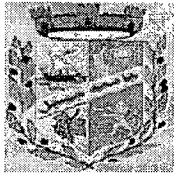
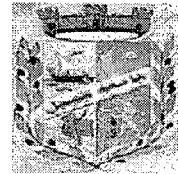


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

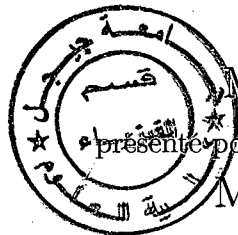


UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :



MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Saliha Beskri

THEME

Etude de l'équation de Dirac Super symétrie et
applications

Soutenu le :/...../2007

Devant le Jury :

Président :

N. Brihi

Prof.

Univ. Jijel

Rapporteur :

A. Lecheheb

MC

Univ. Mentouri

Examineurs :

L. Chetouani

Prof.

Univ. Mentouri

T. Boudjedaa

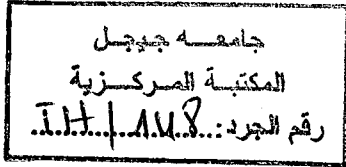
Prof.

Univ. Jijel

A. Boutâghou

MC

Univ. Jijel

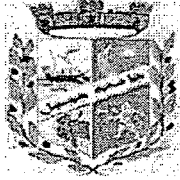


530.1/5

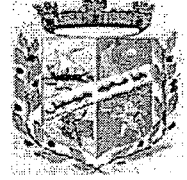
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Saliha Beskri

THEME

Etude de l'équation de Dirac Super symétrie et
applications

Soutenu le :/...../2007

Devant le Jury :

Président :	N. Brihi	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	A. Lecheheb	MC	Univ. Mentouri
Examineurs :	L. Chetouani	Prof.	Univ. Mentouri
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
	A. Boutaghoul	MC	Univ. Jijel

Remerciements

Tout mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté la santé et la patience qu'il m'a données pour terminer ce mémoire

Je tiens à remercier mon encadreur Mr Ahmed Lecheheb, Maître de conférences à l'université de Constantine, pour m'avoir confié ce sujet et pour l'aide et le temps et la disponibilité qu'il a bien voulu me consacrer.

Mes vifs remerciements vont à Mr. N. Brihi, Professeur à l'université de Jijel pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et à Mr. L. Chetouani, Professeur à l'université de Mentouri de constantine pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie en particulier, Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, qui a collaboré dans les différentes étapes de ce mémoire, son intervention a été déterminante dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie, également et sincèrement à Mr. M. Maamache Professeur à l'université de Sétif, et Mr. Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, et Mr. M. Merad, Professeur à l'université de Oum El Bouaghi.

Je remercie, également et sincèrement à M. A. Bounames, Professeur à l'université de Jijel pour son entière disponibilité, et Mr. A. Boutaghou, Maître de conférences à l'université de Jijel, et Mr. A. Tilbi. M. A.C. C à l'université de Jijel

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2004/2005, et ceux de la promotion qui nous ont précédé 2003/2004, et 2002/2003, et en particulier :Nacer, Mr. Ferkous, Chahinez, Nadia, Khalida, Akila et Wided.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et en particulier ma mère , et grand père, et mon père qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire, ainsi que mon frère Mohammed.

Table des matières

1	Introduction générale	6
2	La supersymétrie en mécanique quantique	9
2.1	Introduction	9
2.2	Formulation mathématique	10
2.3	Méthode de superpotentiel pour résoudre l'équation de Schrödinger	13
2.3.1	Les idées fondamentales et le potentiel supersymétrique	13
2.4	Les relations entre les valeurs propres et les fonctions propres des partenaires	15
2.5	Hierarchie d'Hamiltoniens partenaires	17
2.6	Invariance de forme	19
2.7	Exemple	22
2.7.1	Potentiel de Coulomb	22
3	La supersymétrie en mécanique quantique relativiste	25
3.1	Introduction	25
3.2	La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon	26
3.2.1	Introduction	26
3.2.2	La formulation de l'Hamiltonien de SUSY QM et la méthode de factorisation	26
3.3	La supersymétrie et l'équation de Dirac	27
3.3.1	Introduction	27
3.4	La résolution exacte de l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz	30
3.4.1	La formulation d'Hamiltonien de SUSY QM et la factorisation	30

3.4.2	L'équation de Dirac à une dimension	31
3.4.3	L'équation de Dirac tridimensionnelle	33
3.4.4	L'équation de Dirac à quatre dimensions	34
3.4.5	L'équation de Dirac avec le potentiel scalaire de Lorentz et le potentiel du monopole magnétique	36
4	L'équation de Riccati non hermitienne ; application à une classe de potentiels	39
4.1	Introduction	39
4.2	Extension complexe avec un seul paramètre K	
4.3	Extension complexe avec les paramètres K et K'	41
4.4	Les applications	42
4.4.1	Application à une classe de potentiels	42
4.4.2	Application : potentiel de Coulomb	46
5	La symétrie \mathcal{PT}	50
5.1	La symétrie en physique quantique	50
5.2	Le cadre théorique	51
5.3	La symétrie \mathcal{PT} en mécanique quantique relativiste	54
5.4	L'équation de Dirac à une dimension	55
5.5	La symétrie \mathcal{PT} pour l'équation de Dirac à une dimension	55
5.6	Interactions pseudo-scalaires non Hermitiennes	56
5.7	Application	60
5.7.1	Potentiel de Morse non hermitien	60
6	Conclusion générale	63
	Bibliographie	65

Chapitre 1

Introduction générale

La supersymétrie postule, pour chaque boson, l'existence d'une particule fermionique associée. Elle a été introduite pour la première fois en 1971, et ce n'était rien d'autre qu'une symétrie supposée entre fermions et bosons. Cette symétrie, qui ne suggère presque rien dans la partie expérimentale pour l'instant, sauf dans les formules et les considérations mathématiques, un peu comme l'hypothèse simplificatrice de Dirac qui avait déduit l'anti-matière à partir de l'existence d'une solution inverse de l'équation relativiste de l'électron. La supersymétrie est une théorie qui veut expliquer l'unification des quatre forces qui régissent le monde, Comme la supersymétrie n'est pas observée dans la nature il est alors nécessaire d'introduire en même temps un mécanisme de brisure de la supersymétrie.

En géométrie, le terme symétrie prend un sens plus général qui peut se définir comme une transformation qui ne change ni la forme, ni les dimensions d'une figure. On peut remarquer que le sens courant du mot symétrie correspond à un cas particulier de symétrie au sens géométrique du terme, qui consiste à inverser les objets par rapport à un plan.

Le statut de la notion de symétrie a beaucoup évolué. D'abord reconnue comme propriété des systèmes physiques, elle a ensuite été utilisée comme méthode théorique de génération de nouvelles solutions des équations qui gouvernent l'évolution de ces systèmes (d'où l'introduction du concept de groupe de Lie). En physique, la définition d'une symétrie est semblable à sa consœur géométrique mais s'applique aux lois de la nature et non plus aux figures géométriques. Ainsi une symétrie en physique est une transformation des variables du système qui peuvent être des variables géométriques qui ne changent pas la transformation des lois physiques. Les

physiciens ont très vite remarqué que les lois de la nature n'étaient pas modifiées par les transformations suivantes : transformation de parité, la conjugaison de charge et le renversement du temps. En 1954, les physiciens G. Lüders, W. Pauli et J. Schwinger ont démontré que si les mathématiques étaient une science exacte, toute théorie qui obéissait à la mécanique quantique et à la relativité devait également obéir à la "loi du bon sens". Formellement appelée la "symétrie CPT ", ce théorème assure une symétrie globale des lois de la nature. En particulier nous étudions la symétrie PT , c'est-à-dire invariance dans l'action de \mathcal{P} la parité et \mathcal{T} la renversement de temps.

Des systèmes quantiques symétriques qui exposent la symétrie PT ont acquis beaucoup d'intérêt ces dernières années. Cette symétrie a été étudiée en détail en mécanique quantique avec un Hamiltonien non hermitien qui possède des valeurs propres énergétiques réelles.

L'organisation de ce mémoire est comme suit : Introduction générale. Ensuite le deuxième chapitre est un bref rappel sur la théorie de la supersymétrie en mécanique quantique qui traite principalement l'équation de Schrödinger. Nous y verrons notamment qu'il est possible de factoriser l'Hamiltonien du système quelconque, afin de résoudre ce problème de façon aisée. Et nous montrons que l'étude de nouvelles symétries en physique ont toujours conduit à un rapprochement avec les mathématiques. Les interactions très fructueuses entre les sciences physiques et les mathématiques (les super-algèbres) ont facilité la résolution d'un grand nombre de problèmes. Ensuite, nous allons voir que la méthode de factorisation via les opérateurs a et a^+ que nous avons appliqué au problème de l'oscillateur harmonique à une dimension, peut être généralisée pour une classe de potentiels dits invariants de forme. Nous verrons qu'il est possible de trouver de nouveaux potentiels solubles algébriquement. Notons qu'on trouve, parmi les potentiels invariants de forme, des potentiels très connus (Oscillateur harmonique à trois dimensions, potentiel de Coulomb, potentiel de Rosen-Morse, ...) analytiquement solubles. Nous présenterons le cas du potentiel de Coulomb comme exemple.

Le sujet principal dans le troisième chapitre l'étude quantique d'un système physique exactement soluble par la structure supersymétrique dans le domaine relativiste. En particulier nous étudions l'équation de Dirac et l'équation de Klein-Gordon, nous allons voir que pour quelques problèmes physiques étudiés par la méthode $SUSYQM$, nous transformons l'équation de Klein-Gordon en forme de l'équation de Schrödinger afin de résoudre ce problème par

la structure de la supersymétrie. La section de Dirac est une présentation du procédé qui est une prolongation du raccordement supersymétrique connu entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger. L'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz est associée à une paire supersymétrique des Hamiltoniens de Schrödinger, dans l'approche supersymétrique. Nous décrivons la forme générale de la supersymétrie pour déterminer la solvabilité exacte d'un système de Dirac avec un potentiel de Lorentz à une dimension et à trois et quatre dimensions.

Dans le chapitre 4 nous allons utiliser cette technique pour résoudre l'équation de Dirac pour un classe de potentiels qui est une quantité purement imaginaire, et par conséquent l'Hamiltonien de système non hermitien. Comme cas particulier nous allons déduire les résultats pour le potentiel de Coulomb.

Le chapitre 5 est consacré à un rappel détaillé de la symétrie \mathcal{PT} en mécanique quantique, ensuite en mécanique quantique relativiste, et traite principalement l'équation de Dirac à une dimension avec des interactions pseudo-scalaires, nous terminons par une application, comme exemple le potentiel de Morse non hermitien.

Nous terminons ce travail par une Conclusion.

Chapitre 2

La supersymétrie en mécanique quantique

2.1 Introduction

En mécanique quantique, pour étudier la dynamique d'un système physique, il faut résoudre l'équation de Schrödinger, cette équation est une équation différentielle du premier ordre qui s'écrit sous la forme

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle \quad (2.1)$$

donc la description d'un système physique en mécanique quantique non relativiste, se fait au moyen d'un ket $|\Psi\rangle$ (Ψ fonction d'onde), ce ket est un réservoir d'information physique et est un vecteur d'un espace de Hilbert (fonction de carré sommable $\int dx^3 |\Psi\rangle\langle\Psi| < \infty$). Il existe plusieurs techniques qui ont été développées pour résoudre cette équation

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.2)$$

et notamment dans le cas des problèmes stationnaires comme la méthode des transformations unitaires, la méthode des intégrales de chemins et la méthode de factorisation etc...

La plus ancienne de ces méthodes est la méthode de factorisation qui consiste à exprimer l'opérateur Hamiltonien qui est un opérateur différentiel du second ordre, comme le produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre, plus une constante, avec l'obligation d'être adjoints l'un à l'autre.

En physique des particules, les physiciens s'attachent à réussir l'unification des quatre forces fondamentales par une théorie de super-symétrie.

Dans ce chapitre, nous décrirons la forme générale de la supersymétrie pour déterminer la solvabilité exacte d'un système physique en mécanique quantique, cette forme est basée sur la factorisation du système. La supersymétrie est une symétrie entre bosons et fermions : chaque fermion a un "superpartenaire" qui est un boson (et vice-versa). En mécanique quantique, la supersymétrie (*SUSY MQ*) peut être vue comme un outil mathématique permettant notamment de découvrir de nouveaux potentiels solubles analytiquement.

2.2 Formulation mathématique

L'étude des symétries en physique, a toujours conduit à un rapprochement avec les mathématiques et à des interactions très fructueuses entre les sciences physiques et mathématiques. Ceci a été le cas pour les transformations de Lorentz et de Poincaré en relativité restreinte.

