Table des matières

Introduction

Les calculs de *Leipniz-Newton* étudient la différentiabilité et l'intégration de fonctions déterministes, et donnent une règle de base pour calculer la dérivée du composé de deux fonctions différentiables. Pour les fonctions aléatoires, telles que les fonctions dépendant d'un mouvement brownien, la règle de *Leipniz-Newton* ne peut pas être appliquée car les trajectoires browniennes sont nulle parts différentiables, à cause du mouvement très rapide et irrégulier. Donc on ne peut pas dériver une telle fonction de la même méthode du calculs de *Leipniz-Newton*.

Au début du 20éme siècle, le botaniste *Robert Brown*, a découvert le mouvement brownien, un mouvement rapide et irrégulier des particules de pollen en suspension dans l'eau. Ce mouvement a été étudié par *Einstein*, *Perrin* et d'autres physiciens. En 1923, sur ce fond scientifique, *Wiener* a défini des mesures de probabilité dans les espaces de parcours et a utilisé le concept des intégrales de *Lebesgue* pour jeter les bases mathématiques de l'analyse stochastique. En 1942, le Dr.*Kiyosi Itô* a commencé à reconstruire, à partir de zéro, le concept d'intégrales stochastiques et sa théorie d'analyse associée. Il a créé la théorie des équations différentielles stochastiques, qui décrivent le mouvement en raison d'événements aléatoires.

En 1944, *K. Itô* a publié le célèbre article "Stochastic Integral" dans les Actes de l'Académie Impériale (Tokyo). C'était le début du calcul d'*Itô*, la contrepartie du calcul *Leibniz-Newton* pour les fonctions aléatoires. Dans ce document de six pages, *Itô* a introduit une formule de l'intégrale stochastique, connue depuis lors par la formule d'Itô.

La formule d'*Itô* est la règle de la chaîne pour le calcul d'Itô. Mais elle ne peut pas être exprimée, comme dans le calcul de *Leibniz-Newton*, en termes de dérivés, car le mouvement brownien ne se distingue pas partout. La formule d'*Itô* peut être interprétée uniquement sous la forme intégrale. En outre, il existe un terme supplémentaire dans la formule, appelé le terme de correction d'*Itô*, résultant de la variation quadratique non nulle d'un mouvement brownien.

Avant que *Itô* n'ait introduit l'intégrale stochastique en 1944, les intégrales informelles impliquant le bruit blanc (la dérivée inexistante d'un mouvement brownien) avaient déjà été utilisées par des scientifiques appliqués. C'était une idée novatrice d'*Itô* pour considérer le produit du bruit blanc et l'écart de temps comme un différentiel de mouvement brownien, une quantité qui peut servir d'intégrateur. La méthode d'*Itô* utilisée pour définir une intégrale stochastique est une combinaison des techniques de l'intégrale de *Riemann-Stieltjes* et de l'intégrale de *Lebesgue*.

L'objectif de notre travail est d'étudier l'intégrale stochastique, en donnons les définitions et propriétés. Pour ce but, on a partagé cet exposé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principaux résultats sur l'intégrale de *Riemann* et celle de *Riemann Stieltjes* (R.S).

Dans le deuxième chapitre, nous étudiérons les intégrales stochastiques.

Enfin, le dernier chapitre contient l'application de l'intégrale stochastique en finance, et aussi on va simuler quelque exemples de cette intégrale à l'aide de logiciel *R*.

Chapitre 1

Intégrale de *Riemann Stieltjes*

Ce chapitre est une introduction au chapitre suivant, il contient les principaux résultats sur l'intégrale de *Riemann* et celle de *Riemann Stieltjes* (R.S).

Cette introduction n'est pas nécessaire pour comprendre l'intégrale stochastique d'Itô, mais elle expose quelque propriétés et définitions sur l'intégration de R.S. afin d'expliquer pourquoi les intégrales classiques ne peuvent pas être appliquées quand l'intégrateur est la trajectoire brownienne.

1.1 Intégrale de *Riemann*

Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(x_1,...,x_{n+1})$ une subdivision ordonnée de $[a,b]$: $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} = b$. On supposera que $\max_k (x_{k+1} - x_k)$ tends vers 0 lorsque n tends vers l'infini.

On pose pour toute fonction f définie sur $[a,b]$:

$$\bar{I}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k).$$

$$\underline{I}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k).$$

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, on dit qu'elle est Riemann-intégrable (intégrable au sens de Riemann) si pour tout subdivision ordonnée de $[a,b]$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \bar{I}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n(f).$$

On note et on définit l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \bar{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n(f)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\xi=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i),\end{aligned}$$

où $f(\xi_i)$ est la valeur de f dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Donnons une condition suffissante pour qu'une fonction f soit Riemann-intégrable.

Théorème 1.1.2 *Une fonction f est dite Riemann-intégrable si elle est continue, ou continue par morceaux.*

Proposition 1.1.3

Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann, sur $[a,b]$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

2-Si f et g sont Riemann-intégrable alors $f.g$ l'est également.

3-Si $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier si $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

4-Relation de Chasles : Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \forall c \in [a,b].$$

5-Si $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

6- Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Si $F'(x) = f(x)$, alors:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Sommes de Riemann

L'intégrale de Riemann est définie à partir de limite de somme. Mais maintenant nous savons calculer les intégrales sans utiliser ces sommes et on peut faire le chemin inverse : calculer des limites des sommes à partir d'intégrales.

Théorème 1.1.4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann, alors :*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \overrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

La somme S_n s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.

Remarque 1.1.5 *Lorsque $a = 0$, $b = 1$ on a : $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et ainsi*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \overrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Théorème 1.1.6 *(Théorème de changement de variable)*

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et φ une fonction dérivable définie sur $[A, B]$ telle que :$\varphi(A) = a$ et $\varphi(B) = b$ alors :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_A^B f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy.$$

Preuve Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, et soit $G = F \circ \varphi$ (une fonction dérivable sur $[a, b]$)

On a :

$$\begin{aligned} G' &= \varphi'(F' \circ \varphi) = \varphi'(f \circ \varphi) \\ F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)) &= G(a) - G(b) = \int_a^b G'(x)\, dx \\ &= \int_a^b f \circ \varphi(x)\, \varphi'(x)\, dx \\ &= \int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx \end{aligned}$$

■

Passons maintenant au théoème d'intégration par parties, cette dernière est une téchnique utile l'orsqu'on peut écrire la fonction à intégrer comme le produit de deux fonctions .

Théorème 1.1.7 *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$,alors :*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

Preuve Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$

posons que $h = f.g$ (h dérivable et de dérivée continue)

$$\begin{aligned}
h' &= f'.g + f.g' \\
&\Longleftrightarrow [h(x)]_a^b = \int_a^b h'(x)\,dx \\
&\Longleftrightarrow [h(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \\
&\Longleftrightarrow [f(x)\,g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \\
&\Longleftrightarrow \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.1.8 *Calcul de* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$

Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$ *alors :*

$du = \varphi'(x)\,dx = -2xdx$. *pour* $x = 0$ *on a :* $u = \varphi(0) = 1$ *et pour* $x = \frac{1}{2}$ *on a :* $\left(u = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\right)$.

Comme $\varphi'(x) = -2x$ *et* φ *est une bejection de* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *sur* $\left[1, \frac{3}{4}\right]$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{\frac{-1}{2} du}{u^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{-1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} u^{-\frac{3}{2}} du \\
&= -\frac{1}{2} \left[-2u^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{\frac{3}{4}} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.9 *Calculer* $\int_0^1 x^2 e^x dx$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons l'intégration par partie.

On pose $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$ *alors* $f'(x) = 2x, g(x) = e^x$.

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x dx &= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x dx \\ &= \left(1^2 e^1 - 0e^0\right) - 2\int_0^1 x e^x dx \\ &= e^1 - 2\int_0^1 x e^x dx.\end{aligned}$$

Maintenant on calcule $\int_0^1 x e^x dx$ *, en utilisant la même méthode.*

On pose $f_1(x) = x, g'(x) = e^x$ *, alors :* $f'(x) = x, g(x) = e^x$.

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^x dx &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= \left(1e^1 - 0e^0\right) - [e^x]_0^1 \\ &= e^1 - \left[e^1 - e^0\right] \\ &= e^0 = 1.\end{aligned}$$

Alors :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e^1 - 2.$$

1.2 Intégrale de *Rimann-Stieltjes*

L'intégrale de *Riemann-Stieltjes* (R.S) est une généralisation de l'intégrale de Riemann, nommée d'aprés *Bamhard Riemann* et *Thomas Joennes Stieltjes*. C'est une intégrale d'une fonction par rapport à une autre fonction vérifiant bien sûr certaines conditions pour assurer l'existance de cette intégrale.

Pour définir l'intégrale de R.S commançons d'abords par définir la variation d'une fonction.

Définition 1.2.1 *Soient* $[a, b] \in \mathbb{R}$, σ *une subdivision de* $[a, b]$, *et on note par* $\Delta = \max_{1\leq i\leq n} |x_{i+1} - x_i|$ *le pas de la subdivision, alors la variation de la fonction* f *sur* $[a, b]$ *est la quantité :*

$$V_\sigma (f, [a, b]) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

et la variation totale de f *sur* $[a, b]$ *est :*

$$V(f) = \sup_\sigma V_\sigma (f, [a, b]).$$

On dit que f est à variation bornée sur $[a,b]$ si : $V(f) < \infty$.

Exemple 1.2.2
Tout fonction croissante est une fonction à variation bornée.

2- Tout fonction contiûment dérivable est à variation bornée

Définition 1.2.3 *L'intégrale de Riemann-.Stiltjes (R.S) d'une fonction réelle continue f par rapport à une fonction réelle à variation bornée g est notée :*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x),$$

et est définie comme suit :

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{\Delta \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(x_{i+1}) - g(x_i)\right).$$

Où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Théorème 1.2.4 *(Théorème d'Abel)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telle que :

- f est décoissent à valeurs positive sur $[a,b]$,

- $\int_a^b g(x)\, dx$ est convergente.

Alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ est convergente.

