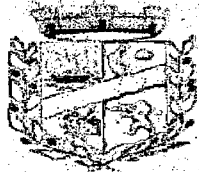
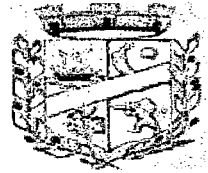


530.1/8

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



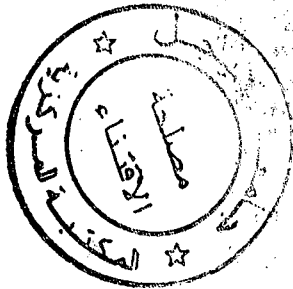
MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique



par

lourci khalida

THEME

**La création de paires via les instantons dans le
formalisme des intégrales de chemins**

Soutenu le :19/06/2008

Devant le Jury :

Président :	Z. Belghobsi	MC	Univ. Jijel
Rapporteur :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
Examineurs :	M. Maamache	Prof.	Univ. Sétif
	M. Merad	Prof.	C. U. Oum-El-Bouaghi
	A. Tilbi	Dr.	Univ. Jijel

Table des matières

1	Introduction	6
2	Probabilité de création de paires	9
2.1	La fonction de Green correspondante	9
2.2	Calcul du facteur de spin	11
2.3	L' Action effective	16
3	Calcul de l'action effective les multi-instantons	17
3.1	Application au champ électrique constant	20
3.1.1	Cas du spin 0	20
3.1.2	Cas du spin 1/2	31
3.2	Application au cas du champ électrique dépendant du temps	33
3.2.1	Les solutions classiques	33
3.2.2	L'opérateur de fluctuation et son déterminant	34
4	Calcul de l'action effective par l'équation de Jacobi	36
4.1	Le champ électrique dépendant du temps	40
4.1.1	Les solutions classiques	40
4.1.2	L'opérateur de fluctuation et son déterminant	41
4.2	L'extraction de la partie imaginaire	45
4.3	Application : $E(t)=E\text{sech}^2(\omega t)$	46
4.3.1	Les solutions classiques :	47
4.3.2	Calcul du déterminant	49

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

5 Conclusion générale

54

Bibliographie

62

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données pour terminer ce mémoire

Je tiens à remercier mon encadreur Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir confié ce sujet et pour l'aide et le temps et la disponibilité qu'elle a bien voulu me consacrer.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, Mlle. Z. Belghobsi, Maître de conférences à l'université de Jijel pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs : M. Maamache , professeur à l'université de Setif, Mr. M. Merad, Professeur à l'université de Oum El Bouaghi, et Mr. A. Tilbi. docteur à l'université de Jijel, qui ont bien accepté de juger ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de la post graduation de physique théorique. En particulier Mrs : Kh. Nouicer, A. Bounames, Professeurs à l'université de Jijel, L. Chetouani . F. Benamira, A. Lecheheb professeurs à l'université Mentouri de Constantine.

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2004/2005, et ceux de la promotion qui nous ont précédé 2003/2004, et 2002/2003, et en particulier :Nacer, Chahinez, Nadia, Saliha, Sana .

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et en particulier ma mère, et mon père qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

khalida

Chapitre 1

Introduction

L'intégrale de chemin apparaît pour la première fois chez Dirac en essayant de formaliser la relation entre la mécanique quantique et la mécanique classique suivant le schéma de Lagrange. Les fonctions de transformation de la mécanique quantique se voient alors être reliées aux transformations canoniques de la mécanique classique correspondante. Ce lien étroit entre les deux mécaniques et les remarques judicieuses de Dirac ont permis à Feynman de créer un pont solide et très riche entre les deux mécaniques. Dans sa thèse de doctorat, Feynman élabore cette intégrale de chemin et généralise alors le principe d'action de la mécanique classique à la mécanique quantique. Avec ce formalisme il a essayé d'explorer l'électrodynamique quantique. Un rêve, qui à notre point de vue reste inachevé. Décrire la nature extrêmement riche et complexe de l'électrodynamique quantique au moyen des trajectoires classiques relève d'une dextérité impressionnante. Il s'avère que l'approximation de cette intégrale de chemin au voisinage du chemin classique est suffisante pour pouvoir évaluer les corrections des créations de paires de particules d'une manière non perturbative. Dans ce formalisme de création de paires, l'action effective est donnée au moyen de l'intégrale de chemin d'une particule relativiste soumise à l'action d'un champ extérieur. Ce problème fondamental en physique a des solutions analytiques pour des configurations particulières du champ et des solutions approximatives pour d'autres configurations plus compliquées et enfin des solutions numériques pour des configurations réalistes et expérimentales du champ. La puissance de ce formalisme est de pouvoir prédire d'une manière non perturbative cette probabilité de création de paires. Il a été appliqué en électrodynamique quantique, en chromodynamique quantique, en théorie des

effets non linéaires de l'électromagnétisme et bien d'autres domaines où cette création de paires devient non négligeable. Ce fut Schwinger le premier qui a pu calculer cette création de paires d'une manière non perturbative dans le cas d'un champ constant et a évalué son effet dans le cas d'un champ quelconque. Pour ce faire, il a inséré l'astuce de Fock du temps propre en le combinant à l'action effective de la création de paire. L'outil de calcul était dans son cas le principe d'action dans sa forme opératorielle. Ces deux problèmes essentiels ont été traités : celui du champ constant et celui de l'onde plane. Il faut noter que pour ces deux configurations de champs, l'approximation semi classique donne un résultat exact dans le cas du champ constant. Cette probabilité de création de paires scalaires développée par Schwinger est en une relation avec la partie imaginaire de l'action effective sous la forme d'une série convergente

$$\text{Im } \mathcal{L} [E] = \frac{e^2 E^2}{16\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \exp \left[-\frac{m^2 \pi n}{eE} \right]$$

Chaque terme en n de la série correspond à la création cohérente de n paires de particules par le champ constant E . Dans le cas du champ d'une onde plane la probabilité de cette création de paires est nulle. Les autres configurations de champ peuvent être déduites par des raisonnements analogues en relation avec la constance de E et la valeur des invariants du champ électromagnétique. Dans cette ordre d'idée des configurations de champ variables ont été étudiées, l'approximation semi classique a été soigneusement appliquée et des résolutions numériques concluantes ont permis de comparer la validité de cette approximation.

L'objectif de ce mémoire est de retrouver exactement cette formule de Schwinger pour le champ constant et d'appliquer l'approximation semi-classique pour les champs dépendants du temps. Dans la première on utilise une méthode permettant l'apparition des multi-instantons et pour la deuxième une méthode utilisant un seul instanton.

Le mémoire est constitué de trois chapitres. Un deuxième chapitre rassemblant les outils nécessaires à notre calcul : le formalisme des intégrales de chemins supersymétrique, l'action effective pour les particules de spin 1/2 et une réduction de la fonction de Green spinorielle à deux fonctions de Green scalaires. Un troisième chapitre présente l'idée comment introduire les multi-instantons dans le calcul de l'action effective pour spin 0 et 1/2. Une application au champ constant est donnée pour spin 0 et 1/2. Une extension au champ variable est évoquée. Le quatrième chapitre présente la méthode de Schubert utilisant l'équation de Jacobi pour calculer

le facteur de fluctuations. Cette approche utilise seulement un seul instanton. Un cas explicite est présenté comme illustration de la méthode. Une conclusion générale est donnée. Un chapitre appendice est présenté.

Chapitre 2

Probabilité de création de paires

Dans ce chapitre, nous allons donner la probabilité de création de paires de particules relativistes (spin 0 et 1/2) en interaction avec un champ électrique dépendant du temps de forme quelconque [1]. Cette probabilité de création de paires est calculée au moyen du formalisme de l'action effective. Cette dernière est exprimée dans le formalisme Lagrangien de Dirac-Feynman, dit intégrale de chemin de Feynman, et il est montré qu'on peut unifier les cas spin 0 et 1/2. Pour ce faire, nous nous intéressons tout d'abord au cas spin 1/2 et nous déduirons celui de spin 0 en adoptant une notation adéquate faisant intervenir un paramètre α qui prend les valeurs : 1 pour spin 1/2 et 0 pour spin 0

2.1 La fonction de Green correspondante

Pour exprimer l'action effective au moyen de l'intégrale de chemin, il est nécessaire d'introduire la fonction de Green causale correspondante au problème. En présence d'un champ électrique dépendant du temps dirigé suivant l'axe z , $\vec{E} = (0, 0, E(t))$, cette fonction de Green causale $\tilde{S}^c(x_b, x_a)$ obéit à l'équation suivante

$$(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m \gamma^5) \tilde{S}^c(x_b, x_a) = \delta^4(x_b, x_a) \quad (2.1)$$

avec $\pi_\mu = -p_\mu - eA_\mu$, A_μ le 4-potential, d'où dérive le champ électrique, donné dans la jauge scalaire suivante $A^\mu = (-E(t)z, 0, 0, 0)$ et $(\tilde{\gamma}^\mu, \gamma^5)$ les matrices de Dirac.

Pour pouvoir déduire le cas spin 0 à partir de celui de spin 1/2 adoptons la notation

suivante :

$$\tilde{S}_\alpha^c(x_b, x_a) = (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^\alpha \tilde{G}_\alpha^c(x_b, x_a) \quad \alpha = 0, 1$$

où $\tilde{G}_\alpha^c(x_b, x_a)$ vérifie l'équation suivante

$$(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^2 \tilde{G}_\alpha^c(x_b, x_a) = \left(\pi^2 - m^2 + \frac{ie\alpha}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right) \tilde{G}_\alpha^c(x_b, x_a) = \delta^4(x_b, x_a)$$

Par conséquent,

$$\tilde{S}_\alpha^c(x_b, x_a) = \begin{cases} \tilde{G}^c(x_b, x_a) & \text{pour } \alpha = 0 \\ \tilde{S}^c(x_b, x_a) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

$\tilde{G}^c(x_b, x_a)$ est la fonction de Green de Klein-Gordon (spin 0) et $\tilde{S}^c(x_b, x_a)$ est la fonction de Green de Dirac (spin 1/2).

La solution formelle de ces fonctions de Green causales est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha^c &= (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^\alpha \frac{1}{(\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^2} = (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^\alpha \tilde{G}_\alpha^c \\ &= (\pi_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m\gamma^5)^\alpha \frac{1}{\left(\pi^2 - m^2 + \frac{ie\alpha}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans notre cas

$$F_{03} = -F_{30} = E(t), \text{ les autres éléments de } F_{\mu\nu} \text{ sont nuls} \quad (2.3)$$

A ce niveau, introduisant la méthode du temps propre de Schwinger([2]) pour donner à la fonction de Green \tilde{G}_α^c la forme intégrale suivante

$$\tilde{G}_\alpha^c[A] = i \int d\lambda T. \exp \{ -i\lambda \mathcal{H}(x, p) \} \quad (2.4)$$

avec $\mathcal{H}(x, p) = -\left(\pi^2 - m^2 + \frac{ie\alpha}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + i\varepsilon \right)$, le symbole T étant le T-produit qui permet d'ordonner les ensembles d'opérateurs : (x, p) et $(\tilde{\gamma}^\mu, \gamma^5)$.

La fonction de Green $\tilde{G}_\alpha^c[A](b, a)$ en représentation intégrale de chemin est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^c[A](b, a) &= i \int d\lambda \langle x_b | T. \exp \left\{ i\lambda \left(\pi^2 - m^2 + \frac{ie\alpha}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + i\varepsilon \right) \right\} | x_a \rangle \\ &= (-i) \exp \left\{ i\tilde{\gamma} \frac{\delta_l}{\delta\theta^n} \right\} \int d\lambda \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int_{\psi^n(0)+\psi_n(\lambda)=0}^{\psi^n(1)+\psi_n(1)=0} D\psi \\ &\quad \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left(\pi^2 - m^2 + 2ie\alpha F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu \right) + p\dot{x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\psi_n \dot{\psi}^n \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cette dernière équation représente la forme Hamiltonienne de la fonction de Green $\tilde{G}_\alpha^c [A] (b, a)$ en représentation intégrale de chemin. Les variables Grassmanniennes ψ^ν décrivent l'évolution dynamique du spin. Pour obtenir la forme lagrangienne, nous intégrons sur les impulsions p . Dans ce but, faisons la transformation suivante

$$p \longrightarrow -p - \frac{\dot{x}}{2\lambda} - eA(x)$$

qui permet d'obtenir la forme lagrangienne de l'intégrale de chemin de $\tilde{G}_\alpha^c [A] (b, a)$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^c [A] (b, a) = & (-i) \exp \left\{ i\tilde{\gamma} \frac{\delta_l}{\delta\theta^n} \right\} \int d\lambda Dx Dp \int_{\psi^n(0)+\psi_n(\lambda)=0} D\psi \\ & \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\left(-\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} - eA_\mu(x) \dot{x}^\mu - \lambda m^2 + \lambda p^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2ie\lambda\alpha F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu - i\dot{\psi}_n \dot{\psi}^n \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Il est remarquable que les variables de spin ψ^ν interviennent par une forme gaussienne dans l'action et il est alors possible de les intégrer usant des formules habituelles d'intégration gaussienne. C'est l'objet de la section suivante.

