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n-1}$ et $(u_{n,i})_{0 \leq i \leq n-1}$ tels que $u_{n,0} = u_0 \in K(0)$, $x_{n,0} = x_0$,

$$u_{n,i+1} = P_{K(t_{n,i+1})}\left(u_{n,i} - \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s, x_{n,i}, u_{n,i})ds\right). \tag{5.2.4}$$

et

$$x_{n,i+1} = x_{n,i} + (t_{n,i+1} - t_{n,i})u_{n,i}. \tag{5.2.5}$$

Dans la suite, on montre que la relation (5.2.4) est bien définie. Pour cela on procède par induction. Puisque $u_{n,0} \in K(t_{n,0})$ et par (5.2.2) $\|u_0\| \leq (T+1)l$, nous avons

$$\begin{aligned}
&d\Big(u_{n,0} - \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s, x_{n,0}, u_{n,0})ds, K(t_{n,1})\Big) \\
&\leq d\Big(u_{n,0} - \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s, x_{n,0}, u_{n,0})ds, K(t_{n,0})\Big) + \mathcal{H}\Big(K(t_{n,1}), K(t_{n,0})\Big) \\
&\leq \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} \|f(s, x_{n,0}, u_{n,0})\|ds + k|t_{n,1} - t_{n,0}| \\
&\leq \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} c\big(1 + \|x_0\| + \|u_0\|\big) + kh \\
&\leq Tc\big(1 + \|x_0\| + \|u_0\|\big) + kT \\
&\leq Tc\big(1 + \|x_0\| + (T+1)l\big) + kT \\
&< \frac{1}{2}\big(1 + \|x_0\| + (T+1)l\big) + kT \\
&= \frac{1}{2}\alpha + kT \leq \alpha + 3kT < r
\end{aligned}$$

par la relation (5.2.3) et donc, puisque $K(t_{n,1})$ est r-prox-régulier, on pose

$$u_{n,1} = P_{K(t_{n,1})}\Big(u_{n,0} - \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s, x_{n,0}, u_{n,0})ds\Big),$$

qui est bien définie. De plus, cela nous amène à définir

$$x_{n,1} = x_{n,0} + (t_{n,1} - t_{n,0})u_{n,0}.$$

Supposons que $u_{n,0}, ..., u_{n,i}$ aussi que $x_{n,0}, ..., x_{n,i}$ ont été construit et satisfont (5.2.4) et (5.2.5) et on définit $u_{n,i+1}$ et $x_{n,i+1}$. Pour tout $0 \leq j \leq i$, on a

$$\begin{aligned}
&\|u_{n,j} - u_{n,j-1} + \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} f(s, x_{n,j-1}, u_{n,j-1})ds\| \\
&= d\Big(u_{n,j-1} - \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} f(s, x_{n,j-1}, u_{n,j-1})ds, K(t_{n,j})\Big) \\
&\leq d\Big(u_{n,j-1} - \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} f(s, x_{n,j-1}, u_{n,j-1})ds, K(t_{n,j-1})\Big) + \mathcal{H}\Big(K(t_{n,j}), K(t_{n,j-1})\Big) \\
&\leq \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \|f(s, x_{n,j-1}, u_{n,j-1})\|ds + k|t_{n,j} - t_{n,j-1}| \\
&= \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \|f(s, x_{n,j-1}, u_{n,j-1})\|ds + kh
\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_{n,j}\| \leq \|u_{n,j-1}\| + kh + 2\int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \|f(s, x_{n,j-1}, u_{n,j-1})\|ds.$$

Par itération, on détuit que

$$\|u_{n,j}\| \leq \|u_0\| + jkh + 2\sum_{p=0}^{j-1} \int_{t_{n,p}}^{t_{n,p+1}} \|f(s, x_{n,p}, u_{n,p})\| ds. \tag{5.2.6}$$

D'autre part, par (5.2.5), on a pour tout $0 \leq j \leq i$ et $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}
\|x_{n,j}\| =& \|x_{n,j-1} + (t_{n,j} - t_{n,j-1})u_{n,j-1}\| \\
=& \|x_0 + (t_{n,1} - t_{n,0})u_{n,0} + (t_{n,2} - t_{n,1})u_{n,1} + ... + (t_{n,j} - t_{n,j-1})u_{n,j-1}\| \\
=& \|x_0 + hu_{n,0} + hu_{n,1} + ... + hu_{n,j-1}\| \\
\leq& \|x_0\| + h\sum_{p=0}^{j-1} \|u_{n,p}\| \\
\leq& \|x_0\| + jh \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\| \\
\leq& \|x_0\| + T \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\|.
\end{aligned}$$

Alors, utilisant cette dernière inégalité et l'hypothèse (ii), on obtient

$$\|f(t, x_{n,j}, u_{n,j})\| \leq c(1 + \|x_{n,j}\| + \|u_{n,j}\|) \leq c(1 + \|x_0\| + (T+1) \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\|). \tag{5.2.7}$$

On obtient par (5.2.6) et (5.2.7) que, pour tout $0 \leq j \leq i$,

$$\begin{aligned}
\|u_{n,j}\| \leq& \|u_0\| + kT + 2jhc\big(1 + \|x_0\| + (T+1) \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\|\big) \\
\leq& \|u_0\| + kT + 2Tc\big(1 + \|x_0\| + (T+1) \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\|\big).
\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $0 \leq j \leq i$, il résulte, grâce à (5.2.2), que

$$\max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\| \leq \|u_0\| + kT + 2Tc\big(1 + \|x_0\| + (T+1) \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\|\big),$$

d'où,

$$(1 - 2T(T+1)c) \max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\| \leq \|u_0\| + kT + 2Tc(1 + \|x_0\|).$$

Par conséquent, puisque $2T(T+1)c < 1$,

$$\max_{0\leq j\leq i} \|u_{n,j}\| \leq \frac{1}{1 - 2T(T+1)c}\Big(\|u_0\| + kT + 1 + \|x_0\|\Big) = l. \tag{5.2.8}$$