Proposition 1.2.5 *Soient f_1 et f_2 deux fonctions intégrables au sens de R.S. par rapport à la fonction g, sur l'intervalle $I = [a,b]$, on a les propriétés suivants :*

1- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,alors :

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\, dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$$

2-Si $f_1 \leq f_2$ pour tout $x \in I$ alors :

$$\int_a^b f_1(x)\, dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$$

3-Si f_1 est R.S. intégrable sur $I^* = \{x : b \leq x \leq c\}$, alors f_1 est R.S intégrable sur $I \cup I^*$ et on a :

$$\int_a^c f_1(x)\, dg(x) = \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + \int_b^c f_1(x)\, dg(x).$$

4-Si $|f_1(x)| \leq M$ *pour* $x \in I$ *, avec* $M \in \mathbb{R}^+$*, alors :*

$$\left|\int_a^b f_1(x)dg(x)\right| \leq M\left[g(b) - g(a)\right].$$

5-Si f_1 *est R.S. intégrable par rapport à* g^* *sur* I*, alors on a :*

$$\int_a^b f_1(x)\, d(g+g^*)(x) = \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + \int_a^b f_1(x)\, dg^*(x).$$

6-Si c *est une constante positive, alors* f_1 *est R.S. intégrable par rapport à la fonction* cg *:*

$$\int_a^b f_1(x)\, d(cg)(x) = c\int_a^b f_1(x)\, dg(x).$$

7-

$$\left|\int_a^b f_1(x)dg(x)\right| \leq \int_a^b |f_1(x)|\, dg(x).$$

Théorème 1.2.6 *(Théorème d'intégration par partie)*

Soient f *et* g *deux fonctions dérivables sur* $[a,b]$ *alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x). \tag{1}$$

Théorème 1.2.7 *(Théorème de changemenet de variable)*

Soient f *une fonction continue dérivable* $(f \in C^1)$ *et* g *est à variation finie et continue alors :*

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(x))\, dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)\, du.$$

Somme de *Darboux*:

L'integrale de *Riemann Stieltjes* peut être éfficacement manipulée en utilisant une généralisation appropriée des sommes de *Darbaux* .

Pour une partition σ de $[a,b]$ et une fonction croissante g sur $[a,b]$. Définissons la somme de *Darbaux* supérieure de f par rapport à g par :

$$U(\sigma, f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(g(x_{i+1}) - g(x_i)\right) \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x),$$

et la somme inférieure par :

$$L(\sigma, f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(g(x_{i+1}) - g(x_i)\right) \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Alors l'intégrale de *Riemann-Stieltjes* généralisé de f par rapport à g existe si et seulement si :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \exists \text{ une partition } \sigma \text{ tel que : } U(\sigma, f, g) - L(\sigma, f, g) < \varepsilon.$$

De plus, f est de *Riemann-Stieltjes* integrable par rapport à g si :

$$\lim_{\Delta \to 0} \left(U(\sigma, f, g) - L(\sigma, f, g) \right) = 0.$$

où Δ est le pas de la subdivision σ.

Exemple 1.2.8 *Nous calculons l'espérance et la variance de $X \in \beta(p)$, $Y \in \xi(\theta)$ en uilisant l'intégrale de R.S . comme suit :*

$$\mathbb{E}(X) = \int x \; dF_x(X) = \sum_{x_i} x_i \; f(x_i) = \; 0 * f(0) + 1 * f(1) = 0 * (1-p) + 1 * p = p$$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int x^2 \; dF_x(X) = \sum_{x_i} x_i^2 \; f(x_i) = 0^2 * (1-p) + 1^2 * p = p.$$

Alors :

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Aussi :

$$\mathbb{E}(Y) = \int Y \; dF_Y(y) = \int y \; f(y) \; dy = \int_0^\infty y \; \frac{1}{\theta} \; \exp(\frac{-y}{\theta}) \; dy = \theta.$$

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \int Y^2 \; dF_Y(y) = \int y^2 \; f(y) \; dy = \int_0^\infty y^2 \; \frac{1}{\theta} \; \exp(\frac{-y}{\theta}) \; dy = 2\theta^2.$$

Alors :

$$var(Y) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2.$$

Remarque 1.2.9 *L'intégrale $\int_a^b f(t)dB(t)$, ne peut pas être définie au sens de R.S. car la fonction $t \to dB(t)$ (la trajectoire brownienne) est non dérivable et à variation non bornée.*

Remarque 1.2.10 *Dans le cas générale, la condition de la variation bornée de la fonction g n'est pas une condition nécessaire pour l'existance de l'intégrale de R.S $\int_a^b f(t)dg(t)$.*

Dans la suite on donne une condition suffisante pour l'existance de l'intégrale de R.S qui est presque nécessaire.

Définition 1.2.11 *Une fonction g définie sur $[a,b]$ est dite à p-variation bornée pour $p>0$ si*

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \left| g(t_i) - g(t_{i-1)} \right|^p < \infty.$$

Le suprienoum est pris sur toutes les partition σ de $[a,b]$.

Proposition 1.2.12 *L'intégrale de R.S $\int_a^b f(t)dg(t)$ existe si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1- Les fonctions f et g n'ont pas les même points de discontinuité $t \in [a,b]$.

2- La fonction f est à p-variation bornée et la fonction g est à q-variation bornée pour $p>0$ et $q>0$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1.$$

1.3 Intégrale de Riemann d'un Mouvement Brownien

Dans cette section, on définit l'intégrale d'un mouvement brownien par rapport au temps. Cette intégrale est de Riemann car la trajectoire brownienne est continue, elle est définie trajectoire par trajectoire, donc c'est une variable aléatoire.Calculer cette intégrale signfie chercher la loi de cette v.a. et calculer sa moyenne et sa variance.

Avant d'étudier cette intégrale, rappelons la définition d'un mouvement brownien et quelque propriétés essentielles de ses trajectoires.

Soit $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.3.1 *(Mouvement Browniènn)*

On appelle Mouvement Brownien (M.B) standard un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie :

$\cdot$ $(X_0 = 0)$ *p.s* $(\forall t \geq 0, X_t \backsim N(0,t))$.

$\cdot$*La Continuité des trajéctoires : la fonction* $t \to X_t(\omega)$ *est continue.*

$\cdot$ *La loi des accroissements :* $\forall s \leq t, (X(t,\omega) - X(s,\omega)) \rightsquigarrow N(0, t-s)$.

$\cdot$ *L'indépendance des accroissements :* $\forall t \geq s \geq 0$, *la variable aléatoire* $(X(t,\omega) - X(s,\omega))$ *est indépendante de* $(X(s,\omega) - X(0,\omega))$.

$\cdot$ *La statoinnarité des accroissements :* $(\forall t \geq s \geq 0)$ *la loi de la v.a* $(X(t,\omega) - X(s,\omega))$ *est identique à celle de* $(X(t-s,\omega) - X(0,\omega))$.

Définition 1.3.2 *On dit que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un Mouvement Browniénn si selement si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est gaussien, continu, centré et de fonction de covariance*

$$cov\,(X_t, X_s) = \min\,(s,t)\,\forall s,t \geq 0.$$

Proposition 1.3.3 *(Non-différentiabile)*

Presque toute les trajectoire du M.B ne sont nulle parts différentiables sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 1.3.4 *Soit* σ *une subdivision de* $[a,b]$, *la variation* V_t *de la trajectoire du M.B* $(X_t)_{t\in[a,b]}$, *sur* $[a,b]$, *est définie par*

$$V_t = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n,} \left(X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)\right),$$

et elle converge vers l'infinie lorsque n tend vers l'infinie, i.e.

$$V_t \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \infty \quad p.s\ .$$

Définition 1.3.5 *(Variation quadratique)*

Soit σ *une subdivision de* $[a,b]$, *la variation quadratique*V_t^2 *de la trajectoire du M.B* $(X_t)_{t\in[a,b]}$, *sur* $[a,b]$, *est définie par*

$$V_t^2 = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n,} \left(X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)\right)^2,$$

Théorème 1.3.6 *Le mouvement brownien* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est à variation quadratique finie sur* $[a,b]$. *Pour toute subdivision* $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ *on a :*

$$\sum_{i=0}^{n} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2 \rightarrow_{n\rightarrow\infty} b - a.$$

Integrale de *Riemann* d'un Mouvement Brownien

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, puisque le mouvement brownien est à trajectoires continues avec une probabilité égale à 1. Donc $(B_t)_{t\geq 0}$ est integrable au sens de *Riemann* (d'aprés de théorème 1.1.2).

Définition 1.3.7 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement browien standard et* $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ *une partition de l'intervalle* $[a,b]$, *l'intégrale de* $(B_t)_{t\geq 0}$, *au sens de Riemann sur* $[a,b]$, *est définie par :*

$$\int_a^b B_t(\omega)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=0}^{n} \Delta t\ B_{t_i}(\omega) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=0}^{n} B_{t_i}(\omega)\left(t_i - t_{i-1}\right).$$

Proposition 1.3.8 *L'intégrale* $\int_0^t B_u(\omega)\,du$ *est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance* $\frac{1}{3}t^3$.

Preuve Ona :

$$\int_0^t B_u(\omega)du = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^{n}\Delta t\ B_{t_i}(\omega).$$

· Pour $i=1$, on a :

$$\int_0^t B(t)dt = \Delta t B_{t_1}(\omega).$$

· Pour$i=2$, on a :

$$\Delta t\ B(t_2) = \Delta t B(t_1) + \Delta t(B(t_2) - B(t_1))$$

· Jusqu'a $i=n$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta t\ B(t_n) &= \Delta t B(t_1) + \Delta t(B(t_2) - B(t_1)) + \cdots + \Delta t(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \\ &\quad \cdots + \Delta t(B(t_n) - B(t_{n-1}))\end{aligned}$$

Alors :

$$S_n = \Delta t\left[nB(t_1) + \cdots + (n-i)(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \cdots + (B(t_n) - B(t_{n-1}))\right].$$

S_n est la somme des variables aléatoire indépendantes et normalement réparties, donc S_n est gaussienne de moyenne $\mathbb{E}(S_n) = 0$.

Et de variance

$$\begin{aligned}Var(\ S_n) &= (\Delta t)^2\begin{bmatrix} n^2 var(B(t_1)) + ... + (n-i)^2 var(B(t_i) - B(t_{i-1})) + ... \\ +var(B(t_n) - B(t_{n-1}))\end{bmatrix} \\ &= (\Delta t)^3\left[n^2 + ... + (n-i)^2 + ... + 1^2\right] \\ &= (\Delta t)^3\sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{t^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

En utilisant

$$\int_0^t B(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n,$$

alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t B(t)dt\right) = \mathbb{E}(\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n) = 0.$$

$$\begin{aligned} Var\left(\int_0^t B(t)dt\right) &= Var(\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} Var(S_n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{t^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

d'où $\int_0^t B(t)dt \rightsquigarrow N(0, \frac{1}{3}t^3)$. ■

Proposition 1.3.9 *Soient $X(t)$ et $Y(t)$ deux mouvements brownien Riemann -integrables sur l'intervalle $[a,b]$, alors :*

Proposition 1.3.10 *1- $(X(t) + Y(t))$, $X(t).Y(t)$ sont Riemann -integrables sur $[a,b]$.*

2- $\forall c \in [a,b]$, $\int_a^b X(t)dt = \int_a^c X(t)dt + \int_c^b X(t)dt$.

3- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\alpha X(t) + \beta Y(t))dt = \alpha \int_a^b X(t)dt + \beta \int_a^b Y(t)dt$.

