

Table des matières

Introduction	3
1 Rappels et définitions utiles	5
1.1 Le principe classique d'analyse des séries chronologiques	5
1.1.1 Estimation de la tendance en l'absence de la saisonnalité	6
1.1.2 Elimination du trend et de la saisonnalité	9
1.2 Rappel sur les processus aléatoires	10
1.3 Modèle linéaire général	11
1.3.1 Relation entre les poids ψ et les poids π	13
1.3.2 La fonction génératrice des autocovariances d'un processus linéaire . .	13
1.3.3 La fonction d'autocorrélation (acf)	15
1.3.4 La fonction d'autocorrélation partielle (pacf)	15
1.4 Le périodogramme d'un processus	16
1.4.1 Le périodogramme d'un processus linéaire stationnaire	17
2 Modélisation des séries stationnaires	18
2.1 Modèles de Box-Jenkins	18
2.1.1 Le modèle $AR(p)$	18
2.1.2 Le modèle $MA(q)$	21
2.1.3 Le modèle $ARMA(p, q)$	23
2.1.4 Modèles linéaires non-stationnaires	27
2.1.5 Méthode de prévision	28
2.1.6 Prévision à l'aide d'un processus $ARMA$	29
2.2 Identification de modèle pour les séries chronologiques	30
2.2.1 Position du problème	30

2.2.2	Ajustement d'un modèle et détermination de son ordre	31
2.2.3	Détermination de l'ordre d'un modèle	32
3	Applications sous R	34
3.1	L'analyse des séries chronologiques	34
3.1.1	Création d'une série temporelle	34
3.1.2	Décomposition classique	36
3.1.3	La méthode de différence	41
3.2	La méthode de Box-Jenkins	41
3.2.1	Pour un processus $AR(1)$	41
3.2.2	Pour un processus $MA(1)$	42
3.2.3	Pour un processus $ARMA(1, 1)$	42
3.3	Identification	43
3.3.1	Ajustement d'un modèle	43
3.3.2	Le choix de modèle	45
	Conclusion	47
	Bibliographie	47

Introduction

Une série chronologique est une suite formée d'observations au cours du temps. L'analyse des séries chronologiques est un outil couramment utilisé de pour décrire, expliquer puis prévoir dans le futur. Ce domaine possède beaucoup d'applications en finance, en chimie, en économétrie et en météorologie et dans bien d'autres .

A la base, l'étude formelle des séries chronologiques consiste à trouver un modèle mathématique qui explique le mieux possible les données observées. A partir de ce modèle, il est possible de faire la prévision. Cependant la justesse des prévisions dépend fortement de la qualité du modèle choisi, il est donc primordial de trouver des modèles qui reflètent le mieux possible la réalité afin de minimiser les erreurs de prévision.

La démarche, en modélisation d'une série temporelle, consiste à observer l'existence d'une tendance et d'une saisonnalité, ainsi qu'à vérifier la stationnarité en analysant les diagrammes appropriés. Nous nous traitons aussi sur la méthode de Box-Jenkins qui traite les processus stationnaires, cela consiste à la sustruction d'un modèle selon la phase de l'identification du modèle.

La méthode de Box-Jenkins exige un processus stationnaire. Cependant, dans la nature les séries ne sont généralement pas stationnaires. Les modèles que nous avons choisi d'utiliser pour modéliser nos séries soit le modèle *ARMA* et *ARIMA*.

Ce travail est organisé en trois chapitres :

Le premier commence par des rappels et les définitions utiles pour nous aider à mieux comprendre l'étude dans la suite de ce mémoire, nous avons discuté les principes classiques des séries chronologiques, nous adoptons la partie déterministe qui contient la tendance et la saisonnalité, ensuite, nous éliminons ces derniers composante et nous gardons la partie aléatoires la plus intéressante, en plus nous donnons des définitions sur le processus stochastique, le modèle linéaire générale et leurs caractéristiques à savoir la fonction d'autocovariance, la fonction d'autocorrélation simple et partielle, et le périodogramme.

Le deuxième chapitre est constitué de deux sections :

Dans la première section, nous allons traiter les modèles de Box et Jenkins, en présentant trois principaux modèles stationnaires : AR , MA , $ARMA$ et non stationnaires : $ARIMA$ et $SARIMA$ en étudiant leurs propriétés (la stationnarité, l'inversibilité, la causalité, acf, pacf, périodogramme), à la fin de ce section nous examinons sur la méthode de prévision à l'aide d'un processus $ARMA$.

La deuxième section traite la méthode d'identification de Box et Jenkins qui se base sur la comparaison de caractéristiques théoriques des processus $ARMA$ à leurs équivalents empiriques (la fonction d'autocorrélation simple et partielle) pour obtenir le meilleur modèle choisi en utilisant l'un critère d'information, le critère AIC ou le critère BIC .

Le dernier chapitre, abordera l'aspect pratique de notre travail, nous utiliserons pour ce fait, le logiciel R : (logiciel libre de traitement des données et d'analyse statistique mettant en oeuvre le langage de programmation S).

Chapitre 1

Rappels et définitions utiles

1.1 Le principe classique d'analyse des séries chronologiques

Les techniques modernes pour l'étude des séries chronologiques ont été initiées par Yule[19]. Les travaux de Wold[18] ont permis de développer une théorie complète des modèles d'autoregressif- moyenne mobile (*ARMA*). Dans les années quarante Wiener[17] et Kolmogoroff[8] ont résolu le problème de l'estimation des filtres continus et discrets respectivement. Au début des années soixante Kalman[6] et Kalman et Bucy[7] ont étendu les procédures d'estimation de Wiener[17] et Kolmogoroff[8] aux séries chronologiques non stationnaires. Une série chronologique est une suite de variable aléatoire observée séquentiellement dans le temps.

L'objectif de l'approche de l'étude des séries chronologiques est de séparer la composante aléatoire de la partie déterministe du processus étudié. Cette étude se compose de deux étapes :

La première est appelée "analyse des séries chronologiques" dont l'objectif est de mettre en évidence les caractéristiques du phénomène engendrant la série chronologique. Ceci est réalisé en utilisant simultanément les propriétés des autocorrélations et les propriétés spectrales de la série chronologique.

La deuxième étape consiste en l'utilisation de plusieurs types de méthodes telles que la décomposition de la série chronologique, lissage exponentiel ou les modèles autorégressifs-moyennes mobiles, toutes ces méthodes tendent à isoler le bruit blanc dans les valeurs obser-

vées de la série chronologique.

Le principe de décomposition des série chronologiques est basé sur l'hypothèse que toute série chronologique est constituée de trois composantes principales : la tendance (T_t), la saisonnalité (S_t) et la partie aléatoire (Z_t).

Soit (X_t) le processus observé, si on suppose que la relation entre les trois composantes est additive, on aura alors le modèle additive :

$$X_t = T_t + S_t + Z_t.$$

Le modèle multiplicatif : on suppose que les variations saisonnières et les variations accidentelles dépendent de la tendance, alors X_t s'écrit de la manière suivante :

$$X_t = T_t \times S_t \times Z_t.$$

Le modèle mixte : si on suppose que les variations saisonnières dépendent de la tendance et X_t s'écrit :

$$X_t = T_t \times S_t + Z_t.$$

La partie aléatoire est bien évidemment la partie la plus intéressante à modéliser pour une série chronologique, on note Z_t la composante aléatoire, supposée de moyenne nulle, mais possédant en général une structure de corrélation non nulle.

1.1.1 Estimation de la tendance en l'absence de la saisonnalité

Supposons dans un premier temps, que la partie déterministe du modèle soit uniquement composée d'un trend T_t linéaire :

$$X_t = T_t + Z_t \tag{1.1}$$

Nous allons résumer trois méthodes principales pour estimer T_t .

Estimation paramétrique

Cette méthode consiste à estimer la tendance par la méthode des moindres carrés ordinaires. Supposons que l'on observe la série chronologique, il semble naturel d'estimer la composante T_t de cette série par une fonction linéaire $\widehat{T}_t = \widehat{a} + \widehat{b}t$ où \widehat{a} et \widehat{b} sont des estimateurs des coefficients de la fonction linéaire estimant T_t . Pour trouver ces estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires, il faut minimiser l'erreur quadratique en remplaçant T_t par \widehat{T}_t dans (1.1).

Proposition 1.1.1 Soit X_1, X_2, \dots, X_N , la série chronologique observée, alors pour déterminer les coefficients \hat{a} et \hat{b} , on doit minimiser la quantité :

$$\sum_{t=1}^N (X_t - a - bt)^2 \quad (1.2)$$

et en posant $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t$, la solution de minimisation est :

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{4N+2}{N-1} \bar{X} - \frac{6}{N(N-1)} \sum_{t=1}^N tX_t \\ \hat{b} = \frac{6}{N(N-1)} \left(\frac{2}{N(N+1)} \sum_{t=1}^N tX_t - \bar{X} \right) \end{cases} .$$

Preuve Pour minimiser l'équation (1.2), il faut dériver cette expression selon a et b , ce qui donne après quelques simplifications et en égalant à zéro le système :

$$\begin{aligned} (i) \quad \sum_{t=1}^N X_t - aN - b \sum_{t=1}^N t &= 0 \\ (ii) \quad \sum_{t=1}^N tX_t - a \sum_{t=1}^N t - b \sum_{t=1}^N t^2 &= 0 \end{aligned}$$

On peut à présent utiliser les formules usuelles :

$$\sum_{t=1}^N t = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{t=1}^N t^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

En divisant (i) et (ii) par N , on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{X} - a - \frac{b(N+1)}{2} &= 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N tX_t - \frac{a(N+1)}{2} - \frac{(N+1)(2N+1)}{6} b &= 0 \end{aligned}$$

Où \bar{X} est la moyenne empirique de $\{X_t\}_{t=1}^N$.

La solution de ce système est :

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{4N+2}{N-1} \bar{X} - \frac{6}{N(N-1)} \sum_{t=1}^N tX_t \\ \hat{b} = \frac{6}{N(N-1)} \left(\frac{2}{N(N+1)} \sum_{t=1}^N tX_t - \bar{X} \right) \end{cases} .$$

■

Estimation non paramétrique

Dans certaines situations, il n'est pas facile de trouver le degré du polynôme d'ajustement pour T_t . Il n'est pas toujours possible d'utiliser la méthode des moindres carrés car le polynôme utilisé au départ pour T_t n'est pas parfois ni linéaire ni quadratique.

Dans cette situation, nous avons recourt à la théorie non paramétrique de l'estimation du trend.

