

530.1/7

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Chahinez Lahoulou

THEME

Equation de Pauli dépendante du temps confinée dans un potentiel  
harmonique en présence de l'effet Aharonov-Bohm



Soutenu le : / /2008

Devant le Jury :

Président :	Mr. T. Boudjedaa	Prof	Université de Jijel
Rapporteur :	Mr. M. Maamache	Prof	Université de Setif
Examineurs :	Mr. F. Benamira	Prof	Université de Constantine
	Mr. A. Bounameas	Prof	Université de Jijel
	M <sup>lle</sup> . Z. Lehtihet	Mc	Université de Jijel

# Table des matières

Introduction	5
<b>1 Théorie de Lewis-Riesenfeld</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction	7
1.2 Solution de L'équation de schrödinger	8
1.3 Comment trouver un invariant	11
1.4 Exemples	12
1.4.1 Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables	12
1.4.2 Particule chargée dans un champ électromagnétique	15
<b>2 Effet Aharonov-Bohm</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction	21
2.2 Oscillateur dépendent du temps en présence de l'effet AB	24
2.2.1 Derivation de l'invariant	26
2.2.2 Valeurs et fonctions propres de l'invariant $I(t)$	27
<b>3 Travaux de Hagen (Diffusion des particules en présence de l'effet Aharonov-Bohm)</b>	<b>33</b>
3.1 Introduction	33
3.2 Particule non relativiste de spin zéro	34
3.2.1 Régularité de la solution	35
3.2.2 Section efficace de diffusion	38
3.3 Particule relativiste de spin-1/2	39

---

3.3.1	Régularité de la solution . . . . .	41
3.3.2	Section efficace de diffusion . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Equation de Pauli dépendante du temps en présence de l'effet AB</b>	<b>46</b>
4.1	Introduction . . . . .	46
4.2	Recherche de l'invariant . . . . .	50
4.3	Recherche des vecteurs et valeurs propres . . . . .	54
4.3.1	cas $k > 0$ . . . . .	57
4.3.2	calcul de la phase $\alpha_{\mu, \nu}(t)$ . . . . .	65
4.3.3	cas $k = 0$ . . . . .	66
4.3.4	calcul de la phase $\alpha_{\mu, m}(t)$ . . . . .	71
4.3.5	cas $k < 0$ , $k = -\Omega^2 = (i\Omega)^2$ . . . . .	72
4.3.6	calcul de la phase $\alpha_{m, \nu_m}(t)$ . . . . .	80
	Conclusion	82
	Bibliographie	83

# Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer cette thèse de magister.

Il m'est indispensable de remercier ici toutes les personnes qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont accompagné dans ce travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier Mr. Maamache Mustapha, mon directeur de thèse, professeur à l'université de Sétif, qui m'a proposé cet intéressant sujet de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée et la patience avec laquelle il m'a dirigée. Son encouragement a été très précieux dans les moments de doute. Je lui suis très reconnaissante de tout cela.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, Mr T. Boudjedaa professeur à l'université de Jijel président du Jury et les examinateurs : Mr. F. Benamira professeur à l'université Mentouri de Constantine, Mr. A. Bounames professeur à l'université de Jijel, M<sup>elle</sup> Z. Lehtihet maître de conférence à l'université de Jijel, pour leurs rapports et leurs questions pertinentes.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de la post graduation de physique théorique. En particulier Mrs. : Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, L. Chetouani , F. Benamira, A. Lecheheb professeurs à l'université Mentouri de Constantine, M. Merad professeur à l'université d'Qum Elbouagui.

Je remercie également Mr. Y. Saadi, Maître assistant à l'université de Sétif, pour ses conseils généreux qui ont été fondamentaux pour mon travail et m'ont permis de clarifier des points délicats de ma thèse.

Tous mes remerciements, à toute ma famille Yousfi qui a toujours confiance en moi, et m'a toujours soutenu, et très spécialement à mes grands-parents pour leur grande patience dont ils ont fait preuve le long de leur vie.

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2004/2005.

Finalement, je voudrais remercier mon époux pour son soutien indéfectible, tous mes proches, tous mes amis et tous ceux qui m'ont connu.

Chahinez

# Introduction générale

Le travail précurseur de David Bohm et son étudiant Yakir Aharonov [5] a révélé que les potentiels électromagnétiques n'ont pas été introduits seulement comme des outils mathématiques commodes pour calculer les champs, mais aussi comme des objets qui peuvent produire des effets observables. Ils peuvent affecter l'état de la matière dans des régions où les champs correspondants n'exercent aucune force. En particulier, une particule chargée se déplaçant en présence d'un potentiel vecteur acquiert une phase topologique qui peut provoquer un déplacement des franges dans une expérience d'interférences où le champ magnétique est confiné dans une région très réduite de l'espace. Ce phénomène purement quantique s'appelle : l'effet Aharonov-Bohm (AB).

L'objet de cette thèse est de solutionner l'équation de Pauli dépendante du temps à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm en utilisant la théorie des invariants.

A partir de cela, nous présenterons dans une première partie la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld [4, 7, 8, 17]. Un rappel introductif nous permet dans un premier temps de décrire brièvement cette théorie, dans un deuxième temps nous exposerons la solution de l'équation de Schrödinger, nous introduirons ensuite la méthode pour trouver l'invariant. En dernier temps et pour illustrer cette théorie nous traiterons deux exemples[51] : (1) l'oscillateur harmonique à masse et fréquence dépendantes du temps, (2) particule chargée à masse dépendante du temps plongée dans un champs électromagnétique dépendant du temps.

Dans une deuxième partie l'effet Aharonov-Bohm sera présenté et détaillé, en premier temps nous le décrirons en commençant par l'expérience d'interférence puis le calcul du déphasage entre deux trajectoires dont on montrera qu'il ne dépend que du flux magnétique, en deuxième temps nous traiterons l'oscillateur harmonique à masse et fréquence dépendantes du temps en présence de l'effet AB.

Dans une troisième partie, nous exposerons les travaux de Hagen [31, 32, 33, 34] relatifs à la diffusion des particules non relativistes chargées sans spin et les particules relativistes chargées de spin  $1/2$ , où il a montré, d'une part, que les solutions irrégulières contribuent dans certains cas particuliers, d'autre part, que l'inclusion du spin affecte l'amplitude de diffusion.

Dans une dernière partie, nous traiterons l'équation de Pauli dépendante du temps confinée dans un potentiel harmonique à 2D en présence de l'effet AB qui constituera le résultat essentiel de ce mémoire.

En fin nous concluerons sur les travaux effectués durant cette thèse.

# Chapitre 1

## Théorie de Lewis-Riesenfeld

### 1.1 Introduction

L'étude des systèmes dépendants du temps a été le sujet d'un grand intérêt dans les littératures, que ce soit en mécanique classique [1, 2] ou quantique [3]. Le retentissement d'intérêt sur ce sujet est dû au fait que les systèmes dépendants du temps peuvent être traités comme un modèle exactement soluble et peuvent être utilisés dans plusieurs applications en physique tel que l'optique, la mécanique quantique, ...

On considère la théorie des invariants pour un système quantique général dont l'opérateur Hamiltonien  $H(t)$  est explicitement dépendant du temps. Bien sûr, un tel système n'est pas fermé, dans le sens où il y a des influences externes, qui peut changer les paramètres du système, changer son énergie totale ou le moment angulaire,...etc. La théorie du rayonnement semi-classique fournit un exemple bien connu. Dans ce cas le système quantique est pris pour être un atome ou une molécule qui subit une transition radiative, et le terme explicitement dépendant du temps dans l'Hamiltonien est l'interaction avec le champ de la radiation classique.

Les techniques d'approximation habituelles pour traiter un tel système sont la théorie de perturbation dépendante du temps (dans laquelle le terme dépendant du temps est considéré petit), l'approximation adiabatique (dans laquelle l'échelle de variation du terme dépendant du temps est grand comparé à toutes les périodes caractéristiques du système), et l'approximation "soudaine" (dans laquelle les changements externes sont soudainement très rapide, ..., comparés à la période caractéristique la plus courte). Les résultats de l'approximation adiabatique et

soudaine seront déduits comme des limites des résultats rigoureux de la théorie des invariants.

Le but de cette discussion des systèmes dépendant du temps est la dérivation de la relation entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger. Nous pouvons trouver une transformation de phase dépendante du temps pour chaque état propre d'un invariant tel que la fonction propre devient une solution de l'équation de Schrödinger, et la phase est déterminée en résolvant une simple équation différentielle du premier ordre.

## 1.2 Solution de L'équation de Schrödinger

Nous considérons un système dont l'Hamiltonien  $H(t)$  est explicitement dépendant du temps, et nous supposons l'existence d'un autre opérateur Hermitien non trivial  $I(t)$ , qui est un invariant. C'est-à-dire,  $I(t)$  satisfait les conditions

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0, \quad (1.1)$$

et

$$I^+ = I. \quad (1.2)$$

L'équation de Schrödinger qui détermine le vecteur d'état dépendant du temps  $|\psi\rangle$  est

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H(t) |\psi\rangle. \quad (1.3)$$

En appliquant l'équation (1.1) sur  $|\psi\rangle$  et utilisant l'équation (1.3), nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} |\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar} [I, H] |\psi\rangle &= 0, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi\rangle) &= H(t) (I |\psi\rangle), \end{aligned} \quad (1.4)$$

cette dernière implique que l'action de l'invariant sur un vecteur d'état produit une autre solution de l'équation de Schrödinger. Ce résultat est valide pour tout invariant, même si ce dernier implique des opérations de dérivation par rapport au temps. Si l'invariant n'implique pas des dérivations par rapport au temps, alors nous sommes capables de dériver une règle simple et explicite pour choisir les phases des fonctions propres de  $I(t)$  tel que ces états eux-mêmes satisfont l'équation de Schrödinger. Dans ce qui suit, nous supposons que  $I(t)$  n'implique pas des

dérivations par rapport au temps. L'invariant avec lequel nous traitons l'oscillateur harmonique dépend du temps et le mouvement de la particule chargée, satisfait cette exigence.

Nous supposons que l'invariant  $I(t)$  a un ensemble complet des fonctions propres. Nous dénotons les valeurs propres de  $I(t)$  par  $\lambda$ , et par  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$  les fonctions propres, où  $k$  représente tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres. L'équation aux valeurs propres s'écrit comme

$$I(t) |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \lambda |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.5)$$

$$\langle \varphi_{\lambda',k'} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \delta_{\lambda',\lambda} \delta_{k',k}. \quad (1.6)$$

En vertu de l'équation (1.2), les valeurs propres  $\lambda$  sont réelles. Elles sont aussi indépendantes du temps, comme nous pouvons le déduire dans le simple chemin suivant. En dérivant l'équation (1.5) par rapport au temps, nous obtenons

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle. \quad (1.7)$$

Appliquons l'équation (1.1) sur l'état propre  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$ , ce qui nous donne

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + IH |\varphi_{\lambda,k}\rangle - \lambda H |\varphi_{\lambda,k}\rangle = 0, \quad (1.8)$$

le produit scalaire de l'équation (1.8) avec un état  $\langle \varphi_{\lambda',k'} |$  est

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda',k'} | H |\varphi_{\lambda,k}\rangle = 0, \quad (1.9)$$

ce qui implique

$$\langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle = 0, \quad (1.10)$$

prenons maintenant le produit scalaire de l'équation (1.7) avec  $\langle \varphi_{\lambda,k} |$ , nous obtenons

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \varphi_{\lambda,k} | \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle = 0. \quad (1.11)$$

Comme les valeurs propres sont indépendantes du temps, il est clair que les états propres doivent être dépendants du temps.

Pour chercher le rapport entre les états propres de  $I(t)$  et les solutions de l'équation de Schrödinger, nous écrivons en premier lieu l'équation du mouvement de  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$ , en commençant par l'équation (1.7) et en utilisant l'équation (1.11), on aboutit à

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle. \quad (1.12)$$

En prenant le produit scalaire avec  $\langle \varphi_{\lambda',k'} |$  et utilisant l'équation (1.9) pour éliminer  $\langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle$ , nous obtenons

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = (\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda',k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle, \quad (1.13)$$

de ceci, pour  $\lambda \neq \lambda'$ , nous déduisons

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \langle \varphi_{\lambda',k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.14)$$

L'équation (1.13) n'implique pas

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda,k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \langle \varphi_{\lambda,k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle.$$

Si l'équation (1.14) avait tenu pour  $\lambda = \lambda'$  aussi bien que pour  $\lambda \neq \lambda'$ , alors nous déduisons immédiatement que  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$  satisfait l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire,  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$  est une solution particulière pour l'équation de Schrödinger pour  $|\psi\rangle$ .

La phase de  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$  n'a pas été arrangée par nos définitions. Supposons qu'une phase quelconque définie a été choisie, mais nous sommes encore libres de multiplier par un facteur de phase dépendant du temps arbitraire. C-à-d nous pouvons définir un nouvel ensemble des vecteurs propres de  $I(t)$  lié à notre ensemble par une transformation de jauge dépendante du temps

$$|\varphi_{\lambda,k}\rangle_{\alpha} = \exp[i\alpha_{\lambda k}(t)] |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.15)$$

où  $\alpha_{\lambda k}(t)$  est une fonction réelle de temps arbitrairement choisie. Ces  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle_{\alpha}$  sont des états propres orthonormaux de  $I(t)$  associés à  $\lambda$ , aussi bien que les  $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$ . Si nous choisissons bien les phases  $\alpha_{\lambda k}(t)$  l'équation (1.14) sera vérifiée pour  $\lambda = \lambda'$  et donc l'objectif sera atteint. Il faut juste avoir

$$\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \varphi_{\lambda,k'} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.16)$$

Du fait que chacun de nouveaux états propres de  $I(t)$  satisfait l'équation de Schrödinger, la solution générale est donnée par

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} \exp[i\alpha_{\lambda k}(t)] |\varphi_{\lambda,k}(t)\rangle, \quad (1.17)$$

où  $C_{\lambda k}$  sont des coefficients indépendants du temps et correspondent à  $|\psi(0)\rangle$  via

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} \exp[i\alpha_{\lambda k}(0)] |\varphi_{\lambda,k}(0)\rangle,$$

$|\psi\rangle$  est la solution de l'équation de Schrödinger et  $|\varphi_{\lambda,k}(t)\rangle$  sont les états propres de l'invariant.

En résumé :

(1) L'action de l'invariant  $I$  sur une solution de l'équation de Schrödinger (1.3), nous donne une autre solution de cette équation.

(2) Cet invariant  $I$  a un spectre constant au cours du temps (independent du temps).

(3) Si  $I$  a un spectre non-dégénéré, toutes ses fonctions propres sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger (1.3) à une phase près.

### 1.3 Comment trouver un invariant

Une fois que nous connaissons l'intérêt d'utiliser les invariants pour décrire les solutions, nous pouvons attaquer directement le problème de trouver ces invariants.

Dans le cas d'un système de dimension finie, il'y a un résultat due à [3] qui dit que :

Nous pouvons avoir un invariant du système (1.3) en construisant une algèbre de Lie, mais le problème traité par ce mémoire est un bon contre exemple, car nous allons démontrer que nous pouvons trouver un invariant sans construire une algèbre de Lie. Ce résultat est exacte (en temps finie mais peut-être pas petit). Dans le cas de dimension infinie, pour qu'un système de la forme (1.3) ait un invariant, on doit avoir le fait que l'algèbre de Lie soit de dimension infinie. Paradoxalement, plusieurs exemples d'intérêt physique (comme l'oscillateur harmonique), ont une algèbre de Lie de dimension finie (elle est même de dimension réduite).

Donc nous nous mettons là, dans le cas d'un système de dimension infinie, sous l'hypothèse d'avoir une algèbre de Lie de dimension finie. Nous allons voir, comment cette hypothèse peut nous aider à trouver l'ensemble des invariants de notre système de Schrödinger.

Supposons par exemple que l'algèbre de Lie engendrée par  $H(t)$  est donnée par l'ensemble des opérateurs hermitiens :

$$\mathfrak{A} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}. \quad (1.18)$$

Nous allons donc essayer de trouver des invariants  $I$  qui se décomposent complètement sur cette algèbre de Lie. Prenons alors  $I$  sous la forme :

$$I(t) = \sum_{l=1}^n \beta_l(t) T_l, \quad (1.19)$$

en injectant cette forme dans la définition des invariants, c'est à dire (1.1), nous voyons bien que les  $\beta_i(t)$  doivent vérifier un système d'équations. Pour retrouver ces équations différentielles, nous avons besoin de connaître la décomposition des commutateur  $[H(t), T_i]$  dans la base  $\Lambda$ . En faisant cela, nous allons trouver les coefficients  $C_i^j$ .

$$[H(t), T_i] = \sum_{j=1}^n C_i^j T_j. \quad (1.20)$$

l'expression ci-dessus n'est vraie que si notre algèbre est fermé.

Connaissant ces coefficients nous pouvons donner les équations différentielles que les  $\beta_i(t)$  doivent vérifier :

$$i\dot{\beta}_i(t) = \hbar \sum_{j=1}^n C_i^j \beta_j(t) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.21)$$

Ainsi, à chaque ensemble des  $\beta_i(t)$  qui vérifient (1.21), est associé un invariant  $I = \sum \beta_i(t) T_i$ .

## 1.4 Exemples

### 1.4.1 Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables

La résolution de l'équation Schrödinger pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps (OHDT) a un grand intérêt en mécanique quantique. La méthode des invariants introduite par Lewis et Riesenfeld [4] donne une méthode typique et puissante pour étudier ce système. L'intérêt de ce problème est principalement parce qu'il peut être traité comme un modèle exactement soluble et offre plusieurs applications dans la description des systèmes physiques en différents territoires de physique.

Nous nous proposons à résoudre l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique à masse et fréquence dépendants du temps

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) q^2 \right] \psi. \quad (1.22)$$

où  $q$  est une coordonnée canonique,  $p$  son moment conjugué,  $\omega(t)$  est une fonction arbitraire du temps, et  $M(t)$  la masse. Les équations canoniques du mouvement sont

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar} [q, H] = \frac{1}{M(t)} p,$$

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar} [p, H] = -M(t)\omega^2(t)q.$$

Pour la construction d'un invariant du système décrit par l'hamiltonien dépendant du temps (1.22), nous utilisons l'approche algébrique (algèbre de Lie) [7, 8], présentant la base hermitienne suivante

$$T_1 = \frac{1}{2}p^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}\{p, q\}, \quad T_3 = \frac{1}{2}q^2,$$

avec les relations de commutations

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1, T_3] = -i\hbar T_2.$$

Maintenant, nous cherchons l'invariant sous la forme

$$I(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) T_i, \quad (1.23)$$

et au moyen de  $\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [I, H]$  et de la comparaison des coefficients d'un système d'équation linéaire de premier ordre pour l'inconnue  $\beta_i(t)$  dans (1.23) nous aboutissons à

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -\frac{2}{M}\beta_2, \\ \dot{\beta}_2 &= M\omega^2\beta_1 - \frac{1}{M}\beta_3, \\ \dot{\beta}_3 &= 2M\omega^2\beta_2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

ce système peut être simplifié en posant  $\beta_1 = \rho^2$  où  $\rho$  est la solution de l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \rho\omega^2 = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (1.25)$$

en utilisant (1.24) nous arrivons à déterminer

$$\beta_2 = -M\rho\dot{\rho},$$

et

$$\beta_3 = \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2).$$

Ainsi, l'invariant s'écrit sous la forme

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 p^2 - M \rho \dot{\rho} (pq + qp) + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) q^2 \right\}. \quad (1.26)$$

Pour obtenir les fonctions propres de  $I(t)$ , considérons la transformation unitaire

$$\phi'_n(q, t) = U \phi_n(q, t), \quad (1.27)$$

avec

$$U = \exp \left[ -\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} q^2 \right]. \quad (1.28)$$

Sous cette transformation unitaire l'équation aux valeurs propres devient

$$I' \phi'_n(q, t) = \lambda_n \phi'_n(q, t), \quad (1.29)$$

et

$$I' = UIU^+ = \frac{1}{2} \left[ \rho^2 p^2 + \frac{q^2}{\rho^2} \right]. \quad (1.30)$$

Si nous définissons la nouvelle variable  $\sigma = \frac{q}{\rho}$ , nous pouvons écrire l'équation aux valeurs propres (1.29) comme suit

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma), \quad (1.31)$$

avec

$$\phi'_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_n(\sigma). \quad (1.32)$$

Le facteur  $\sqrt{\rho}$  est introduit dans l'équation (1.29) pour garantir la condition de normalisation

$$\int \phi_n'^*(q, t) \phi'_n(q, t) dq = \int \varphi_n'^*(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma = 1.$$

La solution de l'équation (1.31) [17] est

$$\varphi_n(\sigma) = \left[ \frac{1}{n! 2^n \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2\hbar} \right] H_n \left[ \left( \frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right], \quad (1.33)$$

où  $\lambda_n = \hbar(n + \frac{1}{2})$ , et  $H_n$  le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$ . Alors

$$\phi_n(q, t) = \left[ \frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{iM}{2\hbar} \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[ \left( \frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{q}{\rho} \right) \right] \quad (1.34)$$