On trouve par les relations (5.2.7) et (5.2.8) que,

$$\|f(t, x_{n,j}, u_{n,j})\| \leq c\big(1 + \|x_0\| + (T+1)l\big). \tag{5.2.9}$$

On a $u_{n,i} \in K(t_{n,i})$, donc

$$\begin{aligned}
&d\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds, K(t_{n,i+1})\Big)\\
&\quad\leq d\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds, K(t_{n,i})\Big)+\mathcal{H}\Big(K(t_{n,i+1}),K(t_{n,i})\Big)\\
&\quad\leq \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} \|f(s,x_{n,i},u_{n,i})\|ds+kh,
\end{aligned}$$

d'où par les relations (5.2.3) et (5.2.9)

$$\begin{aligned}
&d(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds, K(t_{n,i+1}))\\
&\quad\leq Tc(1+\|x_0\|+(T+1)l)+kT\\
&\quad< \frac{1}{2}(1+\|x_0\|+(T+1)l)+kT\leq \alpha+kT<r.
\end{aligned}$$

Puisque $K(t_{n,i+1})$ est r-prox-régulier, on pose

$$u_{n,i+1}=P_{K(t_{n,i+1})}\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_n(t_{n,i}),u_{n,i})ds\Big)$$

qui est bien définie.

Etape 2. Pour tout $t\in]t_{n,i},t_{n,i+1}]$ on définit les applications suivantes

$$\begin{cases}
u_n(t)=u_{n,i}+(\frac{t}{h}-i)\Big(u_{n,i+1}-u_{n,i}+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f\big(s,x_n(t_{n,i}),u_n(t_{n,i})\big)ds\Big)\\
\qquad\qquad -\int_{t_{n,i}}^{t} f(s,x_n(t_{n,i}),u_n(t_{n,i}))ds;\\
x_n(t)=x_{n,i}+(t-t_{n,i})u_{n,i};\\
f_n(t)=f(t,x_{n,i},u_{n,i}).
\end{cases} \tag{5.2.10}$$

Clairement u_n est absolument continue sur tout intervalle $]t_{n,i},t_{n,i+1}]$ et donc est absolument continue sur $[0,T]$. De plus, pour tout $i\in\{0,...,n-1\}$

$$\dot{u}_n(t)=\frac{1}{h}\Big(u_{n,i+1}-u_{n,i}+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds\Big)-f(t,x_{n,i},u_{n,i}),\ \forall t\in I_{n,i}.$$

On se propose de trouver une borne supérieure pour l'expression $\|\dot{u}_n(t)+f_n(t)\|$. Grâce à (5.2.9) on a, pour tout $t \in I_{n,i}$

$$\begin{aligned}
&\|\dot{u}_n(t)+f_n(t)\| \\
&\quad=\|\frac{1}{h}\Big(u_{n,i+1}-u_{n,i}+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds\Big)\| \\
&\quad=\frac{1}{h}\|P_{K(t_{n,i+1})}\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds\Big)-\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds\Big)\| \\
&\quad=\frac{1}{h}\Big(d\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds, K(t_{n,i+1})\Big)\Big) \\
&\quad\leq\frac{1}{h}\Big(d\Big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,x_{n,i},u_{n,i})ds, K(t_{n,i})\Big)+\mathcal{H}\big(K(t_{n,i+1}),K(t_{n,i})\big)\Big) \\
&\quad\leq\frac{1}{h}\Big(\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} \|f(s,x_{n,i},u_{n,i})\|ds+k|t_{n,i+1}-t_{n,i}|\Big) \\
&\quad\leq\frac{1}{h}\Big(hc\big(1+\|x_0\|+(T+1)l\big)+kh\Big)=\alpha c+k,
\end{aligned}$$

alors,

$$\|\dot{u}_n(t)+f_n(t)\| \leq \alpha c+k. \tag{5.2.11}$$

Par la relation (5.2.4) et la définition du cône normal proximal, on peut écrire pour tout $t \in I_{n,i}$,

$$\dot{u}_n(t)+f_n(t) \in -N_{K(t_{n,i+1})}(u_{n,i+1}). \tag{5.2.12}$$

L'inclusion (5.2.11) et la relation (5.2.12) donnent en vertu de (2.1.1)

$$-\dot{u}_n(t)-f_n(t) \in (\alpha c+k)\partial^p d_{K(t_{n,i+1})}(u_{n,i+1}) \tag{5.2.13}$$

et

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \|\dot{u}_n(t)+f_n(t)\|+\|f_n(t)\| \leq 2\alpha c+k. \tag{5.2.14}$$

La suite $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $(2\alpha c+k)$. Donc, $(u_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{C}_H(I)$, puisque pour tout $t \in I$;

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\|+\int_0^t \|\dot{u}_n(s)\|ds \leq \|u_0\|+T(2\alpha c+k). \tag{5.2.15}$$

Maintenant, on montre que la suite $(u_n(.))$ converge dans $(\mathbf{C}_H(I), \|.\|_{\mathbf{C}})$. Fixons $m,n \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n \geq 1$. Soit $\theta_n(.), \delta_n(.) : I \to I$ définies par $\theta_n(t)=t_{n,i+1}$, $\delta_n(t)=t_{n,i}$, pour tout $t \in I_{n,i}$ telle que $\theta_n(0)=\delta_n(0)=0$. Observons que

$$\lim_{n\to\infty}|\delta_n(t)-t| = \lim_{n\to\infty}(t-t_{n,i}) \leq \lim_{n\to\infty}(t_{n,i+1}-t_{n,i}) = \lim_{n\to\infty}\frac{T}{n}=0,$$

par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$. Par le même calcul on aura $\lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$. Notons que par la relation (5.2.4), on a, pour tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in K(\theta_n(t)). \tag{5.2.16}$$

Donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} d(u_m(t), K(\theta_n(t))) &\leq d(u_m(t), K(\theta_m(t))) + \mathcal{H}(K(\theta_n(t)), K(\theta_m(t))) \\ &\leq d(u_m(\theta_m(t)), K(\theta_m(t))) + \|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\| + k|\theta_n(t) - \theta_m(t)|. \end{aligned}$$