En effet, supposons que T_t soit linéaire dans un intervalle $[t - q; t + q]$. Dans ce cas une bonne estimation de la tendance est donnée par :

$$\widehat{T}_t = mm_{p,t}(X_t) = \frac{1}{p} \sum_{k=-q}^q X_{t+k}; \quad (\text{moyenne mobile d'ordre } p = 2q + 1).$$

$$\widehat{T}_t = mm_{p,t}(X_t) = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} X_{t-q} + \frac{1}{2} X_{t+q} + \sum_{k=-q+1}^{q-1} X_{t+k} \right]; \quad (\text{moyenne mobile d'ordre } p = 2q).$$

Méthode des différences itérées

Le modèle s'écrit :

$$X_t = T_t + Z_t$$

On peut éliminer la tendance sans l'estimer, définissons tout d'abord l'opérateur de retard B comme étant la fonction linéaire B qui, à toute variable X_t fait correspondre la variable précédente X_{t-1} telle que :

$$BX_t = X_{t-1}$$

De manière récursive, on obtient :

$$B^2 X_t = B(BX_t) = BX_{t-1} = X_{t-2}$$

On introduit également l'opérateur de différence ∇ dont l'application à X_t fournit la différence entre X_t et la valeur précédente X_{t-1} de la série :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$

En vertu de la définition précédente, on a directement :

$$\nabla X_t = X_t - BX_t = (1 - B) X_t$$

Plus généralement, l'opérateur de différence d'ordre d envoie la valeur X_t de la série observée sur la différence de X_t avec la valeur prise par la série au temps $t - d$, ie :

$$\nabla^d X_t = X_t - X_{t-d} = X_t - B^d X_t = (1 - B^d) X_t$$

Si on suppose que la tendance T_t est une fonction polynôme d'ordre k :

$$T_t = \sum_{j=0}^k a_j t^j$$

En appliquant l'opérateur de différence ∇ , d'ordre 1 on obtient :

$$\nabla T_t = T_t - T_{t-1} = \sum_{j=0}^k a_j t^j - \sum_{j=0}^k a_j (t-1)^j$$

Et en développant $(t-1)$ dans le membre de droite, il vient :

$$\sum_{j=0}^k a_j (t-1)^j = \sum_{j=0}^k a_j t^j + \sum_{j=1}^k b_{j-1} t^{j-1}$$

D'où,

$$\nabla T_t = \sum_{j=1}^k b_{j-1} t^{j-1} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i t^i \quad \text{avec } i = j - 1$$

On voit que l'opération à l'aide de ∇ fait diminuer d'une unité l'ordre du polynôme T_t , tandis que ∇T_t est un polynôme d'ordre $k-1$. Dès lors, si on applique k fois l'opérateur ∇ au polynôme T_t , on obtient $\nabla^k T_t = k! a_k$ où a_k est une constante indépendante de t alors :

$$\nabla^k X_t = \nabla^k (T_t + Z_t) = \text{constante} + \nabla^k Z_t,$$

est une série détendanciée (sans tendance).

1.1.2 Elimination du trend et de la saisonnalité

On suppose à présent que, en plus du trend T_t , la série chronologique comporte une composante saisonnière S_t , on considère donc le modèle :

$$X_t = T_t + S_t + Z_t \tag{1.3}$$

Où, S_t est une fonction périodique en t de période $d \in \mathbb{N}^*$ c'est à dire $S(t + kd) = S(t)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et S_t ne comporte pas de composante trend, ce qui se traduit par :

$$\sum_{j=1}^d S_{t+j} = 0$$

Pour éliminer à la fois le trend et la saisonnalité, on peut également appliquer la méthode des différences. Etant donné le modèle (1.3), appliquons l'opérateur de différence ∇^d d'ordre d , où d est la période de S_t , à la série observée X_t :

$$\begin{aligned}\nabla^d X_t &= (1 - B^d)X_t \\ &= X_t - B^d X_t \\ &= X_t - X_{t-d} \\ &= T_t + S_t + Z_t - T_{t-d} - S_{t-d} - Z_{t-d} \\ &= (T_t - T_{t-d}) + (S_t - S_{t-d}) + (Z_t - Z_{t-d})\end{aligned}$$

La série chronologique $\nabla^d X_t$ est donc désaisonnalisée, mais elle comporte encore un trend $\nabla^d T_t$, et on a par définition le terme $S_t - S_{t-d}$ est nul. Pour éliminer la tendance restante, on peut à nouveau utiliser la méthode des différences.

1.2 Rappel sur les processus aléatoires

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .*

Définition 1.2.2 *Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus tel que $\text{var}(X_t) < \infty$. La fonction d'autocovariance $\gamma(.,.)$ de $\{X_t\}$ est définie telle que :*

$$\gamma_X(r, s) = \text{cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))] \quad r, s \in T.$$

Définition 1.2.3 *Un processus aléatoire est strictement stationnaire si toutes ces caractéristiques c'est à dire, tout ces moments sont invariables pour tout changement de l'origine du temps.*

Remarque 1.2.4 *Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit strictement stationnaire si les lois de distributions jointes de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h})$ sont la même pour tous $t_1, t_2, \dots, t_k, k \in \mathbb{Z}$.*

Remarque 1.2.5 *La stationnarité au sens strict est trop restrictive et on assouplit cette condition en définissant la stationnarité du second ordre.*

Définition 1.2.6 Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ où $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, est dit stationnaire au sens faible si :

$$\begin{cases} (i) E |X_t|^2 < \infty & \text{pour tout } t \in \mathbb{Z} \\ (ii) E |X_t| = m & \text{pour tout } t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire alors $\gamma(r, s) = \gamma(r - s, 0)$ pour tout $r, s \in \mathbb{Z}$.

Pour tout processus stationnaire $\gamma_j = \gamma_{-j}, \forall j$.

Définition 1.2.7 Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire. L'autocorrélation de X_t est définie telle que :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{corr}(X_{t+h}, X_t) \quad \text{pour tout } t, h \in \mathbb{Z}.$$

1.3 Modèle linéaire général

Nous allons rappeler dans cette section quelques définitions et propriétés d'un modèle linéaire général pour un processus aléatoire.

Définition 1.3.1 Soit X_t un processus aléatoire. L'opérateur B est appelé opérateur de recul et est défini tel que :

$$B^j X_t = X_{t-j}$$

L'opération dual de B , noté F , est appelé opérateur d'avance et est défini tel que :

$$F^j X_t = X_{t+j}$$

Il est évident que $F = B^{-1}$.

Définition 1.3.2 Le processus $\{Z_t\}$ est appelé bruit blanc, et est noté $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$, si les trois propriétés sont vérifiées :

- (i) $E(Z_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
- (ii) $E(Z_t^2) = \sigma^2$
- (iii) $\text{cov}(Z_t, Z_s) = 0 \quad \forall s \neq t$

Proposition 1.3.3 Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus aléatoire centré et soit $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus de bruit blanc. Alors X_t peut être exprimé tel que :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \right) Z_t \quad (1.4)$$

Où $\psi(B) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \right)$ est appelé *filtre linéaire* ou *fonction de transfert*.

Remarque 1.3.4 Le filtre $\psi(B)$ est dit *stable* et le processus X_t *stationnaire* si la série $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ est convergente i.e : si $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Proposition 1.3.5 Un processus X_t centré peut être exprimé comme une combinaison linéaire de valeurs passées de X_t et de l'innovation présente Z_t tel que :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + Z_t \quad (1.5)$$

Preuve En effet, l'équation (1.4) peut être exprimée telle que :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi_0 Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \dots = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \dots \quad \text{où } \psi_0 = 1$$

$$Z_t = X_t - \psi_1 Z_{t-1} - \psi_2 Z_{t-2} - \dots$$

et en remplaçant Z_{t-1} dans l'équation ci-dessus par :

$$Z_{t-1} = X_{t-1} - \psi_1 Z_{t-2} - \psi_2 Z_{t-3} - \dots$$

On obtient :

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t - \psi_1 (X_{t-1} - \psi_1 Z_{t-2} - \psi_2 Z_{t-3} - \dots) - \psi_2 Z_{t-2} - \dots \\ &= X_t - \psi_1 X_{t-1} - \psi_1^2 \psi_2 Z_{t-2} - \psi_1 \psi_3 Z_{t-3} - \dots \end{aligned}$$

Et on procède de la même manière pour Z_{t-2} , et ainsi de suite pour Z_{t-3} , etc. On aboutit à l'équation (1.5). ■

Remarque 1.3.6 L'équation (1.5) peut être exprimée telle que :

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j \right) X_t,$$

où

$$\pi(B) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j \right).$$

En effet :

On a :

$$\begin{aligned}
 Z_t &= X_t - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \\
 &= X_t - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j X_t \\
 &= \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j \right) X_t \\
 &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j \right) X_t \\
 &= \boldsymbol{\pi}(B) X_t,
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\pi}(B) X_t = Z_t. \quad (1.6)$$

1.3.1 Relation entre les poids $\boldsymbol{\psi}$ et les poids $\boldsymbol{\pi}$

En multipliant l'équation (1.6) par la fonction de transfert $\boldsymbol{\psi}(B)$ on obtient :

$$\boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\pi}(B) X_t = \boldsymbol{\psi}(B) Z_t = X_t$$

D'où $\boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\pi}(B) = 1$, car $\boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\pi}(B) X_t = X_t, \forall X_t$. Et par conséquent, on déduit la relation entre les poids $\boldsymbol{\psi}$ et les poids $\boldsymbol{\pi}$ telle que :

$$\boldsymbol{\pi}(B) = \boldsymbol{\psi}^{-1}(B) \quad (1.7)$$

1.3.2 La fonction génératrice des autocovariances d'un processus linéaire

La fonction génératrice des autocovariances d'un processus linéaire est un outil utile pour le calcul de certaines caractéristiques des séries chronologiques. puisque nous disposons des deux formes d'écriture d'un processus aléatoire, la forme autorégressive infinie et la forme moyenne mobile infinie.

Il est intéressant d'établir une relation entre les autocovariances et les poids de ces deux formes.

En effet, si $\{X_t\}$ est un processus stationnaire ayant pour fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$, alors sa fonction génératrice d'autocovariance est définie par :

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k B^k \quad (1.8)$$

et on a

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k B^k = \sigma_Z^2 \boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\psi}(F)$$

Preuve On a

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

$$\gamma_k = E[X_t X_{t+k}] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \psi_j \psi_h E(Z_{t-j} Z_{t+k-h})$$

Par ailleurs, on sait que :

$$E(Z_{t-j} Z_{t+k-h}) = \begin{cases} \sigma_Z^2 & \text{si } h = k + j \\ 0 & \text{si } h \neq k + j \end{cases}$$

D'où

$$\gamma_k = E[X_t X_{t+k}] = \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

Par suite, en substituant dans la relation (1.8) γ_k par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma_Z^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k \\ &= \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k \end{aligned}$$

Sachant que $\psi_h = 0$ pour $h < 0$, et en posant $h = j + k$ on aura :

$$\gamma(B) = \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \psi_j \psi_h B^{h-j}$$

D'où le résultat

$$\gamma(B) = \sigma_Z^2 \sum_{h=0}^{\infty} \psi_h B^h \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^{-j}$$

Que l'on peut écrire tel que :

$$\gamma(B) = \sigma_Z^2 \boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\psi}(B^{-1}) = \sigma_Z^2 \boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\psi}(F) \quad (1.9)$$

■

1.3.3 La fonction d'autocorrélation (acf)

L'autocorrélation au décalage k , $\rho(k)$ est définie par :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

1.3.4 La fonction d'autocorrélation partielle (pacf)

Elle mesure la liaison linéaire entre X_t et X_{t-k} une fois retirés les liens transistants par les variables intermédiaires $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$.

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre k , noté ϕ_k est le coefficient de corrélation entre :

$$X_t - E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1})$$

et

$$X_{t-k} - E(X_{t-k} \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1})$$

On a donc :

$$\alpha(k) = \text{corr}(X_t, X_{t-k} \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1})$$

C'est donc le coefficient de X_{t-k} dans la régression de X_t sur $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}, X_{t-k}$.

Si X_t est un processus stationnaire centré, la prédiction optimale de X_t est passé jusqu'à $t - k$ est donnée par :

$$E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}) = \phi_{11}X_{t-1} + \dots + \phi_{kk}X_{t-k}$$

Que l'on peut réécrire matriciellement :

$$R_k \phi_k = \rho^{(k)} \tag{1.10}$$

Où :

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} \text{ et } \rho^{(k)} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

telle que R_k est la matrice d'autocorrélation du vecteur $(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})$.

