جامعة جيجل
نيابة الكلية المكلفة بما بعد التدرج والبحث
كلية العلوم

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Sana Zabat

THEME

Particule relativiste dans un champ gravitationnel faible :

Etude par l'approche des intégrales de chemins

Soutenu le :...../...../2007

Devant le Jury :

Présidente :	D.Azzam	MC	Univ. de Jijel
Rapporteur :	L. Chetouani	Prof.	Univ. de Constantine
Examinateurs :	N. Belaloui	Prof.	Univ. de Constantine
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. de Jijel
	A.Lecheheb	MC	Univ. de Constantine
Invité :	N.Boutaoui	MC	Univ. de Jijel

جامعة جيجل
المكتبة المركزية
رقم الجرد: TH/145
530.1/4

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Sana Zabat

THEME

Particule relativiste dans un champ gravitationnel faible :

Etude par l'approche des intégrales de chemins

Soutenu le :...../...../2007

Devant le Jury :

Présidente :	D.Azzam	MC	Univ. de Jijel
Rapporteur :	L. Chetouani	Prof.	Univ. de Constantine
Examinateurs :	N. Belaloui	Prof.	Univ. de Constantine
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. de Jijel
	A.Lecheheb	MC	Univ. de Constantine
Invité :	N.Boutaoui	MC	Univ. de Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné pour terminer cette thèse de magister.

Je tiens à remercier tout particulièrement celui sans qui, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour, à savoir mon encadreur Mr. L. Chetouani, Professeur de l'université Mentouri de Constantine. Que ce soit pour la proposition du sujet, ou au niveau du déroulement du travail, ses avis furent toujours remarquables et pertinents.

Je remercie, Madame D. Azzam Maître de conférences à l'université de Jijel pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie, également et sincèrement Mr. N. Belaloui professeur à l'université Mentouri de Constantine, Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, A. Lecheheb Maitres de conférences de l'université Mentouri de Constantine, Mr. N. Boutaoui Maître de conférences à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porté à ce travail en acceptant de le juger.

Je remercie, également tous les enseignants de la post graduation de physique théorique. En particulier Mr. Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, Mr. A. Bounames, Professeur à l'université de Jijel, Mr. Maâmache Professeur à l'université de Sétif, Professeur L. Chetouani de l'université Mentouri de Constantine, A. Lecheheb et F. Benamira Maitres de conférences de l'université Mentouri de Constantine.

Tous mes remerciements, à ma famille qui a toujours confiance en moi, et m'a toujours soutenu, et très spécialement à mes parents pour leur grande patience dont ils ont fait preuve le long de ma vie, et durant mes études, et surtout à qui me est très cher : mon époux Boudieb Sami.

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2004/2005.

En fin, je remercie tous mes proches, tous mes amies et tous ceux qui m'ont connu.

Sana

Table des matières

1 Introduction générale **5**

2 Propagateur d'une particule libre de Klein Gordon dans un champ gravitationnel faible **8**

2.1 Calcul de la fonction de Green par la méthode de Frandkin-Gitman 8

2.2 Calcul de la fonction de Green par la méthode semi classique 16

3 Propagateur d'une particule libre de Dirac dans un champ gravitationnel : projections globale et locale **21**

3.1 Introduction 21

3.2 Construction des fonctions de Green 23

3.3 Calcul des fonctions de Green 25

3.4 Détermination des fonctions d'ondes 51

4 Conclusion générale **53**

I

Appendices

56

Bibliographie **60**

Chapitre 1

Introduction générale

L'équation de Dirac est devenue actuellement l'une des équations maîtresses de la physique. Extraite simplement de l'équation de Klein Gordon en prenant sa racine carrée, cette équation de type matricielle à cause de la présence des matrices γ a permis surtout de rendre compte de la valeur du spin de l'électron égale à 1/2 et surtout de prédire l'existence de l'antiparticule. Malgré ce succès majeur, cette équation n'a été cependant exempte de problèmes comme le fameux paradoxe de Klein dû à l'existence des états d'énergies négatives.

Nous savons maintenant que les problèmes soulevés par cette équation ont été pratiquement réglés dans le cadre de la théorie quantique des champ, renormalisée à cause de l'apparition de termes infinis .

Du point de vue technique, les calculs en théorie quantique des champs sont en général assez compliqués et c'est pour cette raison que l'utilisation directe des équations constitue une bonne approximaions surtout si l'interaction n'est pas assez forte. Par exemple pour une particule de spin$\frac{1}{2}$, la correction apportée par la polarisation du vide, se traduit suivant Pauli par une modification simple de l'équation de Dirac où le mouvement de la particule dans l'équation de Dirac est corrigé par un terme supplémentaire décrivant l'anomalie du moment magnétique de la particule.

Jusqu'à maintenant, la mécanique quantique des opérateurs a joué un rôle central dans la quantification en physique et donc de compréhension de certains phénomènes physiques. Or il est connu que la mécanique classique dont le lien avec la mécanique quantique semble inexistant

est le domaine qui a le plus contribué au développement en physique. Feynman à travers une nouvelle procédure dite les intégrales de chemin, nous a donné une possibilité d'une meilleure compréhension de ces mêmes phénomènes physiques. Cet outil est devenu par la force des choses un moyen puissant et donc indispensable surtout pour la quantification en théorie des champs.

Malgré le succés incontestable de ce formalisme, il lui reste cependant à incorporer une entité fondamentale de nature discrète comme le spin qui n'a pas d'analogue classique au moyen de chemins qui sont par essence continus. Pour décrire ces entités, il est fait appel à des représentations du genre bosonique ou fermionique, la dynamique se trouvant décrite par des variables telles c-nombres ou par des variables qui ne commutent pas, obéissant à l'algèbre de Grassmann.

L'utilisation des dernières variables dans la version des intégrales de chemins a été suggérée pour la première fois par Berezin et Marinov[1].

Dans le cas de l'équation de Dirac le spin intervient par l'intermédiaire des matrices γ. Donc il est intéresant de remplacer les générateurs de Dirac $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^5)$ par ceux de l'algèbre de Grassmann $(\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^5)$.

A l'aide de cette représentation, Frandkin et Gitman [2] ont construit directement la version intégrale de chemins des fonctions de Green relativistes grâce à l'introduction d'une nouvelle matrice dite γ_5. Bien que la supersymétrie y apparaîsse clairement, Di-Vecchia-Ravndal [3] d'abord et Alexandrou et al.[4] ont ensuite signalé que la seule raison de l'introduction d'une cinquième composante à la variable du spin proposé par Berezin et Marinov est que dans le système de repos de la particule, le spin est intrinsèquement tridimensionnel et que cependant une dèscription quadri-dimensionnelle covariante a des degrés de liberté superflus qui s'annulent par la cinquième composante et qu'il ya dans la fomulation un problème posé par cette matrice γ^5, soit par l'absence d'une image physique claire associée à cette variable, soit par l'existance d'anomalie à cause de la multiplication du propagateur avec la matrice de Dirac γ_5.

Par conséquent une approche quadri-dimensionnelle est plus commode dont les degrés de liberté superflus sont simplement projetés hors la dynamique du système. Cette projection se fait selon deux différentes façons. Pour cela ces derniers auteurs ont proposé deux représentations équivalentes pour décrire l'évolution d'une particule de Dirac : l'une dite globale, et l'autre dite locale.

L'objet de cette thèse est de voir comment ces représentations dont il a été question, équivalentes par construction à l'équation de Dirac, sont capables de solutionner des problèmes simples de particules en interaction avec un champ classique extérieur.

Dans ce but, nous considérons des particules libres de Klein Gordon et de Dirac en mouvement dans un champ gravitationnel assez faible afin d'obtenir des expressions pour les fonctions de Green analytiques. En l'absence de la gravitation, la métrique $\eta_{\mu\nu}$ est euclidienne et lorsque la gravitation est assez faible la métrique est dans ce cas [5] en 1ère approximation :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(k.x), \\ \text{ou } g^{\mu\nu}(x) &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(k.x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où h est considéré comme une perturbation.

Cette perturbation est choisie de forme simple. Elle est fonction uniquement du produit $k.x$ où k et x sont respectivement des quadri-vecteurs relatifs à l'onde et la position de la particule. Le quadri-vecteur onde k [5] étant tel que

$$k^2 = 0.$$

De plus, il est supposé par ailleurs que la forme de h [5] est la suivante

$$h^{\mu\nu}(k.x) = a^{\mu\nu} F(k.x) \tag{1.2}$$

où les éléments de la matrice a (4×4) [5] satisfont à

$$k^{\mu} a_{\mu\nu} = k^{\nu} a_{\nu\mu} = 0 \ , Tra = 0 \tag{1.3}$$

Dans le 1er chapitre, la particule de Klein Gordon est d'abord considérée et la fonction de Green est déterminée exactement .

Dans le 2ème chapitre, la fonction de Green relative à l'équation de Dirac est calculée successivement sans la matrice γ^5 pour l'approche dite globale et dans l'approche locale inévitablement avec la matrice γ^5 [2] tout en utilisant les propriétés de la gravitation.

Notons que ce problème a fait l'objet de deux travaux récents [6] et [5] en calculant les fonctions de Green pour une particule de spin 0 et 1/2 en solutionnant directement les équations de Klein Gordon et de Dirac et en résolvant les équations de mouvement de Heisenberg.

Chapitre 2

Propagateur d'une particule libre de Klein Gordon dans un champ gravitationnel faible

2.1 Calcul de la fonction de Green par la méthode de Frandkin-Gitman

L'objet dans ce chapitre est la détermination pour une particule libre de la fonction de Green solution de l'équation de Klein Gordon dans un champ gravitationnel suivante

$$(\partial^\mu \partial_\mu - h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)G^c(x_b, x_a) = -\delta^4(x_b - x_a) \tag{2.1}$$

D'abord multiplions par i^2 (2.1), puis introduisons l'opérateur

$$\hat{p}^\mu = -i\partial^\mu. \tag{2.2}$$

Nous obtenons alors, l'équation

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu h^{\mu\nu}\hat{p}_\nu - m^2)G^c(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a). \tag{2.3}$$

Suivant la méthode usuelle de Schwinger [7], le propagateur $G^c(x_b, x_a)$ est un élément de matrice

$$G^c(x_b, x_a) = \langle x_b \mid \hat{G}^c \mid x_a \rangle, \tag{2.4}$$

dans l'espace des coordonnées. Symboliquement, nous avons

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu h^{\mu\nu} \hat{p}_\nu - m^2)\hat{G}^c = I. \tag{2.5}$$

l'opérateur $\hat{G}^c$ est donc l'inverse de l'opérateur $(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu h^{\mu\nu} \hat{p}_\nu - m^2)$. Par l'intermédiaire d'un temps propre réel λ, nous pouvons écrire

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu h^{\mu\nu} \hat{p}_\nu - m^2)^{-1} = i \int_0^\infty d\lambda \exp\left\{ i\lambda(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu h^{\mu\nu} \hat{p}_\nu - m^2). + i\varepsilon \right\}, \tag{2.6}$$

afin de le mettre dans l'exposant d'une exponentielle afin de se preparer au passage à la représentation intégrale de chemins.

Donc l'opérateur $\hat{G}^c$s'écrit sous la forme

$$\hat{G}^c = i \int_0^\infty d\lambda \exp\left\{ -i\lambda \hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) \right\}, \tag{2.7}$$

avec

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \left(m^2 - p^2 + \hat{p} h \hat{p} \right). \tag{2.8}$$

Utilisons (2.7) et (2.4), donc nous allons obtenir la représentation sous forme intégrale suivante

$$G^c(x_b, x_a) = i \int_0^\infty d\lambda \langle x_b \mid \exp\left\{ -i\lambda \hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) \right\} \mid x_a \rangle. \tag{2.9}$$

Subdivisons maintenant l'intervalle $[x_a, x_b]$ en N parties égales de longueur chacune égale à $\triangle\tau = \frac{\lambda}{N}$, puis insérons $(N-1)$ fois la relation de fermeture

$$\int d^4 x_j \mid x_j \rangle \langle x_j \mid = 1.$$

entre deux opérateurs $\exp\left(-i \frac{\hat{H}}{N} \lambda \right)$ successifs.