D'autre part, par la relation (5.2.14) on a, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in I$;

$$\begin{aligned} \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| &= \| \int_0^{\theta_n(t)} \dot{u}_n(s)ds - \int_0^t \dot{u}_n(s)ds \| \\ &\leq \int_t^{\theta_n(t)} \|\dot{u}_n(s)\| ds \end{aligned}$$

donc,

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \leq (2\alpha c + k)|\theta_n(t) - t| \tag{5.2.17}$$

et

$$\begin{aligned} \|u_n(\delta_n(t)) - u_m(\delta_m(t))\| &= \| \int_0^{\delta_n(t)} \dot{u}_n(s)ds - \int_0^{\delta_m(t)} \dot{u}_m(s)ds \| \\ &\leq \int_{\delta_m(t)}^{\delta_n(t)} \|\dot{u}_n(s)\| ds \end{aligned}$$

alors,

$$\|u_n(\delta_n(t)) - u_m(\delta_m(t))\| \leq (2\alpha c + k)|\delta_n(t) - \delta_m(t)|, \tag{5.2.18}$$

de plus,

$$d(u_m(t), K(\theta_n(t))) \leq (2\alpha c + k)|\theta_m(t) - t| + k|\theta_n(t) - \theta_m(t)|, \tag{5.2.19}$$

par les assertions qui précedent, on trouve

$$d(u_m(t), K(\theta_n(t))) \leq 2(\alpha c + k)\frac{T}{m} + k\frac{T}{n} \leq T(2\alpha c + 3k) < \alpha + 3kT < r. \tag{5.2.20}$$

Posons, pour tout t, $\gamma_n(t) := |\theta_n(t) - t|$. Donc, (5.2.19) donne

$$d(u_m(t), K(\theta_n(t))) \leq 2(\alpha c + k)\gamma_m(t) + k\gamma_n(t). \tag{5.2.21}$$

Posons $\beta = 2(\alpha c + k)$. Prenons (5.2.13), (5.2.17), (5.2.20) et (5.2.21) en compte et appliquant le Lemme 5.1.4 (relation (5.1.4)), il résulte que pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \Big\rangle \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\|u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\|^2 + \frac{\beta}{2} d(u_m(t), K(\theta_n(t))) \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\Big(\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 + \frac{\beta}{2}\Big(\beta\gamma_m(t) + k\gamma_n(t)\Big) \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\Big((2\alpha c + k)\gamma_n(t) + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 + \frac{\beta}{2}\Big(\beta\gamma_m(t) + k\gamma_n(t)\Big).
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant (5.2.11) et (5.2.17) on aura

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \\
&\qquad = \Big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \Big\rangle + \Big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(t) - u_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\Big((2\alpha c + k)\gamma_n(t) + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 + \frac{\beta}{2}\Big(\beta\gamma_m(t) + k\gamma_n(t)\Big) \\
&\qquad + \|\dot{u}_n(t) + f_n(t)\|\|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\| \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\Big((2\alpha c + k)\gamma_n(t) + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 + \frac{\beta^2}{2}\Big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\Big).
\end{aligned}$$

Par la même méthode en interchangeant le rôle de n et m, nous aurons aussi

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{u}_m(t) + f_m(t), u_m(t) - u_n(t) \Big\rangle \leq &\frac{\beta}{r}\Big((2\alpha c + k)\gamma_m(t) + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 \\
&+ \frac{\beta^2}{2}\Big(\gamma_m(t) + \gamma_n(t)\Big).
\end{aligned}$$

On trouve grâce à ces dernières inégalités,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t) - \dot{u}_m(t) - f_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\Big((2\alpha c + k)\gamma_n(t) + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 + \frac{\beta^2}{2}\Big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\Big) \\
&\qquad + \frac{\beta}{r}\Big((2\alpha c + k)\gamma_m(t) + \|u_n(t) - u_m(t)\|\Big)^2 + \frac{\beta^2}{2}\Big(\gamma_m(t) + \gamma_n(t)\Big) \\
&\qquad = \frac{\beta}{r}\Big(\big(T(2\alpha c + k)^2 + (2\alpha c + k)\|u_n(t) - u_m(t)\|\big)\big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\big) + 2\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\Big) \\
&\qquad + \beta^2\big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\big) \\
&\qquad \leq \frac{\beta}{r}\Big(\Big(T(2\alpha c + k)^2 + 2(2\alpha c + k)\big(\|u_0\| + T(2\alpha c + k)\big)\Big)\big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\big) + 2\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\Big) \\
&\qquad + \beta^2\big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\big),
\end{aligned}$$

pour tout nombre positif $\rho = \frac{\beta}{r}(2\alpha c + k)\big(2\|u_0\| + 3T(2\alpha c + k)\big) + \beta^2$ indépendant de m, n et t (notons que grâce à (5.2.15) $(u_n(.))$ est bornée par $\|u_0\| + T(2\alpha c + k)$)

$$\Big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t) - \dot{u}_m(t) - f_m(t), u_n(t) - u_m(t) \Big\rangle \leq \frac{2\beta}{r}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \rho\big(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)\big). \tag{5.2.22}$$

D'autre part, par la relation (5.2.4), on a pour tout $t \in I$ et tout $n \geq 1$

$$\dot{x}_n(t) = u_n(\delta_n(t)),$$

ce qui nous amène à

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(\delta_n(s))ds. \tag{5.2.23}$$