Des théories supersymétriques décrivent les bosons et les fermions d'une façon unifiée, donc leur formulation algébrique se sert de commutateurs aussi bien que des anticommutateurs. Particulièrement l'algèbre de mécanique quantique supersymétrique inclut N opérateurs des supercharges Q_i et l'Hamiltonian supersymétrique H qui satisfait l'algèbre [1] appelé $S(N)$

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\} = \delta_{i,j} H & \text{et } i, j = 1, 2, \dots, N \\ [Q_i, H] = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Comme nous verrons plus tard, les résultats les plus importants de *SUSY QM* peuvent être obtenus pour $N = 2$, donc on a l'algèbre $S(2)$ et on va introduire une présentation de nouveaux opérateurs des charges

$$\begin{cases} Q = \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{2}} \\ Q^+ = \frac{Q_1 - iQ_2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (2.4)$$

qui donne

$$\begin{cases} \{Q, Q^+\} = H \\ Q^2 = (Q^+)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

avec

$$[Q, H] = [Q^+, H] = 0 \quad (2.6)$$

Dans un cadre plus général, s'il existe un opérateur Q qui satisfait à la fois les équations (2.5) et (2.6), le système étudié est dit supersymétrique. Les opérateurs de charge sont nilpotents et commutent avec l'Hamiltonien supersymétrique. On va maintenant s'occuper du problème de réalisation de la superalgèbre. Dans l'équation (2.6) on va considérer la réalisation matricielle suivante des opérateurs de charge

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

où A et A^+ sont des opérateurs, ainsi s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}$$

et nous pouvons interpréter l'Hamiltonien supersymétrique H comme une composition de deux Hamiltoniens scalaires H_- et H_+ , qui agissent dans le secteur bosonique et fermionique des états de base à deux composantes. Ces deux secteurs sont connectés par

$$\begin{cases} Q \begin{pmatrix} \Psi_b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\Psi_b \end{pmatrix} \\ Q^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+\Psi_f \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ψ_b et Ψ_f sont les fonctions propres respectivement de l'Hamiltonien bosonique $H_- = A^+A$ et de l'Hamiltonien fermionique $H_+ = AA^+$, où H_- et H_+ sont des Hamiltoniens supersymétriques partenaires. L'existence d'une super algèbre (2.6) et particulièrement la commutation des charges supersymétriques avec l'Hamiltonien supersymétrique a des implications importantes pour déterminer les spectres d'énergies de H_- et H_+ . Donc les opérateurs supersymétriques peuvent être considérés en terme d'opérateurs bosoniques et d'opérateurs fermioniques. Comme cas particulier, nous allons présenter le cas de l'oscillateur harmonique. Nous allons travailler dans un espace de Fock avec des opérateurs bosoniques et fermioniques de création et d'annihilation. Pour l'oscillateur harmonique supersymétrique, on va commencer par définir les opérateurs Q et Q^+ comme suit

$$Q = af^+ \quad , \quad Q^+ = a^+f \quad (2.9)$$

avec f^+ et f respectivement, des opérateurs de création et d'annihilation qui satisfont les relations d'anticommutation suivantes

$$\{f^+, f\} = 1 \quad , \quad \{f^+, f^+\} = \{f, f\} = 0 \quad (2.10)$$

De la même manière que les opérateurs bosoniques a et a^+ qui satisfont les relations de commutation habituelles

$$[a, a^+] = 1 \quad , \quad [a, a] = [a^+, a^+] = 0. \quad (2.11)$$

Une représentation simple des opérateurs fermioniques est donnée par

$$f = \sigma_+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f^+ = \sigma_- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

σ_+ et σ_- sont les matrices de Pauli.

Dans l'espace de Fock, le vecteur d'onde correspondant à l'Hamiltonien supersymétrique ci-dessus peut être vu comme l'état $|n_b, n_f\rangle$, où n_b est le nombre bosonique et n_f le nombre fermionique. Les équations suivantes caractérisent l'action des opérateurs a , a^+ et f^+ , f sur $|n_b, n_f\rangle$

$$\begin{cases} a |n_b, n_f\rangle = |n_b - 1, n_f\rangle \\ a^+ |n_b, n_f\rangle = |n_b + 1, n_f\rangle \\ f |n_b, n_f\rangle = |n_b, n_f - 1\rangle \\ f^+ |n_b, n_f\rangle = |n_b, n_f + 1\rangle \end{cases}$$

L'énergie ne change pas si, simultanément, on détruit un boson et on crée un fermion et vice-versa, c'est cette symétrie entre bosons et fermions qu'on appelle supersymétrie.

2.3 Méthode de superpotentiel pour résoudre l'équation de Schrödinger

2.3.1 Les idées fondamentales et le potentiel supersymétrique

L'état d'une particule est décrit par un vecteur d'un espace de Hilbert, donc nous allons considérer l'espace de Hilbert de fonction intégrable tel que

$$\langle \Psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \phi(x) dx \quad (2.13)$$

Un grand nombre de systèmes sont régis par les équations de l'oscillateur harmonique dans le cas des problèmes stationnaires. En effet, chaque fois que l'on étudie le comportement d'un système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable, on aboutit à des équations qui (à la limite des petites oscillations) sont celles d'un oscillateur harmonique. Notre but est d'exprimer un Hamiltonien arbitraire sous la forme d'oscillateur harmonique qu'il est possible de factoriser, afin de résoudre le problème de façon plus aisée. Pour cela on va définir un opérateur A comme suit

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2.14)$$

et par un calcul direct nous pouvons trouver un adjoint de l'opérateur A dans le sens du produit scalaire considéré

$$\langle A\Psi | \phi \rangle = \langle \Psi | A^+\phi \rangle$$

on a ainsi

$$\begin{aligned} \langle A\Psi | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi^{*'}(x) + W(x) \Psi^*(x) \right) \phi(x) dx \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi^*(x) \phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \phi'(x) + W(x) \phi(x) \right) dx \\ &= \langle \Psi | A^+\phi \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le premier terme de l'avant dernière formule disparaît puisque les fonctions Ψ et ϕ tendent vers zéro pour $x \rightarrow \pm \infty$ (comportement asymptotique). Alors

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2.16)$$

Les opérateurs A et A^+ sont des opérateurs de création et d'annihilation qui sont une généralisation des opérateurs a et a^+ pour le problème de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique avec

$$[\hat{A}, \hat{A}^+] = 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (2.17)$$

donc la relation de commutation de ces opérateurs A, A^+ n'est pas en général égale à l'unité comme le cas des opérateurs (a^+, a) de l'oscillateur harmonique ($[a, a^+] = 1$).

Nous avons défini l'Hamiltonien H_1 comme suit

$$\begin{aligned} H_1 &= A^+ A \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (2.19)$$

Cette équation est l'équation de Riccati, notons qu'il n'existe aucune technique générale de résolution de l'équation de Riccati pour n'importe quelle fonction $V(x)$, par conséquent, la *SUSY MQ* est applicable seulement lorsqu'on peut associer un superpotentiel vérifiant l'équation (2.19) et la fonction $W(x)$, est appelée superpotentiel. Elle est une fonction réelle différentiable.

Notons aussi que l'état fondamental pour cet Hamiltonien est défini pour l'énergie nulle ($E_0^{(1)} = 0$), alors

$$\begin{aligned} (H_1 \Psi_0(x) = 0) &\Leftrightarrow (A^+ A \Psi_0(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow (A \Psi_0(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donc, si on connaît la fonction propre de l'état fondamental, on obtient le superpotentiel (si la condition $A\Psi_0(x) = 0$ est satisfaite) et l'implication dans la direction opposée est aussi vraie, si on connaît le superpotentiel on obtient la fonction propre de l'état fondamental, alors la fonction propre de l'état fondamental s'écrit sous la forme

$$\Psi_0(x) = N_0 \exp \left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{-x}^x W(x') dx' \right) \quad (2.21)$$

où N_0 est une constante arbitraire qui peut être fixée par la condition de normalisation

$$\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1.$$

Considérons l'Hamiltonien $H_2 = AA^+$ qui est l'Hamiltonien supersymétrique partenaire de H_1 , soit

$$\begin{aligned} H_2 &= AA^+ \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (2.23)$$

Le potentiel $V_2(x)$ est le superpartenaire de $V_1(x)$.

2.4 Les relations entre les valeurs propres et les fonctions propres des partenaires

On a $\Psi_n^{(1)}(x)$, la fonction propre de H_1 avec la valeur propre $E_n^{(1)}$, et $\Psi_n^{(2)}(x)$ qui est la fonction propre de H_2 avec la valeur propre $E_n^{(2)}$

$$H_1 \Psi_n^{(1)}(x) = A^+ A \Psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)}(x) \quad (2.24)$$

et

$$H_2 \Psi_n^{(2)}(x) = AA^+ \Psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)} \Psi_n^{(2)}(x) \quad (2.25)$$

Nous allons montrer qu'il existe une correspondance entre les valeurs propres et les fonctions propres de deux systèmes décrits par les deux Hamiltoniens H_1 et H_2 avec les potentiels V_1 et V_2

2.4 Les relations entre les valeurs propres et les fonctions propres des partenaires

respectivement. Notons d'abord que les valeurs propres du premier Hamiltonien sont positives

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= E_n^{(1)} \langle \Psi_n^{(1)} | \Psi_n^{(1)} \rangle = \langle \Psi_n^{(1)} | H_1 \Psi_n^{(1)} \rangle = \langle \Psi_n^{(1)} | A^+ A \Psi_n^{(1)} \rangle \\ &= \langle A \Psi_n^{(1)} | A \Psi_n^{(1)} \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

donc pour $n > 0$ nous avons des énergies positives $E_n^{(1)} > 0$ et pour $n = 0$ la valeur propre $E_n^{(1)} = 0$ si et seulement si $A \Psi_n^{(1)} = 0$. Le même résultat analogue pour l'Hamiltonien H_2

$$E_n^{(2)} = \langle \Psi_n^{(2)} | H_2 \Psi_n^{(2)} \rangle = \langle \Psi_n^{(2)} | A A^+ \Psi_n^{(2)} \rangle = \langle A^+ \Psi_n^{(2)} | A^+ \Psi_n^{(2)} \rangle \geq 0 \quad (2.27)$$

alors pour $n > 0$ nous avons des énergies positives $E_n^{(2)} > 0$ et pour $n = 0$ la valeur propre $E_n^{(2)} = 0$ si et seulement si $A^+ \Psi_n^{(2)} = 0$

$$\begin{aligned} H_2 (A \Psi_n^{(1)}) &= A A^+ A \Psi_n^{(1)} = A H_1 \Psi_n^{(1)} \\ &= E_n^{(1)} (A \Psi_n^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Donc l'opérateur A transforme toutes les fonctions propres (sauf $\Psi_0^{(1)}$) normalisables de H_1 en fonctions propres de H_2 , et $(A \Psi_n^{(1)})$ est la fonction propre de H_2 pour l'énergie $E_n^{(1)}$

$$H_1 (A^+ \Psi_n^{(2)}) = A^+ A A^+ \Psi_n^{(2)} = A^+ H_2 \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} (A^+ \Psi_n^{(2)}) \quad (2.29)$$

Ainsi l'opérateur A^+ transforme toutes les fonctions propres (sauf $\Psi_0^{(2)}$) normalisables de H_2 en fonctions propres de H_1 .

Si on désigne par \mathcal{H}_1 l'espace vectoriel des fonctions propres orthonormées d'énergie positive de H_1 noté

$\mathcal{H}_1 (\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(1)}, \dots, \Psi_n^{(1)})$, et par \mathcal{H}_2 l'espace vectoriel des fonctions propres orthonormées d'énergie positive de H_2 noté $\mathcal{H}_2 (\Psi_0^{(2)}, \Psi_1^{(2)}, \dots, \Psi_n^{(2)})$, notons que les applications linéaires

$$\begin{cases} A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ A^+ : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

sont des isomorphismes. Par exemple $\Psi_k^{(1)} \in \mathcal{H}_1$ est une image de vecteur $\phi = \frac{1}{E_k^{(1)}} (A \Psi_k^{(1)})$, ($k > 0$) qui appartient à \mathcal{H}_2 par l'application A . Ainsi, d'après (2.28) et (2.29) et puisque $E_0^{(1)} = 0$, nous obtenons les relations suivantes entre les valeurs propres et les fonctions propres

des Hamiltoniens H_1 et H_2 [2]

$$\begin{cases} E_0^{(1)} = 0 \\ E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \\ \Psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A \Psi_{n+1}^{(1)} \\ \Psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^+ \Psi_n^{(2)} \end{cases} \quad \text{pour } n > 0 \quad (2.31)$$

la normalisation est correcte parce que

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n^{(2)} | \Psi_m^{(2)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} E_{m+1}^{(1)}}} \langle A \Psi_{n+1}^{(1)} | A \Psi_{m+1}^{(1)} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} E_{m+1}^{(1)}}} \langle \Psi_{n+1}^{(1)} | A^+ A \Psi_{m+1}^{(1)} \rangle \\ &= \frac{E_{m+1}^{(1)}}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} E_{m+1}^{(1)}}} \delta_{n+1, m+1} \\ &= \delta_{n, m}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Donc on peut dire que si $\Psi_{n+1}^{(1)}(x)$ sont les fonctions d'ondes normalisées de H_1 alors les fonctions d'ondes $\Psi_n^{(2)}(x)$ de H_2 sont normalisées. Alors, si on connaît toutes les fonctions d'onde normalisées de H_1 ensuite, par application de l'opérateur A , on peut reconstruire toutes les fonctions normalisables de H_2 , et inversement si on connaît toutes les fonctions d'onde normalisées de H_2 donc, par l'application de A^+ , on peut reconstruire toutes les fonctions normalisables de H_1 , à l'exception de l'état fondamental.

2.5 Hiérarchie d'Hamiltoniens partenaires

Jusqu'à présent, H_1 se factorise à l'aide des opérateurs A et A^+ , et si on connaît la fonction propre de cet Hamiltonien on obtient la forme du superpotentiel $W(x)$, et en plus si on connaît toutes les fonctions d'onde normalisées de H_1 et par application de A , on peut reconstruire toutes les fonctions normalisables de son partenaire H_2 . On peut dès lors aussi refactoriser H_2 pour déterminer son partenaire H_3 , puis refactoriser H_3 pour déterminer son partenaire H_4 , et ainsi de suite.

Nous considérons l'Hamiltonien H_1 et admettons que l'énergie de son état fondamental $E_0^{(1)}$, et la fonction d'onde correspondante $\Psi_0^{(1)}(x)$ ont connues. on peut donc écrire

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \quad (2.33)$$

Avec

$$\begin{cases} A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) \\ A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x) \end{cases} \quad (2.34)$$

et

$$W_1(x) = -\frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(1)}(x). \quad (2.35)$$

Son partenaire H_2 , donné par

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (2.36)$$

alors

$$V_2(x) = W_1^2 + W_1' + E_0^{(1)} = V_1(x) + 2W_1' = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(1)}(x) \quad (2.37)$$

On a déterminé les relations entre les fonctions propres $\Psi_n^{(1)}(x)$ de H_1 et $\Psi_n^{(2)}(x)$ de son partenaire H_2 , et les relations entre les énergies propres correspondantes $E_n^{(1)}$ et $E_n^{(2)}$

$$\begin{cases} E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \\ \Psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_1 \Psi_{n+1}^{(1)} \end{cases} \quad (2.38)$$

et par conséquent $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ avec $E_0^{(2)}$ est l'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien H_2 .

Si on considère H_2 comme Hamiltonien de départ, on peut le factoriser aussi comme

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = A_2^+ A_2 + E_1^{(1)} \quad (2.39)$$

avec

$$\begin{cases} A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x) \\ A_2^+ = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \end{cases} \quad (2.40)$$

et

$$W_2(x) = -\frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(2)}(x) \quad (2.41)$$

Son partenaire H_3 donné par

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (2.42)$$

avec

$$\begin{aligned} V_3(x) &= W_2^2 + W_2' + E_1^{(1)} \\ &= V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(2)}(x) \\ &= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)} \Psi_0^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Alors les relations entre les valeurs propres et les fonctions propres de H_1 , H_2 et H_3 sont écrites sous la forme

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(3)} &= \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_2 \Psi_{n+1}^{(2)} \\ &= \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \Psi_{n+2}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

et ainsi de suite, chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent.