Ainsi

$$\begin{aligned} G^c(x_b, x_a) &= \lim_{N \to +\infty} i \int_0^\infty d\lambda \int \prod_{j=1}^{N} dxj \\ &\times \prod_{j=1}^{N} \left[\langle x_j \mid \exp\{ -i\lambda H(p, x) \triangle \tau \} \mid x_{j-1} \rangle \right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$\triangle\tau = \frac{\lambda}{N}, \quad x_0 = x_a \ , \quad x_N = x_b. \tag{2.11}$$

Développons l'exponentielle jusqu'au premier ordre en $\triangle\tau$. L'élément de matrice de l'équation (2.10) se réduit à

$$\langle x_j \mid \exp\{-i\lambda H(p,x)\triangle\tau\} \mid x_{j-1}\rangle = \langle x_j \mid 1 - i\lambda H(p,x)\triangle\tau \mid x_{j-1}\rangle. \tag{2.12}$$

Insérons maintenant la relation de fermeture

$$\int d^4p_j \mid p_j\rangle\langle p_j \mid = I, \tag{2.13}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu \mid p\rangle &= p_\mu \mid p\rangle \\ \langle p \mid p'\rangle &= \delta^4\left(p - p'\right) \\ \langle x \mid p\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2}\, e^{ipx}. \end{aligned}$$

Les éléments de la matrice (2.12) auront l'expression exacte ($N \longrightarrow \infty$) suivante

$$\begin{aligned} \langle x_j \mid & \exp\{-i\lambda H(p,x)\triangle\tau\} \mid x_{j-1}\rangle \\ &= \lim_{N\to+\infty}\int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\left[1 - i\lambda H(p,x)\triangle\tau\right]\exp\{ip_j(x_j - x_{j-1})\} \\ &= \lim_{N\to+\infty}\int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\exp\left\{i\left(p_j\frac{x_j - x_{j-1}}{\triangle\tau} - \lambda H(\bar{x}_j, p_j)\triangle\tau\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où $\bar{x}_j$ est le mid-point égale à

$$\bar{x}_j = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}.$$

Portons (2.14)dans (2.10), le propagateur prend la forme suivante

$$\begin{aligned} G^c(x_b, x_a) &= \lim_{N\to+\infty} i\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_{N-1}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_N}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}\left[p_j\frac{\triangle x_j}{\triangle\tau} - \lambda H(p_j, \bar{x}_j)\right]\triangle\tau\right\}, \\ \triangle x_j &= x_j - x_{j-1}. \end{aligned}$$

Formellement, le propagateur s'écrit comme suit

$$G^c(x_b, x_a) = i\int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \exp\left\{ i\int_0^\lambda \left[p\dot{x} + \left(p^2 - m^2 - php\right)\right] d\tau \right\}, \tag{2.15}$$

et comme on a [5]

$$h_{\mu\nu(x)} = a_{\mu\nu} F(\varphi),$$

ou bien

$$\begin{aligned} h(x) &\longrightarrow aF(\varphi), \\ \text{où } \varphi &= kx \end{aligned}$$

donc (2.15), devient alors

$$G^c(x_b, x_a) = i\int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \exp\left\{ i\int_0^\lambda \left[p\dot{x} + \left(p^2 - m^2 - paF(kx)p\right)\right] d\tau \right\}, \tag{2.16}$$

Introduisons maintenant l'identité suivante [10], [8], [9]

$$\int d\varphi_a \int d\varphi_b d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \exp\left\{ i\int_0^\lambda p_\varphi(\dot{\varphi} - k\dot{x}) d\tau \right\} = 1. \tag{2.17}$$

Alors (2.16) devient

$$\begin{aligned} G^c(x_b, x_a) &= i\int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\ &\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda (p\dot{x} + p_\varphi(\dot{\varphi} - k\dot{x}) + p^2 - paF(\varphi)p - m^2) d\tau \right\} \\ &= i\int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\ &\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda (p\dot{x} + p_\varphi\dot{\varphi} - p_\varphi k\dot{x} + p^2 - paF(\varphi)p - m^2) d\tau \right\} \\ &= i\int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\ &\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda ((p - p_\varphi k)\dot{x} + p_\varphi\dot{\varphi} + p^2 - paF(\varphi)p - m^2) d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Faisons maintenant le changement suivant

$$P = p - p_\varphi k \rightarrow p = P + p_\varphi k, \tag{2.19}$$

La mesure ne change pas alors que l'action S prend la forme

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\lambda \left[P\dot{x} + (P + p_\varphi k)^2 + p_\varphi \dot{\varphi} - (P + p_\varphi k) a F(\varphi)(P + p_\varphi k) - m^2\right] d\tau, \\ &= \int_0^\lambda \left[p\dot{x} + \left(p^2 - m^2\right) - paF(\varphi)p + (\dot{\varphi} + 2pk)\, p_\varphi\right] d\tau. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ainsi G^c devient

$$\begin{aligned} G^c(x_b, x_a) &= i \int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int_0^\lambda (p\dot{x} + p^2 + (\dot{\varphi} + 2pk)\, p_\varphi - F(\varphi)pap - m^2) d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Intégrons par partie le 1er terme se trouvant dans l'action

$$\int_0^\lambda \dot{x} p d\tau = (x_b p_b - x_a p_a) - \int_0^\lambda x\, \dot{p} d\tau,$$

nous obtenons alors

$$\begin{aligned} G^c(x_b, x_a) &= i \int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int_0^\lambda (-x\, \dot{p} + p^2 + (\dot{\varphi} + 2pk) p_\varphi - F(\varphi)pap - m^2) d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Intégons sur tous les $x(\tau)$, il apparait une fonction de Dirac

$$\int Dx \exp\left(-i \int_0^\lambda x\dot{p} d\tau \right) = \delta(\dot{p}),$$

qui va éxprimer la conservation de l'impulsion au cours du mouvement

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p.$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b,x_a) &= i\int_0^\infty d\lambda \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \exp\{i(x_b p_b - x_a p_a)\} \\
&\quad \times \delta(\dot{p}) \exp\left\{ i\int_0^\lambda (p^2 + (2pk+\dot{\varphi})p_\varphi - F(\varphi)pap - m^2) d\tau \right\}, \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

et par intégrations sur les p, nous avons

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b,x_a) &= i\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \exp\{ip(x_b - x_a)\} \\
&\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda (p^2 + (2pk+\dot{\varphi})p_\varphi - F(\varphi)pap - m^2) d\tau \right\}, \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Une autre fonction de Dirac apparait aussi par intégration sur les p_φ

$$
\int Dp_\varphi \exp\left\{ i\int_0^\lambda (2pk + \dot{\varphi})p_\varphi d\tau \right\} = \delta(\dot{\varphi} + 2pk), \qquad (2.25)
$$

ce qui signifie que

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= -2pk \\
&\Rightarrow \frac{d\varphi}{d\tau} = -2pk \\
&\Rightarrow d\tau = -\frac{d\varphi}{2pk}; \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

c'est à dire que φ, fonction linéaire de τ, est aussi un temps propre.

Avec (2.20) et (2.18), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b, x_a) &= i\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \\
&\quad \times \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + i\int_0^\lambda (p^2 - m^2)\, d\tau \right\} \\
&\quad \times \int D\varphi \exp\left[i\frac{pap}{2pk} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi + (2pk + \dot{\varphi}) p_\varphi \right] \\
&= i\int_0^\infty d\lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta[\varphi_b - kx_a - (2pk)\lambda]\delta[\varphi_a - kx_a] \\
&\quad \times \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + i\int_0^\lambda (p^2 - m^2)\, d\tau \right\} \exp\left\{ i\frac{pap}{2pk} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right\}. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b, x_a) &= i\int_0^\infty d\lambda \int Dp \int D\varphi \exp\{ip(x_b - x_a)\} \\
&\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda (p^2 - m^2) d\tau \right\} \exp\left\{ i\frac{pap}{2pk} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right\} \\
&= i\int_0^\infty d\lambda \int Dp \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + i\int_0^\lambda (p^2 - m^2) d\tau \right\} \\
&\quad \times \int D\varphi \exp\left\{ i\frac{pap}{2pk} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right\}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
&\delta(\varphi_b - kx_a - (2pk)\lambda) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dp_{\varphi_b} \exp\left\{ ip_{\varphi_b}[\varphi_b - kx_a - (2pk)\lambda] \right\}, \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b, x_a) &= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ \begin{array}{c} ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right) \\ \frac{ipap}{2(kx_a - kx_b)} \int\limits_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) pap d\varphi \end{array} \right\} \\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int\limits_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda(p^2 - m^2)\right\} \exp(ip(x_b - x_a)) \\
&\quad \times \exp\left\{ \frac{ipap}{2pk} \int\limits_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right\}. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Nous pouvons intégrer sur λ, et le résultat est le suivant

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b, x_a) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 - m^2 + iO} \\
&\quad \times \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + \frac{ipap}{2pk} \int\limits_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right\}. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Nous pouvons voir que les pôles sont

$$
\begin{aligned}
p^2 - m^2 &= 0 \Rightarrow p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \Rightarrow p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2 \\
&\Rightarrow p_0 = E = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

et par intégration par rapport à p^0, il vient

$$
\begin{aligned}
G^c(x_b, x_a) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dp_0\, d^3p}{p^{02} - \vec{p}^2 - m^2} \\
&\quad \times \exp\left\{ ip_0(t_b - t_a) - i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a) + \frac{i}{2pk} \int\limits_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) pap d\varphi \right\} \\
&= \frac{-i}{2} \sum_{\varepsilon=\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp\left\{-i\varepsilon\omega(t_b - t_a) + i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)\right\} \theta[\varepsilon(t_b - t_a)] \\
&\quad \times \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon\omega k^0 - 2pk} \int\limits_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) pap d\varphi \right\}. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

ce qui détermine les fonctions d'onde d'une particule de Klein Gordon libre dans un champ

gravitationnel faible :

$$\begin{aligned}\Psi_p^{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\mp ipx \mp \frac{i}{2pk}\int_{kx_0}^{kx} F(\varphi)papd\varphi\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\mp i\left[px + \frac{pap}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi)d\varphi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

2.2 Calcul de la fonction de Green par la méthode semi classique

Le propagateur (2.33) peut être aussi déterminé par une approche semi classique en utilisant les transformations canoniques [10]. Dans l'espace (x, p), le mouvement d'une particule de spin 0, dans un champ gravitationnel faible est décrit par l'Hamiltonien

$$H(p, x) = \left(p^2 - \hat{p}h\hat{p}\right). \tag{2.35}$$

Effectuons une transformation canonique

$$(x, p) \rightarrow^{F_2} (Q, P), \tag{2.36}$$

à l'aide de la fonction génératrice F_2 qui donne $\mathcal{H}$ =0 pour un nouveau Hamiltonien.

Cette fonction génératrice est alors solution de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= H\left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}, x, \tau\right) + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \\ &= -\left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) h\left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Il est facile de vérifier que la solution de cette équation est

$$F_2 = Px - f(kx) + P^2\tau. \tag{2.38}$$

En effet, comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= P - kf'(kx) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \tau} &= P^2, \end{aligned} \tag{2.39}$$

et reportant (2.39) dans (2.37), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) h \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \\
&= -\left(-P + kf'(kx)\right)^2 + \left(-P + kf'(kx)\right) h \left(-P + kf'(kx)\right) + P^2 \\
&= -P^2 + 2kPf'(kx) - k^2\left(f'(kx)\right)^2 + PhP - Phkf'(kx) \\
&\quad -f'(kx)khP + khk\left(f'(kx)\right)^2 + P^2 \\
&= 2kPf'(kx) + PhP = 0,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

et comme [5]

$$h \to aF(\varphi), \varphi = kx$$

donc

$$f'(kx) = -\frac{PhP}{2kP}. \Rightarrow f(kx) = -\frac{PaP}{2kP}\int^{kx} F(\varphi)\, d\varphi,$$

alors F_2 s'écrit comme suit

$$F_2 = Px + \frac{PaP}{2kP}\int^{kx} F(\varphi) d\varphi + P^2\tau. \tag{2.41}$$

Le noyau est donné par

$$K(x_b, x_a; \lambda) = \int DxDp \exp\left\{-i\int_0^{\lambda} (p\dot{x} + H)\, d\tau\right\}, \tag{2.42}$$

et suite à la transformation canonique

$$\begin{aligned}
-p_j \triangle x_j - H(p_j, x_j) \triangle \tau_j &= -P_j \triangle Q_j + \triangle F_1 \\
F_1 &= F_2 + PQ,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

le noyau devient

$$\begin{aligned}
K(x_b, x_a; \lambda) &= \lim_{N\to\infty} \int \frac{dp_N}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \frac{dP_j}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}\left(-P_j \triangle Q_j + \triangle F_1\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

L'intégration sur Q_j , nous donne

$$\prod_{j=1}^{N-1} (2\pi)^4 \delta (P_j - P_{j-1}),$$

ce qui nous permet d'écrire que

$$P_1 = P_2 = ... = P_N = P = c^{st},$$

car

$$\dot{P} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = 0.$$

En intégrant sur P_j, nous obtenons aussi

$$\prod_{j=1}^{N-1} (2\pi)^4 \delta (Q_j - Q_{j-1}),$$

et donc

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q_N = Q = c^{st},$$

car

$$\dot{Q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = 0.$$

Donc suivant l'approximation semi classique le noyau est

$$K(x_b, x_a; \lambda) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp \{i [F_2(b) - F_2(a)]\}, \tag{2.45}$$

où

$$p = p_N = p_b = p(P, Q_b; \tau_b),$$

donc

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a; \lambda) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp \left\{ i \left[\begin{array}{c} Px_b + \frac{PaP}{2kP} \int_c^{kx_b} F(kx)\, d\varphi + P^2 \tau_b \\ - \left(Px_a - \frac{PaP}{2kP} \int_{kx_a}^{c} F(kx)\, d\varphi + P^2 \tau_a \right) \end{array} \right] \right\} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp \left\{ i \left[\begin{array}{c} P(x_b - x_a) \\ + \frac{PaP}{2kP} \int_{kx_a}^{kx_b} F(kx)\, d\varphi + P^2 (\tau_b - \tau_a) \end{array} \right] \right\} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp \left\{ i \left[\begin{array}{c} P(x_b - x_a) \\ + \frac{PaP}{2kP} \int_{kx_a}^{kx_b} F(kx)\, d\varphi + \lambda P^2 \end{array} \right] \right\}, \\ \text{où } \lambda &= \tau_b - \tau_a. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Finalement nous obtenons

$$K\left(x_b, x_a; \lambda\right) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ i \left[\begin{array}{c} p\left(x_b - x_a\right) + \lambda p^2 \\ + \frac{pap}{2kp} \int_{kx_a}^{kx_b} F\left(kx\right) d\varphi \end{array} \right] \right\}, \tag{2.47}$$

où nous avons utilisé la relation

$$p = P + k\frac{PaP}{2kP} F\left(kx_b\right), \tag{2.48}$$

et donc la fonction de Green par la méthode semi classique est exactement la même que celle qui s'obtient directement par intégration.