4-$\left|\int_a^b X(t)\ dt\right| \leq \int_a^b \ |X(t)|\, dt$.

Remarque 1.3.11 $\int_a^b B_t(\omega)dt$ *n'est pas une integrale stochastique.*

Exemple 1.3.12 *Soit $Y_t = \int_0^t e^{B(u,\omega)}du$, tel que $(B_t(\omega))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.*

On a : Y_t est une intégrale de Riemann, alors :

$$\forall t \geq 0, Y_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{B_{t_i}} (t_i - t_{i-1}),$$

donc : Y_t est une variable aléatiore de moyenne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{Bu}du\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left(e^{Bu}\right)du \\ \mathbb{E}\left(e^{Bu}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}dx = e^{\frac{u}{2}}, \\ \int_0^t \mathbb{E}\left(e^{\frac{u}{2}}\right)du &= 2e^{\frac{t}{2}} - 2. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intgrale stochastique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la définition et l'étude des propriétés d'une intégrale stochastique. On commence par étudier l'intégrale de *Wiener*, en suite celle d'*Ito*, et finalement, on généralise aux intégrales par rapport à une martingale, une martingale locale et une semi martingale.

2.1 Intégrale de *Wiener*

L'intégrale de *Wiener* est une integrale d'une fonction déterministe f par rapport à un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$, telles que $f \in L^2[a,b]$. Cette integrale peut étre définie comme une intégrale de Riemann-Stieltjes car les trajectoires browniennes sont à p-variation bornée sur tout intervalle fini, à condition que $p > 2$, et elles sont à p-variation non bornée pour $p \leq 2$ (voir Taylor (1972)). Considérons une fonction déterministe $f(t)$ sur l'intervalle $[a,b]$ (ou bien une trajectoire d'un processus stochastique $f(t,\omega)$), donc d'aprés la proposition 1.2.12, on peut définir l'integrale de Riemann Stieltjes $\int_0^1 f(t)\ dB_t(\omega)$ par rapport au trajectoire de $B_t(\omega)$, pour f à q variation bornée telle que $q < 2$.

2.1.1 Définition de l'integrale de *Wiener*

On commence par définir l'integrale $\int_a^b f(t)\ dB_t(\omega)$ pour les fonctions f étagées puis on généralise au cas où $f \in L^2[a,b]$.

Soit l'espace de *Hilbert* suivant $L^2[a,b] = \Big\{ f,\ f$ est une fonction déterministe vérifiant : $\int_a^b |f(t)|^2$ d

Integral de *Wiener* d'une fonction étagée

Définition 2.1.1 *Soit f une fonction étagée de la forme :*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, 1_{[t_{i-1},t_i]} \ , \forall i = \overline{1,n},$$

où : $\varepsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$ et $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ une partition de l'intervalle $[a,b]$.

L'intégtale de Wiener de la fonction étagée f est définie par :

$$\int_a^b f(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Notons $I(f) = \int_a^b f(t)\, dB_t$.

Théorème 2.1.2 *Soit f une fonction étagée, alors $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $E(I(f)) = 0$ et de variance $var(I(f)) = \int_0^{+\infty} f^2(s)\, ds$.*

Preuve

$$\int_a^b f(t)\, dB_t = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))$$

On a pour tout $i = \overline{1,n}$; $f(\varepsilon_i)$ est une constante, alors $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ est une combinaison linéaire des accroissements du mouvement brownien standard $(B(t))_{t\in[a,b]}$. Et comme les variables aléatoires $(B(t_i) - B(t_{i-1}))_{i=\overline{1,n}}$ sont gaussiennes indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ est une variable aléatoire gaussienne, sa moyenne est :

$$\begin{aligned}
E(I(f)) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))\right) (E \text{ est linéare }) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, E(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&= 0, \; (car \;\; (B(t_i) - B(t_{i-1}) \backsim N(0, (t_i - t_{i-1})),
\end{aligned}$$

et sa variance est :

$$\begin{aligned}
var(I(f)) &= var\left(\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(\varepsilon_i))^2\, var(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&\quad \text{(car les v.a } (B(t_i) - B(t_{i-1}) \text{) sont indépendantes.)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(\varepsilon_i))^2\, (t_i - t_{i-1}) \\
&= \int_a^b f^2(t)\, dt \, .
\end{aligned}$$

■

Intégrale de *Wiener* pour $f \in L^2([a,b])$

Théorème 2.1.3 *Soit* $f \in L^2([a,b])$, *alors il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *des fonctions étagées qui converge vers* f *dans* $L^2([a,b])$, *c'-à-d qui vérifie*

$$\lim_{n\to 0}\int_a^b |f_n - f|^2(t)\,dt = 0.$$

Remarque 2.1.4 *La suite de variables aléatoires* $\left(I(f_n) = \int_0^{+\infty} f_n(s)\,dB_s\right)_{n\geq 1}$ *est une suite de chauchy dans* $L^2(\Omega)$, *donc elle est convergente dans* $L^2(\Omega)$.

Définition 2.1.5 *Soit* $f \in L^2([a,b])$, *l'intégrale de Wiener de* f *sur l'intervalle* $[a,b]$*est définie par :*

$$\int_a^b f(s)\,dB_s = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(s)\,dB_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right).dans\ L^2(\Omega)$$

On note $I(f) = \int_a^b f(s)\,dB_s$

Remarque 2.1.6 $I(f)$ *est bien définie, car* $I(f)$ *est indépendante du choix de la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *.En effet : soit* $(g_m)_{m\geq 1}$ *une aurte suite de fonctions étagées, convergente vers* f.

Et montrons que

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{m\to\infty} I(g_m) = I(f), dans\ L^2(\Omega).$$

Théorème 2.1.7 *Soit* $f \in L^2[a,b]$ *l'integrale de Wiener* $\int_a^b f(t)\,dB_t$ *est une variable aléatoire gaussienne de moyenne* 0 *et de variance* $\int_a^b f(t)^2\,dt$.

Preuve Voir[3] ■

2.1.2 Propriètés de l'intégrale de *Wiener*

Proposition 2.1.8 *Soient* f *et* $g \in L^2([a,b])$, $I(f)$ *et* $I(g)$ *les intégrales de Wiener des fonctions* f *et* g *respectivement. Alors on a les propriétés suivantes :*

1-$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

on a :

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

2- $\mathbb{E}\left(I(f)I(g)\right)=\int_a^b f\left(t\right)g(t)dt.$

3- $\int_a^b f(t)dB(t)=\int_a^c f(t)dB(t)+\int_c^b f(t)dB(t).$

4- Si f *une fonction détérministe continue à variation bornée, alors on peut evaluer l'intégrale* $\int_a^b f\left(t\right)dB\left(t,\omega\right)$ *en utilisant la formule d'integration par partie, comme suit :*

$$\forall\omega\in\Omega,\int_a^b f\left(t\right)dB\left(t,\omega\right)=\left[f\left(t\right)B\left(t,\omega\right)\right]_a^b-\int_a^b B\left(t,\omega\right)df\left(t\right).$$

Théorème 2.1.9 *Soit* $f\in L^2\left([a,b]\right)$ *alors, le processus stochastique définie par*

$$X_t=\int_a^t f\left(s\right)dB\left(s,\omega\right),\forall t\in\left[a,b\right],$$

est une martingale continue par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t=\boldsymbol{\sigma}\left(B_s,s\leq t\right).$

Preuve $(X_t)_{t\in[a,b]}$ *est une martingale* $\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}1\text{-}(X_t)_{t\in[a,b]}\text{ est }\mathcal{F}_t\text{-adapté,}\\ 2\text{-}\forall t\in\left[a,b\right],E\left|X_t\right|<\infty,\\ 3\text{-}\forall t\geq s\in\left[a,b\right],E\left(X_t\mid\mathcal{F}_s\right)=X_s.\end{array}\right.$

1-$(X_t)_{t\in[a,b]}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté ?*

On a :

$$\begin{aligned}X_t&=\int_a^t f(s)dB\left(s,\omega\right)=\lim_{n\to\infty}\int_a^t f_n\left(s\right)dB\left(s,\omega\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f_n\left(\varepsilon_i\right)\left(B\left(t_i,\omega\right)-B\left(t_{i-1},\omega\right)\right)\end{aligned}$$

donc $(X_t)_{t\in[a,b]}$*est* $\mathcal{F}_t$*-adapté car* $\forall t\in\left[a,b\right],$ X_t *est une limite de combinaison linéaire des v.a.* $\left(B\left(t_i,\omega\right)-B\left(t_{i-1},\omega\right)\right)_{i=1,n}.$

2- Intégrabilité ?

Montrons que $E\left|X_t\right|<\infty$, $\forall t\in\left[a,b\right],$ *on a :*

$$\begin{aligned}E\left|X(t)\right|^2&\leq E\left(\left|X(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\\ \text{et }E\left|X(t)\right|^2&=\int_a^t\left|f(s)\right|^2ds\leq\int_a^b\left|f(s)\right|^2ds<\infty\ (\text{car }f\in L^2\left[a,b\right])\end{aligned}$$

Alors $\forall t\in[a,b]:E\left|X(t)\right|<\infty.$

3-Soit $s\leq t\in[a,b]$, *et montron que* $E\left(X_t\mid\mathcal{F}_s\right)=X_s.$

$$\begin{aligned}E\left(X_t\mid\mathcal{F}_s\right)&=E\left(\int_a^t f(u)dB\left(u,\omega\right)\mid\mathcal{F}_s\right)\\&=E\left(\int_a^s f(u)dB\left(u,\omega\right)+\int_s^t f(u)dB\left(u,\omega\right)\mid\mathcal{F}_s\right)\\&=X_s+E\left(\int_s^t f(u)dB\left(u,\omega\right)\mid\mathcal{F}_s\right).\end{aligned}$$

Pour que $(X_t)_{t\in[a,b]}$ *soit une martingale, il faut que :*

$$E\left(\int_s^t f(u,\omega)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.$$

a) Pour f *une fonction étagée dans* $L^2[a,b]$

Soit $s = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_s^t f(u,\omega)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \\
&= \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\mathbb{E}((B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega) \mid \mathcal{F}_s), \\
&\quad (\mathbb{E} \textit{ est linéaire}) \\
&= \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\mathbb{E}((B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega))), \\
&\quad \textit{car la v.a.}(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega) \textit{ est indépendante de } \mathcal{F}_s \\
&= 0, \textit{car } (B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega) \sim N(0, t_i - t_{i-1}))
\end{aligned}$$

b) Pour $f \in L^2([a,b]\times\Omega)$

On suppose qu'il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\geq 0}$ *de* $L^2([a,b])$ *telle que* $f_n \to f$ *dans* $L^2[a,b]$,

et montrons que $\mathbb{E}\left(\int_s^t f(u,\omega)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.$