Si l'Hamiltonien de départ H_1 a un nombre p d'états liés, aux valeurs propres $E_n^{(1)}$ et aux fonctions propres $\Psi_n^{(1)}(x)$, avec $0 \leq n \leq (p-1)$ donc on peut construire une hiérarchie de $(p-1)$ Hamiltoniens H_1, H_2, \dots, H_p telle que H_m ($m = 2, 3, \dots, p$) a le même spectre de valeurs propres que H_n , sauf que H_m n'a pas les $(m-1)$ premières valeurs propres de H_p [3].

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{cases} A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x) \\ A_m^+ = -\frac{d}{dx} + W_m(x) \end{cases} \quad (2.47)$$

et

$$W_m(x) = -\frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(m)}(x) \quad (2.48)$$

et les relations entre les valeurs propres et les fonctions propres des m Hamiltoniens de la hiérarchie

$$\begin{cases} E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \\ \Psi_n^{(m)}(x) = \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \Psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \end{cases} \quad (2.49)$$

et

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)} \dots \Psi_0^{(m-1)} \right). \quad (2.50)$$

2.6 Invariance de forme

Le concept d'invariance de forme fut introduit la première fois par Gendeshtein en 1983. Il signifie que les potentiels *SUSY*- partenaires $V_{1,2}(x)$ ont une forme similaire, la même

dépendance par rapport à la variable dynamique x , et s'ils ne sont différents que par certains paramètres, on dit qu'ils sont invariants de forme si les potentiels $V_1(x, a_2)$ et $V_2(x, a_1)$ satisfont la relation suivante

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1), \quad (2.51)$$

où a_1 est un ensemble de paramètres et a_2 est fonction de a_1 , $a_2 = f(a_1)$ et $R(a_1)$ est une fonction indépendante de x . On définit l'Hamiltonien H_2 partenaire de H_1 comme suit

$$H_2(a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_1) \quad (2.52)$$

et utilisant l'équation (2.51) on trouve

$$H_2(a_1) = H_1(a_2) + R(a_1). \quad (2.53)$$

Alors $H_2(a_1)$ et $H_1(a_2)$ possèdent les mêmes fonctions propres

$$\Psi_n^{(2)}(x, a_1) = \Psi_n^{(1)}(x, a_2). \quad (2.54)$$

On a par conséquent

$$E_1^1(a_1) = E_0^1(a_2) + R(a_1). \quad (2.55)$$

On définit le partenaire H_3 par

$$H_3(a_1) = A_2(a_1) A_2^+(a_1) + E_1^{(1)}(a_1) \quad (2.56)$$

et en utilisant l'équation (2.53) on peut écrire

$$\begin{aligned} H_3(a_1) &= H_2(a_2) + R(a_1) \\ &= H_1(a_3) + R(a_2) + R(a_1) \\ &= A_1^+(a_3) A_1(a_3) + E_0^{(1)}(a_3) + R(a_2) + R(a_1) \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec

$$\begin{aligned} a_3 &= f(a_2) \\ &= f(f(a_1)). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Si l'on compare maintenant l'équation (2.56) avec l'équation (2.42), on obtient

$$A_3(a_1) = A_1(a_3) \quad (2.59)$$

et

$$E_2^1(a_1) = E_0^1(a_3) + R(a_2) + R(a_1) \quad (2.60)$$

à partir de cette équation on peut voir que $H_3(a_1)$ et $H_2(a_2)$ possèdent les mêmes fonctions propres

$$\Psi_n^{(3)}(x, a_1) = \Psi_n^{(1)}(x, a_3)$$

De manière générale, on voit qu'on peut écrire H_s sous la forme

$$H_s(x, a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad (2.61)$$

où $a_s = f^{s-1}(a_1)$, c'est-à-dire qu'on applique $(s-1)$ fois f

$$\begin{aligned} H_{s+1} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \end{aligned} \quad (2.62)$$

L'énergie de l'état fondamental de H_s est

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad (2.63)$$

en vertu de (2.61) et du fait que $E_0^{(1)}(a_1) = 0$.

D'autre part, sachant que $E_0^{(1)}(a_1) = 0$ et que le nième niveau d'énergie de H_1 coïncide avec l'état fondamental de l'Hamiltonien H_n , on peut passer de H_s à H_{s-1} , puis de H_{s-1} à H_{s-2} et ainsi de suite jusqu'à H_1 . Le spectre complet des valeurs propres de H_1 est donc donné par

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k), \quad E_0^{(1)}(a_1) = 0, \quad (2.64)$$

cette relation permet de générer la valeur de l'énergie de n'importe quel niveau de $H_1(a_1)$ à partir de la fonction R .

Pour les fonctions propres, on peut montrer que

$$\psi_n^{(1)}(x, a_1) \propto A^+(x, a_1) A^+(x, a_2) \dots A^+(x, a_n) \psi_0^{(1)}(x, a_{n+1}) \quad (2.65)$$

cette relation permet de générer la fonction propre de n'importe quel niveau à partir de la fonction propre du niveau fondamental, ce résultat peut encore s'écrire d'une manière plus concise

$$\psi_n^{(1)}(x, a_1) = A^+(x, a_1) \psi_{n-1}^{(1)}(x, a_2). \quad (2.66)$$

2.7 Exemple

2.7.1 Potentiel de Coulomb

Nous allons nous intéresser à la technique de l'invariance de forme pour résoudre l'équation de Schrödinger pour le potentiel de Coulomb. Nous allons montrer que si les paramètres du potentiel sont bien ajustés, il est possible de déterminer l'énergie et la fonction d'onde de

$$H = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (2.67)$$

Nous considérons l'Hamiltonien H_1

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)},$$

et nous admettons que l'énergie de son état fondamental est $E_0^{(1)}$ tel que

$$W^2 - W' + E_0^{(1)} = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (2.68)$$

Nous pouvons définir un superpotentiel $W(r)$ comme suit

$$W(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta \quad (2.69)$$

En utilisant (2.68) et (2.69) et après un calcul simple on a

$$\begin{cases} \beta = \sqrt{-E_0} = \frac{e^2}{2(l+1)} \\ \alpha = l+1 \end{cases}$$

et

$$W(r) = \sqrt{-E_0} - \frac{(l+1)}{r} \quad (2.70)$$

à partir de (2.70) nous obtenons les potentiels supersymétriques partenaires

$$\begin{aligned} V_1(r) &= W^2(r) - W'(r) \\ &= -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} - E_0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

et

$$\begin{aligned} V_2(r) &= W^2(r) + W'(r) \\ &= -\frac{e^2}{r} + \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - E_0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Evidemment

$$V(r) = V_1(r) + cte \quad (2.73)$$

la *cte* est choisie de telle sorte que l'énergie du niveau fondamental de H_1 dénotée $E_0^{(1)}$ soit nulle $E_0^{(1)} = 0$, ($cte = E_0$), donc

$$V(r) = V_1(r) + E_0 \quad (2.74)$$

Si nous prenons $a_1 = l$ et $a_2 = l + 1$ donc (2.71) et (2.72) donnent

$$\begin{cases} V_1(r, a_1) = -\frac{e^2}{r} + \frac{a_1(a_1 + 1)}{r^2} - E_0 \\ V_2(r, a_2) = -\frac{e^2}{r} + \frac{a_2(a_2 + 1)}{r^2} - E_0 \end{cases} \quad (2.75)$$

$V_1(x, a_1)$ et $V_2(x, a_2)$ sont de forme invariante parce qu'ils satisfont la relation suivante

$$V_2(r, a_2) = V_1(r, a_1) + R(a_1), \quad (2.76)$$

avec

$$\begin{aligned} R(a_1) &= \frac{e^4}{4(l+1)^2} - \frac{e^4}{4(l+2)^2} \\ &= -E_0 + E_1, \end{aligned}$$

et

$$E_1 = -\frac{e^4}{4(l+2)^2}. \quad (2.77)$$

L'équation (2.76) est juste l'expression mathématique de l'invariant de forme

$$\begin{aligned} a_s &= f(a_1) \\ &= a_1 + s \\ &= l + s \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$V_s(r, a_s) = -\frac{e^2}{r} + \frac{(l+s)(l+1+s)}{r^2} - E_0 \quad (2.79)$$

En vue de (2.74) et (2.76) nous avons

$$\begin{aligned} H^{(s+1)} &= -\frac{d^2}{dr^2} + V_1(r, a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \\ &= -\frac{d^2}{dr^2} + V_2(r, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \end{aligned} \quad (2.80)$$

le spectre complet d'énergie de H_1 est donné par

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \sum_{k=1}^n R(a_k) \\ &= \frac{e^4}{4(l+1)^2} - \frac{e^4}{4(l+1+n)^2} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$= E_n - E_0 \quad (n \geq 1), \quad E_0^{(1)} = 0 \quad (2.82)$$

De là nous obtenons les niveaux d'énergies

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(1)} + E_0 \\ &= - \left[\frac{e^4}{4(l+1+n)^2} \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.83)$$

Pour les fonctions d'onde on a

$$\psi_0^{(n+1)}(r) = N \exp \left[- \int^r W_{n+1}(r') dr' \right], \quad (2.84)$$

avec

$$W_{n+1} = - \frac{(l+1+n)}{r} + \frac{e^2}{2(l+1+n)} \quad (2.85)$$

et par conséquent

$$\psi_0^{(n+1)}(r) = N r^{(l+1+n)} \exp \left[- \frac{e^2}{2(l+1+n)} r \right],$$

et pour $n = 0$

$$W_1 = - \frac{(l+1)}{r} + \frac{e^2}{2(l+1)}, \quad (2.86)$$

et la fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par

$$\psi_0^{(1)}(r, a_1) = N r^{(l+1)} \exp \left[- \frac{e^2}{2(l+1)} r \right], \quad (2.87)$$

avec la relation

$$\psi_n^{(1)}(r, a_1) \propto A^+(r, a_1) A^+(r, a_2) \dots A^+(r, a_n) \psi_0^{(1)}(r, a_{n+1}). \quad (2.88)$$

Chapitre 3

La supersymétrie en mécanique quantique relativiste

3.1 Introduction

La supersymétrie (*SUSY*) est une symétrie supposée de la physique des particules qui montre une relation profonde entre les fermions (particules de spin demi-entier) qui constituent la matière et les bosons (particules de spin entier) qui véhiculent les interactions. Dans le cadre de la *SUSY*, chaque fermion est associé à un ou plusieurs « super-partenaires » de spin entier, alors que chaque boson est associé à un ou plusieurs « super-partenaires » de spin demi-entier.

La *SUSY* vient d'être observée pour la première fois sous une forme indirecte dans les états excités de noyaux d'or et de platine.

En mécanique quantique, la *SUSY* est une nouvelle technique qui permet de résoudre une classe de potentiels en introduisant des superhamiltoniens qui permettent le passage d'un potentiel vers un autre. C'est une méthode assez puissante qui permet de retrouver presque tous les résultats déjà obtenus par les méthodes habituelles. Le sujet principal dans ce mémoire est de revoir cette technique dans le domaine relativiste.

Dans la structure mathématique relative à la physique à deux dimensions, les solutions exactes de l'équation de Klein-Gordon, de l'équation de Dirac et leur spectre ont un intérêt particulier. Beaucoup d'études ont été faites sur le mouvement des particules de Klein-Gordon et de Dirac. Nous utilisons ici des techniques standard de mécanique quantique supersymétrique pour

résoudre exactement l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac. Dans ce travail, nous allons présenter un schéma généralisé de supersymétrie en mécanique quantique (*SUSYMQ*) pour obtenir des solutions exactes et le spectre d'énergie.

3.2 La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon

3.2.1 Introduction

La mécanique quantique relativiste est exigée pour obtenir des résultats plus précis concernant la particule soumise à un potentiel fort dans le cadre de l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac [4, 5]. Ces dernières années, il y a eu beaucoup de discussions sur l'équation de Klein-Gordon avec les divers types de potentiels en utilisant des méthodes variées pour résoudre l'équation et obtenir le spectre du système. Seulement, quelques problèmes physiques ont été étudiés par la méthode *SUSYMQ*. Il s'agit de transformer l'équation de Klein-Gordon en une forme similaire à l'équation de Schrödinger utilisant la supersymétrie en mécanique quantique.

3.2.2 La formulation de l'Hamiltonien de SUSY QM et la méthode de factorisation

On décrit ici une méthode de résolution de l'équation de Klein Gordon à une dimension pour démontrer comment un ensemble de potentiels peut être résolu exactement par la méthode supersymétrique.

En effet, écrivant l'équation de Klein-Gordon à une dimension avec un potentiel scalaire $S(r)$ et un potentiel vectoriel $V(r)$ sous la forme suivante (en considérant $c = \hbar = 1$) [6, 7]

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + (E - V(r))^2 - (M + S(r))^2 \right] f(r) = 0, \quad (3.1)$$

avec M est la masse de la particule et E l'énergie. Dans le cas où le potentiel vectoriel est égal au potentiel scalaire, c'est-à-dire $V(r) = S(r)$, donc l'équation (3.1) devient une équation de Schrödinger bien connue

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + E^2 - M^2 - 2(E + M)V(r) \right] f(r) = 0, \quad (3.2)$$

et

$$V_{eff}(r) = 2(E + M)V(r). \quad (3.3)$$

Alors l'équation (3.1) prend la forme suivante

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r) \right] f(r) = \lambda f(r) \quad (3.4)$$

où λ est le paramètre d'énergie donné par

$$\lambda = M^2 - E^2. \quad (3.5)$$

Pour résoudre l'équation (3.4), dans la structure du *SUSYQM*, nous présentons la fonction d'onde de l'état fondamental sous la forme suivante

$$f_0(r) = N \exp \left[\int W(r) dr \right], \quad (3.6)$$

où N est une constante de normalisation et $W(r)$ est le superpotentiel défini par

$$W^2(r) - W'(r) = V_{eff}(r) - \lambda_0, \quad (3.7)$$

où λ_0 est l'énergie de l'état fondamental. L'équation (3.7) est donc une équation de Riccati non-linéaire qui donne les fonctions d'onde du système.