En conclusion, nous devons obtenir la fonction de Green de deux manières différents : exacte et semi classique. Notre resultat est le même que celui de [5].

Par ailleurs, nous pouvons donner une autre forme pour la fonction de Green.

En effet, (2.30) a la forme suivante

$$G\left(x_b, x_a\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \exp\left\{-i\lambda m^2\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{i\left(pMp + p \triangle x\right)\right\},$$

où

$$M = \left[\lambda + \frac{a}{2\left(kx_a - kx_b\right)} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right].$$

M est une matrice.

Intégrons sur p. Le résultat est

$$G\left(x_b, x_a\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} (\det M)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\lambda \exp\left\{-i\lambda m^2\right\} \exp\left\{\triangle x M^{-1} \triangle x\right\}.$$

Comme le determinant de la matrice M

$$\begin{aligned} \det M &= \exp\{Tr \ln M\} = \exp\left\{ Tr \ln \left[\lambda + \frac{a}{2\left(kx_a - kx_b\right)} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right] \right\} \\ &= \exp\left\{ Tr \ln[\lambda] \ln \left[1 + \frac{a}{2\left(kx_a - kx_b\right)} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right] \right\} \\ &= \exp\left\{ Tr \ln[\lambda] \left[\frac{a}{2\left(kx_a - kx_b\right)} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right] \right\} \\ &= 1, \quad Tra = 0; \end{aligned}$$

alors la fonction de Green prend la forme suivante

$$
\begin{aligned}
G\left(x_b, x_a\right) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \exp\left\{\triangle x M^{-1} \triangle x\right\} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \exp\left\{-i\lambda m^2\right\} \exp\left\{\triangle x \left[\lambda + \frac{a}{2\left(kx_a - kx_b\right)} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi\right]^{-1} \triangle x\right\},
\end{aligned}
$$

qui est celle que l'on devrait trouver.

Chapitre 3

Propagateur d'une particule libre de Dirac dans un champ gravitationnel : projections globale et locale

3.1 Introduction

La description de la dynamique du spin et son insertion dans le formalisme des intégrales de chemins semble être à l'heure actuelle problématique en raison de la non commutativité de ses trois composantes. Si dans le cas non relativiste, les états cohérents via des oscillateurs de type fermionique (ne décrits pas des variables de Grassmmanns) ou de type bosonique ont permis de les insérer facilement, dans le cas relativiste et plus particulièrement pour l'équation de Dirac il existe diverses formulations d'intégral de chemins qui ont été proposées, parmi lesquelles nous citons celle qui nous a semblé la plus maniable pour les calculs à cause de la simplicité de la formulation intégrale de chemins d'un noyau [2], [4] avec des poids de la forme en $\exp\{iS\}$ affectés aux chemins. S étant une action supersymétrique décrivant par l'intermédaire des variables bosoniques et fermioniques, le mouvement à la fois externe et interne de la particule relativiste.

Le but de ce chapitre est encore la détermination de la fonction de Green, mais cette fois ci pour une particule de Dirac libre en mouvement dans un champ gravitationnel. Dans le cas

global nous pouvons omettre la matrice γ^5 [4] dans la formulation des intégrales de chemins.

C'est ainsi que la fonction de Green d'un système peut être obtenue soit par

-l'approche dite globale :

$$S(x_b, x_a) = \left(-\gamma^\mu \hat{p}_\mu \mid_b + \frac{1}{2} F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu \mid_b + m\right) G(x_b, x_a), \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned} G(x_b, x_a) &= i \exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int_E D\Psi \\ &\times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \left[\begin{array}{c} p\dot{x} + \left(p^2 - m^2 - papF - \frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right) \\ -i\Psi_n\dot{\Psi}^n \end{array} \right] + \Psi_n(\lambda)\Psi^n(0) \right\} \mid_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

-ou l'approche dite locale :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int Dx \int Dp \int_E D\Psi \\ &\times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \left[\begin{array}{c} p\dot{x} + \left(p^2 - m^2 - papF - \frac{1}{2}(pa\Psi)\,(k\Psi)\,F'\right) \\ + \left(-(\Psi.p) + \frac{1}{2}F(\Psi.ap) - m\Psi^5\right)\chi - i\Psi_n\dot{\Psi}^n \end{array} \right] + \Psi_n(\lambda)\Psi^n(0) \right\} \mid_{\theta=0} \end{aligned} \tag{3.3}$$

L'objet de ce chapitre et de voir comment à partir du calcul de ces intégrales, obtenir la solution pour une particule de Dirac libre dans un champ graviationnel faible en déterminant exactement la fonction de Green suivant les deux approches dites globale et locale.

La démarche que nous suivons pour la détermination de la fonction de Green est la même que celle utilisée dans la thèse de Zeggari [8]. Elle consiste essentiellement à introduire deux identités :

-la 1ère dépend de la variable qui caractérise la gravitation.

-et la 2ème relative au spin de forme semblable à la 1ère.

Dans nos calculs un soin particulier est porté aux équations classiques dans les deux cas global (3.2) et local (3.3).

3.2 Construction des fonctions de Green

La fonction de Green causale $S(x_b, x_a)$, dont il s'agit de calculer par l'approche global et local, est par définition solution de l'équation suivante

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{i}{2}F(\varphi)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\partial_\nu - m\right) S(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a), \tag{3.4}$$

où γ^μ sont les matrices de Dirac habituelles vérifiant les relations

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_- = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

et

$$\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu \quad , \quad \varphi = kx. \tag{3.6}$$

Dans l'espace de configuration, (3.4) devient

$$\left(-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu - m\right) S(x_b, x_a) = \delta^4(x_b, x_a). \tag{3.7}$$

Le propagateur $S(x_b, x_a)$ est comme nous le savons l'élément de matrice

$$S(x_b, x_a) =< x_b \mid \hat{S} \mid x_a >, \tag{3.8}$$

dans l'espace des coordonnées. Symboliquement, nous avons

$$(-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu - m)\hat{S} = I. \tag{3.9}$$

ou encore

$$(-(\tilde{\gamma}.\hat{p}) + \frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p}) - m\gamma^5)\tilde{S} = I, \tag{3.10}$$

c'est à dire l'opérateur $\hat{S}$ est l'inverse de (3.10)

$$(-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu - m).$$

ou bien

$$(-(\tilde{\gamma}.\hat{p}) + \frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p}) - m\gamma^5).$$

Une remarque cependant doit être faite : la matrice γ^5 est définie par

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3; \left(\gamma^5\right)^2 = -1,$$

et afin de suivre la procédure de Gitman, posons

$$S = \tilde{S}\gamma^5$$

Dans le cas global contrairement au cas local nous savons qu'il est inutile d'introduire γ^5.Alors nous avons les égalités suivantes pour le cas global

$$\begin{aligned}
\left(-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)a^{\mu\nu}\gamma_\mu\hat{p}_\nu - m\right)^{-1} &= \left(-\gamma^\mu\hat{p}_\mu\,|_b + \frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu\,|_b + m\right) \\
&\times \left[i\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda\begin{pmatrix}-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu \\ -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu \\ +m\end{pmatrix}\right\}\right], \\
&= \begin{pmatrix}-\gamma^\mu\hat{p}_\mu\,|_b + \frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu\,|_b \\ +m\end{pmatrix} G(x_b, x_a), \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

avec la relation entre $\hat{S}$ et $\hat{G}$

$$S(x_b, x_a) = \begin{pmatrix}-\gamma^\mu\hat{p}_\mu\,|_b + \frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu\,|_b \\ +m\end{pmatrix} G(x_b, x_a), \qquad (3.12)$$

où

$$G(x_b, x_a) = i\left[\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda\begin{pmatrix}-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu \\ -m\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\gamma^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F(kx)\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu \\ +m\end{pmatrix}\right\}\right].$$

Pour le cas local, nous avons

$$\left(-(\tilde{\gamma}.\hat{p})+\frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p})-m\gamma^5\right)^{-1} = \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp\left\{i\left[\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}-(\tilde{\gamma}.\hat{p})+\frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p})\\ -m\gamma^5\end{array}\right)^2\\ +\chi\left(\begin{array}{c}-(\tilde{\gamma}.\hat{p})+\frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p})\\ -m\gamma^5\end{array}\right)\end{array}\right]\right\}$$

$$= \int_0^\infty d\lambda \int d\chi$$

$$\times \exp\left\{i\left[\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}p^2-m^2-\hat{p}a\hat{p}F\\ +\frac{i}{2}\hat{p}a\sigma kF'\end{array}\right)\\ +\chi\left(\begin{array}{c}-(\tilde{\gamma}.\hat{p})+\frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p})\\ -m\gamma^5\end{array}\right)\end{array}\right]\right\}, \tag{3.13}$$

et la fonction de Green à calculer dans le cas local est la suivante

$$\tilde{S}(x_b,x_a)=\int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp\left\{i\left[\begin{array}{c}\left(p^2-m^2-\hat{p}a\hat{p}F+\frac{i}{2}\hat{p}a\sigma kF'\right)\\ +\chi\left(-(\tilde{\gamma}.\hat{p})+\frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p})-m\gamma^5\right)\end{array}\right]\right\}.$$

Les paramètres λ et χ sont des variables respectivement de type bosonique et fermionique [13], où χ verifie les propriétés suivantes

$$\chi^2=0; \qquad \int d\chi=0; \qquad \int \chi d\chi=1,$$

جامعة جيجل
مصلحة الاقتناء
المكتبة المركزية

3.3 Calcul des fonctions de Green

Les noyaux G et $\tilde{S}$ à calculer dans les cas global et local étant respectivement

$$G(x_b,x_a)=i\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{-i\lambda\hat{H}_g(\hat{p},\hat{x})\right\}, \tag{3.14}$$

et

$$\tilde{S}(x_b,x_a)=\int_0^\infty d\lambda \int \exp\left(-i\lambda\hat{H}_l(\chi,\hat{p},\hat{x})\right)d\chi, \tag{3.15}$$

avec dans le cas global

$$\begin{aligned}
\hat{H}_g &= \left(-\gamma^\mu \hat{p}_\mu + \frac{1}{2}F\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu - m\right)\left(-\gamma^\rho \hat{p}_\rho + \frac{1}{2}F\gamma_\rho a^{\rho\beta}\hat{p}_\beta + m\right) \\
&= \left[\begin{array}{c} -\gamma^\mu \hat{p}_\mu(-\gamma^\rho \hat{p}_\rho) - \gamma^\mu \hat{p}_\mu(\frac{1}{2}F\gamma_\rho a^{\rho\beta}\hat{p}_\beta) - \gamma^\mu \hat{p}_\mu m \\ +\frac{1}{2}F\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu(\frac{1}{2}F\gamma_\rho a^{\rho\beta}\hat{p}_\beta) \\ +\frac{1}{2}mF\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu - m(-\gamma^\rho \hat{p}_\rho) - m(\frac{1}{2}F\gamma_\rho a^{\rho\beta}\hat{p}_\beta) \\ -m^2 + \frac{1}{2}F\gamma_\mu a^{\mu\nu}\hat{p}_\nu(-\gamma^\rho \hat{p}_\rho) \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Aprés un calcul simple, nous obtenons

$$H_g = \left(p^2 - m^2 - \hat{p}a\hat{p}F + \frac{i}{2}\hat{p}a\sigma kF'\right).$$

