

جامعة جيجل
المكتبة المركزية
تج 200 - 1H

530.1/2

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Serie :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : **Physique Théorique**
Option : **Physique Mathématique**

Par

Aziza Ladjeroud



THEME

*Propagateur des Particules Relativistes en Interaction avec
un Champ Électrique Dépendant du Temps via l'Intégrale
de Chemin*

Soutenu le : 18 /07/2006

Devant le jury :

- | | | | |
|--------------|--------------|-------|-------------------------|
| Président : | Kh. Nouicer | Prof. | Univ. Jijel |
| Rapporteur : | T. Boudjedaa | Prof. | Univ. Jijel |
| Examineurs : | M. Merad | M. C | C. Univ. Oum-El Bouaghi |
| | A. Boudine | M. C | C. Univ. Oum-El Bouaghi |
| | A. Bounames | M. C | Univ. Jijel |

TH/102

Remerciements

Ce mémoire a été effectué au sein de laboratoire de physique théorique département de physique, Université de Jijel.

Je remercie en particulier "الله جل جلاله" de m'avoir donné la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Mr Tahar Boudjedaa professeur à l'université de Jijel, car je ne pourrais jamais oublier ces encouragements et son professionnalisme et d'avoir dirigé ce travail et de le suivi de près et d'une manière continue. Merci.

Je remercie très vivement Mr Kh. Nouicer professeur à l'université de Jijel d'avoir présidé le jury, et Mrs, M. Merad, A. Boudine et A. Bounames maîtres de conférences pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de mon manuscrit en acceptant d'être mes examinateurs.

Je remercie Monsieur le Professeur Kh. Nouicer, directeur du laboratoire, Monsieur le Professeur T. Boudjedaa, et Monsieur A. Bounames, maître de conférence, de m'avoir accueilli et mis à ma disposition tous les moyens du laboratoire durant l'année de préparation de mon mémoire de Magister. Mon séjour y a été des plus agréable et j'ai pu y bénéficier d'une ambiance stimulante.

Venons-en aux remerciements plus personnels, tous d'abord je remercie tous mes collègues de laboratoire de physique théorique pour leur amitié indéfectible au cours de ces années. Merci pour la joie, merci pour tout.

*Les places particulières dans mon cœur sont réservées
À ma mère et mes frères.*

AZIZA

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Equivalence des jauges : Globale et Locale	6
2.1	Démonstration de l'équivalence	8
2.1.1	Cas de l'équation de Dirac avec anomalie	12
3	propagateur relatif au champ électrique dépendant du temps	16
3.1	Calcul du propagateur	16
3.1.1	La jauge scalaire	17
3.1.2	Intégration sur les variables du spin	18
3.1.3	L'intégration sur les coordonnées	21
3.1.4	La jauge vectorielle	25
3.1.5	Intégration sur les variables du spin	25
3.1.6	Intégration sur les coordonnées	26
3.1.7	Les résultats du spin zéro	28
3.1.8	Transformation de jauge	29
3.1.9	Illustration : $E(t) = E_0 = \text{constante}$	30
4	Applications	41
4.1	Première application $E(t) = E_0\delta(\omega t)$	41
4.1.1	Méthode des perturbations	43
4.2	Deuxième application $E(t) = E_0 \cosh^{-2}(\omega t)$	46
5	Conclusion générale	53

A Formalisme de Fadkin-Gitman	56
B matrice inverse $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, f)$	60

Chapitre 1

Introduction générale

La méthode des fonctions de Green est un outil très puissant de l'analyse mathématique. Née avec Green dans le domaine de l'électromagnétisme où il les utilisait de manière fréquente dans la description des phénomènes de propagation, elle a envahi maintenant la physique quantique. Il est bien connu que les héritiers de cette méthode tels Julien Schwinger et Richard Feynman les utilisaient aussi fréquemment dans les calculs de l'électrodynamique quantique. Dans ce but Feynman a proposé une formulation spéciale pour quelques fonctions de Green qui interviennent dans la description quantique et qu'on appelle propagateurs. Cette formulation à la Feynman est basée sur la notion du chemin classique et elle est l'équivalent quantique du principe d'action d'Hamilton. On l'appelle formalisme de l'intégrale de chemin. Schwinger aussi a formulé ce principe d'action quantique se basant sur le formalisme opératoire. Les deux formulations sont équivalentes et utilisent des outils complémentaires. La communauté des physiciens a tendance à utiliser le formalisme de Feynman vu sa simplicité (chemin classique) et son efficacité (adaptable au calcul des perturbations et des approximations semi-classiques). Cependant, ce formalisme a rencontré quelques problèmes pour décrire la grandeur physique discrète qui est le spin. La description de cette grandeur physique par l'intégrale de chemin a trouvé sa solution subtilement via les nombres algébriques de natures purement mathématiques dites variables de Grassmann[33]. Il a été montré que l'analyse de ces nombres algébriques permettent de reproduire la nature discrète du spin ainsi que celle de la statistique de Fermi-Dirac. De ce fait, il est devenu tout naturel d'utiliser ces nombres algébriques. Le seul défaut de cette

approche est qu'elle paraît être éloignée de l'approche classique habituelle. Ceci a ouvert aux physiciens mathématiciens une fenêtre sur des approches mathématiques telle la super mathématique qui généralise l'ancienne version en mélangeant ces nombres algébriques de Grassmann avec les nombres algébriques habituelles. Par ailleurs, les conservateurs ont essayé de construire une approche plus conformiste utilisant en général des nombres algébriques réels ou complexes mais malheureusement ces approches bien qu'elles soient proches de notre intuition classique n'ont pas réussi à mettre en évidence toutes les propriétés physique de cette quantité importante de la physique qui est le spin. Nous pouvons alors postuler que l'étrangeté quantique nous impose alors ces nombres magiques et nous nous conformons aux exigences des faits réels.

Dans notre mémoire, nous allons développer du point de vue calculatoire l'intégrale de chemin décrivant des particules relativistes spin 0 et 1/2 en interaction avec un champ électrique dépendant du temps (supposé d'intensité quelconque)[12]. Ce problème de la physique est très important du point de vue pratique puisqu'en général on crée des champs qui admettent dans leur configuration une dépendance en temps et lors de l'expérimentation sur les particules ces champs variables interviennent d'une manière conséquente. Par ailleurs, le calcul des fonctions de Green relatives à ce problème est d'un intérêt particulier dans l'électrodynamique quantique. Ce problème peut être considéré comme la première approximation et l'exemple non perturbatif de l'électrodynamique quantique. Il est donc nécessaire de savoir calculer ces fonctions de Green. Ces dernières sont en général décrites par le propagateur de Feynman qui dans notre cas nous les écrirons sous la forme d'une intégrale de chemin. Le mouvement du spin est décrit par des nombres de Grassmann et le mouvement externe est décrit par des variables réelles. Le propagateur est exprimé suivant le formalisme de Fradkin-Gitman[1, 2, 3] extension immédiate de l'idée originale du temps propre de Schwinger. En fait, ce formalisme de Fradkin-Gitman peut être exprimé suivant deux descriptions équivalentes dites : projection globale et projection locale[4].

Dans le premier chapitre nous allons essayer d'établir cette équivalence entre la projection globale et locale dans le cas de l'équation de Dirac et celle de Pauli-Dirac. Dans le chapitre 2, nous réduirons le propagateur des particules relativistes de spin 0 et 1/2 en interaction avec un champ électrique variable quelconque au propagateur d'une particule de Schrödinger en présence d'un potentiel scalaire en relation intime avec le champ électrique. Une illustration de la

méthode est donnée dans le cas du champ constant. Dans le chapitre 3, nous illustrons encore plus cette technique en considérant des problèmes dépendant du temps mais qui admettent des solutions analytiques. Le choix alors de la dépendance en temps est alors pertinent. En se référant au catalogue des problèmes analytiques de Schrödinger nous avons choisi deux exemples ; celui d'une interaction instantanée (locale dans le temps) et sa généralisation (extension en durée d'interaction). Nous calculerons exactement les fonctions de Green de chaque problème dans le cas de spin 0 et celui du spin 1/2. En principe ces fonctions de Green serviront dans le calcul des phénomènes relatifs à la théorie des champs telle la création de paires et l'effet Casimir. Cette question est malheureusement abordée en conclusion où il reste beaucoup à faire.

Chapitre 2

Equivalence des jauges : Globale et Locale

La particule relativiste de spin 1/2 est décrite au moyen de l'équation de Dirac. Cette équation linéaire est intimement reliée celle de Klein-Gordon qui est du second ordre. Dans la version intégrale de chemin de Feynman cette dernière joue un rôle important puisqu'elle est extraite directement de l'action classique via le principe de correspondance. Les états de Dirac sont retrouvés à partir de ceux de Klein Gordon en appliquant l'opérateur de projection qui élimine les états flous. Cet opérateur de projection est de nature fermionique. On appelle représentation en projection globale l'intégrale de chemin qui fait associer à l'opérateur de Klein-Gordon une action. Dans cette formulation un temps fictif jouant le rôle de dimension supérieure est nécessaire. C'est le temps bosonique. On appelle représentation en projection locale, l'intégrale de chemin qui fait associer à l'opérateur de Klein-Gordon plus l'opérateur de projection une action. Aussi dans cette formulation un temps fictif jouant le rôle de dimension supérieure est nécessaire. C'est le super-temps (λ, χ) . Dans chacune des représentations les matrices de spin sont remplacées par des variables de Grassmann.

La fonction de Green causale $S^c(x_b, x_a)$ de la particule de Dirac dans un champ électromagnétique satisfait l'équation suivante

$$(\hat{\pi}_\mu \gamma^\mu - m)S^c(x_b, x_a) = -\delta^4(x_b, x_a) \quad (2.1)$$

qui peut être réécrite comme suit

$$(\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) \tilde{S}^c(x_b, x_a) = \delta^4(x_b, x_a) \quad (2.2)$$

où : $\hat{\pi}_\mu = (i\partial_\mu - gA_\mu)$; g est la constante de couplage, $\tilde{S}^c = S^c\gamma^5$, $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5\gamma^\mu$; $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \tilde{\gamma}^5$; $(\gamma^5)^2 = -1$ et les matrices $\tilde{\gamma}^\mu$ vérifient les mêmes relations de commutations habituelles $[\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$; $\mu, \nu = \overline{0, 3, 5}$; $\eta^{\mu\nu} = \text{dia}(1, -1, -1, -1)$.

Formellement, $\tilde{S}^c(x_b, x_a)$ est l'élément de matrice dans l'espace des coordonnées de l'inverse de l'opérateur de Dirac

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a) = \langle x_b | \tilde{S}^c | x_a \rangle \quad (2.3)$$

où

$$\tilde{S}^c = \frac{\hat{O}}{\hat{O}^2 + i\varepsilon}$$

et

$$\begin{cases} \hat{O} = \hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5 \\ \hat{O}^2 = \hat{\pi}^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est le tenseur antisymétrique défini par $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

La fonction de Green $\tilde{S}_g^c(x_b, x_a)$ dans la représentation jauge globale est la suivante

$$\begin{aligned} \tilde{S}_g^c(x_b, x_a) &= i\hat{O} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ i\lambda(\hat{O}^2 + i\varepsilon) \right\} \\ &= i(\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ i\lambda(\hat{\pi}^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + i\varepsilon) \right\} \\ &= i(\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}x DP \int_{\Psi^n(0)+\Psi_n(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \\ &\quad \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda(\pi^2 - m^2 + 2ig\mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau \right. \\ &\quad \left. + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

λ : étant le temps propre de nature bosonique, et où l'on a utilisé la formulation Fradkin-Gitman (voir appendice A)[1]

La fonction de Green $\tilde{S}_l^c(x_b, x_a)$ dans la représentation jauge locale est la suivante

$$\begin{aligned} \tilde{S}_l^c(x_b, x_a) &= \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp \left\{ i\lambda(\hat{O}^2 + i\varepsilon) + i\chi\hat{O} \right\} \\ &= \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp \left\{ i\lambda(\pi^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + i\varepsilon) + i(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) \chi \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_I^c(x_b, x_a) &= \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_I}{\delta \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}x DP \int_{\Psi^n(0)+\Psi^n(1)=0} \mathcal{D}\Psi \\
&\exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda (\pi^2 - m^2 + 2ig \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) + p\dot{x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \Psi_n \dot{\Psi}^n + (\pi_\mu \Psi^\mu - m\Psi^5) \chi \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

(λ, χ) étant le super-temps, où χ est fermionique et λ est bosonique

Notre but est de montrer l'équivalence de ces deux expressions.

2.1 Démonstration de l'équivalence

Pour montrer l'équivalence de ces deux représentations, partant d'abord de la fonction de Green associée à l'équation de Dirac donnée par

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b, x_a) &= \langle x_b | \tilde{S}^c | x_a \rangle \\
&= \langle x_b | (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) \frac{1}{(\pi^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + i\varepsilon)} | x_a \rangle
\end{aligned} \tag{2.8}$$

insérons le projecteur $\int dx_c |x_c\rangle \langle x_c| = 1$ dans (2.8), il vient

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a) = \int dx_c \langle x_b | (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) | x_c \rangle \langle x_c | \frac{1}{(\pi^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + i\varepsilon)} | x_a \rangle \tag{2.9}$$

puis notons

$$\begin{aligned}
K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) &= \langle x_b | (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) | x_c \rangle \\
K_b(x_c, x_a, t_c, t_a) &= \langle x_c | \frac{1}{(\pi^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + i\varepsilon)} | x_a \rangle
\end{aligned} \tag{2.10}$$

où $K_f(x_b, x_c, t_b, t_c)$ est l'élément de matrice de l'opérateur de projection (propagateur fermionique) et $K_b(x_b, x_c, t_b, t_c)$ est le propagateur relatif à l'opérateur quadratique de Dirac (propagateur bosonique). La fonction de Green de Dirac est alors un produit de convolution de ces deux éléments. Nous allons montrer que le résultat d'intégration sur la variable x_c donne le résultat de la représentation globale (2.5). Suivant le schéma donné par [1, 2] cette fonction de

Green peut être exprimée comme

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b, x_a) = & \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \left(\frac{\partial_l}{\partial \theta^n} + \frac{\partial_l}{\partial \vartheta^n} \right) \right\} \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int dx_c \int_c^b \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int_{\Psi(1)+\Psi(0)=\theta} \mathcal{D}\Psi \\
& \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-2i\chi (\pi_\mu \Psi^\mu - m\Psi^5) + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0} \\
& \times \int_a^c \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int_{\Psi^n(0)+\Psi_n(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[\lambda (\pi^2 - m^2 + 2i\lambda g \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) + \right. \right. \\
& \left. \left. + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Certes, le propagateur (2.11) n'est pas exprimé dans la représentation en jauge locale proprement dite mais le fait de remplacer l'opérateur de projection par une intégrale de chemin revient à dire que la projection sur les états de Dirac est assurée à chaque instant puisqu'en fin de compte, on intègre sur le point intermédiaire x_c suivant une formule de convolution. Nous l'appellons représentation en jauge mixte.