Maintenant, il nous reste à trouver la phase  $\alpha_n(t)$ . Pour cela nous utilisons (1.16), puis passons de  $\phi_n(q, t)$  à  $\phi'_n(q, t)$ , nous obtenons

$$\hbar \dot{\alpha}_n(t) = \langle \phi'_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{I'}{M\rho^2} | \phi'_n \rangle, \quad (1.35)$$

où nous avons utilisé l'équation auxiliaire (1.25) pour éliminer  $\omega^2$  de  $H$ . Ensuite, en substituant l'équation (1.32) dans l'équation (1.35), nous obtenons

$$\hbar \dot{\alpha}_n(t) = \langle \varphi_n | -\frac{I'}{M\rho^2} | \varphi_n \rangle, \quad (1.36)$$

En utilisant l'équation (1.29) et la normalisation de  $\varphi_n$  nous trouvons

$$\alpha_n(t) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2}, \quad (1.37)$$

en fin, utilisons l'équation (1.17) et (1.34), nous trouvons la solution de l'équation de Schrödinger suivante

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \sum_n C_n \left[ \frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{iM}{2\hbar} \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 - i \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2} \right] \\ & \times H_n \left[ \left( \frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{q}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

### 1.4.2 Particule chargée dans un champ électromagnétique

Dans cette partie, nous considérons une particule de masse variable  $M(t)$  et de charge  $e$ , sous l'action d'un champ magnétique constant de symétrie axiale. Le champ magnétique constant est défini par un potentiel vecteur

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} B \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \quad (1.39)$$

et un potentiel scalaire ( $c = 1$ )

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{2}{M(t)} \eta(t) r^2, \quad (1.40)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur de la position,  $\mathbf{k}$  est le vecteur unité dans la direction de l'axe de symétrie,  $r$  est la distance par rapport à l'axe de symétrie, et  $\eta(t)$  une fonction du temps continue par morceaux arbitrairement choisie. Les champs électrique et magnétique sont donc donnés par

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{M(t)}\eta(t)\mathbf{r}, \quad (1.41)$$

et

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{k}.$$

Alors l'équation de Schrodinger du système dans le plan  $(x, y)$  (en coordonnées polaires) est donnée par :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[ \frac{1}{2M(t)} \left( p_r^2 + \frac{(p_\theta - \frac{\hbar}{2})(p_\theta + \frac{\hbar}{2})}{r^2} \right) + \frac{e^2}{2M(t)} \left( \frac{B^2}{4} + \eta(t) \right) r^2 - \frac{eB}{2M(t)} p_\theta \right] \psi, \quad (1.42)$$

où

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right), \\ p_r &= \frac{1}{r} (xp_x + yp_y) - \frac{i\hbar}{2} \frac{1}{r}, \\ p_\theta &= xp_y - yp_x, \end{aligned}$$

avec

$$p_r = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right), \quad p_\theta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad [r, p_r] = [\theta, p_\theta] = i\hbar. \quad (1.43)$$

Calculons exactement comme dans le cas de l'oscillateur harmonique dépendant du temps l'algèbre de Lie engendrée par l'Hamiltonien et nous trouvons que cette algèbre est donnée par les générateurs

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} p_\theta, \\ T_1 &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{(p_\theta - \frac{\hbar}{2})(p_\theta + \frac{\hbar}{2})}{r^2} \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_r r + r p_r), \\ T_3 &= \frac{1}{2} r^2, \end{aligned} \quad (1.44)$$

avec les relations de commutations suivantes

$$[T_0, T_1] = [T_0, T_2] = [T_0, T_3] = 0, \quad (1.45)$$

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \quad (1.46)$$

$$[T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad (1.47)$$

$$[T_1, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (1.48)$$

Remarquons que  $T_0$  commute avec les autres générateurs, c-à-d qu'il commute avec  $H$ , d'où les fonctions d'ondes ont la forme suivante

$$\psi = U\Phi = e^{\frac{i}{\hbar} p_0 \int \omega_c(t) dt} \Phi, \quad (1.49)$$

avec

$$\omega_c(t) = \frac{eB}{M(t)}.$$

L'équation de Schrödinger(1.42) devient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left[ \frac{1}{2M(t)} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\theta^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right) \right) + \frac{1}{2} M(t) \Omega^2(t) r^2 \right] \Phi, \quad (1.50)$$

où

$$\Omega^2(t) = \frac{e^2}{M(t)} \eta(t) + \frac{\omega_c^2(t)}{4},$$

Maintenant, nous cherchons un invariant sous la forme (1.19). En utilisant l'équation (1.1) et comparons (comparant) les coefficients d'un système d'équations linéaires du premier ordre avec trois inconnus  $\beta_l, l = 1, 2, 3$ , nous obtenons

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{2}{M} \beta_2, \\ \beta_2 = M\Omega^2 \beta_1 - \frac{1}{M} \beta_3, \\ \beta_3 = 2M\Omega^2 \beta_2, \end{cases}$$

pour simplifier ce système d'équations nous posons  $\beta_1 = \rho^2$  où  $\rho$  est la solution de l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \rho \Omega^2 = \frac{1}{M^2 \rho^3}, \quad (1.51)$$

nous arrivons à

$$\beta_2 = -M\rho\dot{\rho},$$

et

$$\beta_3 = \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2).$$

Ainsi, l'invariant s'écrit sous la forme

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \left[ p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\theta^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right) \right] - M\rho\dot{\rho} (p_r r + r p_r) + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) r^2 \right\}. \quad (1.52)$$

Nous avons l'équation aux valeurs propres

$$I\phi_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi_m(r, \varphi, t). \quad (1.53)$$

Considérons d'abord la transformation unitaire

$$\phi'_m(r, \varphi, t) = U\phi_m(r, \varphi, t), \quad (1.54)$$

avec

$$U = \exp \left[ -i \frac{M\dot{\rho}}{\hbar\rho} T_3 \right]. \quad (1.55)$$

Sous l'action de cette transformation unitaire l'équation aux valeurs propres (1.53) devient

$$I'\phi'_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi'_m(r, \varphi, t), \quad (1.56)$$

avec

$$I' = UIU^+ = \rho^2 T_1 + \frac{1}{\rho^2} T_3, \quad (1.57)$$

l'équation aux valeurs propres prend alors la forme

$$\frac{1}{2} \left[ \rho^2 p_r^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \left( p_\theta^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right) + \frac{1}{\rho^2} T_3 \right] \phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \phi'_{n,m}(r, \varphi, t),$$

ou bien

$$\frac{1}{2} \left[ -\hbar^2 \rho^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\hbar^2}{4} \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \right] \phi'_{n,m} = \lambda_{n,m} \phi'_{n,m}, \quad (1.58)$$

faisons le changement de variable  $\xi = \frac{r}{\rho}$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \text{et } \phi'_{n,m}(r, \theta, t) &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_{n,m}(\xi, \theta), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left[ -\hbar^2 \left( \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \xi^2 \right] \varphi_{n,m} = \lambda_{n,m} \varphi_{n,m}, \quad (1.59)$$

la solution de l'équation(1.57) est

$$\varphi_{n,m}(r, \theta; t) = C_{m,n} \exp \left[ -\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \xi^{|m|} {}_1F_1 \left( -n, |m| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp [im\theta], \quad (1.60)$$

avec

$$\lambda_{n,m} = \hbar (2n + |m| + 1).$$

Pour trouver les solutions de l'équation de Schrödinger nous devons calculer la phase. Si nous exprimons la phase par les fonctions propres de  $I'(t)$  et nous utilisons l'équation (1.16) et (1.54), nous trouvons

$$\hbar \alpha_{n,m}(t) = \langle \varphi_{n,m} | -\frac{I'}{M\rho^2} | \varphi_{n,m} \rangle.$$

Alors la phase est

$$\alpha_{n,m}(t) = -(2n + |m| + 1) \int_0^\infty \frac{dt'}{M(t')\rho^2}. \quad (1.61)$$

La solution de l'équation de Schrödinger d'une particule chargée dans un champ magnétique constant est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(\xi, \theta, t) &= C_{n,m} \exp \left[ \frac{iM}{2\hbar} \left( \rho\dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 - i(2n + |m| + 1) \int_0^\infty \frac{dt'}{M(t')\rho^2} \right] \\ &\times \exp \left[ \frac{eB}{2} m \int \frac{dt'}{M(t')} \right] \xi^{|m|} {}_1F_1 \left( -n, |m| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp [im\theta], \quad (1.62) \end{aligned}$$

où la solution générale est  $\psi(r, \theta, t) = \sum_{n,m} \psi_{n,m}(r; \theta, t)$ .

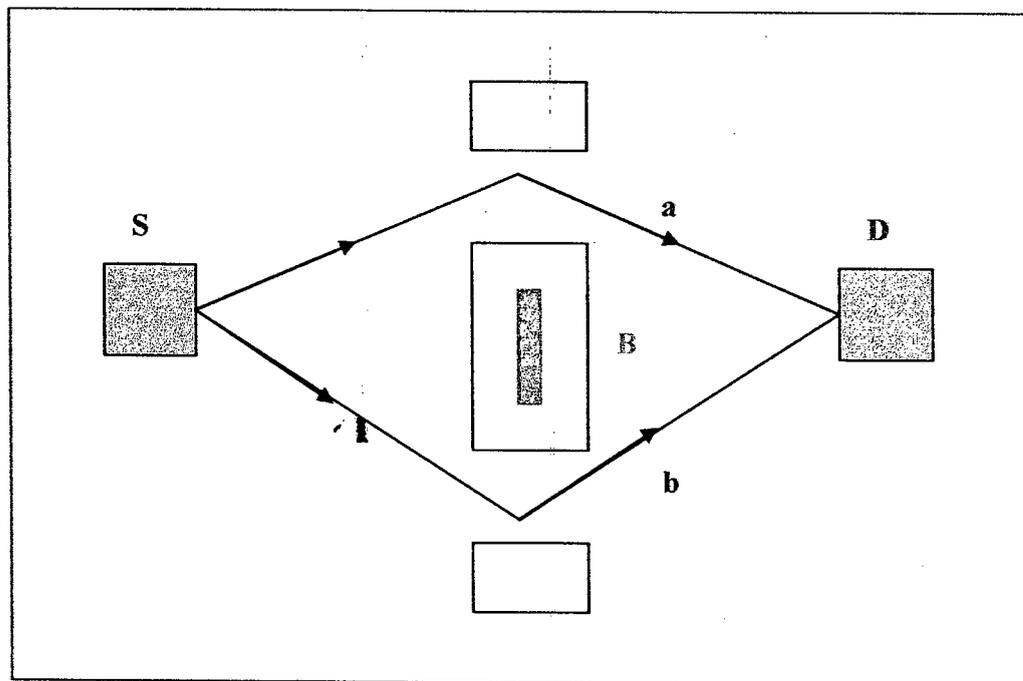
$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, t) = & \sum_{n,m} C_{n,m} \exp \left[ \frac{iM}{2\hbar} \left( \rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 - i(2n + |m| + 1) \int_0^\infty \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{eB}{2} m \int \frac{dt'}{M(t')} \right] \xi^{|m|} {}_1F_1 \left( -n, |m| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp[im\theta]. \end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Effet Aharonov-Bohm

### 2.1 Introduction

Dans la mécanique classique le mouvement des particules chargées émises par la source  $S$  n'est pas affecté par le champ magnétique  $B$  parce que les particules ne peuvent pas décrire la région de l'espace où le champ magnétique est présent. Pour la particule chargée le déphasage peut être observé dans le modèle d'interférence enregistré au détecteur  $D$ .



Schémat d'Aharonov-Bohm

Le déphasage dépend du flux inclus par les deux ensembles alternatifs des chemins a et b. Mais l'enveloppe globale du diagramme de diffraction n'est pas déplacée indiquant ainsi qu'aucune force magnétique classique n'agit sur les particules. Prévu par Yakir Aharonov et David Bohm en 1959, cet effet montre que c'est le potentiel vecteur électromagnétique qui est la grandeur fondamentale en mécanique quantique et non pas les champs électriques et magnétiques. Le potentiel vecteur était auparavant considéré comme une grandeur purement mathématique sans aucune contrepartie physique. L'effet Aharonov-Bohm implique une action du potentiel vecteur sur les électrons. L'effet a pu être vérifié expérimentalement dans des boucles de conducteurs ferromagnétiques (anneaux d'Aharonov Bohm) par *Tomomura* (par une première expérience contestée en 1982, puis par une validation définitive en 1986).

L'effet AB est un effet de déplacement des franges d'interférence dû au potentiel vecteur d'un champ magnétique localisé dans une région infiniment petite de l'espace. Pour mettre en évidence cet effet, considérons une expérience d'interférence avec un dispositif à deux fentes de Young-Fresnel. Plaçons derrière une plaque et à la même distance des fentes, un solénoïde à l'intérieur duquel le champ magnétique uniforme est confiné (il ne crée absolument aucun champ à l'extérieur). nous faisons interférer des ondes associées à des électrons qui passent à travers ces deux fentes. A priori, la région où le champ magnétique est non nul ne se trouve pas sur la trajectoire des électrons, et nous pourrions donc s'attendre naïvement à ce qu'il n'y ait aucun effet observable. Mais en pratique, nous observons un décalage des franges par rapport aux franges obtenues en absence du champ [6] comme prévu par Aharonov et Bohm [5].

En effet, nous pouvons calculer l'expression du déphasage responsable du décalage. A l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est uniforme et à l'extérieur le champ est nul. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est associé au champ magnétique  $\mathbf{B}$  par la relation  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  et vérifie en particulier :

$$\oint_{C_r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.1)$$

où  $C_r$  est un cercle de rayon  $r$  centré sur l'axe du solénoïde et orthogonal à celui-ci. Le membre de droite est le flux magnétique  $\Phi(r)$  à travers la surface orientée s'appuyant sur ce cercle. Si le rayon  $r$  du cercle  $C_r$  est supérieur au rayon  $R$  du solénoïde, alors  $\Phi(r) = \pi R^2 B$  ( $B = |\mathbf{B}|$ ), et si  $r < R$  le flux vaut  $\Phi(r) = \pi r^2 B$ . Compte tenu des symétries du problème,

nous pouvons chercher un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que  $A_r = A_z = 0$  et dont la composante  $A_\varphi$  ne dépend que de  $r$ . Nous avons :

$$2\pi r A_\varphi(r) = \Phi(r), \quad (2.2)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} A_\varphi(r) = \frac{BR^2}{2r} & \text{si } r > R \\ A_\varphi(r) = \frac{Br}{2} & \text{si } r < R. \end{cases} \quad (2.3)$$

Un calcul explicite du rotationnel de ce potentiel vecteur confirme qu'il conduit bien au champ magnétique  $\mathbf{B}$  du solénoïde. Nous nous plaçons maintenant dans la limite où le rayon  $R$  du solénoïde devient infinitésimal, alors que le flux magnétique  $\Phi = \pi r^2 B$  reste fixe. Le champ magnétique est donc partout nul, à l'exception de la droite correspondante au solénoïde. Nous pouvons se demander l'existence d'une fonction scalaire  $\Lambda$  telle que  $\mathbf{A} = \nabla\Lambda$ , c'est-à-dire

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

nous pouvons voir facilement qu'une telle fonction doit satisfaire

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} = r A_\varphi(r). \end{cases} \quad (2.5)$$

Comme  $R \rightarrow 0$ , nous nous trouvons toujours dans la région externe au solénoïde, de sorte que  $r A_\varphi(r) = \frac{BR^2}{2} = \frac{\Phi}{2\pi}$ . Il existe donc une fonction  $\Lambda$  qui satisfait toutes ces conditions, qui est donnée à une constante près par :

$$\Lambda(\varphi) = \frac{\Phi\varphi}{2\pi}. \quad (2.6)$$

Nous pouvons noter que cette fonction est multivaluée, puisque les angles  $\varphi$  et  $\varphi + 2\pi$ , qui correspondent au même point de l'espace, donnent des valeurs différentes de  $\Lambda(\varphi)$ .

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger d'une particule ponctuelle de masse  $M$  et charge électrique  $e$  en présence d'un champ magnétique

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{(\frac{\hbar}{i} \nabla - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}))^2}{2M} + e\phi(t, r) \right] \psi, \quad (2.7)$$

définissons la transformation de jauge d'un champ électromagnétique comme

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda(r, t) \\ \phi' = \phi - \partial_t\Lambda(r, t), \end{cases} \quad (2.8)$$

sous cette transformation l'équation de Schrödinger (2.7) est invariante de jauge si la loi de transformation de la fonction d'onde  $\psi$  est

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = e^{-ie\Lambda}\psi. \quad (2.9)$$

Puisque le potentiel  $\mathbf{A}$  est de la forme  $\nabla\Lambda$  partout à l'extérieur du solénoïde, les considérations relatives à l'invariance de jauge permettent d'écrire directement la solution de l'équation de Schrödinger en présence du solénoïde sous la forme :

$$\psi(t, r, z, \varphi) = e^{-ie\Lambda}\psi_0(t, r, z, \varphi), \quad (2.10)$$

où  $\psi_0$  est une solution de l'équation de Schrödinger lorsque  $\mathbf{B} = 0$ , (i.e.  $\mathbf{A} = 0$ ) pour les deux trajectoires

$$\psi_{1,2}(t, r, z, \varphi) = e^{-ie\Lambda_{1,2}}\psi_0(t, r, z, \varphi),$$

Il est évident que l'interférence de ces deux trajectoires dépend du déphasage ( $\delta = e\Lambda_1 - e\Lambda_2$ ), nous pouvons écrire le compte tenu de l'Eq.(2.4) comme suit

$$\delta = e \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{r} = e \iint ds \cdot \nabla \times \mathbf{A}' = e \iint ds \cdot \mathbf{B} = e\Phi. \quad (2.11)$$

Notons que le déphasage dépend uniquement du flux magnétique se trouvant entre ces deux trajectoires. Il convient d'insister encore une fois sur le fait que cet effet a lieu même si la région dans laquelle se trouve un champ magnétique non nul est infinitésimale. Et comme exemple en prend l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendentes du temps.

## 2.2 Oscillateur dépendent du temps en présence de l'effet AB

Dans les dernières décennies le problème des systèmes dépendants du temps a joué un rôle important dans l'étude de plusieurs phénomènes physiques. Beaucoup d'attention a été prêtée à quelques problèmes spécifiques dépendants du temps : l'oscillateur harmonique dépendant du

temps et l'oscillateur singulier dépendant du temps. En fait ces deux problèmes spécifiques ont été étudiés intensivement dans différentes directions par plusieurs auteurs et des solutions de forme compacte ont été obtenues explicitement [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

La construction des invariants [4] ( constantes du mouvement) d'un système quantique décrit par un hamiltonien dépendant du temps a attiré beaucoup d'attention. Lewis et Riensensfeld [4] ont prouvé que, si le système admet un invariant  $I(t)$ , il est possible de trouver une base privilégiée de fonctions propres de cet opérateur, une fois multiplié par un facteur de phase dépendant du temps, évolue selon l'équation de Schrödinger.

En attendant, le problème des systèmes bidimensionnels ( 2D) aussi bien que les oscillateurs harmoniques dépendants du temps à 2D en présence d'un champ magnétique [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] a été considéré, pour lesquels les opérateurs dynamiques et les fonctions d'ondes ont été obtenus. D'autre part, l'effet Aharonov-Bohm est un effet de déplacement des franges d'interférence dû au potentiel vecteur d'un champ magnétique localisé dans une région infiniment petite de l'espace suscitent toujours l'intérêt considérable avec son application dans le divers secteur dans la littérature [30, 31, 32, 35].

Nous considérons un oscillateur harmonique bidimensionnel avec masse et fréquence dépendantes du temps confinées au plan  $(x,y)$  en présence de l'effet AB. L'équation de Schrödinger dépendante du temps est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 \right] \psi, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur. Le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , associé à l'effet AB, est supposé perpendiculaire au plan et confiné à un filament de rayon tendant vers zéro de sorte que le flux

$$\nu = -e \int_0^\infty B(r) r dr, \quad (2.13)$$

est fini et non nul.