Dans le cas local, calculons d'abord

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(-(\tilde{\gamma}.\hat{p}) + \frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p}) - m\gamma^5\right)\left(-(\tilde{\gamma}.\hat{p}) + \frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p}) - m\gamma^5\right) \\
&= (\tilde{\gamma}.\hat{p})^2 + (m\gamma^5)^2 - \frac{1}{2}\left[(\tilde{\gamma}.\hat{p})F(\tilde{\gamma}.a\hat{p}) + \frac{1}{2}F(\tilde{\gamma}.a\hat{p})(\tilde{\gamma}.\hat{p})\right], \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

où

$$A = -(\tilde{\gamma}.\hat{p}) + \frac{1}{2}F(kx)(\tilde{\gamma}.a\hat{p}) - m\gamma^5. \qquad (3.17)$$

Alors

$$\hat{H}_l = \left(p^2 - m^2 - \hat{p}a\hat{p}F + \frac{i}{2}\hat{p}a\sigma kF'\right) + \chi\left(-(\gamma.\hat{p}) + \frac{1}{2}F(\gamma.a\hat{p}) - m\gamma^5\right).$$

Passons à la représentation des integrales de chemins, nous avons d'abord pour les cas

-global

$$G(x_b, x_a) = i\int_0^\infty d\lambda < x_b \mid \exp\{-i\lambda H_g(\hat{p}, \hat{x})\} \mid x_a >, \qquad (3.18)$$

-et local

$$\tilde{S}(x_b, x_a) = \int_0^\infty d\lambda \int < x_b \mid \exp\left(-i\lambda \hat{H}_l(\chi, \hat{p}, \hat{x})\right) \mid x_a > d\chi. \qquad (3.19)$$

Procédons comme d'habitude :

-inserons des projecteurs entre deux opérteurs d'évolution infinitésimaux successifs

$$\int d^4x_n \mid x_n >< x_n \mid = 1, \qquad (3.20)$$

-développons l'éxponentielle jusqu'au 1^{er}ordre par rapport à $\triangle\tau$,

$$< x_n \mid \exp\{-i\lambda H_g(\hat{p},\hat{x})\triangle\tau\} \mid x_{n-1} >=< x_n \mid 1 - i\lambda H_g(\hat{p},\hat{x})\triangle\tau \mid x_{n-1} >, \tag{3.21}$$

$$< x_n \mid \exp\left\{-i\lambda \hat{H}_l(\chi;\hat{p},\hat{x})\triangle\tau\right\} \mid x_{n-1} >=< x_n \mid 1 - i\lambda \hat{H}_l(\chi;\hat{p},\hat{x})\triangle\tau \mid x_{n-1} >, \tag{3.22}$$

-inserons des prjecteurs dans l'espace des p

$$\int d^4p_n \mid p_n >< p_n \mid = 1, \tag{3.23}$$

-utlisons les propriétés

$$\hat{p}_n \mid p_n >= p_n \mid p_n > \quad , \quad \delta^4(p-p') =< p \mid p' > .$$

Alors nous avons pour les cas

- global

$$\begin{aligned} < \; x_n \mid \exp\{-i\lambda H_g(\hat{p},\hat{x})\triangle\tau\} \mid x_{n-1} > &\sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,[1 - i\lambda H_g(p_n,\bar{x}_n)\triangle\tau] \\ &\times \exp\{ip_n(x_n - x_{n-1})\} \\ = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp&\left\{i\left(p_n(\frac{x_n - x_{n-1}}{\triangle\tau}) - i\lambda H_g(\bar{x}_n,p_n)\triangle\tau\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

-et local

$$\begin{aligned} < \; x_n \mid \exp\left\{-i\lambda \hat{H}_l(\chi)\triangle\tau\right\} \mid x_{n-1} > &\sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[1 - i\lambda \hat{H}_l(\chi)\triangle\tau\right] \\ &\times \exp\{ip_n(x_n - x_{n-1})\} \\ = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp&\left\{i\left(p_n(\frac{x_n - x_{n-1}}{\triangle\tau}) - i\lambda H_l(\bar{x}_n,\chi,p_n)\triangle\tau\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

où

$$\bar{x}_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

Donc (3.18)et (3.19) deviennent

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a) \;=\; & i\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots dx_{N-1} \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_N}{(2\pi)^4} \\ & \times \exp\left\{i\left[\sum_{n=1}^{N} p_n \frac{\triangle x_n}{\triangle\tau} - \lambda H_g(p_n,\bar{x}_n)\right]\triangle\tau\right\}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

et

$$\tilde{S}(x_b,x_a) = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_{N-1}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}...\frac{d^4p_N}{(2\pi)^4}$$
$$\times \exp\left\{ i\left[\sum_{n=1}^{N} p_n\frac{\Delta x_n}{\Delta\tau} - \lambda H_l(\chi,p_n,\bar{x}_n)\right]\Delta\tau\right\}, \tag{3.27}$$

ou encore sous forme compacte

$$G(x_b,x_a) = iT\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau\left[p\dot{x} + \begin{pmatrix} p^2-m^2 \\ -papF+\frac{i}{2}pa\sigma kF' \end{pmatrix}\right]\right\}. \tag{3.28}$$

$$\tilde{S}(x_b,x_a) = T\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp$$
$$\times\exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x} + \left(p^2-m^2-papF+\frac{i}{2}pa\sigma kF'\right) \\ +\left(-(\gamma.p)+\frac{1}{2}F(\gamma.ap)-m\gamma^5\right)\chi \end{array}\right]\right\}. \tag{3.29}$$

Il reste à éliminer les matrices γ, en les remplaçant par des variables de Grassmmann.

Pour cela utilisons la relation suivante

$$T\exp\{F(\gamma^n(\tau))\} = \exp\left\{F(\frac{\delta_L}{\delta\rho_n})\right\}T\exp\left\{\int_0^\lambda \rho_n\gamma^n d\tau\right\}|_{\rho=0} \tag{3.30}$$

où l'opérateur $T\exp\left\{\int_0^\lambda \rho_n\gamma^n d\tau\right\}$ est définit sous forme intégrale de chemins, comme suit

$$T\exp\left\{\int_0^\lambda \rho_n\gamma^n d\tau\right\} = \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int D\Psi\,|_{\Psi_0+\Psi_1=\theta},$$
$$\times\exp\left\{\int_0^\lambda(\Psi_n\dot{\Psi}^n - 2i\rho_n\Psi^n)d\tau + \Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\right\}, \tag{3.31}$$

et comme

$$\sigma^{\mu\nu}\to\frac{i}{2}[\Psi^\mu,\Psi^\nu]_- = \begin{cases} i\Psi^\mu\Psi^\nu & \text{pour } \mu\neq\nu \\ i\Psi^2 = 0 & \text{pour } \mu=\nu \end{cases}, \tag{3.32}$$

nous constatons que le terme $pa\sigma k$ se factorise

$$pa\sigma k = i(pa\Psi)\xi,$$

où

$$\xi = k\Psi,$$

donc

$$\frac{i}{2}pa\sigma kF' \to -\frac{1}{2}(pa\Psi)\,(k\Psi)\,F'.$$

Ainsi , nous avons dans le cas

-global

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int_E D\Psi \\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x}+\left(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\,(k\Psi)\,F'\right) \\ -i\Psi_n\dot{\Psi}^n \end{array}\right] \\ +\Psi_n(\lambda)\,\Psi^n(0) \end{array}\Big|_{\theta=0}\right\} \end{aligned} \tag{3.33}$$

-local

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int_E D\Psi \\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x}+\left(\begin{array}{c} p^2-m^2-papF \\ -\frac{1}{2}(pa\Psi)\,(k\Psi)\,F' \end{array}\right) \\ +\left(-(\Psi.p)+\frac{1}{2}F(\Psi.ap)-m\Psi^5\right)\chi \\ -i\Psi_n\dot{\Psi}^n \end{array}\right] \\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0) \end{array}\Big|_{\theta=0}\right\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Utilions la caractéristique de la dépendance de la gravitation [10] en insérant l'identité

$$\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int Dp_\varphi\int D\varphi\exp\left\{i\int\limits_0^\lambda p_\varphi(\dot{\varphi}-k\dot{x})d\tau\right\}=1 \tag{3.35}$$

Alors respectivement nous avons pour les cas

-global

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}p\dot{x}+\left(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)\\+p_\varphi(\dot{\varphi}-k\dot{x})-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]|_{\theta=0}\right.\\
&\quad\left.+\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\right\}\\
&= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)\\+(p-kp_\varphi)\dot{x}+p_\varphi\dot{\varphi}-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]|_{\theta=0}\right.\\
&\quad\left.+\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\,|_{\theta=0}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

-et local

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)\\+\left(-(\Psi.p)+\frac{1}{2}F(\Psi.ap)-m\Psi^5\right)\chi\\+p\dot{x}+p_\varphi(\dot{\varphi}-k\dot{x})-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]|_{\theta=0}\right.\\
&\quad\left.+\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\right\}\\
&= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\\
&\quad\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)\\+\left(-(\Psi.p)+\frac{1}{2}F(\Psi.ap)-m\Psi^5\right)\chi\\+(p-kp_\varphi)\dot{x}+p_\varphi\dot{\varphi}-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\right.\\
&\quad\left.+\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\,|_{\theta=0}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Faisons le changement suivant

$$
\begin{aligned}
P &= p-kp_\varphi\\
&\Rightarrow\ p=P+kp_\varphi;\ dp=dP,
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

donc on trouve

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x}+\left(\begin{array}{c} p^2-m^2-papF\\ -\frac{1}{2}(pa\Psi)(k\Psi)F'\end{array}\right)\\ +2pkp_\varphi+p_\varphi\dot{\varphi}-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\}.\\
&= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\times\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\\
&\quad\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x}+\left(\begin{array}{c} p^2-m^2-papF\\ -\frac{1}{2}(pa\Psi)(k\Psi)F'\end{array}\right)\\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2pk)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\},
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\
&\quad\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\\
&\quad\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x}+\left(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)\\ +\left(-\Psi.p-kp_\varphi\Psi+\frac{1}{2}F(\Psi.ap)-m\Psi^5\right)\chi\\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Une intégration par partie, le $1^{\acute{e}r}$ terme se trouvant dans l'action,

$$
\int\limits_0^\lambda \dot{x}pd\tau=(x_bp_b-x_ap_a)-\int\limits_0^\lambda x\dot{p}d\tau,
\tag{3.41}
$$

nous donne dans les cas :

-global

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp \\
&\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\,(-\dot{p}x)\right\} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F') \\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2pk)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\right. \\
&\left.\qquad +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\right\}, \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

-et local

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F') \\ -\left(\Psi.p+\xi p_\varphi-\frac{1}{2}F(\Psi.ap)+m\Psi^5\right)\chi \\ -\dot{p}x+p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\right. \\
&\left.\qquad +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\right\}. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Pour les deux cas nous pouvons intégrer sur les chemins $x(\tau)$. On obtient

$$\int Dx\exp\left(-i\int_0^\lambda x\dot{p}d\tau\right)=\delta(\dot{p}).$$

Le résultat simple exprime que l'impulsion reste constante au cours du mouvement

$$p_1=p_2=...=p_n=p.$$

Ainsi nous avons pour les cas

-global

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{i(x_bp_b-x_ap_a)\right\}\delta(\dot{p}) \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)(k\Psi)F') \\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2pk)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\right. \\
&\left.\qquad +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\right\}, \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

-et local

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dp\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\\ &\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\exp\left\{i(x_bp_b-x_ap_a)\right\}\delta(\dot{p})\\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}(p^2-m^2-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)(k\Psi)F')\\ -\left(\Psi.p-\frac{1}{2}F(\Psi.ap)+\xi p_\varphi+m\Psi^5\right)\chi\\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\}. \end{aligned}\tag{3.45}$$

Intégrons sur les p, il vient pour les cas

-global

$$\begin{aligned}G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\\ &\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}(-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)(k\Psi)F')\\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2pk)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\}, \end{aligned}\tag{3.46}$$

-et local

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{\begin{array}{c}ip(x_b-x_a)\\ +i\lambda\left(p^2-m^2\right)\end{array}\right\}\\ &\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int Dp_\varphi\int D\varphi\int_E D\Psi\\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}(-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)(k\Psi)F')\\ -\left(\Psi.p-\frac{1}{2}F(\Psi.ap)+\xi p_\varphi+m\Psi^5\right)\chi\\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)-i\Psi_n\dot{\Psi}^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\}. \end{aligned}\tag{3.47}$$

Utilisons la propriété de factorisation du terme d'interaction spin-champ [10] en introduisant l'identité

$$\int d\xi_a d\xi_b\delta(\xi_a-k\Psi_a)\int Dp_\xi\int D\xi\exp\left\{i\int\limits_0^\lambda p_\xi(\dot{\xi}-k\dot{\Psi})d\tau\right\}=1 \tag{3.48}$$

où ξet p_ξ sont des variables de Grassmann impaires.