2.2 Calcul du facteur de spin

Occupons nous de la partie qui contient ces variables de spin qu'on appellera partie spinorielle et nous la notons par (I)

$$(I) = \int_{\psi^n(0)+\psi_n(\lambda)=0} D\psi \exp \left\{ i \int_0^1 \left[2ie\lambda\alpha F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu - i\dot{\psi}_n \dot{\psi}^n \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\}, n = 0, 1, 2, 3, 5 \quad (2.7)$$

Comme le domaine d'intégration est contraint par la condition de bord $\psi^n(0) + \psi_n(\lambda) = 0$, il est préférable de s'en libérer en effectuant la transformation qui nous permet de passer des variables de Grassmann ψ aux vitesses ω suivantes

$$\psi^n(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau \varepsilon (\tau - \hat{\tau}) \omega^n(\hat{\tau}) + \frac{\theta^n}{2} \quad (2.8)$$

Après ce changement de variable, (I) devient

$$\begin{aligned}
 (I) &= \int D\omega \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \frac{\alpha \lambda e}{2} \omega^\mu \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \alpha \lambda e \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\alpha \lambda e}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right\} \\
 &= \int D\omega^5 \int D\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^5 \varepsilon \omega_5 - \frac{1}{2} \omega^\mu \varepsilon \omega_\mu + \frac{\alpha \lambda e}{2} \omega^\mu \varepsilon F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \lambda e \theta^\mu F_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\alpha \lambda e}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

L'intégration sur les vitesses ω^5 donne évidemment

$$\int D\omega^5 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^5 \varepsilon \omega_5 \right\} = 1 \tag{2.10}$$

La formule (I) prend la forme suivante

$$(I) = \int D\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \Lambda_{\mu\nu} \omega^\nu + J_\mu \omega^\mu - \frac{\alpha \lambda e}{2} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right\}, \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{2.11}$$

avec

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \varepsilon - \sigma F_{\mu\nu} \varepsilon, \quad J_\mu = \sigma \theta^\nu F_{\nu\mu} \varepsilon, \quad \sigma = \alpha \lambda e \tag{2.12}$$

et l'intégrale sur ω^μ est encore une forme Gaussienne et son résultat est

$$\int D\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \Lambda_{\mu\nu} \omega^\nu + J_\mu \omega^\mu \right\} = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu \right\} \tag{2.13}$$

où

$$\begin{aligned}
 J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu &= \sigma^2 (\theta^\alpha F_{\alpha\mu} \varepsilon) \Lambda_{\mu\nu}^{-1} (\theta^\beta F_{\beta\nu} \varepsilon) \\
 &= -2\sigma^2 \theta^\alpha F_{\alpha\mu} G_{\mu\nu} F_{\nu\beta} \theta^\beta
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{\mu\nu}^{-1} \text{ est l'inverse de } \Lambda_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon \Lambda_{\mu\nu}^{-1} \varepsilon \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Pour calculer le déterminant de Λ on utilise l'identité

$$\det \Lambda = \exp \{ \text{tr} (\ln \Lambda) \} \tag{2.16}$$

En dérivant $\det \Lambda$ par rapport à σ , on trouve

$$\frac{d}{d\sigma} (\det \Lambda) = (\det \Lambda) \text{tr} \left(\Lambda^{-1} \frac{d}{d\sigma} \Lambda \right) \tag{2.17}$$

ou bien

$$\frac{\frac{d}{d\sigma} \det \Lambda}{\det \Lambda} = \text{tr} \left(\Lambda^{-1} \frac{d}{d\sigma} \Lambda \right) \quad (2.18)$$

Intégrons sur σ il vient

$$\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon} = \exp \left\{ \int_0^\sigma d\sigma \text{tr} \left(\Lambda^{-1} \frac{d}{d\sigma} \Lambda \right) \right\} \quad (2.19)$$

et par conséquent

$$\sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} = \exp \left\{ \int_0^\sigma d\sigma \text{tr} (GF) \right\} \quad (2.20)$$

Portant (2.14) et (2.20) dans (2.11), on trouve

$$\begin{aligned} (I) &= \exp \left\{ - \int_0^\sigma d\sigma \text{tr} (GF) + \sigma^2 \theta^\alpha F_{\alpha\mu} G_{\mu\nu} F_{\nu\beta} \theta^\beta - \frac{\sigma}{4} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^\sigma d\sigma \int_0^1 d\tau G^{\mu\nu} (\tau, \tau) F_{\mu\nu} (\tau) + \sigma^2 \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\hat{\tau} \right. \\ &\quad \left. F_{\alpha\mu} (\tau) G_{\mu\nu} (\tau, \hat{\tau}) F_{\nu\beta} (\tau) \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{\sigma}{4} \theta^\mu \theta^\nu F_{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Maintenant, passons au calcul de $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}$ et $G_{\mu\nu}$. Par définition, la matrice $\Lambda_{\mu\nu} (\tau, \hat{\tau})$ et sa matrice inverse $\Lambda_{\mu\nu}^{-1} (\tau, \hat{\tau})$ vérifient la relation suivante

$$\int ds \Lambda_{\mu\nu} (\tau, s) \Lambda_{\mu\nu}^{-1} (s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta (\tau - \hat{\tau}) \quad (2.22)$$

Cette propriété permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} (\tau, \hat{\tau}) &= \varepsilon^{-1} (\tau, \hat{\tau}) + \sigma^2 F (\tau) V (\tau) \left[\varepsilon (\tau, \hat{\tau}) \right. \\ &\quad \left. - \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 F (\tau_1) \right) \right] V^{-1} (\hat{\tau}) F (\hat{\tau}) \\ &\quad + \sigma V (\tau) \delta (\tau - \hat{\tau}) V^{-1} (\hat{\tau}) F (\hat{\tau}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

et

$$G (\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} V (\tau) \left[\varepsilon (\tau, \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 F (\tau_1) \right) \right] V^{-1} (\hat{\tau}) \quad (2.24)$$

Par un simple calcul, on peut déduire

$$\begin{aligned} &\int_0^\sigma d\sigma \int_0^1 d\tau G^{\mu\nu} (\tau, \tau) F_{\mu\nu} (\tau) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\sigma d\sigma \int_0^1 d\tau F_{\mu\nu} (\tau) \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 F (\tau_1) \right)^{\mu\nu} \\ &= \int_0^\sigma d\sigma \int_0^1 d\tau \tanh \left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 F (\tau_1) \right) \\ &= \ln \cosh \left(\sigma \int_0^1 d\tau E (t) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\begin{aligned}
& \sigma^2 \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\hat{\tau} F_{\alpha\mu}(\tau) G^{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) F_{\nu\beta}(\tau) \theta^\alpha \theta^\beta \\
&= \frac{\sigma}{2} F_{\alpha\beta}(\tau) \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{1}{2} \tanh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 F(\tau_1)\right)_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta \\
&= \sigma E(t) \theta^3 \theta^0 - \theta^3 \theta^0 \tanh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Enfin

$$(I) = \cosh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) - \theta^3 \theta^0 \sinh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) \tag{2.27}$$

ce qui donne à la fonction de Green la forme suivante

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_\alpha^c[A] &= (-i) \exp\left\{i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right\} \int d\lambda \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \exp\left\{i \int_0^\lambda d\tau \lambda p^2\right\} \\
&\quad \left[\cosh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) - \theta^3 \theta^0 \sinh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) \right] \\
&\quad \exp\left\{i \int_0^\lambda d\tau \left(-\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} - eA_\mu(x) \dot{x}^\mu - \lambda m^2\right)\right\} \Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

A ce niveau, nous pouvons remplacer les constantes de Grassmann θ par des matrices $\tilde{\gamma}$ suivant l'identité

$$\begin{aligned}
\exp\left\{i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right\} \theta^3 \theta^0 \Big|_{\theta=0} &= \frac{\delta}{\delta\zeta^1} \frac{\delta}{\delta\zeta^0} \exp(i\zeta_n \tilde{\gamma}^n) \Big|_{\zeta=0} \\
&= -\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

et on trouve alors

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_\alpha^c[A](b, a) &= (-i) \int d\lambda \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \exp\left\{i \int_0^1 d\tau \lambda p^2\right\} \\
&\quad \left[\cosh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) + \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \sinh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) \right] \\
&\quad \exp\left\{i \int_0^1 d\tau \left(-\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} - eA_\mu(x) \dot{x}^\mu - \lambda m^2\right)\right\}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Ecrivons $\cosh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right)$ et $\sinh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right)$ sous forme exponentielle

$$\cosh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) = \frac{e^{\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)} + e^{-\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)}}{2} \tag{2.31}$$

$$\sinh\left(\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)\right) = \frac{e^{\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)} - e^{-\sigma \int_0^1 d\tau_1 E(t)}}{2} \tag{2.32}$$

ce qui permet de réécrire la fonction $\tilde{G}_\alpha^c[A]$ en fonction de deux autres fonction G_α^+ et G_α^- suivant la formule

$$\tilde{G}_\alpha^c[A] = (G_\alpha^+[A] + G_\alpha^-[A]) + \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 (G_\alpha^+[A] - G_\alpha^-[A]) \quad (2.33)$$

où les nouvelles fonctions de Green $G_\alpha^s[A]$ ($s = \pm$) sont définies par

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha^s[A](b, a) = & \frac{-i}{2} \int d\lambda \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \lambda p^2 \right\} \\ & \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left(-\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} - eA_\mu(x) \dot{x}^\mu - \lambda m^2 - ie\lambda s \alpha E(t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Or l'intégration sur les variables p n'est rien d'autre que le facteur de Normalisation des chemins dans l'espace de configuration

$$\underbrace{\int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \lambda p^2 \right\}}_{\text{espace de phase}} = \underbrace{\int \mathcal{D}x}_{\text{espace de configuration}} \quad (2.35)$$

c'est à dire

$$\tilde{G}_\alpha^s[A](b, a) = \frac{-i}{2} \int d\lambda \int \mathcal{D}x \exp \left\{ -i \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + eA_\mu(x) \dot{x}^\mu + \lambda m^2 + ie\lambda s \alpha E(t) \right) \right\} \quad (2.36)$$

Faisons le changement de variable $\tau \rightarrow \tau/\lambda$, on obtient

$$\tilde{G}_\alpha^s[A] = \frac{-i}{2} \int d\lambda \int \mathcal{D}x \exp \left\{ -i \int_0^\lambda d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + eA_\mu(x) \dot{x}^\mu + m^2 + ies\alpha E(t) \right) \right\} \quad (2.37)$$

Pour décrire la création de paires, passons à la représentation Euclidienne des fonctions de Green en introduisant la rotation de Wick définie par $\tau \rightarrow -i\tau$, $\lambda \rightarrow -i\lambda$, $x_0 = -ix_4$, $A_0 = -iA_4$, $E(t) = iE_{eucli}(t)$ on aura en conséquence

$$\tilde{G}_\alpha^s(b, a) = \frac{-1}{2} \int d\lambda \int \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^\lambda d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu + m^2 - es\alpha E_{eucli}(t) \right) \right\} \quad (2.38)$$

Ces fonctions de Green rentrent systématiquement dans le calcul de l'action effective qui permet le calcul de la création de paires. Dans ce qui suit, nous présenterons cette action effective et expliquerons comment procéder pour en tirer profit de leur représentation intégrale de chemin au calcul physique de la création de paires.

2.3 L' Action effective

La formule de Schwinger pour l'action effective ([3]) $\Gamma [A]$ est donnée par l'expression suivante

$$\Gamma [A] = \int \frac{d\lambda}{\lambda} \text{Trace} \langle x_b | T. \exp \{ -i\lambda \mathcal{H} (x, p) \} | x_a \rangle \quad (2.39)$$

où *Trace* est une trace sur les variables extérieures x et les variables intérieures de spin. Dans le but d'unifier le spin 0 et 1/2, nous écrivons plutôt

$$\Gamma_\alpha [A] = (\Gamma_\alpha^+ [A] + \Gamma_\alpha^- [A]) + \text{trace} (\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0) (\Gamma_\alpha^+ [A] - \Gamma_\alpha^- [A]) \quad (2.40)$$

$\Gamma_\alpha^+ [A], \Gamma_\alpha^- [A]$ correspondent respectivement aux quantités de l'action effective qui dérivent de $G_\alpha^+ [A], G_\alpha^- [A]$.

Comme $\text{trace} (\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0) = 0$, on a

$$\Gamma_\alpha [A] = (\Gamma_\alpha^+ [A] + \Gamma_\alpha^- [A]) \quad (2.41)$$

avec

$$\Gamma_\alpha^s [A] = \frac{-1}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int_{x(0)=x(\lambda)} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu (x) \dot{x}^\mu - es\alpha E_{eucl} (t) \right] \right\} \quad (2.42)$$

ou bien en introduisant le changement suivant $\tau \rightarrow \lambda\tau$

$$\Gamma_\alpha^s [A] = \frac{-1}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int_{x(0)=x(1)} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^1 d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + ieA_\mu (x) \dot{x}^\mu - es\alpha\lambda E_{eucl} (t) \right] \right\} \quad (2.43)$$

(2.41) est l'expression de l'action effective en terme de l'intégrale de chemin pour le cas spin 0 ($\alpha = 0$) et spin 1/2 ($\alpha = 1$). En général, l'intégrale de chemin figurant dans (2.41) n'a pas de forme analytique que dans quelques cas spéciaux du quadré-potentiel $A_\mu (x)$ par conséquent, elle pourrait faire l'objet d'approximation telle l'approximation *WKB*.

Nous pourrions chercher $\Gamma_\alpha^s [A]$ en utilisant la trajectoire classique soumise à des conditions de périodicité (qu'on appellera solutions instantoniques- λ) et nous écrivons

$$\Gamma_\alpha^s [A] = \frac{-1}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \text{"Propagateur Instantonique"}(\lambda) \quad (2.44)$$

C'est l'objectif du chapitre suivant

Chapitre 3

Calcul de l'action effective les multi-instantons

Comme nous l'avons déjà dit, il n'est pas possible d'avoir le résultat exact de l'action effective dans le cas d'un champ quelconque. Cependant, nous pouvons obtenir de l'information en procédant au moyen des méthodes d'approximation telle que la méthode semi-classique WKB. Cette dernière use du chemin classique qui se déduit des équations classiques telles que celles de Lagrange et permet d'aller un peu plus loin dans le domaine quantique en rajoutant un facteur en plus dit le facteur des fluctuations quantiques. C'est une méthode très puissante et très adaptée dans le cas des problèmes non solubles par les méthodes analytiques. Dans ce qui suit, on se propose de l'appliquer sous de différentes formes qu'on a appelées : la méthode à n -instantons et la méthode à un seul instanton. Dans ce chapitre on utilise les valeurs propres et les vecteurs propres du déterminant des fluctuations quantiques. Cette méthode s'avère limitée dans ses applications aux champs dépendant du temps. Le deuxième chapitre utilise l'équation de Jacobi, pour résoudre cette difficulté.