3.3 La supersymétrie et l'équation de Dirac

3.3.1 Introduction

Un procédé matriciel unidimensionnel supersymétrique, du même type que précédemment, a été utilisé entre les équations de Dirac et les équations de Schrödinger dans la physique des particules qui est décrit dans les limites générales. Par ce moyen, nous pouvons présenter le procédé qui est une prolongement du raccordement supersymétrique connu entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger [8]. Une discussion détaillée sur l'équation de Dirac par l'approche supersymétrique est fournie par Cooper et autres, en 1988 [3], qui a montré que l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz est associée à une paire supersymétrique d'Hamiltoniens de Schrödinger. Dans l'approche supersymétrique, on emploie

un potentiel de Dirac que nous notons par R et qui est la solution d'une équation de Riccati avec la limite libre et est relié au potentiel V dans les équations linéaires du second degré du type de Schrödinger.

Nous nous sommes intéressés au cas de l'électron en présence de champ extérieur. Pour beaucoup de problèmes utilisant des champs extérieurs, l'Hamiltonien de Dirac peut se mettre sous la forme [9]

$$H_D = \begin{pmatrix} M_+ & Q^+ \\ Q & M_- \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Avec Q , Q^+ , M et M^+ sont des opérateurs, dits supersymétriques si la relation suivante est valable

$$Q^+ M_- = M_+ Q^+ \quad , \quad Q M_+ = M_- Q, \quad (3.9)$$

l'Hamiltonien de Dirac diagonalisé a la forme suivante :

$$H_D^2 = \begin{pmatrix} Q^+ Q + M_+^2 & 0 \\ 0 & Q Q^+ + M_-^2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

et l'Hamiltonien de Dirac lui-même peut alors être diagonalisé et se mettre sous la forme :

$$H_D = \begin{pmatrix} \sqrt{Q^+ Q + M_+^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{Q Q^+ + M_-^2} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Les solutions d'énergies positives et négatives se détachent. Puisque les opérateurs $Q Q^+$ et $Q^+ Q$ sont isospectraux. Les valeurs propres positives et négatives de H sont étroitement rapprochées. En outre, si $Q^+ Q$ peut être rapproché de l'Hamiltonien d'un problème soluble en mécanique quantique par SUSY, alors nous serons capables de résoudre l'équation de Dirac exactement.

Nous considérerons ici deux problèmes. Premièrement nous considérons l'équation de Dirac dans un $(1 + 1)$ dimension avec le potentiel scalaire de Lorentz. Deuxièmement nous considérerons l'équation de Dirac dans un champ électromagnétique extérieur. Pour le problème scalaire, l'Hamiltonien de l'interaction est obtenu en remplaçant

$$m \rightarrow m + R(x) \equiv U(x), \quad (3.12)$$

l'équation de Dirac covariante devient

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x, t) - U(x) \psi(x, t) = 0 \quad (3.13)$$

et l'Hamiltonien peut être écrit comme

$$H = \alpha p + \beta U(x). \quad (3.14)$$

Nous avons choisi les matrices de Dirac α et β dans la représentation supersymétrique

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Cet Hamiltonien peut être mis, dans la forme standard, (3.8) comme suit

$$Q = \alpha p + iU(x), \quad M_+ = M_- = 0. \quad (3.16)$$

Le spectre de l'Hamiltonien peut être maintenant obtenu à partir du spectre des opérateurs :

$$\begin{cases} Q^+Q = -\nabla^2 + U^2 + \sigma \cdot \nabla U \\ QQ^+ = -\nabla^2 + U^2 - \sigma \cdot \nabla U \end{cases} \quad (3.17)$$

Sachant que nous sommes dans le cas à (1 + 1) dimension, avec un potentiel qui est seulement une fonction d'une variable, alors le problème est réduit aux cas des problèmes solubles de la mécanique quantique à une dimension.

Pour un électron dans un champ électromagnétique externe, l'équation de Dirac est obtenue en remplaçant la dérivée ordinaire par la dérivée covariante, avec $c = \hbar = e = 1$

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iA_\mu \quad (3.18)$$

ceci donne un terme d'interaction dans l'Hamiltonien

$$H_I = \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \quad (3.19)$$

et l'Hamiltonien de Dirac pour une particule dans un champ magnétique pur

($A_0 = 0$, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$) peut être écrit

$$H = \vec{\alpha} \left(\vec{p} + \vec{A} \right) + \beta m. \quad (3.20)$$

Dans ce cas on utilise la représentation standard des matrices $\vec{\alpha}$ et β comme suit

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Donc on peut écrire l'Hamiltonien de Dirac sous la forme (3.8) avec

$$Q = Q^+ = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{A}) \quad , \quad M_{\pm} = m \quad (3.22)$$

Ainsi, le carré de l'Hamiltonien devient

$$H_D^2 = \begin{pmatrix} Q^+Q + m^2 & 0 \\ 0 & QQ^+ + m^2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

3.4 La résolution exacte de l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz

La solution exacte d'un système physique est toujours désirable, même si, en pratique, il n'est pas toujours possible de déterminer le spectre entier. Dans la mécanique quantique non relativiste, une nouvelle classe de potentiels intermédiaires aux cas exactement solubles et ceux non solubles a été trouvée. Ceux-ci sont appelés des problèmes quasi-exactement solubles (*QES*), pour lesquels il est possible de déterminer algébriquement une partie du spectre, mais pas le spectre entier. Ainsi, le sujet principal dans ce travail concerne l'étude quantique d'un système physique exactement soluble par la structure supersymétrique. Nous déterminerons les formes possibles du potentiel qui permettent la factorisation de l'équation Dirac. L'organisation de ce travail est comme suit. Nous décrirons la forme générale de la supersymétrie pour déterminer la solvabilité exacte d'un système de Dirac à une dimension, à trois et à quatre dimensions dans le cas des coordonnées cartésiennes, avec le potentiel dépendant seulement d'une variable spatiale. Nous terminerons par l'équation de Dirac avec le potentiel scalaire de Lorentz et le potentiel de monopole magnétique.

3.4.1 La formulation d'Hamiltonien de SUSY QM et la factorisation

Soit un système de Dirac à une dimension qu'on peut réduire à deux équations à un variable après la factorisation du système, avec r la variable de base et $\psi(r)$ la fonction d'onde du système qui est un spineur de deux composantes $\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$, et $W(r)$ est le superpotentiel avec

ϵ^\pm l'énergie du système. Nous pouvons récrire la dernière équation comme suit

$$\begin{cases} A^- A^+ \psi_-(r) = \epsilon \psi_-(r) \\ A^+ A^- \psi_+(r) = \epsilon \psi_+(r) \end{cases} \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{cases} A^+ = \frac{d}{dr} + W(r) \\ A^- = \frac{d}{dr} - W(r) \end{cases} \quad (3.25)$$

et

$$\epsilon = \epsilon^+ \epsilon^-. \quad (3.26)$$

Par la méthode de factorisation, on peut factoriser le système et le mettre sous la forme d'équations couplées donnée par

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + W^2(r) \pm W'(r) \right) \psi_\pm(r) = \epsilon \psi_\pm(r). \quad (3.27)$$

On peut déterminer les formes du champ externe qui admettent les solutions exactes du problème en comparant les formes du superpotentiel W avec les formes des superpotentiels qui sont déjà trouvés et inscrits dans la Table 4.1 donnée dans le livre de Cooper [10].

3.4.2 L'équation de Dirac à une dimension

On décrit une méthode simple de résolution de l'équation de Dirac à une dimension, pour démontrer comment un ensemble de potentiels peut être résolu exactement par la méthode supersymétrique. En particulier nous étudions l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire.

En effet, écrivant l'équation de Dirac à une dimension sous la forme suivante

$$[\alpha p + \beta (m + R(x))] \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (3.28)$$

en se plaçant dans le cas où $c = h = 1$, $p = -i \frac{d}{dx}$, m est la masse du fermion et $R(x)$ est le potentiel scalaire de Lorentz. La fonction d'onde Ψ est un spineur de deux composantes $\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$.

Soient α et β les matrices de Dirac données par

$$\alpha = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

dans cette représentation l'équation de Dirac est un système d'équations différentielles du premier ordre couplées écrites sous la forme

$$\left[\frac{d}{dx} + U(x) \right] \Psi_1(x) = E\Psi_2(x), \quad (3.30)$$

et

$$\left[-\frac{d}{dx} + U(x) \right] \Psi_2(x) = E\Psi_1(x), \quad (3.31)$$

avec

$$U(x) = m + R(x). \quad (3.32)$$

Multiplions l'équation (3.30) par l'opérateur $\left(-\frac{d}{dx} + U(x) \right)$ et utilisons l'équation (3.31) on obtient

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U^2(x) - \frac{d}{dx}U(x) \right) \Psi_1(x) = E^2\Psi_1(x).$$

On pose

$$V_1(x) = U^2(x) - U'(x), \quad (3.33)$$

donc

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \right) \Psi_1(x) = E^2\Psi_1(x) \quad (3.34)$$

En multipliant l'équation (3.31) par l'opérateur $\left(\frac{d}{dx} + U(x) \right)$ et utilisant l'équation (3.30) on obtient

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U^2(x) + \frac{d}{dx}U(x) \right) \Psi_2(x) = E^2\Psi_2(x)$$

On pose

$$V_2(x) = U^2(x) + U'(x),$$

donc

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \right) \Psi_2(x) = E^2\Psi_2(x). \quad (3.35)$$

En général, on peut écrire les équations (3.34) et (3.35) sous la forme suivante

$$H_i\Psi_i(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_i(x) \right) \Psi_i(x) = E^2\Psi_i(x), \quad (3.36)$$

où $\iota = 1, 2$. Pour l'équation (3.36), la méthode de factorisation consiste à choisir les opérateurs A^+ et A^- comme

$$\begin{cases} A^+ = \frac{d}{dx} + U(x) \\ A^- = -\frac{d}{dx} + U(x) \end{cases} \quad (3.37)$$

On définit les Hamiltoniens supersymétriques H_1 et H_2 par

$$\begin{cases} H_1 = A^- A^+ \\ H_2 = A^+ A^- \end{cases} \quad (3.38)$$

Si on compare avec le formalisme de SUSY QM, il est facile de voir que $U(x)$ est juste le superpotentiel du formalisme de Schrödinger, $\Psi_1(x)$ est la fonction propre de H_1 et $\Psi_2(x)$ est la fonction propre de H_2 , avec les Hamiltoniens H_1 et H_2 qui sont les Hamiltoniens supersymétriques partenaires, avec la fonction $V(x)$ correspondant au potentiel de Schrödinger qui vérifie l'équation de Riccati

$$V(x) = U^2(x) - U'(x). \quad (3.39)$$

Ce système peut être traité selon la procédure générale décrite dans la dernière section. Les cas exactement solubles ont été classifiés dans la table 4.1 [10]. Pour le système présent, il y a six types de configurations exactement solubles : le potentiel de l'oscillateur linéaire, le potentiel de Morse, Rosen-Morse *I*, Rosen-Morse *II*, Scarf *I* et Scarf *II*.

3.4.3 L'équation de Dirac tridimensionnelle

L'équation de Dirac à $(2 + 1)$ dimension s'écrit sous la forme

$$[\alpha p + \beta (m + R(x))] \psi = E\psi, \quad (3.40)$$

avec $p = (p_x, p_y) = -i \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy} \right)$ et α, β sont les matrices de Dirac. Le potentiel $R(x)$ dépend seulement de x . Nous représentons les matrices de Dirac en termes du matrices de Pauli comme suit :

$$\alpha_x = \sigma_x, \quad \alpha_y = \sigma_y, \quad \text{et} \quad \beta = \sigma_z. \quad (3.41)$$

Comme $R(x)$ dépend de x seulement, la fonction d'onde peut être écrite comme

$$\psi = \exp(k_y y) \begin{pmatrix} f_-(x) \\ f_+(x) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

où k_y est une constante réelle et $f_{\pm}(x)$ sont les fonctions réelles dépendantes de x , avec $U(x) = m + R(x)$. L'équation de Dirac devient

$$\begin{pmatrix} U(x) & p_x - ik_y y \\ p_x + ik_y y & -U(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_-(x) \\ f_+(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_-(x) \\ f_+(x) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Pour écrire la dernière équation sous la forme supersymétrique, il faut transformer la fonction d'onde par une transformation unitaire T [11]

$$\begin{pmatrix} f_-(x) \\ f_+(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i\psi_-(x) \\ \psi_+(x) \end{pmatrix} \equiv T^+ \begin{pmatrix} f_-(x) \\ f_+(x) \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Alors l'Hamiltonien se transforme sous la forme

$$H \rightarrow T^+ H T = \begin{pmatrix} k_y & i \left(-\frac{d}{dx} + U(x) \right) \\ -i \left(-\frac{d}{dx} + U(x) \right) & -k_y \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

par conséquent, l'équation de Dirac(3.43) devient un système d'équations différentielles du premier ordre couplées écrites sous la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dx} + U(x) \right) \psi_- = (E + k_y) \psi_+ \\ \left(-\frac{d}{dx} + U(x) \right) \psi_+ = (E - k_y) \psi_- \end{cases} \quad (3.46)$$

qui est exactement la même forme de l'équation(3.24). Donc pour la solvabilité exacte de l'équation (3.46) elle peut être discutée comme dans le cas unidimensionnel.