Par le dernière relation et la relation (5.2.8), pour tout $t \in I$

$$\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|u_n(\delta_n(s))\|ds \leq \|x_0\| + Tl,$$

d'où, pour $\eta = \max\{\|u_0\| + T(2\alpha c + k), \|x_0\| + Tl\}$, pour tout $t \in I$ et tout $n \geq 1$

$$u_n(t), x_n(t) \in \overline{\mathbf{B}}(0, \eta). \tag{5.2.24}$$

Utilisons les relations (5.2.8) et (5.2.23), on aura pour tout $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\|x_n(\delta_n(t)) - x_m(\delta_m(t))\| \\
&\quad = \|x_0 + \int_0^{\delta_n(t)} u_n(\delta_n(s))ds - x_0 - \int_0^{\delta_m(t)} u_m(\delta_m(s))ds\| \\
&\quad = \| \int_0^{\delta_n(t)} u_n(\delta_n(s))ds + \int_{\delta_m(t)}^0 u_m(\delta_m(s))ds\| \\
&\quad \leq \int_0^{\delta_n(t)} \|u_n(\delta_n(s))\|ds + \int_{\delta_m(t)}^0 \|u_m(\delta_m(s))\|ds \\
&\quad \leq \int_0^{\delta_n(t)} lds + \int_{\delta_m(t)}^0 lds \\
&\quad = \int_{\delta_m(t)}^{\delta_n(t)} lds \leq l|\delta_n(t) - \delta_m(t)|.
\end{aligned}$$

Donc, par l'hypothèse (i), (5.2.18) et (5.2.22),

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle \\
&\quad = \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t) - \dot{u}_m(t) - f_m(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle \\
&\quad + \langle f_m(t) - f_n(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle \\
&\quad \leq \frac{2\beta}{r}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \rho(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)) \\
&\quad + \|f_m(t) - f_n(t)\|\|u_n(t) - u_m(t)\| \\
&\quad \leq \frac{2\beta}{r}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \rho(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)) \\
&\quad + k_\eta(t)\Big(\|x_n(\delta_n(t)) - x_m(\delta_m(t))\| + \|u_n(\delta_n(t)) - u_m(\delta_m(t))\|\Big)\|u_n(t) - u_m(t)\| \\
&\quad \leq \frac{2\beta}{r}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \rho(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)) \\
&\quad + 2k_\eta(t)(l + 2\alpha c + k)\big(\|u_0\| + T(2\alpha c + k)\big)|\delta_n(t) - \delta_m(t)|.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\Big) = 2\langle \dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle.$$

Posons

$$\mathbf{G}_{n,m}(t) = \rho(\gamma_n(t) + \gamma_m(t)) + 2k_\eta(t)(l + 2\alpha c + k)\big(\|u_0\| + T(2\alpha c + k)\big)|\delta_n(t) - \delta_m(t)|.$$

On a $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mathbf{G}_{n,m}(t) = 0$ puisque $\theta_n(t) \to t$ et $\delta_n(t) \to t$. Il résulte du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \mathbf{G}_{n,m}(t) = 0.$$

Ceci est due au fait que $\|u_n(0) - u_m(0)\| = 0$, et donc, en vertu de Lemme 5.1.5,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n(.) - u_m(.)\|_{\mathbf{C}} = 0.$$

Par conséquent, $(u_n(.))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{C}(I, H), \|.\|_C)$ et donc converge uniformément vers une application $u(.) \in \mathbf{C}(I, H)$.

Pour tout $t \in I$, nous avons en vertu de la relation (5.2.17)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \big(\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|\big) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \big((2\alpha c + k)|\theta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\|\big),
\end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0, \tag{5.2.25}$$

et similairement nous avons, Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \big(\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|\big)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \big((2\alpha c + k)|\delta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\|\big),\end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0, \tag{5.2.26}$$

D'où, par (5.2.23) et (5.2.26), utilisons le théorème de Lebesgue, on obtient pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds := x(t), \tag{5.2.27}$$

alors, $\dot{x}(.) = u(.)$ p.p.

D'autre part, par la relation (5.2.8), on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &\leq \lim_{n\to\infty} \big(\|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\|\big)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\| \int_t^{\theta_n(t)} u_n(\theta_n(s))ds\| + \|x_n(t) - x(t)\|\right)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \big(l|\theta_n(t) - t| + \|x_n(t) - x(t)\|\big) = 0,\end{aligned}$$

donc, $\lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| = 0$, et similairement,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| = 0. \tag{5.2.28}$$

Il est évident que, $x(0) = x_0$ et $x(.)$ est une application Lipschitzienne de rapport l. Observons de plus, que pour tout $t \in I$

$$\mathcal{H}(K(\theta_n(t)), K(t)) \leq k|\theta_n(t) - t| \to 0. \tag{5.2.29}$$

En outre, par la relation (5.2.16)

$$\begin{aligned}d(u(t), K(t)) \leq& \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + d(u_n(\theta_n(t)), K(t))\\ \leq& \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + d(u_n(\theta_n(t)), K(\theta_n(t))) + \mathcal{H}(K(\theta_n(t)), K(t))\\ \leq& \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + \mathcal{H}(K(\theta_n(t)), K(t)).\end{aligned}$$

Passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, on aura grâce à la fermeture de $K(t)$,

$$u(t) \in K(t), \forall t \in I. \tag{5.2.30}$$

Maintenant, par la relation (5.2.14), il est clair que $(\dot{u}_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$, par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\dot{u}_n(.))$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$ vers une application $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$. En effet, pour tout $y \in \mathbf{L}^1_H(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle = \langle w(.), y(.)\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^t \langle w(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = \mathbf{1}_{[0,t]}(.)e_j$, avec $t \in I$, $\mathbf{1}_{[0,t]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,t]$, et (e_j) une base de H (cette suite existe car H est séparable), on obtient

$$\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds, e_j\rangle = \langle \int_0^t w(s)ds, e_j\rangle,\ \forall j,$$

qui assure que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Puisque $(u_n(.))$ est d'une suite d'applications absolument continues, on aura l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty}(u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds,$$

alors

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds.$$

Donc $u(.)$ est absolument continue, et $w(.) = \dot{u}(.)$.

Puisque $(\dot{u}_n(.))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_H(I), \mathbf{L}^1_H(I))$ vers $\dot{u}(.)$ dans $\mathbf{L}^\infty_H(I) = (\mathbf{L}^1_H(I))^*$, donc pour tout $\zeta(.) \in \mathbf{L}^1_H(I)$

$$\lim_{n\to\infty}\langle \dot{u}_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle \dot{u}(.), \zeta(.)\rangle. \tag{5.2.31}$$

Puisque $\mathbf{L}^\infty_H(I) \subset \mathbf{L}^1_H(I)$, par (5.2.31) on déduit pour tout $\zeta(.) \in \mathbf{L}^\infty_H(I)$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle \dot{u}_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle \dot{u}(.), \zeta(.)\rangle,$$

alors, $(\dot{u}_n(.))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_H(I), \mathbf{L}^\infty_H(I))$ vers $\dot{u}(.)$ dans $\mathbf{L}^1_H(I)$.