Cependant, pour un tube de rayon nul, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  doit être pris pour être de la forme [31, 32]

$$eB(r) = -\frac{\nu}{r} \delta(r). \quad (2.14)$$

Il est bien connu [31, 32, 33] que pour un tube de rayon nul, la forme correspondante du potentiel  $A$  dans la jauge de Coulomb est

$$e\mathbf{A} = \left( \frac{\nu y}{x^2 + y^2}, -\frac{\nu x}{x^2 + y^2}, 0 \right). \quad (2.15)$$

De cette manière, nous avons

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= (p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 \\ &= p_x^2 + p_y^2 + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} - p_x \frac{\nu y}{x^2 + y^2} - \frac{\nu y}{x^2 + y^2} p_x + p_y \frac{\nu x}{x^2 + y^2} + \frac{\nu x}{x^2 + y^2} p_y \\ &= p_x^2 + p_y^2 + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} - \left( 2i\hbar \frac{\nu xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\nu y}{x^2 + y^2} p_x \right) - \frac{\nu y}{x^2 + y^2} p_x \\ &\quad + \left( 2i\hbar \frac{\nu yx}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\nu x}{x^2 + y^2} p_y \right) + \frac{\nu x}{x^2 + y^2} p_y \\ &= p_x^2 + p_y^2 + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} + \frac{2\nu L_z}{x^2 + y^2} (xp_y - yp_x), \end{aligned}$$

où  $L_z = xp_y - yp_x$  est le moment angulaire. Alors, l'équation (2.12) s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ \frac{1}{2M(t)} \left( p_x^2 + p_y^2 + \frac{2\nu L_z}{x^2 + y^2} + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) (x^2 + y^2) \right] \psi. \quad (2.16)$$

### 2.2.1 Derivation de l'invariant

Pour construire un invariant du système décrit par l'hamiltonien dépendant du temps (2.16), utilisons l'approche algébrique (algèbre de Lie) [7, 8], présentant la base hermitienne suivante

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \left[ p_x^2 + p_y^2 + \frac{2\nu L_z}{x^2 + y^2} + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_x x + x p_x + y p_y + p_y y), \\ T_3 &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \end{aligned}$$

avec les relations de commutations

$$[T_1^\nu, T_2] = -2i\hbar T_1^\nu, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1^\nu, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (2.17)$$

Nous notons que l'algèbre de Lie ci-dessus  $\{T_1^\nu, T_2, T_3\}$  est identique à la 2d algèbre d'oscillateur  $\{T_1^{\nu=0}, T_2, T_3\}$  pour le cas particulier  $\nu = 0$ .

Maintenant, nous cherchons l'invariant sous la forme (1.19) et au moyen de (1.1) et la comparaison des coefficients d'un système d'équations linéaires du premier ordre pour l'inconnue  $\beta_l$  dans (1.19) nous aboutissons à

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = -\frac{2}{M}\beta_2, \\ \dot{\beta}_2 = M\omega^2\beta_1 - \frac{1}{M}\beta_3, \\ \dot{\beta}_3 = 2M\omega^2\beta_2, \end{cases} \quad (2.18)$$

ce système peut être simplifié en plaçant  $\beta_1 = \rho^2$  où  $\rho$  est la solution de l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} + \frac{M}{M}\dot{\rho} + \rho\omega^2 = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_2 = -M\rho\dot{\rho}, \\ \dot{\beta}_3 = \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2). \end{cases}$$

Ainsi, l'invariant (1.19) peut être écrit sous la forme

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \left( p_x^2 + p_y^2 + \frac{2\nu L_z}{x^2 + y^2} + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} \right) - M\rho\dot{\rho}(p_x x + xp_x + yp_y + yp_y) + \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)(x^2 + y^2) \right\}. \quad (2.20)$$

Il représente l'invariant d'un oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D pour  $\nu = 0$  [28].

### 2.2.2 Valeurs et fonctions propres de l'invariant I(t)

Selon la théorie de Lewis-Riesenfeld [4] le système physique décrit par un opérateur  $I(t)$  ces fonctions propres dépendentes du temps  $\phi_{n,m}(x, y, t)$  sont assumées de former un ensemble orthogonal complet correspondant à la valeur propre indépendantes du temps  $\lambda_{n,m}$ .

Ainsi

$$I\phi_{n,m}(x,y,t) = \lambda_{n,m}\phi_{n,m}(x,y,t). \quad (2.21)$$

où

$$\langle \phi_{n',m'} | \phi_{n,m} \rangle = \delta_{n',n}\delta_{m',m} \quad (2.22)$$

il est montré en [4] que les fonctions d'ondes  $\psi(x,y,t)$  sont reliées à  $\phi_{n,m}(x,y,t)$  par la relation

$$\psi_{n,m}(x,y,t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)]\phi_{n,m}(x,y,t)$$

qui évolue selon l'équation de Schrödinger, où les fonctions de la phase  $\alpha_{n,m}(t)$  sont définies par

$$\hbar\dot{\alpha}_{n,m}(t) = \langle \phi_{n,m} | i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{n,m} \rangle. \quad (2.23)$$

Alors comme chaque  $\psi_{n,m}(x,y,t)$  satisfait l'équation de Schrödinger, la solution générale s'écrit

$$\psi(x,y,t) = \sum_{n,m} C_{n,m} \psi_{n,m}(x,y,t), \quad (2.24)$$

où  $C_{n,m}$  sont des constantes arbitraires, nous pouvons les déterminer à partir des conditions initiales du système physique.

Pour obtenir la fonction d'onde exacte de Schrödinger pour l'oscillateur dépendant du temps (2.12) nous procédons comme suit :

Considérons la transformation unitaire

$$\phi'_{n,m}(x,y,t) = U\phi_{n,m}(x,y,t), \quad (2.25)$$

avec

$$U = \exp\left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}(x^2 + y^2)\right]. \quad (2.26)$$

Sous cette transformation unitaire l'équation aux valeurs propres (2.21) devient

$$I'\phi'_{n,m}(x,y,t) = \lambda_{n,m}\phi'_{n,m}(x,y,t), \quad (2.27)$$

où

$$I' = UIU^+ = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} + \rho^2 (p_x^2 + p_y^2) + \frac{2\nu\rho^2}{x^2 + y^2} L_z + \frac{\nu^2\rho^2}{x^2 + y^2} \right]. \quad (2.28)$$

En définissant les nouvelles variables  $\sigma(t) = \frac{x}{\rho}$ ,  $\eta(t) = \frac{y}{\rho}$  et en passant aux coordonnées polaires, l'équation aux valeurs propres (2.27) prend la forme

$$\frac{1}{2} \left[ -\hbar^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - 2i\hbar \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\nu^2}{r^2} + r^2 \right] \chi_{n,m} = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}, \quad (2.29)$$

où

$$r^2 = \sigma^2 + \eta^2, \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

et

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \chi_{n,m}(\sigma, \eta), \quad (2.30)$$

les solutions de l'équation (2.29) [36] sont données par

$$\begin{aligned} \chi_{n,m}(r, \varphi) = & A_{n,m} \exp \left[ -\frac{r^2}{2\hbar} \right] r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left( -n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi] \\ & + B_{n,m} r^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left( -n - 2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Depuis (2.31) contient deux solutions régulière et irrégulière, nous pourrions exiger simplement que  $\chi_{n,m}(\xi, \varphi)$  soit fini à l'origine  $\xi = 0$ , de cette façon

$$\chi_{n,m}(r, \varphi) = A_{n,m} \exp \left[ -\frac{r^2}{2\hbar} \right] r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left( -n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi], \quad (2.32)$$

avec les valeurs propres constantes

$$\lambda_{n,m} = \hbar \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.33)$$

D'autre part, nous substituons l'hamiltonien du système dans l'équation (1.16), nous trouvons

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\alpha}(t) = & \langle \phi_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M(t)} - \frac{\nu L_z}{2M(t)(x^2 + y^2)} \\ & - \frac{\nu^2}{2M(t)(x^2 + y^2)} - \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) (x^2 + y^2) | \phi_{n,m} \rangle, \end{aligned}$$

en utilisant (2.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = \langle \phi'_{n,m} | U \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M(t)} - \frac{\nu L_z}{2M(t)(x^2 + y^2)} \right. \\ \left. - \frac{\nu^2}{2M(t)(x^2 + y^2)} - \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)(x^2 + y^2) \right\} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

nous avons aussi

$$U \frac{\partial}{\partial x} U^+ \phi'_{n,m} = \left( \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi'_{n,m}, \quad (2.35)$$

$$U \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^+ \phi'_{n,m} = \left( \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} x^2 + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi'_{n,m}, \quad (2.36)$$

de même

$$U \frac{\partial}{\partial y} U^+ \phi'_{n,m} = \left( \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} y + \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi'_{n,m}, \quad (2.37)$$

$$U \frac{\partial^2}{\partial y^2} U^+ \phi'_{n,m} = \left( \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} y^2 + 2\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi'_{n,m}, \quad (2.38)$$

et

$$U \frac{\partial}{\partial t} U^+ \phi'_{n,m} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2\hbar} \left( \frac{M\dot{\rho}}{\rho} + \frac{M\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{M\dot{\rho}^2}{\rho^2} \right) (x^2 + y^2) \right) \phi'_{n,m}. \quad (2.39)$$

L'équation (2.34) devient

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = \langle \phi'_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{M\dot{\rho}}{\rho} + \frac{M\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{M\dot{\rho}^2}{\rho^2} \right) (x^2 + y^2) \\ + \frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} x^2 + 2\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} \right. \\ \left. - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} y^2 + 2\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \\ + \frac{i\nu\hbar}{2M(t)(x^2 + y^2)} \left( \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} xy + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} yx - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \left. - \frac{\nu^2}{2M(t)(x^2 + y^2)} - \frac{1}{2}M\omega^2(t)(x^2 + y^2) \right| \phi'_{n,m} \rangle, \end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{M}\rho}{\rho} + \frac{M\ddot{\rho}}{\rho} + M\omega^2 \right) (x^2 + y^2) + \\ & \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{i\hbar\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i\hbar\rho}{\rho} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ & \frac{i\nu\hbar}{2M(t)(x^2 + y^2)} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\nu^2}{2M(t)(x^2 + y^2)} | \phi'_{n,m} \rangle, \end{aligned}$$

utilisons l'équation auxiliaire (2.19), il vient

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} + i\hbar \frac{\rho}{\rho} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{i\hbar\nu}{2M(x^2 + y^2)} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ & - \frac{\nu^2}{2M(x^2 + y^2)} - \frac{(x^2 + y^2)}{2M\rho^4} | \phi'_{n,m} \rangle. \end{aligned}$$

Faisons le changement des variables  $\sigma = \frac{x}{\rho}$ ,  $\eta = \frac{y}{\rho}$ , ce qui implique  $\phi'_{n,m}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_{n,m}(\sigma, \eta)$ , en simplifiant nous obtenons

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_{n,m} \left| \left\{ \frac{\hbar^2}{2M\rho^3} \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \right. \right. \right. \\ & + \frac{i\hbar\nu}{2M\rho^3(\sigma^2 + \eta^2)} \left( \sigma \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \\ & \left. \left. \left. - \frac{\nu^2}{2M\rho^3(\sigma^2 + \eta^2)} - \frac{(\sigma^2 + \eta^2)}{2M\rho^3} \right\} \right| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_{n,m} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sachons que l'invariant  $I'$  (2.28) peut s'écrire dans les nouvelles coordonnées comme

$$\begin{aligned} I' = & \frac{1}{2} \left\{ -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) - i\hbar \frac{\nu}{\sigma^2 + \eta^2} \left( \sigma \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\nu^2 \rho^2}{\sigma^2 + \eta^2} + (\sigma^2 + \eta^2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

nous pouvons écrire (2.40) ainsi comme

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \left\langle \frac{1}{\rho} \varphi_{n,m} \left| \left\{ \frac{1}{2M\rho^2} \hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \right. \right. \right. \\ & + \frac{i\hbar\nu}{(\sigma^2 + \eta^2)} \left( \sigma \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \\ & \left. \left. \left. - \frac{\nu^2}{(\sigma^2 + \eta^2)} - (\sigma^2 + \eta^2) \right\} \right| \frac{1}{\rho} \varphi_{n,m} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.42)$$

autrement dit

$$\hbar\dot{\alpha}(t) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_{n,m} \left| -\frac{I'}{M\rho^2} \right| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_{n,m} \right\rangle, \quad (2.43)$$

$$\hbar\dot{\alpha}(t) = \left\langle \phi'_{n,m} \left| -\frac{I'}{M\rho^2} \right| \phi'_{n,m} \right\rangle. \quad (2.44)$$

Alors la phase s'écrit comme

$$\alpha_{n,m}(t) = - \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2}. \quad (2.45)$$

En conclusion, les solutions exactes de l'équation de Schrödinger (2.12) dans les coordonnées polaires sont données par

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) = & \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[ \frac{iM}{2\hbar} \left( \rho\dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) r^2 \right] \exp \left[ -i \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2} \right] \\ & \times r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left( -n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

D'autre part, d'après [37], la définition du polynôme de Laguerre permet d'écrire la solution (2.46) comme

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) = & \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[ \frac{iM}{2\hbar} \left( \rho\dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) r^2 \right] \exp \left[ -i \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2} \right] \\ & \times r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{n! \Gamma \left( \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)}{\Gamma \left( \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 + n \right)} L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \exp [im\varphi]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

En absence de l'effet AB,  $\nu = 0$ , la solution (2.46) est réduite à la solution de l'oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D. D'autre part, nous pouvons faire une observation intéressante, si le flux magnétique est quantifié,  $\frac{\nu}{\hbar} = \text{nombre entier}$ , les fonctions d'ondes (2.46) coïncident exactement avec la solution de l'oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D.

## Chapitre 3

# Travaux de Hagen (Diffusion des particules en présence de l'effet Aharonov-Bohm)

### 3.1 Introduction

En 1959, Y. Aharonov et D. Bohm [5] ont étudié la diffusion des particules chargées par un solénoïde de longueur infini mais de rayon arbitrairement petit. Dans le cas idéal, ce solénoïde est mathématiquement réduit à une ligne créant un flux magnétique  $\Phi$  non nul. Pour des raisons de symétrie, il est commode de considérer cette diffusion à deux dimensions spatiales.

Dans ce chapitre, nous exposons les travaux de Hagen relatifs à la diffusion des particules non relativistes chargées sans spin et des particules relativistes avec spin. Dans ces travaux, Hagen a proposé un modèle pour le champ magnétique, créé par une source de rayon fini tendant vers zéro, sous forme d'une fonction delta de Dirac. Il a montré, d'une part, que les solutions irrégulières contribuent dans certains cas particuliers, et d'autre part il a montré que l'inclusion du spin affecte l'amplitude de diffusion et la section efficace [31, 32].

### 3.2 Particule non relativiste de spin zéro

Commençons par écrire l'équation de Schrödinger en coordonnées polaire  $(r, \varphi)$

$$\frac{\pi^2}{2M}\psi(r, \varphi) = E\psi(r, \varphi), \quad (3.1)$$

où  $\pi = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$ ,  $e\mathbf{A} = eA(r)\mathbf{u}_\varphi$ , et  $e$  est la charge des particules incidentes.

Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est supposé perpendiculaire au plan et confiné à un filament de rayon tendant vers zéro. Si en plus, nous nous intéressons à la région où ce champ est confiné, il faudrait prendre alors la forme suivante

$$eB(r) = -\frac{\nu}{r}\delta(r), \quad (3.2)$$

où le paramètre de flux  $\nu$  est défini comme [32],

$$\nu = -e \int_0^\infty B(r)rdr, \quad (3.3)$$

sinon on va buter sur des calculs très difficiles dus à la structure interne compliquée du champ magnétique. D'autre part, le problème du choix (3.2) est qu'il introduit une singularité dans l'équation (3.1). Nous devons alors faire un léger changement. En fait, c'est un problème physique plus que mathématique. L'ambiguïté mentionnée ci-dessus peut être dépasser par une redéfinition du choix (3.2) comme une limite d'un autre choix physiquement réalisable. Il faut alors confiner le champ magnétique dans un rayon  $R$  et identifier la fonction d'onde à l'origine à celle obtenue à la limite  $R \rightarrow 0$ . c'est-à-dire prendre[32]

$$eB(r) = -\frac{\nu}{r}\delta(r - R). \quad (3.4)$$

Autrement dit, le champ magnétique est non nul sauf sur une bague de rayon  $R$ . Ceci nous permet d'écrire le potentiel vecteur comme

$$e\mathbf{A} = \begin{cases} -\frac{\nu}{r}\mathbf{u}_\varphi, & r > R, \\ 0, & r < R. \end{cases} \quad (3.5)$$

De cette manière, l'équation (3.1) s'écrit en jauge de Coulomb

$$\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{r^2} + k^2 \right) \psi(r, \varphi) = 0, \quad (3.6)$$

où

$$E = \frac{k^2}{2M}.$$

L'équation (3.6) se simplifie alors à

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i\nu \right)^2 + k^2 \right) \psi(r, \varphi) = 0, \quad (3.7)$$

posons

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\varphi}, \quad (3.8)$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) f_m(r) = 0, & r < R \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+\nu)^2}{r^2} + k^2 \right) f_m(r) = 0, & r > R \end{cases} \quad (3.9)$$

explicitement, les solutions dans les deux régions s'écrivent

$$f_m(r) = \begin{cases} A_m J_{|m+\nu|}(kr) + B_m J_{-|m+\nu|}(kr) & r > R \\ C_m J_{|m|}(kr) & r < R \end{cases} \quad (3.10)$$

Où  $A_m$ ,  $B_m$  et  $C_m$  sont des constantes arbitraires et  $J_{|m+\nu|}(kr)$  est la fonction de Bessel.

### 3.2.1 Régularité de la solution

Imposons maintenant les conditions de continuité à la solution (3.10) comme suit

$$f_m(R - \varepsilon) = f_m(R + \varepsilon) \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dr} f_m(R - \varepsilon) = \frac{d}{dr} f_m(R + \varepsilon). \quad (3.12)$$

Par conséquent, nous écrirons

$$C_m J_{|m|}(kr) = A_m J_{|m+\nu|}(kr) + B_m J_{-|m+\nu|}(kr), \quad (3.13)$$

$$C_m \frac{d}{dR} J_{|m|}(kR) = A_m \frac{d}{dR} J_{|m+\nu|}(kR) + B_m \frac{d}{dR} J_{-|m+\nu|}(kR), \quad (3.14)$$

sachant que la fonction de Bessel peut s'écrire sous forme d'une série comme

$$J_{|m+\nu|}(kR) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell! \Gamma(|m+\nu| + \ell + 1)} \left( \frac{kR}{2} \right)^{|m+\nu| + 2\ell} \quad (3.15)$$

Et pour l'ordre le plus bas en  $kR$ , la série (3.15) et sa première dérivée se réduit à

$$J_{|m+\nu|}(kR) \approx \frac{(kR)^{|m+\nu|}}{2^{|m+\nu|} \Gamma(|m+\nu|+1)}, \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dR} J_{|m+\nu|}(kR) \approx k \frac{|m+\nu|}{2^{|m+\nu|}} \frac{(kR)^{|m+\nu|-1}}{\Gamma(|m+\nu|+1)}, \quad (3.17)$$

les conditions (3.11) et (3.12) donnent

$$\begin{cases} C_m \frac{(kR)^{|m|}}{\Gamma(|m|+1) 2^{|m|}} = A_m \frac{(kR)^{|m+\nu|}}{2^{|m+\nu|} \Gamma(|m+\nu|+1)} + B_m \frac{(kR)^{-|m+\nu|}}{2^{-|m+\nu|} \Gamma(-|m+\nu|+1)} \\ C_m \frac{|m|}{2^{|m|}} \frac{(kR)^{|m|-1}}{\Gamma(|m|+1)} = A_m \frac{|m+\nu|}{2^{|m+\nu|}} \frac{(kR)^{|m+\nu|-1}}{\Gamma(|m+\nu|+1)} - B_m \frac{|m+\nu|}{2^{-|m+\nu|}} \frac{(kR)^{-|m+\nu|-1}}{\Gamma(-|m+\nu|+1)}, \end{cases} \quad (3.18)$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{A_m}{C_m} = C_1 (kR)^{|m|-|m+\nu|} \left[ \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2|m+\nu|} \right], \quad (3.19)$$

où

$$C_1 = \frac{\Gamma(|m+\nu|+1) 2^{|m+\nu|}}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)},$$

et

$$\frac{B_m}{C_m} = C_2 (kR)^{|m|+|m+\nu|} \left( \frac{1}{2} - \frac{|m|}{2|m+\nu|} \right) \quad (3.20)$$

où

$$C_2 = \frac{\Gamma(-|m+\nu|+1) 2^{-|m+\nu|}}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)}.$$

Ecrivons le rapport

$$\frac{B_m}{A_m} = C_3 \frac{(kR)^{|m|+|m+\nu|} \left( \frac{1}{2} - \frac{|m|}{2|m+\nu|} \right)}{(kR)^{|m|-|m+\nu|} \left[ \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2|m+\nu|} \right]},$$

avec

$$C_3 = \frac{C_2}{C_1}.$$

ou encore

$$\frac{B_m}{A_m} = C_3 \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{|m|}{2|m+\nu|} \right)}{\left[ \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2|m+\nu|} \right]} (kR)^{2|m+\nu|}, \quad (3.21)$$

à la limite  $R \rightarrow 0$ , ce rapport tend aussi vers zéro. Par conséquent, la solution (3.10) se réduit à

$$f_m(r) = A_m J_{|m+\nu|}(kr). \quad (3.22)$$

D'où

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\varphi} J_{|m+\nu|}(kr). \quad (3.23)$$

Déterminons maintenant la constante  $a_m$

Habituellement, la théorie de la diffusion à deux dimension cherche des fonctions d'ondes dont le comportement asymptotique est décomposé sous la forme d'une onde incidente venant de la droite et d'une onde diffusée

$$\psi(r, \varphi) = e^{-ikr \cos \varphi} + \psi_D, \quad (3.24)$$

asymptotiquement,

$$\psi_D \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{r^{1/2}} f(\varphi)$$

où  $f(\varphi)$  est l'amplitude de diffusion. Utilisons le développement suivant

$$e^{-iz \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{-im\varphi} J_m(z). \quad (3.25)$$

Le comportement asymptotique de la fonction de Bessel pour de larges valeurs de son argument est donné par

$$\lim_{z \rightarrow \infty} J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.26)$$

la fonction d'onde (3.23) se comporte donc comme

$$\psi(r, \varphi) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\varphi} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos\left(kr - \frac{|m+\nu|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.27)$$

D'autre part, le comportement (3.24) peut se mettre sous la forme

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{-im\varphi} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos\left(kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{im\varphi} \frac{e^{ikr}}{r^{-1/2}}, \quad (3.28)$$

où

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\varphi}. \quad (3.29)$$

Par comparaison des termes proportionnels à  $e^{-ikr}$ , il n'est pas difficile de s'assurer que

$$a_m = e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\nu|}, \quad (3.30)$$

c'est-à-dire

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\nu|} J_{|m+\nu|}(kr) e^{im\varphi}. \quad (3.31)$$

### 3.2.2 Section efficace de diffusion

L'approche suivie par Y. Aharonov et D. Bohm pour calculer la section efficace de diffusion consiste à décomposer la fonction d'onde  $\psi$  en trois termes  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  et  $\psi_3$ , où  $\psi_1$  correspond à  $m > 0$ ,  $\psi_2$  pour  $m < 0$ , tandis que  $\psi_3$  correspond à  $m = 0$ , de la relation

$$\psi_1(r, \varphi, \nu) = \psi_2(r, -\varphi, -\nu), \quad (3.32)$$

il s'ensuit qu'il suffit de faire le calcul détaillé de  $\psi_1$ . Ce calcul conduit au résultat bien connu de la section efficace [5]

$$\sigma_{AB} = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}. \quad (3.33)$$

Ceci n'est valide que pour  $|\nu| < 1$ .