3.4.4 L'équation de Dirac à quatre dimensions

Nous allons considérer maintenant la solvabilité exacte de l'équation de Dirac à quatre dimensions avec un potentiel scalaire de Lorentz dépendant seulement d'une variable spéciale, par exemple z . L'Hamiltonien de Dirac à quatre dimensions s'écrit sous la forme suivante [12]

$$H = \alpha p + \beta (m + R(z)) \quad (3.47)$$

où $p = (p_x, p_y, p_z) = -i \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$, $U(z) = m + R(z)$, ici nous avons choisi les matrices de Dirac dans la représentation supersymétrique (3.15). L'Hamiltonien devient alors

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \sigma p - iU(z) \\ \sigma p + iU(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

et son carré diagonalisé est de la forme

$$H^2 = \begin{pmatrix} H^- & 0 \\ 0 & H^+ \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

avec

$$H^\mp = -\nabla^2 + U^2(z) \pm U'(z) \sigma_z. \quad (3.50)$$

Généralement on peut prendre la fonction d'onde sous la forme suivante

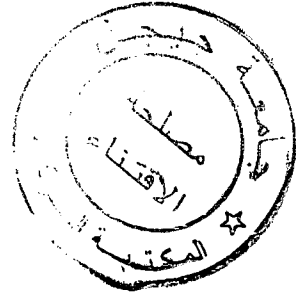
$$\psi = \exp(ik_x x + ik_y y) \begin{pmatrix} \psi_-(z) \chi_- \\ \psi_+(z) \chi_+ \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

où k_x et k_y sont des constantes réelles, $\psi_\pm(z)$ est une fonction réelle qui dépend de z seulement. La fonction χ_\pm est un spineur de deux composantes avec

$$\sigma_z \chi_\pm = \pm \chi_\pm \quad (3.52)$$

et la fonction propre du problème est donnée par

$$H^2 \psi = E^2 \psi \quad (3.53)$$



qui peut être écrite sous la forme

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + U^2 \mp U' \right) \psi_\mp = \epsilon \psi_\mp. \quad (3.54)$$

Ainsi les valeurs propres pour le problème de mécanique quantique sont

$$\epsilon = E^2 - k_x^2 - k_y^2 \quad (3.55)$$

Notons que ce problème est discuté plus en détail dans le livre de Junker. Evidemment, l'équation (3.54) est la forme supersymétrique de l'équation (3.24).

3.4.5 L'équation de Dirac avec le potentiel scalaire de Lorentz et le potentiel du monopole magnétique

Dans cette section nous voudrions déterminer les formes des potentiels scalaires de Lorentz sphériques qui admettent des solutions exactes.

D'une manière générale, l'Hamiltonien de Dirac en présence d'un champ électromagnétique (V, A) et un potentiel scalaire de Lorentz $R(x)$ s'écrit sous la forme suivante

$$H = \alpha(p - ieA) + \beta(R + m) + eV \quad (3.56)$$

où e est la charge du fermion. La solution exacte du système quand $V = 0$ a été démontrée dans le cadre de la connexion avec l'équation de Pauli [13]. En l'absence des potentiels V et A , cela a été démontré dans le cadre la connexion avec l'équation de Schrödinger à une dimension [3] Dans le cas des autres coordonnées, c'est plutôt difficile à résoudre.

Dans cette section, nous considérons le système dans les coordonnées sphériques. Quand $A = 0$, l'équation de Dirac, dans les coordonnées sphériques, peut être séparée en une équation radiale à deux composantes [14]

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} & V - R - E - m \\ V - E + m + R & -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(r) \\ F(r) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.57)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G'(r) + \frac{kG(r)}{r} - (R + E + m - V)F(r) = 0 \\ F'(r) - \frac{kF(r)}{r} - (V - E + m + R)G(r) = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Nous nous sommes basés dans ce travail sur la méthode de factorisation du système pour déterminer les formes possibles de potentiels exactement solubles. Malheureusement, l'équation (3.58) de Dirac est difficile à mettre en facteur à cause de la présence du terme $(\frac{k}{r})$. L'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz en présence d'un monopôle magnétique, décrit par

$$A_\theta = A_r = 0 \quad , \quad A_\varphi = g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \quad (3.59)$$

où g est la charge magnétique du monopôle de Dirac. Dans ce cas, l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz en présence du champ monopôle est aussi réductible à l'équation radiale à deux composantes avec $k = 0$ (voir [15] pour les détails techniques de calcul), avec U

$= m + R$

$$\begin{cases} G'(r) - (U + E - V) F(r) = 0 \\ F'(r) - (V - E + U) G(r) = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Nous montrons maintenant que l'équation (3.60) est factorisable quand $V = 0$.

$$\begin{cases} G'(r) - (U + E) F(r) = 0 \\ F'(r) - (-E + U) G(r) = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

En effet, si la fonction d'onde est transformée

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_-(x) \\ \psi_+(x) \end{pmatrix} \equiv T^+ \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

par conséquent l'équation de Dirac (3.8) devient un système d'équations différentielles du premier ordre couplées écrites sous la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dr} + U(r) \right) \psi_- = E\psi_+ \\ \left(-\frac{d}{dr} + U(r) \right) \psi_+ = E\psi_- \end{cases} \quad (3.63)$$

Donc, dans ce cas $U(r)$ joue le rôle de superpotentiel $W(r)$ et le paramètre d'énergie est $\epsilon = E^2$. Notons que pour la table 4.1, il est trouvé qu'il y a quatre types de potentiels exactement solubles $U(r)$ pour ce système, à savoir, le potentiel de coulomb, l'oscillateur, le potentiel d'Eckart et Poschl-Teller généralisé.

Si k est différent de zéro et $V \neq R$, il est difficile de trouver une solution exacte pour l'équation (3.58). Le premier exemple a été présenté dans [16], dans le cas où V prend la forme d'un potentiel de Coulomb et R est un potentiel linéaire de r . Si $R = \pm V$ alors l'équation (3.58) prend une forme plus simple et on peut obtenir une équation de deuxième ordre découplée pour $G(r)$ ou $F(r)$ par exemple si $U = V$ l'équation (3.58) prend la forme suivante

$$\begin{cases} G'(r) + \frac{kG(r)}{r} - (E + m) F(r) = 0 \\ F'(r) - \frac{kF(r)}{r} - (2V - E + m) G(r) = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

ou de façon équivalente

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) G(r) = (E + m) F(r) \quad (3.65)$$

$$\left(-\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) F(r) = (m - E - 2V) G(r) \quad (3.66)$$

avec

$$\begin{cases} A = \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \\ A^+ = -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \end{cases} \quad (3.67)$$

En effet, multipliant l'équation (3.65) par l'opérateur $(-\frac{d}{dr} + \frac{k}{r})$ et utilisons l'équation (3.66), on obtient l'équation différentielle de second ordre de G sous la forme

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} + E^2 - m^2 - 2(E+m)V \right] G(r) = 0. \quad (3.68)$$

Si on résout cette équation, on trouve la fonction $G(r)$, alors on obtient facilement la fonction $F(r)$.

La solvabilité exacte de l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz est examinée dans cette section, les formes possibles de potentiels qui permettent la factorisation de l'équation de Dirac, sont identifiées dans les cas à deux, trois et quatre dimensions. Basée sur une telle factorisation, nous avons classifié tous les potentiels exactement solubles. La solution exacte de l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz est examinée dans ce chapitre, les formes possibles de potentiels qui permettent la factorisation de l'équation de Dirac, sont identifiées dans les cas à deux, à trois et à quatre dimensions. Nous avons classifié tous les potentiels exactement solvables.

Chapitre 4

L'équation de Riccati non hermitienne ; application à une classe de potentiels

4.1 Introduction

Nous présentons un Hamiltonien non-hermitien ayant la partie imaginaire proportionnelle à la solution d'une équation de Riccati du type Witten. Le procédé est un prolongement complexe du raccordement supersymétrique connu entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger [17]. Nous employons une extension complexe de la méthode et considérons le potentiel de Dirac $R(x)$ comme une quantité purement imaginaire, et par conséquent le potentiel de Schrödinger $V_i(x)$ est complexe. Ceci pose un problème au niveau de l'herméticité. Dans ce travail nous traitons les problèmes non hermitiens.

Le paramètre de masse de Dirac que nous avons dénoté K est traité comme un paramètre libre égal au paramètre E , la valeur propre de l'équation de Dirac. La deuxième section est consacrée à un aperçu détaillé de la méthode qui va s'appliquer ensuite au cas d'une classe de potentiels ayant une version non hermitienne exactement soluble. Comme cas particulier nous allons déduire les résultats du potentiel de Coulomb.

4.2 Extension complexe avec un seul paramètre K

Dans ce cas l'équation différentielle (3.28) s'écrit sous la forme suivante

$$\hat{H}_k W \equiv [\sigma_y D_x + \sigma_x (iR(x) + K)] W = KW \quad (4.1)$$

où K est réel. Dans la partie gauche de l'équation (4.1) on a un paramètre de masse du spineur de Dirac, et dans la partie droite on a un paramètre d'énergie et

$$D_x = \frac{d}{dx} \quad (4.2)$$

$R(x)$ est une solution de l'équation de Riccati du type Witten [18].

$$R'(x) \pm R^2(x) = V(x), \quad (4.3)$$

où $V(x)$ est la partie réelle du potentiel non-hermtien de l'équation de Schrödinger

L'équation (4.1) est équivalente à une équation de Dirac pour un spineur

$$W \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_f \\ W_b \end{pmatrix}$$

de masse K à l'énergie fixe $E = m$, mais avec un potentiel purement imaginaire.

L'équation (4.1) peut être écrite sous la forme d'un système d'équations couplées

$$[iD_x + (iR(x) + K)] \phi_1 = K\phi_0, \quad (4.4)$$

et

$$[-iD_x + iR(x) + K] \phi_0 = K\phi_1. \quad (4.5)$$

En effet, multiplions par l'opérateur $(-iD_x + iR(x) + K)$ les deux membres de l'équation (4.4) et utilisons l'équation (4.5) on obtient pour la composante fermionique

$$[D_x^2 - (R^2(x) - D_x R(x) - 2iKR(x))] \phi_1 = 0 \quad (4.6)$$

Pour la composante bosonique, multiplions par l'opérateur $(iD_x + K + iR(x))$ l'équation (4.5) et utilisons l'équation (4.4) on a

$$[D_x^2 - (R^2(x) + D_x R(x) - 2iKR(x))] \phi_0 = 0. \quad (4.7)$$

Cette technique est une méthode mathématique très simple pour présenter un type spécial de non-hermiticité directement proportionnel à la solution de Riccati. Dans ce cas, la méthode de factorisation consiste donc à choisir A^+ et A^- comme suit

$$\begin{cases} A^+ = iD_x + K + R(x) \\ A^- = -iD_x + K + R(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

On définit l'équation fermionique (4.6) comme

$$H_1\phi_1 \equiv (A^-A^+ - K^2)\phi_1 = 0, \quad (4.9)$$

et l'équation bosonique (4.7) comme

$$H_2\phi_0 \equiv (A^+A^- - K^2)\phi_0 = 0. \quad (4.10)$$

4.3 Extension complexe avec les paramètres K et K'

D'une manière générale, l'équation de Dirac (4.1) s'écrit

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iR(x) + K & 0 \\ 0 & iR(x) + K \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} K' & 0 \\ 0 & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) est un système d'équations différentielles de premier ordre couplées données sous la forme

$$(-iD_x + iR(x) + K)W_2 = K'W_1, \quad (4.12)$$

et

$$(iD_x + iR(x) + K)W_1 = K'W_2. \quad (4.13)$$

De la même manière que dans la section précédente, on obtient les équations de second ordre équivalentes

$$D_x^2 W_s + [D_x R(x) + 2iKR(x) + K^2 + K'^2 - R^2(x)] W_s = 0, \quad (4.14)$$

où $s = 1, 2$, avec 1 représente la composante fermionique et 2 la composante bosonique.

En suivant la démarche de la section précédente, on montre de la même manière que les opérateurs de factorisation ont une extension complexe avec une seul paramètre K

$$A^\pm = \pm iD_x + K + iR(x).$$

On peut écrire l'équation (4.14) sous forme d'une équation de Schrödinger, pour la composante fermionique

$$H_1 W_1 \equiv (A^- A^+ - K^2) W_1 = (K'^2 - K^2) W_1, \quad (4.15)$$

et pour la composante bosonique

$$H_2 W_2 \equiv (A^+ A^- - K^2) W_2 = (K'^2 - K^2) W_2. \quad (4.16)$$

4.4 Les applications

4.4.1 Application à une classe de potentiels

Dans cette section, nous allons utiliser cette technique pour résoudre l'équation de Dirac pour une classe de potentiels qui est une solution de l'équation de Riccati (4.3) sous la forme

$$R(x) = \frac{A + Bx}{C + Dx} \quad (4.17)$$

avec $x \neq -\frac{C}{D}$

En utilisant (4.17) dans (4.14) on peut donc écrire l'équation différentielle de second ordre fermionique sous la forme

$$D_x^2 W_1 + \left[\frac{BC - DA}{(C + Dx)^2} + 2iK \frac{A + Bx}{C + Dx} + K^2 - K'^2 - \frac{(A + Bx)^2}{(C + Dx)^2} \right] W_1 = 0 \quad (4.18)$$

par le changement

$$y = C + Dx \quad (4.19)$$

on réduit (4.18) à

$$\frac{d^2 W_1}{dy^2} + \frac{1}{D^2} \left\{ \left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(\frac{BC}{D} - A - D \right) \frac{1}{y^2} + 2 \left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(iK - \frac{B}{D} \right) \frac{1}{y} - \frac{B}{D} \left(\frac{B}{D} - 2iK \right) + K^2 - K'^2 \right\} W_1 = 0 \quad (4.20)$$

on pose

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{D^2} (A - \frac{BC}{D}) (\frac{BC}{D} - A - D) \\ \beta = \frac{2}{D^2} (A - \frac{BC}{D}) (iK - \frac{B}{D}) \\ \gamma = \frac{1}{D^2} [\frac{B}{D} (\frac{B}{D} - 2iK) - K^2 + K'^2] \end{cases} \quad (4.21)$$

Après les définition (4.21), l'équation (4.20) s'écrit

$$\frac{d^2 W_1}{dy^2} + \left(\frac{\alpha}{y^2} + \frac{\beta}{y} - \gamma \right) W_1 = 0 \quad (4.22)$$

Posons ensuite

$$z = 2\gamma^{\frac{1}{2}} y \quad (4.23)$$

après quelques calculs on a

$$\frac{d^2 W_1}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\beta\gamma^{-\frac{1}{2}}}{2z} + \frac{\alpha}{z^2} \right] W_1 = 0 \quad (4.24)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d^2 W_1}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\mu}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m_1^2}{z^2} \right] W_1 = 0 \quad (4.25)$$

avec

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2}\beta\gamma^{-\frac{1}{2}} \\ m_1^2 = \frac{1}{4} - \alpha \end{cases} \quad (4.26)$$

ou bien

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{D} (A - \frac{BC}{D}) (iK - \frac{B}{D}) \left[\frac{B}{D} (\frac{B}{D} - 2iK) - K^2 + K'^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ m_1 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{D^2} (A - \frac{BC}{D}) (\frac{BC}{D} - A - D) \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.27)$$