La matrice R_k^* obtenue en remplaçant la dernière colonne de R_k par le vecteur $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$.

$$R_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \rho_{k-5} & \cdots & \rho_1 & \rho_{k-2} \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 & \rho_{k-1} \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{bmatrix}$$

A l'aide de la relation (1.10) on peut calculer les ϕ_{kk} tel que :

$$\phi_{kk} = \frac{|R_k^*|}{|R_k|} \text{ pour tout } k.$$

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}.$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1^2 \rho_3 + \rho_1 \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 + \rho_3}{1 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1^2 \rho_2}.$$

1.4 Le périodogramme d'un processus

Le périodogramme permet une estimation simple de la densité spectrale du processus aléatoire X_t observé par X_1, X_2, \dots, X_n . Il est souvent utilisé comme outil d'identification d'un modèle stochastique pour une série chronologique, introduite par Shuster[15] en 1898.

Définition 1.4.1 Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(k)$, la densité spectrale de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ s'écrit :

$$f(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(k) \exp(iwk) \quad (1.11)$$

Où $\exp(iwk) = \cos(wk) + i \sin(wk) \quad \pi \leq w \leq \pi.$

$f(w)$ est la transformation de Fourier discrète de la fonction d'autocovariance.

Dans la pratique, la fonction d'autocovariance $\gamma(k)$ est inconnue. Alors on remplace dans la relation (1.11) $\gamma(k)$ par son estimation $\hat{\gamma}(k)$ on obtient :

$$\hat{f}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\gamma}(k) \exp(iwk)$$

L'estimation de f est assez vaste à déterminer, nous introduisons la définition suivante :

Définition 1.4.2 En considérant les fréquences : $w_j = \frac{2\pi j}{N}$ aux points $j = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$, le périodogramme est défini par :

$$I_N(w_j) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N X_k \exp(kw_j) \right|^2$$

I_N est un estimateur de la densité spectrale $f(w)$.

1.4.1 Le périodogramme d'un processus linéaire stationnaire

On suppose que $B = \exp(-i2\pi\lambda)$, dans l'équation (1.9), nous obtenons le périodogramme d'un processus linéaire :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= 2\sigma_Z^2 \psi(\exp(-i2\pi\lambda)) \psi(\exp(+i2\pi\lambda)) \\ &= 2\sigma_Z^2 |\psi(\exp(-i2\pi\lambda))|^2 \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Chapitre 2

Modélisation des séries stationnaires

2.1 Modèles de Box-Jenkins

Dans ce section, nous avons vu les modèles de Box-Jenkins[2], sont des modèles linéaires qui peuvent être stationnaires ou non stationnaires. les modèles stationnaires sont regroupés dans la famille des modèles *ARMA* qui composée des modèles Autorégressifs (*AR*), des modèles en Moyennes Mobiles (*MA*) et des modèles mixtes Autorégressifs-Moyennes Mobiles (*ARMA*). les modèles non stationnaires sont le modèle Autorégressive-Integrated-Moving Average (*ARIMA*) et le modèle Seasonal-Autoregressive-Integrated-Moving Average (*SARIMA*).

2.1.1 Le modèle $AR(p)$

Définition 2.1.1 Soit X_t un processus stochastique stationnaire et centré, on dit que X_t est un processus autorégressif d'ordre p noté $AR(p)$ le processus qui verifie l'équation suivante :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

où $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Remarque 2.1.2 Le polynôme $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ est le polynôme caractéristique du processus autorégressif. Le modèle s'écrit souvent :

$$\phi(B) X_t = Z_t.$$

Principales caractéristiques d'un modèle $AR(p)$

La fonction d'autocorrélation :

La fonction d'autocovariance d'un processus autorégressif $AR(p)$ est donnée par :

$$\gamma(k) = E(X_t X_{t+k}) = E(X_t X_{t-k}).$$

On préfère travailler avec la forme $E(X_t X_{t-k})$, car les Z_t sont non corrélés avec les X_{t-k} , $k > 0$. On a

$$X_t X_{t-k} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} + \dots + \phi_p X_{t-p} X_{t-k} + Z_t X_{t-k}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p) + E(Z_t X_{t-k}), k > 0. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\gamma(k) = \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma(k-j), k > 0.$$

En divisant l'égalité par $\gamma(0)$, on obtient

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho(k-j), k > 0.$$

Calcul de $\gamma(0)$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \sigma^2 = E(X_t^2) \\ &= E(X_t (\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t)) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \dots + \phi_p \gamma(p) + E(X_t Z_t) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_Z^2. \end{aligned}$$

On divise les deux membres par $\gamma(0)$, on obtient

$$\gamma(0) = \sigma^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1 \rho(1) - \phi_2 \rho(2) - \dots - \phi_p \rho(p)}.$$

On écrit l'équation aux différences $\rho_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_{k-j}$, $k = 1, 2, \dots, p$ sous forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} = \rho_1 & k = 1 \\ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} = \rho_2 & k = 2 \\ \vdots & \\ \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \rho_0 = \rho_p & k = p \end{array} \right.$$

Soient R_p la matrice du système :

$$R_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}$$

Les équations de Yule Walker s'écrivent :

$$R_p \phi = \rho$$

D'où

$$\phi = R_p^{-1} \rho$$

Remarque 2.1.3 Nous constatons que la fonction d'autocorrélation ρ_k d'un processus $AR(p)$ décroît exponentiellement vers zéro, cette décroissance exponentielle est lisse si ρ_k est positive et oscillante si le signe de ρ_k alterne.

La fonction d'autocorrélation partielle :

Dans un modèle autorégressif d'ordre p , il est possible de montrer que :

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \rho_1 & \text{si } k = 1 \\ \phi_p & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases}$$

Pour $k \leq p$ les valeurs $\alpha(k)$ sont calculées d'après la définition (1.10) .

Remarque 2.1.4 Nous constatons que la fonction d'autocorrélation partielle $\alpha(k)$ d'un processus $AR(p)$ est égale à zéro quand $k > p$. Autrement dit la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus autorégressif chute à zéro au délai de p .

Exemple 2.1.5 $X_t = 0.7X_{t-1} + Z_t$

La ACF est définie par $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$. Or $\gamma(k) = E(X_t X_{t-k})$.

$$\gamma(k) = E(X_t X_{t-k}) = 0.7E(X_{t-1} X_{t-k}) + E(X_{t-k} Z_t) = 0.7\gamma(k-1)$$

$$\rho(k) = 0.7\rho(k-1), \text{ avec } \rho(0) = 1$$

Ainsi, $\rho(k) = 0.7^k, \forall k$. D'où, on déduit les cinq premiers coefficient de la ACF.

k	0	1	2	3	4
$\rho(k)$	1	0.7	0.49	0.343	0.2401

La PACF d'un processus AR(1) est nulle sauf pour le premier coefficient qui égale à : $\phi_{11} = \rho(1) = 0.7$. Ainsi, on a :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.7 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le périodogramme : Pour le processus AR(p)

$\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ et $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ et en utilisant le périodogramme d'un processus linéaire (1.12), alors on obtient l'équation suivante :

$$I(\lambda) = \frac{2\sigma_z^2}{[1 - \phi_1 e^{-i2\pi\lambda} - \phi_2 e^{-i4\pi\lambda} - \dots - \phi_p e^{i2\pi p\lambda}]} ; 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$$

2.1.2 Le modèle MA(q)

Définition 2.1.6 Soit X_t un processus stochastique stationnaire et centré. On dit que X_t est un processus moyenne mobile d'ordre q noté MA(q), le processus qui vérifie l'équation suivante :

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad (2.1)$$

Où $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Remarque 2.1.7 Un tel processus est donc linéaire pour la suite additive :

$$\psi_j = 0, j < 0, \psi_0 = 1, \psi_1 = \theta_1, \dots, \psi_q = \theta_q \text{ et } \psi_j = 0, j > q$$

On écrit habituellement $X_t = \theta(B) Z_t$ où $\theta(B)$ est le polynôme

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$$

et B l'opérateur de décalage arrière (appelé aussi opérateur de retard) .

Le polynôme $\theta(B)$ est appelé polynôme caractéristique du processus moyenne mobile.

Principales caractéristiques d'un modèle MA(q)

La fonction d'autocorrélation : Le calcul de la fonction d'autocovariance d'un processus $MA(q)$ est obtenu tel que :

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= E[(Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q})(Z_{t-k} + \theta_1 Z_{t-k-1} + \dots + \theta_q Z_{t-k-q})],\end{aligned}$$

et donc :

$$\gamma_k = \begin{cases} (\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_q \theta_{k+q}) \sigma_Z^2 & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

La variance du processus X_t est donnée par la formule suivante :

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_Z^2$$

Par conséquent, la fonction d'autocorrélation est définie telle que :

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_q \theta_{q+k}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Remarque 2.1.8 Nous constatons que la fonction d'autocorrélation ρ_k d'un processus $MA(q)$ est égale à zéro quand $k > q$. Autrement dit la fonction d'autocorrélation d'un processus moyenne mobile chute à zéro au déla de q .

Exemple 2.1.9 Processus moyenne mobile $MA(2)$

$$\begin{aligned}X_t &= Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} \\ \gamma(k) &= cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t X_{t-k}) - E(X_t) E(X_{t-k}),\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= E[(Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2})(Z_{t-k} + \theta_1 Z_{t-k-1} + \theta_2 Z_{t-k-2})] \\ \gamma(k) &= \begin{cases} \sigma_Z^2 + \theta_1^2 \sigma_Z^2 + \theta_2^2 \sigma_Z^2 & \text{si } k = 0 \\ \theta_1 \sigma_Z^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma_Z^2 & \text{si } |k| = 1 \\ \theta_2 \sigma_Z^2 & \text{si } |k| = 2 \\ 0 & \text{si } k > 2 \end{cases}\end{aligned}$$

Alors :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & \text{si } |k| = 1 \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & \text{si } |k| = 2 \\ 0 & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

Donc : la fonction d'autocorrélation $MA(2)$ s'annule si le $k > 2$.

La fonction d'autocorrélation partielle :

La fonction d'autocorrélation partielle $\alpha(k)$ d'un processus $MA(q)$ décroît exponentiellement vers zéro.

Le périodogramme : pour le processus $MA(q)$ on a :

$$\psi(B) = \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

Donc, en utilisant l'équation (1.12) le périodogramme d'un processus $MA(q)$ est obtenu tel que :

$$I(\lambda) = 2\sigma_Z^2 |1 - \theta_1 e^{-i2\pi\lambda} - \theta_2 e^{-i4\pi\lambda} - \dots - \theta_q e^{-i2\pi q\lambda}|^2; 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$$

Remarque 2.1.10 *Un processus autoregressif d'ordre 1 peut être exprimé sous la forme moyenne mobile en inversant l'équation.*

$$(1 - \phi B) X_t = Z_t \iff X_t = \frac{1}{(1 - \phi B)} Z_t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k B^k \right) Z_t$$

On obtient ainsi une moyenne mobile d'ordre q dont les coefficients décroissent exponentiellement.

$$AR(p) \sim MA(\infty)$$

2.1.3 Le modèle $ARMA(p, q)$

Définition 2.1.11 *On dit qu'un processus stationnaire et centré, X_t est un processus $ARMA(p, q)$ si pour chaque t il vérifie la relation :*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q Z_{t-q} \quad (2.2)$$

Où $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Remarque 2.1.12 En utilisant l'opérateur B , l'équation (2.2) peut être exprimée telle que :

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t,$$

où $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ et $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ sont appelés polynômes caractéristiques respectifs des parties autoregressives et moyennes mobiles du processus.