On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(\int_s^t f_n(u,\omega)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0$

et on montre que $\lim\mathbb{E}\left(\int_s^t f_n(u,\omega)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right) \to \mathbb{E}\left(\int_s^t f(u,\omega)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right)$ *dans* $L^2(\Omega)$,

c'est-à-dire montrons que :

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbb{E}(\int_s^t \left(f_n(u,\omega) - f(u,\omega)\right)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s)\right\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

autrement dit, on montre que :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(\int_s^t \left(f_n(u,\omega) - f(u,\omega)\right)dB(u,\omega) \mid \mathcal{F}_s\right)\right|^2 = 0$$

on a :

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(\int_s^t (f_n(u,\omega)-f(u,\omega))\,dB\,(u,\omega)\mid\mathcal{F}_s\right)\right|^2 &\leq \mathbb{E}\left(\int_s^t \left|(f_n(u,\omega-f(u,\omega))\,dB\,(u,\omega)\right|^2\mid\mathcal{F}_s\right)\\
\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\int_s^t (f_n(u,\omega)-f(u,\omega))\,dB\,(u,\omega)\mid\mathcal{F}_s\right)\right|^2\right) &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left|\int_s^t (f_n(u,\omega)-f(u,\omega))\,dB\,(u,\omega)\right|^2 \mid \right.\right.\\
&\leq \mathbb{E}\left|\int_s^t (f_n(u,\omega)-f(u,\omega))\,dB\,(u,\omega)\right|^2\\
&\leq \int_s^t \mathbb{E}\left|f(u)-f_n(u)\right|^2du\\
&\leq \int_a^b \mathbb{E}\left|f(u)-f_n(u)\right|^2du \to_{n\to\infty} 0\\
(\text{ car } f_n &\to f \text{ dans } L^2\,[a,b])\\
&\left(\mathbb{E}(\int_a^b f_n(u,\omega)dB(u,\omega\mid\mathcal{F}_s\right)_{n\geq 0}\overrightarrow{n\to\infty}\left(\right.\\
&\Longrightarrow \left(\mathbb{E}(\int_a^b f(u,\omega)dB(u,\omega\mid\mathcal{F}_s\right)=0.
\end{aligned}
$$

donc $(X_t)_{t\in[a,b]}$ *est une martingale par rapport à* $\mathcal{F}_t=\sigma\,(B_u,u\leq t)$ *pour tout* $f\in L^2\,[a,b])$. ■

2.1.3 Exemples de l'integrale de *Wiener*

Exemple 2.1.10 *Soit f une fonction étagée définie par*

$$
f(t)=\begin{cases} -3 \ si\ t\in[0,1] \\ 1 \ si\ t\in[1,3] \\ 4 \ si\ t\in[3,4]\end{cases}
$$

alors l'intégrale de Wiener de la fonction f est :

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 f(t)dB(t) &= \sum_{i=1}^{3} f(t_i)(B(t_i)-B(t_{i-1}))\\
&= -3\,(B\,(1)-B\,(0))+1\,(B\,(3)-B\,(1))+4\,(B\,(4)-B\,(3))\\
&= -3N\,(0,1)+1N\,(0,2)+4N\,(0,1)\\
&= N(0,9)+N\,(0,2)+N\,(0,16)\\
&= N\,(0,27)\,.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.1.11 *Soit* $X_t=\int_0^1 tdB_t$.

On a $f(t) = t, X_t$ *est définie si :* $f(t) \in L^2[0,1]$ *c'est-à-dire si* $\int_0^1 t^2 dt < +\infty$. *On a*

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 dt &= \left[\frac{1}{2}t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} < +\infty.\end{aligned}$$

d'où : $f(t) \in L^2[0,1]$, *par conséquent* X_t *est définie.*

Donc : X_t *est une intégrale de Wiener, alors c'est une v.a. gaussienne.*

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} t_i \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)$$

$$\begin{aligned}\textit{de moyenne} \quad &: \quad \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \textit{et de variance} \quad &: \quad var(X_t) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 2.1.12 *Soit* $X_t = \int_0^t \sin s dBs$.

On a $f(s) = \sin s, X_t$ *est définie si :* $f(s) \in L^2[0,t] \Longleftrightarrow \int_0^t \sin^2 s ds < +\infty$.

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin^2 s ds &= \int_0^t \frac{1-\cos 2s}{2} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} ds - \int_0^t \frac{\cos 2s}{2} ds \\ &= \left[\frac{1}{2}s\right]_0^t - \left[\frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^t \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t < +\infty.\end{aligned}$$

D'où : $f(s) \in L^2[0,t]$, *par conséquent* X_t *est définie.*

Donc : pour tout $t \geq 0, X_t$ *est une intégrale de Wiener,alors* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien, de moyenne*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) \quad &= \quad 0 \\ \textit{et de covariance} \quad &: \quad cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_s) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \sin u dB(u,\omega)\right)\left(\int_0^s \sin u dB(u,\omega)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{s\wedge t} \sin u dB(u,\omega) \int_0^{s\wedge t} \sin u dB(u,\omega)\right) \\ &= \int_0^{s\wedge t} \sin^2 u du = \frac{1}{2}(s\wedge t) - \frac{1}{2}\sin 2(s\wedge t).\end{aligned}$$

On a : $t \to B_t$ *est une fonction continue*

$t \to \sin t$ *est une fonction continement dérivable*

$\Longrightarrow \sin t$ *est à variation bornée.*

Donc : en appliquant la formule d'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin s dB(s,\omega) &= [\sin sB(s,\omega)]_0^t - \int_0^t \cos sB(s,\omega)\,ds \\ &= \sin tB(t,\omega) - \int_0^t \cos sB(s,\omega)\,ds.\end{aligned}$$

2.2 Intégrale d'Itô

Cette partie est consacré à l'étude de l'intégrale de la forme $\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega)$, l'intégrale d'*Itô* d'un processus stochastique $(f(t,\omega))_{t\geq 0}$ par rapport à un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ .D'abord, on définit cette intégrale dans le cas où $f(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté avec $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s\leq t)$ et f vérifie$\int_a^b \mathbb{E}\left(|f(t)|^2\right)dt < +\infty$. (i.e. $f \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$), puis on le prolonge au cas où $f(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien avec $\int_a^b |f(t)|^2\,dt < +\infty$ (i.e.$f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$)

2.2.1 Intégrale d'ITô sur $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

A-Pour les processus stochastique étagés dans $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

Soit $(\Omega, A, P, (\mathcal{F}_t))$ un espace probabilisé filtré, et considérons l'espace $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega) =$
$$\left\{\begin{array}{c} f(t,\omega)\text{, un processus stochastique } \mathcal{F}_t - \textit{adapté} \text{ avec} \\ \mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s\leq t)\,;\int_a^b \mathbb{E}\left(|f(t)|^2\right)dt < +\infty \end{array}\right\}$$

Définition 2.2.1 *(Processus stochastique étagé)*

Un processus stochastique étagé $(X_t)_{t\in[a,b]}$ *est un processus de la forme :*

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega)\,1_{[t_{i-1},t_i]}(t)\,.$$

Où : $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *et* ξ_{i-1} *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ *- mesurable telle que* $E\left(\xi^2_{i-1}\right) < +\infty$.

Définition 2.2.2 *L'intégrale d'Itô d'un processus stochastique étagé* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ *de* $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$*, sur l'intervalle* $[a,b]$*, est définie par :*

$$\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right).$$

Notons $I(f) = \int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega)$.

Proposition 2.2.3 *Soit* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ *un processus étagé de* $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$*, alors l'intégrale d'Itô* $I(f)$ *est une variable aléatoire de moyenne :*

$$\mathbb{E}(I(f)) = 0,$$

et de variance :

$$var(I(f)) = \mathbb{E}\left(I(f)^2\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left|f(t,\omega)\right|^2 dt.$$

Preuve Montrons que $\mathbb{E}(I(f)) = 0$

On a

$$f(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\,1_{[t_{i-1},t_i]}(t).$$

alors

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I(f)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}(\omega)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right)\right) \text{ (car } \mathbb{E} \text{ est lénéaire)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\xi_{i-1}(\omega)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_{i-1}(\omega)\,\mathbb{E}\left(\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)\right]\\
&\quad \text{(car } \xi_{i-1}(\omega) \text{ est } \mathcal{F}_{t_{i-1}}\text{-mesurable)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_{i-1}(\omega)\,\mathbb{E}(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right] \quad (\mathbb{E}(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega) = 0\\
&\quad \text{car } B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega) \text{ II de } \mathcal{F}_{t_{i-1}}\\
&= \mathbb{E}\left[\xi_{i-1}(\omega)\right] = 0.(\text{car } E\left(\xi_{i-1}^2\right) < +\infty).
\end{aligned}$$

Montrons que $var(I(f)) = \int_a^b \mathbb{E}\left|f(t,\omega)\right|^2 dt$.

on a $var(I(f)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}(f)^2) - (\mathbb{E}(\mathbb{I}(f)))^2$

$= \mathbb{E}(\mathbb{I}(f)^2)$

$I(f)^2 = (\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(B(t_i) - Bt_{i-1}))^2$

$= \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(B(t_i) - Bt_{i-1}) \sum_{j=1}^n \xi_{j-1}(B(t_j) - Bt_{j-1}) \ldots(1)$

a) pour tout $i \neq j$ $(i < j)$

$$\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - Bt_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - Bt_{i-1}) \mathbb{E}\left[(B(t_i) - Bt_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right) \\
\text{donc } \mathbb{E}\left[(B(t_i) - Bt_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] &= \mathbb{E}(B(t_i) - Bt_{i-1}) = 0 \\
\text{d'où } .\mathbb{E}(\mathbb{I}(f)^2) &= \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - Bt_{i-1})\right) =
\end{aligned}$$

Pour $i = j$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^2 (B(t_i) - Bt_{i-1})^2\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - Bt_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2 \mathbb{E}\left[(B(t_i) - Bt_{i-1})^2\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$var(I(f)) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left|f(t,\omega)\right|^2 dt.$$

■

Maintenant on définit l'intégrale$\int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega)$, pour $f \in L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$.

B-Pour tout processus stochastique dans$L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$

Lemme 2.2.4 *Soit* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ *un processus stochastique de* $L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$, *alors il existe une suite de processus stochastique étagés* $(f_n(t,\omega))_{n\geq 1} \in L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$ *tels que :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}\left|f_n(t,\omega) - f(t,\omega)\right|^2 dt = 0.$$

Définition 2.2.5 *Soit* $(f_n)_{n\geq 1} \in L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$ *une suite de processus stochastique étagés qui converge vers* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$*dans* $L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$, *alors l'intégrale d'Itô du processus*

$(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ *est définie par :*

$$\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t,\omega)\,dB_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(B(t_i)-B(t_{i-1})\right).$$

On note $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

Théorème 2.2.6 *Soit* $f \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, *alors l'intégrale d'Itô* $I(f)$ *est une variable aléatoire de moyenne* $\mathbb{E}(I(f)) = 0$, *et de variance* $var(I(f)) = \int_a^b \mathbb{E}\left|f(t,\omega)\right|^2 dt$.