L'équation (4.25) est l'équation différentielle de Whittaker dont la solution est une superposition des fonctions de Whittaker

$$W_1 = \alpha_1 M_{\mu, m_1}(z) + \beta_1 W_{\mu, m_1}(z) \quad (4.28)$$

α_1 et β_1 sont des constantes, M_{μ, m_1} et W_{μ, m_1} sont des fonctions de Whittaker et

$$z = 2(c + Dx) \left[\frac{B}{D} \left(\frac{B}{D} - 2iK \right) - K^2 + K'^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

Pour la composante bosonique, en reportant (4.17) dans (4.14), l'équation différentielle de second ordre bosonique s'écrit

$$D_x^2 W_2 + \left[-\frac{BC - DA}{(C + Dx)^2} + 2iK \frac{A + Bx}{C + Dx} + K^2 - K'^2 - \frac{(A + Bx)^2}{(C + Dx)^2} \right] W_2 = 0 \quad (4.30)$$

et par le changement

$$y = C + Dx$$

on réduit (4.30) à

$$\frac{d^2 W_2}{dy^2} + \frac{1}{D^2} \left\{ \left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(\frac{BC}{D} - A + D \right) \frac{1}{y^2} + 2 \left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(iK - \frac{B}{D} \right) \frac{1}{y} - \frac{B}{D} \left(\frac{B}{D} - 2iK \right) + K^2 - K'^2 \right\} W_2 = 0 \quad (4.31)$$

Notons que

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{D^2} \left[\left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(\frac{BC}{D} - A + D \right) \right] \quad (4.32)$$

on trouve

$$\frac{d^2 W_2}{dz^2} + \left[\frac{\bar{\alpha}}{y^2} + \frac{\beta}{y} - \gamma \right] W_2 = 0 \quad (4.33)$$

En effectuant le changement

$$z = 2\gamma^{\frac{1}{2}} y$$

et après quelques calculs on a

$$\frac{d^2 W_2}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\beta\gamma^{\frac{1}{2}}}{2z} + \frac{\bar{\alpha}}{z^2} \right] W_2 = 0 \quad (4.34)$$

ou encore

$$\frac{d^2 W_2}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\mu}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m_2^2}{z^2} \right] W_2 = 0 \quad (4.35)$$

avec

$$m_2 = \left[\frac{1}{4} - \bar{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

ou

$$m_2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{D^2} \left[\left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(\frac{BC}{D} - A + D \right) \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

μ a la même définition que dans l'équation(4.26).

L'équation (4.35) est l'équation différentielle de Whittaker dont la solution est une superposition des fonctions de Whittaker

$$W_2 = \alpha_1 M_{\mu, m_2}(z) + \beta_1 W_{\mu, m_2}(z). \quad (4.38)$$

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas de la mécanique quantique non relativiste, nous prendrons $K = 0$ et $\beta_1 = 0$ pour la composante fermionique ($\beta_2 = 0$ pour la composante

bosonique) pour réaliser la correspondance exacte avec le problème du spectre discret et éliminer la non-hermiticité. Donc dans ce cas la relation entre les fonctions de Whittaker et les polynômes de Laguerre est bien connue sous la forme suivante [19]

$$M_{\frac{P}{2}+n+\frac{1}{2}, \frac{P}{2}}(z) = z^{\frac{P+2}{2}} e^{-\frac{P}{2}} L_n^P(z) \quad (4.39)$$

avec

$$z = \frac{2(c + Dx)}{\sqrt{\left(\frac{B}{D}\right)^2 + K'^2}} \quad (4.40)$$

et pour la composante fermionique on a

$$\begin{cases} \mu = \frac{P}{2} + n + \frac{1}{2} \\ m_1 = \frac{P}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2m_1 \\ n = \mu - \frac{1}{2}(1 + p) \end{cases} \quad (4.41)$$

avec

$$\begin{cases} \mu = \frac{-\frac{B}{D^2}(A - \frac{BC}{D})}{\sqrt{\left(\frac{B}{D}\right)^2 + K'^2}} \\ m_1 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{D^2} \left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(\frac{BC}{D} - A - D \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.42)$$

Alors nous pouvons écrire la solution du problème fermionique hermitien sous la forme bien connue en mécanique quantique non-relativiste donc, les fonctions d'onde correspondantes du problème peuvent être écrites comme suit

$$\begin{aligned} W_{1,P}(z) &= \alpha_1 M_{1,P}(z) \\ &= \alpha_1 z^{\frac{P+1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu - \frac{1}{2}(1+P)}^P(z) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Si nous voulons approcher le problème non-hermitien, nous définissons par analogie avec l'équation (4.39) la relation entre les fonctions de Whittaker et les polynômes de Laguerre

$$M_{\mu, m_1}(z) = z^{m_1 + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu - m_1 - \frac{1}{2}}^{2m_1}(z) \quad (4.44)$$

avec μ et m_1 des paramètres complexes. La fonction d'onde du problème non-hermitien peut être écrite sous la forme suivante

$$W_{1,non-her}(z) = \alpha_1 z^{m_1 + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu - m_1 - \frac{1}{2}}^{2m_1}(z) \quad (4.45)$$

et pour la composante bosonique on a

$$\begin{cases} P = 2m_2 \\ m_2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{D^2} \left(A - \frac{BC}{D} \right) \left(\frac{BC}{D} - A + D \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.46)$$

Les fonctions d'onde correspondantes au problème hermitien prennent la forme suivante

$$\begin{aligned} W_{2,P}(z) &= \alpha_2 M_{2,P}(z) \\ &= \alpha_2 z^{\frac{P+1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-\frac{1}{2}(1+P)}^P(z). \end{aligned} \quad (4.47)$$

et les fonctions d'onde correspondantes au problème non-hermitien peuvent être écrites sous la forme

$$W_{2,non-her}(z) = \alpha_2 z^{m_2+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-m_2-\frac{1}{2}}^{2m_2}(z) \quad (4.48)$$

4.4.2 Application : potentiel de Coulomb

Dans cette section, nous allons déduire les résultats pour le potentiel de Coulomb. On prendra

$$\begin{cases} C = 0 \\ D = 1 \\ A = -(l+1) \\ B = \frac{e^2}{2(l+1)} \end{cases} \quad (4.49)$$

donc il s'agit de résoudre l'équation de Dirac pour le potentiel de Coulomb. La solution de l'équation de Riccati est donnée par

$$R(x) = -\frac{l+1}{x} + \frac{e^2}{2(l+1)}. \quad (4.50)$$

En ce qui concerne la composante fermionique on peut écrire l'équation différentielle de second ordre fermionique sous la forme

$$\begin{aligned} D_x^2 W_1 + \left\{ -\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{2(l+1)}{x} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - iK \right) \right. \\ \left. - \frac{e^2}{2(l+1)} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - 2iK \right) - K'^2 + K^2 \right\} W_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

ou sous cette forme

$$\frac{d^2 W_1}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\mu}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m_1^2}{z^2} \right] W_1 = 0 \quad (4.52)$$

avec

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2}\beta\gamma^{-\frac{1}{2}} \\ m_1^2 = \frac{1}{4} - \alpha \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \alpha = -A(A+1) \\ \beta = 2A(iK - B) \\ \gamma = B(B - 2iK) - K^2 + K'^2 \end{cases} \quad (4.53)$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha = -l(l+1) \\ \beta = 2(l+1)\left(\frac{e^2}{2(l+1)} - iK\right) \\ \gamma = \frac{e^2}{2(l+1)}\left(\frac{e^2}{2(l+1)} - 2iK\right) + K'^2 - K^2 \end{cases} \quad (4.54)$$

L'équation (4.51) est l'équation différentielle de Whittaker dont la solution est une superposition des fonctions de Whittaker

$$W_1 = \alpha_1 M_{\mu, m_1}(z) + \beta_1 W_{\mu, m_1}(z) \quad (4.55)$$

avec

$$\begin{cases} \mu = \frac{A(iK-B)}{\sqrt{B(B-2iK)-K^2+K'^2}} \\ m_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + A(A+1)} \end{cases} \quad (4.56)$$

ou

$$\begin{cases} \mu = \frac{(l+1)\left(\frac{e^2}{2(l+1)} - iK\right)}{\sqrt{\frac{e^2}{2(l+1)}\left(\frac{e^2}{2(l+1)} - 2iK\right) + K'^2 - K^2}} \\ m_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)} \end{cases} \quad (4.57)$$

et

$$z = \frac{2}{\sqrt{\frac{e^2}{2(l+1)}\left(\frac{e^2}{2(l+1)} - 2iK\right) + K'^2 - K^2}} x \quad (4.58)$$

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas de la mécanique quantique non-relativiste, nous prendrons $K = 0$ et $\beta_1 = 0$ (la limite non-relativiste) pour réaliser la correspondance exacte avec le problème du spectre discret et éliminer la non-hermiticité. D'après la définition (4.39) nous pouvons écrire la solution du problème fermionique hermitien sous la forme bien connue en mécanique quantique non-relativiste. Donc les fonctions d'onde correspondantes au problème peuvent être écrites comme suit

$$W_{1, P}(z) = \alpha_1 z^{\frac{P+1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-\frac{1}{2}(1+P)}^P(z) \quad (4.59)$$

ou comme

$$W_{1,m_1}(z) = \alpha_1 z^{\frac{1}{2}+m_1} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-\frac{1}{2}-m_1}^{2m_1}(z) \quad (4.60)$$

avec

$$P = 2m_1$$

et

$$\mu = \frac{e^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{e^4}{4(l+1)^2} + K'^2}} \quad (4.61)$$

m_1 la même que dans l'équation (4.57) et

$$z = \frac{2}{\sqrt{\frac{e^4}{4(l+1)^2} + K'^2}} x \quad (4.62)$$

Si nous voulons approcher le problème non-hermitien, nous définissons par analogie avec l'équation (4.39) et utilisons l'équation (4.44). La fonction d'onde du problème non-hermitien peut être écrite sous la forme suivante

$$W_{1,non-her}(z) = \alpha_1 z^{m_1+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-m_1-\frac{1}{2}}^{2m_1}(z) \quad (4.63)$$

où μ est paramètre complexe

Pour la composante bosonique, on peut donc écrire l'équation différentielle de second ordre fermionique sous la forme

$$D_x^2 W_2 + \left\{ -\frac{(l+2)(l+1)}{x^2} - \frac{2(l+1)}{x} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - iK \right) - \frac{e^2}{2(l+1)} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - 2iK \right) - K'^2 + K^2 \right\} W_2 = 0. \quad (4.64)$$

La solution de cette équation est une superposition des fonctions de Whittaker

$$W_2 = \alpha_2 M_{\mu, m_2}(z) + \beta_2 W_{\mu, m_2}(z) \quad (4.65)$$

avec

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \bar{\alpha}} \quad (4.66)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= A(1-A) \\ &= -(l+1)(l+2) \end{aligned} \quad (4.67)$$

μ est le même que dans l'équation (4.57).

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas de mécanique quantique non-relativiste, nous prendrons $K = 0$ et $\beta_2 = 0$. Donc les fonctions d'onde correspondantes au problème peuvent être écrites comme suit

$$W_{2,P}(z) = \alpha_2 z^{\frac{P+1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-\frac{1}{2}(1+P)}^P(z) \quad (4.68)$$

ou

$$W_{2,m_2}(z) = \alpha_2 z^{\frac{1}{2}+m_2} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-\frac{1}{2}-m_2}^{2m_2}(z) \quad (4.69)$$

avec

$$P = 2m_2$$

Les fonctions d'onde correspondantes au problème non-hermitien peuvent être écrites sous la forme suivante

$$W_{2,non-her}(z) = \alpha_2 z^{m_2+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_{\mu-m_2-\frac{1}{2}}^{2m_2}(z) \quad (4.70)$$

et μ est paramètre complexe.

En conclusion, la connexion supersymétrique entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger, en forme d'extension complexe simple, a été ici appliquée dans le contexte quantique à une classe de potentiels sous la forme $R(x) = \frac{A+Bx}{C+Dx}$ et du potentiel de Coulomb (potentiel de Morse [17]).

Chapitre 5

La symétrie \mathcal{PT}

5.1 La symétrie en physique quantique

La résolution des problèmes de physique classique se simplifie, parfois de façon considérable, en présence de symétries, c'est-à-dire de transformations qui laissent invariantes les propriétés physiques. Par exemple en mécanique classique le problème d'une particule dans le champ d'une force centrale $\vec{F}(r)$ indépendante du temps est invariant par translation de temps et par rotation autour de tout axe passant par l'origine. L'invariance par translation de temps assure la conservation de l'énergie mécanique E , et l'invariance par rotation assure la conservation du moment angulaire \vec{J} .

En physique la notion de *symétrie* est appelée aussi invariance. Les propriétés de symétrie jouent un rôle encore plus important en mécanique quantique. Elles permettent d'obtenir des résultats très généraux. Par exemple la conjugaison de charge, la parité et l'inversion du temps permettent d'exprimer le théorème *CPT* affirmant que toute théorie quantique doit être invariante sous le produit de ces trois symétries.

Le concept de symétrie \mathcal{PT} a eu beaucoup d'intérêt récemment dans des problèmes utilisant des potentiels en mécanique quantique unidimensionnelle, des problèmes exposant la symétrie \mathcal{PT} [20, 21], c'est-à-dire invariance sous l'action de \mathcal{P} la parité et \mathcal{T} le renversement du temps ont avec comme valeurs propres des énergies réelles appartenant au spectre discret, bien que l'Hamiltonien correspondant est non hermitien. En même temps, des études diverses ont montré que la symétrie \mathcal{PT} n'est ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante pour l'existence

d'un spectre réel. Plus récemment la symétrie \mathcal{PT} a été reconnue comme un cas spécial de η -pseudo-hermiticité [22]. Rappelons qu'un hamiltonien est η -pseudo-hermitien s'il existe un opérateur η hermitien, linéaire et réversible, pour lequel $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$. Dans ce contexte, la symétrie \mathcal{PT} est η -pseudo-Hermitienne pour un Hamiltonien unidimensionnel du type $H = p^2 + V(x)$, tandis que l'hermiticité conventionnelle est pour $\eta = I$.