De plus, par la continuité de l'application $f(t,.,.)$, par (5.2.26) et (5.2.28) on obtient pour tout $t \in I$

$$f(t, x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))) \to f(t, x(t), u(t)), \tag{5.2.32}$$

et, par (5.2.7) et (5.2.8),

$$\|f(t, x(t), u(t))\| \le \alpha,\ \forall t \in I.$$

Etape 3. On procède maintenant à montrer que

$$-\dot{u}(t) - f(t, x(t), u(t)) \in N_{K(t)}(u(t)) \text{ p.p. } t \in I.$$

Vu la relation (5.2.7) et la convergence faible de la suite $(\dot{u}_n(.))$ dans $\mathbf{L}^1_H(I)$, par le Lemme de Mazur, il existe une suite $(\zeta_n(.))$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^1_H(I)$ vers $\dot{u}(.)$ telle que pour tout n

$$\zeta_n(.) \in co\{\dot{u}_k(.) : k \ge n\}.$$

Par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\zeta_n(.))_n$ converge presque partout vers $\dot{u}(.)$.

$$\zeta_n(t) + f(t, x_n(\delta_n(t)), u_n(\delta_n(t))) \to \dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in I.$$

Par conséquent, pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\Big(\Big\{\dot{u}_k(t) + f(t, x_k(\delta_k(t)), u_k(\delta_k(t))),\ k \geq n\Big\}\Big).$$

Il résulte que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, \dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t))\rangle \leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle \xi, \dot{u}_k(t) + f(t, x_k(\delta_k(t)), u_k(\delta_k(t)))\rangle.$$

La relation (5.2.13) entraine

$$\begin{aligned}\langle \xi, \dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t))\rangle \leq & \limsup_n \delta^*\Big(-(\alpha c + k)\partial^p d(u_n(\theta_n(t)), K(\theta_n(t))), \xi\Big)\\ \leq & \delta^*\Big(-(\alpha c + k)\partial^p d(u(t), K(t)), \xi\Big);\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité est due à la propriété de fermeture dans la Proposition 5.1.3 suite à (5.2.26), (5.2.28) et le fait que $u(t) \in K(t)$, $\forall t \in I$. Puisque l'ensemble $\partial^p d(u(t), K(t))$ est fermé et convexe (voir Proposition 5.1.2), on obtient

$$\dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)) \in -(\alpha c + k)\partial^p d(u(t), K(t)) \subset -N_{K(t)}(u(t)) \text{ a.e. } t \in I.$$

Finalement, par la relation (5.2.27) on conclut que notre problème $(\mathcal{P}_f)$ admet au moins une solution lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1_H(I)$. De plus, par (5.2.14)

$$\|\ddot{x}(t)\| \leq 2\alpha c + k,\ p.p.\ t \in I.$$

Ce qui achève la preuve de notre théorème par la méthode directe. ■

Deuxième méthode.

Cette deuxième méthode consiste à ramener l'étude de notre problème $(\mathcal{P}_f)$ à celle d'un problème du premier ordre établi dans [34].

(H_1) Pour tout $t \in I = [T_0, T]$, $C(t)$ est un sous ensemble non vide fermé de H et r-prox-régulier.

(H_2) $C(t)$ est à variation absolument continue, i.e., il existe une fonction $v(.) : I \to \mathbb{R}$ absolument continue telle que pour tous $y \in H$ et $s, t \in I$,

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(s))| \leq |v(t) - v(s)|.$$

Théorème 5.2.2 *(Théorème 2.2.1 dans [39])*
Supposons que $C(.)$ satisfait (H_1) et (H_2). Soit $f : I \times H \longrightarrow H$ une application mesurable sur I vérifiant
(i) *pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction positive $\gamma_\eta(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour chaque $(x, y) \in \overline{\mathbf{B}}(0, \eta) \times \overline{\mathbf{B}}(0, \eta)$,*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \gamma_\eta(t)\|x - y\|;$$

(ii) *il existe une fonction positif $\beta(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in I$ et tout $x \in \bigcup_{s\in I} C(s)$,*

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|).$$

Alors, pour tout $x_0 \in C(T_0)$ l'inclusion différentielle

$$(\boldsymbol{SPP}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(t, x(t)), \ p.p. \ t \in I, \\ u(T_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue $u(.)$. Cette solution satisfait

$$\|\dot{u}(t) + f(t, u(t))\| \leq (1 + l)\beta(t) + |\dot{v}(t)| \ p.p. \ t \in I$$

et

$$\|f(t, u(t))\| \leq (1 + l)\beta(t) \ p.p. \ t \in I,$$

où

$$l := \|x_0\| + exp\{2 \int_{T_0}^{T} \beta(s)ds\} \int_{T_0}^{T} [2\beta(s)(1 + \|x_0\|) + |\dot{v}(t)|]ds.$$

Nous avons aussi besoin de la proposition suivante (voir [34]).

Proposition 5.2.3 *Soient S, S' deux sous ensembles non vides fermés de H tels que S est r-prox-régulier et S' est r'-prox-régulier. Alors, $S \times S'$ est ρ-prox-régulier avec $\rho = \min\{r, r'\}$.*

Preuve

Pour tous $x, x' \in H$, nous avons

$$d^2((x, x'), S \times S') = d^2(x, S) + d^2(x', S').$$

En effet,

$$\begin{aligned} d^2((x, x'), S \times S') &= \inf_{(s,s')\in S\times S'} (\|(x, x') - (s, s')\|^2) \\ &= \inf_{(s,s')\in S\times S'} (\|(x - s, x' - s')\|^2) \\ &= \inf_{(s,s')\in S\times S'} (\|x - s\|^2 + \|x' - s'\|^2) \\ &= \inf_{s\in S} \|x - s\|^2 + \inf_{s'\in S'} \|x' - s'\|^2 \\ &= d^2(x, S) + d^2(x', S'). \end{aligned}$$

S est r-prox-régulier donc $d^2(.,S)$ est Fréchet-différentiable sur $U_r(S) = \{x \in H : d(x,S) < r\}$ et S' est r'-prox-régulier donc $d^2(.,S)$ est Fréchet-différentiable sur $U_{r'}(S') = \{x' \in H : d(x',S') < r'\}$. On conclut que $d^2((.,.), S \times S')$ est Fréchet différentiable sur $U_r(S) \times U_{r'}(S')$.