Dans le but d'éviter la restriction sur le paramètre  $\nu$ , Hagen[33] a introduit une modification dans l'approche suivie par Aharonov et Bohm. La technique consiste à séparer la partie entière dans le paramètre  $\nu$ . Autrement dit, nous posons

$$\nu = N + \xi, \quad (3.34)$$

où

$$0 \leq \xi < 1. \quad (3.35)$$

Ecrivons alors la fonction d'onde comme

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad (3.36)$$

où

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{-N+1}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}(m+\nu)} J_{m+\nu}(kr) e^{im\varphi}, & \psi_2 &= \sum_{-\infty}^{-N-1} e^{i\frac{\pi}{2}(m+\nu)} J_{-m-\nu}(kr) e^{im\varphi}, \\ \psi_3 &= e^{-i(\pi/2)\xi} J_{\xi}(kr) e^{-iN\varphi}. \end{aligned}$$

Par une manipulation triviale, les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  se transforment comme

$$\psi_1 = e^{-iN\varphi} \sum_1^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}(m+\xi)} J_{m+\xi}(kr) e^{im\varphi}, \quad (3.37)$$

$$\psi_2 = e^{-iN\varphi} \sum_1^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}(m-\xi)} J_{m-\xi}(kr) e^{-im\varphi}, \quad (3.38)$$

ces fonctions ne diffèrent des fonctions correspondantes  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  et  $\psi_3$  de AB que par le facteur  $e^{-iN\varphi}$  en remplaçant bien sûr  $\xi$  par  $\nu$ . En tenant compte de la décomposition (3.36), la restriction sur  $\nu$  est donc levée.

En reprenant les mêmes techniques de calculs de AB, nous pouvons arriver à

$$\psi \rightarrow e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} - i \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} e^{-iN(\varphi-\pi)} \sin(\pi\nu) \frac{e^{-i\varphi/2}}{\cos(\varphi/2)}, \quad (3.39)$$

ce résultat diffère de celui d'AB par la phase  $-ie^{-iN(\varphi-\pi)}$ . Il est clair que l'expression (3.39) donne la même section efficace comme celle qui a été trouvée par AB. i.e

$$\sigma = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}. \quad (3.40)$$

Remarquons que si le flux est quantifié, i.e.  $\nu = \text{entier}$ , la section efficace est nulle et par conséquent l'effet AB ne se produit pas.

### 3.3 Particule relativiste de spin-1/2

Commençons par écrire l'équation de Dirac d'une particule de masse  $M$  comme

$$E\psi = [M\beta + \beta\gamma \cdot \pi] \psi, \quad (3.41)$$

dans les problèmes à deux dimensions, il est préférable de définir les matrices  $\beta$  et  $\beta\gamma_i$  en terme de matrices de Pauli comme

$$\beta = \sigma^3, \quad \beta\gamma^i = (\sigma^1, s\sigma^2), \quad s = \pm 1 \quad (3.42)$$

la quantité  $\pi$  est donnée par

$$\pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad (3.43)$$

le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est défini comme dans la section précédente

$$eB = -\frac{\nu}{r} \delta(r - R). \quad (3.44)$$

De même que le potentiel vecteur

$$e\mathbf{A} = \begin{cases} -\frac{\nu}{r} \mathbf{u}_\varphi, & r > R, \\ 0, & r < R. \end{cases} \quad (3.45)$$

L'équation (3.41) peut s'écrire

$$\beta[\gamma.\pi + M + \beta E]\psi = 0, \quad (3.46)$$

appliquons l'opérateur  $[\gamma.\pi - M + \beta E]\beta$  au premier membre de l'équation (3.46), il vient

$$[\gamma.\pi - M + \beta E][\gamma.\pi + M + \beta E]\psi = 0, \quad (3.47)$$

ou encore

$$(\gamma.\pi\gamma.\pi + E^2 - M^2)\psi = 0, \quad (3.48)$$

avec

$$\gamma.\pi\gamma.\pi = -\pi^2 - \nu s \sigma^3 \frac{1}{r} \delta(r - R), \quad (3.49)$$

ce qui donne

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i\nu \right)^2 + E^2 - M^2 - \frac{\nu s}{R} \delta(r - R) \sigma^3 \right\} \psi = 0. \quad (3.50)$$

posons

$$k^2 = E^2 - M^2, \text{ et } \psi = (\psi_1, \psi_2)^T$$

la première composante peut être définie comme

$$\psi_1(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m f_m(r) e^{im\varphi}, \quad (3.51)$$

par conséquent, la partie radiale pour les deux régions vérifie les deux équations suivantes

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) f_m(r) = 0 & r < R, \\ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{(m+\nu)^2}{r^2} + k^2 \right) f_m(r) = 0 & r > R. \end{cases} \quad (3.52)$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que les solutions correspondantes sont

$$\begin{cases} f_m(r) = C_m J_{|m|}(kr) & r < R \\ f_m(r) = A_m J_{|m+\nu|}(kr) + B_m J_{-|m+\nu|}(kr) & r > R. \end{cases} \quad (3.53)$$

## 3.3.1 Régularité de la solution

L'effet de la fonction delta s'introduit dans les conditions de continuité comme

$$f_m(R - \varepsilon) = f_m(R + \varepsilon), \quad (3.54)$$

$$R \left[ \frac{d}{dr} f_m(R) \right]_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} = \nu s f_m(R), \quad (3.55)$$

nous utilisons les développements (3.16) et (3.17) et pour l'ordre le plus bas en  $kR$  la première condition (3.54) s'écrit

$$C_m \frac{(kR)^{|m|}}{\Gamma(|m|+1) 2^{|m|}} = A_m \frac{(kR)^{|m+\nu|}}{2^{|m+\nu|} \Gamma(|m+\nu|+1)} + B_m \frac{(kR)^{-|m+\nu|}}{2^{-|m+\nu|} \Gamma(-|m+\nu|+1)}, \quad (3.56)$$

et la deuxième (3.55) donne

$$A_m \frac{|m+\nu|}{2^{|m+\nu|}} \frac{(kR)^{|m+\nu|}}{\Gamma(|m+\nu|+1)} - B_m \frac{|m+\nu|}{2^{-|m+\nu|}} \frac{(kR)^{-|m+\nu|}}{\Gamma(-|m+\nu|+1)} = C_m \left( kR \frac{|m|}{2^{|m|}} \frac{(kR)^{|m|-1}}{\Gamma(|m|+1)} + \nu s \frac{(kR)^{|m|}}{\Gamma(|m|+1) 2^{|m|}} \right), \quad (3.57)$$

par une manipulation simple, nous pouvons formuler les rapports suivants

$$\frac{A_m}{C_m} = C (kR)^{|m|} (kR)^{-|m+\nu|} \left( \frac{|m+\nu| + |m| + \nu s}{2|m+\nu|} \right),$$

où

$$C = \frac{2^{|m+\nu|} \Gamma(|m+\nu|+1)}{\Gamma(|m|+1) 2^{|m|}},$$

et

$$\frac{B_m}{C_m} = C' (kR)^{|m|} (kR)^{|m+\nu|} \left( \frac{|m+\nu| - |m| - \nu s}{2|m+\nu|} \right),$$

où

$$C' = \frac{2^{-|m+\nu|} \Gamma(-|m+\nu|+1)}{\Gamma(|m|+1) 2^{|m|}}.$$

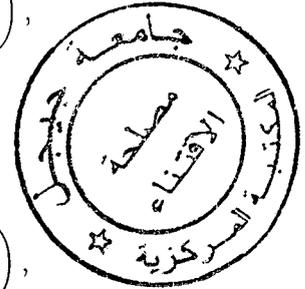
ou encore

$$A'_m = (kR)^{|m|} (kR)^{-|m+\nu|} \left( \frac{|m+\nu| + |m| + \nu s}{2|m+\nu|} \right),$$

$$B'_m = (kR)^{|m|} (kR)^{|m+\nu|} \left( \frac{|m+\nu| - |m| - \nu s}{2|m+\nu|} \right).$$

De cette manière, la solution (3.53) pour  $r > R$  s'écrit,

$$f_m(r) = (kR)^{|m|} \left\{ (kR)^{-|m+\nu|} \left( \frac{1}{2} + \frac{|m| + \nu s}{2|m+\nu|} \right) J_{|m+\nu|}(kr) + (kR)^{|m+\nu|} \left( \frac{1}{2} - \frac{|m| + \nu s}{2|m+\nu|} \right) J_{-|m+\nu|}(kr) \right\}, \quad (3.58)$$



en passant à la limite  $R \rightarrow 0$ , nous remarquons bien que la solution irrégulière disparaît à moins que

$$|m + \nu| = -|m| - \nu s, \quad (3.59)$$

dans ce cas nous devons introduire le prochain plus haut ordre en  $KR$  dans le coefficient de  $J_{|m+\nu|}(kr)$  cela donne

$$f_m(r) = (kR)^{|m|} \left[ D_m (kR)^{|m|+\nu s+2} J_{|m+\nu|}(kr) + (kR)^{-|m|-\nu s} J_{-|m+\nu|}(kr) \right], \quad (3.60)$$

où  $D_m$  est une constante non nulle. Il s'ensuit que  $f_m(r) \rightarrow J_{-|m+\nu|}(kr)$  à condition que

$$|m| + \nu s + 1 > 1, \quad (3.61)$$

tenant compte de (3.59), nous tirons

$$|m + \nu| < 1. \quad (3.62)$$

Cela montre que la solution admissible de l'équation de Dirac dans la limite  $R \rightarrow 0$  est toujours la solution régulière à moins que (3.59) et (3.62) soient simultanément vérifiées.

Ecrivons alors

$$\nu = N + \xi, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad (3.63)$$

nous pouvons s'assurer facilement que les conditions (3.59) et (3.62) sont vérifiées si

$$\begin{cases} a) m = -N, & N \geq 0, & s = -1 & \text{ou} \\ b) m = -N - 1, & N + 1 \leq 0, & s = 1 \end{cases} \quad (3.64)$$

comme vérification des résultats obtenus, nous pouvons remarquer que la relation (3.59) exige que  $\nu s < 0$  afin que la solution  $J_{-|m+\nu|}(kr)$  soit admissible. cela veut dire, d'après l'équation (3.50), que le potentiel en delta est attractif. En fait, ceci est raisonnable car seule une fonction en delta attractif peut rendre la solution plus concentrée à l'origine que la solution régulière  $J_{|m+\nu|}(kr)$ .

La fonction  $\psi_1$  est donnée alors par

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \sum e^{-i(\frac{\pi}{2})|m+\nu|} J_{|m+\nu|}(kr) e^{im\varphi} \\ & + \theta(-s) \theta(\nu) e^{-iN\varphi} e^{-i(\pi/2)(N-\nu)} J_{-\xi}(kr) \\ & + \theta(s) \theta(-\nu) e^{-i(N+1)\varphi} e^{-i(\pi/2)(\nu-N-1)} J_{\xi-1}(kr). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Où le prime indique l'omission des deux termes spécifiés par les conditions (3.64).

## 3.3.2 Section efficace de diffusion

En utilisant le comportement asymptotique (3.39) la fonction d'onde de l'équation (3.65) se comporte comme

$$\begin{aligned} \psi_1 \rightarrow & e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} - i \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} e^{-iN(\varphi-\pi)} \frac{\sin(\pi\nu)}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2} \\ & + \theta(-s)\theta(\nu) e^{-iN\varphi} e^{-i(\pi/2)(N-\nu)} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \left\{ \frac{e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}(N-\nu)} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{e^{-ikr} e^{i\frac{\pi}{2}(N-\nu)} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \right\} \\ & + \theta(s)\theta(-\nu) e^{-i(N+1)\varphi} e^{-i(\pi/2)(\nu-N-1)} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \left\{ \frac{e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu-N-1)} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{e^{-ikr} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu-N-1)} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \psi_1 \rightarrow & e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} - i \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} e^{-iN(\varphi-\pi)} \frac{\sin(\pi\nu)}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2} \\ & + \theta(-s)\theta(\nu) e^{-iN\varphi} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \left\{ \frac{e^{ikr} e^{-i\pi(N-\nu)} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} e^{2iN\pi} + \frac{e^{-ikr} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \right\} \\ & + \theta(s)\theta(-\nu) e^{-i(N+1)\varphi} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \left\{ \frac{e^{ikr} e^{-i\pi(\nu-N-1)} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{e^{-ikr} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \psi_1 \rightarrow & e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} - i \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} e^{-iN(\varphi-\pi)} \frac{\sin(\pi\nu)}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2} \\ & + \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} e^{-iN(\varphi-\pi)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{ \theta(-s)\theta(\nu) \frac{e^{i\pi\nu}}{2} \right. \\ & \left. + \theta(s)\theta(-\nu) e^{-i\varphi} \left(-\frac{e^{-i\pi\nu}}{2}\right) \right\} e^{ikr}, \end{aligned}$$

remarquons que

$$\begin{aligned} \theta(-s)\theta(\nu) \frac{e^{i\pi\nu}}{2} + \theta(s)\theta(-\nu) e^{-i\varphi} \left(-\frac{e^{-i\pi\nu}}{2}\right) &= e^{-i\frac{\varphi}{2}} \theta(-\nu s) e^{i\frac{\varphi}{2}\epsilon(-s)} \frac{e^{i\pi\nu}}{2} \\ &+ e^{-i\frac{\varphi}{2}} \theta(-\nu s) e^{i\frac{\varphi}{2}\epsilon(-s)} \left(-\frac{e^{-i\pi\nu}}{2}\right), \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \psi_1 \rightarrow & e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} - i \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} e^{-iN(\varphi-\pi)} \frac{\sin(\pi\nu)}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2} \\ & + \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} e^{-iN(\varphi-\pi)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{ e^{-i\frac{\varphi}{2}\theta} (-\alpha s) e^{i\frac{\varphi}{2}\epsilon(-s)} \frac{e^{i\pi\alpha}}{2} \right. \\ & \left. + e^{-i\frac{\varphi}{2}\theta} (-\alpha s) e^{i\frac{\varphi}{2}\epsilon(-s)} \left(-\frac{e^{-i\pi\alpha}}{2}\right) \right\} e^{ikr}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \psi_1 \rightarrow & e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} - i \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} e^{-iN(\varphi-\pi)} \frac{\sin(\pi\nu)}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2} \\ & + \left(\frac{2i}{\pi kr}\right)^{1/2} \sin(\pi\nu) e^{-iN(\varphi-\pi)} e^{-i\frac{\varphi}{2}\theta} (-\nu s) e^{i\frac{\varphi}{2}\epsilon(-s)} e^{ikr}, \end{aligned}$$

d'où l'amplitude de diffusion est

$$f(\varphi) = f_{AB}(\varphi) + \left(\frac{2i}{\pi k}\right)^{1/2} \sin(\pi\nu) e^{-iN(\varphi-\pi)} e^{-i\frac{\varphi}{2}\theta} (-\nu s) e^{-i\frac{\varphi}{2}\epsilon(s)}. \quad (3.66)$$

où

$$f_{AB}(\varphi) = - \left(\frac{i}{2\pi k}\right)^{1/2} \frac{\sin(\pi\nu) e^{-iN(\varphi-\pi)}}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2}. \quad (3.67)$$

L'Eq.(3.66) peut s'écrire sous une forme plus compacte comme

$$f(\varphi) = - \left(\frac{i}{2\pi k}\right)^{1/2} \frac{\sin(\pi\nu) e^{-iN(\varphi-\pi)}}{\cos(\varphi/2)} e^{-i\varphi/2} [\epsilon(\nu s) e^{-i\varphi\epsilon(s)\theta(-\nu s)}]. \quad (3.68)$$

la fonction d'onde totale est alors

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{E+M} \end{pmatrix} e^{-ikr \cos \varphi - i\nu\varphi} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{E+M} e^{is\varphi} \end{pmatrix} r^{-1/2} e^{ikr} f(\varphi) \quad (3.69)$$

pour des particule polarisées le long de la direction  $\mathbf{n}$  ( $n^2 = 1$ ) la matrice de densité  $\rho$  s'écrit comme[33]

$$\rho(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}). \quad (3.70)$$

et la section efficace est donnée par

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = Tr \rho(\mathbf{n}) f \rho(\mathbf{n}') f^*, \quad (3.71)$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$  sont les polarisations initial et final respectivement: la matrice  $f$  est obtenue à partir de l'amplitude de diffusion (3.68) en remplaçant le paramètre  $s$  par la matrice de pauli  $\sigma_3$ .

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \left( \frac{d\sigma}{d\varphi} \right)_{AB} \frac{1}{2} [1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{z}) \cos(\varphi) - \mathbf{z} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}') \sin(\varphi)], \quad (3.72)$$

où  $\mathbf{z}$  est le vecteur unitaire parallèle au flux magnétique.

A la limite  $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$  la section efficace se réduit à

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{2\pi k \cos^2(\varphi/2)} [1 - (\mathbf{n} \times \mathbf{z})^2 \cos^2(\varphi/2)].$$

## Chapitre 4

# Equation de Pauli dépendante du temps en présence de l'effet AB

### 4.1 Introduction

Récemment dans son mémoire de magister [51], Bouguera a étudié l'équation de Pauli dépendante du temps (avec masse et fréquence dépendantes du temps) à l'aide de la théorie des Invariants de Lewis-Reisenfeld [4], l'opérateur invariant a été choisi comme une combinaison linéaire d'une algèbre de Lie fermée vérifiant l'équation de Liouville-Von Neumann. En fait un tel modèle a été présenté dans le contexte d'obtenir la solution qui correspond à un rayon nul du filament contenant le flux AB.

L'équation de Pauli est de la forme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_P(t) \Psi, \quad (4.1)$$

où  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$  est le spineur de Pauli et

$$H_P(t) = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M} + \frac{1}{2}M(t)^2\omega(t)^2r^2 - \frac{e\hbar\sigma^3\mathbf{B}_z}{2M(t)}, \quad (4.2)$$

est le hamiltonian de Pauli dépendant du temps où figure le terme  $\left(\frac{e\hbar}{2M(t)}\right)\sigma^3\mathbf{B}_z$  qui représente l'énergie d'interaction du champ magnétique avec le moment intrinsèque de l'électron, nous

voions que le spin s'introduit ici automatiquement comme conséquence du postulat de linéarisation de l'équation d'onde.

le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  associés à l'effet AB sont définis par

$$e\mathbf{B} = e\mathbf{B}_z U_z = -\frac{\nu}{r} \delta(r) U_z, \quad (4.3)$$

$$e\mathbf{A} = -\frac{\nu}{r} U_\varphi. \quad (4.4)$$

En les substituant dans (4.2), qui s'écrit en coordonnées polaires

$$H_p(t) = \frac{1}{2M(t)} \left[ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\varphi + \nu)^2 + \frac{\nu\hbar}{r} \delta(r) \sigma^3 \right] + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 \Bigg\}, \quad (4.5)$$

où nous rappelons que  $p_r$  et  $p_\varphi$  sont donné par

$$p_r = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right), \quad p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad [r, p_r] = i\hbar.$$

Bouguera a défini les générateurs de l'algèbre de Lie (algèbre fermée)

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\varphi + \nu)^2 + \frac{\nu\hbar}{r} \delta(r) \sigma^3 \right],$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (rp_r + p_r r),$$

$$T_3 = \frac{1}{2} r^2.$$

D'autre part il a rencontré un problème de singularité en (4.3) au point  $r = 0$ , afin d'éviter cette singularité, il a remplacé le tube du flux de rayon zéro par un autre de rayon  $R$ , dans ce cas là le potentiel vecteur et le champs magnétique définies en (4.3) et (4.4) vont prendre les formes suivantes

$$e\mathbf{B} = -\frac{\nu}{r} \delta(r - R) U_z, \quad (4.6)$$

$$e\mathbf{A} = -\frac{\nu}{r} \theta(r - R) U_\varphi. \quad (4.7)$$

avec la condition supplémentaire que le champ magnétique soit confiné à la surface du tube, malheureusement dans l'opérateur  $T_1$  apparait la fonction de Heaviside  $\theta(r - R)$  définie par

$$\theta(r - R) = \begin{cases} 1, & r > R \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le problème devient compliqué car l'algèbre basée sur  $T_1, T_2$  et  $T_3$  n'est plus fermée, de ce fait nous ne pouvons pas définir un invariant sur la base  $\{T_1, T_2, T_3\}$ .