Principales caractéristiques d'un modèle $ARMA(p, q)$

La fonction d'autocorrélation : En multipliant les deux membres de l'équation (2.2) par X_{t-k} , nous constatons que la fonction d'autocovariance satisfait l'équation de différences :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{XZ}(k) - \theta_1 \gamma_{XZ}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{XZ}(k-q),$$

où $\gamma_{XZ}(k)$ est la fonction d'autocovariance de X_t et de Z_t définie par $\gamma_{XZ}(k) = E(X_{t-k} Z_t)$, comme X_{t-k} dépend seulement des innovation avant l'insant $t-k$ par les représentations en moyenne mobile définie :

$$X_{t-k} = \psi(B) Z_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-k-j},$$

il suit

$$\gamma_{XZ}(k) = \begin{cases} 0 & \text{Si } k > 0 \\ \psi_{-k} \sigma_Z^2 & \text{Si } k \leq 0 \end{cases}$$

Dorénavant l'équation précédente pour γ_k peut être exprimée :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} - \sigma_Z^2 (\theta_k \psi_0 + \theta_{k+1} \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-k}) \quad (2.3)$$

Avec le paramètre $\theta_0 = -1$

Nous voyons que (2.3) implique :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k \geq q + 1$$

La variance égale à :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_Z^2 (1 - \theta_1 \psi_1 - \dots - \theta_q \psi_q) \quad (2.4)$$

Et dorénavant :

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q + 1$$

Où bien

$$\phi(B) \rho_k = 0 \quad k \geq q + 1$$

Par exemple le processus $ARMA(1, 1)$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

Telle que :

$$(1 - \phi_1 B) X_t = (1 - \theta_1 B) Z_t$$

A partir de l'équation (2.3) et (2.4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_Z^2 (1 - \theta_1 \psi_1) \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_Z^2 \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

avec : $\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$.

Par conséquent, la résolution des deux premières équations en γ_0 et γ_1 ci dessus, la fonction d'autocovariance du processus est déterminée telle que :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2} \sigma_Z^2 \\ \gamma_1 &= \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_Z^2 \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Il est claire que ρ_k vérifie l'équation de réccurrence $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$, $k \geq 2$, alors

$\rho_k = \phi_1^{k-1} \rho_1$, $k \geq 1$. Ainsi, la fonction d'autocorrélation décroît exponentiellement quand $k \mapsto \infty$.

Cette décroissance exponentielle est lisse si ϕ_1 est positif et oscillante si ϕ_1 est négatif. En effet, le signe de ρ_1 est détermininé par le signe de $(\phi_1 - \theta_1)$.

Remarque 2.1.13 *La fonction d'autocorrélation ρ_k d'un processus $ARMA(p, q)$ décroît exponentiellement vers zéro.*

La fonction d'autocorrélation partielle :

Un processus $ARMA(p, q)$ peu être exprimé tel que :

$$X_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) Z_t.$$

Car

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

Où $\phi^{-1}(B)$ est un polynôme de B , ainsi la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus mixte est infinie en étendue. Elle se comporte finalement comme la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus moyenne mobile pure selon l'ordre de la moyenne mobile et les valeurs des paramètres qu'il contient.

Remarque 2.1.14 *La fonction d'autocorrélation partielle $\alpha(k)$ d'un processus $ARMA(p, q)$ décroît exponentiellement vers zéro.*

Le périodogramme : En utilisant l'équation (1.12), le périodogramme du processus mixte est :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= 2\sigma_Z^2 \frac{|\theta(e^{-i2\pi\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i2\pi\lambda})|^2} \\ &= 2\sigma_Z^2 \frac{|1 - \theta_1 e^{-i2\pi\lambda} - \theta_2 e^{-i4\pi\lambda} - \dots - \theta_q e^{-i2\pi q\lambda}|^2}{|1 - \phi_1 e^{-i2\pi\lambda} - \phi_2 e^{-i4\pi\lambda} - \dots - \phi_p e^{-i2\pi p\lambda}|^2}; 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La stationnarité, l'inversibilité et la causalité des modèles $ARMA(p, q)$

Stationnarité : La condition de stationnarité est que les racines de l'équation $\theta(B) = 0$ doivent être situées à l'extérieur du cercle unité.

Inversibilité : Un processus $ARMA(p, q)$ défini par l'équation (2.2) est dit inversible s'il existe une suite $\{\pi_j\}$ telle que :

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty \text{ et pour tout } t \in \mathbb{Z}, Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}.$$

Autrement dit un processus $ARMA(p, q)$ est inversible si les racines de l'équation $\phi(B) = 0$ sont à l'extérieur du cercle unité.

Causalité : Un processus $ARMA(p, q)$ défini par l'équation (2.2) est dit causal s'il existe une série $\{\psi_j\}$ telle que :

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \text{ et pour tout } t \in \mathbb{Z}, X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}.$$

Dans la proposition suivante, on donnera une condition nécessaire et suffisante pour la stationnarité, l'inversibilité et la causalité d'un processus $ARMA(p, q)$.

Proposition 2.1.15 Soit X_t un processus $ARMA(p, q)$ vérifiant l'équation (2.2), supposons que les polynômes

$$\phi(Z) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i Z^i \text{ et } \theta(Z) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i Z^i$$

n'ont pas des racines connues.

X_t est stationnaire et causal si et seulement si $\phi(Z) \neq 0$ pour tout $Z \in \mathbb{Z}$ tel que $|Z| \leq 1$, les coefficients ψ_j sont déterminés par :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j Z^j = \frac{\phi(Z)}{\theta(Z)} \text{ Si } |Z| \leq 1$$

X_t est inversible si et seulement si $\theta(Z) \neq 0$ pour tout $Z \in \mathbb{Z}$ tel que $|Z| \leq 1$, les coefficients π_j sont déterminés par :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z^j = \frac{\phi(Z)}{\theta(Z)} \text{ Si } |Z| \leq 1.$$

2.1.4 Modèles linéaires non-stationnaires

Modèle $ARIMA$

La classe des modèles non stationnaires est très utile dans le domaine de l'économétrie et les mathématiques financières. Ce genre de modèle permet de représenter des processus présentant un certain type de non-stationnarité que l'on peut éliminer par différentiation d'ordre d .

Définition 2.1.16 On dit qu'un processus X_t est un $ARIMA$ (Autoregressive Integrated Moving Average) d'ordre (p, d, q) si $\nabla^d X_t$ un processus $ARMA(p, q)$.

On modélise alors le processus X_t sous la forme :

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \phi(B) \nabla^d X_t = \phi(B) X_t = \theta(B) Z_t,$$

avec :

$$\phi(B) = \phi(B)(1-B)^d$$

On écrit que la série X_t suit un processus $ARIMA(p, d, q)$.

Remarque 2.1.17 Les polynômes $\phi(B)$ et $\theta(B)$ sont de degrés p et q respectivement, $\phi(B) \neq 0$ pour $|B| < 1$, alors que le polynôme $\phi(B)$ admet une racine multiple $B = 1$.

Modèle SARIMA

Si l'on veut en même temps traiter les saisonnalités de période s on est amené à définir les processus SARIMA.

Définition 2.1.18 Une série $\{X_t\}$ suit un processus SARIMA (Seasonnal Autoregressive Integrated Moving Average) d'ordre $(p, d, q)(P, D, Q)$ si cette série à une saisonnalité de période s et qu'on peut écrire :

$$Y_t = \nabla^d \nabla^D X_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^D X_t$$

est un ARMA stationnaire de la forme :

$$\mathbf{A}(B) F(B^s) y_t = \boldsymbol{\theta}(B) G(B^s) Z_t \text{ où } Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $\mathbf{A}(z) = 1 - \sum_{k=1}^p a_k z^k$ est le polynôme générateur d'un AR(p).
- $\boldsymbol{\theta}(z) = 1 + \sum_{k=1}^q \theta_k z^k$ est le polynôme générateur d'un MA(q).
- $F(z) = 1 - \sum_{k=1}^P f_k z^k$ est le polynôme générateur d'un AR(P).
- $G(z) = 1 + \sum_{k=1}^Q g_k z^k$ est le polynôme générateur d'un MA(Q).

On note que le processus $\{Y_t\}$ est causal si et seulement si :

$$\mathbf{A}(z) \neq 0 \text{ et } F(z) \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1.$$

Les valeurs de d et D sont en générale inférieures à 1, alors que les valeurs de p et q sont généralement inférieures à 2.

2.1.5 Méthode de prévision

Principe de prévision

Soit (X_t) un processus aléatoire du second ordre défini sur (Ω, P) , le problème le plus couramment rencontré est la prévision des valeurs futures de ce processus, prédire une valeur future X_{N+k} de $\{X_t\}$ au vu d'une observation $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)'$, revient à chercher une fonction déterministe $f : C^k \rightarrow C$ telle que $\widehat{X}_{N+k} = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$. La prédiction

optimale au sens des moindres carrés consiste à choisir f de telle sorte que la moyenne du carré de l'erreur de prévision $E \left[\left| X_{N+k} - \widehat{X}_{N+k} \right|^2 \right]$ soit minimale.

Dans l'espace de Hilbert $H_N = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ engendré par $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, ce problème classique admet une solution unique :

$$\widehat{X}_{N+k} = E^{H_N} (X_{N+k}) = E (X_{N+k} \mid X_1, X_2, \dots, X_N) = f (X_1, \dots, X_N).$$

En d'autres termes, \widehat{X}_{N+k} est l'espérance conditionnelle de X_{N+k} , l'orsque on observe X_1, X_2, \dots, X_N . En pratique la fonction f est difficile à déterminer, soit parce que la loi jointe de $X_1, X_2, \dots, X_N, X_{N+k}$ est mal connue, soit parce qu'elle ne se prête pas aux calculs explicites. Ceci nous amène à restreindre la classe des estimateurs considérés.

Le principe reste toujours le même, ie : on cherche à minimiser $E \left[\left| X_{N+k} - \widehat{X}_{N+k} \right|^2 \right]$, où $\widehat{X}_{N+k} = f (X_1, X_2, \dots, X_N)$. Mais la fonction f sera déterminée parmi les fonctions linéaires. l'unique solution est évidemment donnée par $\widehat{X}_{N+k} = proj (X_{N+k})$ où $proj$ est la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel H_N engendré par X_1, X_2, \dots, X_N dans $L^2 (\Omega, P)$.

Le principe de la prédiction linéaire revient à considérer que l'information fournie par l'observation X du processus ne depend que de l'espace H_N , sous espace vectoriel fermé de $L^2 (\Omega, P)$ engendré par les X .

2.1.6 Prédiction à l'aide d'un processus ARMA

Une fois qu'on a trouvé un modèle acceptable pour la serie chronologique étudiée, il est possible de calculer les prévisions.

Soit X_1, X_2, \dots, X_N une observation d'un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ obéissant à un modèle ARMA. On note \widehat{X}_{N+k} la prévision de X_{N+k} au temps $N+k$ où N est la taille de l'échantillon des observations X_t et $k > 0$ l'horizon de la prévision.