Soit $\rho = \min\{r, r'\}$. Posons

$$U_\rho(S \times S') = \{(x,x') \in H \times H / d\big((x,x'), S \times S'\big) < \rho\}$$

et montrons que

$$U_\rho(S \times S') \subset U_r(S) \times U_{r'}(S').$$

Soit $(x,x') \in U_\rho(S \times S')$, alors $d((x,x'), S \times S') < \rho$ et par l'inégalité précédente

$$\sqrt{d^2(x,S) + d^2(x',S')} < \rho = \min\{r, r'\}.$$

Comme

$$d^2(x,S) \leq d^2(x,S) + d^2(x',S')$$

alors,

$$d(x,S) \leq \sqrt{d^2(x,S) + d^2(x',S')} < \min\{r, r'\}.$$

Ce qui donne $d(x,S) < r$.

De la même manière on conclut que $d(x',S') < r'$. Par conséquent, $d^2((.,.), S \times S')$ est Fréchet différentiable sur $U_\rho(S \times S')$. ■

Soit $x(.) \in \mathbf{C}^1_H(I)$ et soit $X : I \to H \times H$ l'application définie par $X(t) = (\dot{x}(t), x(t))$, et donc $\dot{X}(t) = (\ddot{x}(t), \dot{x}(t))$ pour tout $t \in I$.

Posons $C(t) = K(t) \times H$ et soit g l'application définie de $I \times H \times H$ dans $H \times H$ par

$$g(t,x,y) = \big(f(t,y,x), -y\big),\ \forall (t,x,y) \in I \times H \times H.$$

Remarquons que si $X(.)$ est solution du problème du premier ordre suivant

$$(\mathcal{P}_g) \begin{cases} -\dot{X}(t) \in N_{C(t)}(X(t)) + g(t, X(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ X(t) \in C(t),\ \forall t \in I; \\ X(0) = (x_0, u_0), \end{cases}$$

alors $x(.)$ est solution de notre problème du second ordre $(\mathcal{P}_f)$. En effet, Nous avons, pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{X}(t) \in N_{C(t)}(X(t)) + g(t, X(t)),$$

ce qui est équivalent à,

$$-(\ddot{x}(t),\dot{x}(t)) \in N_{K(t)\times H}(\dot{x}(t),x(t)) + \big(f(t,x(t),\dot{x}(t)),-\dot{x}(t)\big),$$

donc,

$$-(\ddot{x}(t),\dot{x}(t)) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) \times \{0\} + (f(t,x(t),\dot{x}(t)),-\dot{x}(t)),$$

i.e.,

$$-\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + f(t,x(t),\dot{x}(t)).$$

De plus, on a

$$X(t) \in C(t),\ \forall t \in I \Leftrightarrow (\dot{x}(t),x(t)) \in K(t)\times H,\ \forall t \in I \Leftrightarrow \dot{x}(t) \in K(t),\ \forall t \in I,$$

et $X(0) = (\dot{x}(0),x(0)) = (u_0,x_0)$.

On montre que la multi-application C est Lipschitzienne.

Nous avons, $\forall t,s \in I$, $\forall x,y \in H$ puisque $K(.)$ est Lipschitzienne

$$\begin{aligned}
\mid d\big((x,y),C(t)\big) - d\big((x,y),C(s)\big) \mid &= \mid d\big((x,y),K(t)\times H\big) - d\big((x,y),K(t)\times H\big) \mid \\
&= \mid d(x,K(t)) + d(y,H) - d(x,K(s)) - d(y,H) \mid \\
&= \mid d(x,K(t)) - d(x,K(s)) \mid \leq k|t-s|.
\end{aligned}$$

D'une autre part, en vertu de la Proposition 5.2.3, il est claire que C est à valeurs ρ-prox-régulières avec $\rho = \min\{r,+\infty\} = r$. D'où, (H_1) et (H_2) du Théorème 5.2.2.

Montrons maintenant que g satisfait les hypothèses du même théorème.

Pour tous $\eta > 0$, $t \in I$ et tous $(U,V) \in \overline{\mathbf{B}}_{H\times H}(0,\eta)$ $(U = (u,u'),\ V = (v,v'))$nous avons,

$$\begin{aligned}
\|g(t,U) - g(t,V)\| =& \|(f(t,u',u),-u') - (f(t,v',v),-v')\| \\
=& \|(f(t,u',u) - f(t,v',v),-u'+v')\| \\
=& \|f(t,u',u) - f(t,v',v)\| + \|u'-v'\| \\
\leq& k_\eta(t)\big(\|u-v\| + \|u'-v'\| + \|u'-v'\|\big) \\
\leq& (k_\eta(t)+1)\big(\|u-v\| + \|u'-v'\|\big) \\
=& (k_\eta(t)+1)\|(u,u'),(v,v')\| = \gamma_\eta(t)\|U-V\|.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (i) du Théorème 5.2.2 est clairement vérifiée. Concernant (ii) nous avons pour tout $t \in I$ et tout $u \in \bigcup_{s\in I} C(s)$ $(U = (u,u'))$.

$$\begin{aligned}
\|g(t,U)\| =& \|(f(t,u',u),-u')\| \\
=& \|f(t,u',u)\| + \|u'\| \\
\leq& c(1+\|u\|+\|u'\|)+\|u'\| \\
\leq& (c+1)(1+\|u\|+\|u'\|) \\
=& (c+1)(1+\|U\|) = \beta(t)(1+\|U\|).
\end{aligned}$$

On conclut que toutes les hypothèses du Théorèmes 5.2.2 sont satisfaites, il existe alors une solution unique absolument continue $X(.) = (\dot{x}(.), x(.))$ pour le problème (**SPP**) et par suite $x(.)$ est une solution dans $\mathbf{C}^1_E(I)$ de notre problème $(\mathcal{P}_f)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] Robert A. Adams, John J. F. Fournier, Sobolev spaces. Academic press (2003).