Dans le but de résoudre ce problème, il est commode d'introduire un artifice de calcul qui consiste à remplacer le rayon  $R$  par  $\rho(t)R$  où  $\rho(t)$  est une fonction réelle positive dépendante du temps, pourvu qu'à la fin des calculs nous prenons la limite  $R \rightarrow 0$ , cette procédure n'affecte pas le problème physique.

Le potentiel vecteur et le champs magnétique sont maintenant définis comme suit :

$$e\mathbf{A} = -\frac{\nu}{r}\theta(r - \rho(t)R)U_\varphi, \quad (4.8)$$

$$e\mathbf{B} = -\frac{\nu}{r}\delta(r - \rho(t)R)U_z = -\frac{\nu}{r\rho(t)}\delta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right)U_z. \quad (4.9)$$

où nous avons utilisé les propriétés des fonctions de Heaviside et de Delta suivantes

$$\theta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right) = \theta(r - \rho(t)R) = \begin{cases} 1, & \frac{r}{\rho(t)} > R \\ 0, & \frac{r}{\rho(t)} < R \end{cases},$$

$$\delta(r - \rho(t)R) = \frac{1}{\rho(t)}\delta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right).$$

Par conséquent, en coordonnées polaires l'équation de Pauli dépendante du temps en présence de l'effet AB est décrite par

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_P(t)\Psi$$

avec

$$H_P(t) = \frac{1}{2M(t)} \left[ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left( p_\varphi + \nu\theta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right) \right)^2 + \frac{\nu\hbar}{r}\delta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right) \sigma^3 \right] + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)r^2 \Bigg\}, \quad (4.10)$$

En utilisant les opérateurs

$$T_1 = \frac{1}{2} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right) \right]^2 + \frac{\nu}{r\rho}\delta\left(\frac{r}{\rho(t)} - R\right) \sigma^3 \right\}, \quad (4.11)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(p_r r + r p_r), \quad (4.12)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}r^2. \quad (4.13)$$

nous pouvons écrire  $H_P(t)$  sous la forme condensée  $H_P(t) = \frac{1}{M(t)}T_1 + M(t)\omega^2(t)T_3$ .

Les opérateurs  $T_1, T_2$  et  $T_3$  vérifient les relations de commutations suivantes

$$\begin{aligned}
[T_1, T_2] &= \left[ \frac{1}{2} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{\nu}{r\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\}, \frac{1}{2}(p_r r + r p_r) \right] \\
&= \left\{ \frac{1}{4} [p_r^2, p_r r + r p_r] + \frac{1}{4} \left( -\frac{\hbar^2}{4} \right) \left[ \frac{1}{r^2}, p_r r + r p_r \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2, p_r r + r p_r \right] + \frac{\nu}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3, p_r r + r p_r \right] \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{4} (-4i\hbar p_r^2) + \frac{1}{4} \left( -\frac{\hbar^2}{4} \right) \left( -4i\hbar \frac{1}{r^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left\{ 2 \frac{i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 - 4i\hbar \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu}{4\rho} \left\{ -2 \frac{i\hbar}{\rho} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - 2i\hbar \frac{1}{r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} \right\} \\
&= \left\{ -i\hbar p_r^2 - i\hbar \left( -\frac{\hbar^2}{4} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{i\hbar}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) - i\hbar \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - i\hbar \frac{\nu}{2\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - i\hbar \frac{\nu}{2\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} \\
&= -2i\hbar T_1 + \frac{i\hbar}{2} \left( -\frac{\nu}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - \frac{\nu}{\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right) \\
[T_1, T_2] &= -2i\hbar T_1 + \frac{i\hbar}{2} \left( -\frac{\nu}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - \frac{\nu}{\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right) \\
[T_1, T_3] &= \left[ \frac{1}{2} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{\nu}{r\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\}, \frac{r^2}{2} \right] \\
&= \frac{1}{4} [p_r^2, r^2] \\
&= -i\hbar T_2 \\
[T_2, T_3] &= \left[ \frac{1}{2}(p_r r + r p_r), \frac{1}{2} r^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} [(p_r r + r p_r), r^2] \\
&= -2i\hbar T_3
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [T_1, T_2] = -2i\hbar T_1 + \frac{i\hbar}{2} \left( -\frac{\nu}{\rho^2} \frac{\delta(\frac{r}{\rho} - R)}{(\frac{r}{\rho} - R)} \sigma^3 - \frac{\nu}{\rho r} \delta(\frac{r}{\rho} - R) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right), \\ [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \\ [T_1, T_3] = -i\hbar T_2. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

## 4.2 Recherche de l'invariant

Maintenant, nous cherchons l'invariant  $I(t)$  sur la même base  $(T_1, T_2, T_3)$  sous la forme

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{l=1}^3 \alpha_l(t) T_l \\ &= \alpha_1(t) T_1 + \alpha_2(t) T_2 + \alpha_3(t) T_3 \\ &= \frac{\alpha_1(t)}{2} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{\nu}{r\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} \\ &\quad + \frac{\alpha_2(t)}{2} (p_r r + r p_r) + \frac{\alpha_3(t)}{2} r^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

où les coefficients  $\alpha_l(t)$ ,  $l = 1, 2, 3$  sont des fonctions variables du temps (des paramètres dépendants du temps) qu'on peut les déterminer en insérant (4.10) et (4.15) dans l'équation de Liouville-Von Neumann, c-à-d que  $I(t)$  la vérifie.

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

avec  $\frac{dI}{dt}$  est défini par

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \{H_p, I\} + \frac{\partial I}{\partial t} \\ \text{ou} \quad \frac{dI}{dt} &= [H_p, I] - i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned}$$

donc

$$[H_p, I] = i\hbar \frac{\partial I}{\partial t}$$

calculons  $[H_p, I]$

$$\begin{aligned}
[H_p, I] &= \left[ \left\{ \frac{1}{2M(t)} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{\nu}{r\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 \right\}, \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 \right] \\
&= \left[ \frac{1}{M(t)} T_1 + M(t) \omega^2(t) T_3, \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 \right] \\
&= \frac{\alpha_2}{M(t)} [T_1, T_2] + \frac{\alpha_3}{M(t)} [T_1, T_3] + M(t) \omega^2(t) \alpha_1 [T_3, T_1] + M(t) \omega^2(t) \alpha_2 [T_3, T_2] \\
&= \frac{\alpha_2}{M(t)} \left\{ -2i\hbar T_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\hbar}{2} \left( -\frac{s\nu}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - \frac{s\nu}{\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\alpha_3}{M(t)} (-i\hbar T_2) + M(t) \omega^2(t) \alpha_1 (i\hbar T_2) + M(t) \omega^2(t) \alpha_2 (2i\hbar T_3) \\
&= \left\{ -2i\hbar \frac{\alpha_2}{M(t)} T_1 + i\hbar \left( M(t) \omega^2(t) \alpha_1 - \frac{\alpha_3}{M(t)} \right) T_2 + 2i\hbar M(t) \omega^2(t) \alpha_2 T_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\hbar}{2} \frac{\alpha_2}{M(t)} \left( -\frac{\nu}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - \frac{\nu}{\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right) \right\} \\
[H_p, I] &= \left\{ -2i\hbar \frac{\alpha_2}{M(t)} T_1 + i\hbar \left( M(t) \omega^2(t) \alpha_1 - \frac{\alpha_3}{M(t)} \right) T_2 + 2i\hbar M(t) \omega^2(t) \alpha_2 T_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\hbar}{2} \frac{\alpha_2}{M(t)} \left( -\frac{\nu}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - \frac{\nu}{\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

et dérivons  $I(t)$  par rapport au temps

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3) \\
&= \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{\nu}{r\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} \\
&= \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 + \frac{\alpha_1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} + \frac{\nu}{2r} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} = \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{\rho} \right)}{\partial t} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \right\} \sigma^3
\end{aligned}$$

faisons le changement de variables

$$\xi = \frac{r}{\rho}$$

$$\dot{\xi} = -r \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\xi - R) &= \dot{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \delta(\xi - R) \\ &= r \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 \right\} = \left\{ -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + r \frac{\dot{\rho}}{\rho^3} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \right\} \sigma^3$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \left\{ \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 - \frac{\alpha_1 \dot{\rho}}{2r^2 \rho} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2r} \left\{ -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + r \frac{\dot{\rho}}{\rho^3} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \right\} \sigma^3 \right\} \\ &= \left\{ \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 - \frac{\alpha_1 \dot{\rho}}{2r \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu \alpha_1}{2r} \left( -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + r \frac{\dot{\rho}}{\rho^3} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \right) \sigma^3 \right\} \\ &= \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 - \frac{\alpha_1 \dot{\rho}}{2r \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \nu \left( \frac{1}{\rho} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) - \frac{r}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \right) \sigma^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} &= i\hbar \left\{ \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 - \frac{\alpha_1 \dot{\rho}}{2r \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu \alpha_1}{2r} \left( -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + r \frac{\dot{\rho}}{\rho^3} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \right) \sigma^3 \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
[H_p, I] &= i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} \\
&\left\{ -2i\hbar \frac{\alpha_2}{M(t)} T_1 + i\hbar \left( M(t)\omega^2(t)\alpha_1 - \frac{\alpha_3}{M(t)} \right) T_2 + 2i\hbar M(t)\omega^2(t)\alpha_2 T_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\hbar}{2} \frac{\alpha_2}{M(t)} \left( -\frac{\nu}{\rho^2} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \sigma^3 - \frac{\nu}{\rho r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \sigma^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right) \right) \right\} \\
&= i\hbar \left\{ \dot{\alpha}_1 T_1 + \dot{\alpha}_2 T_2 + \dot{\alpha}_3 T_3 - \frac{\alpha_1 \dot{\rho}}{2r \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu\alpha_1}{2r} \left( -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + r \frac{\dot{\rho}}{\rho^3} \frac{\delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right)}{\left(\frac{r}{\rho} - R\right)} \right) \sigma^3 \right\}
\end{aligned}$$

en comparant les termes de l'égalité entre 4.16 et 4.17 nous obtenons le système des équations linéaires simple du premier ordre pour les coefficients  $\alpha_l(t)$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = -2 \frac{\alpha_2}{M(t)}, \\ \dot{\alpha}_2 = M(t)\omega^2(t)\alpha_1 - \frac{\alpha_3}{M(t)}, \\ \dot{\alpha}_3 = 2M(t)\omega^2(t)\alpha_2, \\ -\alpha_1 \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\alpha_2}{M(t)}, \end{cases} \quad (4.18)$$

après calcul nous obtenons

$$\begin{cases} \alpha_1 = \rho^2, \\ \alpha_2 = -M(t)\dot{\rho}, \end{cases} \quad (4.19)$$

calculons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2) &= \dot{\alpha}_1 \alpha_3 + \alpha_1 \dot{\alpha}_3 - 2\dot{\alpha}_2 \alpha_2 \\
&= -2 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{M(t)} + 2M(t)\omega^2(t)\alpha_2 \alpha_1 - 2 \left( M(t)\omega^2(t)\alpha_1 - \frac{\alpha_3}{M(t)} \right) \alpha_2 \\
&= -2 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{M(t)} + 2M(t)\omega^2(t)\alpha_2 \alpha_1 - 2M(t)\omega^2(t)\alpha_1 \alpha_2 + 2 \frac{\alpha_3}{M(t)} \alpha_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2) = Cste = k \quad (4.20)$$

où  $k$  est une constante réelle, d'où

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{k + \alpha_2^2}{\alpha_1} \\
&= \frac{k + M^2(t)\dot{\rho}^2 \rho^2}{\rho^2}
\end{aligned}$$

et la fonction  $\rho$  vérifie l'équation auxiliaire indépendante du flux

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \rho\omega^2 = \frac{k}{M^2\rho^3}. \quad (4.21)$$

Ainsi l'invariant  $I(t)$  prend la forme

$$\begin{aligned} I(t) &= \rho^2 T_1 - M\dot{\rho} T_2 + \frac{(k + M^2(t)\dot{\rho}^2\rho^2)}{\rho^2} T_3 \\ &= \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu\theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{\nu\hbar}{r\rho} \delta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \sigma^3 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M\dot{\rho}\rho}{2} (p_r r + r p_r) + \frac{(k + M^2(t)\dot{\rho}^2\rho^2)}{2\rho^2} r^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

### 4.3 Recherche des vecteurs et valeurs propres

Cherchons maintenant les valeurs propres  $\lambda_{n,m}$  et les vecteurs propres  $\phi_{n,m}$  de l'invariant  $I(t)$

$$I \phi_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \phi_{n,m}(r, \varphi, t) \quad (4.23)$$

Introduisons la transformation unitaire dépendante du temps

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3},$$

$$UU^{-1} = U^{-1}U = 1,$$

tel que

$$\dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) = U(t) \phi_{n,m}(r, \varphi, t),$$

alors

$$\phi_{n,m}(r, \varphi, t) = U^{-1}(t) \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t), \quad (4.24)$$

L'équation aux valeurs propres (4.23) devient

$$\dot{I}(t) \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t), \quad (4.25)$$

où le nouveau invariant est de la forme

$$\dot{I}(t) = U(t) I U^{-1}(t) = \rho^2 T_1 + \frac{k}{\rho^2} T_3. \quad (4.26)$$

donc

$$\left(\rho^2 T_1 + \frac{k}{\rho^2} T_3\right) \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t), \quad (4.27)$$

En coordonnées polaires l'équation aux valeurs propres, Eq. (4.27) prend la forme

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \frac{\rho^2}{2} \left\{ -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 \right\} + \frac{k r^2}{2 \rho^2} \right) \mathbf{1} \right. \\ & \left. + \frac{\nu}{r \rho} \delta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \sigma^3 \right\} \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) \\ & = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left( -\hbar^2 \rho^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho^2}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{k r^2}{2 \rho^2} \right) \mathbf{1} \right. \\ & \left. + \frac{\nu \rho}{r} \delta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \sigma^3 \right\} \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) \\ & = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) \end{aligned}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \left( -\hbar^2 \rho^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho^2}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{k r^2}{2 \rho^2} \right) + \frac{\nu \rho}{r} \delta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right\} \dot{\phi}_{n,m}^1 = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}^1 \\ \frac{1}{2} \left\{ \left( -\hbar^2 \rho^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho^2}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{k r^2}{2 \rho^2} \right) - \frac{\nu \rho}{r} \delta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right\} \dot{\phi}_{n,m}^2 = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}^2 \end{cases}$$

comme nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left( -\hbar^2 \rho^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho^2}{r^2} \left[ P_\varphi + \nu \theta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right]^2 + \frac{k r^2}{2 \rho^2} \right) \right. \\ & \left. + s \frac{\nu \rho}{r} \delta \left( \frac{r}{\rho} - R \right) \right\} \dot{\phi}_{n,m}^{1,2} \\ & = \lambda_{n,m} \dot{\phi}_{n,m}^{1,2} \end{aligned}$$

avec  $s = \pm 1$  est deux fois la valeur du spin (+1 pour le spin "vers le haut" et -1 pour le spin "vers le bas"). Puis, en introduisant le changement de variable  $\xi = \frac{r}{\rho}$  on peut écrire les

équations aux valeurs propres sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left( -\hbar^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} [P_\varphi + \nu \theta (\xi - R)]^2 + k\xi^2 \right) \right. \\ & \left. + s \frac{\nu}{\xi} \delta(\xi - R) \right\} \chi_{n,m}^{1,2}(\xi, \varphi) \\ & = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}^{1,2}(\xi, \varphi), \end{aligned} \quad (4.28)$$

avec

$$\dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m}(\xi, \varphi) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m} \left( \frac{r}{\rho}, \varphi \right). \quad (4.29)$$

$$\text{ou bien} \quad \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{n,m}^1 \\ \dot{\phi}_{n,m}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \chi_{n,m}^1 \\ \chi_{n,m}^2 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Le facteur  $\frac{1}{\rho}$  est introduit pour maintenir la condition de normalisation pour les deux fonctions, il est évident que  $P_\varphi$  commute avec  $\dot{I}(t)$ , la fonction  $\dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t)$  s'écrit donc sous la forme

$$\dot{\phi}_{n,m}(r, \varphi, t) = f_{n,m}(\xi) e^{im\varphi}, \quad m \in Z$$

où nous avons tenu en compte que  $e^{im\varphi}$  sont des fonctions propres de  $P_\varphi$ , en factorisant les deux composantes

$$\chi_{n,m}^1 = f_{n,m}^1(\xi) e^{im\varphi},$$

$$\chi_{n,m}^2 = f_{n,m}^2(\xi) e^{im\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_{n,m}^1 \\ \dot{\phi}_{n,m}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} f_{n,m}(\xi) e^{im\varphi} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} f_{n,m}^1 \\ f_{n,m}^2 \end{pmatrix} e^{im\varphi}$$

dans ce cas l'Eq. (4.28) regissant les deux composantes ce réduit à

$$\left( \frac{1}{2} \left\{ -\hbar^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\hbar^2}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \theta(\xi - R) \right]^2 + s \frac{\nu}{\xi} \delta(\xi - R) \right\} + k\xi^2 \right) f_{n,m}^{1,2}(\xi) = \lambda_{n,m} f_{n,m}^{1,2}(\xi) \quad (4.31)$$

Nous allons étudier deux cas concernant  $\xi$  puisque l'éq. (4.31) contient la fonction  $\theta(\xi - R)$ , le premier est pour  $\xi > R$  (à l'extérieur du solénoïde) et le deuxième est pour  $\xi < R$  (à l'intérieur du solénoïde).

tant que  $\xi \neq R$  dans les deux cas, alors  $\delta(\xi - R) = 0$  donc (4.31) devient

$$\frac{1}{2} \left\{ -\hbar^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\hbar^2}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \theta(\xi - R) \right]^2 + k\xi^2 \right\} f_{n,m}^{1,2}(\xi) = \lambda_{n,m} f_{n,m}^{1,2}(\xi), \quad (4.32)$$

1°) Pour  $\xi \rangle R$  on aura  $\theta(\xi - R) = 1$ , (4.32) prend la forme

$$\frac{1}{2} \left\{ -\hbar^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\hbar^2}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + k\xi^2 \right\} f_{n,m}^{1,2}(\xi) = \lambda_{n,m} f_{n,m}^{1,2}(\xi),$$

2°) Pour  $\xi \langle R$  on aura  $\theta(r - R) = 0$ , (4.32) prend la forme

$$\frac{1}{2} \left\{ -\hbar^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\hbar^2 m^2}{\xi^2} + k\xi^2 \right\} f_{n,m}^{1,2}(\xi) = \lambda_{n,m} f_{n,m}^{1,2}(\xi),$$

donc nous obtenons le système des équations suivant pour  $f_m^{1,2}(\xi)$ , qui sont des équations de Bessel d'ordre  $(m + \frac{\nu}{\hbar})$  et  $m$  respectivement

$$\begin{cases} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 - \frac{k}{\hbar^2} \xi^2 + \frac{2\lambda_{n,m}}{\hbar^2} \right\} f_{n,m}^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \rangle R, \\ \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{k}{\hbar^2} \xi^2 + \frac{2\lambda_{n,m}}{\hbar^2} \right\} f_{n,m}^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \langle R, \end{cases} \quad (4.33)$$

Pour pouvoir résoudre l'Eqs.(4.33), on doit étudier les trois cas distingués concernant la constante  $k$ ,

$$k = \begin{cases} k \rangle 0, \\ k = 0, \\ k \langle 0, \quad k = (i\Omega)^2 = -\Omega^2, \end{cases} \quad (4.34)$$

commençons par le premier cas,

#### 4.3.1 cas $k \rangle 0$

on a

$$\begin{cases} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 - \frac{k}{\hbar^2} \xi^2 + \frac{2\lambda_{n,m}}{\hbar^2} \right\} f_m^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \rangle R, \\ \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{k}{\hbar^2} \xi^2 + \frac{2\lambda_{n,m}}{\hbar^2} \right\} f_m^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \langle R, \end{cases}$$

on pose

$$I_1 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 - \frac{k}{\hbar^2} \xi^2, \quad \xi \rangle R, \quad (4.35)$$

et

$$I'_1 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{k}{\hbar^2} \xi^2, \quad \xi \langle R, \quad (4.36)$$