Calcul du propagateur fermionique $K_f(x_b, x_c, t_b, t_c)$

En suivant le schéma donné par [1, 2], le propagateur $K_f(x_b, x_c, t_b, t_c)$ en $(3+1)$ dimension peut être représenté par l'intégrale de chemin suivante

$$\begin{aligned}
K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = & \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right\} \int d\chi \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int_{\Psi(1)+\Psi(0)=\theta} \mathcal{D}\Psi \\
& \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-2i\chi (\pi_\mu \Psi^\mu - m\Psi^5) + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

où $\pi_\mu = p_\mu - gA_\mu(x)$, $\mu = \overline{0, 3}$

Pour évaluer cette expression, passons à l'espace des vitesses ω suivant le changement

$$\Psi^\mu(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau') \omega^\mu(\tau') d\tau' + \frac{\theta^\mu}{2} \quad (2.13)$$

$\varepsilon(\tau)$ étant la fonction signe de τ , $\omega^\mu(\tau)$ est une variable de Grassmann impaire et θ^μ et une variable de Grassman auxiliaire.

Nous obtenons

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int d\chi \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}\omega \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \chi \left[(\varepsilon \omega^\mu + \theta^\mu) \pi_\mu - m(\varepsilon \omega^5 + \theta^5) \right] + i \int_0^1 d\tau p \dot{x} \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.14)$$

avec

$$\mathcal{D}\omega = \mathcal{D}\omega \left[\int \mathcal{D}\omega \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \omega^n(\tau) \varepsilon(\tau - \tau') \omega_n(\tau') d\tau d\tau' \right\} \right]^{-1} \quad (2.15)$$

et où l'on a utilisé les notations condensées suivantes

$$\omega^n \varepsilon \omega_n = \int_0^1 \int_0^1 \omega^n(\tau) \varepsilon(\tau - \tau') \omega_n(\tau') d\tau d\tau', \quad n = \overline{0, 3, 5}; \quad \mu = \overline{0, 3} \quad (2.16)$$

Arrivé là, introduisons les sources de Grassmanniennes $\rho_n(\tau)$ associées aux vitesses $\omega_n(\tau)$, le propagateur aura la forme

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}\omega \left[\left(\varepsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} + \theta^\mu \right) \pi_\mu - m \left(\varepsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + \theta^5 \right) \right] \Big|_{\theta=0} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \int_0^1 \rho_n(\tau) \omega^n(\tau) d\tau + i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\}. \quad (2.17)$$

Comme l'intégrale sur les vitesses ω^n est une Gaussienne on peut facilement intégrer sur les vitesses ω^n , on obtient alors

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \left[\left(\varepsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} + \theta^\mu \right) \pi_\mu - m \left(\varepsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + \theta^5 \right) \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 d\tau \rho_n(\tau) \eta^{nk} (\varepsilon^{-1}) \rho_k(\tau') + i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.18)$$

l'inverse de la matrice $\varepsilon(\tau, \tau')$ étant

$$\varepsilon^{-1}(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau, \tau') \quad (2.19)$$

Par ailleurs on a

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_n(\tau) \eta^{nk} (\varepsilon^{-1}) \rho_k(\tau') \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^1 \dot{\rho}_n(\tau) \eta^{nk} \rho_k(\tau) d\tau \right\} \quad (2.20)$$

en effectuant la dérivation par rapport à ρ_n , on obtient

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \left[\theta^\mu \int_0^1 \pi_\mu d\tau - m \theta^5 \right] \exp \left\{ i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.21)$$

ou bien

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \left[\theta^\mu \int_0^1 (p_\mu - g A_\mu(x)) d\tau - m\theta^5 \right] \exp \left\{ i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.22)$$

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \theta^\mu \int_0^1 p_\mu d\tau \exp \left\{ i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} - g\theta^\mu \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int_0^1 A_\mu(x) d\tau \exp \left\{ i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} - m\theta^5 \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0} \quad (2.23)$$

Maintenant effectuons l'intégration sur x et p , on obtient

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \left[-i\theta^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} \delta(x_b - x_c) - g\theta^\mu \int dx_s \delta(x_b - x_s) A_\mu(x_s) \delta(x_s - x_c) - m\theta^5 \delta(x_b - x_c) \right] \Big|_{\theta=0} \quad (2.24)$$

La dérivation par rapport à θ^n se fait suivant la formule

$$\exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} f(\theta) \Big|_{\theta=0} = f \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^n} \right) \exp \{ i\zeta_n \tilde{\gamma}^n \} \Big|_{\theta=0} \quad (2.25)$$

ce qui donne

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} \delta(x_b - x_c) - i\gamma^\mu A_\mu(x_b) \delta(x_b - x_c) - im\gamma^5 \delta(x_b - x_c) \quad (2.26)$$

La fonction de Green $\tilde{S}^c(x_b, x_a; t_b, t_a)$ devient alors

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a; t_b, t_a) = \int dx_c k_f(x_b, x_c, t_b, t_c) k_B(x_c, x_a, t_c, t_a) \quad (2.27)$$

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a; t_b, t_a) = \int dx_c \left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} \delta(x_b - x_c) - i\gamma^\mu A_\mu(x_b) \delta(x_b - x_c) - im\gamma^5 \delta(x_b - x_c) \right] k_B(x_c, x_a, t_c, t_a) \quad (2.28)$$

d'où le résultat

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a) = \left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} - i\gamma^\mu A_\mu(x_b) - im\gamma^5 \right] k_B(x_b, x_a, t_b, t_a) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a) &= \left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} - i\gamma^\mu A_\mu(x_b) - im\gamma^5 \right] \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \left(\frac{\partial_t}{\partial \theta^n} \right) \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}P \int_{\Psi^n(0)+\Psi_n(1)=\vartheta} \mathcal{D}\Psi \\ &\quad \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda(\pi^2 - m^2 + 2i\alpha g \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau \right. \\ &\quad \left. + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ce qui est le résultat cherché.

2.1.1 Cas de l'équation de Dirac avec anomalie

Dans ce qui suit, nous allons établir cette même équivalence dans le cas où l'anomalie est présente. La fonction de Green associée à l'équation de Dirac avec anomalie [5] est

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a) &= \langle x_b | \frac{(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - \gamma^5 [m - i\frac{\mu}{2} F_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu])}{\left[(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - \gamma^5 [m - i\frac{\mu}{2} F_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu])^2 + i\epsilon \right]} | x_a \rangle \\ &= \int dx_c K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) K_b(x_b, x_c, t_b, t_c) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Calcul du propagateur fermionique $K_f(x_b, x_c, t_b, t_c)$

Le propagateur fermionique est donné par la formule

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \langle x_b | \left(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - \gamma^5 \left[m - i\frac{\mu}{2} F_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \right] \right) | x_c \rangle \quad (2.32)$$

qui dans la formulatoin de Fradkin-Gitman [3, 4, 5, 6] devient

$$\begin{aligned} K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) &= \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int d\chi \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int_{\Psi(1)+\Psi(0)=0} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[-2i\Psi_\mu \pi^\mu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4\mu F_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu \Psi^5 + 2im\Psi^5 \right] \chi - i\Psi_n \dot{\Psi}^n + p\dot{x} \right\} + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \Big|_{\vartheta=0} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Passons par les mêmes étapes :

-espace des vitesses

$$\Psi^\mu(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau') \omega^\mu(\tau') d\tau' + \frac{\theta^\mu}{2} \quad (2.34)$$

$\varepsilon(\tau)$ étant le signe de τ et $\omega^n(\tau)$ est une variable de Grassmann impaire.

il vient :

$$\begin{aligned}
K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) &= \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int d\chi \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}\omega \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \left[(\varepsilon \omega^\mu + \theta^\mu) \pi_\mu + \left(i \frac{\mu}{2} \omega^\mu \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mu \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\mu}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right) (\varepsilon \omega^5 + \theta^5) - m(\varepsilon \omega^5 + \theta^5) \right] \chi \\
&\quad \left. + i \int_0^1 p \dot{x} \right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

-L'intégration sur χ donne

$$\begin{aligned}
K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) &= \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}\omega \left[(\varepsilon \omega^\mu + \theta^\mu) \pi_\mu \right. \\
&\quad \left. + i \left(\frac{\mu}{2} \omega^\mu \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \mu \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\mu}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right) (\varepsilon \omega^5 + \theta^5) \right. \\
&\quad \left. - m(\varepsilon \omega^5 + \theta^5) \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \int_0^1 \rho_n(\tau) \omega^n(\tau) d\tau + i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Introduisons les sources Grassmanniennes $\rho_n(\tau)$ associées aux vitesses $\omega_n(\tau)$, le propagateur aura la forme

$$\begin{aligned}
K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) &= \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{D}\omega \left[\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} + \theta^\mu \right) \pi_\mu \right. \\
&\quad \left. + i \left(\frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} - \mu \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} - \frac{\mu}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_5} + \theta^5 \right) \right. \\
&\quad \left. - m \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_5} + \theta^5 \right) \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \int_0^1 \rho_n(\tau) \omega^n(\tau) d\tau + i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

-l'intégration sur ω donne

$$\begin{aligned}
K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) &= \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \left[\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} + \theta^\mu \right) \pi_\mu \right. \\
&\quad \left. + i \left(\frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} - \mu \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} - \frac{\mu}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_5} + \theta^5 \right) \right. \\
&\quad \left. - m \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_5} + \theta^5 \right) \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \rho_n \varepsilon^{-1} \rho^n + i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

L'inverse de la matrice $\varepsilon(\tau, \tau')$ étant

$$\varepsilon^{-1}(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau, \tau') \quad (2.39)$$

nous aurons alors

$$\begin{aligned} K_f(x_b, x_c, t_b - t_c) = & \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \left[\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} + \theta^\mu \right) \pi_\mu \right. \\ & + i \left(\frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} - \mu \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} - \frac{\mu}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho_5} + \theta^5 \right) \\ & \left. - m \left(\varepsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + \theta^5 \right) \right] \times \exp \left\{ \int_0^1 d\tau \left[\frac{1}{4} \rho_n(\tau) \rho^n(\tau) + i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right] \right\} \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (2.40)$$

-Effectuons la dérive par rapport à ρ_n , on obtient

$$\begin{aligned} K_f(x_b, x_c, t_b - t_c) = & \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \left[\theta^\mu \int_{t_a}^{t_b} d\tau p_\mu(\tau) - i \frac{\mu}{2} \theta^5 \theta^\mu \theta^\nu \int_{t_a}^{t_b} d\tau F_{\mu\nu}(\tau) \right. \\ & \left. - m \theta^5 \right] \times \exp \left[i \int_0^1 p \dot{x} d\tau \right] \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (2.41)$$

L'intégration sur les chemins p, x donne

$$\begin{aligned} K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = & \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \left[i \theta^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} \delta(x_b - x_c) - i \frac{\mu}{2} \theta^5 \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu}(x_b) \delta(x_b - x_c) \right. \\ & \left. - m \theta^5 \delta(x_b - x_c) \right] \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (2.42)$$

La dérivation par rapport à θ^n se fait suivant la formule

$$\exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} f(\theta) \Big|_{\theta=0} = f \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^n} \right) \exp \{ i \zeta_n \tilde{\gamma}^n \} \Big|_{\theta=0} \quad (2.43)$$

ce qui permet d'avoir

$$K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b^\mu} \delta(x_b - x_c) - i \frac{\mu}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 F_{\mu\nu}(x_b) \delta(x_b - x_c) - i m \gamma^5 \delta(x_b - x_c) \quad (2.44)$$

La fonction de Green $\tilde{S}(x_b, x_a)$ se simplifie à

$$\tilde{S}^e(x_b, x_a) = \int dx_c K_f(x_b, x_c, t_b, t_c) K_B(x_c, x_a, t_c, t_a) \quad (2.45)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a) = \int dx_c \left[\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_b^\nu} \delta(x_b - x_c) - \frac{\mu}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \mathcal{F}_{\mu\nu}(x_b) \delta(x_b - x_c) \right. \\ \left. - im\gamma^5 \delta(x_b - x_c) \right] K_b(x_c, x_a, t_c, t_a) \end{aligned} \quad (2.46)$$

d'où le résultat final

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a) &= i \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{\mu}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \mathcal{F}_{\mu\nu}(x_b) - m\gamma^5 \right] K_B(x_b, x_a, t_b, t_a) \\ &= i(p_\mu \gamma^\mu - i\frac{\mu}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \mathcal{F}_{\mu\nu}(x_b) - m\gamma^5) K_B(x_c, x_a, t_c, t_a) \\ &= i \left(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - \gamma^5 \left[m - i\frac{\mu}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \right] \right)_b K_B(x_c, x_a, t_c, t_a) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Sachant qu'on montré l'équivalence des représentation locale-globale, dans la suite des calculs nous nous intéressons à la plus simple représentation, ie, globale.

Nous considérons l'équation de Dirac en interaction avec un champ électrique extérieur dépendant du temps.

Chapitre 3

propagateur relatif au champ électrique dépendant du temps

Dans ce chapitre, notre but est de calculer le propagateur d'une particule spinorielle relativiste de spin 1/2 suivant le formalisme de Fradkin-Gitman [7, 8, 9, 10] en interaction avec un champ électrique variable de forme quelconque [11, 12, 13]. Nous utiliserons deux jauge différentes et nous montrerons que les deux résultats sont reliés par une transformation de jauge entre les fonctions de Green correspondantes. Les intégrations sur les variables de spin ainsi que sur le mouvement extérieur seront évaluées. Le problème se ramène alors à une intégrale de chemin de Feynman (sur les variables temps = chemins de Feynman) pour une équation de type Schrödinger avec un potentiel effectif en relation avec le champ électrique extérieur. Une illustration du champ constant est donnée.

3.1 Calcul du propagateur

En présence d'un champ électrique dirigé suivant l'axe des x ; $\vec{E} = (E(t), 0, 0)$, l'équation (2.2) s'écrit comme

$$(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5) \tilde{S}^c(b, a) = \delta^4(b - a) \quad (3.1)$$

$\pi_\mu = (i\partial_\mu - g\mathcal{A}_\mu)$ avec \mathcal{A}_μ le 4-potentiel d'où dérive le champ électrique. Nous choisirons de faire le calcul dans les deux jauges différentes suivantes :

$$\mathcal{A}^{\mu(1)} = (-E(t)x, \vec{0}) \text{ jauge scalaire} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{A}^{\mu(2)} = (0, -F(t), 0, 0) \text{ avec } \frac{dF(t)}{dt} = E(t), F(t_a) = 0, \text{ jauge vectorielle} \quad (3.3)$$

Le passage entre ces deux jauges est donné par

$$\mathcal{A}^{\mu(2)} = \mathcal{A}^{\mu(1)} + \partial^\mu \Omega \quad (3.4)$$

où Ω est la fonction de jauge donnée par

$$\Omega(t, \vec{x}) = F(t)x \quad (3.5)$$

Nous monterons par la suite que cette fonction de jauge permet aussi de relier les fonctions de Green exprimées dans chacune des jauges.

3.1.1 La jauge scalaire

Soit la jauge scalaire $\mathcal{A}^{\mu(1)} = (-E(t)x, \vec{0})$. Avant de commencer le calcul, il est préférable d'introduire un paramètre α ($\alpha = 0, 1$ suivant qu'on a Klein-Gordon ou Dirac) qui permet d'identifier la partie bosonique (absence du spin) dans la fonction de Green. Cette manière permet de retrouver les calculs relatifs à l'équation de Klein-Gordon à partir de ceux de Dirac.