- L'instant N est appelé origine de prévision.
- $e_N (k) = X_{N+k} - \widehat{X}_{N+k}$ est l'erreur de prévision et $E^{H_N} [e_N (k)] = 0$.

Pour calculer une prévision \widehat{X}_{N+k} de la valeur future X_{N+k} de ce processus nous utiliserons soit les formes moyennes mobiles infinies ou les formes autoregressives infinies.

En effet, en passant aux prévisions d'un MA(∞).

$$X_{N+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{N+k-j} = Z_{N+k} + \psi_1 Z_{N+k-1} + \psi_2 Z_{N+k-2} + \dots$$

Alors que la prévision \widehat{X}_{N+k} s'écrit :

$$\widehat{X}_{N+k} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j Z_{N+k-j} = \psi_1 Z_{N+k-1} + \psi_2 Z_{N+k-2} + \dots$$

La prévision \widehat{X}_{N+k} peut aussi s'écrire sous la forme d'une espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{N+k} &= E(X_{N+k} \mid X_{N+k-1}, X_{N+k-2}, \dots) \\ &= E(X_{N+k} \mid Z_{N+k-1}, Z_{N+k-2}, \dots) \end{aligned}$$

L'erreur de prévision est déterminée par :

$$\begin{aligned} X_{N+k} - \widehat{X}_{N+k} &= Z_{N+k} + \psi_1 Z_{N+k-1} + \psi_2 Z_{N+k-2} + \dots - \psi_1 Z_{N+k-1} - \psi_2 Z_{N+k-2} - \dots \\ &= Z_{N+k}. \end{aligned}$$

2.2 Identification de modèle pour les séries chronologiques

2.2.1 Position du problème

Tout les phénomènes aléatoires ne peut veut être observés que ponctuellement sous forme d'une série chronologique X_1, X_2, \dots, X_N . La position du problème est d'identifier le type de modèle qui régit ce phénomène. La méthode d'identification d'un processus *ARMA* (choix entre *AR*, *MA* et *ARMA*, et choix de p et q) de Box et Jenkins est basée sur la comparaison de caractéristiques théoriques des processus *ARMA* à leurs équivalents empiriques. Les caractéristiques utilisées sont les autocorrélations simples et partielles, étudiées dans la partie précédente.

On sait que les autocorrélations d'un processus *MA*(q) deviennent nulles à partir de l'ordre $q+1$. Si le graphique des autocorélations empiriques chute brusquement après $k = q$, on pourra donc dire que l'on est la présence d'un *MA*(q).

Si l'on considère maintenant les autocorrélations totales d'un *AR*(p), on sait qu'elles décroissent lentement dans le temps.

Mais il n'est guère possible de déduire une valeur de p à partir de l'examen du corrélogramme. On cherche donc une transformation du corrélogramme qui soit plus inter prétable.

Il s'agit du graphique des autocorrélations partielles que l'on note $\alpha(k)$. Les autocorrélations partielles ont la propriété d'être nulles à partir de l'ordre $p + 1$ pour un processus $AR(p)$. Par contre, pour un processus $ARMA(p, q)$ la fonction d'autocorrélation $\rho(k)$ et la fonction d'autocorrélation partielle $\alpha(k)$ décroissent en même temps vers zéro quand $k \rightarrow \infty$.

2.2.2 Ajustement d'un modèle et détermination de son ordre

Le but de ce section est de présenter les outils statistiques les plus utilisés pour atteindre cet objectif. Nous verrons différentes méthodes qui permettront de choisir un modèle $ARMA$ approprié aux données observées, avant de développer des tests d'ajustement pour valider ces choix. Le premier outil permettant de choisir l'ordre d'un modèle $ARMA$ est basé sur l'analyse de la structure d'autocorrélation des données observées.

Méthode d'identification de Box-Jenkins

Lorsqu'on observe une série chronologique, la fonction d'autocorrélation empirique est un premier outil pour sélectionner l'ordre du modèle qui doit être ajusté aux données.

Si $\hat{\alpha}(k)$ décroît vers zéro et si $\hat{\rho}(k)$ chute à zéro à partir d'un certain rang (ie. les valeurs de $\hat{\rho}(k)$ sont négligeables à partir d'un certain rang), alors on opte pour un modèle en moyenne mobile, pour décider de l'ordre de ce modèle MA on se base comme sur le résultat du test de l'hypothèse :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\rho}(k) = 0, \text{ pour } k > q \\ H_1 : \hat{\rho}(k) \neq 0, \text{ pour } k \leq q \end{cases}$$

Alors, si H_0 est acceptée le rang du modèle MA est égal à q .

Si $\hat{\rho}(k)$ décroît vers zéro et si $\hat{\alpha}(k)$ chute à zéro à partir d'un certain rang (ie. les valeurs de $\hat{\alpha}(k)$ sont négligeables à partir d'un certain rang), alors on opte pour un modèle autorégressif, pour décider de l'ordre de ce modèle AR on se base comme dans le premier sur le résultat du test de l'hypothèse :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\alpha}(k) = 0, \text{ pour } k > p \\ H_1 : \hat{\alpha}(k) \neq 0, \text{ pour } k \leq p \end{cases}$$

Alors, si H_0 est acceptée le rang du modèle AR est égal à p .

Remarque 2.2.1 La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus AR joue le même rôle que l'autocorrélation d'un processus MA. En effet :

Si $X_t \sim MA(q)$, alors $\rho(k) = 0$ pour tout $k > q$.

Si $X_t \sim AR(p)$, alors $\alpha(k) = 0$ pour tout $k > p$.

Pour choisir l'ordre d'un modèle mixte ARMA, la double observation de l'acf et de la pacf seront nécessaires. D'ailleurs, remarquons de nouveau qu'en pratique il est toujours judicieux de regarder ces deux fonctions, l'acf et la pacf empirique, ensemble pour pouvoir ajuster le modèle AR et MA. L'acf et la pacf de modèle ARMA décroissent tout deux lentement (ie. $\hat{\alpha}(k)$ décroît vers zéro et $\hat{\rho}(k)$ décroît vers zéro).

Tableau récapitulatif

	AR(p)	MA(q)
autocorrélations simples	décroissent de manière exponentielle	$\rho(k) = 0$ si $ k > q$ $\rho(k) \neq 0$ si $ k \leq q$
autocorrélations partielles	$\alpha(k) = 0$ si $ k > p$ $\alpha(k) \neq 0$ si $ k \leq p$	décroissent de manière exponentielle

2.2.3 Détermination de l'ordre d'un modèle

La sélection de modèle est un problème bien connu en statistique, l'orsque le modèle est fixé, l'une des reponses apportées par les statisticiens au problème de la sélection du modèle est la minimisation d'un critère pénalisé. Les premiers critères apparaissant dans la littérature sont le critère d'information d'Akaiké[1] (1973) et le critère d'information Bayésienne (1978) sont les plus utilisés pour choisir le meilleur d'entre deux modèles plausibles. Un modèle est meilleur qu'un autre si son AIC et BIC est le plus petit, le critère d'information d'Akaiké est basé sur la distance de Kulback-Leiber[9], alors que le BIC est basé sur la vraisemblance intégrée dans la théorie bayésienne.

Le critère d'information d'Akaiké

Ce critère est basé essentiellement sur l'information de Kulback-Leiber, le critère AIC s'applique aux modèles estimés par une méthode du maximum de vraisemblance : les analyses de variance, les régressions linéaires multiples, les régressions logistiques et de poisson peuvent rentrer dans ce cadre.

Le critère AIC est défini par :

$$AIC = -2 \log \tilde{L} + 2K$$

où \tilde{L} est la vraisemblance maximisée et K le nombre de paramètres dans le modèle.

Avec ce critère, la déviance du modèle $-2 \log(\tilde{L})$ est pénalisée par 2 fois le nombre de paramètres.

L' AIC représente donc un compromis entre le biais, diminuant avec le nombre de paramètres, et la parcimonie, volonté de décrire les données avec le plus petit nombre de paramètres possibles.

Le meilleur modèle est celui possédant l' AIC le plus faible.

Lorsque le nombre de paramètres K est grand par rapport au nombre d'observations N , C'est à dire si $N/K < 40$, il est recommandé d'utiliser l' AIC corrigé.

Le critère d'information d'Akaiké corrigé, AIC_c , est défini par :

$$AIC_c = AIC + \frac{2K(K+1)}{N-K-1}$$

Le critère d'information de Bayésien

Dans les statistiques, le critère d'information bayésien (BIC) ou le critère de Schwartz[14] est un critère pour la sélection du modèle parmi un ensemble fini de modèles, le modèle avec le BIC le plus bas est préféré. Il repose en partie sur la fonction de vraisemblance et est étroitement lié au critère d'information AIC .

Le BIC à été développé par Gideon E Schwartz est formellement défini comme :

$$BIC = -2 \ln(\tilde{L}) + K \ln(N)$$

Le BIC est utilisée dans les problèmes de sélection de modèles.

Chapitre 3

Applications sous *R*

Nous présentons dans ce chapitre des exemples pratiques sur la modélisation des séries chronologiques, que nous avons étudié dans les deux chapitres précédents. On utilise le logiciel *R*.3.3.1 et les packages "*stats*", "*forecast*".

Le logiciel *R* est un logiciel de statistique, développé initialement au début des années 1990 par Ross Ihaka et Robert Gentleman, ce logiciel sert à manipuler des données, à tracer des graphiques et à faire des analyses statistiques .

On peut télécharger le logiciel *R* à l'aide de votre navigateur web usuelle à l'adresse suivante :

http://cran.r-project.org/

Pour installer le *package* depuis l'internet, commencer par lancer le logiciel *R* ensuite aller dans le menu "*Package*" puis sous menu "*Installer le(s) package(s)*", sélectionner un miroir proche de votre situation :

-France(lyon1) [http]

-France(lyon2) [http]

et cliquer sur "*ok*" puis sélectionner le *package*.

3.1 L'analyse des séries chronologiques

3.1.1 Création d'une série temporelle

co2 : l'absorption de dioxyde de carbone dans les plantes herbeuses.