(??) est un système d'équations hypergéométriques confluentes, leurs solutions sont régulières et irrégulières en terme des séries hypergéométriques  ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z)$ , sont

$$\begin{aligned}
 f_m^{1,2}(\xi) = & \exp\left(-\frac{\sqrt{k}}{2\hbar}\xi^2\right) \left\{ A_m^{1,2} \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}}\right], |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \right. \\
 & + B_m^{1,2} \left(\frac{\sqrt{k}}{\hbar}\right)^{-2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\
 & \left. \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}}\right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \right\} \quad \xi \in R, \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_m^{1,2}(\xi) = & \exp\left(-\frac{\sqrt{k}}{2\hbar}\xi^2\right) C_m^{1,2} \xi^{|m|} \\
 & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[|m|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}}\right], |m|+1; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \quad \xi \in R \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 {}_1F_1(\alpha, \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^n}{n!} \\
 &= 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\sqrt{k}}{\hbar} \xi^2 \\
 \alpha &= \frac{1}{2} \left[ |m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1 - \frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right] \\
 \gamma &= |m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1
 \end{aligned}$$

nous allons calculer les constantes  $A_m^{1,2}$ ,  $B_m^{1,2}$  et  $C_m^{1,2}$  en utilisant les conditions de raccordement

$$\begin{cases} f_m^{1,2}(R-\epsilon) = f_m^{1,2}(R+\epsilon) \\ \left[ \frac{d}{d\xi} f_m^{1,2}(\xi) \right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = +\frac{\sqrt{k}}{\hbar R} f_m^{1,2}(R-\epsilon) \end{cases} \quad (4.40)$$

en dérivant (4.39) on trouve

$$\frac{d {}_1F_1(\alpha, \gamma; z)}{dz} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
{}_1F_1\left(\alpha, \gamma; \frac{\sqrt{k}}{\hbar} \xi^2\right) &= 1 + \frac{\sqrt{k} \alpha}{\hbar \gamma} \xi^2 + \frac{k \alpha(\alpha+1)}{\hbar^2 \gamma(\gamma+1)} \frac{\xi^4}{2!} + \dots \\
\frac{d_1 F_1\left(\alpha, \gamma; \frac{\sqrt{k}}{\hbar} \xi^2\right)}{dz} &= 2 \frac{\sqrt{k} \alpha}{\hbar \gamma} \xi + 2 \frac{k \alpha(\alpha+1)}{\hbar^2 \gamma(\gamma+1)} \xi^3 + \dots
\end{aligned} \quad (4.42)$$

et pour l'ordre le plus bas en  $R$

$$\left[ {}_1F_1\left(\alpha, \gamma; \frac{\sqrt{k}}{\hbar} \xi^2\right) \right]_{\xi=R} \approx 1 \quad (4.43)$$

$$\left[ \frac{d_1 F_1\left(\alpha, \gamma; \frac{\sqrt{k}}{\hbar} \xi^2\right)}{dz} \right]_{\xi=R} \approx 2 \frac{\sqrt{k} \alpha}{\hbar \gamma} R \quad (4.44)$$

donc(4.42) devient

$$\begin{aligned}
A_m^{1,2} R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} + B_m^{1,2} R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} &= C_m^{1,2} R^{|m|} \\
&= A_m^{1,2} \left\{ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} - \frac{\lambda_m}{\hbar^2 \left[ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right]} R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right\} \\
&\quad - B_m^{1,2} \left\{ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} + \frac{\lambda_m}{\hbar^2 \left[ -\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right]} R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right\} \\
&= C_m^{1,2} \left( \left| m \right| + \frac{s\nu}{\hbar} \right) R^{|m|-1} + \frac{\lambda_m}{\hbar^2 \left[ \left| m \right| + 1 \right]} R^{|m|+1}
\end{aligned}$$

après calcul nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{A_m^{1,2}}{C_m^{1,2}} &= R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|} \frac{\left[ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \left| m \right| + \frac{s\nu}{\hbar} \right] + \frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \left| m \right|}{\left( -\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \left( \left| m \right| + 1 \right)} \right] R^2}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}{\left( -\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \left( \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)} \right] R^2} \\
\frac{B_m^{1,2}}{C_m^{1,2}} &= R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|} \left\{ 1 - \frac{\left[ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \left| m \right| + \frac{s\nu}{\hbar} \right] + \frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \left| m \right|}{\left( -\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \left( \left| m \right| + 1 \right)} \right] R^2}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}{\left( -\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \left( \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)} \right] R^2} \right\}
\end{aligned}$$

donc les solutions prennent la forme finale

$$f_m^{1,2}(\xi) = \exp\left(-\frac{\sqrt{k}}{2\hbar}\xi^2\right) R^{|m|} \left\{ \begin{aligned} & R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{\left[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|+\frac{s\nu}{\hbar}\right]+\frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m|+1)} \right] R^2}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|+\frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \right] R^2} \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \\ & + R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left\{ 1 - \frac{\left[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|+\frac{s\nu}{\hbar}\right]+\frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m|+1)} \right] R^2}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|+\frac{\lambda_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \right] R^2} \right\} \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ -|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \end{aligned} \right\}$$

passons à la limite  $R \rightarrow 0$ ,  $R^2 \approx 0$  et la solution devient

$$f_m^{1,2}(\xi) = e^{-\left(\frac{\sqrt{k}}{2\hbar}\xi^2\right)} R^{|m|} \left\{ \begin{aligned} & R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[ \frac{1}{2} + \frac{|m|+\frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right] \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \\ & + R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[ \frac{1}{2} - \frac{|m|+\frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right] \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ -|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{\sqrt{k}}{\hbar}\xi^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

nous remarquons que les coefficients  $\left[ \frac{1}{2} + \frac{|m|+\frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right]$ ,  $\left[ \frac{1}{2} - \frac{|m|+\frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right]$  concernant  $f_m^1(\xi)$  sont similaires à ceux du cas précédent. Par conséquent, dans la limite  $R \rightarrow 0$ , il est clair que la solution irrégulière contribue si la condition [31, 35] (4.75) est vérifiée et (4.45) s'écrit pour la première composante  $f_m^1(\xi)$

$$f_m^1(\xi) = \exp\left(-\frac{\sqrt{k}}{2\hbar}\xi^2\right) R^{|m|} \times \left\{ \begin{aligned} & D_m^1 R^{|m|+\frac{\nu s}{\hbar}+2} \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ 1+|m+\frac{\nu}{\hbar}|-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1; \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) \\ & + R^{-|m|-\frac{\nu s}{\hbar}} \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

où  $D_m^1$  est une constante non nulle. Alors, dans la limite  $R \rightarrow 0$  la solution irrégulière domine

$$f_m^1(\xi) \rightarrow \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-\frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right)$$

et en utilisant les conditions (4.75), (4.76) et (4.78), nous arrivons à écrire la première composante de la fonction propre  $\chi_m^1$  sous la forme

$$\begin{aligned} \chi_m^1(\xi, \varphi) = & a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ & \times {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m}{\sqrt{k\hbar}} \right], \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} e^{im\varphi} \\ & + \theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} a_m \xi^{-\eta} {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \eta - \frac{\lambda_m}{\sqrt{k\hbar}} \right], 1 - \eta, \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} a_m \xi^{\eta-1} {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ \eta - \frac{\lambda_m}{\sqrt{k\hbar}} \right], \eta, \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

où  $\theta(x)$  est la fonction de Heaviside.

Le comportement asymptotique de la série confluyente pour les grandes valeurs positives de son argument est

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) \rightarrow \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}, \quad (4.48)$$

il s'ensuit que la fonction propre  $\chi_m^1$  se comporte comme

$$\begin{aligned} \chi_m^1 \sim & a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \xi^{-\left[\frac{\lambda_m}{\sqrt{k\hbar}} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1\right]} e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} \\ & + \theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} a_m \xi^{-\eta} \xi^{-\left[\frac{\lambda_m}{\sqrt{k\hbar}} + 1 - \eta\right]} e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} \\ & + \theta(s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} a_m \xi^{\eta-1} \xi^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_m}{\sqrt{k\hbar}} + \eta\right]} e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

La dernière expression est exponentiellement divergente.

Cette divergence ne sera pas évitée sauf si on pose  $\alpha = -n$  [37], avec  $n = 0, 1, 2, \dots$ , cela transforme la série en un polynôme de degré  $n$  (polynômes de Laguerre), qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \chi_m^1(\xi, \varphi) = & \left( a_{m,n} \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} e^{im\varphi} \right) \\ & + \theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} a_{m,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} a_{m,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}} e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

où la constante  $a_{m,n} = \frac{n! \Gamma(|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1)}{\Gamma(|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1 + n)} a_m$ .

Dans le cas où les conditions (4.75) et (4.76) ne sont pas satisfaites (contribution de la solution régulière), les valeurs propres pour la solution régulière est obtenu à partir de la condition

$$\frac{1}{2} \left[ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 - \frac{\lambda_{m,n}}{\sqrt{k\hbar}} \right] = -n,$$

ainsi,

$$\lambda_{m,n} = \sqrt{k\hbar} \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right). \quad (4.51)$$

les valeurs propres dans le cas où la solution irrégulière se présentent :

pour le premier cas ( $m = -N$ ,  $N \geq 0$ ,  $s = -1$ ), est

$$\frac{1}{2} \left[ 1 - \eta - \frac{\lambda_{m,n}}{\sqrt{k\hbar}} \right] = -n,$$

$$\lambda_{m,n} = \sqrt{k\hbar} (2n + 1 - \eta), \quad (4.52)$$

et pour le deuxième cas ( $m = -N - 1$ ,  $N + 1 \leq 0$ ,  $s = +1$ )

$$\frac{1}{2} \left[ \eta - \frac{\lambda_{m,n}}{\sqrt{k\hbar}} \right] = -n,$$

$$\lambda_{m,n} = \sqrt{k\hbar} (2n + \eta). \quad (4.53)$$

et les valeurs propres correspondantes de  $I'$  sont

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} = \sqrt{k} \left\{ \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \right. \\ \left. + \left( \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} (2n + 1 - \eta) + \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} (2n + \eta) \right) \right\}. \quad (4.54) \end{aligned}$$

Par contre nous remarquons que les coefficients  $\left[ \frac{1}{2} + \frac{|m| - \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m + \frac{\nu}{\hbar}|} \right]$ ,  $\left[ \frac{1}{2} - \frac{|m| - \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m + \frac{\nu}{\hbar}|} \right]$  concernant  $f_m^1(\xi)$  sont différents de ceux concernant  $f_m^2(\xi)$  et pour qu'ils soient les mêmes on remplace  $s \rightarrow -s$ , alors

$$\begin{aligned} f_m^2(\xi) = \exp\left(-\frac{\sqrt{k}}{2\hbar} \xi^2\right) R^{|m|} \\ \times \left\{ D_{m,n} R^{|m| - \frac{\nu s}{\hbar}} \xi^{|m + \frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ 1 + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1; \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar}\right) \right. \\ \left. + R^{-|m| + \frac{\nu s}{\hbar}} \xi^{-|m + \frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \left[ 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m}{\hbar\sqrt{k}} \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|; \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar}\right) \right\}. \quad (4.55) \end{aligned}$$

où  $D_{m,n}$  est une constante non nul. Alors, dans la limite  $R \rightarrow 0$  la solution irrégulière domine si la condition

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| = -|m| + \frac{\nu s}{\hbar}, \quad (4.56)$$

$$f_m^2(\xi) \rightarrow_1 F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m}{\hbar \sqrt{k}} \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|; \frac{\sqrt{k} \xi^2}{\hbar} \right)$$

à condition que

$$|m| - \frac{\nu s}{\hbar} + 1 > 0, \quad (4.57)$$

et en utilisant (4.56), la condition ci-dessous s'écrit sous la forme

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| < 1. \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \chi^2(\xi, \varphi) = & \left( a_{m,n} \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \frac{\sqrt{k} \xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k} \xi^2}{2\hbar}\right)} e^{im\varphi} \right) \\ & + \theta(s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_{m,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left( \frac{\sqrt{k} \xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k} \xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(-s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_{m,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left( \frac{\sqrt{k} \xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k} \xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

Donc

$$\chi_{m,n}(\xi, \varphi) = \begin{pmatrix} \chi_{m,n}^1 \\ \chi_{m,n}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi'_{m,n}(r, \varphi, t) &= \frac{1}{\rho} \chi_{m,n}(\xi, \varphi), \\ \begin{pmatrix} \phi_{m,n}^1 \\ \phi_{m,n}^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \chi_{m,n}^1 \\ \chi_{m,n}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

à partir de (4.24) la fonction d'onde  $\phi_{n,m}(r, \varphi, t)$  est de la forme

$$\phi_{m,n}(r, \varphi, t) = \begin{pmatrix} \phi_{m,n}^1 \\ \phi_{m,n}^2 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{p}}{\rho} r^2}}{\rho} \begin{pmatrix} \chi_{m,n}^1 \\ \chi_{m,n}^2 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}^1(r, \varphi, t) = & \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\rho}{\rho} r^2}}{\sqrt{\rho}} \left\{ \left( a_{m,n} \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \right. \\ & \times L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{im\varphi} \Bigg) \\ & + \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_{m,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-iN\varphi} \\ & \left. + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_{m,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-i(N+1)\varphi} \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}^2(r, \varphi, t) = & \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\rho}{\rho} r^2}}{\sqrt{\rho}} \left\{ \left( a_{m,n} \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \right. \\ & \times L_n^{|\eta+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{im\varphi} \Bigg) \\ & + \theta(s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_{m,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-iN\varphi} \\ & \left. + \theta(-s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_{m,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-i(N+1)\varphi} \right\} \end{aligned}$$

Les fonctions d'ondes  $\psi_{m,n}(r, \varphi, t) = \exp[i\alpha_{m,n}(t)] \phi_{m,n}(r, \varphi, t)$  évoluent suivant l'équation de Schrödinger, et la phase  $\alpha_{m,n}(t)$  est définie par

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\alpha}_{m,n}(t) &= \langle \phi_{m,n} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{m,n} \rangle, \\ &= \langle \phi_{m,n} | -\frac{I}{M\rho^2} | \phi_{m,n} \rangle \\ &= \langle \dot{\phi}_{m,n} | -\frac{\dot{I}}{M\rho^2} | \dot{\phi}_{m,n} \rangle \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.3.2 calcul de la phase  $\alpha_{m,n}(t)$ 

$$\begin{aligned}
\hbar \dot{\alpha}_{m,n}(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \begin{pmatrix} \phi_{m,n}^{1*} & \phi_{m,n}^{2*} \end{pmatrix} \left[ -\frac{I}{M\rho^2} \right] \begin{pmatrix} \phi_{m,n}^1 \\ \phi_{m,n}^2 \end{pmatrix} dr d\varphi, \\
&= -\frac{\lambda_{m,n}}{M\rho^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \begin{pmatrix} \phi_{m,n}^{1*} & \phi_{m,n}^{2*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{m,n}^1 \\ \phi_{m,n}^2 \end{pmatrix} dr d\varphi, \\
&= -\frac{\lambda_{m,n}}{M\rho^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} (|\phi_{m,n}^1|^2 + |\phi_{m,n}^2|^2) dr d\varphi, \\
&= -\frac{\lambda_{m,n}}{M\rho^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} (|\phi_{m,n}^1|^2 + |\phi_{m,n}^2|^2) dr d\varphi, \\
&= -\frac{\lambda_{m,n}}{M\rho^2}, \\
\hbar \dot{\alpha}_{m,n}(t) &= -\frac{\sqrt{k}}{M\rho^2} \left[ \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) + \left( \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + 1 - \eta) + \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + \eta) \right) \right]
\end{aligned}$$

l'intégration par rapport au temps donne

$$\begin{aligned}
\lambda_{m,n} &= \sqrt{k} \left\{ \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} (2n + 1 - \eta) + \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} (2n + \eta) \right) \right\}. \quad (4.63)
\end{aligned}$$

$$\alpha_{m,n}(t) = -\frac{\sqrt{k}}{\hbar} \left\{ \left( 2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) + \left( \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + 1 - \eta) + \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + \eta) \right) \right\} \int_0^t \frac{1}{M\rho^2} d\tau,$$

Nous remarquons que la phase dépend du spin et du flux magnétique dans les deux termes dus aux solutions régulières (le premier) et irrégulières (le deuxième).

Nous déduirons la forme finale des fonctions propres

$$\begin{aligned}
\psi(r, \varphi, t) &= \sum_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_{m,n}(r, \varphi, t) \\
&= \sum_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \psi_{m,n}^1 \\ \psi_{m,n}^2 \end{pmatrix} \\
\psi(r, \varphi, t) &= \sum_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m,n} \frac{e^{i\left(\alpha_{m,n}(t) - \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2\right)}}{\sqrt{\rho}} \begin{pmatrix} \chi_{m,n}^1(r, \varphi, t) \\ \chi_{m,n}^2(r, \varphi, t) \end{pmatrix} \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^1 = & \frac{e^{i\left(\alpha_{m,n}(t) - \frac{1}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2\right)}}{\sqrt{\rho}} \times \\ & \left\{ a_{m,n} \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \times L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{im\varphi} \\ & + \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_{m,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-iN\varphi} \\ & \left. + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_{m,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-i(N+1)\varphi} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^2 = & \frac{e^{i\left(\alpha_{m,n}(t) - \frac{1}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2\right)}}{\sqrt{\rho}} \times \\ & \left\{ a_{m,n} \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \times L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{im\varphi} \\ & + \theta(s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_{m,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-iN\varphi} \\ & \left. + \theta(-s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_{m,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left( \frac{\sqrt{k}\xi^2}{\hbar} \right) e^{\left(-\frac{\sqrt{k}\xi^2}{2\hbar}\right)} e^{-i(N+1)\varphi} \right\} \end{aligned}$$

revenons maintenant au deuxième cas

### 4.3.3 cas $k = 0$

$$\begin{cases} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + \frac{2\lambda_m}{\hbar^2} \right\} f_m^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \in R, \\ \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{2\lambda_m}{\hbar^2} \right\} f_m^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \in R, \end{cases} \quad (4.65)$$

posons  $\frac{\sqrt{2\lambda_m}}{\hbar} = \mu$ , (4.65) prend la forme

$$\begin{cases} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + \mu^2 \right\} f_{\mu,m}^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \in R, \\ \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + \mu^2 \right\} f_{\mu,m}^{1,2}(\xi) = 0 & \xi \in R, \end{cases}$$

ceux sont les équations de Bessel d'ordre  $(m + \frac{\nu}{\hbar})$  et  $m$ , explicitement, leurs solutions générales dans les deux régions sont

$$f_{\mu,m}^{1,2}(\xi) = \begin{cases} A_{\mu,m}^{1,2} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) + B_{\mu,m}^{1,2} J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) & \xi > R, \\ C_{\mu,m}^{1,2} J_{|m|}(\mu\xi) & \xi < R, \end{cases} \quad (4.66)$$

où  $A_{\mu,m}^{1,2}$ ,  $B_{\mu,m}^{1,2}$  et  $C_{\mu,m}^{1,2}$  sont des constantes arbitraires et  $J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}$ ,  $J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}$  et  $J_{|m|}$  représentent les fonctions de Bessel d'ordre  $(m + \frac{\nu}{\hbar})$  et  $m$ , qui peuvent s'écrire sous forme de séries comme suit

$$\begin{cases} J_{\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(\alpha+l+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l}, \\ J_{-\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(-\alpha+l+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l} \end{cases} \quad (4.67)$$

puisque  $m + \frac{\nu}{\hbar} \neq \text{entier}$ , donc

$$J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+l+1)} \left(\frac{\mu}{2}\xi\right)^{2l+|m+\frac{\nu}{\hbar}|}, \quad (4.68)$$

$$J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+l+1)} \left(\frac{\mu}{2}\xi\right)^{2l-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \quad (4.69)$$