Preuve Voir[3] ■

2.2.2 Intégrale d'Itô sur $\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$

On peut prolonger l'intégrale $\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega)$, en supposant que $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ c'est à dire que $(\mathcal{F}_t)$ une filtration quelconque et $(B_t)_{t\geq 0}$est un $\mathcal{F}_t$-M.B ; f est adapté à $\mathcal{F}_t$, et $\int_0^t |f(t)|^2 < \infty$ p.s.

Lemme 2.2.7 *Soit* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathcal{L}^2[a,b])$, *alors il existe une suite de processus* $(g_n)_{n\geq 0}$ *de* $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *tels que :*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t,\omega) = f(t,\omega)\,,\ \textit{dans } L^2(\Omega)\,.$$

$$i.e.\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|g_n(t,\omega) - f(t,\omega)\right|^2 dt = 0,\ \textit{p.s et en probabilité.}$$

Preuve Voir[3] ■

Lemme 2.2.8 *Soit* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathcal{L}^2[a,b])$, *alors il existe une suite de processus étagés* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *tels que :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|f_n(t,\omega) - f(t,\omega)\right|^2 dt = 0,\ \textit{en probabilité.}$$

Preuve On utilise le lemme (2.2.7)

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|g_n(t) - f(t)\right|^2 dt = 0 \cdots (1)$$

On a

$$\mathbb{E}\int_a^b \left|f_n(t) - g_n(t)\right|^2 dt \leq \frac{1}{n} \cdots (2)$$

on utilise l'inégalité $|u+v|^2 \leq 2\left(|u|^2+|V|^2\right)$
$\forall\varepsilon>0:\left(\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt>\varepsilon\right)\subset\left(\int_a^b |f_n(t)-g_n(t)|^2\,dt>\frac{\varepsilon}{4}\right)\cup\left(\int_a^b |g_n(t)-f(t)|^2\,dt>\frac{\varepsilon}{4}\right)$
$\mathbb{P}\left(\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt>\varepsilon\right)\leq\mathbb{P}\left(\left(\int_a^b |f_n(t)-g_n(t)|^2\,dt>\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\int_a^b |g_n(t)-f(t)|^2\,dt>\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$
d'aprés l'inégalité de chebyshev et l'equation (2) on a :

$$\mathbb{P}\left(\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt>\varepsilon\right)\leq\frac{4}{n\varepsilon}+\mathbb{P}\left(\left(\int_a^b |g_n(t)-f(t)|^2\,dt>\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$$

alors d'aprés (1)

$$\lim_{n\infty}\mathbb{P}\left(\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt>\varepsilon\right)=0,\forall\varepsilon>0.$$

■

Définition 2.2.9 *Soit* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}\in\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega,L^2[a,b]\right)$, *l'intégrale d'ITO de* f *est définie comme suit :*

$$\int_a^b f(u,\omega)\,dB(u,\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t,\omega)\,dB(t,\omega).$$

2.2.3 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Proposition 2.2.10

1- $\forall f,g\in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega),\mathcal{L}_{ad}(\Omega,\mathcal{L}^2[a,b])$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *alors :*

$$I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g).$$

2-$\int_a^b f(t)\,dB(t)=\int_a^c f(t)\,dB(t)+\int_c^b f(t)\,dB(t)$.

3-Pour $f\in\mathcal{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *le processus* $X(t)=\int_a^t f(u,\omega)\,dB(u,\omega)$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale continue.*

4-Pour $f\in\mathcal{L}_{ad}(\Omega,\mathcal{L}^2[a,b])$ *le processus* $X(t)=\int_a^t f(u,\omega)\,dB(u,\omega)$ *est une martingale locale continue.*

5-$\int_0^T XdB=\int_0^T dB(t)=B(T)-B(0)$ *si* $X(t)=1$, $\forall t$.
6-$\int_0^T XdB=\int_0^T cdB=c(B(T)-B(0))$ *si* $X(t)=c$, $\forall t$.
7-$\int_0^T 1_{[a,b]}dB(t)=B(b)-B(a)$.
8-$\int_0^T 1_{[a,b]}X(t)\,dB_t=\int_a^b X(t)\,dB(t)$.
9-$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dB_t\right)=0,\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dB_t\right)^2=\int_0^T\mathbb{E}(X^2)\,dt$.
10- Soient f *et* $g\in\mathcal{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *alors*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega)\cdot\int_a^b g(t,\omega)\,dB(t,\omega)\right)=\int_a^b\mathbb{E}(f(t,\omega)\,g(t,\omega))\,dt.$$

La formule d'Itô

La formule d'ITO est une régle de dérivation des fonctions dépendant de processus stochastiques. Une de ses applications est l'évaluation d'une intégrale stochastique.

La formule d'Itô de Base

Théorème 2.2.11 *Soit $(B_t)_{t\in[a,b]}$ un mouvement brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}$ et f une fonction de class $C^2(\mathbb{R})$ alors :*

$$f(B(t,\omega)) - f(B(a,\omega)) = \int_a^t f'(B(s,\omega))\,dB(s,\omega) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s,\omega))\,ds$$

c-à-d :

$$\frac{d}{dt}(f(B(s,\omega)))' = f'(B(s,\omega))\,dB(t,\omega) + \frac{1}{2}f''(B(s,\omega))\,dt.$$

Théorème 2.2.12 *Soit $(B_t)_{t\in[a,b]}$ un mouvement brownien et f une fonction de classe $C^{1,2}(\mathbb{R})$ alors :*

$$f(t,B(t,\omega)) - f(a,B(a,\omega)) = \int_a^t f'(s,B(s,\omega))\,dB(s,\omega) + \int_a^t f'(s,B(s,\omega))\,ds + \frac{1}{2}\int_a^t f''(s,B(s,\omega))\,ds.$$

Evaluation d'une intégrale stochastique en utilisant la formule d'Ito

Théorème 2.2.13 *Soit $F(t,x)$ la primitive de la fonction continue $f(t,x)$ et on suppose que $\frac{dF}{dt}$ et $\frac{df}{dx}$ sont continue, alors :*

$$\int_a^b f(t,B(t,\omega))\,dB(t,\omega) = [F(t,B(t,\omega))]_a^b - \int_a^b \frac{dF}{dt}(t,B(t,\omega)) + \frac{1}{2}\frac{df}{dx}(t,B(t,\omega))\,dt$$

· Sif ne dépond pas de t, on peut ecrire :

$$\int_a^b f(B(t,\omega))\,dB(t,\omega) = [F(B(t,\omega))]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(B(t,\omega))\,dt.$$

2.2.4 Exemples de l'intégrale d'ITO

Exemple 2.2.14 *Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus élémentaire défini pour tout $t\in[0,1]$ comme suit*

$$X_t = \xi_0 1_{[0,\frac{1}{4}]}(t) + \xi_1 1_{[\frac{1}{4},1]}(t).$$

L'intégrale d'ITO de X_t est

$$\int_0^t X(s)dB_s = \xi_0\left(B\left(\frac{1}{4}\right) - B(0)\right) + \xi_1\left(B(1) - B\left(\frac{1}{4}\right)\right).$$

Exemple 2.2.15 *L'intégrale* $\int_0^1 e^{B(t)}dB\left(t\right)$ *est définie car*
$\left(\mathbb{E}(\int_0^1 e^{2B(t)}dt) = \int_0^1 \mathbb{E}(e^{2B(t)}dt = \int_0^1 e^{2t}dt = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) < \infty\right)$
sa moyenne $\mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{B(t)}dB\left(t\right)\right) = 0$
et sa variance $\mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{B(t)}dB\left(t\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$

Exemple 2.2.16 *Calculons l'intégrale* $\int_0^T B(t)dB(t)$. *Soit* $0 < t_0 < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_n^n = T$ *une partition de* $[0, T]$ *et soit*

$$X^n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} B(t_i^n) 1_{\left[t_i^n, t_{i-1}^n\right]}(t),$$

alors pour chaque n, $X^n(t)$ *est un processus simple adapté* $(\xi_i^n = B(t_i^n))$ *par la continuité de* B_t , *on a :* $\lim_{n\to\infty} X^n(t) = B(t)$ *p.s.*

$$\int_0^t X^n(t)dB(t) = \sum_{i=1}^{n-1} B(t_i^n)(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n)).$$

On a : $B(t_i^n)(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n)) = \frac{1}{2}\left[B^2\left(t_{i+1}^n\right) - B^2(t_i^n) - (B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2\right]$

$$\begin{aligned}\int_0^t X^n(t)dB(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(B^2\left(t_{i+1}^n\right) - B^2(t_i^n)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2 \\ &= \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}B^2(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2,\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n-1}(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2$ *est la variation quadratique d'un mouvement brownien elle converge on probabilité vers* T, *par conséquence*

$$\int_0^t X^n(t)dB(t) \xrightarrow{\text{en proba}} \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

La moyenne de $\int_0^T B(t)dB(t)$ *est égale à 0 la variance est* $\frac{1}{2}$.

Exemple 2.2.17 *Evaluons l'intégrale* $\int_a^b B\left(s,\omega\right) e^{B(s,\omega)}dB\left(s,\omega\right)$ *en utilisant la formule d'ITO on pose* $x = B\left(s,\omega\right)$ *on a alors*

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= e^x \\ &\Longrightarrow F\left(x\right) = e^x\left(x-1\right) + c \\ &\Longrightarrow F\left(B\left(s,\omega\right)\right) = e^{B(s,\omega)}\left(B\left(s,\omega\right) - 1\right) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'B(s,\omega) &= e^{B(s,\omega)}(1+B(s,\omega)) \\ &= e^{f(B(s,\omega))}(1+B(s,\omega)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{B(s,\omega)}B(s,\omega)\,dB(s,\omega) &= \left[e^{B(s,\omega)}(B(s,\omega)-1)\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B(s,\omega)}(1+B(s,\omega))\,ds \\ &= e^{B(s,\omega)}(B(s,\omega)-1) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B(s,\omega)}(1+B(s,\omega))\,ds. \end{aligned}$$

2.3 Integral par rapport à une martingale continues bornées dans L^2

Dans cette section, on s'intéresse à la définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)dM(t)$ où $(M_t)_{t\in[a,b]}$ est martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$. Pour $t \in [a,b]$. On supposera que $(M_t)_{t\in[a,b]}$ est continue à droite limitée à gauche et $E(M(t)^2) < \infty$. On va prolonger l'intégrale étudier dans la section précedante (intégrale d'ITO sur $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ et sur $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathcal{L}^2[a,b])$) aux intégrales de la forme $\int_a^b f(t)dM(t)$, avec $f \in L^2_{pred}([a,b]_{\langle M\rangle}\times\Omega)$,où $L^2_{pred}([a,b]_{\langle M\rangle}\times\Omega)$ est l'espace de tous les processus prédictibles (prévisibles) $f(t,\omega), a \leq t \leq b$, satisfaisant la condition $E\int_a^b |f(t)|^2 d\langle M\rangle_t < \infty$. En suite avec $f \in \mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle})$, où $\mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle}) = \left\{f(t,\omega), t\in[a,b] \text{ processus prédictible}; \int_a^b |f(t)|^2 d\langle M\rangle_t < \infty\right\}$,en utilisant la même procedure de la section précédente pour définir cette intégrale. Donnons d'abord quelque définitions et résultats.