5.2 Le cadre théorique

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés données de la symétrie \mathcal{PT} avec un Hamiltonien non hermitien, donné par la relation suivante (a est un paramètre)

$$H(x, a) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x, a) \quad (5.1)$$

on dit que l'opérateur \mathcal{PT} est une symétrie si

$$(\mathcal{PT}) H(x, a) = H(x, a) (\mathcal{PT}) \quad (5.2)$$

où l'opérateur \mathcal{P} est l'opérateur d'inversion d'espace, qui présente la symétrie \mathcal{P} . on dit qu'une théorie possède la symétrie \mathcal{P} si elle est invariante sous la transformation de *parité*, appelée aussi inversion de l'espace, ou encore transformation miroir, L'opérateur \mathcal{T} est l'opérateur de renversement du temps, qui présente la symétrie \mathcal{T} . Aussi, une théorie possède la symétrie \mathcal{T} si elle est invariante sous la transformation de renversement du temps. L'opérateur \mathcal{P} et l'opérateur \mathcal{T} sont définis par leur action sur la position et le moment respectivement comme

$$\begin{cases} \mathcal{P} & : x \longrightarrow -x, & p \longrightarrow -p \\ \mathcal{T} & : x \longrightarrow x, & p \longrightarrow -p, & i \longrightarrow -i \end{cases} \quad (5.3)$$

Nous notons que pour la symétrie \mathcal{PT} brisée, l'Hamiltonien H et la fonction d'onde, sont les deux invariants dans les transformations \mathcal{PT} si [23, 24]

$$\begin{cases} H^*(-x, a) = H(x, a) \\ \psi^*(-x, a) = \pm \psi(x, a) \end{cases} \quad (5.4)$$

D'autre part pour un Hamiltonien H non hermitien on dit que l'Hamiltonien H est η -pseudo-hermitien [22, 25, 26] si

$$H = H^\# = \eta^{-1} H^\dagger \eta \quad (5.5)$$

où η est un opérateur linéaire, hermitien et réversible.

On définit un Hamiltonien H_1 non hermitien

$$H_1(x, a) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a)$$

d'une façon que le potentiel soit $V_1(x, a)$ complexe de la forme

$$V_1(x, a) = V_+(x, a) + iV_-(x, a), \quad V_{\pm}(\pm x) = \pm V_{\pm}(x) \quad (5.6)$$

Alors H est \mathcal{PT} symétriques si

$$(\mathcal{PT}) H_1(x, a) = H_1(x, a) (\mathcal{PT}) \quad (5.7)$$

Pour un tel Hamiltonien, η peut être représenté par l'opérateur P de parité, c'est-à-dire, H_1 est P -pseudo-Hermitiens.

L'Hamiltonien dans l'équation (5.1) peut toujours être factorisé à l'aide des opérateurs A et B selon

$$H = AB + E_0^{(1)} \quad (5.8)$$

où A et B sont définis par

$$\begin{cases} A = \frac{d}{dx} + W(x) \\ B = -\frac{d}{dx} + W(x) \end{cases} \quad (5.9)$$

avec $W(x, a)$ est donné en termes de fonction propre $\psi_0^{(1)}(x, a)$ de l'état fondamental de H_1

$$W(x, a) = -\frac{\psi_0^{(1)'}(x, a)}{\psi_0^{(1)}(x, a)} \quad (5.10)$$

H_1 est donné par

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2 - W' + E_0^{(1)} \quad (5.11)$$

où $E_0^{(1)}$ est l'énergie de l'état fondamental de H_1 .

On peut alors construire un autre Hamiltonian H_2 , isospectral à H_1 , défini par

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2 + W' + E_0^{(1)} \quad (5.12)$$

Évidemment, si $\psi_n^{(1)}(x, a)$ est la fonction propre de H_1 avec la valeur propre de l'énergie $E_n^{(1)}$, alors $\psi_n^{(2)}(x, a) = A\psi_n^{(1)}(x, a)$ est la fonction propre de H_2 avec la même valeur propre de l'énergie $E_n^{(1)}$ à part l'état fondamental, qui est annihilé par A d'après la relation suivante

$$\begin{cases} E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \\ \psi_n^{(2)}(x, a) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} A\psi_{n+1}^{(1)}(x, a). \end{cases} \quad (5.13)$$

Pour un système quantique Hermitien conventionnel, $W(x, a)$ est le superpotentiel et $B = A^+$. Cependant, pour un système non-hermitien en général $B \neq A^+$, et $W(x, a)$ est une fonction complexe. Par analogie avec la mécanique quantique conventionnelle et la considération que est η -pseudo-hermitien, $W(x, a)$ peut être désigné comme un pseudo-superpotentiel.

Nous construisons maintenant l'Hamiltonien \mathcal{H} sous forme matricielle comme

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Si nous considérons la représentation matricielle suivante pour η

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^+ & 0 \\ 0 & \eta^- \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

où η^+ (η^-) est un automorphisme linéaire hermitien de H_2 (H_1), il s'en suit à partir de (5.5) que les opérateurs A et B doivent être reliés par

$$B = A^\# = \eta_+^{-1} A^+ \eta_-, \quad (5.16)$$

le pseudo-superpotentiel $W(x, a)$ doit obéir à la relation

$$W(x) = \eta_+^{-1} W^*(x) \eta_-. \quad (5.17)$$

Pour la symétrie \mathcal{PT} , l'Hamiltonien H_1 considéré ici (avec $\eta_\pm = \pm P$), se réduit à

$$(\mathcal{PT}) W(x) (\mathcal{PT})^{-1} = -W(x). \quad (5.18)$$

L'Hamiltonien matriciel \mathcal{H} représente l'Hamiltonien pseudo-supersymétrique. Nous pouvons l'interpréter comme une composition de deux Hamiltoniens H_1 et H_2 , les Hamiltoniens pseudo-supersymétriques partenaires

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^\# & 0 \\ 0 & A^\#A \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Le pseudo-super Hamiltonien \mathcal{H} fait partie d'une algèbre fermée contenant des opérateurs fermionique et bosonique, avec des relations d'anticommutation et de commutation. Un tel système quantique est produit par des pseudo-supercharges Q et $Q^\#$. Introduisons de nouveaux opérateurs de pseudo-supercharge

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Q^\# = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\# & 0 \end{pmatrix} = \eta^{-1} Q^\dagger \eta \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Alors les opérateurs de pseudo-supercharges Q et $Q^\#$ et le pseudo-hamiltonien supersymétrique \mathcal{H} satisfont l'algèbre suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = \{Q, Q^\#\} \\ Q^2 = (Q^\#)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

et

$$[Q, \mathcal{H}] = [Q^\#, \mathcal{H}] = 0 \quad (5.22)$$

L'algèbre pseudo-supersymétrique définie dans (5.22) se tient seulement pour la symétrie \mathcal{PT} non brisée.

5.3 La symétrie \mathcal{PT} en mécanique quantique relativiste

En physique les Hamiltoniens non hermitiens, ont un intérêt particulier. Beaucoup d'études ont été faites sur l'équation de Dirac à une dimension avec des interactions non Hermitiennes, mais à énergies réelles [27]. Dans la structure de la mécanique quantique non relativiste la symétrie \mathcal{PT} a été étudiée en détail avec un Hamiltonien non hermitien qui possède des valeurs propres réelles. Le sujet principal dans ce chapitre est de revoir cette *symétrie* dans le domaine relativiste et les applications possibles de l'équation de Dirac avec un Hamiltonien non hermitien.

5.4 L'équation de Dirac à une dimension

L'équation de Dirac à une dimension pour un fermion de Dirac de masse m s'écrit sous la forme suivante

$$H\psi = E\psi \quad (5.23)$$

avec

$$H = \alpha p + \beta m + \nu \quad (5.24)$$

E est l'énergie du fermion et α, β sont les matrices de Dirac. Nous représentons les matrices de Dirac en termes des matrices de Pauli comme suit :

$$\alpha^2 = \beta^2 = I \quad , \quad \{\alpha, \beta\} = 0 \quad (5.25)$$

Le potentiel matriciel ν peut être présenté comme [28]

$$\nu = IV_t + \alpha V_e + \beta V_s + \beta\gamma^5 V_p \quad (5.26)$$

I est la matrice unité, V_t et V_e sont respectivement les composantes temporelle et spatiale du potentiel vectoriel et V_s, V_p sont respectivement les potentiels scalaires et pseudo-scalaires. On peut montrer facilement que la composante spatiale du potentiel vectoriel peut être obtenue par une transformation de jauge et pour V_t non Hermitien, la symétrie \mathcal{PT} ne peut pas être établie pour l'équation de Dirac à une dimension. Par conséquent, nous choisissons une composante de temps nulle $V_t = 0$. Nous étudions aussi l'équation de Dirac avec des interactions pseudo-scalaires non Hermitiennes en détail.

5.5 La symétrie \mathcal{PT} pour l'équation de Dirac à une dimension

Pour l'équation de Dirac à une dimension avec des interactions non hermitiennes, les transformations \mathcal{PT} sont tel que

$$H\mathcal{PT} = \mathcal{PT} H. \quad (5.27)$$

Un besoin de mettre une restriction sur le choix de α et β s'impose alors que p et m restent invariables dans cette transformation

$$p\mathcal{PT} = \mathcal{PT}p, \quad m\mathcal{PT} = \mathcal{PT}m, \quad (5.28)$$

et le choix de α et β est

$$\alpha\mathcal{PT} = \mathcal{PT}\alpha, \quad \beta\mathcal{PT} = \mathcal{PT}\beta. \quad (5.29)$$

On veut étudier l'équation de Dirac à une dimension, dans la structure de la symétrie \mathcal{PT} en mécanique quantique, avec des interactions non hermitiennes dans l'équation (5.26), la symétrie \mathcal{PT} avec V_s invariable tandis que V_p devrait changer de signe, c'est-à-dire

$$V_p^{\mathcal{PT}} = -V_p, \quad V_s^{\mathcal{PT}} = V_s \quad (5.30)$$

5.6 Interactions pseudo-scalaires non Hermitiennes

Nous étudions en particulier l'équation de Dirac à une dimension avec des interactions pseudo-scalaires

$$\nu(x) = \beta\gamma^5 V_p(x). \quad (5.31)$$

Nous choisissons α et β comme [28]

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \beta\gamma^5 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Alors l'équation de Dirac à une dimension avec cette interaction, se réduit à

$$[-i\sigma_1\partial_x + \sigma_3m + \sigma_2V_p(x)]\psi(x) = E\psi(x), \quad (5.33)$$

où $\psi(x)$ est un spineur à deux composantes

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Alors l'écriture explicite de l'équation (5.33) se met sous la forme

$$\begin{pmatrix} m & -i\partial_x - iV_p \\ -i\partial_x + iV_p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

L'action de la symétrie \mathcal{PT} donne σ_2 change de signe, tandis que σ_1 et σ_3 restent inchangées. Alors l'équation de Dirac à une dimension reste invariante si le potentiel pseudo scalaire change complètement son signe

$$V_p^*(-x) = -V_p(x). \quad (5.36)$$

L'équation (5.35) peut être écrite sous la forme d'un système d'équations couplées comme

$$(-i\partial_x - iV_p)\phi^{(2)} = (E - m)\phi^{(1)}, \quad (5.37)$$

et

$$(-i\partial_x + iV_p)\phi^{(1)} = (E + m)\phi^{(2)}. \quad (5.38)$$

En général on peut écrire les équations (5.37) et (5.38) sous la forme suivante

$$\mathcal{H}_i\phi^{(i)} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + U_i(x)\right)\phi^{(i)} = \varepsilon\phi^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.39)$$

avec

$$\varepsilon = E^2 - m^2, \quad (5.40)$$

et

$$U_i = \left(V_p^2 \pm V_p'\right), \quad i = 1, 2. \quad (5.41)$$

Si on compare avec le formalisme de $SUSYQM$, il est facile de voir que $V_p(x)$ est juste le superpotentiel du formalisme de Schrödinger, avec les Hamiltoniens \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 qui sont les Hamiltoniens supersymétriques partenaires. Les valeurs propres de l'énergie de \mathcal{H}_1 (\mathcal{H}_2) sont reliées avec l'énergie positive (négative) de l'Hamiltonien H de Dirac, avec $U_1(x)$ et $U_2(x)$ différents. Toutes les valeurs propres, à l'exception possible de l'état fondamental, sont divisées par \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , et $\varepsilon \geq 0$ [29]. On va définir les opérateurs A et A^+ comme

$$\begin{cases} A = -\frac{d}{dx} + V_p(x) \\ A^+ = \frac{d}{dx} + V_p(x), \end{cases} \quad (5.42)$$

alors les Hamiltoniens supersymétriques partenaires sont donnés sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 = AA^+ \\ \mathcal{H}_2 = A^+A, \end{cases} \quad (5.43)$$

les opérateurs de supercharge

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Q^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^+ & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

satisfont l'algèbre suivante

$$H^2 = \{Q, Q^+\} \quad (5.45)$$

et

$$[Q, H^2] = [Q^+, H^2] = 0 \quad (5.46)$$

Nous essayons d'établir un rapport de symétrie cachée semblable entre les potentiels $U_i(x)$ quand la paire d'Hamiltoniens $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ n'est pas hermitienne. η est un opérateur linéaire, Hermitien, et réversible [22, 25]

$$\mathcal{H}_i^+ = \eta \mathcal{H}_i \eta^{-1} \quad (5.47)$$

Nous notons ici que pour la \mathcal{PT} symétrie des potentiels $U_i(x)$ les η peuvent simplement être représentés par l'opérateur P de parité. Alors on peut écrire les Hamiltoniens partenaires \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 en terme de deux opérateurs différentiels A et B sous la forme

$$\begin{cases} A = \frac{d}{dx} + V_p(x) \\ B = -\frac{d}{dx} + V_p(x), \end{cases} \quad (5.48)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 = AB \\ \mathcal{H}_2 = BA, \end{cases} \quad (5.49)$$

par conséquent

$$\begin{cases} \mathcal{H}_2 B = B \mathcal{H}_1 \\ A \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 A. \end{cases} \quad (5.50)$$

Alors si $\phi^{(1)}$ est la fonction propre de \mathcal{H}_1 avec la valeur propre d'énergie ε

$$\mathcal{H}_1 \phi^{(1)} = \varepsilon \phi^{(1)}, \quad (5.51)$$

Alors

$$\phi^{(2)} = \frac{i}{E+m} B \phi^{(1)}, \quad (5.52)$$

est la fonction propre de \mathcal{H}_2 avec la même valeur propre d'énergie ε mis à part l'état fondamental

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 \phi^{(2)} &= \frac{i}{E+m} \mathcal{H}_2 B \phi^{(1)} \\ &= \frac{i}{E+m} (BA) B \phi^{(1)} \\ &= \frac{i}{E+m} B (\mathcal{H}_1 \phi^{(1)}) \\ &= \varepsilon \left(\frac{i}{E+m} B \phi^{(1)} \right) \\ &= \varepsilon \phi^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ainsi A et B entrelacent les Hamiltoniens H_1 et H_2 d'une telle façon que l'opérateur B transfère les fonctions propres de H_1 à ceux de H_2 et A fait son inverse. Il faut noter ici que A et B ne sont pas des opérateurs adjoints ($A \neq B^\dagger$). Au contraire, ils sont pseudo-adjoints [22, 30]

$$\begin{cases} B = A^\# = \eta^{-1} A^\dagger \eta \\ A = B^\# = \eta^{-1} B^\dagger \eta. \end{cases} \quad (5.54)$$

On a \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 qui, donnés par l'équation (5.43), sont toujours isospectraux, à l'exception possible de l'état fondamental. Au lieu de cela, on utilise l'algèbre suivante

$$\begin{cases} H^2 = \{Q, Q^\#\} \\ Q^2 = (Q^\#)^2 = 0. \end{cases} \quad (5.55)$$

et

$$[Q, H^2] = [Q^\#, H^2] = 0 \quad (5.56)$$

avec

$$H^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^\# & 0 \\ 0 & A^\#A \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

avec les opérateurs des pseudo-supercharges Q et $Q^\#$ qui sont donnés par la relation (5.20).