Alors G et S deviennnent

-cas global

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int d\xi_a d\xi_b\delta(\xi_a-k\Psi_a)\\ &\int Dp_\varphi\int D\varphi\int Dp_\xi\int D\xi\int_E D\Psi\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\}\\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(-papF(\varphi)-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)\\ +p_\xi(\dot\xi-k\dot\Psi)-i\Psi_n\dot\Psi^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\end{array}\right\}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

-cas local

$$\begin{aligned} \tilde S(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\int d\varphi_a\int d\varphi_b\\ &\times\delta(\varphi_a-kx_a)\int d\xi_a d\xi_b\delta(\xi_a-k\Psi_a)\int Dp_\varphi\int D\varphi\int Dp_\xi\int D\xi\int_E D\Psi\\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(-papF-\frac{1}{2}(pa\Psi)\xi F'\right)-\left(\begin{array}{c}\Psi.p-\frac{1}{2}F(\Psi.ap)\\ +\xi p_\varphi+m\Psi^5\end{array}\right)\chi\\ +p_\xi(\dot\xi-k\dot\Psi)+p_\varphi\left(\dot\varphi+2kp\right)\\ -i\Psi_n\dot\Psi^n\end{array}\right]\\ +\Psi_n(\lambda)\Psi^n(0)\mid_{\theta=0}\end{array}\right\}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Passons maintenant aux vitesses ω via la relation bien connue, définie par

$$\Psi^n(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\lambda\epsilon(\tau-\tau')\omega^n(\tau')d\tau'+\frac{\theta^n}{2}. \tag{3.51}$$

Nous pouvons vérifier par une dérivation par raport à τ

$$\frac{d\Psi^n(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\lambda\frac{d\epsilon(\tau-\tau')}{d\tau}\omega^n(\tau')d\tau'=\omega^n(\tau),$$

$$\epsilon(\tau-\tau')=\theta(\tau-\tau')-\theta(\tau'-\tau),$$

que

$$\frac{d\Psi^n(\tau)}{d\tau}=\int\limits_0^\lambda\delta(\tau-\tau')\omega^n(\tau')d\tau'=\omega^n(\tau),$$

est bien la définition de la vitesse.

De plus, nous pouvons voir successivement que

$$\begin{aligned}
\Psi^n(0) &= \frac{1}{2}\int_0^\lambda \epsilon(0-\tau')\omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2} = -\frac{1}{2}\int_0^\lambda \omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2} \\
\Psi^n(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_0^\lambda \epsilon(\lambda-\tau')\omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2} \\
\Psi^5(\tau) &= \frac{1}{2}\int_0^\lambda \varepsilon(\tau-\tau')\omega^5(\tau')d\tau' + \frac{\theta^5}{2},
\end{aligned} \tag{3.52}$$

et que

$$\begin{aligned}
\Psi^n(\lambda)+\Psi^n(0) &= \frac{1}{2}\int_0^\lambda \omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\lambda \omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2} = \theta^n \qquad \forall\omega, \\
\Psi^n(\lambda)\Psi^n(0) &= -\frac{\theta^n}{2}\int_0^\lambda \omega^n(\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda \Psi_n\dot{\Psi}^n d\tau &= \int_0^\lambda \Psi_n(\tau)\dot{\Psi}^n d\tau = \int_0^\lambda d\tau\left(\frac{1}{2}\int_0^\lambda \epsilon(\tau-\tau')\omega^n(\tau')d\tau' + \frac{\theta^n}{2}\right)\omega^n(\tau) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\lambda d\tau d\tau'\left(\int_0^\lambda \epsilon(\tau-\tau')\omega^n(\tau')\right)\omega^n(\tau) + \frac{\theta^n}{2}\left(\int_0^\lambda d\tau\omega^n(\tau)\right).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda d\tau\Psi_n\dot{\Psi}^n + \Psi^n(\lambda)\Psi^n(0) &= -\frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_0^\lambda d\tau d\tau'\omega^n(\tau')\epsilon(\tau-\tau')\omega^n(\tau) \\
&= -\frac{1}{2}\omega * \epsilon * \omega,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

et

$$\int_E D\Psi \to \int_E D\omega,$$

où nous avons adopté la notation condensée de Gitman [12].

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda \\
&\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\}\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\xi\int Dp_\xi\int_E D\omega\delta(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta) \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(-papF(\varphi)+\frac{i}{4}(pa\left(\epsilon*\omega+\theta\right))\xi F'\right)\\ +p_\xi(\dot\xi-k\omega)+p_\varphi(\dot\varphi+2\lambda kp)\end{array}\right]\\ -\frac{1}{2}\omega*\epsilon*\omega\end{array}\right\}|_{\theta=0} \\
&= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\}\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\varphi\int Dp_\varphi\int D\xi\int Dp_\xi\int_E D\omega\delta(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta) \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\lambda\left(-papF(\varphi)+\frac{i}{4}pa\theta\xi F'+\frac{i}{4}pa\left(\epsilon*\omega\right)\xi F'\right)\\ +p_\xi(\dot\xi-k\omega)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)\end{array}\right]\\ -\frac{1}{2}\omega*\epsilon*\omega\end{array}\right\}, \quad (3.56)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde S(x_b,x_a) &= \left\{\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\right. \\
&\left.\begin{array}{c}\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int d\xi_a d\xi_b\\ \int Dp_\varphi\int D\varphi\int Dp_\xi\int D\xi\int_E D\omega\delta(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta)\end{array}\right\} \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\lambda\left(-papF(\varphi)+\frac{i}{4}(pa\left(\epsilon*\omega+\theta\right))\xi F'\right)\\ -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}(\epsilon*\omega+\theta)p-\frac{1}{2}F\left(\epsilon*\omega+\theta\right)ap\\ +2\xi p_\varphi+m\left(\epsilon*\omega^5+\theta^5\right)\end{array}\right)\chi\\ +p_\xi(\dot\xi-k\omega)+p_\varphi\left(\dot\varphi+2kp\right)\end{array}\right]\\ -\frac{1}{2}\omega*\epsilon*\omega\end{array}\right\}. \quad (3.57)
\end{aligned}
$$

Maintenant effectuons le changement suivant

$$
\omega'^\mu(\tau)\xrightarrow{!}\omega^\mu(\tau)+ik'^\mu\int\limits_0^\lambda d\tau'\epsilon^{-1}(\tau-\tau')p_\xi(\tau'),
$$

ou encore

$$\bar{\omega}^{\mu}(\tau) \to \omega^{\mu}(\tau) + ik^{\mu}(\epsilon^{-1} * p_{\xi}),$$

ainsi

$$k\bar{\omega}(\tau) = k\omega(\tau),$$

et comme

$$\begin{aligned}\bar{\omega} * \epsilon * \bar{\omega} &= \left[\omega + ik(\epsilon^{-1} * p_{\xi})\right] * \epsilon * \left[\omega + ik(\epsilon^{-1} * p_{\xi})\right] \\ &= \omega * \epsilon * \omega + 2ik\omega p_{\xi},\end{aligned}$$

et

$$\epsilon * \bar{\omega} = \epsilon * \omega + ikp_{\xi}.$$

On obtient alors pour les cas

-global

$$\begin{aligned}G(x_b, x_a) &= i \exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\lambda \int d\varphi_a \int d\varphi_b \delta(\varphi_a - kx_a) \\ &\quad \int D\varphi \int Dp_{\varphi} \int d\xi_a \int d\xi_b \int D\xi \int Dp_{\xi} \\ &\quad \int_E D\omega \delta(\xi_a + \frac{k}{2}(\omega - \theta)) \\ &\quad \times \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right)\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int_0^{\lambda} d\tau \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} -papF(\varphi) \\ +\frac{i}{4}(pa\,(\epsilon * \omega + \theta))\xi F' \end{array} \right) \\ +p_{\xi}(\dot{\xi} - k\omega) + p_{\varphi}(\dot{\varphi} + 2kp) \end{array} \right] \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2}(\omega * \epsilon * \omega - 2ik\omega p_{\xi}) \right\}\end{aligned} \tag{3.58}$$

-et local

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\} \\
&\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\times\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\xi\int Dp_\xi\int_E D\omega\delta(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta)) \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left(p_\xi(\dot{\xi}-k\omega)+p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)\right)\right\} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}-papF(\varphi)\\+\frac{i}{4}(pa\left(\varepsilon*\omega-ikp_\xi+\theta\right))\xi F'\end{array}\right)\\ -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}\left(\varepsilon*\omega-ikp_\xi+\theta\right)p_\mu\\-\frac{i}{2}F\left(\varepsilon*\omega-ikp_\xi+\theta\right)a^{\mu\nu}p_\nu\\+2\xi p_\varphi+m\left(\varepsilon*\omega^5+\theta^5\right)\end{array}\right)\chi\end{array}\right]\right\} \\
&\qquad -\frac{1}{2}(\omega*\varepsilon*\omega-2ik\omega p_\xi)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Pour integrer sur les variables de vitesses; nous remarquons que nous avons la variable ω dans la fonction δ.Utilisons sa représentation intégrale

$$
\begin{aligned}
&\delta(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta)) \\
&= \int dp_{\zeta_a}\exp\left\{ip_{\zeta_a}(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta))\right\},
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

où p_{ζ_a}, est une variable de Grassmann. Pour les deux cas nous avons

-cas global

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\xi\int Dp_\xi\int_E D\omega \\
&\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}-papF(\varphi)\\+\frac{i}{4}\left[pa\left(\epsilon*\omega-ikp_\xi+\theta\right)\right]\xi F'\end{array}\right)\\+p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)+p_\xi(\dot{\xi}-k\omega)\end{array}\right]\right. \\
&\qquad -\frac{1}{2}(\omega*\epsilon*\omega-2ik\omega p_\xi) \\
&\qquad \left.+p_{\zeta_a}(\xi_a+\tfrac{k}{2}(\omega-\theta))\right\}|_{\theta=0}.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

-cas local

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\xi\int Dp_\xi\int_E D\omega \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[p_\xi(\dot{\xi}-k\omega)+p_\varphi(\dot{\varphi}+2kp)\right]\right\} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-papF(\varphi)\\+\frac{i}{4}(pa(\varepsilon*\omega-ikp_\xi+\theta))\xi F'\end{pmatrix}\\(\varepsilon*\omega-ikp_\xi+\theta)\,p_\mu\\-\frac{1}{2}F\left(\varepsilon*\omega-ikp_\xi+\theta\right)a^{\mu\nu}p_\nu\\+2\xi p_\varphi+m\left(\varepsilon*\omega^5+\theta^5\right)\end{pmatrix}\chi\right]\right. \\
&\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}(\omega*\varepsilon*\omega-2ik\omega p_\xi)\\+p_{\zeta_a}(\xi_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta))\end{matrix}\right\}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Procédons aux intégrations sur les vitesses.