En effet, la solution formelle est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha^{c(1)} &= (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\tilde{\gamma}^5)^\alpha \frac{1}{(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\tilde{\gamma}^5)^2} = (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\tilde{\gamma}^5)^\alpha \tilde{G}_\alpha^{c(1)} \\ &= \left\{ \tilde{\gamma}^0 \hat{p}_b^0 - i \vec{\tilde{\gamma}} \vec{\hat{p}}_b + \tilde{\gamma}^0 g E(t_b) \hat{x}_b - m\tilde{\gamma}^5 \right\}^\alpha \frac{1}{(\pi^2 - m^2 + i\alpha \frac{g}{2} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dans notre cas

$$\mathcal{F}_{01} = -\mathcal{F}_{10} = E(t), \text{ les autres termes sont nuls} \quad (3.7)$$

Comme on l'a déjà montré auparavant, il serait préférable d'effectuer les calculs dans la représentation globale \tilde{G}_α^c vue l'équivalence des représentation locale-globale. La forme intégrale

de chemin pour \tilde{G}_α^c est la suivante

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{c(1)}(b, a) &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_l}{\delta \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda \mathcal{D}x \mathcal{D}P \int_{\Psi^n(0)+\Psi_n(1)=0} \mathcal{D}\Psi \\ &\exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(\pi^2 - m^2 + 2i\alpha g \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) \right. \\ &\left. + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ici, il est préférable d'intégrer d'abord les variables de Grassmann.

3.1.2 Intégration sur les variables du spin

Soit la partie spinorielle suivante

$$(I) = \int_{\Psi^n(0)+\Psi_n(1)=0} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ \int_0^1 [\lambda 2i\alpha g \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu + \Psi_n \dot{\Psi}^n] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\} \quad (3.9)$$

Comme d'habitude, passons des variables de Grassmann Ψ aux vitesses ω suivant changement

$$\Psi^n(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau' \varepsilon(\tau - \tau') \omega^n(\tau) + \frac{\theta^n}{2} \quad (3.10)$$

Après ce remplacement, (I) devient

$$(I) = \int \mathcal{D}\omega \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \frac{\alpha \lambda g}{2} \omega^\mu \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \alpha \lambda g \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\alpha \lambda g}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \quad (3.11)$$

$$(I) = \int \mathcal{D}\omega^5 \int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^5 \varepsilon \omega_5 - \frac{1}{2} \omega^\mu \varepsilon \omega_\mu + \frac{\lambda \alpha g}{2} \omega^\mu \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \lambda \alpha g \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\lambda \alpha g}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \quad (3.12)$$

Intégrons d'abord sur les vitesses ω^5 , le résultat est simplement égal à

$$\int \mathcal{D}\omega^5 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^5 \varepsilon \omega_5 \right\} = 1. \quad (3.13)$$

L'intégration sur les vitesses ω^μ a la forme suivante

$$\int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \Lambda_{\mu\nu} \omega^\nu + J_\mu \omega^\mu \right\}, \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

où

$$J_\mu = -\sigma\theta^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}\varepsilon \quad , \quad \Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\varepsilon - \sigma\varepsilon\mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau)\varepsilon \quad , \quad \sigma = \alpha\lambda g \quad (3.15)$$

La forme de l'intégrale étant une Gaussienne, le résultat est simplement

$$\int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2}\omega^\mu \Lambda_{\mu\nu}\omega^\nu + J_\mu\omega^\mu \right\} = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu \right\} \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu &= \sigma^2 (\theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu}\varepsilon) \Lambda_{\mu\nu}^{-1} (\theta^\beta \mathcal{F}_{\beta\nu}\varepsilon) \\ J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu &= -2\sigma^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} G_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\beta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \Lambda_{\mu\nu}^{-1} \text{ est l'inverse de } \Lambda_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon\Lambda_{\mu\nu}^{-1}\varepsilon \end{cases} \quad (3.18)$$

Calculons le déterminant de Λ en utilisant l'identité

$$\det \Lambda = \exp \{ \text{Tr} \ln \Lambda \} \quad , \quad (3.19)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \det \Lambda &= (\det \Lambda) \frac{d}{d\sigma} \text{Tr} \ln \Lambda \\ &= (\det \Lambda) \text{Tr} \left(\frac{\frac{d}{d\sigma} \Lambda}{\Lambda} \right) \\ &= (\det \Lambda) \text{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d}{d\sigma} \Lambda. \end{aligned} \quad (3.20)$$

ou bien

$$\frac{\frac{d}{d\sigma} \det \Lambda}{\det \Lambda} = \text{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d}{d\sigma} \Lambda. \quad (3.21)$$

Intégrons sur σ

$$\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon} = \exp \left\{ \int_0^\sigma d\omega \text{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d}{d\sigma} \Lambda \right\}. \quad (3.22)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\sigma \text{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d\Lambda}{d\alpha} d\alpha' \right\} \\ \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} &= \exp \left\{ - \int_0^\sigma \text{Tr} (\Gamma \mathcal{F}) d\sigma' \right\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portant (3.17) et (3.23) dans (I), on obtient

$$\begin{aligned}
 (I) &= \exp \left\{ - \int_0^\sigma \text{Tr} (GF) d\sigma' + \sigma^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} \Gamma^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{\sigma}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \int_0^\sigma d\sigma' \int_0^1 d\tau \Gamma^{\mu\nu} (\tau, \tau) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) + \sigma^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu}(\tau) \Gamma^{\mu\nu} (\tau, \hat{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta}(\tau') \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\hat{\tau} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sigma}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Maintenant, passons au calcul de $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}$ et $\Gamma_{\mu\nu}$. Par définition, la matrice $\Lambda_{\mu\nu} (\tau, \hat{\tau})$ et sa matrice inverse $\Lambda_{\mu\nu}^{-1} (\tau, \hat{\tau})$ vérifient la relation suivante

$$\int_0^1 \Lambda_{\mu\nu} (\tau, s) (\Lambda^{\nu\beta})^{-1} (s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta (\tau - \hat{\tau}). \tag{3.25}$$

Cette propriété permet d'obtenir (voir appendice B)

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{-1} (\tau, \hat{\tau}) &= \varepsilon^{-1} (\tau, \hat{\tau}) + \sigma^2 \mathcal{F} (\tau) V (\tau) \left[\varepsilon (\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F} (\tau_1) \right) \right] V^{-1} (\hat{\tau}) \mathcal{F} (\hat{\tau}) \\
 &\quad + \sigma V (\tau) \delta (\tau - \hat{\tau}) V^{-1} (\hat{\tau}) \mathcal{F} (\hat{\tau}). \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

et

$$\Gamma (\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} V (\tau) \left[\varepsilon (\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F} (\tau_1) \right) \right] V^{-1} (\hat{\tau}). \tag{3.27}$$

Par un calcul simple, on peut déduire

$$\begin{aligned}
 - \int_0^\sigma d\sigma' \int_0^1 d\tau \Gamma^{\mu\nu} (\tau, \tau) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^\sigma d\sigma' \int_0^1 d\tau \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F} (\tau_1) \right)^{\mu\nu} \\
 &= \int_0^\sigma d\sigma' \int_0^1 d\tau \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F} (\tau_1) \right) \\
 &= \ln \cosh \sigma \int_0^1 E(t) . d\tau \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sigma^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu}(\tau) \Gamma^{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta}(\tau') \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\tau' \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu}(\tau) \frac{1}{2} V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta}(\tau') \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\hat{\tau}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Là encore, un simple calcul donne

$$\begin{aligned}
& \sigma^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu}(\tau) \Gamma^{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta}(\tau') \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\tau' \\
&= \frac{\sigma}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\tau) \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{1}{2} \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right)_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta \\
&= \sigma E(t) \theta^1 \theta^0 - \theta^1 \theta^0 \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Après tous ces calculs, la détermination de (I) est immédiate et le résultat est

$$(I) = \cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) - \theta^1 \theta^0 \sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \tag{3.31}$$

Passons maintenant au calcul des intégrations sur les coordonnées. Il est facile de remarquer que les coordonnées x interviennent au plus par une forme quadratique, ce qui permet alors leur intégration suivant les techniques habituelles de l'intégrale de chemins de Feynman.

3.1.3 L'intégration sur les coordonnées

On a donc

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_\alpha^{c(1)}(b, a) &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_l}{\delta \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda D\lambda \\
& \int \mathcal{D}\vec{x} \mathcal{D}p^0 \mathcal{D}\vec{p} \left[\cos \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) - \theta^1 \theta^0 \sin \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \\
& \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda (p_0 + gE(t)x)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 - \lambda m^2 + p^0 i - \vec{p} \cdot \vec{x} \right] d\tau \right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Remarquons qu'on peut pas effectuer l'intégration sur le chemin t à cause de la forme générale de la fonction $E(t)$. Cependant l'intégration sur $D\vec{x}$, Dp^0 et $D\vec{p}$ peut être effectuée facilement.

En effet, soit

$$(II) = \int D\vec{x} Dp^0 D\vec{p} \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(p_0 + gE(t)x)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 - \lambda m^2 + p^0 \dot{t} - p_x \dot{x} - p_y \dot{y} - p_z \dot{z}] d\tau \right\} \quad (3.33)$$

remplaçons p^0 par P^0 suivant le changement

$$P^0 = p_0 + gE(t)x \quad (3.34)$$

(II) devient

$$(II) = \int D\vec{x} DP^0 D\vec{p} \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(P^0)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 - \lambda m^2 + P^0 \dot{t} - gE(t)x \dot{t} - p_x \dot{x} - p_y \dot{y} - p_z \dot{z}] \right\} \quad (3.35)$$

on remarque que l'intégrale sur les chemins y, z, p_y, p_z est égale

$$\begin{aligned} k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) &= \int Dy Dz Dp_y Dp_z \exp \left\{ i \int_0^1 [-\lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 - p_y \dot{y} - p_z \dot{z}] d\tau \right\} \\ &= \int Dy Dz Dp_y Dp_z \exp \left\{ -i [(p_y(t_b)y_b - p_y(t_a)y_a) + (p_z(t_b)z_b - p_z(t_a)z_a) + \lambda(p_y^2 + p_z^2)] \right\} \delta(\dot{p}_y) \delta(\dot{p}_z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_y}{2\pi} \frac{d p_z}{2\pi} \exp \left\{ -i [p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) + \lambda(p_y^2 + p_z^2)] \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

revenons à (II) qui devient

$$(II) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \int Dx Dp_x DP^0 \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(P^0)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda m^2 + P^0 \dot{t} - gE(t)x \dot{t} - p_x \dot{x}] d\tau \right\} \quad (3.37)$$

Intégrons maintenant le terme $p_x \dot{x}$, on obtient

$$(II) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \int Dx Dp_x DP^0 \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(P^0)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda m^2 + P^0 \dot{t} + (\dot{p}_x - gE(t)\dot{t})x - i(p_x(t_b)x_b - p_x(t_a)x_a) d\tau] \right\} \quad (3.38)$$

ainsi l'intégrale sur le chemin x va donner

$$(II) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \int \mathcal{D}p_x \mathcal{D}P^0 \delta(\dot{p}_x - gE(t)\dot{t}) \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(P^0)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda m^2 + P^0 \dot{t}] d\tau - i(p_x(t_b)x_b - p_x(t_a)x_a) \right\} \quad (3.39)$$

où la fonction de distribution de Dirac δ implique que le chemin p_x vérifie

$$p_x(\tau) = p_x(t_a) + g \int_0^\tau ds E(t) \dot{t} \quad (3.40)$$

or

$$\int_0^\tau ds E(t) \dot{t} = \int_{t_a}^t dt \frac{dF}{dt} = F(t) - F(t_a), \quad (3.41)$$

Autrement,

$$p_x(\tau) = p_x(t_a) + gF(t). \quad (3.42)$$

Remplaçons maintenant ce $p_x(\tau)$ dans (II) et effectuons l'intégration sur les chemins P^0 et p_x , on trouve

$$(II) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{4\pi\lambda\Delta\tau} \right]^{\frac{N+1}{2}} \int \frac{dp_x}{2\pi} \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda m^2 - \lambda p_x^2 - 2\lambda g p_x F(t) - \lambda g^2 (F(t) - F(t_a))^2 \right] d\tau - ip_x(x_b - x_a) - igF(t_b)x_b \right\} \quad (3.43)$$

Remplaçons le résultat de (3.43) dans (3.32), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{(1)}(b, a) &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_i}{\delta \theta^n} \right\} \int \frac{dp_x}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \\ &\int \mathcal{D}t \left[\cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) - \theta^1 \theta^0 \sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda m^2 - \lambda p_x^2 - 2\lambda g p_x F(t) - \lambda g^2 (F(t) - F(t_a))^2 \right] d\tau - ip_x(x_b - x_a) - igF(t_b)x_b \right\} \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3.44)$$

A ce niveau, nous pouvons remplacer les constantes de Grassmann θ par des matrices $\tilde{\gamma}$ suivant l'identité

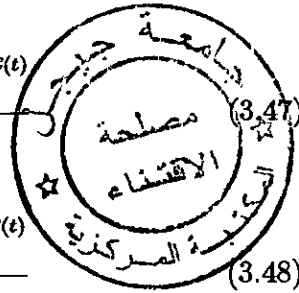
$$\begin{aligned} \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \theta^1 \theta^0 \Big|_{\theta=0} &= \frac{\delta}{\delta \xi^1} \frac{\delta}{\delta \xi^0} \exp(i \xi_n \tilde{\gamma}^n) \Big|_{\xi=0} \\ &= -\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

et par suite toutes les dérivées sont éliminées et le résultat devient

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{c(1)}(b, a) = & (-i) \int \frac{d\vec{p}_x}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \int \mathcal{D}t \left[\cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right. \\ & \left. + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[-\frac{t^2}{4\lambda} - \lambda m^2 - \lambda p_x^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\lambda g p_x (F(t) - F(t_a)) - \lambda g^2 (F(t) - F(t_a))^2 \right] d\tau - i p_x (x_b - x_a) \right. \\ & \left. - i g (F(t_b) - F(t_a)) x_b \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$\left[\cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right]$ est dit facteur de spin de Polyakov. Pour pouvoir encore

avancer dans les calculs, écrivons $\cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right)$ et $\sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right)$ sous forme exponentielle

$$\begin{aligned} \cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) &= \frac{e^{\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)} + e^{-\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)}}{2} \\ \sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) &= \frac{e^{\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)} - e^{-\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)}}{2} \end{aligned} \quad (3.47)$$


ce qui permet de réécrire la fonction de Green $\tilde{G}_\alpha^{c(1)}(b, a)$ en fonction de deux autres fonctions de Green : $G^{+(1)}(b, a)$ et $G^{-(1)}(b, a)$ suivant la formule

$$\tilde{G}_\alpha^{c(1)}(b, a) = (G_\alpha^{+(1)}(b, a) + G_\alpha^{-(1)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(1)}(b, a) - G_\alpha^{-(1)}(b, a)) \quad (3.49)$$

où les fonctions de Green $G_\alpha^s(b, a)$ ($s = \pm$) sont définies comme

$$\begin{aligned} G_\alpha^s(b, a) = & -\frac{i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda \vec{p}^2 - i g F(t_b) x_b \right\} \\ & \times \int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[-\frac{t^2}{4\lambda} - \lambda m^2 - 2\lambda g p_x F(t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda g^2 F^2(t) - i\lambda \alpha s g E(t) \right] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

le résultat de $\tilde{S}_\alpha^{(1)}(x_b, x_a)$ sera alors

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\alpha^{(1)}(b, a) &= (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m \tilde{\gamma}^5)_b^\alpha \tilde{G}_\alpha^{(1)}(b, a) \\
&= \left\{ i \tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i \vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^0 g E(t_b) x_b - m \gamma^5 \right\}^\alpha \tilde{G}_\alpha^{(1)}(b, a) \\
&= \left\{ i \tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i \vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^0 g E(t_b) x_b - m \gamma^5 \right\}^\alpha \\
&\quad \times \left[(G_\alpha^{+(1)}(b, a) + G_\alpha^{-(1)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(1)}(b, a) - G_\alpha^{-(1)}(b, a)) \right] \quad (3.51)
\end{aligned}$$

3.1.4 La jauge vectorielle

Revenons maintenant au calcul dans la jauge vectorielle $\mathcal{A}^{\mu(2)} = (0, -F(t), 0, 0)$. Introduisons encore le paramètre α ($\alpha = 0, 1$). La solution formelle est donnée par

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\alpha^{(2)} &= (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m \tilde{\gamma}^5)^\alpha \frac{1}{(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m \tilde{\gamma}^5)^2} = (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m \tilde{\gamma}^5)^\alpha \tilde{G}_\alpha^{(2)} \\
&= \left\{ \tilde{\gamma}^0 \hat{p}_b^0 - \tilde{\gamma}_x (\hat{p}_{xb} + g F(t_b)) - \tilde{\gamma}_y \hat{p}_{yb} - \tilde{\gamma}_z \hat{p}_{zb} - m \gamma^5 \right\}^\alpha \frac{1}{(\pi^2 - m^2 + i \alpha \frac{g}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu)} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

et on a toujours

$$\mathcal{F}_{01} = -\mathcal{F}_{10} = E(t), \text{ les autres termes sont nuls}$$

La forme intégrale de chemin pour $\tilde{G}_\alpha^{(2)}$ est la suivante

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_\alpha^{(2)}(b, a) &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_l}{\delta \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda Dx DP \int_{\Psi^n(0) + \Psi_n(1) = 0} D\Psi \\
&\quad \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda (\pi^2 - m^2 + 2i\alpha g \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) \right. \\
&\quad \left. + p\dot{x} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Intégrons là encore sur les variables de spin pour déduire le facteur de spin de Polyakov.