La méthode des valeurs propres se base sur la recherche des valeurs propres de l'opérateur des fluctuations. On calcul le chemin classique et puis pour cette solution on évalue les fluctuations quantiques au moyen des valeurs propres de cet opérateur des fluctuations quantiques. Dans ce qui suit, nous allons exposer la méthode générale puis nous passons aux applications. Comme applications nous avons choisi deux exemples : un champ constant et un champ variable. Le calcul est fait pour une particule chargée de charge e et de masse m , spin 0 et $1/2$.

L'action effective est donné par l'équation(2.43)

$$\Gamma_{\alpha}^s[A] = \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int_{x(0)=x(1)} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^1 d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + ieA_{\mu}(x) \dot{x}^{\mu} - es\alpha\lambda E_{eucl}(t) \right] \right\} \quad (3.1)$$

L'action Euclidien s'écrit sous la forme suivante

$$S_e = \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + ieA_{\mu}(x) \dot{x}^{\mu} - es\alpha\lambda E_{eucl}(t) \right) \quad (3.2)$$

$E_{eucl}(t)$ est un champ électrique dépendant du temps dans l'espace euclidien de la forme suivante

$$E_{eucl}(t) = Ef'(\omega x_4) \quad (3.3)$$

Rappelons que l'action se définit par l'intermédiaire d'un Lagrangien

$$S_e = \int_0^1 L(x, \dot{x}) d\tau \quad (3.4)$$

où

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + ieA_{\mu}(x) \dot{x}^{\mu} - es\alpha\lambda E_{eucl}(t) \quad (3.5)$$

Recherchons le chemin classique en résolvant les équations de mouvement d'Euler-Lagrange définie par

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (3.6)$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2\lambda} \ddot{x}_{\mu} - ieF_{\mu\nu}(x) \dot{x}^{\nu} + es\alpha\lambda \partial_{\mu} E(-ix_4) = 0 \quad (3.7)$$

avec les conditions aux limites $x(0) = x(1)$.

Comme $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique, multiplions(3.7) par $4\dot{x}$ on obtient

$$\dot{x}^2 + 4es\alpha E \lambda^2 f'(\omega x_4) = \lambda^2 \quad (3.8)$$

Cette équation permet de relier la 4-vitesse au paramètre d'évolution λ et elle jouera un rôle important par la suite. Elle ne permettra à λ de prendre que des valeurs précises et discrètes auxquelles correspondent des chemins différents qu'on appellera solutions n-instantoniques.

Considérons maintenant le chemin $x(\tau)$ comme un développement autour du chemin classique solution de l'équation (3.7)

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau), \quad \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad (3.9)$$

avec $\eta(\tau)$ la déviation par rapport à ce chemin classique. A l'ordre deux de cette déviation, l'action prendra la forme suivante

$$S_e(x_{cl}(\tau) + \eta(\tau)) = S_{cl}[x_{cl}(\tau)] + \int_0^1 d\tau \eta_\mu(\hat{\tau}) M_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \eta_\nu(\hat{\tau}) \quad (3.10)$$

où $M_{\mu\nu}$ est l'opérateur des fluctuations quantiques et a la forme générale suivante

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) &= \frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{x_{cl}(\tau)} \\ &= \left[-\frac{1}{2\lambda} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} + ieF_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} + (\partial_\nu \partial_\mu A_\alpha \dot{x}^\alpha - \partial_\nu \partial_\beta A_\mu \dot{x}^\beta) - (e\alpha\lambda) \partial_\nu \partial_\mu E(-ix_4) \right] \\ &\quad \delta(\tau - \hat{\tau}) \Big|_{x_{cl}(\tau)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

En injectant ce résultat dans l'action effective on aura

$$\Gamma_\alpha^s = -\frac{1}{2} N \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \exp(-S_{cl}[x_{cl}(\tau)]) \int_{\eta(0)=\eta(1)} D\eta \exp \left\{ - \left[\int_0^1 d\tau \eta_\mu(\hat{\tau}) M_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \eta_\nu(\hat{\tau}) \right] \right\} \quad (3.12)$$

où N est le facteur de normalisation de cette action (l'action effective pour un champ nul). Ce résultat peut être aussi écrit comme

$$\Gamma_\alpha^s = -\frac{1}{2} N \int \frac{d\lambda}{\lambda} \exp(-\lambda m^2) \exp(-S_{cl}[x_{cl}(\tau)]) \left(\int D\eta \exp \left\{ \int d\hat{\tau} \left(\frac{-\dot{\eta}^2}{4\lambda} \right) \right\} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{\int D\eta \exp \left\{ \int d\hat{\tau} \eta_\mu M_{\mu\nu} \eta_\nu \right\}}{\int D\eta \exp \left\{ \int d\hat{\tau} \left(\frac{-\dot{\eta}^2}{4\lambda} \right) \right\}} \quad (3.14)$$

On sait que([4])

$$\int D\eta \exp \left[\left\{ \frac{-1}{4\lambda} \int_0^1 d\tau \dot{\eta}^2 \right\} \right] = \frac{V}{(4\pi\lambda)^2} \quad (3.15)$$

V étant le volume de l'espace et on écrit le quotient qui reste au moyen des valeurs et vecteurs propres de $M_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ donné par (3.11) et de $M_{\mu\nu,0}(\tau, \hat{\tau}) = \frac{-1}{2\lambda} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta(\tau - \hat{\tau}) \Big|_{x_{cl}(\tau)}$ le même opérateur en l'absence du champ, c'est à dire pour

$$\int d\hat{\tau} M_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \eta_\nu(\hat{\tau}) = B\eta_\mu(\tau) \quad (3.16)$$

$$\int d\hat{\tau} M_{\mu\nu,0}(\tau, \hat{\tau}) \eta_{\nu,0}(\hat{\tau}) = B\eta_{\mu,0}(\tau) \quad (3.17)$$

on a alors les relations suivantes

$$\frac{\int D\eta \exp \left\{ \int d\hat{\tau} \eta_\mu M_{\mu\nu} \eta_\nu \right\}}{\int D\eta \exp \left\{ \frac{-1}{4\lambda} \int d\hat{\tau} \dot{\eta}^2 \right\}} = \sqrt{\frac{|\det[\eta_{\mu,0}(\lambda)]|}{|\det[\eta_\mu(\lambda)]|}} = \left[\frac{\prod |B|^{-\frac{1}{2}}}{\prod |B_0|^{-\frac{1}{2}}} \right] \quad (3.18)$$

Ce qui donne pour l'action effective

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha}^s[A] &= \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{NV}{(4\pi\lambda)^2} \exp\{-S_{cl}(x_{cl}(\tau))\} \exp(-\lambda m^2) \sqrt{\frac{|\det[\eta_{\mu,0}(\lambda)]|}{|\det[\eta_{\mu}(\lambda)]|}} \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{NV}{(4\pi\lambda)^2} \exp\{-S_{cl}(x_{cl}(\tau))\} \exp(-\lambda m^2) \left[\frac{\prod |B|^{-\frac{1}{2}}}{\prod |B_0|^{-\frac{1}{2}}} \right]\end{aligned}\quad (3.19)$$

A ce niveau, il est important de noter que le chemin classique est périodique et que sa 4-vitesse est aussi périodique et par conséquent le paramètre d'évolution λ prendra via la relation (3.8) des valeurs discrètes $\lambda = \lambda_n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ceci nous contraint à ne prendre que les valeurs de λ permises par cette relation et leurs chemins correspondants seront appelés solutions n-instantoniques. L'action effective est alors une somme sur les amplitudes de chaque instanton suivant la formule : "Action effective n-instantoniques"

$$\Gamma_{\alpha}^s[A] = \frac{-1}{2} \sum_n \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{NV}{(4\pi\lambda)^2} \exp\{-S_{cl}(x_{cl}(\tau))\} \exp(-\lambda m^2) \left[\frac{\prod |B|^{-\frac{1}{2}}}{\prod |B_0|^{-\frac{1}{2}}} \right] \delta(\lambda - \lambda_n) \quad (3.20)$$

3.1 Application au champ électrique constant

3.1.1 Cas du spin 0

Nous prenons le 4-potentiel de la forme

$$A_{\mu} = (0, 0, -iE_0 x_4, 0) \quad (3.21)$$

d'où dérive le champ électrique constant dirigé suivant l'axe Z ,

$$E = (0, 0, E_0) \quad (3.22)$$

Nous cherchons d'abord la solution de l'équation de mouvement (en notation Euclidienne)

$$\frac{1}{2\lambda} \ddot{x}_{\mu} - ieF_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} = 0 \quad (3.23)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = F = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = iE_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Comme $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique cette équation représente un système d'équations différentielles couplées. Introduisons alors la transformation suivante qui permettra de le découpler

$$x(\tau) = e^{A\tau} y(\tau) \quad (3.25)$$

l'équation (3.23) devient alors

$$\frac{1}{2\lambda} \ddot{y} + \left(\frac{A}{\lambda} - ieF \right) \dot{y} + \left(\frac{A^2}{2\lambda} - ieFA \right) y = 0 \quad (3.26)$$

Posons alors

$$\frac{A}{\lambda} - ieF = 0, \quad A = ie\lambda F \quad (3.27)$$

En reportant ce dernier dans l'équation (3.26) on obtient

$$\ddot{y}(u) - A^2 y(u) = 0 \quad (3.28)$$

avec

$$A^2 = -(eE\lambda)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

ou autrement en composantes

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(u) = 0 \\ \ddot{y}_2(u) = 0 \\ \ddot{y}_3(u) + (eE\lambda)^2 y_3(u) = 0 \\ \ddot{y}_4(u) + (eE\lambda)^2 y_4(u) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Les solutions de ce système d'équations sont

$$\begin{cases} y_1(u) = B_1^1 \\ y_2(u) = B_1^2 \\ y_3(u) = B_1^3 \cos(eE\lambda u) + B_2^3 \sin(eE\lambda u) \\ y_4(u) = B_1^4 \cos(eE\lambda u) + B_2^4 \sin(eE\lambda u) \end{cases} \quad (3.31)$$

En considérant les conditions de la périodicité

$$\begin{cases} x(0) = x(1) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(1) \end{cases}, \quad (3.32)$$

et de la relation (3.25), on obtient

$$\begin{cases} y(0) = \exp(A) y(1) \\ Ay(0) + \dot{y}(0) = A \exp(A) y(1) + \exp(A) \dot{y}(1) \end{cases} \quad (3.33)$$

avec

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(eE\lambda) & -\sin(eE\lambda) \\ 0 & 0 & \sin(eE\lambda) & \cos(eE\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Dans ce cas on remplace cette dernière relation dans (3.33), on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos^2(\alpha'') & \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & 1 - \cos^2(\alpha'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_1^2 \\ B_1^3 \\ B_1^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & \sin^2(\alpha'') \\ 0 & 0 & -\sin^2(\alpha'') & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2^1 \\ B_2^2 \\ B_2^3 \\ B_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -2\alpha'' \sin^2(\alpha'') \\ 0 & 0 & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_1^2 \\ B_1^3 \\ B_1^4 \end{pmatrix} + \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \\ 0 & 0 & -2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2^1 \\ B_2^2 \\ B_2^3 \\ B_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En sommant les relations (3.35) et (3.36), on a

$$\begin{pmatrix} \sin^2(\alpha'') & \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & \sin^2(\alpha'') \\ -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & \sin^2(\alpha'') & -\sin^2(\alpha'') & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \\ 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \\ 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^3 \\ B_1^4 \\ B_2^3 \\ B_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

on pose

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha'') & \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & \sin^2(\alpha'') \\ -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & \sin^2(\alpha'') & -\sin^2(\alpha'') & -\sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \\ 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') \\ 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') & 2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & -2\alpha'' \sin(\alpha'') \cos(\alpha'') & 2\alpha'' \sin^2(\alpha'') \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

on calcule le déterminant de la matrice Λ pour trouver la valeur λ

$$\det \Lambda = 8\alpha''^2 \sin^4 \alpha'' \quad (3.39)$$

si

$$\det \Lambda = 0 \quad (3.40)$$

$$\text{on trouve } \begin{cases} \alpha'' = 0 \\ \sin \alpha'' = 0 \end{cases} \text{ avec } \alpha'' = eE\lambda$$

Il s'ensuit de là

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{eE} \quad (3.41)$$

L'équation(3.31) prend la forme suivante

$$\begin{cases} y_1(u) = 0 \\ y_2(u) = 0 \\ y_3(u) = \beta_1^3 \cos(n\pi u) + \beta_2^3 \sin(n\pi u) \\ y_3(u) = \beta_1^4 \cos(n\pi u) + \beta_2^4 \sin(n\pi u) \end{cases} \quad (3.42)$$

Comme e^{Au} dans l'équation (3.25) s'écrit

$$\exp(Au) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Au)^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(eE\lambda u) & -\sin(eE\lambda u) \\ 0 & 0 & \sin(eE\lambda u) & \cos(eE\lambda u) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

En remplaçant (3.42) et (3.43) dans(3.25) on obtient

$$\begin{cases} x_1(u) = 0 \\ x_2(u) = 0 \\ x_3(u) = \cos(n\pi u) y_3(u) - \sin(n\pi u) y_4(u) \\ x_3(u) = \sin(n\pi u) y_3(u) + \cos(n\pi u) y_4(u) \end{cases} \quad (3.44)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_1(u) = 0 \\ \dot{x}_2(u) = 0 \\ \dot{x}_3(u) = -n\pi \sin(n\pi u) y_3(u) + \cos(n\pi u) \dot{y}_3(u) - n\pi \cos(n\pi u) y_4(u) - \sin(n\pi u) \dot{y}_4(u) \\ \dot{x}_4(u) = n\pi \cos(n\pi u) y_3(u) + \sin(n\pi u) \dot{y}_3(u) - n\pi \sin(n\pi u) y_4(u) + \cos(n\pi u) \dot{y}_4(u) \end{cases} \quad (3.45)$$

l'équation $(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 = \lambda^2)$ fait que si $\dot{x}_3(0) = 0$ on a $\dot{x}_4(0) = \lambda$ et

$$\begin{cases} \dot{x}_3(0) = \dot{y}_3(0) - n\pi y_4(0) = 0 \\ \dot{x}_4(0) = n\pi y_3(0) + \dot{y}_4(0) = \lambda \end{cases} \quad (3.46)$$

avec

$$\begin{cases} y_3(0) = B_1^3 \\ y_4(0) = B_1^4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{y}_3(0) = n\pi B_2^3 \\ \dot{y}_4(0) = n\pi B_2^4 \end{cases} \quad (3.47)$$