Intégrons d'abord sur les vitesses ω^5,le résultat est simplement égal à

$$\int D\omega^5\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\omega_5*\epsilon*\omega^5+m\epsilon*\omega^5\chi\right)\right\}=1. \tag{3.63}$$

Les intégrales sur les ω^μayant la forme suivante

$$\int D\omega^\mu\exp\left\{\int_0^\lambda\left[-\frac{1}{2}\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+J_\mu\omega^\mu\right]d\tau\right\},$$

avec $J_\mu(\tau)$ est définie par

-dans le cas global

$$J_\mu(\tau)=-\frac{1}{4}\int_0^\lambda dsp^\rho a_{\rho\mu}\xi\left(s\right)F'\left(s\right)\varepsilon(\tau-s)+\frac{i}{2}k_\mu p_{\xi_a}. \tag{3.64}$$

-dans le cas local

$$J_\mu(\tau).=-\frac{1}{4}\int_0^\lambda dsp^\rho a_{\rho\mu}\xi\left(s\right)F'\left(s\right)\varepsilon(\tau-s)-\frac{1}{2}\chi\int_0^\lambda\left[p_\mu+a_{\mu\nu}p^\nu\right]F\left(s\right)\varepsilon(\tau-s)ds+\frac{i}{2}k_\mu p_{\xi_a}. \tag{3.65}$$

Le résultat de l'intégration est

- dans le cas global

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_0^\lambda d\tau d\tau' J_\mu(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')J^\mu(\tau')\right\} \\
&= \exp\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_0^\lambda d\tau d\tau' \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{4}\int_0^\lambda dsp^\rho a_{\rho\mu}\xi(s)F'(s)\varepsilon(\tau-s) \\ +\frac{i}{2}k_\mu p_{\xi_a} \end{array}\right] \\ \times\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{4}\int_0^\lambda ds' p^\beta a^\mu_\beta \xi\left(s'\right)F'\left(s'\right)\varepsilon(\tau'-s') \\ +\frac{i}{2}k^\mu p_{\xi_a} \end{array}\right] \end{array}\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{32}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')papa\xi(s)\xi\left(s'\right)F'(s)F'\left(s'\right)\right\},
\end{aligned}
$$

-dans le cas local

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_0^\lambda d\tau d\tau' \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{4}\int_0^\lambda dsp^\rho a_{\rho\mu}\xi(s)F'(s)\varepsilon(\tau-s) \\ -\frac{1}{2}\chi\int_0^\lambda [p_\mu + a_{\mu\nu}p^\nu]F(s)\varepsilon(\tau-s)ds \\ +\frac{i}{2}k_\mu p_{\xi_a} \end{array}\right] \\ \times\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{4}\int_0^\lambda ds' p^\beta a^\mu_\beta \xi\left(s'\right)F'\left(s'\right)\varepsilon(\tau'-s') \\ -\frac{1}{2}\chi\int_0^\lambda [p^\mu + a^{\mu\nu}p_\nu]F\left(s'\right)\varepsilon(\tau'-s')ds' \\ +\frac{i}{2}k^\mu p_{\xi_a} \end{array}\right] \end{array}\right\} \qquad (3.66) \\
&= \exp\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{32}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')papa\xi(s)\xi\left(s'\right)F'(s)F'\left(s'\right) \\ +\frac{1}{8}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')pa[p+ap]F'(s)F\left(s'\right)\xi(s)\chi \\ +\frac{i}{4}\int_0^\lambda ds' pkF\left(s'\right)p_{\xi_a}\chi \end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

Nous avons simplifiés les calculs grâce aux propriétés

$$
ka = 0, \qquad k^2 = 0. \qquad (3.67)
$$

Les propagateurs G et $\tilde{S}$ prennent alors les formes suivantes

-cas global

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\ &\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\xi\int Dp_\xi \\ &\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\right\} \\ &\times\exp\left\{\begin{array}{l} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-papF(\varphi)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)+p_\xi\dot\xi \\ +p_{\zeta_a}(\xi_a-\frac{k}{2}\theta)+\frac{i}{4}pa\theta\xi F'\end{array}\right] \\ \times\exp\left\{\begin{array}{c}+\frac{1}{32}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')papa \\ \xi(s)\xi(s')F'(s)F'(s')\end{array}\right\}\end{array}\right\}|_{\theta=0}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

-cas local

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a) \\ &\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\xi_a\int d\xi_b\int D\xi\int Dp_\xi \\ &\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\} \\ &\times\exp\left\{\begin{array}{l} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-papF(\varphi)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)+p_\xi\left(\dot\xi+\frac{1}{2}pk\chi\right) \\ +p_{\zeta_a}(\xi_a-\frac{k}{2}\theta)+\frac{i}{4}pa\theta\xi F' \\ -\frac{1}{2}(\theta p_\mu+2\xi p_\varphi+m\theta)\chi\end{array}\right] \\ \times\exp\left\{\begin{array}{c}+\frac{1}{32}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')papa \\ \xi(s)\xi(s')F'(s)F'(s') \\ +\frac{1}{8}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')pa\left[p+ap\right] \\ F'(s)F(s')\xi(s)\chi\end{array}\right\}|_{\theta=0}\end{array}\right\}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Eliminons les p_ξ par intégrations, nous avons des fonctions de Dirac qui apparaissent dans les deux cas :

-global

$$\begin{aligned} \int Dp_\xi\exp\left\{i\int\limits_0^\lambda d\tau p_\xi\dot\xi\right\} &= \delta(\dot\xi)\Rightarrow\dot\xi=\frac{d\xi}{d\tau}=0 \\ &\Rightarrow \xi=\xi_a=\xi_b=c^{st}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

-et local

$$\begin{aligned}
\int Dp_\xi \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau p_\xi \left(\dot{\xi} + \frac{1}{2}pk\chi\right)\right\} &= \delta(\left(\dot{\xi} + \frac{1}{2}pk\chi\right)) \\
&\Rightarrow \dot{\xi} = -\frac{1}{2}pk\chi \Rightarrow \frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{1}{2}pk\chi \\
&\Rightarrow \zeta(\tau) = \zeta_a - \frac{pk\chi}{2}\tau. \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

Les deux expressions (3.68) et (3.69) se réduisent à

-cas global

$$\begin{aligned}
G(x_b, x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\lambda \int d\varphi_a \int d\varphi_b \delta(\varphi_a - kx_a) \\
&\quad \int D\varphi \int Dp_\varphi \int d\xi_a \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right))\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \begin{bmatrix} -papF(\varphi) + p_\varphi(\dot{\varphi} + 2kp) \\ +p_{\zeta_a}(\xi_a - \frac{k}{2}\theta) + \frac{i}{4}pa\theta\xi_a F' \end{bmatrix} \right\} |_{\theta=0} \\
&= i\exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\lambda \int d\varphi_a \int d\varphi_b \delta(\varphi_a - kx_a) \\
&\quad \int D\varphi \int Dp_\varphi \int d\xi_a \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right))\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \begin{bmatrix} -papF(\varphi) + p_\varphi(\dot{\varphi} + 2kp) \\ +p_{\zeta_a}(\xi_a - \frac{k}{2}\theta) + \frac{i}{4}pa\theta\xi_a F' \end{bmatrix} |_{\theta=0} \right\} \\
&= i\exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\lambda \int d\varphi_a \int d\varphi_b \delta(\varphi_a - kx_a) \\
&\quad \int D\varphi \int Dp_\varphi \int d\xi_a \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right))\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \begin{bmatrix} -papF(\varphi) + p_\varphi(\dot{\varphi} + 2kp) \\ +p_{\zeta_a}\left[\xi_a - \frac{k}{2}\theta\right] + \frac{i}{4}pa\theta\xi_a F' \end{bmatrix} |_{\theta=0} \right\}. \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

-cas local

$$
\begin{aligned}
\bar{S}(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \\
&\times \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right)\right)\right\} \int d\varphi_a \int d\varphi_b \delta(\varphi_a - kx_a) \\
&\times \int D\varphi \int Dp_\varphi \int d\xi_a \int dp_{\zeta_a} \int d\zeta_b \delta\left(\zeta_b - \xi_a + \frac{1}{2}pk\chi\right) \\
&\times \exp\left\{\begin{array}{c}
i\int\limits_0^\lambda d\tau \left[\begin{array}{c} -papF(\varphi) + p_\varphi(\dot{\varphi} + 2kp - i\zeta_a\chi) \\ +p_{\zeta_a}(\xi_a - \frac{k}{2}\theta - \frac{1}{4}kp\chi) + \frac{i}{4}pa\theta\xi_a F' \\ -\frac{1}{2}\left(\theta p + m\theta^5\right)\chi \end{array}\right] \\
+\frac{1}{8}\int_0^\lambda \int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')pa\left[p + ap\right] \\
F'(s)\,F(s')\left(\zeta_a - \frac{pk}{2}\chi s\right)\chi \\
+\frac{1}{32}\int_0^\lambda \int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')papa \\
\left(\zeta_a - \frac{pk}{2}\chi s\right)\left(\zeta_a - \frac{pk}{2}\chi s'\right)F'(s)\,F'(s')
\end{array}\right\}\Big|_{\theta=0}. \qquad (3.73)
\end{aligned}
$$

Intégrons également sur les p_{ζ_a}.Nous avons pour les cas

-global

$$
\begin{aligned}
\int dp_{\xi_a} \exp\left\{i\int\limits_0^\lambda d\tau p_{\zeta_a}\left[\xi_a - \frac{k}{2}\theta\right]\right\} &= \delta\left[\xi_a - \frac{k}{2}\theta\right] \\
&\Rightarrow \xi_a - \frac{k}{2}\theta = 0 \\
&\Rightarrow \xi_a = \xi_b = \frac{k}{2}\theta, \qquad (3.74)
\end{aligned}
$$

-et local

$$
\begin{aligned}
\int dp_{\xi_a} \exp\left\{i\int\limits_0^\lambda d\tau p_{\zeta_a}\left[\xi_a - \frac{k}{2}\theta - \frac{1}{4}kp\chi\right]\right\} &= \delta\left[\xi_a - \frac{k}{2}\theta - \frac{1}{4}kp\chi\right] \\
&\Rightarrow \xi_a - \frac{k}{2}\theta - \frac{1}{4}kp\chi = 0 \\
&\Rightarrow \xi_a = \frac{k}{2}\theta + \frac{1}{4}kp\chi. \qquad (3.75)
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que la condition au limite

$$\xi_a + \xi_b = k\theta,$$

est vérifiée.

Alors les fonctions de Green deviennent dans le cas

-global

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
&\quad\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\} \\
&\quad\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-papF(\varphi)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)\\ +\frac{i}{4}\left(p^\mu a_{\mu\nu}\theta^\nu\right)\left(k_\beta\theta^\beta\right)F'\end{array}\right]|_{\theta=0}\right\}. \\
&= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
&\quad\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\} \\
&\quad\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-papF(\varphi)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)\\ +\frac{i}{4}p^\mu a_{\mu\nu}\theta^\nu\theta^\beta k_\beta F'\end{array}\right]|_{\theta=0}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

-et dans le cas local

$$
\begin{aligned}
\tilde S(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\} \\
&\quad\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
&\quad\times\exp\left\{\begin{array}{c}
i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-papF(\varphi)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp-i\frac{k}{2}\theta\chi)\\ -\frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right)\chi\\ +\frac{i}{2}pa\theta\left(\frac{k}{2}\theta+\frac{1}{4}kp\chi\right)F'\end{array}\right]\\
+\frac{1}{8}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')pa\left[p+ap\right]\\
F'(s)F(s')\frac{k}{2}\theta\chi\\
+\frac{1}{32}\int_0^\lambda\int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s-s')papa\left(\frac{k}{2}\theta-\frac{pk}{2}\chi s\right)\\
\left(\frac{k}{2}\theta-\frac{pk}{2}\chi s'\right)F'(s)F'(s')
\end{array}\right\}|_{\theta=0}.
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

Donc $G(x_b,x_a)$ et $\tilde S(x_b,x_a)$ deviennent

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
&\quad\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\right\} \\
&\quad\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-papF(\varphi)+p_\varphi(\dot\varphi+2kp)\\ +\frac{i}{2}p^\mu a_{\mu\nu}\theta^\nu\theta^\beta k_\beta F'\end{array}\right]|_{\theta=0}\right\},
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n \frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right)\right\} \\
&\int d\varphi_a \int d\varphi_b \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\
&\times \exp\left\{\begin{array}{c} i\int_0^\lambda d\tau \left[\begin{array}{c} -papF(\varphi) + p_\varphi(\dot{\varphi} + 2kp - i\frac{k}{2}\theta\chi) \\ -\frac{1}{2}\left(\theta p + m\theta^5\right)\chi \\ +\frac{i}{2}pa\theta\theta kF' \end{array}\right] \\ +\frac{1}{8}\int_0^\lambda \int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s - s')pa\left[p + ap\right] \\ \times F'(s)\, F(s')\, \frac{k}{2}\theta\chi \\ +\frac{1}{32}\int_0^\lambda \int_0^\lambda dsds'\varepsilon(s - s')papa \\ \left(\frac{k}{2}\theta - \frac{pk}{2}\chi s\right)\left(\frac{k}{2}\theta - \frac{pk}{2}\chi s'\right) F'(s)\, F'(s') \end{array}\right\}|_{\theta=0}. \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

Intégrons sur les variables p_φ. Il apparait également des fonctions de Dirac avec comme arguments des équations qui donnent la relation entre les paramètres de temps propre τ et φ

-dans le cas global, nous avons

$$\begin{aligned}
\delta(\dot{\varphi} + 2kp) &\rightarrow \dot{\varphi} + 2kp = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d\varphi}{d\tau} = -2kp \\
&\Rightarrow d\tau = -\frac{d\varphi}{2kp}, \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