3.1.5 Intégration sur les variables du spin

Soit

$$\begin{aligned}
\text{(III)} &= \int_{\Psi^n(0) + \Psi_n(1) = 0} D\Psi \exp \left\{ \int_0^1 [\lambda 2i\alpha g \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu + \Psi_n \dot{\Psi}^n] d\tau \right. \\
&\quad \left. + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Comme ce terme ne dépend que du tenseur champ électromagnétique qui est un invariant de jauge, le calcul sera alors analogue au précédent. Le résultat est

$$(III) = \cos \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) - \theta^1 \theta^0 \sin \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \quad (3.55)$$

avec $\sigma = \alpha g \lambda$

On a donc à calculer

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{(2)}(b, a) &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_i}{\delta \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda D t D \vec{x} D p^0 D \vec{p} \left[\cos \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \theta^1 \theta^0 \sin \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda(\pi^2 - m^2 + p\dot{x})] d\tau \right\} \\ &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_i}{\delta \theta^n} \right\} \int_0^\infty d\lambda D t D \vec{x} D p^0 D \vec{p} \left[\cos \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \theta^1 \theta^0 \sin \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \exp \left\{ i \int_0^1 [\lambda((p^0)^2 - \lambda(p_x + gF(t))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 - \lambda m^2 + p^0 \dot{t} - \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}})] d\tau \right\} \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Passons maintenant au calcul des intégrations sur les coordonnées. Il est facile de remarquer que l'action est indépendante des coordonnées x ce qui permet alors leur intégration directe. Cependant n'oublions pas qu'à ce niveau le champ électrique est de forme quelconque.

3.1.6 Intégration sur les coordonnées

Soit

$$(IV) = \int D \vec{x} D p^0 D \vec{p} \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda((p^0)^2 - \lambda(p_x + gF(t))^2 - \lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda m^2 + p^0 \dot{t} - p_x \dot{x} - p_y \dot{y} - p_z \dot{z}) \right] d\tau \right\} \quad (3.57)$$

Remarquons que l'intégrale sur les chemins y, z, p_y, p_z est déjà calculée dans (3.36), on a donc

$$(IV) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \int D x D p^0 D p_x \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda(p^0)^2 - \lambda(p_x + gF(t))^2 - \lambda m^2 \right. \right. \\ \left. \left. + p^0 \dot{t} - p_x \dot{x} \right] d\tau \right\} \quad (3.58)$$

où $k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda)$ est donné par (3.36). L'intégrale sur le chemin p^0 donne

$$(IV) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{4\pi \Delta \tau \lambda} \right]^{\frac{N+1}{2}} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p_x \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda(p_x + gF(t))^2 - \lambda m^2 - p_x \dot{x} \right] d\tau \right\} \quad (3.59)$$

Intégrons le terme $p_x \dot{x}$ et ensuite effectuons l'intégrale sur le chemin x , il vient

$$(IV) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{4\pi \Delta \tau \lambda} \right]^{\frac{N+1}{2}} \int \mathcal{D}p_x \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda(p_x + gF(t))^2 \right] d\tau - i\lambda m^2 - i p_x x \Big|_a^b \right\} \delta(\dot{p}_x) \quad (3.60)$$

L'argument de la fonction de Dirac δ qui apparaît a pour rôle de sélectionner le chemin où l'impulsion est conservée. Par conséquent,

$$(IV) = k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{4\pi \Delta \tau \lambda} \right]^{\frac{N+1}{2}} \int \frac{dp_x}{2\pi} \exp \left\{ -ip_x(x_b - x_a) + i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda(p_x + gF(t))^2 - \lambda m^2 \right] d\tau \right\} \quad (3.61)$$

Remplaçons maintenant ce dernier résultat dans (3.56), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) &= (-i) \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta_l}{\delta \theta^n} \right\} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda \vec{p}^2 - i\lambda m^2 \right\} \\ &\int \mathcal{D}t \left\{ \left[\cos \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) - \theta^1 \theta^0 \sin \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \right. \\ &\left. \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda g^2 F^2(t) - 2\lambda g p_x F(t) \right] d\tau \right\} \right\} \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Remplaçons d'abord les constantes de Grassmann θ par des matrices $\tilde{\gamma}$ suivant l'identité

$$\begin{aligned} \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \theta^1 \theta^0 \Big|_{\theta=0} &= \frac{\delta}{\delta \xi^1} \frac{\delta}{\delta \xi^0} \exp(i \tilde{\gamma}^n \xi_n) \Big|_{\xi=0} \\ &= -\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

le résultat devient

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) &= (-i) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda \vec{p}^2 - i\lambda m^2 \right\} \\ &\int \mathcal{D}t \left[\cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \sinh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t) \right) \right] \\ &\exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda g^2 F^2(t) - 2\lambda g p_x F(t) \right] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Comme précédemment écrivons $\cosh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right)$ et $\sinh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right)$ sous forme exponentielle, ce qui permet là encore d'introduire les deux fonctions de Green : G_α^+ et G_α^- dans le résultat de \tilde{G}_α^c . On a alors

$$\tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) = (G_\alpha^{+(2)}(b, a) + G_\alpha^{-(2)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(2)}(b, a) - G_\alpha^{-(2)}(b, a)) \quad (3.65)$$

où $G_\alpha^{s(2)}(b, a)$ ($s = \pm$)

$$G_\alpha^{s(2)}(b, a) = \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp\{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2\} \\ \int \mathcal{D}t \exp\left\{i \int_0^1 \left[-\frac{t^2}{4\lambda} - \lambda g^2 F^2(t) + 2\lambda g p_x F(t) - i s \alpha \lambda g E(t)\right] d\tau\right\} \quad (3.66)$$

Le résultat final de $\tilde{S}_\alpha^{c(2)}(b, a)$ sera alors

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha^{c(2)}(b, a) &= \left(\hat{\eta} - m\gamma^5\right)_b^\alpha \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) \\ &= \left\{\tilde{\gamma}^0 p_0 - \tilde{\gamma}^1 (p_x + gF(t_b)) - \tilde{\gamma}^2 p_y - \tilde{\gamma}^3 p_z - m\gamma^5\right\}_b^\alpha \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) \\ &= \left\{i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} - \tilde{\gamma}^1 gF(t_b) - m\gamma^5\right\} \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a). \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.1.7 Les résultats du spin zéro

Les résultats du spin zéro se retrouvent à partir de ce qui précède en fixant $\alpha = 0$, ceci revient à poser

$$G_{\alpha=0}^+(b, a) = G_{\alpha=0}^-(b, a) = G_0(b, a) \quad (3.68)$$

On aura alors :

- Dans la jauge $\mathcal{A}^{\mu(1)} = (-E(t)x, \vec{0})$ (jauge scalaire)

$$\tilde{G}_{KG}^{c(1)}(b, a) = 2G_0^{(1)}(b, a) = (-i) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp\{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2\} \\ -igF(t_b)x_b\} \int \mathcal{D}t \exp\left\{i \int_0^1 d\tau \left[-\frac{t^2}{4\lambda} - 2\lambda g p_x F(t) - \lambda g^2 F^2(t)\right] d\tau\right\} \quad (3.69)$$

- Dans la jauge $\mathcal{A}^{\mu(2)} = (0, -F(t), 0, 0)$ (jauge vectorielle)

$$\tilde{G}_{KG}^{c(2)}(b, a) = 2G_0^{(2)}(b, a) = (-i) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp\{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2\} \\ \int \mathcal{D}t \exp\left\{i \int_0^1 \left[-\frac{t^2}{4\lambda} - 2\lambda g p_x F(t) - \lambda g^2 F^2(t)\right] d\tau\right\} \quad (3.70)$$

3.1.8 Transformation de jauge

Voyons maintenant le lien entre les deux résultats des jauges (1) et (2). Commençons d'abord par le cas du spin zéro.

Il est remarquable que les deux résultats sont reliés par la transformation de jauge suivante

$$\tilde{G}_{KG}^{\alpha(2)}(b, a) = \exp(-i\Omega(b)) \tilde{G}_{KG}^{\alpha(1)}(b, a) \exp(i\Omega(a)) \quad (3.71)$$

Pour le cas spin 1/2 on a de même $\tilde{S}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a)$

$$\tilde{S}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) = \exp(-i\Omega(b)) \tilde{S}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) \exp(i\Omega(a)) \quad (3.72)$$

En effet, évidemment on a la relation de jauge suivante

$$G_\alpha^{s(2)}(b, a) = \exp(-i\Omega(b)) G_\alpha^{s(1)}(b, a) \exp(i\Omega(a)) \quad (3.73)$$

qui donne directement la formule suivante

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^1 gF(t_b) - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) \\ &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} - \tilde{\gamma}^1 gF(t_b) - m\gamma^5 \right\} \left[\exp(-ig\Omega(b)) G_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) \exp(ig\Omega(a)) \right] \\ &= \exp(-ig\Omega(b)) \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^0 gE(t_b) x_b - m\gamma^5 \right\} \\ &\quad \times \tilde{G}_\alpha^{\alpha(1)}(x_b, x_a, T) \exp(ig\Omega(a)) \\ &= \exp(-i\Omega(b)) \tilde{S}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) \exp(i\Omega(a)) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ces formules assurent le lien entre les deux jauges et nous donnent alors la liberté de travailler dans la moins pénible.

Dans ce qui suit nous allons choisir la jauge vectorielle (2). Nous allons illustrer la méthode de calcul dans le cas d'un champ constant qui admet une solution explicite.

3.1.9 Illustration : $E(t) = E_0 = \text{constante}$

Dans ce cas, on a $F(t) = E_0(t - t_a)$ et on veut évaluer la fonction de Green suivante. Le résultat final de $\tilde{S}_\alpha^{c(2)}(b, a)$ sera alors

$$\begin{aligned}\tilde{S}_\alpha^{c(2)}(b, a) &= \left(\hat{\eta} - m\gamma^5\right)_b^\alpha \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) \\ &= \left\{ \tilde{\gamma}^0 p_0 - \tilde{\gamma}^1 (p_x^1 + gF(t_b)) - \tilde{\gamma}^2 p_y - \tilde{\gamma}^3 p_z - m\gamma^5 \right\}_b^\alpha \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) \\ &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} - \tilde{\gamma}^1 gE_0(t_b - t_a) - m\gamma^5 \right\}^\alpha \tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a).\end{aligned}\quad (3.75)$$

avec

$$\tilde{G}_\alpha^{c(2)}(b, a) = (G_\alpha^{+(2)}(b, a) + G_\alpha^{-(2)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(2)}(b, a) - G_\alpha^{-(2)}(b, a)) \quad (3.76)$$

Le calcul se résume alors à l'évaluation des fonctions de Green suivantes

$$\begin{aligned}G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda \vec{p}^2 - i\lambda m^2 \right\} \\ &\quad \int D\tau \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{t^2}{4\lambda} - \lambda g^2 E_0^2 (t - t_a)^2 - 2\lambda g p_x E_0 (t - t_a) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i s \alpha \lambda g E_0 \right] d\tau \right\}\end{aligned}\quad (3.77)$$

Introduisons le changement suivant

$$\begin{cases} t - t_a \rightarrow t \\ \tau \rightarrow \lambda\tau \end{cases} \quad (3.78)$$

on aura

$$\begin{aligned}G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda \vec{p}^2 - i\lambda m^2 + s\alpha \lambda g E_0 \right\} \\ &\quad \int D\tau \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[-\frac{t^2}{4} - g^2 E_0^2 t^2 - 2g p_x E_0 t \right] d\tau \right\}\end{aligned}\quad (3.79)$$

Reste alors à évaluer le propagateur de Feynman suivant

$$\int D\tau \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[-\frac{t^2}{4} - g^2 E_0^2 t^2 - 2g p_x E_0 t \right] d\tau \right\} \quad (3.80)$$

qui n'est rien d'autre que celui d'un oscillateur à fréquence imaginaire soumis à une force extérieure et dont le résultat est bien connu

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{igE_0}{2\pi \sinh(2\lambda gE_0)}} \exp \left\{ -\frac{igE_0}{2 \sinh(2\lambda gE_0)} \right. \\ &\times \left. \left[\left(t_a + \frac{p_x}{gE_0} \right)^2 + \left(t_b + \frac{p_x}{gE_0} \right)^2 \right] \cosh(2\lambda gE_0) - 2 \left(t_a + \frac{p_x}{gE_0} \right) \left(t_b + \frac{p_x}{gE_0} \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.81)$$

Cette dernière expression peut être réécrite comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{1-t^2}{1+t^2} (x^2 + y^2) + i \frac{xy}{1-t^2} \right\} \quad (3.82)$$

avec les paramètres suivants

$$\begin{cases} \zeta = ie^{-2gE_0\lambda} \\ x = \sqrt{-2igE_0} \left(t_a + \frac{p_x}{gE_0} \right) \\ y = \sqrt{-2igE_0} \left(t_b + \frac{p_x}{gE_0} \right) \end{cases} \quad (3.83)$$

et qui peut se décomposer comme suit (formule de Mehler) [32]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{1-t^2}{1+t^2} (x^2 + y^2) + i \frac{xy}{1-t^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\nu}{\sin(-\pi\nu)} \zeta^{-\nu-1} \left[D_\nu(x) D_{-\nu-1}(iy) \right. \\ & \quad \left. + D_\nu(-x) D_{-\nu-1}(-iy) \right] \end{aligned} \quad (3.84)$$

où les D_ν sont les fonctions cylindriques paraboliques.