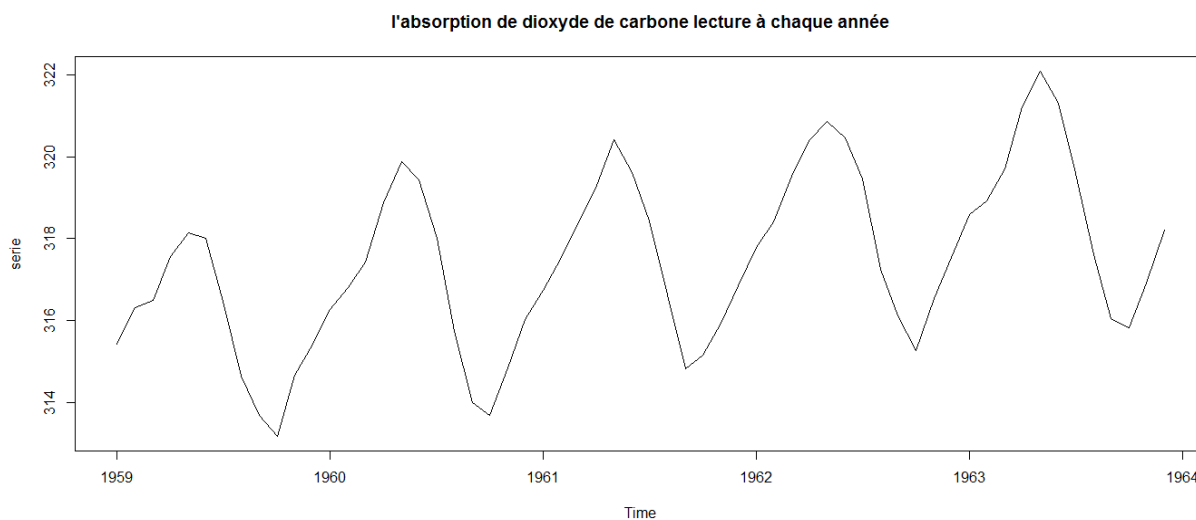
3.1. L'ANALYSE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

La fonction *ts* est utilisée pour la création d'un objet time series dont la syntaxe est donnée par :

```
ts(X,start,freq)
> library(stats)
> serie = ts(data.frame(co2), start = c(1959, 1), end = c(1963, 12), freq = 12)
> serie
```

	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Aug</i>	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>
1959	315.42	316.31	316.50	317.56	318.13	318.00	316.39	314.65	313.68	313.18
1960	316.27	316.81	317.42	318.87	319.87	319.43	318.01	315.74	314.00	313.68
1961	316.73	317.54	318.38	319.31	320.42	319.61	318.42	316.63	314.83	315.16
1962	317.78	318.40	319.53	320.42	320.85	320.45	319.45	317.25	316.11	315.27
1963	318.58	318.92	319.70	321.22	322.08	321.31	319.58	317.61	316.05	315.83
	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>								
1959	314.66	315.43								
1960	314.84	316.03								
1961	315.94	316.85								
1962	316.53	317.53								
1963	316.91	318.20								

```
> plot(serie, main = "l'absorption de dioxyde de carbone lecture à chaque année")
```



3.1.2 Décomposition classique

```
> m = decompose(serie, type = "additive")
```

```
> m
```

```
$x
```

	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Aug</i>	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>
1959	315.42	316.31	316.50	317.56	318.13	318.00	316.39	314.65	313.68	313.18
1960	316.27	316.81	317.42	318.87	319.87	319.43	318.01	315.74	314.00	313.68
1961	316.73	317.54	318.38	319.31	320.42	319.61	318.42	316.63	314.83	315.16
1962	317.78	318.40	319.53	320.42	320.85	320.45	319.45	317.25	316.11	315.27
1963	318.58	318.92	319.70	321.22	322.08	321.31	319.58	317.61	316.05	315.83

Nov *Dec*

1959	314.66	315.43
1960	314.84	316.03
1961	315.94	316.85
1962	316.53	317.53
1963	316.91	318.20

```
$seasonal
```

	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>
1959	-0.2169444	0.2964931	1.0809722	2.2261806	3.0251389	2.3678472
1960	-0.2169444	0.2964931	1.0809722	2.2261806	3.0251389	2.3678472
1961	-0.2169444	0.2964931	1.0809722	2.2261806	3.0251389	2.3678472
1962	-0.2169444	0.2964931	1.0809722	2.2261806	3.0251389	2.3678472
1963	-0.2169444	0.2964931	1.0809722	2.2261806	3.0251389	2.3678472

	<i>Jul</i>	<i>Aug</i>	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>
1959	0.9252431	-1.1348611	-2.6078819	-3.0118403	-1.9211111	-1.0292361
1960	0.9252431	-1.1348611	-2.6078819	-3.0118403	-1.9211111	-1.0292361
1961	0.9252431	-1.1348611	-2.6078819	-3.0118403	-1.9211111	-1.0292361
1962	0.9252431	-1.1348611	-2.6078819	-3.0118403	-1.9211111	-1.0292361
1963	0.9252431	-1.1348611	-2.6078819	-3.0118403	-1.9211111	-1.0292361

```
$trend
```

3.1. L'ANALYSE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

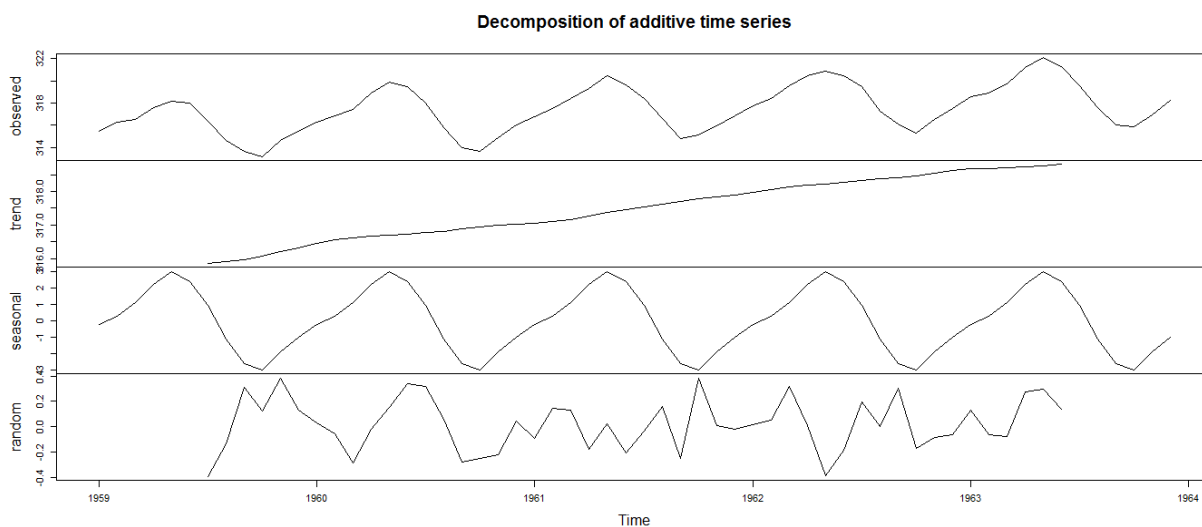
	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Aug</i>
1959	NA	NA	NA	NA	NA	NA	315.8613	315.9175
1960	316.4558	316.5687	316.6275	316.6617	316.6900	316.7225	316.7667	316.8163
1961	317.0412	317.0954	317.1671	317.2633	317.3708	317.4508	317.5288	317.6083
1962	317.9812	318.0500	318.1292	318.1871	318.2162	318.2692	318.3308	318.3858
1963	318.6679	318.6883	318.7008	318.7217	318.7608	318.8046	NA	NA
	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>				
1959	315.9767	316.0696	316.1967	316.3287				
1960	316.8867	316.9450	316.9863	317.0167				
1961	317.6921	317.7862	317.8504	317.9033				
1962	318.4146	318.4550	318.5396	318.6267				
1963	NA	NA	NA	NA				
<i>\$random</i>								
	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>			
1959	NA	NA	NA	NA	NA			
1960	0.031111111111	-0.0552430556	-0.2884722222	-0.0178472222	0.1548611111			
1961	-0.0943055556	0.1480902778	0.1319444444	-0.1795138889	0.0240277778			
1962	0.0156944444	0.0535069444	0.3198611111	0.0067361111	-0.3913888889			
1963	0.1290277778	-0.0648263889	-0.0818055556	0.2721527778	0.2940277778			
	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Aug</i>	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>			
1959	NA	-0.3964930556	-0.1326388889	0.3112152778	0.1222569444			
1960	0.3396527778	0.3180902778	0.0586111111	-0.2787847222	-0.2531597222			
1961	-0.2086805556	-0.0339930556	0.1565277778	-0.2542013889	0.3855902778			
1962	-0.1870138889	0.1939236111	-0.0009722222	0.3032986111	-0.1731597222			
1963	0.1375694444	NA	NA	NA	NA			
	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>						
1959	0.3844444444	0.1304861111						
1960	-0.2251388889	0.0425694444						
1961	0.0106944444	-0.0240972222						
1962	-0.0884722222	-0.0674305556						
1963	NA	NA						
<i>\$figure</i>								

3.1. L'ANALYSE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

```

[1] -0.2169444  0.2964931  1.0809722  2.2261806  3.0251389  2.3678472
[7]  0.9252431  -1.1348611  -2.6078819  -3.0118403  -1.9211111  -1.0292361
$type
[1]"additive"
attr(,"class")
[1]"decomposed.ts"
> plot(m)

```



```

> m = decompose(serie, type = "mult")
> m
$x

```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct
1959	315.42	316.31	316.50	317.56	318.13	318.00	316.39	314.65	313.68	313.18
1960	316.27	316.81	317.42	318.87	319.87	319.43	318.01	315.74	314.00	313.68
1961	316.73	317.54	318.38	319.31	320.42	319.61	318.42	316.63	314.83	315.16
1962	317.78	318.40	319.53	320.42	320.85	320.45	319.45	317.25	316.11	315.27
1963	318.58	318.92	319.70	321.22	322.08	321.31	319.58	317.61	316.05	315.83
	Nov	Dec								
1959	314.66	315.43								
1960	314.84	316.03								
1961	315.94	316.85								
1962	316.53	317.53								
1963	316.91	318.20								

3.1. L'ANALYSE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

\$seasonal

	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>
1959	0.9993195	1.0009367	1.0034051	1.0070087	1.0095229	1.0074537	1.0029192
1960	0.9993195	1.0009367	1.0034051	1.0070087	1.0095229	1.0074537	1.0029192
1961	0.9993195	1.0009367	1.0034051	1.0070087	1.0095229	1.0074537	1.0029192
1962	0.9993195	1.0009367	1.0034051	1.0070087	1.0095229	1.0074537	1.0029192
1963	0.9993195	1.0009367	1.0034051	1.0070087	1.0095229	1.0074537	1.0029192

	<i>Aug</i>	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>
1959	0.9964249	0.9917833	0.9905122	0.9939518	0.9967619
1960	0.9964249	0.9917833	0.9905122	0.9939518	0.9967619
1961	0.9964249	0.9917833	0.9905122	0.9939518	0.9967619
1962	0.9964249	0.9917833	0.9905122	0.9939518	0.9967619
1963	0.9964249	0.9917833	0.9905122	0.9939518	0.9967619

\$trend

	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Aug</i>
1959	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	315.8613	315.9175
1960	316.4558	316.5687	316.6275	316.6617	316.6900	316.7225	316.7667	316.8163
1961	317.0412	317.0954	317.1671	317.2633	317.3708	317.4508	317.5288	317.6083
1962	317.9812	318.0500	318.1292	318.1871	318.2162	318.2692	318.3308	318.3858
1963	318.6679	318.6883	318.7008	318.7217	318.7608	318.8046	<i>NA</i>	<i>NA</i>

	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>
1959	315.9767	316.0696	316.1967	316.3287
1960	316.8867	316.9450	316.9863	317.0167
1961	317.6921	317.7862	317.8504	317.9033
1962	318.4146	318.4550	318.5396	318.6267
1963	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>

\$random

3.1. L'ANALYSE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

	<i>Jan</i>	<i>Feb</i>	<i>Mar</i>	<i>Apr</i>	<i>May</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>
1959	NA	NA	NA	NA	NA	NA	0.9987585
1960	1.0000933	0.9998255	0.9991009	0.9999653	1.0005136	1.0010867	1.0010030
1961	0.9996985	1.0004649	1.0004177	0.9994461	1.0000839	0.9993527	0.9998880
1962	1.0000476	1.0001636	1.0009948	1.0000088	0.9987655	0.9994029	1.0005948
1963	1.0004049	0.9997904	0.9997309	1.0008241	1.0008814	1.0004021	NA
	<i>Aug</i>	<i>Sep</i>	<i>Oct</i>	<i>Nov</i>	<i>Dec</i>		
1959	0.9995614	1.0009561	1.0003489	1.0011955	1.0003982		
1960	1.0001787	0.9990999	0.9991786	0.9992730	1.0001261		
1961	1.0004966	0.9992012	1.0012354	1.0000380	0.9999245		
1962	1.0000077	1.0009872	0.9994815	0.9997378	0.9997956		
1963	NA	NA	NA	NA	NA		