Processus stochastique prédictible

Soit $(M_t)_{t\in[a,b]}$ une martingale vérifiant les conditions précédentes par rapport à la filtration continue à droite $\{\mathcal{F}_t; a\leq t\leq b\}, i.e. \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$.

Définition 2.3.1 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[a,b]}$ est dit prédictible (prévisible) si la fonction*

$$(t,\omega) \to X(t,\omega),$$

est $G-$mesurable sur $[a,b]\times\Omega$; où $G = \sigma((s,t]\times A,$ avec $A\in\mathcal{F}_s$ pour $a \leq s \prec t \leq b)$.

Définition 2.3.2 *Le processus $(X_t)_{t\in[a,b]}$est prévisible s'il est un des processus suivants :*

1- Un processus adapté continu à gauche, en particulier adapté continu.

2- Limite (p.s. ou en probabilité) de processus adaptés continus à gauche.

3- Une fonction borélienne de processus prédictibles.

Exemple 2.3.3 *1- Le processus de Poisson (N_t) est continu à droite et adapté par rapport à sa filtration canonique, alors (N_t) n'est pas prédictible. Mais sa modification continue à gauche $N(t-) = \lim_{s \nearrow t} N(s)$ est prédictible.*

Théorème 2.3.4 *(Décomposition de Doob-Mayer)*

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous martingale, alors il existe une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ et un unique processus prévisible croissant $(A_t)_{t\geq 0}$ intégrable, tels que

$$X_t = X_0 + M_t + A_t.$$

Théorème 2.3.5 *Soit $(M_t)_{t\in[a,b]}$ une martingale continue à droite limitée à gauche de carré-integrable. Alors $(M_t^2)_{t\in[a,b]}$ est une sous martingale admettant la décomposition unique :*

$$M(t)^2 = L(t) + A(t), a \leq t \leq b$$

où : $L(t)$ est une martingale continu à droite limité à gauche et $A(t)$ est un processus continu prévisible et croissant telle que :$E(A(t)) < \infty$ et $A(\alpha) = 0$, pour tout $t \in [a,b]$.

Définition 2.3.6 *Le processus $(A_t)_{t\geq 0}$ est appelé compensateur de $M(t)^2$,noté $\langle M\rangle_t$.*

2.3.1 Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)dM(t)$

Définition 2.3.7 *1- Soit f un processus stochastique élémentaire de $L^2_{pred}([a,b]_{\langle M\rangle}\times\Omega)$,donné par*

$$f(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i-1}(\omega) 1_{(t_{i-1},t_i]},$$

l'intégrale de f par rapport à la martingale $(M_t)_{t\in[a,b]}$ est définie comme suit

$$\int_a^b f(t)dM(t) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{i-1}(\omega) \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)$$

avec $\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b f(t)dM(t)\right|\right) = \mathbb{E}\int_a^b |f(t)|^2 d\langle M\rangle_t$.

2- Soit $f \in L^2_{pred}([a,b]_{\langle M\rangle}\times\Omega)$, alors il existe une suite de processus élémentaire $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $L^2_{pred}([a,b]_{\langle M\rangle}\times\Omega)$,tel que

$$\lim \mathbb{E}\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 d\langle M\rangle_t = 0.$$

Ainsi, la suite $\left(\int_a^b f_n(t)dM(t)\right)$ *est de Cauchy danc* $L^2(\Omega)$. *Donc on définit l'intégrale de* f *par rapport à* $(M_t)_{t\in[a,b]}$ *comme suit :*

$$\int_a^b f(t)dM(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dM(t).$$

Remarque 2.3.8 *La limite, dans la définition de* $\int_a^b f(t)dM(t)$, *est indépendante du choix de la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *,par conséquent cette intégrale est bien définie.*

Passant maintenant à la définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)dM(t)$ pour $f \in \mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle})$

Soit $f \in \mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle})$ et définissons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$de processus stochastiques dans $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ comme suit :

$$f_n(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega), si \int_a^t |f(t,\omega)|^2 d\langle M\rangle \leq n; \\ 0, si \text{ non.} \end{cases},$$

Définition 2.3.9 *Soit* $f \in \mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle})$, *donc* $(f_n(t,\omega)) \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, *pour tout* $n\geq 1$, *et la suite* $\int_a^b f_n(t)dM(t)$ *converge en probabilité, lorsque* $n\to\infty$.*On définit l'intégrale de* f *par rapport à la martingale* $(M_t)_{t\in[a,b]}$ *par*

$$\int_a^b f(t)dM(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dM(t), en\ probabilit\acute{e}.$$

Théorème 2.3.10 *Soit* $f \in \mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle})$ *et* $(g_n) \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. *On suppose que*

$$\lim \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 d\langle M\rangle_t = 0, p.s.$$

Alors on a

$$\int_a^b f(t)dM(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)dM(t), en\ probabilit\acute{e}.$$

2.3.2 Propriétés de l'intégrale $\int_a^b f(t)dM(t)$

Théorème 2.3.11 *1-*

Pour $f \in \mathcal{L}_{pred}(\Omega, L^2[a,b]_{\langle M\rangle})$ *le processus défini, pour tout* $t\in[a,b]$, *par*

$$X_t = \int_a^t f(s)dM(s),$$

est une martingale locale. De plus si $(M_t)_{t\in[a,b]}$ *est continue, alors* (X_t) *est continu.*

2- Pour $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ *, le processus défini, pour tout* $t \in [a,b]$ *, par*

$$X_t = \int_a^t f(s)dM(s), a \leq t \leq b,$$

est une martingale, avec $\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) = \mathbb{E}\int_a^t |f(s)|^2 d\langle M\rangle.$

Exemple 2.3.12 *Soient* $(B_t)_{t\in[a,b]}$ *un* $\mathcal{F}_t$ *-mouvement brownien standard, et* $g \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ *,on a le preocessus défini par*

$$M_t = \int_a^t g(t)dB_t, a \leq t \leq b,$$

est une martingale, et le compensateur de (M_t^2) *est donné par*

$$\langle M\rangle_t = \int_a^t |g(t)|^2 dt.$$

par conséquent $f \in L^2_{pred}([a,b]_{\langle M\rangle} \times \Omega)$ *si et selment si'l satisfait la condition*

$$\mathbb{E}\int_a^t |g(t)|^2 |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Cette condition est valable si $f.g \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ *. De plus on a*

$$\int_a^b f(t)dM(t) = \int_a^b g(t)f(t)dB_t.$$

2.3.3 Exemples de l'intégrale $\int_a^b f(t)dM(t)$

Exemple 2.3.13 *Soient* (N_t) *un processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$*,et* $\left(\widetilde{N_t}\right)$ *le processus défini par*

$$\widetilde{N_t} = N_t - \lambda t$$

le processus $(N_t^{\sim})$ *est une martingale. Alors*

$$\int_a^b \widetilde{N_t}(t-)d\widetilde{N_t} = \lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{i=1}^n \widetilde{N}(t_{i-1})\left(\widetilde{N}(t_i) - \widetilde{N}(t_{i-1})\right), de\ L^2(\Omega)$$

avec $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ *est une partition finie de l'intervalle* $[a,b]$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(\widetilde{N}(t_i) - \widetilde{N}(t_{i-1})\right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left((\widetilde{N}(t_i)^2 - \widetilde{N}(t_{i-1})^2) - 2\widetilde{N}(t_{i-1})(\widetilde{N}(t_i) - \widetilde{N}(t_{i-1}))\right) \\
&= \widetilde{N}(b)^2 - \widetilde{N}(a)^2 - 2\sum_{i=1}^n \widetilde{N}(t_{i-1})\left(\widetilde{N}(t_i) - \widetilde{N}(t_{i-1})\right)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \widetilde{N}(-t)\ d\widetilde{N}(t) &= \lim_{\|\Delta_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{N}(t_{i-1})\left(\widetilde{N}(t_i)-\widetilde{N}(t_{i-1})\right), \text{ de } L^2(\Omega) \\
&= \frac{1}{2}(\widetilde{N}(b)^2-\widetilde{N}(a)^2-\lim_{\|\Delta_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{N}(t_i)-\widetilde{N}(t_{i-1})\right)^2) \\
&= \frac{1}{2}(\widetilde{N}(b)^2-\widetilde{N}(a)^2-\lambda(b-a)+\widetilde{N}(b)-\widetilde{N}(a)).
\end{aligned}$$

en particulier, on a :

$$\int_a^t \widetilde{N}(-s)\ d\widetilde{N}(s) = \frac{1}{2}(\widetilde{N}(t)^2-\lambda t-\widetilde{N}(t)\,.$$

Chapitre 3

Application et simulation de l'intégrale stochastique

On s'intéresse, dans ce chapitre, l'application notamment en mathématiques financiéres, et on simule quelque exemples de l'intégrale stochastique.

3.1 Application au finance

3.1.1 La finance

D'aprés Robert Merton (Prix Nobel d'économien en 1997, avec Myron Scholes, Fisher Black étant mort en 1995) :

La finance est l'étude des maniéres d'allouer des ressources monétaires rares au fil du temps.

Les décisions financières engendrent des recettes et dépenses réparties dans le temps.

Les recettes et dépenses ne sont généralement pas connues en avance avec certitude.

Allouer des ressources rares : optimiser risque, rentabilité (ou cout) avec deux contraintes : Tenir compte de la valeur du temps et mesurer l'incertitude.

L*es métiers de la finance*

La finance d'entreprise (Direction Financière) (planification stratégique, contrôle financier, etc...)

La finance en dehors de l'entreprise.

Marchés financiers (beaucoup de produits différents)

Institutions financières (crédit, placement,opérations complexes)

Institutions gouvernementales (garanties, financement).

Le système financier est l'ensemble des marchés et intermédiaires qui sont utilisés par les ménages, les entreprises et les états pour mener à bien leurs décisions financières. Ce système inclut les marchés d'actions, d'obligations, et autres titres financiers, ainsi que les banques et les compagnies d'assurance. Les transferts de fonds passent souvent par un intermédiaire.