En reportant l'équation (3.47) dans l'équation (3.46) on trouve

$$\begin{cases} B_2^3 = B_1^4 \\ B_2^4 = \frac{1}{eE} - B_1^3 \end{cases} \quad (3.48)$$

Reportons les constantes B_2^3 et B_2^4 dans l'équation (3.45), on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_3(u) = \frac{n\pi}{eE} \cos(2n\pi u) \\ \dot{x}_4(u) = -\frac{n\pi}{eE} \sin(2n\pi u) \end{cases} \quad (3.49)$$

En intégrant sur u , on trouve

$$\begin{cases} x_3(u) = \frac{1}{2eE} \cos(2n\pi u) \\ x_4(u) = \frac{1}{2eE} \sin(2n\pi u) \end{cases} \quad (3.50)$$

Calculons maintenant l'action classique S_{cl} , un simple calcul montre que cette action est nulle

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_0^1 du \left(\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + ieA_\mu \dot{x}^\mu \right) \\ &= \int_0^1 \frac{du}{4\lambda} (\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) + ie \int_0^1 du A_\mu \dot{x}^\mu \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

D'après l'équation (3.11) l'opérateur de fluctuation $M_{\mu\nu}$ dans un champ constant est donné par la forme suivante

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2\lambda} \frac{d^2}{d\tau^2} & -eE \frac{d}{d\tau} \\ 0 & 0 & eE \frac{d}{d\tau} & \frac{-1}{2\lambda} \frac{d^2}{d\tau^2} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

A partir de (3.16) on a

$$\int_0^1 d\hat{\tau} \left[\frac{-1}{2\lambda} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\hat{\tau}^2} + ieF_{\mu\nu} \frac{d}{d\hat{\tau}} \right] \delta(\tau - \hat{\tau}) \eta^\nu(\hat{\tau}) = \beta \eta_\mu(\tau) \quad (3.53)$$

Cette équation se simplifie à

$$\alpha \ddot{\eta}_\mu(\tau) - ieF \dot{\eta}_\mu(\tau) = -\beta \eta_\mu(\tau) \quad (3.54)$$

avec $\alpha' = \frac{1}{2\lambda}$

pour absorber le terme d'amortissement dans l'équation faisant la transformation

$$\eta(\tau) = e^{\dot{A}\tau} Z(\tau) \quad (3.55)$$

On obtient

$$\dot{\alpha} \ddot{Z}(\tau) + (2\dot{\alpha}\dot{A} - ieF) \dot{Z}(\tau) + (\alpha\dot{A}^2 - ieF\dot{A} + \beta) Z(\tau) = 0 \quad (3.56)$$

Posons alors

$$(2\dot{\alpha}\dot{A} - ieF) = 0 \quad (3.57)$$

on obtient alors

$$\dot{A} = \frac{ieF}{2\dot{\alpha}} = -\pi n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

En reportant (3.58) dans (3.56), on trouve

$$\ddot{Z}(\tau) + W^2 Z(\tau) = 0 \quad (3.59)$$

avec

$$W^2 = \frac{\beta}{\alpha} - \dot{A}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha'} + (\pi n)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha'} + (\pi n)^2 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

on pose

$$\omega = \frac{\beta}{\alpha'} \quad \text{et} \quad \varpi = \frac{\beta}{\alpha'} + (\pi n)^2$$

La solution de (3.59) est donnée alors par

$$\begin{cases} Z = c_1^1 \cos(\omega\tau) + c_2^1 \sin(\omega\tau) \\ Z = c_1^2 \cos(\omega\tau) + c_2^2 \sin(\omega\tau) \\ Z = c_1^3 \cos(\varpi\tau) + c_2^3 \sin(\varpi\tau) \\ Z = c_1^4 \cos(\varpi\tau) + c_2^4 \sin(\varpi\tau) \end{cases} \quad (3.61)$$

En considérant les conditions de la périodicité $\eta(0) = \eta(1)$ et $\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}(1)$, on obtient

$$\begin{cases} Z(0) = e^A Z(1) \\ \dot{A}Z(0) + \dot{Z}(0) = \dot{A}e^A Z(1) + e^A \dot{Z}(1) \end{cases} \quad (3.62)$$

avec

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

A partir des deux dernières équations, on a

$$\begin{pmatrix} (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ c_1^3 \\ c_1^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \sin(\varpi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{n-1} \sin(\varpi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \\ c_2^3 \\ c_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

et

$$\begin{pmatrix} \omega \sin(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega \sin(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-1)^n \varpi \sin(\varpi) & -\pi n (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) \\ 0 & 0 & \pi n (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) & -(-1)^n \varpi \sin(\varpi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ c_1^3 \\ c_1^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) & -(-1)^{n-1} n \pi \sin(\varpi) \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} n \pi \sin(\varpi) & \varpi (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \\ c_2^3 \\ c_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Enfin, la sommation des deux dernières équations donne

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ c_1^3 \\ c_1^4 \\ c_2^1 \\ c_2^2 \\ c_2^3 \\ c_2^4 \end{pmatrix} = \hat{\Lambda} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ c_1^3 \\ c_1^4 \\ c_2^1 \\ c_2^2 \\ c_2^3 \\ c_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

avec

$$\Phi_{11} = \begin{pmatrix} (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

$$\Phi_{12} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \sin(\varpi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{n-1} \sin(\varpi) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

$$\Phi_{21} = \begin{pmatrix} \omega \sin(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega \sin(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-1)^n \varpi \sin(\varpi) & -\pi n (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) \\ 0 & 0 & \pi n (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) & -(-1)^n \varpi \sin(\varpi) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

$$\Phi_{22} = \begin{pmatrix} \omega (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega (1 - \cos(\omega)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) & -(-1)^{n-1} n\pi \sin(\varpi) \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} n\pi \sin(\varpi) & \varpi (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi)) \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

on calcule le déterminant de la matrice \hat{A} on trouve la valeur β

$$\det \hat{A} = 16\omega^2 \varpi^2 (1 - \cos \omega)^2 (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi))^2 \quad (3.71)$$

si

$$\det \hat{A} = 0 \quad (3.72)$$

on obtient

$$\begin{cases} \omega^2 = 0 \\ \varpi^2 = 0 \\ (1 - \cos \omega)^2 = 0 \\ (1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi))^2 = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

à partir de (3.60) et (3.73) on a

si $\omega^2 = 0$ on obtient

$$\beta_k = 0 \quad (3.74)$$

si $\varpi^2 = 0$, on obtient

$$\beta_k = -\frac{1}{2} eE\pi n \quad (3.75)$$

et si $(1 - \cos \omega)^2 = 0$, on obtient

$$\beta_k = 2\pi eE \frac{k^2}{2} \quad (3.76)$$

si $(1 + (-1)^{n-1} \cos(\varpi))^2 = 0$, on obtient

$$\beta_k = 2\pi eE \left(\frac{k^2 - kn}{n} \right) \quad (3.77)$$

L'opérateur $M_{\mu\nu}^0$ pour la particule libre est

$$M_{\mu\nu}^0 = \frac{-eE}{2\pi n} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta(\tau - \hat{\tau}) \quad (3.78)$$

L'équation (3.16) fait que

$$\int_0^1 d\hat{\tau} M_{\mu\nu}^0(\tau, \hat{\tau}) \eta'(\hat{\tau}) = \beta^0 \eta_\mu(\tau) \quad (3.79)$$

d'où

$$\ddot{\eta}_\mu(\tau) + \omega_0^2 \eta_\mu(\tau) = 0 \quad (3.80)$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{2\pi n \beta^0}{eE} \quad (3.81)$$

Les solutions de cette équation sont

$$\eta(\tau) = d_1 \cos(\omega_0 \tau) + d_2 \sin(\omega_0 \tau) \quad (3.82)$$

et par conséquent

$$\dot{\eta}(\tau) = -d_1 \omega_0 \sin(\omega_0 \tau) + d_2 \omega_0 \sin(\omega_0 \tau) \quad (3.83)$$

En prenant les conditions de la périodicité $\eta(0) = \eta(1)$ et $\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}(1)$, on trouve

$$\begin{cases} d_1 = d_1 \cos(\omega_0) + d_2 \sin(\omega_0) \\ d_2 \omega_0 = -d_1 \omega_0 \sin(\omega_0) + d_2 \omega_0 \sin(\omega_0) \end{cases} \quad (3.84)$$

L'équation (3.84) s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos(\omega_0) & -\sin(\omega_0) \\ \omega_0 \sin(\omega_0) & \omega_0 (1 - \cos(\omega_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

Posons

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\omega_0) & -\sin(\omega_0) \\ \omega_0 \sin(\omega_0) & \omega_0 (1 - \cos(\omega_0)) \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

et calculons le déterminant de \hat{A}_0

$$\det \hat{A}_0 = 2\omega_0 (1 - \cos(\omega_0)) \quad (3.87)$$

Pour

$$\det \hat{A}_0 = 0 \quad (3.88)$$

on obtient

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ 1 - \cos(\omega_0) = 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

A partir (3.81) on trouve

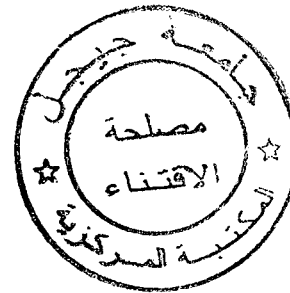
$$\beta^0 = \frac{eE}{2n\pi} \omega_0^2 \quad (3.90)$$

si $\omega_0 = 0$, on obtient

$$\beta^0 = 0 \quad (3.91)$$

si $1 - \cos(\omega_0) = 0$, on obtient

$$\beta_k^0 = 2\pi eE \frac{k^2}{n} \quad (3.92)$$



En remplaçant (3.92) et (3.77) dans (3.18) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\prod \beta^{\frac{-1}{2}}}{\prod \beta_0^{\frac{-1}{2}}} &= \sqrt{\frac{\prod_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi e E k^2 \left(\frac{k^2}{n}\right)}{\prod_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi e E \left(\frac{k^2 - nk}{n}\right)}} \\
&= \sqrt{2\pi e E n^2} \sqrt{\prod_{k=-\infty}^{-1} \frac{k}{k-n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k-n} \prod_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{k-n}} \\
&= \sqrt{2\pi e E n^2} (-1)^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Et enfin l'action effective s'écrit de la forme suivante

$$\begin{aligned}
\Gamma(A) &= \sum_n \int dt \int \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(\lambda - \lambda_n) \mathcal{N} \frac{V}{(4\pi\lambda)^2} \exp(-m^2\lambda) \left(\frac{\prod \beta^{\frac{-1}{2}}}{\prod \beta_0^{\frac{-1}{2}}} \right) \exp(-S_{cl}) \\
&= \sum_n \int dt \mathcal{N} V \frac{(eE)^3}{(2\pi)^4} \frac{\sqrt{2\pi e E}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Bien sûr le facteur $\int dt \mathcal{N} V$ est déduit à partir d'un raisonnement (régularisation) qui prend en compte la divergence due au mode zero qu'on a omis dans le calcul des valeurs propres, au facteur de normalisation près

$$\int dt \mathcal{N} V = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{eE}} \right)^3 \tag{3.95}$$

ce qui donne exactement la formule de Schwinger

$$\Gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right) \tag{3.96}$$

Cette formule concorde exactement avec celle de Schwinger[2]

3.1.2 Cas du spin 1/2

A partir l'équation (3.2) on a

$$S_e^s = \int_0^\lambda d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} + ie A_\mu(x) \dot{x}^\mu - e s \alpha \lambda E \right) \tag{3.97}$$

Pour un spin (1/2) on trouve les mêmes équations différentiels de mouvement, les mêmes solutions classiques et le même opérateur de fluctuation que le spin (0).

Cependant, on a un terme en plus dans l'action classique donné par

$$S_{cl}^s = -es\alpha\lambda E \quad (3.98)$$

On a l'équation(2.40)

$$\Gamma_\alpha[A] = (\Gamma_\alpha^+[A] + \Gamma_\alpha^-[A]) + trace(\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0)((\Gamma_\alpha^+[A] - \Gamma_\alpha^-[A])) \quad (3.99)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \frac{1}{2} \sum_n \int dt \mathcal{N} V \frac{(eE)^3}{(2\pi)^4} \frac{\sqrt{2\pi eE}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \\ &\quad Tr \left[\left(e^{(-S_{cl}^+)} + e^{(-S_{cl}^-)} \right) + trace(\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0) \left(e^{(-S_{cl}^+)} - e^{(-S_{cl}^-)} \right) \right] \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right) \\ &= \sum_n \int dt \mathcal{N} V \frac{(eE)^3}{(2\pi)^4} \frac{\sqrt{2\pi eE}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \left[\frac{(e^{e\alpha\lambda E} + e^{-e\alpha\lambda E})}{2} + \right. \\ &\quad \left. itrace(\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0) \frac{(e^{e\alpha\lambda E} - e^{-e\alpha\lambda E})}{2i} \right] \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right) \\ &= \sum_n \int dt \mathcal{N} V \frac{(eE)^3}{(2\pi)^4} \frac{\sqrt{2\pi eE}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} [\cos(e\alpha\lambda E) + itrace(\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0) \sin(e\alpha\lambda E)] \\ &\quad \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right) \end{aligned} \quad (3.100)$$

En remplaçant (λ_n) dans l'équation (3.100), on arrive à

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \sum_n \int dt \mathcal{N} V \frac{(eE)^3}{(2\pi)^4} \frac{\sqrt{2\pi eE}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} [\cos(\alpha n\pi) + itrace(\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0) \sin(\alpha n\pi)] \\ &\quad \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right) \\ &= \sum_n \int dt \mathcal{N} V \frac{(eE)^3}{(2\pi)^4} \frac{\sqrt{2\pi eE}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} (-1)^{\alpha n} \exp\left(-m^2 \frac{n\pi}{eE}\right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Cette formule concorde exactement avec celle de Schwinger[2]

3.2 Application au cas du champ électrique dépendant du temps

Dans ce qui suit nous allons essayer d'appliquer cette méthode aux cas des champs dépendent du temps

$$A_3(x_4) = -i \frac{E}{\omega} f(\omega x_4) \quad (3.102)$$

3.2.1 Les solutions classiques

les équations classiques du mouvement(4.5)sont

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = -2\lambda e E f'(\omega x_4) \dot{x}_4 \\ \ddot{x}_4 = 2\lambda e E f'(\omega x_4) \dot{x}_3 - 2es\alpha\lambda^2 E \partial_4 f'(\omega x_4) \end{cases} \quad (3.103)$$

Les solution périodiques, \dot{x}_1^{cl} et \dot{x}_2^{cl} doivent être constantes, et donc la relation(3.7) réduit à

$$(\dot{x}_3^{cl})^2 + (\dot{x}_4^{cl})^2 + 4es\alpha\lambda^2 E f'(\omega x_4) = \lambda^2 \quad (3.104)$$

Après intégration de l'équation(3.103),on aura

$$\dot{x}_3^{cl} = -\frac{2eE\lambda}{\omega} f(\omega x_4) \quad (3.105)$$

(3.103) indique qu'une équation présenté un problème bidimensionnel dans le plan (x_3, x_4) .