[2] F. Aliouane and D. Azzam-Laouir, A second order differential inclusion with proximal normal cone in Banach spaces. Topol. Methods in Nonlinear Analysis 44, No. 1, (2014) 143-160.

[3] F. Aliouane and D. Azzam-Laouir, Existence of solutions of a multi-valued perturbed second order sweeping process in Banach spaces. To appear in journal of Algerian Mathematical Society (2015).

[4] F. Aliouane and D. Azzam-Laouir, Second order sweeping process with a Lipschitz perturbation. Submitted.

[5] D. Azzam-Laouir and S. Izza, Existence of solutions for second-order perturbed nonconvex sweeping process. Computers and Mathematics with Applications 62 (2001) 1736-1744.

[6] D. Azzam-Laouir, A. Makhlouf and L. Thibault, On perturbed sweeping processes. Appl. Analysis (2015) 1-20.

[7] H. Benabdellah, Existence of solutions to the nonconvex sweeping process. J. Diff. Equations 164 (2000), 286-295.

[8] H. Benabdellah, Differential inclusions on closed sets in Banach spaces with Application to sweeping process. Topol. Methods in Nonlinear Anal. 23 no.1 (2004), 115-148.

[9] H. Benabdellah and A. Faik, Perturbations convexes et nonconvexes des équations d'évolution, Portugal. Math, 53(2) (1996), 187-208.

[10] F. Bernicot, J. Venel, Existence of sweeping process in Banach spaces under directional prox-regularity. J. Convex Anal. 17 (2010), 451-484.

[11] F. Bernard and L. Thibault, Prox-regularity of functions and sets in Banach spaces. Set-valued Anal. 12 (2004), 25-47.

[12] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Characterizations of Prox-Regular Sets in Uniformly Convex Banach spaces. J. Convex Anal. 13 (2006), 525-560.

[13] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces : various regularities and other porperties. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 2211-2247.

[14] M. Bounkhel, Existence results for second order convex sweeping processes in p-uniformly smooth and q-uniformly convex Banach spaces. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, (2012), N 27, 1-10.

[15] M. Bounkhel, General existence results for second order nonconvex sweeping process with unbounded perturbations. Port. Math (N. S.) 60 (2003), no. 3, 269-304.

[16] M. Bounkhel and R. AL-Yusof, First and second order convex sweeping processes in reflexive smooth Banach spaces. Set-Valued Var. Anal. 18 (2010), no. 2, 151-182.

[17] M. Bounkhel and D. Laouir-Azzam, Existence results for second order nonconvex sweeping processes. Set-Valued Anal. 12 (2004), no. 3, 291-318.

[18] M. Bounkhel and L. Thibault, On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis, Nonlinear Anal. 48 (2002), 223-246.

[19] M. Bounkhel and L. Thibault, Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space. J. Nonlinear and Convex Anal. 6 359-374, (2005).

[20] J. M. Borwein and J. R. Giles, The proximal normal formula in Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 371-381.

[21] A. Canino, On p-convex sets and geodesics. J. Diff. Euations 75 (1988), 118-157.

[22] C. Castaing, Equation differentielle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach, Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 13 (1978).

[23] C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques, BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. Set-Valued Anal. 3 no.4 (1995), 381-399.

[24] C. Castaing and M.D.P. Monteiro-Marques, Evolution problems associated with nonconvex closed moving sets with bounded variation. Portugal. Math. 53 (1996), 73-87.

[25] C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, A multivalued version of Scorza-Dragoni's theorem with an application to normal integrands, Bull. Pol. Acad. Sci. Mathematics, 42 (1994) 133-140.

[26] C. Castaing and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions. LNM 580, Springer Verlag, Berlin. (1977)

[27] C. Castaing, T. X. Dúc Ha, M. Valadier, Evolution equations governed by the sweeping process, Set-Valued Anal. 1 (1993), 109-139.

[28] C. Chidume, Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, Springer-Verlag, (1965).

[29] F. H. Clarke, Optimization and nonsmooth analysis, John Wiley and Sons, New York (1983)

[30] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower-C^2 property. J. Convex Anal. 2 (1995), 117-144.

[31] F. H. Clarke, Y. Ledyaev, J. R. Stern and R. P. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer-Verlag, 1997.

[32] G. Colombo and M.D.P. Monteiro Marques, Sweeping by a continuous prox-regular set, J. Diff. Equations 187 no.1 (2003), 46-62.

[33] G. Colombo and V.V. Goncharov, The sweeping processes without convexity. Set- Valued Anal. 7 (1999), 357-374.

[34] G. Colombo and L. Thibault, Prox-regular sets and applications. Handbook of nonconvex analysis and applications (2010).

[35] B. Cornet, Contributions à la théorie mathématique des mécanismes dynamiques d'allocation de ressources, Thèse de doctorat d'état, Université Paris-Dauphine, 1981.

[36] B. Cornet, Existence of slow solutions for a class of differential inclusions, J. Math. Anal. Appl. 96 (1983), 130-147.

[37] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, Characterization of lower semicontinuous convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 61-72.

[38] J. Diestel, Geometry of Banach spaces : selected topics, Springer-Verlag, New-York, (1975).

[39] J.F. Edmond and L. Thibault, Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. Math. Program, Ser. B 104 (2005), 347-373.

[40] J.F. Edmond and L. Thibault, BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with peturbation. J. Diff. Equations 226 no.1 (2006), 135-179.

[41] H. Federer, Curvature measures. Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 418-491.

[42] C. Henry, an existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side, J. Math. Anal, Appl. 41 (1973), 179-186.