Remplaçons ce résultat dans (3.79)

$$\begin{aligned} G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \left(\frac{-i}{2} \right) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda(\vec{p}^2 - p_x^2) - i\lambda m^2 + s\alpha\lambda gE_0 \right\} \\ & \quad \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{gE_0}{2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\nu}{\sin(-\pi\nu)} (i)^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{2gE_0(\nu+\frac{1}{2})\lambda} \\ & \quad \left[D_\nu \left(\sqrt{-2igE_0} \left(t_a + \frac{p_x}{gE_0} \right) \right) D_{-\nu-1} \left(i \sqrt{-2igE_0} \left(t_b + \frac{p_x}{gE_0} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + D_\nu \left(-\sqrt{-2igE_0} \left(t_a + \frac{p_x}{gE_0} \right) \right) D_{-\nu-1} \left(-i \sqrt{-2igE_0} \left(t_b + \frac{p_x}{gE_0} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

et effectuons l'intégrale sur λ et ν

$$\begin{aligned} G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= -\sqrt{\frac{gE_0}{32\pi^2}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \\ & \quad \times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\nu}{\sin(-\pi\nu)} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})}}{i(m^2 + p_y^2 + p_z^2 + i\alpha s g E + 2igE_0(\nu + \frac{1}{2}))} \\ & \quad \times \left[D_\nu \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} \left(t_a + \frac{p_x}{eE_0} \right) \right) D_{-\nu-1} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2eE_0} \left(t_b + \frac{p_x}{eE_0} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + D_\nu \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} \left(t_a + \frac{p_x}{eE} \right) \right) D_{-\nu-1} \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2eE_0} \left(t_b + \frac{p_x}{eE_0} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

L'intégrale sur ν peut être effectuée en appliquant le théorème de résidu, par conséquent on obtient

$$G_{\alpha}^{\alpha(2)}(b, a) = \frac{i}{2\sqrt{2gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(s\alpha - i\tilde{\lambda})}}{1 + e^{-i\pi(s\alpha - i\tilde{\lambda})}} \left[D_{\gamma}(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) + D_{\gamma}(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gf})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gf})) \right] \quad (3.87)$$

où

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}(1 + s\alpha - i\tilde{\lambda}) \\ \tilde{\lambda} = \frac{m^2 + p_y^2 + p_z^2}{gE_0} \end{cases} \quad (3.88)$$

Pour le cas spin zéro [14] la fonction de Green est la suivante

$$\tilde{G}_{KG}^{\alpha(2)}(b, a) = 2G_0^{\alpha(2)}(b, a) = \frac{i}{\sqrt{2gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 + e^{-\pi\tilde{\lambda}}} \left[D_{\gamma}(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) + D_{\gamma}(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gf})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gf})) \right] \quad (3.89)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}(1 - i\tilde{\lambda}) \\ \tilde{\lambda} = \frac{m^2 + p_y^2 + p_z^2}{gE_0} \end{cases} \quad (3.90)$$

Passons maintenant au cas du spin 1/2. On a

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha=1}^{\alpha(2)}(b, a) &= (\hat{\eta} - m\gamma^5)_b \tilde{G}_{\alpha=1}^{\alpha(2)}(b, a) \\ &= \{ \tilde{\gamma}^0 p_0 - \tilde{\gamma}^1 (p_x^1 + gF(t_b)) - \tilde{\gamma}^2 p_y - \tilde{\gamma}^3 p_z - m\gamma^5 \}_b \tilde{G}_{\alpha=1}^{\alpha(2)}(b, a) \\ &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} - \tilde{\gamma}^1 gF(t_b) - m\gamma^5 \right\}_b^{\alpha} \tilde{G}_{\alpha=1}^{\alpha(2)}(b, a). \end{aligned} \quad (3.91)$$

avec

$$\tilde{G}_{\alpha=1}^{\alpha(2)}(b, a) = \left(G_{\alpha=1}^{+(2)}(b, a) + G_{\alpha=1}^{-(2)}(b, a) \right) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_{\alpha=1}^{+(2)}(b, a) - G_{\alpha=1}^{-(2)}(b, a)) \quad (3.92)$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
(G_{\alpha=1}^{+(2)}(b, a) + G_{\alpha=1}^{-(2)}(b, a)) &= \frac{i}{2\sqrt{gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\lambda}}{1 - e^{-\pi\lambda}} \\
&\left[D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a - \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b - \frac{p_x}{gE_0})) \right] \quad (3.93)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(G_{\alpha=1}^{+(2)}(b, a) - G_{\alpha=1}^{-(2)}(b, a)) &= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\lambda}}{1 - e^{-\pi\lambda}} \\
&\left[D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a - \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b - \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a - \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b - \frac{p_x}{gE_0})) \right] \quad (3.94)
\end{aligned}$$

Puis finalement

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{\alpha=1}^{c(2)}(b, a) &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} - \tilde{\gamma}^1 gE_0(t_b - t_a) - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}_{\alpha=1}^{c(2)}(b, a) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\lambda}}{1 - e^{-\pi\lambda}} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} - \tilde{\gamma}^1 gE_0(t_b - t_a) - m\gamma^5 \right\} \\
&\left[[i1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \left[D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a - \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b - \frac{p_x}{gE_0})) \right. \right. \\
&\left. \left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a - \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b - \frac{p_x}{gE_0})) \right] \right] \quad (3.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{\alpha=1}^{c(2)}(b, a) &= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\lambda}}{1 - e^{-\pi\lambda}} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \left[[-\tilde{\gamma}^0 + i\tilde{\gamma}^1] \right. \\
&\left[D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) \frac{\partial}{\partial t_b} D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) \frac{\partial}{\partial t_b} D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right] \\
&+ \left[[i\vec{\tilde{\gamma}} - \vec{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] \vec{p} - gE_0(t_b - t_a) [i\tilde{\gamma}^1 + \tilde{\gamma}^0] - m [i\gamma^5 - \gamma^5 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] \right] \\
&\left[D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right] \left. \right] \quad (3.96)
\end{aligned}$$

et appliquons la relations de dérivée [15]

$$\frac{d}{dz} D_\gamma(z) = \frac{1}{2} z D_\gamma(z) - D_{\gamma+1}(z) \quad (3.97)$$

il vient

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha=1}^{\alpha(2)}(b, a) &= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\lambda}}{1 - e^{-\pi\lambda}} e^{-i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)} \left\{ [-\tilde{\gamma}^0 + i\tilde{\gamma}^1] \right. \\ &\times \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\ &\times \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{gE_0}{2}} (t_b + \frac{p_x}{gE_0}) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\ &\left. \left. - D_{-\gamma}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right] + e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\ &\times \left[e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{gE_0}{2}} (t_b + \frac{p_x}{gE_0}) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\ &\left. \left. - D_{-\gamma}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right] \right] \\ &+ [[i\tilde{\gamma}^1 + \tilde{\gamma}^0] p_x + [i\tilde{\gamma}^2 - \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] p_y + [i\tilde{\gamma}^3 - \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] p_z - gE_0(t_b - t_a) [i\tilde{\gamma}^1 + \tilde{\gamma}^0] \\ &- m [i\tilde{\gamma}^5 - \tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0]] \left[D_\gamma(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right. \\ &\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_a + \frac{p_x}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(t_b + \frac{p_x}{gE_0})) \right] \left. \right\} \quad (3.98) \end{aligned}$$

Comme le champ électrique est constant, on pourrait retrouver le même résultat en inversant les intégration sur le temps et l'espace sauf que dans ce cas il faudrait utiliser la jauge scalaire. On obtient alors une autre expression de la fonction de Green, bien sûr les deux expressions sont équivalentes puisqu'elles sont deux représentations intégrales d'une même fonction reliées par une transformation de jauge.

En effet, soit

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) &= (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m \tilde{\gamma}^5)_b^\alpha \tilde{G}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) \\ &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^0 gE(t_b) x_b - m\tilde{\gamma}^5 \right\}^\alpha \tilde{G}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a). \quad (3.99) \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{G}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) = (G_\alpha^{+(1)}(b, a) + G_\alpha^{-(1)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(1)}(b, a) - G_\alpha^{-(1)}(b, a))$$

Dans ce cas aussi le calcul se résume alors à l'évaluation des fonctions de Green suivantes ($s = \pm$)

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \left(\frac{-i}{2}\right) \int_0^{\infty} d\lambda D t D \vec{x} D p^0 D \vec{p} \exp \left\{ i \int_0^1 \left\{ \lambda \left((p_0 + g E_0 x)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda p_y^2 - \lambda p_z^2 - \lambda m^2 + p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x} \right) \right\} d\tau + s \alpha \lambda g E_0 \right\} \quad (3.100)$$

L'intégrale sur les chemins y, z, p_y, p_z est déjà calculée dans (3.36), on a donc

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \left(\frac{-i}{2}\right) \int_0^{\infty} d\lambda k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \int D t D x D p^0 D p_x \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left((p_0 + g E_0 x)^2 - \lambda p_x^2 - \lambda m^2 + p^0 t - p_x \dot{x} \right) \right] d\tau + s \alpha \lambda g E_0 \right\} \quad (3.101)$$

où $k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda)$ est donné par (3.36).

Introduisons le changement suivant

$$\tilde{\tau} = \lambda \tau \quad (3.102)$$

on aura

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \left(\frac{-i}{2}\right) \int_0^{\infty} d\lambda k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \exp \left\{ -i \lambda (m^2 - i s \alpha g E_0) \right\} \int D t D x D p^0 D p_x \times \exp \left\{ i \int_0^{\lambda} \left[(p_0 + g E_0 x)^2 - p_x^2 + p^0 t - p_x \dot{x} \right] d\tilde{\tau} \right\} \quad (3.103)$$

Intégrons le terme $p^0 t$ et effectuons ensuite l'intégrale sur le chemin t , il vient

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \left(\frac{-i}{2}\right) \int_0^{\infty} d\lambda k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \exp \left\{ -i \lambda (m^2 - i s \alpha g E_0) \right\} \int D x D p^0 D p_x \delta(\dot{p}^0) \times \exp \left\{ i \int_0^{\lambda} \left[(p_0 + g E_0 x)^2 - p_x^2 - p_x \dot{x} \right] d\tilde{\tau} + i (p_b^0 t_b - p_a^0 t_a) \right\} \quad (3.104)$$

La présence de δ simplifie le calcul sur le chemin p^0 de manière à donner

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \left(\frac{-i}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d p^0}{2\pi} \int_0^{\infty} d\lambda k(y_b, z_b, y_a, z_a; \lambda) \exp \left\{ -i \lambda (m^2 - i s \alpha g E_0) + i p^0 (t_b - t_a) \right\} \times \int D x D p_x \exp \left\{ i \int_0^{\lambda} \left[(p_0 + g E_0 x)^2 - p_x^2 - p_x \dot{x} \right] d\tilde{\tau} \right\} \quad (3.105)$$

L'intégration sur le chemin p_x permet de retrouver le résultat suivant

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \left(\frac{-i}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d p^0}{2\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_y}{2\pi} \frac{d p_z}{2\pi} \exp \left\{ -i \lambda (m^2 + p_y^2 + p_z^2 - i s \alpha g E_0) - i [p_y (y_b - y_a) + p_z (z_b - z_a) - p^0 (t_b - t_a)] \right\} \times \int D x \exp \left\{ i \int_0^{\lambda} \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + (g E_0)^2 \left(x + \frac{p_0}{g E_0} \right)^2 \right] d\tilde{\tau} \right\} \quad (3.106)$$

Reste alors à évaluer le propagateur de Feynman suivant

$$\int \mathcal{D}x \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + (gE_0)^2 \left(x + \frac{p_0}{gE_0} \right)^2 \right] d\tau \right\}$$

qui n'est rien d'autre que celui d'un oscillateur à fréquence imaginaire soumis à une force extérieure et dont le résultat est bien connu

$$\sqrt{\frac{-igE_0}{2\pi \sinh(2\lambda gE_0)}} \exp \left\{ \frac{igE_0}{2 \sinh(2\lambda gE_0)} \left[\left(x_a + \frac{p_0}{gE_0} \right)^2 + \left(x_b + \frac{p_0}{gE_0} \right)^2 \right] \cosh(2\lambda gE_0) - 2 \left(x_a + \frac{p_0}{gE_0} \right) \left(x_b + \frac{p_0}{gE_0} \right) \right\} \quad (3.107)$$

Cette dernière expression peut être réécrite comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{1-t^2}{1+t^2} (x^2 + y^2) + i \frac{xyt}{1-t^2} \right\}$$

avec les paramètres suivants

$$\begin{cases} \zeta = ie^{-2gE_0\lambda} \\ x = \sqrt{2igE_0} \left(x_a + \frac{p_0}{gE_0} \right) \\ y = \sqrt{2igE_0} \left(x_b + \frac{p_0}{gE_0} \right) \end{cases} \quad (3.108)$$

et qui peut se décomposer comme suit (formule de Mehler)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{1-t^2}{1+t^2} (x^2 + y^2) + i \frac{xyt}{1-t^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\nu}{\sin(-\pi\nu)} \zeta^{-\nu-1} \left[D_\nu(x) D_{-\nu-1}(iy) \right. \\ & \quad \left. + D_\nu(-x) D_{-\nu-1}(-iy) \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

où les D_ν sont les fonctions cylindriques paraboliques.