\$figure

```
[1] 0.9993195 1.0009367 1.0034051 1.0070087 1.0095229 1.0074537 1.0029192
[8] 0.9964249 0.9917833 0.9905122 0.9939518 0.9967619
```

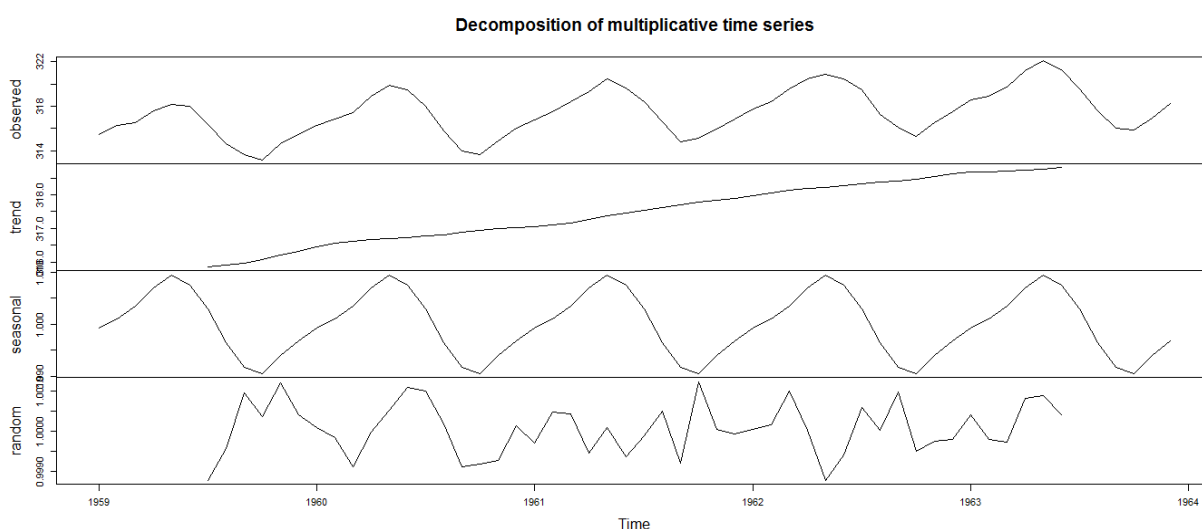
\$type

[1]"multiplicative"

attr(,"class")

[1]"decomposed.ts"

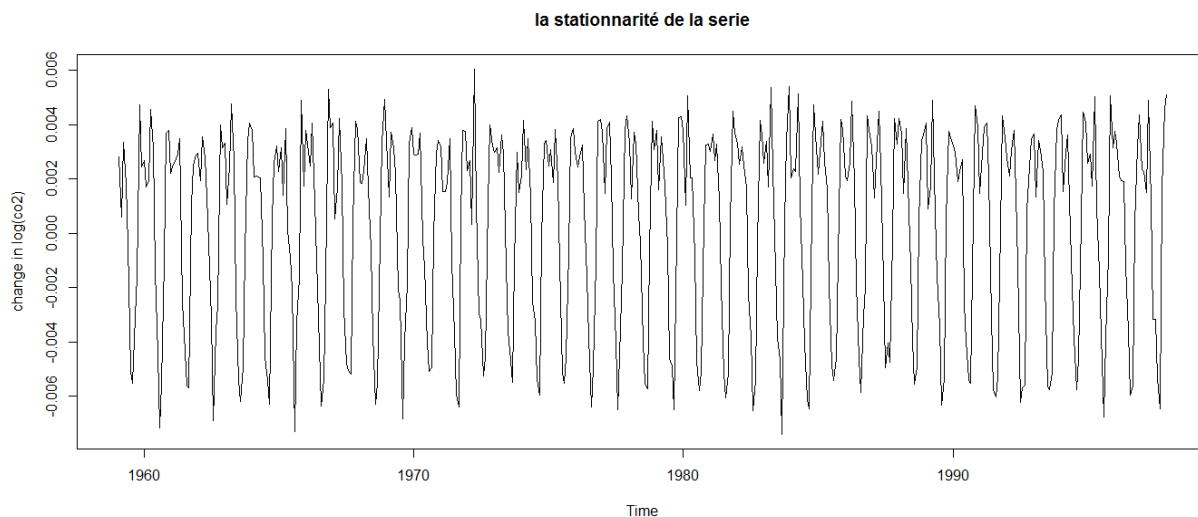
> plot(m)



3.1.3 La méthode de différence

Pour tester la stationnarité avec *R* on peut soit utiliser la fonction *diff(log())*.

```
> plot(diff(log(co2)),ylab = "changeinlog(co2)",main = "la stationnarité de la serie",type = "l")
```



3.2 La méthode de Box-Jenkins

On applique la méthode de Box-Jenkins sur les processus $AR(p)$, $MA(q)$ et $ARMA(p,q)$.

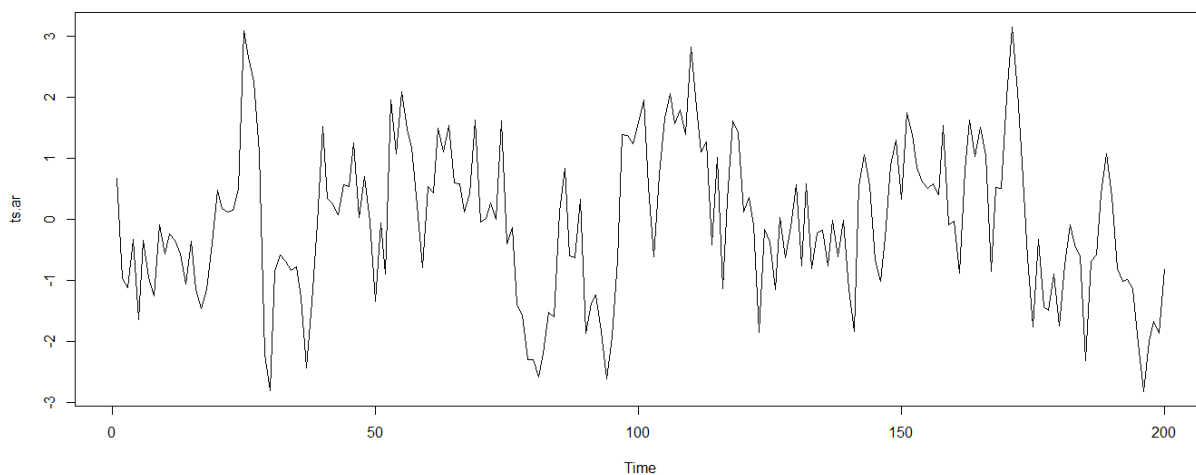
Premièrement on installe le package "stats" et on charge le package à l'aide de la commande `library()` :

3.2.1 Pour un processus $AR(1)$

$$X_t = 0.7X_{t-1} + Z_t$$

```
> ts.ar = arima.sim(list(order = c(1,0,0),ar = 0.7),n = 200)
```

```
> ts.plot(ts.ar, type = "l")
```

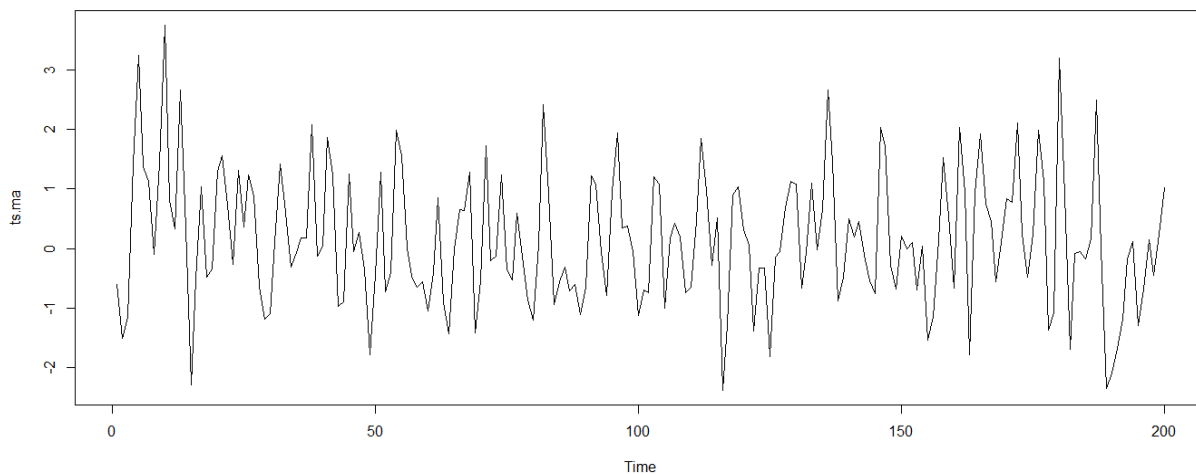


3.2.2 Pour un processus $MA(1)$

$$X_t = 0.7Z_{t-1} + Z_t$$

```
> ts.ma = arima.sim(list(order = c(0, 0, 1), ma = 0.7), n = 200)
```

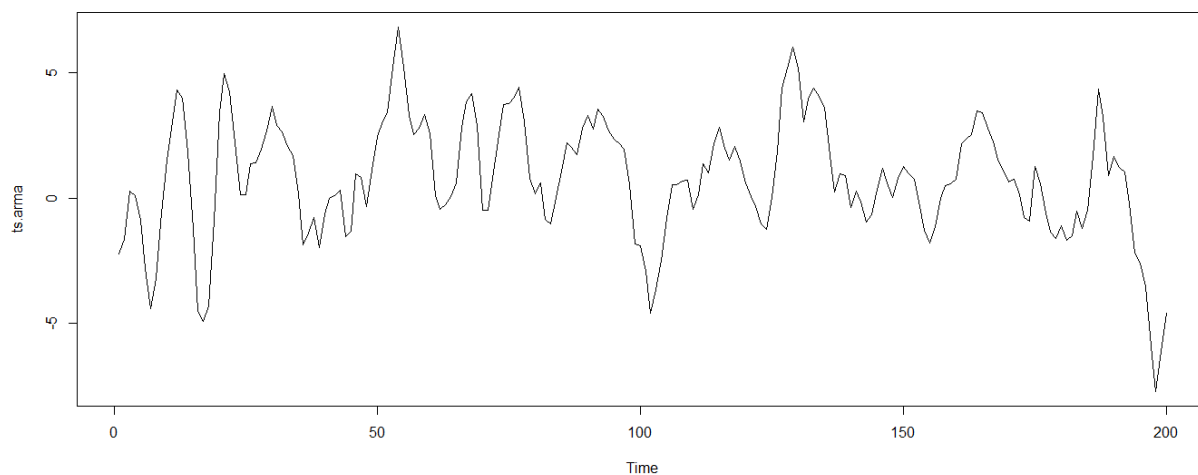
```
> ts.plot(ts.ma, type = "l")
```



3.2.3 Pour un processus $ARMA(1, 1)$

```
> ts.arma = arima.sim(list(order = c(1, 0, 1), ar = 0.8, ma = 0.6), n = 200)
```

```
> ts.plot(ts.arma, type = "l")
```