-et local

$$\begin{aligned}
\delta\left(\dot{\varphi} + 2kp - i\frac{k}{2}\theta\chi\right) &\rightarrow \dot{\varphi} + 2kp - i\frac{k}{2}\theta\chi = 0 \\
\frac{d\varphi}{d\tau} &= -2kp\left(1 + \frac{ik\theta}{2\lambda kp}\chi\right) \\
&\Rightarrow \frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{1}{-2kp\left(1 + \frac{ik\theta}{2\lambda kP}\chi\right)} \\
&\Rightarrow \frac{d\tau}{d\varphi} = -\frac{1}{2kp}\left(1 + \frac{ik\theta}{2kp}\chi\right)^{-1} = -\frac{1}{2kp}\left(1 - \frac{ik\theta}{2kp}\chi\right). \qquad (3.81)
\end{aligned}$$

Alors (3.78) et (3.79) se réduisent à

-dans le cas global

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a) &= i\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\varphi_a\int d\varphi_b\delta(\varphi_a-kx_a-(2kp)\lambda) \\ &\times\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\} \\ &\times\int D\varphi\exp\left\{i\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\left[\frac{pap}{2kp}F(\varphi)d\varphi-\frac{1}{2}pa\theta^\nu\theta^\beta kF'\frac{d\varphi}{2kp}\right]|_{\theta=0}\right\}, \end{aligned} \tag{3.82}$$

-et local

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\} \\ &.\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\left[\frac{pap}{2kP}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}F(\varphi)d\varphi-\left(\frac{pa\theta\theta k}{4kp}\right)\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right]|_{\theta=0} \\ -\frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right)\chi \end{array}\right\}. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Intégrons sur le paramètre de Grassmann χ [13]

-pour uniquement le cas local en utlisant les propriétés d'intégrations connues

$$\int d\chi=0;\qquad \int\chi d\chi=1, \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned} &\int d\chi\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right)\chi\right\} \\ &= \int d\chi\exp\left\{\left[-\frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right)\right]\chi\right\} \\ &= \int d\chi+\frac{1}{2}\int\chi d\chi\left(\theta p+m\theta^5\right). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\int d\chi\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right)\chi\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right), \end{aligned} \tag{3.86}$$

et donc dans le cas local

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\left(\frac{1}{2}\left(\theta p+m\theta^5\right)\right) \\ &\times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right)\} \\ &.\times\exp\left\{i\left[\frac{pap}{2kp}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}F(\varphi)d\varphi-\left(\frac{pa\theta\theta k}{4kp}\right)\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right]|_{\theta=0}\right\}. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Comme

$$\delta(\varphi_a - kx_a - (2kp)\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int dp_\varphi \exp\{ip_\varphi[\varphi_a - kx_a - (2kp)\lambda]\}. \tag{3.88}$$

Procédons enfin à la dérivation en utilisant la formule suivante

$$\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\} f(\theta)\,|_{\theta=0} = f\left(\frac{\partial_L}{\partial\theta}\right)\exp(i\gamma^n\theta_n)\,|_{\theta=0}. \tag{3.89}$$

avec

-dans le cas global

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \exp\left[-i\frac{pa\theta^\nu\theta^\beta k}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right] \\ &= 1 - \frac{ip\theta^\alpha\theta^\beta ak}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi, \end{aligned} \tag{3.90}$$

-et dans le cas local

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2}(\theta p + m\theta^5) \\ &\quad\times\exp\left\{-i\frac{pa\theta\theta k}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right\}, \end{aligned} \tag{3.91}$$

et en utilisant le developpement suivant

$$\exp(i\gamma^\mu\theta_\mu) = 1 + i\gamma_\mu\theta^\mu - \frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu + \frac{i}{6}\theta_\mu\theta_\nu\theta_\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma + \theta_0\theta_1\theta_2\theta_3\gamma^5. \tag{3.92}$$

et la règle de dérivation

$$\frac{\partial_L^2}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\theta^\mu\theta^\nu\right]\gamma_\mu\gamma_\nu = \gamma_\beta\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma_\beta = -2i\sigma_{\alpha\beta}. \tag{3.93}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}\left(\frac{ip\theta^\alpha\theta^\beta ak}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right)|_{\theta=0} \\ &= \left(\frac{ip\frac{\partial_L^2}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}ak}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right)\exp(i\gamma^n\theta_n) \\ &= \exp\left(\frac{p\sigma ak}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right), \end{aligned} \tag{3.94}$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left(\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}f(\theta)\,|_{\theta=0}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_L}{\delta\theta^\alpha}p+m\frac{\delta_L}{\delta\theta^5}\right)\\
&\quad\times\left(\begin{array}{c}1+i\gamma_\mu\theta^\mu+\frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu+\frac{i}{6}\theta_\mu\theta_\nu\theta_\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\\ +\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3\gamma^5\end{array}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_L}{\delta\theta^\alpha}p+m\frac{\delta_L}{\delta\theta^5}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{ip\frac{\partial_t^2}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}ak}{4k\left(x_b-x_a\right)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right)\left(\begin{array}{c}1+i\gamma_\mu\theta^\mu+\frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\\ +\frac{i}{6}\theta_\mu\theta_\nu\theta_\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\\ +\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3\gamma^5\end{array}\right)\\
&= \left(-\gamma^\mu p_\mu+m\gamma^5\right)\exp\left(\frac{p\sigma ak}{4k\left(x_b-x_a\right)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right),
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

-dans le cas global

$$
\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}f(\theta)\,|_{\theta=0}=\exp\left(\frac{p\sigma ak}{4k\left(x_b-x_a\right)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right)
\tag{3.96}
$$

-et dans le cas local

$$
\exp\left\{i\gamma^n\frac{\delta_L}{\delta\theta^n}\right\}f(\theta)\,|_{\theta=0}=\left(-\gamma^\mu p_\mu+m\gamma^5\right)\exp\left(\frac{p\sigma ak}{4k\left(x_b-x_a\right)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\right)
\tag{3.97}
$$

Alors connaissant le noyau dans le cas

- global

$$
\begin{aligned}
G(x_b,x_a) &= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{i\left[\begin{array}{c}\frac{pap}{2k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi\\ -\frac{pa\sigma k}{4k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\frac{dF}{d\varphi}d\varphi\end{array}\right]\right\}\\
&= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)\right\}\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{i\left[\begin{array}{c}\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi\\ -\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right)\end{array}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

-et dans le cas local

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\left(-\gamma^\mu p_\mu + m\gamma^5\right)\\ &\times \exp\left\{ i\left[\begin{array}{c}\frac{pap}{2kp}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} F(\varphi)d\varphi\\ -\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F\left(kx_b\right)-F\left(kx_a\right)\right)\end{array}\right]|_{\theta=0}\right\}.\end{aligned} \tag{3.99}$$

Et par l'application de l'opérateur

$$\left(-\gamma^\mu(p_\mu)|_b+\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}(p_\nu)|_b+m\right),$$

nous obtenons la fonction de Green globale relative à l'équation de Dirac :

$$\begin{aligned}S(x_b,x_a) &= \left(-\gamma^\mu(p_\mu)|_b+\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}(p_\nu)|_b+m\right)G(x_b,x_a)\\ &= \left(-\gamma^\mu(p_\mu)|_b+\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}(p_\nu)|_b+m\right)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\\ &\quad\times\exp\left\{i\left[p(x_b-x_a)+\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi-\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right)\right]\right\}\\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\\ &\quad\times\left\{\begin{array}{c}\left(-\gamma^\mu(p_\mu)|_b+\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}(p_\nu)|_b+m\right)\\ \times\exp\left\{ip(x_b-x_a)\right\}\\ +\left(-\gamma^\mu(p_\mu)|_b+\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}(p_\nu)|_b+m\right)\\ \times\exp\left\{i\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi\right\}\\ +\left(-\gamma^\mu(p_\mu)|_b+\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}(p_\nu)|_b+m\right)\\ \times\exp\left\{-i\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right)\right\}\end{array}\right\}\\ &\quad\times\exp\left\{i\left[p(x_b-x_a)+\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi-\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

Où

$$
\begin{aligned}
S(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\} \\
&\times \left\{\begin{array}{c} -\gamma^\mu p_\mu - \frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}p_\nu - \gamma^\mu \frac{pap}{2kP}kF(kx_b) \\ +\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}p_\nu k\frac{pap}{2kp}F(kx_b) \\ -i\gamma^\mu i\frac{pa\sigma k}{4kp}kF'(kx_b) \\ -i\frac{1}{2}F(kx_b)\gamma_\mu a^{\mu\nu}i\frac{pa\sigma k}{4kp}kF'(kx_b)+m \end{array}\right\} \\
&\times \exp\left\{i\left[\begin{array}{c} p(x_b-x_a)-\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi \\ -\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right) \end{array}\right]\right\},
\end{aligned}
$$

d'où nous allons trouvé

$$
\begin{aligned}
S(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\left(-\gamma^\mu p_\mu+m\right) \\
&\times \exp\left\{i\left[\begin{array}{c} p(x_b-x_a)+\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi \\ -\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right) \end{array}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

et si nous enlevons γ^5de (3.99), nous allons trouvé

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda\left(p^2-m^2\right)\right\}\left(-\gamma^\mu p_\mu+m\right) \\
&\times \exp\left\{i\left[\begin{array}{c} p(x_b-x_a)+\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi \\ -\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right) \end{array}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

Intégrons sur λ, nous allons obtenir

$$
\begin{aligned}
S(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\left(-\gamma^\mu p_\mu+m\right)}{p^2-m^2+i\varepsilon} \\
&\times \exp\left\{i\left[\begin{array}{c} p(x_b-x_a)+\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b}F(\varphi)d\varphi \\ -\frac{pa\sigma k}{4kp}\left(F(kx_b)-F(kx_a)\right) \end{array}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

Remarquons que $S(x_b,x_a)$ donné par l' équation (3.102) n'est pas symétrique par rapport à la position initiale a et finale b.

Notons que

$$
\begin{aligned}
\exp\left\{-\frac{pa\sigma k}{4kp}(F(kx_b)-F(kx_a))\right\} &= \left(1-\frac{pa\sigma k}{4kp}(F(kx_b)-F(kx_a))\right) \\
&= \left(1+\frac{pa\sigma k}{4kp}F(kx_b)\right)\left(1-\frac{pa\sigma k}{4kp}F(kx_a)\right),
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

et par la suite (3.103), devient symétrique à l'aide des deux propriétés suivantes

$$ka = 0 \ , k^2 = 0.$$

Donc finalement l'équation (3.102) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} S(x_b, x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(1 + \frac{pa\sigma k}{4kp} F(kx_b)\right) (-\gamma^\mu p_\mu + m) \left(1 - \frac{pa\sigma k}{4kp} F(kx_a)\right) \\ &\times \exp\left\{ i \left[p(x_b - x_a) + \frac{pap}{2kp} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right] \right\} ; \end{aligned} \tag{3.104}$$

qui est la fonction de Green d'une particule de Dirac en intéraction avec un champ gravitationnel faible.

3.4 Détermination des fonctions d'ondes

La détermination des fonctions d'ondes, s'éffectue en utilisant le théorème des résidus. Les pôles de la fonction de Green sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} p_+^0 &= \omega - i\epsilon = (p^2 + m^2)^{\frac{-1}{2}} - i\epsilon \\ p_-^0 &= -\omega - i\epsilon = -(p^2 + m^2)^{\frac{-1}{2}} - i\epsilon. \end{aligned} \tag{3.105}$$

avec p l'énergie de la paricule libre.

- Pour avec $t_b > t_a$,le contour d'intégration est choisi en dessous de l'axe réel et la convergence (l'intégrale =0 à l'infini) est assurée. Le pôle p_+^0 seul intervient dan le calcul du résidu

- De même pour $t_b < t_a$,le contour d'intégration est choisi en dessus de l'axe des réels et seul p_-^0 contribue au calcul du résidu .