Utilisant (3.104 – 3.105) pour trouver \dot{x}_4^{cl}

$$\begin{aligned} \dot{x}_4^{cl} &= \lambda \sqrt{1 - (\dot{x}_3^{cl})^2 - 2s\alpha\omega E f'(\omega x_4)} \\ &= \lambda \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} (f^2(\omega x_4) + 2es\alpha E \gamma f'(\omega x_4))} \end{aligned} \quad (3.106)$$

avec $\gamma = \frac{m\omega}{eE}$, $m = \frac{1}{2}$. Nous avons choisi la constante d'intégration de manière à avoir une solution périodique.

3.2.2 L'opérateur de fluctuation et son déterminant

Pour les champs dépendants de temps de la forme (3.102), l'opérateur de fluctuation (3.11), peuvent être limité à ses composantes dans le plan (x_3, x_4) . A partir de l'équation (3.16) on a

$$\frac{-1}{2}\ddot{\eta} + ieF\dot{\eta} + G\eta = \beta\eta \quad (3.107)$$

avec

$$F \equiv F_{\mu}{}^{\nu} = \partial_{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}A^{\mu} \quad (3.108)$$

et

$$G \equiv G_{\mu}{}^{\nu} = ie(\partial^{\nu}\partial_{\mu}A_{\alpha}\dot{x}^{\alpha} - \partial^{\nu}\partial_{\alpha}A_{\mu}\dot{x}^{\alpha}) - es\alpha\lambda\partial_{\mu}\partial^{\nu}E_{Eucl}(t) \quad (3.109)$$

Introduisons la transformation suivante

$$\eta = e^{A(\tau)}Y(\tau) \quad (3.110)$$

et remplaçons dans l'équation (3.107), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{-e^{A(\tau)}}{2\lambda}\ddot{Y}(\tau) + \left(\frac{-\dot{A}(\tau)}{\lambda} + ieF\right)e^{A(\tau)}\dot{Y}(\tau) + \left(\frac{-\ddot{A}(\tau)}{2\lambda} - \frac{\dot{A}^2(\tau)}{2\lambda} + ieF\dot{A}(\tau) + G\right)e^{A(\tau)}Y(\tau) \\ & = \beta e^{A(\tau)}Y(\tau) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Posons

$$\left(\frac{-\dot{A}(\tau)}{\lambda} + ieF\right) = 0 \quad (3.112)$$

c'est à dire

$$\dot{A}(\tau) = ie\lambda F \quad (3.113)$$

Ce qui simplifie l'équation (3.111) à

$$\ddot{Y}(\tau) + \left[\ddot{A}(\tau) - \dot{A}^2(\tau) - 2\lambda G + \beta\right]Y(\tau) = 0 \quad (3.114)$$

De l'équation (3.102) et (3.108) on a

$$F = -iEf'(\omega x_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

En remplaçons ces résultats dans l'expression (3.113), il vient

$$\dot{A}(\tau) = \frac{eE\lambda}{\omega} f'(\omega x_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

En dérive cette dernière

$$\ddot{A}(\tau) = eE\lambda f''(\omega x_4) \dot{x}_4 \quad (3.117)$$

A partir de l'équation de mouvement (3.103) on a

$$f'(\omega x_4) = \frac{-1}{2eE\lambda} \frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \quad (3.118)$$

Dérivons cette équation, on trouve

$$f''(\omega x_4) = \frac{-1}{2eE\lambda\omega} \frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \quad (3.119)$$

et

$$f'''(\omega x_4) = \frac{-1}{2eE\lambda\omega^2} \frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \right] \quad (3.120)$$

Remplaçons dans (3.114), on arrive à l'équation suivante

$$\ddot{Y}(\tau) + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{4\omega^2} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right)^2 - \beta \\ -\frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) + \frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \\ \frac{1}{4\omega^2} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right)^2 + \frac{es\alpha}{2} \frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \right] - \beta \end{array} \right) Y(\tau) = 0 \quad (3.121)$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre à coefficients variables quelconques. Sa solution dans le cas d'une dépendance quelconque en temps du champ électrique n'est pas possible. Des solutions pour des configurations particulières seraient possibles. Cette méthode des multi-instantons est alors limitée par le choix des configurations particulières et de la faisabilité des calculs qui s'en suivent. Dans ce qui suit nous allons suivre une méthode plus simple n'utilisant qu'un seul instanton proposée par Schubert dans des travaux récents. Sa simplicité vient du fait qu'on intègre sur le temps propre et on élimine ainsi sa périodicité donnant naissance à ces multi-instantons.

Chapitre 4

Calcul de l'action effective par l'équation de Jacobi

Comme nous l'avons dit précédemment, la méthode des multi-instantons dépend de la solvabilité de l'équation (3.121). Il est possible de se détacher de cette contrainte en intégrant sur le temps propre qui est à l'origine des multi-instantons et en utilisant une approximation de la fonction de Bessel résultat de l'intégration, on arrive à une intégrale de chemin pour un même système physique, mais au lieu d'avoir une action quadratique nous avons une action en racine carré. c'est à dire au lieu d'avoir une reparamétrisation en temps propre de Schwinger nous aurons une reparamétrisation en temps propre de la particule. Nous dirons alors que le multi-instanton est une conséquence de cette liberté de paramétrisation. Le temps propre de la particule fixe la méthode à un seul instanton. Malheureusement, cette méthode n'est pas capable de déterminer le facteur de fluctuations quantiques. Schubert et al proposent une méthode semi-classique qui évite ce multi-instanton et permet de déduire ce facteur de fluctuations quantiques. Cette méthode a été proposée dans de travaux récents et s'avère adéquate au cas des champs dépendants du temps surtout quand on voudrait utiliser des méthodes d'approximation telle la méthode semi-classique. cette dernier est basée sur la solution de l'équation de Jacobi qui détermine l'opérateur des fluctuations à partir de la solution des équations différentielles classiques suivant la méthode de Green [5]. On calcule le chemin classique et puis pour cette solution on évalue les fluctuations quantiques de cet opérateur des fluctuation quantiques.

Dans ce qui suit, nous allons exposer la méthode générale puis nous passons l'applications,

que nous avons choisi : champ variable. Le calcul est unifié pour une particule de spin 0 et 1/2 avec un paramètre α qui prend successivement 0 et 1.

Rappelons que l'action effective est donnée par l'équation

$$\Gamma_{\alpha}^s[A] = \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int_{x(0)=x(\lambda)} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^{\lambda} d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_{\mu}(x) \dot{x}^{\mu} - es\alpha E_{eucl}(t) \right] \right\} \quad (4.1)$$

L'intégrale de chemins est prise sur des chemins spatio-temporels fermés $x^{\mu}(\tau)$ périodiques en temps propre τ , avec la période λ . Nous utilisons l'intégrale de chemin normalisée [1, 6]. L'action effective est une fonction de champ classique $A_{\mu}(x)$ qui est une fonction donnée des coordonnées spatio-temporelles. Si A_{μ} correspond à un champ électrique, alors l'action effective a une partie imaginaire dont la perturbation est associée à la production de paires à partir du vide. Cette interprétation physique vient du fait que l'action efficace est reliée à de l'amplitude de transition vide-vide par

$$\langle 0|0 \rangle = e^{i\Gamma_{\min k}}$$

La probabilité totale de création de paires s'exprime en fonction de $\Gamma_{\min k}$

$$p_{\text{creat}} = 1 - e^{-2\text{Im}\Gamma_{\min k}} \simeq 2\text{Im}\Gamma_{\min k}$$

Par exemple, si le champ électrique est constant E , l'expression de cette partie imaginaire pour des champs faibles est donné

$$\text{Im}\Gamma_{\min k} \sim V_4^{Mink} \frac{e^2 E^2}{16\pi^3} \exp \left[-\frac{m^2 \pi}{eE} \right]$$

où V_4^{Mink} est le volume spatio-temporel dans l'espace-temps de Minkowski.

Dans [4] on a montré comment calculer cette contribution principale à la partie imaginaire de $\Gamma_{\min k}$ dans le cas des champs constant, en utilisant des chemins semiclassiques circulaires $x_{\mu}^{cl}(\tau)$. et l'intégrale de chemin dans (4.1) est dans sa version Euclidienne. Dans [7] cette idée a été généralisée aux champs électriques inhomogènes et les facteurs exponentiels ont été calculés en termes des chemins semiclassiques spéciaux appelés worldline instantons.

Ces worldline instantons se réduisent aux chemins circulaires de [4] dans la limite d'un champ homogène. Nous montrons comment calculer aussi le prefactor à ces facteurs exponentiels dans

le cas inhomogène, en calculant les fluctuations quantiques des worldline instantons. On effectue d'abord l'intégral sur le temps propre λ [7, 4] dans l'équation (4.1). Puis, on calcule l'intégrale fonctionnelle et pour cela nous faisons d'abord une approximation semiclassique dans (4.1) pour n'importe quel λ et évaluons ensuite le λ intégral par la méthode des descentes. Il s'avère que la forme du worldline instantons reste le même pour n'importe quel l'ordre d'approximation. Les résultats de [7] forment la base de notre calcul. Nous utilisons des résultats d'approximations semiclassiques suivant [9, 11].

Considérons l'intégral de chemin euclidienne dans (4.1), avec l'action $S_e(x) = \int_0^\lambda L(x, \dot{x}) d\tau$ et pour le Lagrangian

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu - es\alpha E_{eucl}(t) \quad (4.2)$$

$E_{eucl}(t)$ est de la forme suivante

$$E_{eucl}(t) = Ef'(\omega x_4) \quad (4.3)$$

L'équation Euler-Lagrange du mouvement est définie par

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.4)$$

qui donne

$$\frac{1}{2} \ddot{x}_\mu - ieF_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + es\alpha \partial_\mu E_{Eucl}(t) = 0 \quad (4.5)$$

multiplions (4.5) par $4\dot{x}$ on obtient

$$\dot{x}^2 + 4es\alpha Ef'(\omega x_4) = a^2 \quad (4.6)$$

Les worldline instantons sont des solutions périodiques de (4.5) et plusieurs classes de solutions explicites ont été trouvées dans [1]. En outre, on a montré aussi que ces worldline instantons classiques déterminent le facteur exponentiel dans $\text{Im} \Gamma_{\text{min k}}$, pour des champs électriques inhomogènes. Pour calculer la contribution prefactor, nous devons calculer les fluctuations d'un worldline instanton. Pour ce faire, nous devons spécifier précisément comment nous additionnons sur toutes les boucles fermées [6]. nous allons fixe un point sur chaque boucle et permet ensuite d'évaluer des fluctuations de cette boucle tel que les fluctuations disparaissent au point fixe. L'emplacement du point fixe est alors intégré. Nous avons trouvé cette approche quelque

peu plus simple. Ainsi nous écrivons (4.1) explicitement comme

$$\Gamma_{\alpha}^s[A] = \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\int_0^{\lambda} d\tau m^2} \int_{x(\lambda)=x(0)=x^{(0)}} d^4 x^{(0)} \int_{x(\lambda)=x(0)=x^{(0)}} \mathcal{D}_x \exp \left\{ - \int_0^{\lambda} d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_{\mu}(x) \dot{x}^{\mu} - es\alpha E_{eucl}(t) \right) \right\} \quad (4.7)$$

Considérons donc $x(\tau)$ développé autour du chemin classique

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau), \quad \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad (4.8)$$

avec $\eta(\tau)$ la déviation

$$S_e(x_{cl}(\tau) + \eta(\tau)) = S_{cl}[x_{cl}(\tau)] + \int_0^1 d\tau \eta_{\mu}(\hat{\tau}) M_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \eta_{\nu}(\hat{\tau}) \quad (4.9)$$

où l'opérateur de fluctuation $M_{\mu\nu}$ a la forme générale suivante

$$M_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{d}{d\tau} Q_{\nu\mu} + Q_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} + R_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

et

$$\begin{cases} Q_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_{\mu} \partial \dot{x}_{\nu}} = ieF_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} = ie(\partial_{\nu} \partial_{\mu} A_{\alpha} \dot{x}^{\alpha} - \partial_{\nu} \partial_{\beta} A_{\mu} \dot{x}^{\beta}) - (es\alpha) \partial_{\nu} \partial_{\mu} E_{Eucl}(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

qui donne

$$M_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} + ieF_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} + ie(\partial_{\nu} \partial_{\mu} A_{\alpha} \dot{x}^{\alpha} - \partial_{\nu} \partial_{\beta} A_{\mu} \dot{x}^{\beta}) - (es\alpha) \partial_{\nu} \partial_{\mu} E_{Eucl}(t) \quad (4.12)$$