Alors à partir de cela, la paire d'Hamiltoniens de Dirac à une dimension, avec des interactions pseudo-scalaires non hermitiennes, possède une pseudo-supersymétrie cachée. Nous illustrerons ces résultats par une application avec un potentiel de Morse non hermitien.

5.7 Application

5.7.1 Potentiel de Morse non hermitien

Nous considérons un potentiel sous la forme suivante

$$V_P(x) = Ai \exp(i\alpha x) + iC \quad (5.58)$$

Alors

$$V_P^*(-x) = -V_P(x) \quad (5.59)$$

Le partenaire pseudo-supersymétrique étant donné par

$$\begin{aligned} U_1(x) &= V_P^2(x) - V_P'(x) \\ &= -A^2 \exp(i2\alpha x) - A(2C - \alpha) \exp(i\alpha x) - C^2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

et

$$\begin{aligned} U_2(x) &= V_P^2(x) + V_P'(x) \\ &= -A^2 \exp(i2\alpha x) - A(2C + \alpha) \exp(i\alpha x) - C^2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

avec la PT invariance

$$U_1^*(-x) = U_1(x) \quad (5.62)$$

et

$$U_2^*(-x) = U_2(x). \quad (5.63)$$

En utilisant l'équation (5.60) dans l'équation (5.39) pour $i = 1$ on peut donc écrire l'équation différentielle de second ordre sous la forme

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 \exp(i2\alpha x) + A(2C - \alpha) \exp(i\alpha x) + C^2 + \varepsilon \right\} \phi_1(y) = 0, \quad (5.64)$$

et par le changement

$$y = \frac{2A}{\alpha} \exp(i\alpha x) \quad (5.65)$$

on réduit l'équation (5.64) à

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{2\alpha} (2C - \alpha) \frac{1}{y} - \frac{1}{\alpha^2} (C^2 + \varepsilon) \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} \right\} \phi^1(y) = 0. \quad (5.66)$$

On pose

$$\phi_1(y) = y^{\frac{1}{2}} f_1(y). \quad (5.67)$$

Après des calculs simples on a

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} \frac{(2C - \alpha)}{y} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^2} (C^2 + \varepsilon)}{y^2} \right\} f_1(y) = 0. \quad (5.68)$$

ou encore

$$\frac{d^2 f_1(y)}{dy^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{y} + \frac{\frac{1}{4} - k^2}{y^2} \right] f_1(y) = 0, \quad (5.69)$$

Cette équation est l'équation différentielle de Whittaker, avec

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{(2C - \alpha)}{2\alpha} \\ k = \frac{1}{\alpha} (C^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (5.70)$$

La relation entre les fonctions de Whittaker $W_{\lambda, k}(y)$ et les polynômes de Laguerre $L_n^\gamma(y)$ est bien connue sous la forme suivante

$$L_n^\gamma(y) = y^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} \exp\left(\frac{1}{2}y\right) W_{\lambda, k}(y), \quad (5.71)$$

donc l'équation différentielle de ce système devient (équation différentielle de Laguerre)

$$y \frac{d^2 f_1}{dy^2} + (\gamma + 1 - y) \frac{df_1}{dy} + n f_1 = 0, \quad (5.72)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma = 2k \\ n = \lambda - (k + \frac{1}{2}), \end{cases} \quad (5.73)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} \gamma = \frac{2}{\alpha} (C^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \\ n = -\frac{1}{\alpha} \left[(C^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + C \right]. \end{cases} \quad (5.74)$$

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas de la mécanique quantique non relativiste, nous pouvons écrire la solution exacte du problème sous la forme bien connue avec les valeurs propres des énergies correspondantes

$$\begin{cases} \varepsilon_n^{(1)} = 2Cn\alpha + n^2\alpha^2 & n = 0; 1; 2... \\ \varepsilon_n^{(2)} = 2Cn\alpha + n^2\alpha^2 & n = 1; 2... \end{cases} \quad (5.75)$$

et les fonctions d'ondes correspondantes

$$\begin{cases} \phi_n^1(x) = y^{-\frac{1}{2}\gamma} \exp(-\frac{1}{2}y) L_n^\gamma(y) & n = 0, 1, 2... \\ \phi_n^2(x) = \frac{i}{E+m} B \phi_n^1(x) & n = 1, 2... \end{cases} \quad (5.76)$$

avec $y = \frac{2A}{\alpha} \exp(i\alpha x)$, $L_n^\gamma(y)$ sont les polynômes de Laguerre.

Nous utilisons l'équation (5.40), alors le spectre discret pour l'Hamiltonien de Dirac est une série positive

$$E_n^+ = +\sqrt{m^2 + 2Cn\alpha + n^2\alpha^2} \quad n = 0, 1, 2... \quad (5.77)$$

et une série négative

$$E_n^- = E_{n+1}^+ = -\sqrt{m^2 + 2C(n+1)\alpha + (n+1)^2\alpha^2} \quad n = 0, 1, 2... \quad (5.78)$$

Nous avons étudié l'équation de Dirac soluble à une dimension avec des interactions pseudo-scalaires non hermitiennes qui possèdent des énergies réelles. Comme application possible, on traite l'exemple du potentiel de Morse non hermitien. La symétrie cachée appropriée de l'équation de Dirac avec une interaction pseudo-scalaire est la pseudo supersymétrie.

Chapitre 6

Conclusion générale

La supersymétrie a été introduite pour formaliser la théorie des champs qui unifie les bosons et les fermions. La supersymétrie en mécanique Quantique (SUSY MQ) peut être considérée comme un outil mathématique permettant notamment de découvrir et résoudre de nouveaux potentiels solubles analytiquement. Le sujet principal dans ce mémoire est de revoir l'étude de l'équation de Dirac super symétrique où la connexion supersymétrique entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger suivi par l'application de cette technique dans le domaine relativiste. Les quatre parties de ce mémoire ont relaté en détail toutes les questions relatives à la supersymétrie.

Dans la première partie nous avons étudié la super symétrie en mécanique quantique non relativiste, Nous avons vu qu'il était possible de trouver de nouveaux potentiels solubles algébriquement par la méthode de super symétrie et comme cas particulier nous avons utilisé cette méthode pour résoudre l'équation de Schrödinger dans le cas du potentiel de coulomb.

La deuxième partie traite le cas de la supersymétrie en mécanique quantique relativiste, En particulier nous avons étudié l'équation de Dirac et l'équation Klein-Gordon. Nous avons donné la forme générale de la supersymétrie pour déterminer la solubilité exacte d'un système de Dirac.

La troisième partie a considéré le cas d'un Hamiltonien non hermitien avec une partie imaginaire proportionnelle à la solution d'une équation de Riccati du type Witten. Le procédé était une prolongation complexe du raccordement super symétrique connu entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger. L'extension complexe a été utilisée ainsi que

le potentiel de Dirac $R(x)$ comme quantité purement imaginaire pour aboutir au potentiel de Schrödinger complexe. Sachant que l'herméticité pose problème nous nous sommes limités aux cas non hermitiens.

Et comme aperçu détaillé de la méthode, nous l'avons appliquée au cas d'une classe de potentiels ayant une version non hermitienne exactement soluble. Dans le cas particulier, nous avons déduit les résultats concernant le potentiel de Coulomb.

Dans la quatrième partie, nous avons étudié l'équation de Dirac à une dimension avec des interactions non hermitiennes, mais avec des énergies réelles. Particulièrement nous avons analysé les interactions pseudo-scalaires en détail, illustrant nos observations avec un exemple du potentiel de Morse non hermitien. Nous avons également montré que la symétrie cachée appropriée de l'équation Dirac avec une telle interaction est la pseudo supersymétrie.

Bibliographie

- [1] G. Lévai. J. Phys. A : Math. Gen. 24 No 1 (7 January 1991) 131-146.
- [2] J. Szczesny. 2001 WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Fed. Rep. of Germany
- [3] F. Cooper, *Supersymmetric in Quantum Mechanics*, 2001 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [4] Eser Olğar, Ramazan KaÇ. Journal-ref : CHIN. PHYS. LETT. Vol. 23, No. 3 (2006) 539.
- [5] Dirac P A M 1927 Proc. Roy. Soc. London A 114 243.
- [6] Dominguez-Adame F 1989 Phys. Lett. A 136 175.
- [7] Greiner W 2000 *Relativistic Quantum Mechanics* 3rd edn (Berlin : Springer).
- [8] H.C. Rosu, O. Cornejo-Pérez, R. López-Sandoval, J. Phys. A 37, 11699 (2004).
- [9] B. Thaller, *The Dirac Equation*, (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [10] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, 267 (1995).
- [11] Choon-Lin Ho. Annals Phys. 321 (2006) 2170-2182.
- [12] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, (Springer-Verlag, Berlin , 1996).
- [13] C.L. Ho and P. Roy, Ann. Phys. 312, 161 (2004).
- [14] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1993).
- [15] G. F. Torres del Castillo and L.C. Cortés-Cuautli, J. Math. Phys. 38, 2996 (1997).
- [16] Y. Brihaye and P. Kosinski, Mod. Phys. Lett. A13, 1445 (1998).
- [17] O. Cornejo-Pérez, R. Lopez-Sandoval, and H. C. Rosu. Rev. Mex. Fis. 51 (June 2005) 316-319.

- [18] E. Witten, Nucl. Phys. B188(1981)513.
- [19] Z.X. Wang, *Special Functions*, 1989 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [20] Bender C M and Boettcher S 1998 Phys. Rev. Lett. 80 5243.
Bender C M and Boettcher S 1998 J. Phys. A : Math. Gen. 31 L273.
- [21] A. Sinha and P. Roy, J. Phys. A : Math. Gen. 39 (2006) L377–L384.
- [22] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. 43 (2002) 205, 2814, 3944.
- [23] Ahmed Z 2001 Phys. Lett. A 282 343.
Ahmed Z 2001 Phys. Lett. A 287 295.
- [24] B. Bagchi and Quesne C 2000 Phys. Lett. A 273 285.
B. Bagchi B and Quesne C 2002 Phys. Lett. A 300 18.
- [25] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. 44 (2003) 974.
- [26] A. Mostafazadeh, Nucl. Phys. B 640 (2002) 419.
- [27] A. Sinha and P. Roy. Modern Physics Letters A, vol. 20, no. 31, (2005) pages 2377 - 2385.
- [28] A. S. de Castro, Phys. Lett. A 318 (2003) 40, 309 (2003) 340.
- [29] F. M. Toyama and Y. Nogami, Phys. Rev. A 59 (1999) 1056, 59 (1999) 1056.
Y. Nogami and F. M. Toyama, Phys. Rev. A 45 (1992) 1708, 47 (1993) 1708, 57 (1998) 93.
- [30] A. Sinha and P. Roy, J. Phys. A 37(2004) 2509, and references therein.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة التناظر الفائق في الميكانيك الغير نسبي, ثم في الميكانيك النسبي, وبعد ذلك قمنا بحل معادلة ديراك عند وجود صنف من الكمون باستعمال طريقة التناظر الفائق, ثم استنتجنا الحول بالنسبة لكمون كولومبي.

وفي الأخير قمنا بدراسة التناظر بالنسبة للزوجية وانعكاس الزمن معا في الميكانيك الغير نسبي وكذلك في الميكانيك النسبي, ثم قمنا بحل معادلة ديراك عند وجود كمون غير هيرميتي ككمون مورس باستعمال التناظر بالنسبة للزوجية و انعكاس الزمن.

كلمات المفاتيح:

معادلة ديراك, التناظر الفائق, التناظر بالنسبة للزوجية وانعكاس الزمن, الهاملتوني الهيرميتي والغير هيرميتي.

Résumé :

Dans ce mémoire nous allons nous étudier la supersymétrie en mécanique quantique non relativiste, ensuite en mécanique quantique relativiste, et utilisé la méthode de supersymétrie pour résoudre l'équation de Dirac pour un classe de potentiel, Comme cas particulier nous allons déduire les solutions pour le potentiel de coulomb. Finalement nous allons nous étudier la symétrie PT en mécanique quantique non relativiste, ensuite en mécanique quantique relativiste, et utilisé la méthode de symétrie PT pour résoudre l'équation de Dirac avec un potentiel de Morse non hermitien.

Mots clef:

L'équation de Dirac, supersymétrie, PT symétrie, non hermitien

Abstract:

In this report we are going to study ourselves a supersymmetric in non relativistic quantum mechanics, followed in relativistic quantum mechanics, and used the method of a supersymmetric to resolve the Dirac equation for one class of potential, As particular case we are going to deduct the solutions for the potential of coulomb. Finally we are going to study ourselves a PT symmetric in non relativistic quantum mechanics, followed in relativistic quantum mechanics, and used the method of a PT symmetric to resolve the Dirac equation with a potential non Hermitian of Morse.

Keywords:

Dirac equation, supersymmetric, PT symmetric, non Hermitian