[43] A. G. Ibrahim and F. A. Aladsani, Second order evolution inclusions governed by sweeping process in Banach spaces. Le Matematiche, Vol. LXIV (2009)-Fasc. II. pp. 17-39.

[44] A. D. Ioffe, Proximal analysis and approximate subdifferentials, J. London Math. Soc. 41 (1990), 175-192.

[45] Jarnik, J. and Kurzweil, J. On conditions on right hand sides of differential relations, Cas. Pest. Mat., 102 (1977), 334-349.

[46] V. Klee, Convexity of Chebyshev sets, Math. Annalen 142 (1961), 292-304.

[47] D. Milman, On some criteria for the regularity of spaces of type (B), C. R. Acad. Sci. URSS 20 (1938), 243-246.

[48] M. D. P. Monteiro Marques, Differential inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Shoks and Dry Friction, Birkhäuser, Basel, (1993).

[49] J. J. Moreau, Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée, Sém. Anal. convexe Montpellier, Exposé 17 (1975).

[50] J. J. Moreau, Sur l'évolution d'un systeme élasto-viscoplastique, C.R. Acad. Sci. Paris Sir. A-B 273 (1971), A118-A121.

[51] J. J. Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity, in "New Variational Techniques in Mathematical Physics" (G. Capriz and G. Stampacchia, ED.), 173-322, C.I.M.E. II Ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma, 1974.

[52] J. J. Moreau, Rafle par un convexe variable I, Sém. Anal. Convexe, Montpellier, Exposé 15 (1971).

[53] J. J. Moreau, Rafle par un convexe variable II, Sém. Anal. Convexe, Montpellier, Exposé 3 (1972)

[54] J.J. Moreau, Evolution Problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. J. Diff. Equations 26 no.3 (1977), 347-374.

[55] J. J. Moreau, Multiapplications à rétraction finie, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (1974), 169-203.

[56] R. Moreira and V. Teixeira, On the behavior of weak convergence under nonlinearities and applications. Proc. Amer. Math. Soc. 133 no. 6 (2005), 1647-1656.

[57] B. Maury and J. Venel, Un modèle de mouvement de foule. In ESAIM : Proc., volume 18, pages 143-152, (2007).

[58] B. S. Mordukhovich and Y. Shao, Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1235-1280.

[59] B.J. Pettis, A proof that every uniformly convex space is reflexive, Duke Math. J. 5 (1939), 249-253.

[60] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault, Local differentiability of distance functions, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 5231-5249.

[61] Rzezuchowski, T. Scorza-Dragoni type theorem for upper semicontinuous multivalued functions, Bull. Pol. Acad. Sci., 28 (1980), 61-66.

[62] A. S. Shapiro, Existence and differentiability of metric projections in Hilbert spaces. SIAM J. Optim. 4 (1994) 130-141.

[63] L. Thibault, Sweeping Process with regular and nonregular sets. J. Diff. Equations 193 no.1 (2003), 1-26.

[64] M. Valadier, Quelques problèmes d'entraînement unilatéral en dimension finie. Séminaire d'Analyse Convexe 18 (1988), Exp. No. 8, Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier.

[65] J. Venel, Integrating strategies in numerical modelling of crowd motion. In Pedestrian and Evacuation Dynamics '08. Springer, (2010), 641-646.

[66] J. Venel, Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule, Thèse de doctorat d'état, Université Paris-Sud, (2008).

[67] Z. B. Xu and G. F. Roach, Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991), 189-210.

Conclusion et Perspectives

Cette thèse a fait l'objet de quelques contributions dans l'étude des processus de la rafle du second ordre dans les espaces de Banach, dans l'esprit d'une continuité des travaux de recherche investis dans ce domaine. Par ailleurs, il reste beaucoup de problèmes ouverts dans cette direction. Par exemple, on se propose d'étudier dans des travaux futurs le problème suivant

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(t)}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ \dot{x}(t) \in K(t),\ \forall t \in I; \\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = u_0 \end{cases}$$

où F est une multi-application semicontinue inférieurement définie de $I \times E \times E$ dans E à valeurs non vides convexes compactes. K une E-multi-application à valeurs non vides boule-compactes et r-prox-régulières. et $N_{K(.)}(.)$ désigne le cône normal proximal de K.
D'autre part, on s'intéresse au problème suivant

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\dot{X}(t) \in N_{C(t)}(AX(t)),\ p.p.\ t \in I; \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

où $C(.)$ est à variation absolument continue et A une application linéaire bijective bicontinue définie de $H \times H$ dans $H \times H$ par $A(\varphi, \xi) = (\xi, \varphi)$.

RESUME

On s'intéresse dans cette thèse à l'étude de l’existence de solutions pour certains problèmes d'évolution. Il s'agit du processus de la rafle perturbé associé à des ensembles prox-réguliers, ces ensembles sont supposés évoluer de façon Lipschitzienne.

D'une part, on étudie le problème dans un espace de Banach séparable sous différentes hypothèses sur la perturbation, et d'autre part, on montre l'existence de solutions pour notre problème dans un espace de Hilbert avec une perturbation univoque.

ABSTRACT

We focus in this thesis to the study of the existance of solutions for some evolution problems. The study is concerned with perturbed sweeping processes associated with prox-regular sets, which are assumed to move in a Lipschitz way.

First, we establish some results on the existence of solutions in a separable Banach space under different assumptions about the perturbation, and on the other hand, we show the existence of solutions for our problem in a Hilbert space with a single-valued perturbation.

ملخص

نهتم في هذه الأطروحة بدراسة وجود الحلول لبعض مشاكل التطور و التي تتمثل في نسق النشل المضطرب المتعلق بمجموعات من نوع منتظم، حيث نفرض أن هذه المجموعات تتغير بطريقة ليبشيتزية.

من جهة، ندرس هذه المشاكل في فضاء بناخ قابل للفصل تحت فرضيات مختلفة حول الاضطراب و من جهة أخرى نبرهن وجود الحلول للمشكل المطروح سابقا في فضاء هيلبارت بإضطراب أحادي القيم.