Pour déterminer les constantes  $A_{\mu,m}^{1,2}$ ,  $B_{\mu,m}^{1,2}$  et  $C_{\mu,m}^{1,2}$  nous devons imposer les conditions de continuité (de raccordement) aux solutions (4.66),

$$f_{\mu,m}^{1,2}(R-\epsilon) = f_{\mu,m}^{1,2}(R+\epsilon), \quad (4.70)$$

$$\left[ \frac{df_{\mu,m}^{1,2}(\xi)}{d\xi} \right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \frac{\nu s}{\hbar R} f_{\mu,m}^{1,2}(R-\epsilon) \quad (4.71)$$

elles se réduisent à

$$\begin{cases} C_{\mu,m}^{1,2} J_{|m|}(\mu R) = A_{\mu,m}^{1,2} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) + B_{\mu,m}^{1,2} J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) \\ A_{\mu,m}^{1,2} \frac{d}{dR} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) + B_{\mu,m}^{1,2} \frac{d}{dR} J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) - C_{\mu,m}^{1,2} \frac{d}{dR} J_{|m|}(\mu R) = \frac{\nu s}{\hbar R} C_{\mu,m}^{1,2} J_{|m|}(\mu R) \end{cases} \quad (4.72)$$

en utilisant les développements en séries et pour l'ordre le plus bas en  $\mu R$

$$\begin{aligned} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) &\approx \frac{(\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}}{2^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \\ \frac{d}{dR} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) &\approx \frac{\mu |m+\frac{\nu}{\hbar}| (\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1}}{2^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \\ J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) &\approx \frac{(\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}}{2^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \\ \frac{d}{dR} J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu R) &\approx \frac{-|m+\frac{\nu}{\hbar}| (\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1}}{2^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \\ J_{|m|}(\mu R) &\approx \frac{(\mu R)^{|m|}}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \\ \frac{d}{dR} J_{|m|}(\mu R) &\approx \frac{\mu |m| (\mu R)^{|m|-1}}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} A_{\mu,m}^{1,2} \frac{(\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}}{2^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} + B_{\mu,m}^{1,2} \frac{(\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}}{2^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} &= C_{\mu,m}^{1,2} \frac{(\mu R)^{|m|}}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \\ A_{\mu,m}^{1,2} \frac{\mu |m+\frac{\nu}{\hbar}| (\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1}}{2^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} - B_{\mu,m}^{1,2} \frac{\mu |m+\frac{\nu}{\hbar}| (\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1}}{2^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} &= C_{\mu,m}^{1,2} \left( |m| + \frac{s\nu}{\hbar} \right) \frac{(\mu R)^{|m|}}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \end{aligned}$$

après calcul nous obtenons

$$\frac{A_{\mu,m}^{1,2}}{C_{\mu,m}^{1,2}} = \left( \frac{1}{2} + \frac{|m| + \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) (\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\mu R)^{|m|} \frac{2^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \quad (4.73)$$

$$\frac{B_{\mu,m}^{1,2}}{C_{\mu,m}^{1,2}} = \left( \frac{1}{2} - \frac{|m| + \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) (\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\mu R)^{|m|} \frac{2^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \quad (4.74)$$

ce sont deux équations à trois inconnues, nous obtenons

$$\begin{aligned} A_{\mu,m}^{1,2} &= C_{\mu,m}^{1,2} \left( \frac{1}{2} + \frac{|m| + \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) (\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\mu R)^{|m|} \frac{2^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \\ B_{\mu,m}^{1,2} &= C_{\mu,m}^{1,2} \left( \frac{1}{2} - \frac{|m| + \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) (\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\mu R)^{|m|} \frac{2^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)}{2^{|m|} \Gamma(|m|+1)} \end{aligned}$$

de cette manière, la solution (4.66) pour  $\xi)R$  est

$$f_{\mu,m}^{1,2}(\xi) = (\mu R)^{|m|} C_{\mu,m}^{1,2} \left\{ (\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[ \frac{1}{2} + \frac{|m| + \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right] J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) \right. \\ \left. + (\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[ \frac{1}{2} - \frac{|m| + \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right] J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) \right\},$$

à la limite  $R \rightarrow 0$ , on remarque bien que la solution irrégulière (le deuxième terme) disparaît ainsi que la singularité que représente la fonction  $J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi)$ , à moins que

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| = -|m| - \frac{s\nu}{\hbar}, \quad (4.75)$$

dans ce cas là nous devons introduire le plus haut ordre en  $\mu R$  dans le coefficient de  $J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi)$ , cela donne

$$f_{\mu,m}^{1,2}(\xi) = (\mu R)^{|m|} \left\{ D_{\mu,m}^{1,2} (\mu R)^{|m| + \frac{s\nu}{\hbar} + 2} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) + (\mu R)^{-|m| - \frac{s\nu}{\hbar}} J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) \right\}, \quad (4.76)$$

où  $D_{\mu,m}^{1,2} \neq 0$ . il s'ensuit que  $f_{\mu,m}^{1,2}(\xi) \rightarrow J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi)$  à condition que

$$\left| m + \frac{s\nu}{\hbar} + 1 \right| > 0, \quad (4.77)$$

tenant compte de (4.75), nous tirons

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| < 1, \quad (4.78)$$

cela montre que la solution admissible de l'équation de Pauli dans la limite  $R \rightarrow 0$  est toujours la solution régulière à moins que (4.75) et (4.78) soient simultanément vérifiées.

Et pour qu'elles soient significatives, il est commode d'écrire

$$\frac{\nu}{\hbar} = N + \eta, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (4.79)$$

par conséquent, la solution  $f_{\mu,m}^{1,2}(\xi)$  reste toujours régulière, comme on peut vérifier que les conditions (4.75) et (4.78) sont vérifiées à l'exception des deux cas

$$\begin{cases} a) m = -N, & N \geq 0, & s = -1 & \text{ou} \\ b) m = -N - 1, & N + 1 \leq 0 & s = +1, \end{cases} \quad (4.80)$$

comme on peut remarquer que la relation (4.75) exige que  $\frac{s\nu}{\hbar} < 0$ , afin que la solution  $J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi)$  soit admissible. Et la première composante est donnée alors par

$$\begin{aligned} \chi_{\mu,m}^1 &= f_{\mu,m}^1(\xi)e^{im\varphi} \\ &= \left\{ \sum e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\frac{\nu}{\hbar}|} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi)e^{im\varphi} \right. \\ &\quad + \theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)e^{-iN\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}(N-\frac{\nu}{\hbar})} J_{-\eta}(\mu\xi) \\ &\quad \left. + \theta(+s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)e^{-i(N+1)\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{\hbar}-N-1)} J_{\eta-1}(\mu\xi) \right\} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Où la prime indique l'omission des deux termes spécifiés par la condition(4.80).

revenons à

$$\begin{aligned} f_{\mu,m}^2(\xi) &= \left\{ (\mu R)^{|m|}(\mu R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[ \frac{1}{2} + \frac{|m| - \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right] J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) \right. \\ &\quad \left. + (\mu R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[ \frac{1}{2} - \frac{|m| - \frac{s\nu}{\hbar}}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right] J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi) \right\}, \end{aligned}$$

on remarque qu'à la limite  $R \rightarrow 0$ , la solution irrégulière ne disparaît pas même si on impose la condition(4.75), alors on va remplacer  $s \rightarrow -s$  et dans ce cas là, à la limite  $R \rightarrow 0$  la solution irrégulière disparaît à moins que

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| = -|m| + \frac{s\nu}{\hbar},$$

en parcourant les mêmes étapes que pour  $f_m^1(\xi)$  sauf la condition(4.77) qui devient

$$\left| m \right| - \frac{s\nu}{\hbar} + 1 > 0, \quad (4.82)$$

et en tenant compte de(4.84)on tire la même condition(4.78), nous arrivons à écrire la deuxième composante sous la forme

$$\begin{aligned} \chi_{\mu,m}^2 &= f_{\mu,m}^2(\xi)e^{im\varphi} \\ &= \sum e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\frac{\nu}{\hbar}|} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\mu\xi)e^{im\varphi} \\ &\quad + \theta(s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)e^{-iN\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}(N-\frac{\nu}{\hbar})} J_{-\eta}(\mu\xi) \\ &\quad + \theta(-s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)e^{-i(N+1)\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{\hbar}-N-1)} J_{\eta-1}(\mu\xi) \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_{\mu,m}^1 \\ \dot{\phi}_{\mu,m}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \chi_{\mu,m}^1 \\ \chi_{\mu,m}^2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_{\mu,m}^1 \\ \phi_{\mu,m}^2 \end{pmatrix} &= U(t) \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{\mu,m}^1 \\ \dot{\phi}_{\mu,m}^2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{\mu,m}^1 \\ \dot{\phi}_{\mu,m}^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2}}{\rho} \begin{pmatrix} \chi_{\mu,m}^1 \\ \chi_{\mu,m}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.84)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_{\mu,m}^1 &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2}}{\rho} \left\{ \sum e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\frac{\nu}{\hbar}|} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \mu \frac{r}{\rho} \right) e^{im\varphi} \right. \\ &\quad + \theta(-s) \theta \left( \frac{\nu}{\hbar} \right) e^{-iN\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}(N-\frac{\nu}{\hbar})} J_{-\eta} \left( \mu \frac{r}{\rho} \right) \\ &\quad \left. + \theta(+s) \theta \left( -\frac{\nu}{\hbar} \right) e^{-i(N+1)\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{\hbar}-N-1)} J_{\eta-1} \left( \mu \frac{r}{\rho} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.85)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_{\mu,m}^2 &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2}}{\rho} \left\{ \sum e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\frac{\nu}{\hbar}|} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \mu \frac{r}{\rho} \right) e^{im\varphi} \right. \\ &\quad + \theta(s) \theta \left( \frac{\nu}{\hbar} \right) e^{-iN\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}(N-\frac{\nu}{\hbar})} J_{-\eta} \left( \mu \frac{r}{\rho} \right) \\ &\quad \left. + \theta(-s) \theta \left( -\frac{\nu}{\hbar} \right) e^{-i(N+1)\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{\hbar}-N-1)} J_{\eta-1} \left( \mu \frac{r}{\rho} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Les fonctions d'ondes  $\psi_{\mu,m}(r, \varphi, t) = \exp[i\alpha_{\mu,m}(t)] \phi_{\mu,m}(r, \varphi, t)$  évoluent suivant l'équation de Schrödinger.

#### 4.3.4 calcul de la phase $\alpha_{\mu,m}(t)$

la phase  $\alpha_{\mu,m}(t)$  est définie par

$$\begin{aligned}
\hbar \dot{\alpha}_{\mu,m}(t) &= \langle \phi_{\mu,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{\mu',m} \rangle, \\
&= \langle \phi_{\mu,m} | \left[ -\frac{I}{M\rho^2} \right] | \phi_{\mu',m} \rangle \\
&= \langle \phi_{\mu,m} | -\frac{\lambda_m}{M\rho^2} | \phi_{\mu',m} \rangle \\
&= -\frac{\lambda_m}{M\rho^2} \langle \phi_{\mu,m} | | \phi_{\mu',m} \rangle
\end{aligned} \tag{4.87}$$

donc l'Eq.(4.87) prend la forme

nous arrivons à écrire la phase comme suit

$$\alpha_{\mu,m}(t) = -\frac{\lambda_m}{\hbar} \int_0^t \frac{d\tau}{M\rho^2} \langle \phi_{\mu,m} | | \phi_{\mu',m} \rangle \tag{4.88}$$

les fonctions d'ondes  $\psi_{\mu,m}(r, \varphi, t)$  solutions de l'équation de Schrödinger sont données donc par

$$\begin{aligned}
\psi_{\mu,m}(r, \varphi, t) &= \exp[i\alpha_{\mu,m}(t)] \phi_{\mu,m}(r, \varphi, t) \\
&= e^{-\frac{i\lambda_m}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{M\rho^2} \langle \phi_{\mu,m} | | \phi_{\mu',m} \rangle d\tau} \phi_{\mu,m}(r, \varphi, t)
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Et maintenant étudions le troisième cas

#### 4.3.5 cas $k < 0$ , $k = -\Omega^2 = (i\Omega)^2$

suivant les mêmes étapes comme dans le cas  $k > 0$ , on trouve les équations dans les deux régions

$$\begin{cases} \left( -\frac{\hbar^2}{2} \right) \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(\xi) & \xi \rangle R, \\ \left( -\frac{\hbar^2}{2} \right) \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(\xi) & \xi \langle R, \end{cases} \tag{4.90}$$

$$\begin{cases} I_2 f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(\xi) & \xi \rangle R, \\ I_2' f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(\xi) & \xi \langle R, \end{cases}$$

avec

$$I_2 = \left( -\frac{\hbar^2}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} \quad \xi \rangle R,$$

et

$$I'_2 = \left( -\frac{\hbar^2}{2} \right) \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} \quad \xi \langle R,$$

(4.90) est un système d'équations paraboliques, pour les rendre sous la forme d'équations hypergéométriques on va introduire la transformation unitaire suivante

$$V_\gamma = \exp \left( \frac{\gamma}{2\hbar} [\mathbf{r} \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_r \mathbf{r}] \right)$$

en utilisant la relation de commutation

$$[\mathbf{r}, \mathbf{p}_r] = i$$

on arrive à

$$V_\gamma = e^{-i\frac{\gamma}{2}} e^{\gamma \mathbf{r} \mathbf{p}_r} = e^{-i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\gamma r \frac{\partial}{\partial r}} \quad (4.91)$$

en utilisant le changement de variables précédent  $r = \rho \xi$ , alors

$$r \frac{\partial}{\partial r} = \xi \frac{\partial}{\partial \xi},$$

et par conséquent

$$V_\gamma = e^{-i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\gamma \xi \frac{\partial}{\partial \xi}},$$

cet opérateur a les propriétés suivantes

$$V_\gamma r V_\gamma^{-1} = e^{-i\gamma r}, \quad (4.92)$$

$$V_\gamma p_r V_\gamma^{-1} = e^{i\gamma} p_r, \quad (4.93)$$

$$V_\gamma F(r) V_\gamma^{-1} = e^{-i\frac{\gamma}{2}} F(e^{-i\gamma} r). \quad (4.94)$$

$$\begin{cases} I_2 V_\gamma^{-1} V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m V_\gamma^{-1} V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) & \xi \rangle R, \\ I'_2 V_\gamma^{-1} V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m V_\gamma^{-1} V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) & \xi \langle R, \end{cases} \quad (4.95)$$

en appliquant  $V_\gamma$  à gauche des termes de l'Eq.(4.95) on trouve

$$\begin{cases} (V_\gamma I_2 V_\gamma^{-1}) V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) & \xi \rangle R, \\ (V_\gamma I'_2 V_\gamma^{-1}) V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) & \xi \langle R, \end{cases} \quad (4.96)$$

et en utilisant les propriétés précédentes on arrive à

$$\begin{aligned} \beta_1 &= V_\gamma \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} V_\gamma^{-1}, \\ &= e^{2i\gamma} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[ m + \frac{\nu}{\hbar} \right]^2 + e^{-4i\gamma} \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

et aussi

$$\begin{aligned}\beta_2 &= V_\gamma \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} V_\gamma^{-1}, \\ &= e^{2i\gamma} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + e^{-4i\gamma} \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\},\end{aligned}$$

et

$$V_\gamma f_m^{1,2}(\xi) = e^{-i\frac{\gamma}{2}} f_m^{1,2}(e^{-i\gamma}\xi),$$

le système(4.96) devient

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2}\right) e^{2i\gamma} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[m + \frac{\nu}{\hbar}\right]^2 + e^{-4i\gamma} \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(e^{-i\gamma}\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(e^{-i\gamma}\xi) & \xi \in R, \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2}\right) e^{2i\gamma} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + e^{-4i\gamma} \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(e^{-i\gamma}\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(e^{-i\gamma}\xi) & \xi \in R, \end{cases} \quad (4.98)$$

pour que  $e^{-4i\gamma} = -1$ , il faut que  $\gamma = \pm\frac{\pi}{4}$ , alors le dernier système se réduit en

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2}\right) e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[m + \frac{\nu}{\hbar}\right]^2 - \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) & \xi \in R, \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2}\right) e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) & \xi \in R, \\ \pm i \left(-\frac{\hbar^2}{2}\right) \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left[m + \frac{\nu}{\hbar}\right]^2 - \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) & \xi \in R, \\ \pm i \left(-\frac{\hbar^2}{2}\right) \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \xi^2 \right\} f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) = \lambda_m f_m^{1,2}(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi) & \xi \in R, \end{cases} \quad (4.99)$$

on pose

$$\begin{cases} \left[ V_{\pm\frac{\pi}{4}} I_2 V_{\pm\frac{\pi}{4}}^{-1} \right] g_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m g_m^{1,2}(\xi) & \xi \in R, \\ \left[ V_{\pm\frac{\pi}{4}} I_2' V_{\pm\frac{\pi}{4}}^{-1} \right] g_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m g_m^{1,2}(\xi) & \xi \in R, \end{cases} \quad (4.100)$$

avec

$$g_m^{1,2}(\xi) = V_{\pm\frac{\pi}{4}} f_m^{1,2}(\xi) = e^{\pm i\frac{\pi}{8}} f_m^{1,2}(\xi) (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi), \quad (4.101)$$

ceux sont les fonctions propres de  $J_2 = V_{\pm\frac{\pi}{4}} I_2 V_{\pm\frac{\pi}{4}}^{-1}$ .

Nous comparons avec(4.35)et (4.36) on trouve

$$\begin{aligned}J_2 &= V_{\pm\frac{\pi}{4}} I_2 V_{\pm\frac{\pi}{4}}^{-1} = \pm i I_1 \quad \text{et} \\ J_2' &= V_{\pm\frac{\pi}{4}} I_2' V_{\pm\frac{\pi}{4}}^{-1} = \pm i I_1',\end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} J_2 g_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m g_m^{1,2}(\xi) \\ J_2' g_m^{1,2}(\xi) = \lambda_m g_m^{1,2}(\xi), \end{cases} \quad (4.102)$$

d'après (4.100) on peut tirer que

$$\begin{cases} I_2 g_m^{1,2}(\xi) = \vartheta_m g_m^{1,2}(\xi) & \xi \in R, \\ I_2' g_m^{1,2}(\xi) = \vartheta_m g_m^{1,2}(\xi) & \xi \in R, \end{cases} \quad (4.103)$$

qui signifie que  $g_m^{1,2}(\xi) = V_{\pm\frac{\pi}{4}} f_m^{1,2}(\xi)$  sont les fonctions propres de  $I_2$  avec des valeurs propres  $\vartheta_m = \mp i\lambda_m$ , alors en utilisant(??), nous obtenons la solution

$$\begin{aligned} g_m^{1,2}(\xi) = & e^{\pm i\frac{\pi}{8}} e^{\left[\mp i\frac{\nu}{2\hbar}\xi^2\right]} \left\{ A_m (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\vartheta_m\right], |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1; \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\hbar} (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi)^2\right) \\ & + B_m (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ & \left. \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\vartheta_m\right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\hbar} (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi)^2\right)\right\} \quad \xi \in R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_m^{1,2}(\xi) = & e^{\pm i\frac{\pi}{8}} e^{\left(-\frac{\sqrt{\Omega^2}}{2\hbar}\xi^2\right)} C_m (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi)^{|m|} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[|m|+1-\vartheta_m\right], |m|+1; \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\hbar} (e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\xi)^2\right) \quad \xi \in R, \end{aligned}$$

qui est équivalent à écrire

$$\begin{aligned} g_m^{1,2}(\xi) = & (\pm i)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{|\Omega|}{2\hbar} (\sqrt{\pm i}\xi)^2\right] \\ & \times \left\{ A_m (\sqrt{\pm i}\xi)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\vartheta_m\right], |m+\frac{\nu}{\hbar}|+1; \frac{|\Omega|}{\hbar} (\sqrt{\pm i}\xi)^2\right) \\ & \left. + B_m (\sqrt{\pm i}\xi)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \left. \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1-\vartheta_m\right], 1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|; \frac{|\Omega|}{\hbar} (\sqrt{\pm i}\xi)^2\right)\right\} \quad \xi \in R, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_m^{1,2}(\xi) = & (\pm i)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\mp i\frac{|\Omega|}{2\hbar}\xi^2\right) C_m (\sqrt{\pm i}\xi)^{|m|} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left[|m|+1-\vartheta_m\right], |m|+1; \left(\mp i\frac{|\Omega|}{\hbar}\right)\xi^2\right) \quad \xi \in R, \end{aligned}$$

Nous remarquons que les solutions obtenus sont des fonctions hypergéométriques sauf que le paramètre  $[-|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1 - \vartheta_m]$  est complexe ( $\vartheta_m = i\lambda_m$ ) qui peut prendre toutes les valeurs possibles et imaginaires, donc nous sommes devant l'étude d'un spectre continu, contrairement à ce qu'on a dans le cas précédent ( $k > 0$ ), où le paramètre est réel et les spectres sont discrets.