Remplaçons ce résultat dans (3.106), on aura

$$\begin{aligned} G_\alpha^{s(1)}(b, a) &= \left(\frac{-i}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\lambda(m^2 + p_y^2 + p_z^2 + i\alpha gE_0) \right. \\ & \quad \left. - i \left[p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) - p^0(t_b - t_a) \right] \right\} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\pi i} \sqrt{\frac{gE_0}{2}} \\ & \quad \times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\nu}{\sin(-\pi\nu)} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})} e^{2\lambda gE_0(\nu+1)} \\ & \quad \times \left[D_\nu \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} \left(x_a + \frac{p_0}{gE_0} \right) \right) D_{-\nu-1} \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} \left(x_b + \frac{p_0}{gE_0} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + D_\nu \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} \left(x_a + \frac{p_0}{gE_0} \right) \right) D_{-\nu-1} \left(e^{i\frac{7\pi}{4}} \sqrt{2gE_0} \left(x_b + \frac{p_0}{gE_0} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.110)$$

et effectuons l'intégrale sur λ

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = (-i) \sqrt{\frac{gE_0}{32\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y dp_z}{2\pi} e^{-i[p_y(y_b-y_a)+p_z(z_b-z_a)-p^0(t_b-t_a)]} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{\sin(-\pi\nu) i(m^2 + p_y^2 + p_z^2 + i\alpha g E_0 + i2g E_0(\nu + 1))} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2})} \\ \times \left[D_{\nu}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\nu-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\ \left. + D_{\nu}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\nu-1}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right]$$

L'intégrale sur ν peut être effectuée en appliquant le théorème de résidu, par conséquent on obtient

$$G_{\alpha}^{s(1)}(b, a) = \frac{-1}{2\sqrt{2gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y dp_z}{2\pi} e^{-i[p_y(y_b-y_a)+p_z(z_b-z_a)-p^0(t_b-t_a)]} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(s\alpha - i\tilde{\lambda})}}{1 + e^{-i\pi(s\alpha - i\tilde{\lambda})}} \\ \times \left[D_{\gamma}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\ \left. + D_{\gamma}(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right]$$

où

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}(1 + \alpha s - \tilde{\lambda}) \\ \tilde{\lambda} = \frac{m^2 + p_y^2 + p_z^2}{gE_0} \end{cases} \quad (3.111)$$

Pour le cas spin zéro la fonction de Green est la suivante

$$\tilde{G}_{KG}^{\alpha(1)}(b, a) = 2G_0^{(1)}(b, a) \\ = \frac{-1}{\sqrt{2gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y dp_z}{2\pi} e^{-i[p_y(y_b-y_a)+p_z(z_b-z_a)-p^0(t_b-t_a)]} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 + e^{-i\pi\tilde{\lambda}}} \\ \times \left[D_{\gamma}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\ \left. + D_{\gamma}(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right] \quad (3.112)$$

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}(1 - \tilde{\lambda}) \\ \tilde{\lambda} = \frac{m^2 + p_y^2 + p_z^2}{gE_0} \end{cases} \quad (3.113)$$

Passons maintenant au cas du spin 1/2. On a

$$\tilde{S}_{\alpha=1}^{\alpha(1)}(b, a) = \left(\hat{\eta} - m\gamma^5 \right)_b^{\alpha=1} \tilde{G}_{\alpha=1}^{\alpha(1)}(b, a) \\ = \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^0 gE(t_b) x_b - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}_{\alpha=1}^{\alpha(1)}(b, a) \quad (3.114)$$

avec

$$\tilde{G}_\alpha^{c(1)}(b, a) = (G_\alpha^{+(1)}(b, a) + G_\alpha^{-(1)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(1)}(b, a) - G_\alpha^{-(1)}(b, a))$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} G_\alpha^{+(1)}(b, a) + G_\alpha^{-(1)}(b, a) &= \frac{-1}{2\sqrt{gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} e^{-i[p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) - p^0(t_b - t_a)]} \\ &\times \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 - e^{-\pi\tilde{\lambda}}} \left[D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\ &\times D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \\ &\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right] \end{aligned} \quad (3.115)$$

et

$$\begin{aligned} G_\alpha^{+(1)}(b, a) - G_\alpha^{-(1)}(b, a) &= \frac{i}{2\sqrt{gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} e^{-i[p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) - p^0(t_b - t_a)]} \\ &\times \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 - e^{-\pi\tilde{\lambda}}} \left[D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\ &\times D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \\ &\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

Puis finalement

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\alpha^{(1)}(b, a) &= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 - e^{-\pi\tilde{\lambda}}} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^0 gE(t_b) x_b - m\gamma^5 \right\} \\
&\times [-1 + i\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] e^{-i[p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) - p^0(t_b - t_a)]} \left[D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\
&\times D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 - e^{-\pi\tilde{\lambda}}} e^{-i[p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) - p^0(t_b - t_a)]} \\
&\left\{ (ip_0 [-i\tilde{\gamma}^0 + \tilde{\gamma}^1] + p_y [-\tilde{\gamma}^2 + i\tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] + p_z [-\tilde{\gamma}^3 + i\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0]) \right. \\
&\times \left[D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right] \\
&+ i [-\tilde{\gamma}^1 - i\tilde{\gamma}^0] \\
&\left[D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) \frac{\partial}{\partial x_b} D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right. \\
&\left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{eE_0})) \frac{\partial}{\partial x_b} D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{eE_0})) \right] \left. \right\} \quad (3.117)
\end{aligned}$$

et appliquons la relations de dérivée

$$\frac{d}{dz} D_\gamma(z) = \frac{1}{2} z D_\gamma(z) - D_{\gamma+1}(z) \quad (3.118)$$

il vient

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) &= \frac{1}{2\sqrt{gE_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\tilde{\lambda}}}{1 - e^{-\pi\tilde{\lambda}}} e^{-i[p_y(y_b - y_a) + p_z(z_b - z_a) - p^0(t_b - t_a)]} \\
&\quad \left\{ (ip_0 [-i\tilde{\gamma}^0 + \tilde{\gamma}^1] + p_y [-\tilde{\gamma}^2 + i\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^0] + p_z [-\tilde{\gamma}^3 + i\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^0]) \right. \\
&\quad \times \left[D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{gE_0})) \right. \\
&\quad \left. + D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{gE_0})) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{gE_0})) \right] \\
&\quad + i[-\tilde{\gamma}^1 - i\tilde{\gamma}^0] \left[e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0} D_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{gE_0})) \right. \\
&\quad \times \left[e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\frac{gE_0}{2}}(x_b + \frac{p_0}{gE_0}) D_{-\gamma-1}(e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{gE_0})) \right. \\
&\quad \left. \left. - D_{-\gamma}(e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{gE_0})) \right] + e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0} D_\gamma(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_a + \frac{p_0}{gE_0})) \right. \\
&\quad \times \left[e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{gE_0}{2}}(x_b + \frac{p_0}{gE_0}) D_{-\gamma-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{gE_0})) \right. \\
&\quad \left. \left. - D_{-\gamma}(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2gE_0}(x_b + \frac{p_0}{gE_0})) \right] \right] \left. \right\} \quad (3.119)
\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de montrer que ces deux résultats ((3.89) – (3.112)) pour spin zéro et ((3.98) – (3.119)) pour spin 1/2 sont reliés par la transformation de jauge suivante

$$\tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) = \exp(-i\Omega(b)) \tilde{G}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) \exp(i\Omega(a))$$

$$\tilde{S}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) = \exp(-i\Omega(b)) \tilde{S}_\alpha^{\alpha(1)}(b, a) \exp(i\Omega(a))$$

avec $\Omega(\vec{x}, t) = E_0(t - t_a)x$

Chapitre 4

Applications

Nous allons maintenant considérer le calcul de la fonction de Green (spin 0 et 1/2) dans le cas d'un champ variable. Pour plus de simplicité, nous choisirons un champ en forme de pic d'une impulsion de Dirac [16]. Le calcul sera fait dans la jauge vectorielle.

4.1 Première application $E(t) = E_0\delta(\omega t)$

Soit un potentiel de la forme \mathcal{A}_μ

$$\mathcal{A}_\mu = (0, -\frac{E_0}{\omega}\theta(\omega t), 0, 0), F(t) = \frac{E_0}{\omega}\theta(\omega t) \quad (4.1)$$

créant un champ électrique de la forme

$$\vec{E}(t) = (E_0\delta(\omega t), 0, 0)$$

Dans notre cas les instants, initial et final où intervient l'interaction, sont choisis comme suit $t_a \ll 0$ et $t_b \gg 0$.

Partons de l'expression

$$\tilde{G}_\alpha^{(2)}(b, a) = (G_\alpha^{+(2)}(b, a) + G_\alpha^{-(2)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(2)}(b, a) - G_\alpha^{(2)-}(b, a)) \quad (4.2)$$

où $G_\alpha^{s(2)}$ est donné par ($s = \pm$)

$$\begin{aligned}
 G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2 \right\} \\
 &\quad \times \int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \theta(\omega t) + 2\lambda g p_x \frac{E_0}{\omega} \theta(\omega t) - i\alpha\lambda g E_0 \delta(\omega t) \right] d\tau \right\} \\
 &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2 \right\} \\
 &\quad \times \int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} + \lambda g \frac{E_0}{\omega} (2p_x - g \frac{E_0}{\omega}) \theta(\omega t) - i\alpha\lambda g E_0 \delta(\omega t) \right] d\tau \right\} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Changeons λ par $-\lambda$ pour absorber le signe ($-$) dans la partie cinétique, on obtient

$$\begin{aligned}
 G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) + i\lambda\vec{p}^2 + i\lambda m^2 \right\} \\
 &\quad \int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} + \lambda g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \theta(\omega t) - 2\lambda g p_x \frac{E_0}{\omega} \theta(\omega t) + i\alpha\lambda g E_0 \delta(\omega t) \right] d\tau \right\} \\
 &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) + i\lambda\vec{p}^2 + i\lambda m^2 \right\} \\
 &\quad \int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda g \frac{E_0}{\omega} (2p_x - g \frac{E_0}{\omega}) \theta(\omega t) + i\alpha\lambda g E_0 \delta(\omega t) \right] d\tau \right\} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Effectuons le changement suivant

$$\tau \rightarrow \lambda\tau$$

on aura alors

$$\begin{aligned}
 G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) + i\lambda\vec{p}^2 + i\lambda m^2 \right\} \\
 &\quad \int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\frac{\dot{t}^2}{4} + g E_0 \left(g \frac{E_0}{\omega} - 2p_x \right) \theta(\omega t) + i\alpha g E_0 \delta(\omega t) \right] d\tau \right\} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

L'expression suivante

$$\int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\frac{\dot{t}^2}{4} - g \frac{E_0}{\omega} \left(g \frac{E_0}{\omega} - 2p_x \right) \theta(\omega t) + i\alpha g E_0 \delta(\omega t) \right] d\tau \right\}$$

est une intégrale de chemin de Feynman pour un problème de type Schrodinger avec masse égale à 1/2 en présence d'un potentiel scalaire $V_0\theta(\omega t) = g \frac{E_0}{\omega} (2p_x - g \frac{E_0}{\omega}) \theta(\omega t)$ en plus d'une perturbation $W = i\alpha g E_0 \delta(\omega t)$. La perturbation [17] étant de forme delta de Dirac, il serait

mieux de résoudre ce problème en adoptant la méthode des perturbations comme technique de calcul. Nous avons

$$\int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^\lambda [L_0 \pm W] d\tau \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\dot{t}^2}{4} - V_0\theta(\omega t), \quad V_0 = g \frac{E_0}{\omega} (2p_x - g \frac{E_0}{\omega}) \\ W &= i\alpha g E_0 \delta(\omega t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

qui admet la solution formelle suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm i)^n (K_0 W)^n \quad (4.7)$$

K_0 étant le propagateur de Feynman suivant

$$\int \mathcal{D}t \exp \left\{ i \int_0^\lambda L_0 d\tau \right\}$$

4.1.1 Méthode des perturbations

Développons \tilde{G}^+ et \tilde{G}^- en une série de perturbation nous aurons

$$\begin{aligned} \tilde{G}^+ &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b - x_a)} \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{-i\lambda(\vec{p}^2 + m^2)} \left\{ K(t_b, t_a, \lambda) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha g E_0)^n \int_0^\lambda ds_n \int_0^{s_n} \dots \int_0^{s_2} ds_1 \prod_{J=1}^N dt_J K(t_a, t_1) \delta(\omega t_1) K(t_1, t_2) \delta(\omega t_2) \\ &\left. \dots \delta(\omega t_n) K(t_b, t_a) \right\}. \quad 0 < s_1 < s_2 \dots < \lambda, \end{aligned} \quad (4.8)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{G}^- &= \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b - x_a)} \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{-i\lambda(\vec{p}^2 + m^2)} \left\{ K(t_b, t_a, \lambda) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha g E_0)^n \int_0^\lambda ds_n \int_0^{s_n} \dots \int_0^{s_2} ds_1 \prod_{J=1}^N dt_J K(t_a, t_1) \delta(\omega t_1) K(t_1, t_2) \delta(\omega t_2) \\ &\left. \dots \delta(\omega t_n) K(t_b, t_a) \right\}. \quad 0 < s_1 < s_2 \dots < \lambda, \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec

$$K(t_b, t_a, \lambda) = \int \mathcal{D}t \exp \left[i \int_0^\lambda \left(\frac{\dot{t}^2}{4} - V_0\theta(\omega t) \right) d\tilde{\tau} \right]. \quad (4.10)$$

D'autre part, on remarque que

$$i \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{i\lambda(\vec{p}^2+m^2)} K(t_b, t_a, \lambda) = g^{KG}(t_b, t_a, \mathcal{E}) \quad (4.11)$$

$g^{Sch}(t_b, t_a, \vec{p})$ étant la fonction de Green dépendante de l'énergie $\mathcal{E} = \vec{p}^2 + m^2$ pour le potentiel step dont le résultat est bien connu qui se calcule par exemple par la méthode combinatoire [18]. Elle est donnée par

$$g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) = \frac{i}{2k} b(k) \exp[-i(\mu t_b - k t_a)], \quad (4.12)$$

avec

$$k = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad k_0 = \sqrt{g \frac{E_0}{\omega} (2p_x - g \frac{E_0}{\omega})}, \quad (4.13)$$

et

$$\begin{cases} b(k) = \frac{2k}{k + \mu} \\ \mu = \sqrt{(p_x - g \frac{E_0}{\omega})^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} \end{cases} \quad (4.14)$$

Par conséquent le calcul de $\tilde{G}^{\pm(2)}$ se réduit à

$$\begin{aligned} \tilde{G}^+ &= \frac{-1}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b - x_a)} \left\{ g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) \right. \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha g E_0)^n \int \prod_{J=1}^N dt_j g^{Sch}(t_b, t_1, \mathcal{E}) \delta(\omega t_1) g^{Sch}(t_1, t_2, \mathcal{E}) \delta(\omega t_2) \\ &\quad \left. \dots \delta(\omega t_n) g^{Sch}(t_n, t_a, \mathcal{E}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{G}^- &= \frac{-1}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b - x_a)} \left\{ g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha g E_0)^n \int \prod_{J=1}^n dt_j g^{Sch}(t_b, t_1, \mathcal{E}) \delta(\omega t_1) g^{Sch}(t_1, t_2, \mathcal{E}) \delta(\omega t_2) \\ &\quad \left. \dots \delta(\omega t_n) g^{Sch}(t_n, t_a, \mathcal{E}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cette expression se calcule suivant la méthode des perturbations [19], et le résultat est

$$\tilde{G}^+ = \frac{-1}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b - x_a)} \left\{ g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) - (\alpha g E_0) \frac{g^{Sch}(t_b, 0, \mathcal{E}) g^{Sch}(0, t_a, \mathcal{E})}{1 + \alpha g E_0 g^{Sch}(0, 0, \mathcal{E})} \right\}. \quad (4.17)$$

De la même manière, \tilde{G}^- est donnée par

$$\tilde{G}^- = \frac{-1}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b-x_a)} \left\{ g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) + (\alpha g E_0) \frac{g^{Sch}(t_b, 0, \mathcal{E}) g^{Sch}(0, t_a, \mathcal{E})}{1 - \alpha g E_0 g^{Sch}(0, 0, \mathcal{E})} \right\}. \quad (4.18)$$

Remplaçons ces résultats dans l'expression (4.2), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) &= (-1) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b-x_a)} \left\{ g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) \right. \\ &\quad + (\alpha g E_0)^2 \frac{g^{Sch}(t_b, 0, \mathcal{E}) g^{Sch}(0, 0, \mathcal{E}) g^{Sch}(0, t_a, \mathcal{E})}{1 - (\alpha g E_0 g^{Sch}(0, 0, \mathcal{E}))^2} \\ &\quad \left. + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (\alpha g E_0) \frac{g^{Sch}(t_b, 0, \mathcal{E}) g^{Sch}(0, t_a, \mathcal{E})}{1 - (\alpha g E_0 g^{Sch}(0, 0, \mathcal{E}))^2} \right\} \\ &= (-1) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b-x_a)} g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) \\ &\quad \times \left(\frac{(2k)^2}{(2k)^2 + (\alpha g E_0)^2 b^2(k)} + i \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \frac{(\alpha g E_0) 2k b(k)}{(2k)^2 + (\alpha g E_0)^2 b^2(k)} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Déduisons d'abord le résultat pour le spin zéro

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{KG}^{\alpha(2)}(b, a) &= 2\tilde{G}_0^{\alpha(2)}(b, a) \\ &= (-1) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b-x_a)} g^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) \\ &= \left(\frac{1}{2i} \right) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(x_b-x_a)} \frac{b(k)}{k} \exp[-i(\mu t_b - k t_a)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Revenons au cas du spin 1/2. Le résultat de $\tilde{S}^c(x, y)$ sera alors

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\alpha(2)}(b, a) &= \left(\hat{\eta} - m\gamma^5 \right)_b \tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) \\ &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^1 g \frac{E_0}{\omega} \theta(\omega t) - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) \\ &= (-i) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{b(k)}{(2k)^2 + (\alpha g E_0)^2 b^2(k)} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^1 g \frac{E_0}{\omega} \theta(\omega t) - m\gamma^5 \right\} \\ &\quad \times (2k + i g E_0 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 b(k)) \exp \{ -i(\mu t_b - k t_a) - i\vec{p}(x_b - x_a) \} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\alpha(2)}(b, a) = & (-i) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{b(k)}{(2k)^2 + (\alpha g E_0)^2 b^2(k)} \\ & \left\{ \mu (2k\tilde{\gamma}^0 - igE_0\tilde{\gamma}^1 b(k)) + \vec{p} \left(2k\vec{\gamma} + igE_0\vec{\gamma}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^0 b(k) \right) \right. \\ & \left. + g \frac{E_0}{\omega} \theta(\omega t_b) (2k\tilde{\gamma}^1 - igE_0\tilde{\gamma}^0 b(k)) - m (2k\gamma^5 + igE_0\gamma^5\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^0 b(k)) \right\} \\ & \times \exp \{ -i(\mu t_b - kt_a) - i\vec{p}(x_b - x_a) \} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2 Deuxième application $E(t) = E_0 \cosh^{-2}(\omega t)$

Passons maintenant à la deuxième application donnée par le potentiel de la forme

$$A_\mu = (0, -\frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t), 0, 0), \quad F(t) = \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t) \quad (4.23)$$

créant un champ électrique de la forme

$$\vec{E}(t) = (E_0 \cosh^{-2}(\omega t), 0, 0)$$

Ce cas contient le précédent comme cas limite quand $\omega \rightarrow \infty$. Dans ce cas aussi l'instant initial et l'instant final sont choisis comme $t_a \ll 0$ et $t_b \gg 0$.