On donne les équations de mouvement pour les fluctuations comme équations Jacobi[5]

$$M_{\mu\nu} \eta_{\nu} = 0 \quad (4.13)$$

L'approximation semiclassique en mécanique quantique[11, 1] nous donne le résultat simple suivant

$$\begin{aligned} & \int_{x(\lambda)=x(0)=x^{(0)}} \mathcal{D}_x \exp \left\{ - \int_0^{\lambda} d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_{\mu}(x) \dot{x}^{\mu} - es\alpha E_{eucl}(t) \right) \right\} \\ & \simeq \frac{e^{i\theta} e^{-s[x^{cl}(\lambda)]}}{(4\pi\lambda)^2} \sqrt{\frac{|\det[\eta_{\mu,0}^{\nu}(\lambda)]|}{|\det[\eta_{\mu}^{\nu}(\lambda)]|}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Et l'action effective écrire sur la forme suivant

$$\Gamma_{\alpha}^s[A] = \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int d^4 x^{(0)} \frac{e^{i\theta} e^{-s[x^{cl}(\lambda)]}}{(4\pi\lambda)^2} \sqrt{\frac{|\det[\eta_{\mu,0}^{\nu}(\lambda)]|}{|\det[\eta_{\mu}^{\nu}(\lambda)]|}} \quad (4.15)$$

Il nous reste à calculer le déterminant $\det [\eta_{\mu}^{\nu}(\lambda)]$ qui est simplement, formé de solutions aux conditions initiales

$$\eta_{\mu}^{(\nu)}(0) = 0, \quad \dot{\eta}_{\mu}^{(\nu)}(0) = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (4.16)$$

Et où dans le cas libre $\det [\eta_{\mu,0}^{\nu}(\lambda)]$ donnée par la forme suivant, [1].

$$\det [\eta_{\mu,0}^{\nu}(\lambda)] = \lambda^4 \quad (4.17)$$

4.1 Le champ électrique dépendant du temps

Dans cette section nous allons illustrer cette méthode semi-classique ou le calcul peut être fait très explicitement avec le champ

$$A_3(x_4) = -i \frac{E}{\omega} f(\omega x_4) \quad (4.18)$$

4.1.1 Les solutions classiques

Les équation classique du mouvement(4.5) deviennent

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = -2eE f'(\omega x_4) \dot{x}_4 \\ \ddot{x}_4 = 2eE f'(\omega x_4) \dot{x}_3 - 2es\alpha E \partial_4 f'(\omega x_4) \end{cases} \quad (4.19)$$

Pour que les solution soient périodiques, \dot{x}_1^{cl} et \dot{x}_2^{cl} doivent être constantes, donc la relation(4.6) se réduit à

$$(\dot{x}_3^{cl})^2 + (\dot{x}_4^{cl})^2 + 4es\alpha E f'(\omega x_4) = a^2 \quad (4.20)$$

Après l'intégration de l'équation(4.19), on aura

$$\dot{x}_3^{cl} = -\frac{2eE}{\omega} f(\omega x_4) \quad (4.21)$$

où (4.21) est une équation différentielle dans le plan (x_3, x_4) . Utilisant (4.20) pour trouver \dot{x}_4^{cl}

$$\begin{aligned} \dot{x}_4^{cl} &= \sqrt{a^2 - (\dot{x}_3^{cl})^2 - 4es\alpha E f'(\omega x_4)} \\ &= a \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} (f^2(\omega x_4) + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2 f'(\omega x_4))} \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec

$$\tilde{\gamma} = \frac{a\omega}{2eE} = \frac{a}{2m}\gamma, \quad \gamma = \frac{m\omega}{eE} \quad (4.23)$$

Ici nous avons choisi la constante d'intégration de manière à avoir une solution périodique.

4.1.2 L'opérateur de fluctuation et son déterminant

Pour les champs dépendants de temps de la forme (4.18), l'opérateur de fluctuation (4.12), peuvent être limités à ses composantes dans le plan (x_3, x_4) .

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} & -eE f'(\omega x_4) \frac{d}{d\tau} - eE \omega f''(\omega x_4) \dot{x}_4 \\ eE f'(\omega x_4) \frac{d}{d\tau} & -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} + eE \omega f''(\omega x_4) \dot{x}_3 - eE s \alpha \omega^2 f'''(\omega x_4) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

À partir de l'équation de mouvement (4.18) on a

$$f'(\omega x_4) = \frac{-1}{2eE} \frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \quad (4.25)$$

On dérive cette équation, on trouve

$$f''(\omega x_4) = \frac{-1}{2eE\omega} \frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \quad (4.26)$$

et

$$f'''(\omega x_4) = \frac{-1}{2eE\omega} \frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \right] \quad (4.27)$$

En reportant (4.25), (4.26) et (4.27) dans (4.24) on obtient

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{d\tau^2} & \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \frac{d}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \\ - \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \frac{d}{d\tau} & -\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) - eE s \alpha \omega^2 f'''(\omega x_4) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

À partir de l'équation de Jacobi (4.13), on trouve les équations différentielles suivantes

$$-\ddot{\eta}_3^{(3,4)} + \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \dot{\eta}_4^{(3,4)} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \eta_4^{(3,4)} = 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & -\ddot{\eta}_4^{(3,4)} - \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \dot{\eta}_3^{(3,4)} - \left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \eta_4^{(3,4)} \\ & + \frac{s\alpha}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \eta_4^{(3,4)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

et (4.29) devient

$$\frac{d}{d\tau} \dot{\eta}_3^{(3,4)} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \eta_4^{(3,4)} \right) \quad (4.31)$$

Utilisant les condition initiales (4.16), on arrive à écrire

$$\dot{\eta}_3^{(4)} = \frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4} \eta_4^{(4)} \quad (4.32)$$

et

$$\dot{\eta}_3^{(3)} = \frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \eta_4^{(3,4)} + 1 \quad (4.33)$$

Ainsi (4.30) devient

$$-\ddot{\eta}_4^{(4)} - \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right)^2 \dot{\eta}_4^{(4)} - \left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \eta_4^{(4)} + \frac{s\alpha}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \right] \eta_4^{(4)} = 0 \quad (4.34)$$

$$-\ddot{\eta}_4^{(3)} - \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right)^2 \dot{\eta}_4^{(3)} - \left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \eta_4^{(3)} + \frac{s\alpha}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{x}_4} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \right) \right] \eta_4^{(3)} = \frac{\ddot{x}_3}{\dot{x}_4} \quad (4.35)$$

$\eta_{4,1} = \dot{x}_4$ est une solution de l'équation (4.34), alors $\eta_{4,2} = g\eta_{4,1}$ est une solution de cette équation. En dérivant deux fois $\eta_{4,2}$ et remplaçant dans l'équation (4.34), on trouve

$$g = \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.36)$$

ce qui donne

$$\eta_4^{(4)} = A\dot{x}_4 + B\dot{x}_4 \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.37)$$

En prenant les conditions initiales $\eta_4^{(4)}(0) = 0$ et $\dot{\eta}_4^{(4)}(0) = 1$ on trouve $A = 0, B = \dot{x}_4(0)$, en remplaçant A et B dans(4.37) on obtient

$$\eta_4^{(4)}(\tau) = \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.38)$$

La solution de l'équation (4.35) prend la forme suivant

$$\eta_4^{(3)}(\tau) = \int_0^\tau d\hat{\tau} \eta_4^{(3)}(\tau|\hat{\tau}) f(\hat{\tau}) \quad (4.39)$$

avec $f(\hat{\tau}) = \frac{\ddot{x}_3(\hat{\tau})}{\dot{x}_4(\hat{\tau})}$ et $\eta_4^{(3)}(\tau|\hat{\tau})$ est une fonction de Green défini par la forme suivante

$$\eta_4^{(3)}(\tau|\hat{\tau}) = \hat{A}\eta_{4,1}(\tau) + \hat{B}\eta_{4,2}(\tau) \quad (4.40)$$

avec les conditions de continuité et de saut suivantes

$$\begin{cases} \dot{A}\eta_{4.1}(\dot{\tau}) + \dot{B}\eta_{4.2}(\dot{\tau}) = 0 \\ \dot{A}\dot{\eta}_{4.1}(\dot{\tau}) + \dot{B}\dot{\eta}_{4.2}(\dot{\tau}) = -1 \end{cases} \quad (4.41)$$

La solution de ce système d'équations est

$$\dot{A} = \eta_{4.2}(\dot{\tau}) \quad \dot{B} = -\eta_{4.1}(\dot{\tau}) \quad (4.42)$$

En reportant ces constantes \dot{A} et \dot{B} dans (4.40) on trouve

$$\eta_4^{(3)}(\tau|\dot{\tau}) = \eta_{4.2}(\dot{\tau})\eta_{4.1}(\tau) - \eta_{4.1}(\dot{\tau})\eta_{4.2}(\tau) \quad (4.43)$$

qui donne

$$\begin{aligned} \eta_4^{(3)}(\tau) &= \int_0^\tau [\eta_{4.2}(\dot{\tau})\eta_{4.1}(\tau) - \eta_{4.1}(\dot{\tau})\eta_{4.2}(\tau)] f(\dot{\tau}) d\dot{\tau} \\ &= \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau d\dot{\tau} \left[\left(\dot{x}_4 \int_0^{\dot{\tau}} \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) \frac{\ddot{x}_3(\dot{\tau})}{\dot{x}_4(\dot{\tau})} \right] \\ &\quad - \left(\dot{x}_4 \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) \int_0^{\dot{\tau}} d\dot{\tau} \left[\dot{x}_4(\dot{\tau}) \frac{\ddot{x}_3(\dot{\tau})}{\dot{x}_4(\dot{\tau})} \right] \\ &= \dot{x}_4(\tau) \left\{ \int_0^\tau d\dot{\tau} \frac{d}{d\dot{\tau}} \left(\dot{x}_3(\dot{\tau}) \int_0^{\dot{\tau}} \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) - \int_0^{\dot{\tau}} \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right\} \\ &\quad - \left(\dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) + \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(0) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ &= \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(\tau) \int_0^{\dot{\tau}} \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ &\quad - \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(0) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ &= \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(0) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \dots \end{aligned} \quad (4.44)$$

Remplaçant (4.38) dans (4.33) on arrive à écrire

$$\dot{\eta}_3^{(4)} = \frac{d}{d\tau} \eta_3^{(4)} = \frac{\ddot{x}_3(\tau)}{\dot{x}_4(\tau)} \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.45)$$

Après l'intégration de l'équation(4.45), on aura

$$\eta_3^{(4)} = \dot{x}_4(0) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(0) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.46)$$

Remplaçant (4.44) dans (4.30) on trouve

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_3^{(3)} &= \frac{\dot{x}_3(\tau)}{\dot{x}_4(\tau)} \left\{ \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(0) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right\} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\
 &= \dot{x}_3(0) \left\{ \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_3 \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) - \int_0^\tau \dot{x}_3 \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right\} \\
 &\quad - \left\{ \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_3 \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) - \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right\} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

L'intégration cette equation donne

$$\begin{aligned}
 \eta_3^{(3)} &= \dot{x}_3(0) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_3(0) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\
 &\quad - \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

A partir de(4.48)et (4.44) on peut écrire $\eta^{(3)}$ sous la forme suivante

$$\eta^{(3)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3(0) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_3(0) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ -\dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(\tau) \dot{x}_3(0) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

et à partir de(4.38)et (4.46) on peut écrire $\eta^{(4)}$ sous la forme suivante

$$\eta^{(4)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_4(0) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(0) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Le déterminant des fluctuations est donné par la forme suivante

$$\det M = \det [\eta^{(3)}(1), \eta^{(4)}(1)] \quad (4.51)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} \dot{x}_3(0) \dot{x}_3(\lambda) \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} & & \dot{x}_4(0) \dot{x}_3(\lambda) \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ -\dot{x}_3(0) \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} & & -\dot{x}_4(0) \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ -\dot{x}_3(\lambda) \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\lambda dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} & & -\dot{x}_4(0) \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(\lambda) \dot{x}_3(0) \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} & & \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\lambda) \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ -\dot{x}_4(\lambda) \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} & & \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\lambda) \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{vmatrix} \\
&= \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\lambda) \left\{ \left[\int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right] \left[\int_0^\lambda dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\lambda dt \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right]^2 \right\} \\
&= \frac{[\dot{x}_4(0)]^3}{[\dot{x}_4(\lambda)]} \left\{ \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right] \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right] \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \lambda \right] - \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right]^2 \right\} \\
&= \frac{[\dot{x}_4(0)]^3}{[\dot{x}_4(\lambda)]} \left\{ I_1(\lambda) I_3(\lambda) + I_1(\lambda) I_4(\lambda) - [I_2(\lambda)]^2 \right\} \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{cases} I_1(\lambda) = \frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ I_2(\lambda) = \frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ I_3(\lambda) = \frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ I_4(\lambda) = \frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \lambda \end{cases} \tag{4.53}$$

4.2 L'extraction de la partie imaginaire

Jusqu'ici nous avons calculé l'action effective Euclidienne, utilisons l'expression (4.1) et écrivons sa relation avec l'action effective Minkowskienne selon les conventions suivantes :

$$e^{iS_{Mink}} = e^i \int dt L_{Mink} = e^{\int dy_4 L_{Mink}} = e^{-S_{Eucl}} = e^{-\int dy_4 L_{Eucl}}$$

Ainsi nous identifions

$$y_4 = it, L_{Mink} = -L_{Eucl} \text{ et } \Gamma_{mink} = i\Gamma_{Eucl}$$

Un peu de soin est nécessaire pour extraire la partie imaginaire Minkowski désirable