de la même manière que dans le cas précédent, nous allons calculer les constantes  $A_m^{1,2}$ ,  $B_m^{1,2}$  et  $C_m^{1,2}$  en utilisant les conditions de raccordement

$$\begin{cases} g_m^{1,2}(R - \epsilon) = g_m^{1,2}(R + \epsilon) \\ \left[ \frac{d}{d\xi} g_m^{1,2}(\xi) \right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \frac{s\nu}{\hbar R} g_m^{1,2}(R - \epsilon) \end{cases} \quad (4.104)$$

et en utilisant (4.75), (4.77), (4.78) et en faisant juste le changement de variable  $z = \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \xi^2$  et pour l'ordre le plus bas en  $R$

$$\left[ {}_1F_1 \left( a, c; \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right) \right]_{\xi=R} \approx 1 \quad (4.105)$$

$$\left[ \frac{d {}_1F_1 \left( a, c; \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right)}{dz} \right]_{\xi=R} \approx \mp i 2 \frac{|\Omega|}{\hbar} \frac{a}{c} R \quad (4.106)$$

donc(4.104) devient

$$A_m^{1,2} (\sqrt{\pm i} R)^{|m + \frac{\nu}{\hbar}|} + B_m^{1,2} (\sqrt{\pm i} R)^{-|m + \frac{\nu}{\hbar}|} = C_m^{1,2} (\sqrt{\pm i} R)^{|m|}$$

et

$$\begin{aligned} & A_m^{1,2} \left\{ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| (\sqrt{\pm i} R)^{|m + \frac{\nu}{\hbar}| - 1} - \frac{\vartheta_m}{\hbar^2 [ |m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1 ]} (\sqrt{\pm i} R)^{|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1} \right\} \\ & - B_m^{1,2} \left\{ \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| (\sqrt{\pm i} R)^{-|m + \frac{\nu}{\hbar}| - 1} + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2 [ -|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1 ]} (\sqrt{\pm i} R)^{-|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1} \right\} \\ & = C_m^{1,2} \left( |m| + \frac{s\nu}{\hbar} \right) (\sqrt{\pm i} R)^{|m| - 1} + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2 [ |m| + 1 ]} (\sqrt{\pm i} R)^{|m| + 1} \end{aligned}$$

après calcul nous obtenons

$$\frac{A_m^{1,2}}{C_m^{1,2}} = (\sqrt{\pm i} R)^{-|m + \frac{\nu}{\hbar}| + |m|} \frac{[ |m + \frac{\nu}{\hbar}| + |m| + \frac{s\nu}{\hbar} ] + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{|m + \frac{\nu}{\hbar}| + |m|}{(-|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1)(|m| + 1)} \right]}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2|m + \frac{\nu}{\hbar}|}{(-|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1)(|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1)} \right]} (\sqrt{\pm i} R)^2$$

$$\frac{A_m^{1,2}}{C_m^{1,2}} = (\sqrt{\pm i}R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|} \left\{ 1 - \frac{[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|+\frac{s\nu}{\hbar}] + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m|+1)} \right] (\sqrt{\pm i}R)^2}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}| + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \right] (\sqrt{\pm i}R)^2} \right\}$$

donc les solutions prennent la forme finale

$$g_m^{1,2}(\xi) = \beta_3 \{ \beta_4 \times \beta_5 + \beta_6 \times \beta_7 \} \quad \xi)R,$$

$$\beta_3 = (\pm i)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{|\Omega|}{2\hbar} (\sqrt{\pm i}\xi)^2 \right] (\sqrt{\pm i}R)^{|m|}$$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= (\sqrt{\pm i}R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\sqrt{\pm i}\xi)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \\ &\times \frac{[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|+\frac{s\nu}{\hbar}] + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m|+1)} \right] (\pm iR^2)}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}| + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \right] (\pm iR^2)} \end{aligned}$$

$$\beta_5 = {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} [ |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1 - \vartheta_m ], |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1; \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \beta_6 &= (\sqrt{\pm i}R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\sqrt{\pm i}\xi)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left\{ 1 \right. \\ &\left. - \frac{[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|\pm\frac{s\nu}{\hbar}] + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m|+1)} \right] (\pm iR^2)}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}| + \frac{\vartheta_m}{\hbar^2} \left[ \frac{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|}{(-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \right] (\pm iR^2)} \right\} \end{aligned}$$

$$\beta_7 = {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} [ -|m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1 - \vartheta_m ], 1 - |m+\frac{\nu}{\hbar}|; \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right)$$

passons à la limite  $R \rightarrow 0$ ,  $R^2 \approx 0$  et la solution devient

$$\begin{aligned} g_m^{1,2}(\xi) &= \beta_3 \left\{ (\sqrt{\pm i}R)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|+\frac{s\nu}{\hbar}]}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} (\sqrt{\pm i}\xi)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \times \beta_5 \right. \\ &\left. + (\sqrt{\pm i}R)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left\{ 1 - \frac{[|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|+\frac{s\nu}{\hbar}]}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right\} (\sqrt{\pm i}\xi)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \times \beta_7 \right\} \quad \xi)R, \quad (4.107) \end{aligned}$$

en passant par les mêmes étapes précédentes (4.75) et (4.78) on arrive à

$$\begin{aligned} g_m^{1,2}(\xi) &= \beta_3 \left\{ D_m^{1,2} (\sqrt{\pm i}R)^{|m|+\frac{\nu s}{\hbar}} (\sqrt{\pm i}\xi)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \beta_5 \right. \\ &\left. + (\sqrt{\pm i}R)^{-|m|-\frac{\nu s}{\hbar}} (\sqrt{\pm i}\xi)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \beta_7 \right\}, \quad (4.108) \end{aligned}$$

où  $D_m^{1,2}$  sont des constantes non nulles. Alors, dans la limite  $R \rightarrow 0$  la solution irrégulière domine

$$g_m^{1,2}(\xi) \rightarrow_1 F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \vartheta_m \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|; \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right).$$

Par la même procédure parcourue dans le cas précédent, la première composante de la fonction propre  $\chi_m^1$  est donnée par

$$\begin{aligned} \chi_m^1(\xi, \varphi) = & a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \times \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \beta_5 e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} e^{im\varphi} \\ & + e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} \left\{ \theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\eta} \right. \\ & \times {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\vartheta_m}{\hbar|\Omega|} \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right) e^{-iN\varphi} \left. \right\} \\ & + e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} \left\{ \theta(s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{\eta-1} \right. \\ & \times {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\vartheta_m}{\hbar|\Omega|} \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \left( \mp i \frac{|\Omega|}{\hbar} \right) \xi^2 \right) e^{-i(N+1)\varphi} \left. \right\}, \quad (4.109) \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique de la série confluyente pour les grandes valeurs positives de son argument est (4.48), il s'ensuit que  $\chi_m^1$  se comporte comme

$$\begin{aligned} \chi_m^1(\xi, \varphi) \sim & e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} \left\{ a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \times \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1]} \\ & + \theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\eta} \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + 1 - \eta]} \\ & \left. + \theta(s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{\eta-1} \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\frac{1}{2}[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + \eta]} \right\}, \quad (4.110) \end{aligned}$$

comparons avec l'Eq.(4.54), nous remarquons que

$$\vartheta_m = \mp i \lambda_m \quad (4.111)$$

Et pour déduire  $\chi_m^2(\xi, \varphi)$  nous remplaçons  $s \rightarrow -s$  dans l'Eq.(4.110) nous obtenons

$$\begin{aligned} \chi_m^2(\xi, \varphi) \sim & e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} \left\{ a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\ & \times \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1]} \\ & + \theta(s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\eta} \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + 1 - \eta]} \\ & \left. + \theta(-s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{\eta-1} \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\frac{1}{2}[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + \eta]} \right\}, \quad (4.112) \end{aligned}$$

Alors le comportement asymptotique des composantes de la fonction d'onde (solutions)  $\phi_m(r, \varphi, t)$  s'écrit comme suit

$$\phi_m^1(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3} \chi_m^1, \quad (4.113)$$

$$\phi_m^2(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3} \chi_m^2. \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} \phi_m^1(r, \varphi, t) &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2}}{\sqrt{\rho}} e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} \left\{ a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \right. \\ &\times \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-[ \frac{\nu}{|\Omega|\hbar} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1 ]} \\ &+ \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_m \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-\eta} \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-[ \frac{\nu}{|\Omega|\hbar} + 1 - \eta ]} \\ &+ \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_m \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{\eta-1} \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-[ \frac{\nu}{|\Omega|\hbar} + \eta ]} \left. \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}^2(r, \varphi, t) &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} r^2}}{\sqrt{\rho}} e^{[\mp i \frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2]} \left\{ a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \right. \\ &\times \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-[ \frac{\nu}{|\Omega|\hbar} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1 ]} \\ &+ \theta(s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_m \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-\eta} \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-[ \frac{\nu}{|\Omega|\hbar} + 1 - \eta ]} \\ &+ \theta(-s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_m \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{\eta-1} \left( \sqrt{\pm i \xi} \right)^{-[ \frac{\nu}{|\Omega|\hbar} + \eta ]} \left. \right\}, \end{aligned}$$

On déduit la forme des fonctions propres  $\psi_{m,\nu_m}(r, \varphi, t)$  qui évoluent suivant l'équation de Schrödinger

$$\psi_{m,\nu_m}^1(r, \varphi, t) = e^{i\alpha_m(t)} \phi_{m,\nu_m}^1(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3} e^{i\alpha_m(t)} \chi_{m,\nu_m}^1 \quad (4.115)$$

$$\psi_{m,\nu_m}^2(r, \varphi, t) = e^{i\alpha_m(t)} \phi_{m,\nu_m}^2(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3} e^{i\alpha_m(t)} \chi_{m,\nu_m}^2 \quad (4.116)$$

4.3.6 calcul de la phase  $\alpha_{m,\vartheta_m}(t)$ 

la phase  $\alpha_{m,\vartheta_m}(t)$  est définie par

$$\begin{aligned}
 \hbar \dot{\alpha}_{m,\vartheta_m}(t) &= \langle \phi_{m,\vartheta_m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{m',\vartheta_m} \rangle, \\
 &= \langle \phi_{m,\vartheta_m} | -\frac{I}{M\rho^2} | \phi_{m',\vartheta_m} \rangle \\
 &= \langle \dot{\phi}_{m,\vartheta_m} | -\frac{\dot{I}}{M\rho^2} | \dot{\phi}_{m',\vartheta_m} \rangle \\
 &= -\frac{\vartheta_m}{M\rho^2} \langle \dot{\phi}_{m,\vartheta_m} | \dot{\phi}_{m',\vartheta_m} \rangle
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{m,\vartheta_m}(t) &= -\frac{\vartheta_m}{\hbar} \int_0^t \frac{d\tau}{M\rho^2} \langle \dot{\phi}_{m,\vartheta_m} | \dot{\phi}_{m',\vartheta_m} \rangle \\
 &= \pm i \frac{\lambda_m}{\hbar} \int_0^t \frac{d\tau}{M\rho^2} \langle \dot{\phi}_{m,\vartheta_m} | \dot{\phi}_{m',\vartheta_m} \rangle
 \end{aligned}$$

comme nous pouvons écrire la solution générale en forme condensée comme suit

$$\psi(r, \varphi, t) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \psi_{m,\vartheta_m}^1 \\ \psi_{m,\vartheta_m}^2 \end{pmatrix} \tag{4.118}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3} e^{i\alpha_{m,\vartheta_m}(t)} \begin{pmatrix} \chi_{m,\vartheta_m}^1 \\ \chi_{m,\vartheta_m}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\left[\frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 + \alpha_{m,\vartheta_m}(t)\right]} \begin{pmatrix} \chi_{m,\vartheta_m}^1 \\ \chi_{m,\vartheta_m}^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

alors le comportement asymptotique des solutions s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
 \psi_{m,\vartheta_m}^1 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\left[\frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 + \alpha_{m,\vartheta_m}(t)\right]} e^{i\left[\mp i\frac{|\Omega|}{2\hbar} \xi^2\right]} \\
 &\times \left\{ a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} \right) \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\
 &\times \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\left[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1\right]} \\
 &+ \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\eta} \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\left[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + 1 - \eta\right]} \\
 &\left. + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) \delta_{m,-N-1} a_m \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{\eta-1} \left( \sqrt{\pm i\xi} \right)^{-\left[\frac{\vartheta_m}{|\Omega|\hbar} + \eta\right]} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

et

$$\begin{aligned}
 \psi_{m,\nu_m}^2 = & \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\left[\frac{M\rho}{2\hbar\rho}r^2 + \alpha_{m,\nu_m}(t)\right]} e^{i\left[\mp i\frac{|\Omega|}{2\hbar}\xi^2\right]} \\
 & \times \left\{ a_m \left( 1 - \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N} - \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1} \right) \left(\sqrt{\pm i\xi}\right)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right. \\
 & \times \left(\sqrt{\pm i\xi}\right)^{-\left[\frac{\nu_m}{|\Omega|\hbar} + |m+\frac{\nu}{\hbar}| + 1\right]} \times \\
 & + \theta(s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N}a_m \left(\sqrt{\pm i\xi}\right)^{-\eta} \left(\sqrt{\pm i\xi}\right)^{-\left[\frac{\nu_m}{|\Omega|\hbar} + 1 - \eta\right]} \\
 & \left. + \theta(-s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right)\delta_{m,-N-1}a_m \left(\sqrt{\pm i\xi}\right)^{\eta-1} \left(\sqrt{\pm i\xi}\right)^{-\left[\frac{\nu_m}{|\Omega|\hbar} + \eta\right]} \right\}. \quad (4.121)
 \end{aligned}$$

## Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons solutioné l'équation de Pauli dépendante du temps à 2D confinée dans un potentiel harmonique en présence de l'effet Aharonov-Bohm.

En premier lieu nous avons exploité la théorie des invariants pour résoudre cette équation.

En deuxième lieu nous avons présenté en détails l'effet Aharonov-Bohm.

En troisième lieu nous avons exposé les travaux de Hagen relatifs à la diffusion des particules non relativistes chargées sans spin et les particules relativistes chargées de spin  $1/2$ .

En dernier lieu nous avons solutioné l'équation de Pauli dépendante du temps à 2D en présence de l'effet AB, on a constaté que les spineurs solution de l'équation de Pauli sont :

- des fonctions hypergéométriques confluentes dans le premier et le troisième cas ( $k > 0$  et  $k < 0$ ),
- des fonctions de Bessel dans le deuxième ( $k = 0$ ),

dont l'argument dépend du flux et que les solutions irrégulières contribuent dans certains cas particuliers. Comme nous avons vu que la nature du spectre des solutions dépend de la constante  $k$ , autrement dit de l'équation auxiliaire; un spectre discret pour  $k > 0$  et continu ailleurs ( pour  $k = 0$  et  $k < 0$ ).

# Bibliographie

- [1] R. S. KAUSHAL 1, S. C. MISHRA and K. C. TRIPATHY, *Phy. Lett. A*, **102**, (1984) 1, 2.
- [2] M. Omote and S. Kamefuchi, *Phys. Lett. A*, **206**,(1995)273.
- [3] Mazyar MIRRAHIMI, Mémoire de DEA. Rapportinterne CAS no E/181, 6 juin 2003.
- [4] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1458.
- [5] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959) 4859.
- [6] A.Tonomura and All, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 792.
- [7] J. Y. Ji, J. Kim and S. P. Kim, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 4268.
- [8] M. Maamache, *Phys. Rev. A* **52** (1995) 936 .
- [9] M. Maamache, K. Bencheikh and H. Hachemi, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 3124.
- [10] M. Maamache, J. P. Provost and G. Vallée, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 1777.
- [11] M. Maamache and H. Choutri, *J. Phys. A* **33** (2000) 6203.
- [12] M. Maamache and H. Bekkar, *J. Phys. A* **36** (2003) L359.
- [13] M . Maamache, *J. Phys. A* **29** (1996) 2833.
- [14] M . Maamache, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 026102.
- [15] I. A. Pedrosa and I. Guedes, *Int. J. Mod. Phys. B* **17** (2003) 2903.
- [16] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55** (1997) 3219.
- [17] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, *Phys. Rev. A* **56** (1997) 4300.
- [18] L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 527.
- [19] D. Trifonov, *J. Phys. A* **32** (1999) 3649.

- [20] J. R. Choi and B. H. Kweon, *Int. J. Mod. Phys. B* **16** (2002) 4733.
- [21] A. B. Nassar, *Physica A* **24** (1987) 24 .
- [22] M. S. Abdalla, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 4026.
- [23] J. M. F. Bassalo, L. C. L. Botelho, H. S. A. Neto and P. T. S. Alencar, *Rev. Bras. Fis.* **19** (1989) 598.
- [24] B. Baseia, S. S. Mizrahi and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 5885.
- [25] C. A. S. Ferreira, P. T. S. Alencar and J. M. F. Bassalo, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 024103.
- [26] C. Yüce, *Ann. Phys.* **308** (2003) 599.
- [27] J. R. Choi, *J. Phys. C* **15** (2004) 823 .
- [28] M. Maamache, A. Bounames and N. Ferkous, *Phys. Rev A* **73** (2006) 016101.
- [29] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer, Berlin, 1989.
- [30] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 503 .
- [31] C. R. Hagen, *Int. J. Mod. Phys. A* **6** (1991) 3119.
- [32] C. R. Hagen, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 2015.
- [33] N.Ferkous, Mémoire de magiter, 2004, Systèmes physiques bidimensionnels en présence de l'effet Aharonov-Bohm, Université de Jijel, Faculté des sciences, Departement de physique.
- [34] N. Ferkous and A. Bounames, *Phys. Lett. A* **325** (2004) 21.
- [35] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, second Ed., Springer, Berlin, 1994, pp.107-110.
- [36] Z. X. Wang and D. R. Due, *Special Function*, World Scientific Pub., Singapore, 1989, pp.327.
- [37] Ph. Gerbert and R. Jakiw, *Commun. Math. Phys.* **124** (1989) 229.
- [38] Ph. Gerbert, *Phys. Rev. D* **40** (1989) 1346.
- [39] M. G. Alford and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 1071.
- [40] M. Moshinsky and A.Szczepaniak, *J. Phys. A* **22** (1989) L817.
- [41] M. Moshinsky and Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1996.

- [42] V. M. Villalba, Phys. Rev. A **49** (1994) 586, hep-th/9310010.
- [43] V. M. Villalba and A. R. Maggiolo, Eur. Phys. J. B **22** (2001) 31, cond-mat/0107529.
- [44] V. Alan Kostelecky, V. I. Man'ko, M. M. Nieto and D. R. Truax, Phys. Rev. A **48** (1993) 951.
- [45] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **31** (1998) 1859.
- [46] A. A. Suzko and E. P. Velicheva, Yadernaya Fizika, **61** (1998) 1884.
- [47] R. S. KAUSHAL 1, S. C. MISHRA and K. C. TRIPATHY, Phy. Lett. A, **102**, (1984) 1, 2.
- [48] M. Omote and S. Kamefuchi, Phys. Lett. A, **206**,(1995) 273.
- [49] V. Ramakrishna, M. Salapaka, M. Dahleh, et H. Rabitz. Phys. Rev. A, **51** (1995)2.
- [50] Y. Bouguerra, Mémoire de magiter, 2006, Systèmes à deux dimensions dépendants du temps en présence de l'effet Aharonov-Bohm, Université de Jijel, Faculté des sciences, Departement de physique.
- [51] C.Dariusz, Mathematical Subject Classifications, (2000)
- [52] C. C. Tannoudji. B. Diu. F. Laloë, *Mécanique quantique*, Tome II., Hermann, Paris, 1977, pp.980.



## ملخص:

إن ظاهرة تشتت الجسيمات المشحونة بواسطة ملف لولبي مسطوح لا متناهي الطول والذي يحتوي تدفقا مغناطيسيا ثابتا، المسماة مفعول أهارونوف-بوهم، تمثل أهمية جوهرية في الفيزياء الكوانتية. هدف هذه الدراسة هو حل إشكالية معادلة باولي المتطرفة بالزمن داخل كمون أهارونوف-بوهم بواسطة طريقة جديدة من حيث المضمون والشكل وذلك بإدخال وسيط يمكننا من حل الإشكالية كمسألة متعلقة بالزمن. ونقترح من أجل ذلك استعمال نظرية لوييس-ريزنفيلد. زيادة على ذلك، نجد أن الحلول المتحصل عليها من أجل هذه المسألة لا تمثل فقط تلك الخاصة بالتشتت، ولكن أيضا حالات مرتبطة، ما يمثل حولا جديدة غير تلك المعروفة عن مسائل التشتت.

**الكلمات المفتاحية:** تشتت الجسيمات المشحونة، ملف لولبي، كمون أهارونوف-بوهم، حالات التشتت، حالات مرتبطة.

## Résumé :

L'effet de la diffusion des particules chargées par un solénoïde droit infiniment long qui enferme un flux magnétique constant, appelé effet Aharonov-Bohm, présente un intérêt primordial en mécanique quantique. Notre objectif ici est de traiter l'équation de Pauli dépendante du temps confinée dans un potentiel harmonique en présence de l'effet Aharonov-Bohm en utilisant la théorie des invariants. En fait, c'est en introduisant un paramètre dépendant du temps que nous puissions rendre le problème l'est, d'où la possibilité de l'application de cette théorie. En outre, nous trouvons que les solutions obtenues ne sont pas uniquement de diffusion (spectre continu), mais présentent aussi des états liés (spectre discret), Ce qui est inattendu et défie la convention que seuls les états non liés existe dans un phénomène de diffusion.

**Mots clés :** diffusion des particules chargées, théorie des invariants, solénoïde, effet Aharonov-Bohm, spectre continu, spectre discret

## Abstract:

The effect of the scattering of charged particles by an infinitely long straight solenoid that encloses a magnetic flux, known as the Aharonov-Bohm effect, is of paramount interest in quantum physics. Our object here is to deal dependent Pauli equation confined in a harmonic potential in presence of Aharonov-Bohm effect by using the invariants theory. In fact, it is by introducing a time-dependent parameter that we can return the problem as time-dependent, so that the possibility of the application of this theory. Moreover, we find that the obtained solutions are not only of scattering (continuous spectrum), but presents also bound states (discrete spectrum), what is unexpected and defies the convention that only the scattering states exists in a scattering phenomenon.

**Keywords:** the scattering of charged particles, invariant theory, solenoid, Aharonov-Bohm effect, Continuous spectrum, discrete spectrum.