Les actifs financiers principaux qui sont échangés sur les marchés sont les dettes (obligations), les actions, les devises et les produits dérivés :

Les obligations sont des dettes. La vente d'une obligation équivaut donc à un emprunt et son achat à un prét. Elle est émise par les entreprises (emprunts obligataires et billets de trésorerie), les états (OAT, bons du Trésor).

Les actions sont les titres juridiques des propriétaires d'une entreprise. On parle d'actions pour les sociétés anonymes, et de parts pour les Sarl.

Les devises correspondent aux monnaies (étrangères);

Les produits dérivés sont des titres financiers comme les options ou les contrats à terme (futures) dont la valeur dérive (vient) de la valeur d'un ou plusieurs autres actifs.

3.1.2 Modèle de black et scholes

En 1900 , le premier modèle est par Louis Bachelier dans sa thèse d'évolution des actif financiers , les actifs resqué sont supposé gaussienne à valeurs négative ,pour vérifie ce défaut le modéle par la suite fabriqué les actifs risqué loq-normaux , en suite s'assurer qu'ils sont toujours positif, ce modéle porte le nom Black et Scholes,en 1973 , l'idée de définir un autre modèle c'est le prix d'un produit dérivée , par exemple portfeuile et appliqué ce modéle log normal d'aprés Fisher Black,Robert Merton et Myron Scholes , en 1997 , le prix nobel d'economie pour les faires qui n'a pas empéché , leur fond d'invertissement "Long Term Capital Merket " de faire fiallité en 1998 .

Les hypothése sur le marché

·Les actifs sont divisibles à l'infini .

·Le marché est liquide : On peut acheter et vendre à tout instant .

·On peut emprunter et vendre à découvert .

·Les échange ont lieu sans couts de transaction .

·On peut emprunter et préter au méme taux constant r .

Modélisation probabiliste du marché

Pour modéliser l'incertitude sur le marché , soit un espace de probabilité complet (Ω, A, P) muni d'un mouvement brownien standard W , on suppose que notre marché est constitué actif sans risque S^0 et actif risqué S sur le priode $[0, T]$, tel que :

·Actif sans risque : Divise l'intervalle n partie de longeur $\frac{T}{n}$, le taux sans risque r_n de la forme $r\frac{T}{n}$, la valeur de l'actif sans risque à l'instant $P\frac{T}{n}$ à la forme $\left(1 + r\frac{T}{n}\right)$, donc :

Pour n à l'infini , S_t^0 suite comme la fontion $\exp(rt)$, la dynamique retenue pour l'evolution de l'actif sans risque est :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \text{ et } S_0^0 = 1 \Longrightarrow S_t^0 \exp(rt), t \in [0, T] \ ,$$

actif risque :La dynamique que donne par EDS de Black et Scholes :

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u(udu + \sigma dw_u), t \in [0, T] \ ,$$

où : S_0,u et σ sont constante avec $S_0 > 0$ et $\sigma > 0$.

Ce modèle est le plus simple pour modéliser un actif risqué en temps continue positif, les rendement de l'actif sont normau, telque : u est la tendance de l'actif S

Pour tout $t \in [0, t]$, la tribu $(\mathcal{F}_t)$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement.donc de $\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t)$.

·La mesure de probabilité P est alors, appelée probabilité historique.

Pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il faut résoudre l'EDS de Black et Scholes .

·Pour l'EDS admet une unique solution qui est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp((u - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t) \ p.s, pour\ tout\ t \in [0, T] .$$

·Pour $\sigma > 0$, la fonction g, tel que, $S_t = g(W_t)$ est inversible et donc les aléas du marché sont complètemement décrits par le mouvement brownien W :

$\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)$

·Un produit dérivé est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$ -mesurable, comme le modéle est discret, on va chercher un prix en t, à un produit dérivé connu en T, et une autre maniére ce produit dérivé pour dupliquer .

·La méthode de à celle utilisée dans le cas discret est :

·On va chercher à construire une probabilité risque neutre qui rende tout actif de base actualisée une martingale .

·On va définir ce que l'on appelle une stratégie de portefeuille simple autofinançant actualisée reste martingale sous la probabilité risque neutre .

·On en déduira l'absence d'opportunités d'arbitrage entre stratégies de portefeuille simple(AOA) .

·Nous allons chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple .

·On en déduira que la définition économique naturalle du prix de l'option en t s'écrit à un facteur d'actualisation prés, comme l'espérance sous cette proba risque neutre du flux final .

·Le porte feuille de duplication nous donnera la stratégie de couverture de l'option .

Probabilité risque neutre

Ecart sur les changments de probabilité On compose une probabilité $\widehat{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ équivalente à P , si $\widehat{P}$ est absolument continue par rapport à P , alors le théorème de Radon-Nikodym assure l'existence d'une variable aleatoiren, Z_T qui est $\mathcal{F}_T - mesurable$, tel que :

$$d\widehat{P} = Z_T dP \text{ , c'est -à-dire : } \forall A \in \mathcal{F}_t : \widehat{P}(A) = \int_A Z_T dP \text{ .}$$

·$\widehat{P}$ et P sont équivalentes et elles ont les mêmes ensembles et donc Z_T ne s'annule jamais, c'est-à-dire : $Z_T > 0$, alors, la densité de Radon Nikodym de P par rapport à $\widehat{P}$ et $\frac{1}{Z_T}$.

· Soit$\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{P}\right)$ un espace de probabilité toujours, et on a :

$$\widehat{P}(A) = E^P(Z_T) = 1 \text{ .}$$

·La formule de Bayes : Pour tout variable aléatoire X_T , $\mathcal{F}_T - mesurable$, on a :

$$E^{\widehat{P}}(X_t) = E^P(Z_T X_T) \text{ .}$$

·Soit $\mathcal{F}_T$, on associe naturellement le processus martingale $(Z_t)_{0<t<T}$ défini par :

$$Z_t := E^P \left(Z_T \diagup \mathcal{F}_t \right) \ .$$

Alors : Pour toute t et toute variable aléatoire X_t $\mathcal{F}_t - mesurable$, on a :

$$E^{\widehat{P}} \left(X_t \right) = E^P \left(Z_T X_t \right) = E^P \left(E^P \left(Z_T X_t / \mathcal{F}_t \right) \right) = E^P \left(Z_t X_t \right) \ .$$

·Z_t est la densité de Radon Nikodym de $\widehat{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à P restreint à $\mathcal{F}_t$, on note :

$$Z_t = \frac{d\widehat{P}}{dP} |_{\mathcal{F}_t} \ .$$

·X $\mathcal{F} - adapté$, la formule de Bayes généralisée s'ecrit :

$$E^{\widehat{P}} \left(X_T \diagup \mathcal{F}_t \right) = E^P \left(\frac{Z_T}{Z_t} X_T \diagup \mathcal{F}_t \right) = \frac{1}{Z_t} E^P \left(Z_T X_T \diagup \mathcal{F}_t \right) \ .$$

En effet, pour tout variable aléatoire $\mathcal{F}_t - mesurable$ bornée Y_t, on a :

$$E^{\widehat{P}} \left(X_T Y_t \right) = E^P \left(Z_T X_T Y_t \right) = E^P \left(E^P \left(Z_T X_t \diagup \mathcal{F}_t / Y_t \right) \right) = E^{\widehat{P}} \left(\frac{1}{Z_t} E^P \left(Z_T X_T \diagup \mathcal{F}_t \diagup Y_t \right) \right) \ .$$

Probabilité rendant les valeurs actualisés une martingale

Dans le paragraphe suivante, on utilise la valeur actualisée d'un processus Y défini par $\widetilde{Y}$, tel que :

$$\widetilde{Y} := \frac{Y_t}{S_t^0} = \exp\left(-rt \right) Y_t \ .$$

où :

·On déterminer la dynamique des actifs risqués et sans risque actualisées sous la probabilité historique P .

·L'actifs sans risque actualisé $\widetilde{S_t^0}$ est constant égale à 1, donc $d\widetilde{S_t^0} = 0$.

·L'actif risque actualisé ; il faut appliquer la formile d'ITO :

$$d\widetilde{S_t^0} = \frac{1}{S_t^0} dS_t + S_t d \left(\frac{1}{S_t^0} \right) + d \left\langle S, \frac{1}{S^0} \right\rangle_t = \widetilde{S^0} \left(\left(u - r \right) dt + \sigma dW_t \right) \ .$$

·Le modèle de Black et Scholes :

$$\lambda = \frac{u - r}{\sigma} \ ,$$

et on note la prime de risque ; ce processus associe $\widehat{W}$ défini par :

$$\widehat{W_t} := W_t + \lambda t \ , \ t \in [0, T] \ .$$

En suite ; la dynamique de $\widehat{S}$ est donnée par :

$$d\widehat{S} = \sigma \widehat{S} d\widehat{W_t} \ .$$

Enfin pour construire une probabilité $\widehat{P}$ équvalente à P ; on a :

$$\widehat{W_t} = W_t + \lambda t \ ,$$

est un mouvement brownien ; tel que :

· Cette probabilité construira l'actif risque actualisé martignale .

·Sera un trés bon condidat pour notre probabilité risque neutre .

·L'outil qui permet de démontrer l'existance de cette probabilité est le théorème de Girsanoce qui parelle par l'existance de probabilité $\widehat{P}$ tel que :

L'existance de probabilité $\widehat{P}$ équivalente à la probabilité historique P définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ par :

$$\frac{d\widehat{P}}{dP} |_{\mathcal{F}_t} := Z_T := \exp\left(-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T\right) \ ,$$

et le processus associe $\widehat{W_t}$ défini par :

$$\widehat{W_t} = W_t + \lambda t \text{ , pour tout } t \in [0, T] \ ,$$

est un mouvement brownien .

Portefeuilles autofinançants

Une stratégie de portefeuille se compose de placement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité qui on note φ_t l'actif risqué S et d'une quantité φ_t^0 l'actif sans risque S^0 , la valeur du portefeuille est donc donnée par :

$$X^{x,\varphi} = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t, t \in [0, T]$$

· Dans le cas discret , on a la condition d'autofinancement qui signifie qu'à chaque date on trouve les multiplicité entre les différents actifs sans ajout et ne contraction d'argent , s'écrivait :

$$X_{t_{i+1}}^{x,\varphi} - X_{t_i}^{x,\varphi} = \varphi_i^0 \left(S_{t_{i+1}}^0 - S_{t_i}^0\right) + \varphi_i \left(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}\right) \ .$$

· Le prolongement continu de la condition d'autofinancement est donc naturellement :

$$dX_t^{x,\varphi} = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t \ .$$

La stratégie de portefeuille simple autofinançante Une stratégie de portefeuille simple autofinançante $X^{x,\varphi}$ est la donnée d'un capitale de départ x et d'une stratégie se compose de placement dans l'actif risqué , soit un processus $\mathcal{F}-adapt\acute{e}$ $(\varphi_t)_{O\prec t\prec T}$ qui vérifiée la condition d'intégrabilité :

$$E^{\widehat{P}}\left(\int_0^T \left|\varphi_s \widetilde{S}_t\right| dt\right) < \infty \ ,$$

où :

· A chaque instant t , la quantité φ_t^0 retire de la condition d'autofinancement du portefeuille .