3.3 Identification

3.3.1 Ajustement d'un modèle

Pour AR(1) :

```
> par(mfrow = c(1, 2))
```

```
> ARMAacf(ar = 0.7, lag.max = 5) #corrélations
```

0	1	2	3	4	5
1.00000	0.70000	0.49000	0.34300	0.24010	0.16807

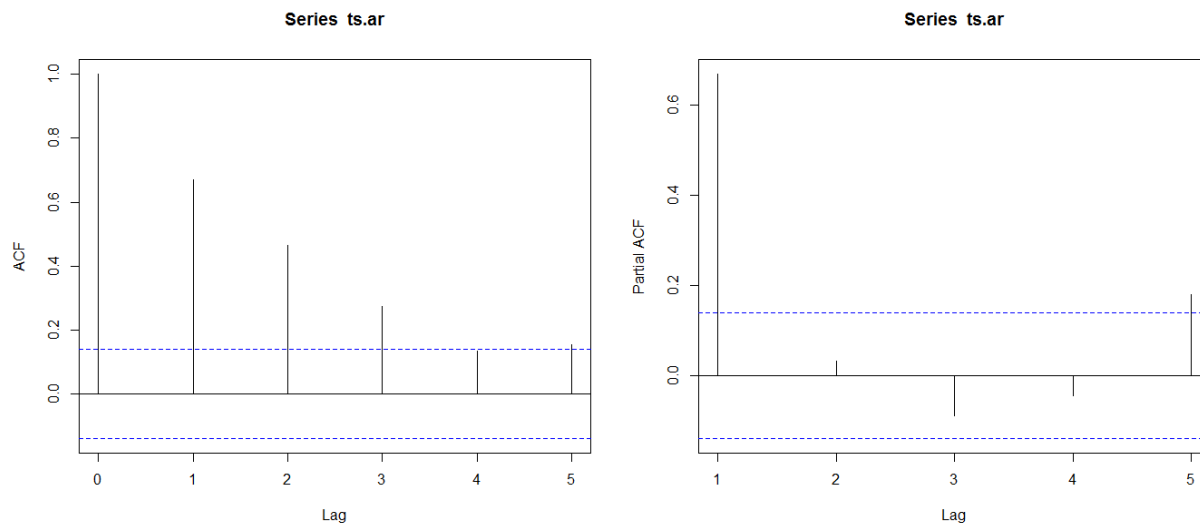
```
> acf(ts.ar, 5)
```

```
> ARMAacf(ar = 0.7, lag.max = 5, pacf = T) #corrélations partielles
```

```
[1] 0.7 0.0 0.0 0.0 0.0
```

3.3. IDENTIFICATION

```
> pacf(ts.ar, 5)
```

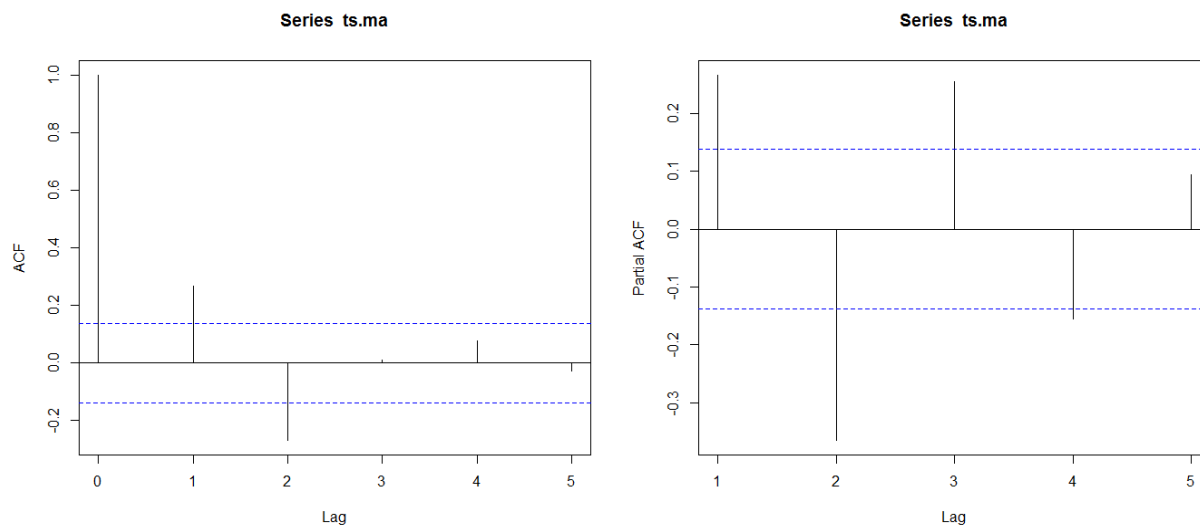


Pour MA(1) :

```
> par(mfrow = c(1, 2))
```

```
> acf(ts.ma, 5)
```

```
> pacf(ts.ma, 5)
```

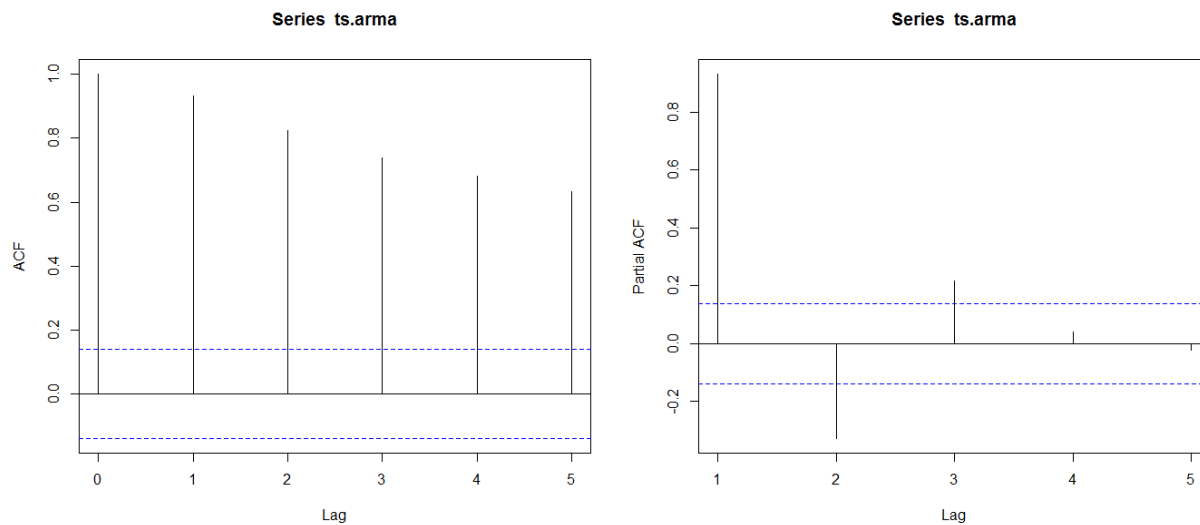


Pour ARMA(1, 1) :

```
> par(mfrow = c(1, 2))
```

```
> acf(ts.arma, 5)
```

```
> pacf(ts.arma, 5)
```



3.3.2 Le choix de modèle

```
> library(forecast)
```

```
> x = rnorm(60)
```

```
> x.arma = Arima(x, order = c(1, 0, 1))
```

```
> x.arma
```

Series : x

ARIMA(1, 0, 1)withnon - zeromean

Coefficients :

ar1	ma1	mean
-0.6980	0.8926	-0.1365

s.e. 0.1785 0.1117 0.1226

$\hat{\sigma}^2$ estimated as 0.7658 : loglikelihood = -75.75

AIC = 159.5 AICc = 160.22 BIC = 167.87

```
> x.ARMA = Arima(x, order = c(3, 0, 3))
```

```
> x.ARMA
```

Series : x

ARIMA(3, 0, 3)withnon - zeromean

Coefficients :

3.3. IDENTIFICATION

	<i>ar1</i>	<i>ar2</i>	<i>ar3</i>	<i>ma1</i>	<i>ma2</i>	<i>ma3</i>	<i>mean</i>
	0.3117	-0.0781	-0.8055	-0.1442	-0.0183	0.9396	-0.1274
<i>s.e.</i>	0.2106	0.2375	0.2083	0.1528	0.1603	0.1518	0.1147

$\hat{\sigma}^2_{estimated} = 0.6986 : \loglikelihood = -72.66$

$AIC = 161.32$ $AIC_c = 164.14$ $BIC = 178.08$

On remarque que :

$AIC(ARMA(1, 1)) = 159.5 < AIC(ARMA(3, 3)) = 161.32$

et

$BIC(ARMA(1, 1)) = 167.87 < BIC(ARMA(3, 3)) = 178.08$

Donc $ARMA(1, 1)$ est le meilleur modèle car son AIC et BIC sont le plus petit.

Conclusion

Notre travail est basé sur la modélisation des séries chronologiques, en utilisant la méthode de Box-Jenkins, on s'intéresse au modèle stationnaire *ARMA* à l'aide des fonctions d'autocorrélations, l'autocorrélations partielles et les critères d'information notamment *AIC* et *BIC*.

On peut conclure à des valeurs prévisionnelles et des résultats satisfaisants et homogènes qui nous conforte dans notre conviction que la méthode utilisée est la plus adéquate pour effectuer notre études.

Bibliographie

- [1] Akaike. H, "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle", Institute of statistical Mathematics 4-6-7 Minami Azabu, Minato-ku, Tokyo, Japan 106, 2nd International Symposium on Information Theory.
- [2] Box G.E.P. and Jenkins G.H. Time series analysis, Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco (1976).
- [3] Brockwell.P.J. and Davis R.A. Time series : "Theory and methods". Springer-verlag, New York, 2nd Ed. (1996).
- [4] Jonathan D. Cryer Kung-Sik Chan. Time series Analysis with application in R. second edition (2008).
- [5] Hamilton J.D. Time series analysis. Princeton University Press, Princeton (1994).
- [6] Kalman, R. E, "A new approach to linear filtering and prediction problems theory, "J. Basic Engrg, 1961.
- [7] Kalman, R. E, and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory, "J. Basic Engrg, 1961.
- [8] Kolmogoroff, A, "stationary sequences in Hilbert space, "Bull. Math. Univ. Moscow, 1941.
- [9] Kullback, S. and Leibler, R, A, "On information and sufficiency". Ann. Math. Statist. 1951.
- [10] Michel Lubrano. Introduction à la modélisation des séries temporelles univariées. September 2008.
- [11] O.Roustant. Introduction aux séries chronologiques. Novembre 2008.
- [12] Rainer Von Sachs and Sébastien Van Bellegem, stat 2414,séries chronologiques, 4^{ème} édition 26 septembre 2005.

- [13] Régis Bourbonnais Michel Terraza, Analyse des séries temporelles. Applications à l'économie et à la gestion, Dunod 2016.
- [14] Schwarz, G. "Estimant la dimension d'un modèle". Annales des statistiques. 1978.
- [15] Shuster, A, "On the investigation of hidden periodicities," Terr. Mag. Atmos. Elect, 1898.
- [16] V.Monbet. Modélisation des séries temporelles. 2011.
- [17] Wiener, N, "Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series", Wiley, New York, 1949.
- [18] Wold, H, O, "A study in the analysis of stationary time series", Almqvist & Wiksell, Uppsala, Sweden, 1938 (2nd. ed. 1954).
- [19] Yule, G, U, "On a methode of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot nunspot numbers", 1927.