On a l'expression

$$\tilde{G}_\alpha^{(2)}(b, a) = (G_\alpha^{+(2)}(b, a) + G_\alpha^{-(2)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(2)}(b, a) - G_\alpha^{-(2)}(b, a)) \quad (4.24)$$

où $G_\alpha^{s(2)}$ ($s = \pm$) est donné par

$$\begin{aligned} G_\alpha^{s(2)}(b, a) = & \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2 \} \\ & \int D\tau \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} - \lambda g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \tanh^2(\omega t) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\lambda g p_x \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t) - i\alpha \lambda g E_0 \cosh^{-2}(\omega t) \right] d\tau \right\} \\ = & \frac{-i}{2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda\vec{p}^2 - i\lambda m^2 - \lambda g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right\} \\ & \int D\tau \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{t}^2}{4\lambda} + 2\lambda g p_x \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda \left(i\alpha g \frac{E_0}{\omega} + g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right) \cosh^{-2}(\omega t) \right] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Effectuons là encore le changement suivant

$$\tau \rightarrow \lambda \tau$$

on aura

$$\begin{aligned} G_\alpha^{s(2)}(b, a) = & \frac{-i}{2} \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp \left\{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) - i\lambda \vec{p}^2 - i\lambda m^2 - i\lambda g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right\} \\ & \int D\tau \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[-\frac{\dot{t}^2}{4} - \left(-2g \frac{E_0}{\omega} p_x \right) \tanh(\omega t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(-i\alpha g E_0 - g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right) \cosh^{-2}(\omega t) \right] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cette dernière expression est de la même forme que l'expression suivante

$$g_s^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) = i \int_0^\infty d\lambda e^{i\mathcal{E}\lambda} \int D\tau \exp \left\{ i \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{t}^2 - A \tanh(\omega t) + B \cosh^{-2}(\omega t) \right] \right\} \quad (4.27)$$

avec

$$M = \frac{1}{2\omega^2}, \mathcal{E} = \vec{p}^2 + m^2 + g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2, A = -2g \frac{E_0}{\omega} p_x, B = - \left(i\alpha g \frac{E_0}{\omega} + g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right)$$

qui n'est rien d'autre que la fonction de Green dépendante de l'énergie du problème de Schrödinger avec le potentiel Rosen-Morse [20] et dont le résultat est

$$\begin{aligned} g_s^{Sch}(t_b, t_a, \mathcal{E}) = & -\frac{\Gamma(M_1 - L_B^s) \Gamma(L_B^s + M_1 + 1)}{2\omega^2 \Gamma(M_1 + M_2 + 1) \Gamma(M_1 - M_2 + 1)} \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \\ & \times \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 + M_2}{2}} \\ & \times {}_2F_1(-L_B^s + M_1, L_B^s + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2}) \\ & \times {}_2F_1(-L_B^s + M_1, L_B^s + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

avec

$$\begin{aligned} L_B^s = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{\omega^2} \left(i\alpha g \frac{E_0}{\omega} + g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right) + 1}, \\ M_{1,2} = & \left(\frac{-1}{2\omega} \right) \left(\sqrt{\left(p_x - g \frac{E_0}{\omega} \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} \pm \sqrt{\left(p_x + g \frac{E_0}{\omega} \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} \right); \\ \mathcal{E} = & \vec{p}^2 + m^2 + g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \end{aligned}$$

Remplaçons ces résultats dans l'expression (4.26), il vient

$$\begin{aligned}
G_\alpha^{s(2)}(b, a) &= \left(\frac{1}{4\omega^2} \right) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp \{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) \} \\
&\times \frac{\Gamma(M_1 - L_B^s) \Gamma(L_B^s + M_1 + 1)}{\Gamma(M_1 + M_2 + 1) \Gamma(M_1 - M_2 + 1)} \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \\
&\times \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \\
&\times {}_2F_1 \left(-L_B^s + M_1, L_B^s + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
&\times {}_2F_1 \left(-L_B^s + M_1, L_B^s + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Déduisons d'abord le résultat pour le spin zéro

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{KG}^{\alpha(2)}(b, a) &= 2\tilde{G}_0^{\alpha(2)}(b, a) \\
&= \frac{1}{2\omega^2} \frac{\Gamma(M_1 - L_B) \Gamma(L_B + M_1 + 1)}{\Gamma(M_1 + M_2 + 1) \Gamma(M_1 - M_2 + 1)} \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \\
&\times \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \\
&\times {}_2F_1 \left(-L_B + M_1, L_B + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
&\times {}_2F_1 \left(-L_B + M_1, L_B + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \quad (4.30)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
M_{1,2} &= \left(\frac{-1}{2} \right) \left(\sqrt{\left(p_x - g \frac{E_0}{\omega} \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} \pm \sqrt{\left(p_x + g \frac{E_0}{\omega} \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} \right); \\
L_B &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4}{\omega^2} g \left(\frac{E_0}{\omega} \right) + 1}, \quad \mathcal{E} = \vec{p}^2 + m^2 + g^2 \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Revenons au cas du spin 1/2. Le résultat de $\tilde{S}^c(x, y)$ sera alors

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{\alpha(2)}(b, a) &= \left(\tilde{\gamma} - m\gamma^5 \right)_b \tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) \\
&= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^1 g \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t_b) - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}_\alpha^{\alpha(2)}(b, a) \\
&= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^1 g \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t_b) - m\gamma^5 \right\} \\
&\quad \times \left[(G_\alpha^{+(2)}(b, a) + G_\alpha^{-(2)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(2)}(b, a) - G_\alpha^{-(2)}(b, a)) \right] \\
&= \left(\frac{1}{4\omega^2} \right) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t_b} + i\vec{\tilde{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_b} + \tilde{\gamma}^1 g \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t_b) - m\gamma^5 \right\} \exp \{ -i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) \} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{\Gamma(M_1 + M_2 + 1)\Gamma(M_1 - M_2 + 1)} \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 + M_2}{2}} \left[\Gamma(L_B^+ + M_1 + 1)\Gamma(M_1 - L_B^+) (1 + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
&\quad \left. {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \right] \\
&\quad + \left[\Gamma(L_B^- + M_1 + 1)\Gamma(M_1 - L_B^-) (1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
&\quad \left. \left. {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

et appliquons la relations de dérivée [15]

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a, b; c; z) \quad (4.33)$$

il vient

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{\alpha(2)}(b, a) = & \left(\frac{1}{4\omega^2} \right) \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\omega}{2 \cosh(\omega t_b) \Gamma(M_1 + M_2 + 1) \Gamma(M_1 - M_2 + 1)} \exp \{ -i\bar{p}(\bar{x}_b - \bar{x}_a) \} \right. \\
& \times \left\{ \left[- \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2} - 1} \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \left[\Gamma(L_B^+ + M_1 + 1) \Gamma(M_1 - L_B^+) (1 + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \right. \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
& \left. {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \right] \\
& + \left[\Gamma(L_B^- + M_1 + 1) \Gamma(M_1 - L_B^-) (1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
& \left. {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \right] \left. \right\} \\
& + \left[\left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2} - 1} \right. \\
& \times \left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \left[\Gamma(L_B^+ + M_1 + 1) \Gamma(M_1 - L_B^+) (1 + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \left. \right] \\
& + \left[\Gamma(L_B^- + M_1 + 1) \Gamma(M_1 - L_B^-) (1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
& \left. {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \right] \left. \right\} \\
& + \left[\left(\frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 - \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \left(\frac{1 + \tanh(\omega t_a)}{2} \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right)^{\frac{M_1 - M_2}{2}} \right. \\
& \times \left[\Gamma(L_B^+ + M_1 + 1) \Gamma(M_1 - L_B^+) (1 + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
& \times \frac{(-L_B^+ + M_1)(L_B^+ + M_1 + 1)}{(M_1 + M_2 + 1)} {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^+ + M_1, L_B^+ + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \left. \right] \\
& \left[\Gamma(L_B^- + M_1 + 1) \Gamma(M_1 - L_B^-) (1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0) \right. \\
& \times \frac{(-L_B^- + M_1)(L_B^- + M_1 + 1)}{(M_1 + M_2 + 1)} {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 + M_2 + 1; \frac{1 + \tanh(\omega t_b)}{2} \right) \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_B^- + M_1, L_B^- + M_1 + 1; M_1 - M_2 + 1; \frac{1 - \tanh(\omega t_a)}{2} \right) \left. \right] \left. \right\} \\
& + \left[\left\{ \tilde{\gamma}^1 g \frac{E_0}{\omega} \tanh(\omega t_b) - m\gamma^5 \right\} \right. \\
& \left. \times \left[(G_\alpha^{+(2)}(b, a) + G_\alpha^{-(2)}(b, a)) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^{+(2)}(b, a) - G_\alpha^{-(2)}(b, a)) \right] \right\} \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Conclusion générale

Un des objectifs de ce mémoire est d'utiliser ces fonctions de Green dans le calcul de la probabilité de création de paires. La méthode de calcul de cette probabilité existe depuis les années cinquante établie par Julian Schwinger dans son fameux article "Gauge invariance and vacuum polarization" [21]. La densité de probabilité de création de paires dans un champ extérieur est donnée par la formule suivante

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \text{Re } \text{tr} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \langle x | \exp \left(i\lambda [(p - g\mathcal{A})^2 - m^2 + \frac{\alpha e}{2} \sigma F] - \exp \left(i\lambda (p^2 - m^2) \right) | x \right)$$

($\alpha = 0, 1$ respectivement pour le boson et le fermion). Le calcul pour un champ constant a été déjà déduit par Schwinger [21, 22] lui même et le résultat est le suivant

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \frac{(gE_0)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{(\alpha-1)(n-1)}}{n^2} \exp \left\{ -\frac{n\pi m^2}{gE_0} \right\}$$

Bien sûr un calcul direct partant de la formule de la fonction de Green ((3.89), (3.85)) donne ce résultat et qui est indépendant de la jauge scalaire ou vectorielle.

Pour les champs dépendants du temps (même chose pour ceux qui dépendent de la position) cette formule de la densité de probabilité n'est plus adéquate et on recourt en général à différentes méthodes équivalentes telles, méthode de Aoyama utilisant un mélange de la fonction de Green et des solutions des états de diffusion [23], méthode de Bogoliubov qui utilise la fonction d'onde exacte exprimée dans le formalisme de la seconde quantification. Par ailleurs, il existe une extension de la formule Schwinger utilisant l'opérateur d'interaction [24]

$$\mathcal{W}(x) = \text{tr} \langle x | \ln [I - \tau(\mathcal{A})\rho^{(+)}\bar{\tau}(\mathcal{A})\rho^{(-)}] | x \rangle$$

où $\tau(\mathcal{A})$ est l'opérateur interaction verifiant l'équation

$$\begin{aligned}\tau(\mathcal{A}) &= g\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(x) + g\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(x) \frac{1}{p^\mu \gamma_\mu - m + i\epsilon} \tau(\mathcal{A}) \\ \bar{\tau}(\mathcal{A}) &= g\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(x) + \bar{\tau}(\mathcal{A}) \frac{1}{p^\mu \gamma_\mu - m - i\epsilon} g\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(x)\end{aligned}$$

et $\rho^{(\pm)}$ les projecteurs suivant les états positifs et négatifs, définies par

$$\rho^{(\pm)} = 2\pi (p^\mu \gamma_\mu + m) \theta(\pm p^0) \delta(p^2 - m^2)$$

Cette méthode s'apprête à un calcul exact si on connaît l'opérateur d'interaction $\tau(\mathcal{A})$, si non on pourrait développer des méthodes d'approximation semi-classique ou adiabatique [25, 26, 27]. En fait même la formule de Schwinger peut être la base d'une telle approximation. Nous pourrions, au lieu de faire un calcul exact, chercher des expressions approximatives des propagateurs qui interviennent dans les calculs. Elucidons cette remarque. Partons de la formule de $\mathcal{W}_\alpha(x)$ on pourrait développer le propagateur en faisant intervenir la méthode des instantons qui permettra d'écrire directement la création de paires sous la forme suivante (formelle bien sûr)

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \sum_n \text{Re tr} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(\lambda - \lambda_n) \sqrt{2\pi i \left(\det \frac{\partial^2 S(x_b, x_a, \lambda_n)}{\partial x_b \partial x_a} \right)} \Big|_{x_a} \exp(iS(x_b, x_a, \lambda_n)) \Big|_{x_a}$$

où λ_n est déduit à partir des conditions de périodicité imposées sur la solution classique (solutions instantoniques), la somme est une somme sur toutes les possibilités instantoniques. Cette formule a fait l'objet d'application pour le champ constant et nous avons pu retrouver

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \frac{(gE_0)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{(\alpha-1)(n-1)} a_n \exp\left\{-\frac{n\pi m^2}{gE_0}\right\}$$

le coefficient a_n dépend des fluctuations au voisinages de ces solutions instantoniques [28, 29, 30, 31]. Malheureusement ce facteur n'a pu être extrait pour l'instant.