· On note cette condition la variation de la valeur du portefeuille est égale à la variation de la valeur des actifs multiplicitée par la quantité d'actifs prisonier .

Quelque soit le numéraire, dans lequel sont écrits les actifs et tant que ce numéraire est bien déterminé à l'instant t par l'information $\mathcal{F}_t$ dont l'on dispose sur le marché en t , la condition d'autofinancement doit étre vérifié .

· Cette properiété est suffisante par le résultat suivante , pour tout processus d'ITO Y $\mathcal{F}-adapt\acute{e}$ appelé numéraire qui ne s'annulle pas , la condition d'autofinancement s'écrit :

$$d\left(\frac{X^{x,\varphi}}{Y}\right)_t = \varphi_t^0 d\left(\frac{S_0}{Y}\right)_t + \varphi_t d\left(\frac{S_t}{Y}\right)_t \ .$$

· La probabilité $\widehat{P}$ consiste précedemment est une probabilité risque neutre , tel que :

La valeur en t de toute stratégie autofinançante (x,φ) de flux final $X_T^{x,\varphi} = h_T$ $\widehat{P}-integrable$ est :

$$X_t^{x,\varphi} = \exp\left(-r\left(T-t\right)\right) E^{\widehat{P}}\left(h_T / \mathcal{F}_t\right) \ .$$

· L'existance d'une probabilité risque neutre $\widehat{P}$ suive l'AOA entre stratégie de portefeuille simple autofinançantes .

Duplication d'un produit dérivé

Soit le caractére Markovien du processus S comme suivant :

· Soit un produit dérivé de la forme $h(S_T)$ avec h fonction mesurable telle que $h(S_T)$ $\widehat{P}-integrable$. Alors, il existe une fonction $v : [0,T]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, telle que :

$$v\left(t,S_t\right) = \exp\left(-r\left(T-t\right)\right) E^{\widehat{P}}\left(h_T / \mathcal{F}_t\right), \text{ pour tout } t \in [0,T] \ .$$

$\cdot\ v \in \zeta^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^{+})$, alors il existe une stratégie autofinançante (x, φ) qui duplique le produit dérivé , c'est-à-dire :

$X_t^{x,\varphi} = v(t, S_t)$ pour tout $t \in [0,T]$, et la quantité x et φ sont donées par :

$\cdot$ Si $v \in \zeta^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^{+})$, alors il existe un stratégie autofinançante (x, φ) qui duplique le produit dérivé , c'est-à-dire :

Pour tout $t \in [0,T]$, les quantités :

$$x := \exp(-rT)\, E^{\widehat{P}}(h(S_T)) \ .$$

et

$$\varphi_t := \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) \ ,$$

on a :

$$X_t^{x,\varphi} = v(t, S_t)$$

$\cdot$ On AOA , le prix de l'option $v(t, S_t)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles ona :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \ .$$

et

$$v(T,x) = h(x) \ ,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Réciproquement , si l'EDP précédente admet une solution v^{*} , alors $v^{*}(t, S_t)$ est le prix de l'option de flux terminal $h(S_T)$.

$\cdot$ Soit $v \in \zeta^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^{+})$ n'est pas déterminatif , la fonction Payoff h est nécessaire réguliére mais en fait , grâce à des integrations par partie , on peut renvoyer l'opérateur de dérivation sur la densité du sous-jacent qui est suffisamment réguliére .

$\cdot$ D'apés le résultat qui indiquer le prix Black Scholes de Payoff $h(S_T)$, on a :

$$v(t,x) := \exp(-r(T-t))\, E^{\widehat{P}}(h(S_T) / S_t - x) \ , \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_{+}^{*} \ ,$$

est une solution de l'EDP en AOA (voir précédent) et trés important connu sous le nom plus général de formule de Feyman-Kac , on peut utilisé l'espérence conditionnelle d'un processus Markovien comme solution d'une EDP , et ona des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste .

· Pour tout dérivé carré integrable est duplucable , ceci est la forme est du au fait que la dimension du brownien et égal à celle de l'actif sans risque , il y'a quantité d'aléa sur le marché que d'actifs possibles pour le couvrir .

· La probabilité risque neutre est toujours unique .

· Le prix d'une choix européenne de Payoff $h(S_T)$ en t est la forme $v(t, S_T)$ avec :

$$v(t, S_t) = \exp(-r(T-t)) E^{\widehat{P}}(h(S_T) / \mathcal{F}_t) ,$$

et la fonction v est plus solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 .$$

et

$$v(T,x) = h(x) ,$$

d'apés modéle Black Scholes , pour certains Payoffs il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t c'est en particulier le cas du call.

3.2 La simulation

Nous allons étudier différents exemples pendant cette phase de simulation d'intégrale stochastique.

La simulation d'un modèle stochastique semble être une méthode tout-à-fait naturelle pour obtenir des information sur celui-ci. On utilise le logiciel R.3.4.0 et le package "Sim.DiffProc".

R est un logiciel de traitement statistique des données, il fonctionne sous forme d'une interprétation des commandes. Il dispose d'une bibliothèque très large de fonctions statistiques. Ce logiciel sert à manipuler des données, à tracer des graphiques et à faire des analyses sur ces données .

3.2.1 Simulation de l'intégrale stochastique

Dans cette partie, Nous allons simuler l'intégrale stochastique qui est définie par l'expression suivante :

$$\int_0^1 B(t)\, dB(t) .$$

Pour cela, nous allons suivre les etapes suivantes :

1-Initialement partitionner l'interval $[0, 1]$ en $n = 2^8$ sous-intervales.

2-Executer 1000 simulation pour ce $n = 2^8$.

3-Repéter cette procedure pour $n = 2^9, n = 2^{10}, \cdots , n = 2^{15}$.

4-Comparer les resultats obtenus par rapport à la moyenne et la variance de l'intégrale donnée par :

$$\int_0^1 B\left(t\right) dB\left(t\right). = \frac{1}{2} B\left(1\right)^2 - \frac{1}{2}\ .$$

la progamation sous R

```
NSIMS < -1000L
LEVELS < -8L : 15L
SEED < -1
set.seed(SEED)
sims < -data.frame(simid = 1L : NSIMS)
for(ninLEVELS)
{
nticks < -2^n
delta < -1/nticks
ticks < -seq(from = 0, to = 1, by = delta)
std < -sqrt(delta)
sim < -vector(mode = "numeric", length = NSIMS)
for(jin1L : NSIMS)
{
b < -cumsum(c(0, rnorm(nticks, sd = std)))
integral < -0
for(iin1L : (length(b) - 1L))
{
integral < -integral + b[i] * (b[i + 1] - b[i])
}
sim[j] < -integral
}
sims[, as.character(n)] < -sim
}
```

$sims\$simid < -NULL$

$m\_sim < -sapply(sims, mean)$

$v\_sim < -sapply(sims, var)$

les résultats

$> m\_sim$

8	9	10	11
-0.0136495615	-0.0022020159	0.0007241903	0.0005840022
12	13	14	15
-0.0028950938	-0.0063071337	-0.0074460679	0.0012328306

$> v\_sim$

8	9	10	11	12
0.4771895	0.4304475	0.5260542	0.4664552	0.5279390
13	14	15		
0.5316087	0.4352030	0.6012763		

Exemple 2 :

On a l'intégrale suivant :

$$\int_0^1 e^{B(t)} dB_t$$

pour simuler cette intégrale, nous suivons les mêmes étapes précédantes tel qu'on utilse l'éxpression suivante :

$> integral < -integral + exp(b[i]) * (b[i+1] - b[i])$.

Les résultats :

$> m\_sim$

8	9	10	11	12
-0.004132273	-0.016703006	-0.007819706	-0.025951317	0.072045517
13	14	15		
-0.038701183	0.008853510	0.117610499		

$> v\_sim$

8	9	10	11	12
3.495320	2.731464	2.745382	2.384024	3.696706
13	14	15		
3.462659	2.748585	9.848746		

Exemple 3 :

$$\int_0^1 \cos\left(B\left(t\right)\right) dB\left(t\right)$$

$> integral < -integral + cos(b[i]) * (b[i+1] - b[i]).$

Les résultats :

$> m\_sim$

8	9	10	11	12
-0.03393112	-0.02404551	0.01643098	0.01364879	0.05154228

13	14	15
-0.03154766	0.00713633	0.01659787

$> v\_sim$

8	9	10	11	12
0.7057504	0.7395427	0.7101146	0.7160832	0.7017982

13	14	15
0.6898982	0.7319973	0.7112378

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'intégrale stochastique.

Nous avons présenté les notions de base de l'intégrale de Riemann, et de Riemann Stieltjes, son format, et ses propriétés.

Puis, nous avons étudié une variété des définitions de l'intégrale stochastique, où nous avons focalisé sur l'intégrale de Wiener, d'Ito, et on a généralié aux intégrales par rapport à une martingale, martingale locale, et par rapport à une semi-martingale.

En suite, on a donné un exemple d'application de cette intégrale en finance, et nous avons simuler quelque exemples sur l'intégrale d'ITO.

Enfin, on conclus que l'intégrale stochastique n'est pas une valeur constant comme les intégrales classique (par exemple Riemann et Riemann Stieltjes). Mais c'est une variable aléatoire, il suffit de savoir sa loi de probabilité, ou bien de calculer sa moyenne et sa variance.

Ce mémoire peut être considéré comme une introduction à l'intégration stochastique, car il y a d'autre extensions et définitions de l'intégrale stochastique que nous l'avons exposé dans ce mémoire.

Bibliographie

[1] **B.Rozovskii,M.Yor**.Stochastic Integration and Differential Equations. Springer-verlag Berlin Heidelberg,2^{nd} Ed.(2004).

[2] **Fima CKlebaner**. Introduction to Stochastic calculs with Applications. Imperial Colleg Press, 2^{nd} Ed.(2005).

[3] **Hui-Hsiung Kuo,S.Axler,K.A.Ribet**. Introduction to Stochastic Integration . Springer Science+Business Media.Inc(2006).

[4] **I.Jaratzas and S.E.Shreve**. Brownian Motion and stochastic calculs. Springer,(1988)

[5] **S.J. Taylor.**Exact asymptotic estimates of brownian path variation,Duk Math.J.39,219-241 (1972).

[6] **T.Mikosch.** Elementry stochastic calculus.World scientific.(1998).