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \Gamma_{\text{min } k} &= \text{Im} \int d^3y \int dt L_{\text{Mink}}(t, y) \\
 &= -\text{Im} \int d^3y \int dt L_{\text{Eucl}}(it, y) \\
 &= \text{Re} \int d^3y \int dt L_{\text{Eucl}}(it, y) \\
 &= \text{Re} \int d^3y \int_c dy_4 L_{\text{Eucl}}(y_4, y) \\
 &= \text{Re} \Gamma_{\text{Eucl}, c}
 \end{aligned}$$

où le contour C va le long de l'axe imaginaire de $-i\infty$ ou $i\infty$, pour des champs électriques indépendants de temps, nous obtenons

$$\text{Im } \Gamma_{\text{min } k} = \int dt \text{Im } L_{\text{Mink}} = \text{Re} \int_c dy_4 L_{\text{Eucl}} = - \int dt \text{Im } L_{\text{Eucl}}$$

La partie imaginaire de la fonction de Lagrange Minkowskienne est donnée par la partie imaginaire de la fonction de Lagrange Euclidienne $L = \int d^3y \mathcal{L}$

D'autre part, pour des champs électriques dépendants de temps pour lesquels y_4 trace C peut être tourné sur l'axe réel, nous trouvons

$$\text{Im } \Gamma_{\text{min } k} = \text{Re} \int_c dy_4 L_{\text{Eucl}}(y_4) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dy_4 L_{\text{Eucl}}(y_4)$$

4.3 Application : $\mathbf{E}(t)=E\text{sech}^2(\omega t)$

Soit le potentiel de la forme suivante

$$A_3(x_4) = -i \frac{E}{w} \tan(\omega x_4) \quad (4.54)$$

créant un champ électrique de la forme

$$\mathbf{E}(t) = (0, 0, E\text{sech}^2(\omega t)) \quad (4.55)$$

4.3.1 Les solutions classiques :

En comparant la relation (4.18) avec la forme du potentiel (4.54) on peut écrire :

$$f(\omega x_4) = \tan(\omega x_4) \quad \text{et} \quad f'(\omega x_4) = \frac{1}{\cos^2(\omega x_4)} \quad (4.56)$$

Alors les équations (4.21) et (4.22) deviennent respectivement :

$$\dot{x}_3 = \frac{-2eE}{\omega} \tan(\omega x_4) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= a \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left(\tan^2(\omega x_4) + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2 \frac{1}{\cos^2(\omega x_4)} \right)} \\ &= \frac{dx_4}{d\tau} = a \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left(\frac{a^2 \sin^2(\omega x_4) + 2ws\alpha \bar{\gamma}^2}{a^2 \cos^2(\omega x_4)} \right)} \end{aligned} \quad (4.58)$$

où

$$\begin{aligned} a d\tau &= \frac{dx_4}{\sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left(\frac{a^2 \sin^2(\omega x_4) + 2ws\alpha \bar{\gamma}^2}{a^2 \cos^2(\omega x_4)} \right)}} \\ &= \frac{a \cos(\omega x_4) dx_4}{\sqrt{a^2 \cos^2(\omega x_4) - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} (a^2 \sin^2(\omega x_4) + 2ws\alpha \bar{\gamma}^2)}} \\ &= \frac{a \cos(\omega x_4) dx_4}{\sqrt{(a^2 - 4es\alpha E) - a^2 \left(\frac{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}} \sin(\omega x_4) \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(a^2 - 4es\alpha E)}} \frac{a \cos(\omega x_4) dx_4}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4es\alpha E)}} \sin(\omega x_4) \right)^2}} \end{aligned} \quad (4.59)$$

qui donne

$$\frac{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}} \omega a d\tau = \frac{d \left[\sqrt{\frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4es\alpha E)}} \sin(\omega x_4) \right]}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4es\alpha E)}} \sin(\omega x_4) \right)^2}} \quad (4.60)$$

En intégrant (4.60) on obtient

$$\frac{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}} \omega a (\tau + \tau_0) = \arcsin \left[\sqrt{\frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4es\alpha E)}} \sin(\omega x_4) \right] \quad (4.61)$$

La solution x_4 sera alors

$$x_4 = \frac{1}{w} \arcsin \left[\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{a^2 (1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin \left(\frac{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}} \omega a (\tau + \tau_0) \right) \right] \quad (4.62)$$

Remplaçons cette solution dans l'expression (4.57), elle devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{-a}{\bar{\gamma}} \frac{\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{a^2 (1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin \left(\frac{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}} \omega a (\tau + \tau_0) \right)}{\sqrt{1 - \left[\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{a^2 (1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin \left(\frac{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}}{\bar{\gamma}} \omega a (\tau + \tau_0) \right) \right]^2}} \\ &= \frac{-a}{\bar{\gamma}} \frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right)}{\sqrt{a^2 (1 + \bar{\gamma}^2) - \bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E) \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right) \right)}} \\ &= -a \frac{\sqrt{(a^2 - 4es\alpha E)} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right)}{\sqrt{(a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2) + \bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E) \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right)}} \\ &= -a \frac{\sqrt{\frac{(a^2 - 4es\alpha E)}{(a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2)}} \sin \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right)}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{(a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2)}} \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right) \right)^2}} \end{aligned} \quad (4.63)$$

En intégration

$$x_3 = \frac{1}{w} \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \text{arcsch} \left[\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{(a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2)}} \cos \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}}{\bar{\gamma}} aw (\tau + \tau_0) \right) \right] \quad (4.64)$$

Remplaçons $\bar{\gamma} = \frac{a\omega}{2eE}$ dans les solution classique on trouve

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{w} \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \text{arcsch} \left[\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{(a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2)}} \cos \left(2eE \sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1} (\tau + \tau_0) \right) \right] \\ x_4 = \frac{1}{w} \arcsin \left[\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2 (a^2 - 4es\alpha E)}{a^2 (1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin \left(2eE \sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1} (\tau + \tau_0) \right) \right] \end{cases} \quad (4.65)$$

A cause de la périodicité

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 2eE \sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1} \quad (4.66)$$

d'où

$$\lambda = \frac{\pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \quad (4.67)$$

4.3.2 Calcul du déterminant

En dérivant les solutions classiques on obtient

$$\dot{x}_3(\tau) = \frac{-a}{\bar{\gamma}} \frac{\sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4e\alpha E)}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau + \tau_0)\right)}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4e\alpha E)}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau + \tau_0)\right)} \quad (4.68)$$

$$\dot{x}_4(\tau) = \frac{\sqrt{\frac{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2}} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4e\alpha E)}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau + \tau_0)\right)}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4e\alpha E)}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau + \tau_0)\right)} \quad (4.69)$$

En remplaçant ces résultats dans l'expression (4.53), et en intégrant sur $d\tau$ [8] on obtient les solutions

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \frac{\bar{\gamma}^2 \lambda}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)} \\ I_2(\lambda) &= 0 \\ I_3(\lambda) &= \frac{-\lambda}{(1 + \bar{\gamma}^2)} \\ I_4(\lambda) &= \lambda \end{aligned} \quad (4.70)$$

Remplaçant (4.70) dans (4.52) on trouve

$$\begin{aligned} \det M &= [\dot{x}_4(0)]^2 \left\{ \left(\frac{\bar{\gamma}^2 \lambda}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)} \right) \left(\frac{-\lambda}{(1 + \bar{\gamma}^2)} \right) + \left(\frac{\bar{\gamma}^2 \lambda}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)} \right) \lambda \right\} \\ &= [\dot{x}_4(0)]^2 \left[\frac{\bar{\gamma}^4 \lambda^2}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)^2} \right] \\ &= [\dot{x}_4(0)]^2 a^2 \left[\frac{\bar{\gamma}^2 \lambda}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)} \right]^2 \\ &= [\dot{x}_4(0) a I_1(\lambda)]^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

pour écrire le déterminant en fonction de λ , nous avons écrit a en fonction de $\bar{\gamma}(\lambda)$. A partir de la définition de $\bar{\gamma}$ (4.23) on a $a = \frac{2eE}{\omega} \bar{\gamma}(\lambda)$ d'où

$$\det M = \left[\frac{2eE}{\omega} \dot{x}_4(0) \bar{\gamma}(\lambda) I_1(\lambda) \right]^2 \quad (4.72)$$

Maintenant rappelons que nous devons toujours évaluer les intégrales sur le point fixe des boucles fermées, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int d^4 x^{(0)} &= \int dx_1(0) \int dx_2(0) \int dx_3(0) \int dx_4(0) \\ &= V_3 \int d\tau_0 \dot{x}_4(0) \end{aligned} \quad (4.73)$$

où V_3 est le volume .

En remplaçant les relations(4.72) , (4.73)et (4.17) dans(4.15) , on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma_{Eucl}^s &= \frac{e^{i\theta}}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-m^2\lambda} \frac{V_3}{(4\pi\lambda)^2} \int d\tau_0 \dot{x}_4(0) e^{-s[x^{cl}(\lambda)]} \sqrt{\frac{\lambda^4}{\left[\frac{2eE}{\omega} \dot{x}_4(0) \bar{\gamma}(\lambda) I_1(\lambda)\right]^2}} \\ &= \frac{V_3}{2} \frac{e^{i\theta}}{(4\pi)^2} \frac{\omega}{4eE} \int_0^\infty \frac{d\lambda \exp[-(s[x^{cl}(\lambda)] + m^2\lambda)]}{\lambda \bar{\gamma}(\lambda) I_1(\lambda)}\end{aligned}\quad (4.74)$$

On pose

$$\Delta s = s [x^{cl}(\lambda)] + m^2\lambda \quad (4.75)$$

avec

$$\begin{aligned}s [x^{cl}(\lambda)] &= \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu \dot{x}^\mu - es\alpha E_{eucl}(t) \right] \\ &= \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{1}{4} (\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) + ieA_3 \dot{x}^3 - es\alpha E_{eucl}(t) \right] \\ &= \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{1}{4} \dot{x}_3^2 + \frac{1}{4} \dot{x}_4^2 - \frac{1}{2} \dot{x}_3^2 - es\alpha E_{eucl}(t) \right] \\ &= \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{1}{4} \dot{x}_4^2 - \frac{1}{4} \left(a^2 - \dot{x}_4^2 - \frac{4es\alpha E}{\cos^2(\omega x_4)} - es\alpha \frac{E}{\cos^2(\omega x_4)} \right) \right] \\ &= -\frac{a^2\lambda}{4} + \frac{1}{2} \int_0^\lambda d\tau \dot{x}_4^2\end{aligned}\quad (4.76)$$

calculons l'intégral $\int_0^\lambda d\tau \dot{x}_4^2$ en remplaçant \dot{x}_4 par la relation(4.68)

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda d\tau \dot{x}_4^2 &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \int_0^\lambda d\tau \frac{\left(\frac{\bar{\gamma}^2(a^2-4es\alpha E)}{a^2(1+\bar{\gamma}^2)} \right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau+\tau_0)\right)}{1 - \left(\frac{\bar{\gamma}^2(a^2-4es\alpha E)}{a^2(1+\bar{\gamma}^2)} \right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau+\tau_0)\right)} \\ &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \int_0^\lambda d\tau \frac{c \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau+\tau_0)\right)}{1 - c \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\tau+\tau_0)\right)}\end{aligned}\quad (4.77)$$

avec

$$c = \frac{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4es\alpha E)}{a^2(1 + \bar{\gamma}^2)} \quad (4.78)$$

on peut simplifier (4.77) comme

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda d\tau \dot{x}_4^2 &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \frac{2\lambda}{2\pi} \int_0^\pi dt \frac{c - c \sin^2(t) + 1 - 1}{1 - c \sin^2(t)} \\ &= \frac{\lambda a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\pi \bar{\gamma}^2} \left\{ \int_0^\pi dt + \int_0^\pi dt \frac{c-1}{1-c \sin^2(t)} \right\} \\ &= \frac{\lambda a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\pi \bar{\gamma}^2} \pi + \frac{\lambda a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\pi \bar{\gamma}^2} (c-1) \int_0^\pi \frac{dt}{1-c \sin^2(t)}\end{aligned}\quad (4.79)$$

Le calcul de l'intégral dans l'équation(4.79) par rapport à dt est donnée sur la forme suivante [8]

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dt}{1 - c \sin^2(t)} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\pi \frac{dt}{1 - \sqrt{c} \sin(t)} + \int_0^\pi \frac{dt}{1 + \sqrt{c} \sin(t)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1-c}} \arctan \frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right) - \sqrt{c}}{\sqrt{1-c}} + \frac{2}{\sqrt{1-c}} \arctan \frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right) + \sqrt{c}}{\sqrt{1-c}} \right\} \Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-c}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

En remplaçant ce résultat dans (4.79) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda d\tau \dot{x}_4^2 &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \lambda + \frac{\lambda a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\pi \bar{\gamma}^2} (c-1) \frac{\pi}{\sqrt{1-c}} \\ &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \lambda \{1 - \sqrt{1-c}\} \\ &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \lambda \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{\gamma}^2(a^2 - 4es\alpha E)}{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}} \right\} \\ &= \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \lambda \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2}{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}} \right\} \end{aligned} \quad (4.81)$$

et encore en remplaçant (4.81) dans (4.76) on obtient

$$s[x^{cl}(\lambda)] = -\frac{a^2 \lambda}{4} + \frac{1}{2} \frac{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\bar{\gamma}^2} \lambda \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2}{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}} \right\} \quad (4.82)$$

On a

$$a = 2m \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\pi}{eE\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{eE\lambda}{\pi}\right)^2}, \quad \gamma = \frac{m\omega}{eE} \quad (4.83)$$

remplaçant $a, \bar{\gamma}$ et γ par ces expressions dans la relation(4.82) on trouve

$$\begin{aligned} s[x^{cl}(\lambda)] &= -\frac{4m^2 \bar{\gamma}^2}{4 \gamma^2} \lambda + \frac{1}{2} 4m^2 \frac{\bar{\gamma}^2(1+\bar{\gamma}^2)}{\gamma^2 \bar{\gamma}^2} \lambda \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a^2 + 4es\alpha E \bar{\gamma}^2}{a^2(1+\bar{\gamma}^2)}} \right\} \\ &= \frac{m^2}{\left(\frac{m\omega}{eE}\right)^2} \lambda \left\{ \bar{\gamma}^2 + 2 - 2\sqrt{1+\bar{\gamma}^2} \sqrt{1 + \frac{s\alpha\omega^2}{eE}} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{\omega^2 \lambda} \left\{ 1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE} - s\alpha \frac{\omega^2}{eE} + \left(\frac{eE\lambda}{\pi}\right)^2 - 2\left(\frac{eE\lambda}{\pi}\right) \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{\omega^2 \lambda} \left[\sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} - \left(\frac{eE\lambda}{\pi}\right) \right]^2 - \frac{\pi^2}{\omega^2 \lambda} s\alpha \frac{\omega^2}{eE} \end{aligned} \quad (4.84)$$