Dans ce mémoire, nous avons réussi à convertir le problème des particules relativistes en interaction avec un champ électrique variable au problème de Schrödinger avec un potentiel effectif via le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman. Cette dernière est exprimée dans le formalisme supersymétrique de Fradkin-Gitman. Le cas du champ électrique constant est exposé comme illustration de la méthode. Deux cas d'un champ dépendant du temps en forme d'un pic (en forme delta de Dirac) sont traités. Les résultats de la fonction de Green pour

le spin 0 et $1/2$ sont explicitement évalués. Ces exemples montrent combien le catalogue déjà élaboré pour les problèmes de Schrödinger peut être d'un grand secours pour les cas relativistes. L'objectif final de ce travail était de calculer la probabilité de création de paires à partir de ces fonctions de Green, il serait alors intéressant de continuer dans cette direction.

La première partie de ce travail étant réservée à une équivalence entre la projection locale et globale. Une démonstration est donnée et elle a nous autorisés alors de travailler dans la moins pénible qui est la projection globale. Dans chaque cas, la solution exacte de la projection locale est donnée.

Annexe A

Formalisme de Fradkin-Gitman

La fonction de Green causale $S^c(x_b, x_a)$ de la particule de Dirac dans un champ électromagnétique satisfait l'équation suivante

$$(\hat{\pi}_\mu \gamma^\mu - m)S^c(x_b, x_a) = -\delta^4(x_b, x_a), \quad m \rightarrow m - i\varepsilon \quad (\text{A.1})$$

Suivons la méthode du Fradkin-Gitman, il est commode de multiplier cette équation par $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ afin d'homogénéiser l'équation (A.1). La fonction transformée $\tilde{S}^c(x, y) = S^c(x, y) \gamma^5$ obéit à l'équation suivante

$$(\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)\tilde{S}^c(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (\text{A.2})$$

où

$$\hat{\pi}_\mu = (i\partial_\mu - gA_\mu); g \text{ est la constante de couplage, } \tilde{\gamma}^5 = \gamma^5, \quad \tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu \quad (\text{A.3})$$

Les matrices $\tilde{\gamma}^\mu$ ont les mêmes relations de commutation que les matrices initiales γ^μ ,

$$[\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

La fonction de Green $\tilde{S}^c(x, y)$ est représentée comme,

Alors, on obtient

$$\tilde{S}^c(x, y) = (\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)_{out} \tilde{G}^c(x, y), \quad (\text{A.5})$$

avec $\tilde{G}^c(x, y)$ élément de matrice.

$$\tilde{G}^c(x, y) = \langle x | \frac{1}{(\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^2} | y \rangle \quad (\text{A.6})$$

et

$$(\hat{\pi}_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^2 = \hat{\pi}^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \quad (\text{A.7})$$

On peut présenter $\tilde{G}^c(x, y)$ au moyen d'un temps adéquat λ , dit temps propre de Schwinger

$$\tilde{G}^c(x, y) = -i \int d\lambda \langle x | e^{-i\hat{H}} | y \rangle, \quad (\text{A.8})$$

où

$$\hat{H} = \lambda \left[-\hat{\pi}^2 + m^2 + \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \right] \quad (\text{A.9})$$

L'élément de la matrice dans l'expression (A.8) a la forme d'un opérateur d'évolution et se représente au moyen d'une intégral de chemin. Pour ce faire, premièrement, on écrit $\exp(-i\hat{H})$ sous forme $\left[\exp\left(\frac{-i\hat{H}}{N+1}\right) \right]^{N+1}$ et on insère N fois l'identité

$$\int |x\rangle \langle x| dx = I$$

entre chacun des opérateurs $\exp\left(\frac{-i\hat{H}}{N+1}\right)$.

Puis, introduisons N intégrations supplémentaires sur λ pour avoir une évolution indépendante de λ ,

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & \lim_{N \rightarrow +\infty} (-i) \int d\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} d\lambda_k \int \prod_{k=1}^N dx_k \times \\ & \prod_{k=1}^{N+1} \left[\langle x_k | e^{-i\hat{H}(\lambda_k)\Delta\tau} | x_{k-1} \rangle \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où

$$\Delta\tau = \frac{1}{N+1}, \quad x_0 = x_a, x_{N+1} = x_b. \quad (\text{A.11})$$

Développons l'exponentielle jusqu'au premier ordre en $\Delta\tau$. L'élément de matrice se réduit à

$$\langle x_k | e^{-i\hat{H}(\lambda_k)\Delta\tau} | x_{k-1} \rangle \simeq \langle x_k | 1 - i\hat{H}(\lambda_k) \Delta\tau | x_{k-1} \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Insérons maintenant la relation de fermeture

$$\int |p\rangle \langle p| dp = I, \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\hat{P}_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle \quad , \quad \langle p | \hat{p} \rangle = \delta^4(p - \hat{p}) \quad , \quad \langle x | p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ipx} . \quad (\text{A.14})$$

Les éléments de la matrice (A.12) sont calculés suivant l'ordre symétrique de Weyl avec $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ est le mid-point. Prenant tout en compte les modifications, on peut voir que l'expression (A.12) peut être remplacé par

$$\int \frac{dp_k}{(2\pi)^4} \exp \left[i \left(p_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta\tau} - \hat{H}(\lambda_k, \bar{x}_k, p_k) \right) \Delta\tau \right] . \quad (\text{A.15})$$

Exprimons la fonction $\delta(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ par sa représentation intégrale

$$\delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\pi k} d\pi_k . \quad (\text{A.16})$$

et attribuons formellement l'indice k à toutes les quantités dynamiques, les matrices γ incluses correspondant au temps τ_k défini par

$$\tau_k = k \Delta\tau \quad \text{avec } \tau \in [0, 1] . \quad (\text{A.17})$$

Introduisons le produit T qui ordonne sur les matrices, il est possible d'assembler toutes les expressions à une seule exponentielle

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & (-i) T \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi_\lambda \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left(p^2 - m^2 - \frac{ig}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} \right] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

où x, λ obéissent aux conditions aux limites suivantes

$$x(0) = x_a \quad x(T) = x_b \quad \lambda(0) = \lambda_0 . \quad (\text{A.19})$$

L'opérateur chronologique T est nécessaire à cause de l'ordre dû aux matrices de Dirac qui sont supposées dépendre du temps formellement.

L'astuce maintenant consiste à introduire des courants $\rho_n(\tau)$ qui anticommulent avec les matrices $\tilde{\gamma}^n(\tau)$ par définition. En effet, nous pouvons écrire la quantité $T \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \tilde{\gamma}^n d\tau \right\}$

via un intégral de chemin comme suit

$$T \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \tilde{\gamma}^n d\tau \right\} \Bigg|_{\rho=0} = \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \\ \times \exp \left[\int_0^1 \left(\Psi_n \dot{\Psi}^n - 2i \rho_n \Psi^n \right) d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right] \Bigg|_{\theta=0}^{\rho=0}, \quad (\text{A.20})$$

la mesure $\mathfrak{D}\Psi$ est définie par

$$\mathfrak{D}\Psi = D\Psi \left[\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} D\Psi \exp \left(\int_0^1 \Psi_n \dot{\Psi}^n d\tau \right) \right]^{-1}, \quad (\text{A.21})$$

les variables Ψ et θ sont des variables de Grassmann impaires qui anticommulent avec les matrices $\tilde{\gamma}$, $\frac{\delta}{\delta \theta^n}$ est une dérivée gauche.

Remplaçons (A.20) dans (A.18), il vient

$$\tilde{G}^c(x, y) = (-i) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_\lambda \int D\lambda \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \\ \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda (p^2 - m^2 + 2ig \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) \right. \right. \\ \left. \left. + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - i \Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Bigg|_{\theta=0}. \quad (\text{A.22})$$

et par conséquent,

$$\tilde{S}^c(x, y) = (-i) \left(\tilde{\eta}_\mu - m\gamma^5 \right)_{out} \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int de_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_\lambda \int D\lambda \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \times \\ \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda (p^2 - m^2 + 2ig \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu) \right. \right. \\ \left. \left. + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - i \Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Bigg|_{\theta=0}.$$

Cette dernière relation exprime la forme hamiltonienne correspondantes à la projection globale.

Annexe B

matrice inverse $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$

Le but de cette section est de calculer l'inverse d'une matrice continue et d'un déterminant continu.

Pour un champ électrique dépendant du temps on a : $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ données par (3.18). Pour ce faire introduisons une nouvelle matrice $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ suivant

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}(\tau_1, \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{B.1})$$

Ce qui permet d'écrire

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, s) \varepsilon(s - \hat{\tau}) ds. \quad (\text{B.2})$$

Dans notre cas on a

$$\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) = \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \eta_{\mu\nu} - \sigma \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{B.3})$$

L'inverse de la matrice $\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ doit satisfaire à

$$\int_0^\lambda \Lambda_{\mu\nu}(\tau, s) (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (\text{B.4})$$

et donc

$$\int_0^\lambda ds \left[\eta_{\mu\nu} \varepsilon(\tau - s) - \sigma \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) d\tau_1 \right] (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (\text{B.5a})$$

$$\int_0^\lambda ds \left[\varepsilon(\tau - s) \Lambda_{\mu\beta}^{-1}(s, \hat{t}) - \sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) (\Lambda_\beta^\nu)^{-1}(s, \hat{t}) \right] = \eta_{\mu\alpha} \delta(\tau - \hat{t}). \quad (\text{B.6a})$$

Portants (B.1) dans (B.6a)

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{t}) - \sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \hat{t}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \hat{t}). \quad (\text{B.7a})$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{t})}{d\tau} - 2\sigma \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau, \hat{t}) = \eta_{\mu\beta} \frac{d\delta(\tau - \hat{t})}{d\tau}. \quad (\text{B.8a})$$

avec la condition initiale

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(0, \hat{t}) + \sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \hat{t}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\hat{t}). \quad (\text{B.9})$$

Insérons la solution générale donnée par

$$\tilde{\Omega}(\tau, \hat{t}) = e^{2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \tilde{c}(\tau, \hat{t}). \quad (\text{B.10a})$$

dans (B.8a), on déduit

$$\tilde{c}(s, \hat{t}) = \int_0^s e^{-2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \hat{t}) d\tau + \tilde{c}(\hat{t}). \quad (\text{B.11})$$

Par conséquent, (B.10a) devient

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\tau, \hat{t}) &= e^{2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} [\tilde{c}(\hat{t}) - \delta(\hat{t})] + \delta(\tau - \hat{t}) + 2\sigma \mathcal{F}(\hat{t}) \theta(\tau - \hat{t}) \\ &\times e^{-2\sigma \int_0^{\hat{t}} d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} e^{2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Utilisons la condition initiale (B.9) et prenons en considération $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(0, \hat{t}) = \tilde{c}(\hat{t})$

$$\tilde{c}(\hat{t}) - \delta(\hat{t}) = -\sigma \frac{V^{-1}(\hat{t}) V(\lambda)}{1 + V(\lambda)} \mathcal{F}(\hat{t}), \quad (\text{B.13})$$

où

$$V(\lambda) = e^{\int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \quad (\text{B.14})$$

$$V^{-1}(\lambda) = e^{-\int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \quad (\text{B.15})$$

Puis substituons (B.13) dans (B.12)

$$\tilde{\Omega}(\tau, \hat{\tau}) = \delta(\tau - \hat{\tau}) + \sigma V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{\tau}) \mathcal{F}(\hat{\tau}), \quad (\text{B.16})$$

et (B.16) dans (B.2) on obtient

$$\Gamma(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{\tau}). \quad (\text{B.17})$$

Dérivons la relation (B.1) par rapport à τ , la matrice inverse s'obtient comme

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\tau, \hat{\tau}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Omega}(\tau, \hat{\tau})}{\partial \tau} \\ &= \varepsilon^{-1}(\tau, \hat{\tau}) + \sigma^2 \mathcal{F}(\tau) V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{\tau}) \mathcal{F}(\hat{\tau}) \\ &\quad + \sigma V(\tau) \delta(\tau - \hat{\tau}) V^{-1}(\hat{\tau}) \mathcal{F}(\hat{\tau}). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Bibliographie

- [1] E.S.Fradkin and Gitman, Phys. Rev. D 44 3320 (1991).
- [2] Dmitri M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, Phys. Letters. B 318 (1993) 122-126 .
- [3] S.P. Gavrilov and D.M. Gitman, arXiv : hep- th /9603189 v1 (1996)
- [4] C. Alexandrou, R. Rosenfelder and A. W. Schreiber, arXiv : hep- th /9809101 v2 (1999)
- [5] R. P. Mertiez-y-Romero, H. N. Nunez-Yépez, and A. L. Salas- Brito. (1999).
- [6] S. Zeggari, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Phys Scripta. vol. 61, 1-7, (2001)
- [7] S. P. Gavrilov and D. M.Gitman, arXiv : hep- th /9603189 v1 (1996)
- [8] Dmitri M. Gitman and Stoian I. Zlatev, arXiv : hep- th /9608179 v1 (1996)
- [9] Dmitri M. Gitman, arXiv : hep- th /9608180 v1 (1996)
- [10] Wellington Da Cruz, arXiv : hep- th /9710133 v1 (1997)
- [11] A. S. de Castro and A. de Souza Dutra, Phys. Rev. A 67, 054101 (2003)
- [12] M. Maamache and H. Lakehal, Europhys. Lett., 67 (5), pp. 695-699 (2004)
- [13] R. R. Landim and I. Guedes, Phys Rev. A Vol 61, 054101 (2000)
- [14] A. O. Barut and I. H. Duru, Phys Rev D Vol 41, N 4 (1990)
- [15] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, Series, and Products, Academic Press, NewYork, (1979).
- [16] M. S. Marinov and V. S. Popov, Fortschritte der Phys 26. 373-400 (1977)
- [17] R. E. Crandall, J. Phys. A 26 (1993) 3627.
- [18] M. M. de guiar, Phys Rev A Vol 48. N 4 (1993)

- [19] M. Merad, T. Boudjedaa, L. Chetouani, *II Nuovo Cimento B* 114 (11) (1999) 1261
- [20] C. Grosche and Steiner, *Handbook of Feynman Path Integral*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998).
- [21] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664
- [22] E. B. Brezin and C. Itzykson, *Phys. Rev. D* **2**, 1191 (1970)
- [23] H. Aoyama and M. Kobayashi, *Prog. Thero. Phys.* **64** (1980), 1045.
- [24] *Quantum field theory* Claude Itzykson Jean- Bernard Zuber Mc Graw-hill Editions (1980)
- [25] M N Hounkonnou and M N aciri, *J. Pyhs. G : Nucl. Part. Phys.* **26** (2000) 1849-1858
- [26] Javier Casahorran of NAS of Ukaine (2002), Vol. **43**, Part 2, 609-615
- [27] Qiong-gui Lin, arXiv : hep- th /6910037 v2 (1999)
- [28] Ian K. Affleck , Orlando Alvarez and Ichólas S. Manton, *Nuclear Phys B* **197** (1982) 509-519
- [29] J. Casahorran, arXiv : hep- th /0103010 v1 (2001)
- [30] Gerald V. Dunne and Christian Schubert, arXiv : hep- th /0507174 v1 (2005)
- [31] Gerald V. Dunne and Qing- hai-Wang, arXiv : hep- th /0602176 v2 (2006)
- [32] *Higher Transcendental Function*, Vol. 2 (Bateman Manuscript Project), Ed. by A. Erdélyi (McGraw-Hill, New York, 1953 Nauka, Moscow, 1980 ; pergamon, Oxford, 1982)
- [33] F.A. Berezin and M.S. Marinov : *Ann. Phys.* **104** (1977) 336