Aprés application du théorème des résidus, nous obtenons

$$\begin{aligned} S(x_b, x_a) &= -i\theta(t_b - t_a) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{p^0}\right) \left(1 + \frac{pa\sigma k}{4kp} F(kx_b)\right) \frac{(-\gamma^\mu p_\mu + m)}{2m} \left(1 - \frac{pa\sigma k}{4kp} F(kx_a)\right) \\ &\times \exp\left\{ \left[ip(x_b - x_a) + i\frac{pap}{2kp} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right] \right\} \\ &-i\theta(t_a - t_b) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{p^0}\right) \left(1 - \frac{pa\sigma k}{4kp} F(kx_a)\right) \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{2m} \left(1 + \frac{pa\sigma k}{4kp} F(kx_b)\right) \\ &\times \exp\left\{ \left[ip(x_b - x_a) + i\frac{pap}{2kp} \int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi) d\varphi \right] \right\}, \end{aligned} \tag{3.106}$$

et pour exraire les fonctions d'onde , utilisons les opérateurs de projection sur les états d'énergie positive et négative [11]

$$\begin{aligned}\Lambda_+ &= \sum_{\pm s} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{2m} \\ \Lambda_- &= \sum_{\pm s} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \frac{(-\gamma^\mu p_\mu + m)}{2m}.\end{aligned} \tag{3.107}$$

Ainsi l'expression (3.106) se décompose réspectivement à deux termes :

-le premier $\Psi^+_{s,p}(x)$ est relatif aux états d'énergies positives, et le deuxième $\Psi^-_{s,p}(x)$ concerne les énergies négatives.

$$\begin{aligned}S(x_b,x_a) &= -i\theta(t_b-t_a)\int d^3p \sum_{\pm s} \Psi^+_{s,p}(x_b)\bar{\Psi}^+_{s,p}(x_a) \\ &\quad +i\theta(t_b-t_a)\int d^3p \sum_{\pm s} \Psi^-_{s,p}(x_b)\bar{\Psi}^-_{s,p}(x_a).\end{aligned} \tag{3.108}$$

Les fonctions d'ondes normalisées décrivant le mouvement de la particule de Dirac pour notre problème de champ gravitationnel faible sont finalement les suivantes

$$\begin{aligned}\Psi^+_{s,p}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(\frac{m}{p^0})^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{pa\sigma k}{4kp}F(kx_b)\right)u(p,s) \\ &\quad \times \exp\left\{ipx + i\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi)d\varphi\right\},\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}\Psi^-_{s,p}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(\frac{m}{p^0})^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{pa\sigma k}{4kp}F(kx_a)\right)v(p,s) \\ &\quad \times \exp\left\{-ipx + i\frac{pap}{2kp}\int_{kx_a}^{kx_b} F(\varphi)d\varphi\right\},\end{aligned} \tag{3.110}$$

où $u(p,s)$ et $v(p,s)$ sont les spineurs de l'équation de Dirac libre. Ils sont tels que

$$\begin{aligned}\bar{u}(p,s)u(p,s) &= 1 \\ \bar{v}(p,s)v(p,s) &= -1\end{aligned}$$

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans cette thèse nous pouvons voir qu'il a été principalement question de l'étude de particules libres de Klein Gordon et de Dirac en mouvement dans un champ gravitatonnel faible suivant le formalisme des intégrales de chemins.

Pour la particule de Klein Gordon, grâce aux caractéristiques simples dont dépend la métrique, l'obtention de la fonction de Green a été facile et ceci via l'introduction d'une seule identité et l'utilisation de transformations linéaires.

Pour la particule de Dirac, il y a le spin qui a quelque peu compliqué la formulation et l'obtention de la fonction de Green. Une formulation dite globale et allégée de la matrice superflue γ^5 a permis dans une première étape d'obtenir assez rapidement la fonction de Green, et dans une deuxième étape la formulation locale a été utilisée pour une redétermination de cette même fonction de Green. Pour la particule de Dirac le mouvement de la particule est décrit par deux variables : une bosonique relative à la position et donc au mouvement externe et l'autre Grassmanienne relative à la variable du spin et donc au mouvement interne.

Le traitement a nécessité l'introduction de deux identités [10] pour réduire les mouvements quadri-dimensionnels à des mouvements uni-dimensionnels, ce qui a permis ensuite l'extraction des équations identiques à celles de la mécanique classique, et par la suite le calcul de la fonction de Green a été réduit à une seule contribution des chemins classiques.

Pour conclure nous pouvons dire que ce travail nous a permis d'apprendre comment trouver la fonction de Green uniquement par intégration tout en manipulant des variables classiques et non classiques comme les variables de Grassmann et surtout ce qui est l'essentiel comment

contourner les difficultés rencontrées.

Enfin notons que dans le cas général lorsque le champ extérieur n'a pas une forme standard, les calculs et donc la dynamique sont difficilement maîtrisables et la solution de problèmes par ces formalismes intégrales devient difficile à obtenir.

Une dernière remarque, nous pouvons voir dans les appendices A, B, C que les équations de la mécanique classique peuvent s'obtenir à partir des équations d'Euleur Lagrange.

Première partie

Appendices

Appendice A

Le but de cet appendice est de montrer que les équations apparues dans les fonctions de Klein Gordon peuvent s'obtenir en utilisant les équations de mouvement. En effet pour la particule de spin 0, nous avons

$$H(p,x) = p^2 - m^2 - (pap)\, F\,(kx)\,, \tag{4.1}$$

et à partir des équations d'Hamilton nous avons

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = (pap)\, k_\mu F'\,(kx)\,, \tag{4.2}$$

$$\dot{x}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p^\mu} = -2p_\mu + (ap)_\mu\, F\,(kx) + (pa)_\mu\, F\,(kx)\,. \tag{4.3}$$

Multiplions par k^μ ces deux équations. On en déduit

$$k\dot{p} = 0, \;\rightarrow kp = c^{st}\;, \tag{4.4}$$

et

$$k\dot{x} = -2pk, \tag{4.5}$$

car

$$k^2 = 0,\; ka = 0. \tag{4.6}$$

Appendice B

Le but de cet appendice est de montrer que les équations apparues dans les fonctions de Dirac peuvent encore s'obtenir en utilisant les équations de mouvement. En effet pour la particule de spin 1/2, nous avons dans l'approche globale

$$H(x,p,\Psi) = p^2 - m^2 - (pap)\,F - \frac{1}{2}(pa\Psi)\,(k\Psi)\,F'. \tag{4.7}$$

Les équations d'Hamilton nous donnent d'abord pour les variables externes

$$\dot{x}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p^\mu} = -2p_\mu + (ap)_\mu\,F\,(kx) + (pa)_\mu\,F\,(kx) + \frac{1}{2}(a\Psi)_\mu\,(k\Psi)\,F'. \tag{4.8}$$

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial H}{\partial x} = -\,(pap)\,k_\mu F' - \frac{1}{2}(pa\Psi)\,(k\Psi)\,k_\mu F''. \tag{4.9}$$

Pour les variables internes (de Grassmann) nous avons

$$\frac{\delta S}{\partial\,(\Psi^\mu)} = 0 \Rightarrow -2i\dot{\Psi}_\mu - \frac{1}{2}\left[(pa)_\mu(k\Psi) - (pa\Psi)k_\mu\right]F' = 0. \tag{4.10}$$

Multiplions par k^μ, nous obtenons

$$k\dot{p} = 0 \Rightarrow kp = c^{st} \tag{4.11}$$

$$k\dot{x} = -2pk \Rightarrow \dot{\varphi} = -2pk. \tag{4.12}$$

$$k\dot{\Psi} = 0 \Rightarrow \xi = c^{st}. \tag{4.13}$$

Appendice C

Le but de cet appendice est de montrer que les équations apparues dans les fonctions de Dirac peuvent encore s'obtenir en utilisant les équations de mouvement. En effet pour la particule de spin 1/2, nous avons dans l'approche locale

$$H(p,x,\Psi) = p^2 - m^2 - (pap)\,F\,(kx) - \frac{1}{2}\,(pa\Psi)\,(k\Psi)\,F' + \left(-(\Psi p) + \frac{1}{2}(\Psi ap)F - m\Psi^5\right)\chi \tag{4.14}$$

Les équations d'Hamilton nous donnent d'abord pour les variables externes

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\,(pap)\,k_\mu F'\,(kx) - \frac{1}{2}\,(pa\Psi)\,(k\Psi)\,k_\mu F'' + \frac{1}{2}(\Psi ap)\chi k_\mu F'. \tag{4.15}$$

$$\dot{x}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p^\mu} = -2p_\mu + (ap)_\mu\,F\,(kx) + (pa)_\mu\,F\,(kx) + \frac{1}{2}\,(a\Psi)_\mu\,(k\Psi)\,F + \Psi_\mu\chi - \frac{1}{2}(\Psi a)_\mu\chi F. \tag{4.16}$$

Pour les variables internes (de Grassmann) nous avons

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi^\mu} = 0 \rightarrow -2i\dot{\Psi}_\mu - \frac{1}{2}\,(pa)_\mu\,(k\Psi)\,F' + \frac{1}{2}\,(pa\Psi)\,k_\mu F' - p_\mu\chi + \frac{1}{2}(ap)_\mu\chi F = 0. \tag{4.17}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi^5} = 0 \rightarrow -2i\dot{\Psi}_5 - m\chi = 0. \tag{4.18}$$

Multiplions par k^μ ces équations, nous obtenons

$$k\dot{p} = 0 \rightarrow kp = c^{st}.$$

$$\begin{aligned} -2ik\dot{\Psi} - kp\chi &= 0 \Rightarrow \dot{\xi} = \frac{ikp}{2}\chi \\ &\Rightarrow \xi = \frac{ikp\tau}{2}\chi + c^{st}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} k\dot{x} &= -2pk + (k\Psi)\chi \Rightarrow \dot{\varphi} = -2pk + \xi\chi \\ &\Rightarrow \dot{\varphi} = -2pk + \left(\frac{ikp\tau}{2}\chi + c^{st}\right)\chi \\ &\Rightarrow \dot{\varphi} = -2pk + c^{st}\chi. \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\dot{\Psi}_5 = -\frac{im}{2}\chi \Rightarrow \omega_5 = -\frac{im}{2}\chi. \tag{4.21}$$

Bibliographie

[1] F.A.Berezin and M.S. Marinove : ann. Phys. **104** (1977)336.

[2] E.S Frandkin and D.M. Gitman, Rev. **D 44**, 3230 (1991).

[3] L.Brink, P. Di-Vecchia and P. Howe, Nucl. Phys. **B 118**, 76(1977).

[4] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, and A.W. Schreiber, Phys. Rev. **A 59**, 3 (1998).

[5] Vaidya A N, Hot M B and Farina C 1988 J. Phys. **A 21** 2239.

[6] A. Barducci and R. Giachetti , J.Phys. **A 38** 1615(2005).

[7] Schwinger J 1964 J. Math. Phys. **5** 1606.

[8] Zeggari S, Boudjedaa T and Chetouani L 2001 Phys. Scr. **64** 285.

[9] N. Boudiaf, T. Boudjedaa, L Chetouani, Eur. Phys. J. C **20**, 3 585 (2001).

[10] T. Boudjedaa, L Chetouani, L Guechi, T.F. Hammann, Physica Scripta **46**, 289 (1992).

[11] J.D. Bjorken, S.D. Drell, "Relativistic quantum mechanics" (McGraw Hill, New York 1964).

[12] D.M. Gitman, Nucl. Phys. **B 488**, 490(1997).

[13] D.M. Gitman and A V Saa, Class Quantum Grav. **10** (1993) 1447-14460.

[14] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (Mc Graw Hill, N.Y.1965).

[15] J. schwinger, Phys. Rev. **82** 664 (1951).

[16] Kleinert, H.,"Path Integral in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics"(World Scientific, Singapore 1990).

ملخص

قمنا بحل معادلة ديراك لجسيم نسبي موجود داخل حقل ضعيف للجاذبية وهدا من اجل إيجاد
*/ أولا دالة قرين لجسيم دو عزم داخلي يساوي0 و انطلاقا منها تحصلنا على دالة الموجة لنفس الجسيم.
*/ ثانيا دالة قرين لجسيم دو عزم داخلي يساوي2/1 و بنفس الطريقة تحصلنا على نفس دالة الموجة لهدا الجسيم وهدا في الحالتين
- إسقاط عام.
- إسقاط محلي.
و ما سهل لنا عملية الحساب استعمالنا لمسا واتين أحداهما خاصة بالجزء البوزوني و الأخرى خاصة بالجزء الفرميوني.

الكلمات المفتاحية/ حقل الجاذبية- معادلة ديراك- سبين- إسقاط عام- إسقاط محلي.

Résumé

L'objectif de ce travail est de résoudre l'équation de Klein Gordon et de Dirac pour une particule relativiste dans un champ gravitationnel faible. Nous avons calculé:
***/ premièrement la fonction de Green d'une particule de spin 0, et par la suite nous avons trouvé les fonctions d'ondes.**
***/ deuxièmement la fonction de Green d'une particule de spin 1/2, et par la suite nous avons trouvé les mêmes fonctions d'ondes dans les deux cas:**
- projection globale.
- projection locale.
Nous avons introduit deux identités: une bosonique et l'autre fermionique.

Mots clés **: champ gravitationnel, équation de Dirac, spin, projection globale, projection locale.**

Summary

We give the solution of the Dirac equation to one relativistic particle in week field of gravitation.
***/ first we calculate de Green function of particle spin 0, and we obtained the wave function for thus particle.**
***/ second we calculate de Green function of particle spin 1/2, and we obtained de wave function for thus particle for tow cases:**
- Globale projection.
- Locale projection.
We have introduce tow identities, the first for bosonic part, and the second for the fermionic part.