En portant cette dernière dans la relation (4.75) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta s &= \frac{\pi^2}{\omega^2 \lambda} \left[\sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} - \left(\frac{eE\lambda}{\pi} \right) \right]^2 - \frac{\pi^2}{\omega^2 \lambda} s\alpha \frac{\omega^2}{eE} + m^2 \lambda \\
&= \frac{\pi^2}{\omega^2 \lambda} \left\{ 1 + \left(\frac{eE\lambda}{\pi} \right)^2 - 2 \left(\frac{eE\lambda}{\pi} \right) \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right\} \\
&= \frac{m^2 \pi}{eE} \left\{ \frac{eE\pi}{\omega^2 m^2 \lambda} + eE \frac{(eE)^2 \lambda}{\omega^2 m^2 \pi} - 2 \frac{(eE)^2}{\omega^2 m^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} + \frac{eE\lambda}{\pi} \right\} \\
&= \frac{m^2 \pi}{eE} \left\{ \frac{\pi}{eE\lambda} \frac{1}{\gamma^2} + \frac{eE\lambda}{\pi} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} + \frac{eE\lambda}{\pi} \right\} \\
&= \frac{m^2 \pi}{eE} \left\{ \frac{eE\lambda}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \right) + \frac{\pi}{eE\lambda} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right\} \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Remplaçant l'expression de $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma} = \frac{\pi}{eE\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{eE\lambda}{\pi} \right)^2} \quad (4.86)$$

dans l'expression de $I_1(\lambda)$ on obtient

$$I_1(\lambda) = \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2 \lambda^3 \quad (4.87)$$

et remplaçant (4.85), (4.86) et (4.87) dans (4.74)

$$\Gamma_{Eucl}^s = \frac{1}{2} \frac{V_3}{16\pi\omega} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3 \sqrt{1 - \left(\frac{eE\lambda}{\pi} \right)^2}} \exp \left\{ \frac{m^2 \pi}{eE} \left[\frac{eE\lambda}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \right) + \frac{\pi}{eE\lambda} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right] \right\} \quad (4.88)$$

pour calculer l'intégral par rapport à $d\lambda$ on utilise l'approximation de la phase stationnaire [10]

$$\text{Im } \Gamma_{Mink}^s = \text{Re } \Gamma_{Eucl}^s = \frac{V_3}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\omega}{4eE} \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta' s(\lambda_c) \lambda_c \bar{\gamma}(\lambda_c) I_1(\lambda_c)}} e^{-\Delta s(\lambda_c)} \quad (4.89)$$

où λ_c est le point critique qui vérifie

$$\Delta' s(\lambda_c) = 0 \implies \frac{m^2 \pi}{eE} \left\{ \frac{eE\lambda_c}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \right) + \frac{\pi}{eE\lambda_c} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right\} = 0 \quad (4.90)$$

cela implique que

$$\lambda_c = \frac{\pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \quad (4.91)$$

à partir de cette équation (λ_c) et l'expression de $\bar{\gamma}$ on a : $\bar{\gamma}(\lambda_c) = \gamma$

calculons $\Delta'' s$ et Δs pour le point critique λ_c

$$\begin{aligned}\Delta'' s(\lambda_c) &= \frac{m^2\pi}{eE} \left[\frac{\pi}{eE} \frac{1}{\gamma^2} \frac{2}{\lambda_c^3} \right] \\ &= \frac{2eEm^2(\gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\pi \gamma^2}\end{aligned}\quad (4.92)$$

et remplaçant λ_c dans la forme de Δs on obtient

$$\begin{aligned}\Delta s(\lambda_c) &= \frac{m^2\pi}{eE} \left\{ \frac{eE \frac{\pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+1}}}{\pi} \left(\frac{\gamma^2+1}{\gamma^2} \right) + \frac{\pi}{eE \frac{\pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+1}}} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right\} \\ &= \frac{m^2\pi}{eE} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2+1}}{\gamma^2} + \frac{\sqrt{\gamma^2+1}}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}} \right\} \\ &= 2 \frac{m^2\pi}{eE} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2+1} - \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}}}{\gamma^2} \right\} \frac{\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}}}{\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}}} \\ &= 2 \frac{m^2\pi}{eE} \frac{1 + s\alpha \frac{eE}{m^2}}{\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}}}\end{aligned}\quad (4.93)$$

remplaçons (4.92) et (4.93) dans (4.89) on obtient

$$\text{Im } \Gamma_{Mink}^s = \frac{V_3}{2} \frac{(eE)^{\frac{5}{2}}}{16\pi m\omega} (1 + \gamma^2)^{\frac{5}{4}} \exp \left\{ -2 \frac{m^2\pi}{eE} \frac{1 + s\alpha \frac{eE}{m^2}}{\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{1 + s\alpha \frac{\omega^2}{eE}}} \right\}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Im } \Gamma_{Mink} &= \text{Im} (\Gamma_{Mink}^+ + \Gamma_{Mink}^-) \\ &= \frac{V_3}{2} \frac{(eE)^{\frac{5}{2}}}{16\pi^3 m\omega} (1 + \gamma^2)^{\frac{5}{4}} \left[\exp \left\{ -2 \frac{m^2\pi}{eE} \frac{1 + \alpha \frac{eE}{m^2}}{\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{1 + \alpha \frac{\omega^2}{eE}}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ -2 \frac{m^2\pi}{eE} \frac{1 - \alpha \frac{eE}{m^2}}{\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{1 - \alpha \frac{\omega^2}{eE}}} \right\} \right]\end{aligned}\quad (4.94)$$

Cette méthode des valeurs propres est limitée dans ce cas par la faisabilité des calculs. En effet, cette dernière relation avec l'équation de Riccati ce solution analytiques sont limitée par le choix de la forme de la fonction f . il serait possible d'avancer encore dans les calculs en choisissons de travailler avec un seul instanton (méthode de Schubert). Il s'avère que cette méthode donne des résultats concluant en comparaison avec les résultant des autres méthodes d'approximation.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans ce travail, on s'est intéressé au calcul de l'action effective à partir des fonctions de Green correspondantes pour le spin 0 et $1/2$. Une unification en notation est présentée. Le cas spin 0 se déduit de celui de spin $1/2$ en posant le paramètre α égal à 0. Dans un premier lieu nous avons intégré sur le spin grâce au fait que la dimension de l'espace temps est réduite à 2. Le calcul du facteur de spin est alors évident et l'action effective est réduite au calcul de deux fonctions de Green scalaires contenant la projection de spin. Cette action effective est calculée dans l'approche semi-classique, exactement dans le cas du champ constant et approximativement dans le cas du champ dépendant du temps. Dans la première le multi-instanton est révélé et le calcul est mené jusqu'au bout et la formule de la création de paire de Schwinger est retrouvée. Cette même approche est présentée dans le cas du champ variable mais malheureusement les calculs se sont avérés difficiles et n'ont pas été terminés. Pour contourner cette difficulté une approche à un seul instanton proposée par Schubert pour le spin 0 est suivie. Elle utilise l'équation de Jacobi pour évaluer le facteur de fluctuations. Tous ses calculs ont été vérifiés dans le cas du spin 0 et une généralisation au spin $1/2$ est présentée. Toutes les formules données dans les travaux de Schubert ont été retrouvées avec une contribution du spin en plus. Cette dernière est insérée dès le début dans la trajectoire de l'instanton et permet une correction dans l'action et dans le facteur de fluctuations de l'instanton. Toutes nos formules s'accordent avec celles de Schubert. Notre apport dans ce chapitre c'est l'introduction des contributions du spin dans l'action effective.

Annex

1. matrice inverse $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$

Le but de cette section est de calculer l'inverse d'une matrice continue et d'un déterminant continu.

Pour un champ électrique dépendant du temps on a : $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ données par (2.15). Pour ce faire, introduisons une nouvelle matrice $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ suivant

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}(\tau_1, \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (5.1)$$

Ce qui permet d'écrire

$$G_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, s) \varepsilon(s - \hat{\tau}) ds. \quad (5.2)$$

Dans notre cas on a

$$\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) = \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \eta_{\mu\nu} - \sigma \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (5.3)$$

L'inverse de la matrice $\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ doit satisfaire à

$$\int_0^\lambda \Lambda_{\mu\nu}(\tau, s) (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (5.4)$$

et donc

$$\int_0^\lambda ds \left[\eta_{\mu\nu} \varepsilon(\tau - s) - \sigma \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) d\tau_1 \right] (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}) \quad (5.5)$$

$$\int_0^\lambda ds \left[\varepsilon(\tau - s) \Lambda_{\mu\beta}^{-1}(s, \hat{\tau}) - \sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) (\Lambda_\beta^\nu)^{-1}(s, \hat{\tau}) \right] = \eta_{\mu\alpha} \delta(\tau - \hat{\tau}) \quad (5.6)$$

Portants (5.1) dans (5.6)

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) - \sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \hat{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \hat{\tau}) \quad (5.7)$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})}{d\tau} - 2\sigma \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau, \hat{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \frac{d\delta(\tau - \hat{\tau})}{d\tau} \quad (5.8)$$

avec la condition initiale

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(0, \hat{t}) + \sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \tilde{\Omega}_3^\nu(\tau_1, \hat{t}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\hat{t}). \quad (5.9)$$

Insérons la solution générale donnée par

$$\tilde{\Omega}(\tau, \hat{t}) = e^{2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \tilde{c}(\tau, \hat{t}) \quad (5.10)$$

dans (5.8), on déduit

$$\tilde{c}(s, \hat{t}) = \int_0^s e^{-2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \hat{t}) d\tau + \tilde{c}(\hat{t}). \quad (5.11)$$

Par conséquent (5.10) devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\tau, \hat{t}) = & e^{2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} [\tilde{c}(\hat{t}) - \delta(\hat{t})] + \delta(\tau - \hat{t}) + 2\sigma \mathcal{F}(\hat{t}) \theta(\tau - \hat{t}) \\ & \times e^{-2\sigma \int_0^{\hat{t}} d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} e^{2\sigma \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Utilisons la condition initiale (5.9) et prenons en considération $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(0, \hat{t}) = \tilde{c}(\hat{t})$

$$\tilde{c}(\hat{t}) - \delta(\hat{t}) = -\sigma \frac{V^{-1}(\hat{t}) V(\lambda)}{1 + V(\lambda)} \mathcal{F}(\hat{t}), \quad (5.13)$$

où

$$V(\lambda) = e^{2\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \quad (5.14)$$

$$V^{-1}(\lambda) = e^{-2\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \quad (5.15)$$

Puis substituons (5.13) dans (5.12)

$$\tilde{\Omega}(\tau, \hat{t}) = \delta(\tau - \hat{t}) + \sigma V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{t}) - \tanh \left(\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{t}) \mathcal{F}(\hat{t}), \quad (5.16)$$

et (5.16) dans (5.2) on obtient

$$\Gamma(\tau, \hat{t}) = \frac{1}{2} V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{t}) - \tanh \left(\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{t}). \quad (5.17)$$

Dérivons la relation (5.1) par rapport à τ , la matrice inverse s'obtient comme

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}(\tau, \hat{\tau}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Omega}(\tau, \hat{\tau})}{\partial \tau} \\ &= \varepsilon^{-1}(\tau, \hat{\tau}) + \sigma^2 \mathcal{F}(\tau) V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(\sigma \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{\tau}) \mathcal{F}(\hat{\tau}) \\ &\quad + \sigma V(\tau) \delta(\tau - \hat{\tau}) V^{-1}(\hat{\tau}) \mathcal{F}(\hat{\tau}).\end{aligned}\quad (5.18)$$

2. Vérification

Prenons $\alpha = 0$ dans l'équation (4.1) on trouve l'équation suivante

$$\Gamma_0^s[A] = \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int_{x(0)=x(\lambda)} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu \right] \right\} \quad (5.19)$$

et on a dans (2.41)

$$\Gamma_\alpha[A] = \Gamma_\alpha^+[A] + \Gamma_\alpha^-[A]$$

qui donne l'équation (2-1) de [1]

$$\Gamma_0[A] = - \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int_{x(0)=x(\lambda)} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu \right] \right\} \quad (5.20)$$

L'équation de mouvement (4.5) devient

$$\frac{1}{2} \ddot{x}_\mu - ieF_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0 \quad (5.21)$$

et l'équation (4.6) s'écrit

$$\dot{x}^2 = a^2 \quad (5.22)$$

L'action effective de (4.7) prendre la forme suivante

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha^s[A] &= \frac{-1}{2} \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda m^2} \int d^4x^{(0)} \int_{x(\lambda)=x(0)=x^{(0)}} \mathcal{D}_x \\ &\quad \exp \left\{ - \int_0^\lambda d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu \right) \right\}\end{aligned}\quad (5.23)$$

qui donne l'équation (2-8) de [1]

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha^s[A] &= - \int \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\int_0^\lambda d\tau m^2} \int d^4x^{(0)} \int_{x(\lambda)=x(0)=x^{(0)}} \mathcal{D}_x \\ &\quad \exp \left\{ - \int_0^\lambda d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu \right) \right\}\end{aligned}\quad (5.24)$$

L'opérateur de fluctuations de (4.12) pour $\alpha = 0$ devient

$$M_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{d^2}{d\tau^2} + ieF_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau} + ie(\partial_\nu\partial_\mu A_\alpha\dot{x}^\alpha - \partial_\nu\partial_\beta A_\mu\dot{x}^\beta) \quad (5.25)$$

- Les solutions classiques

Les équations classiques du mouvement (4.19) pour $\alpha = 0$ deviennent

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = -2eEf'(\omega x_4)\dot{x}_4 \\ \ddot{x}_4 = 2eEf'(\omega x_4)\dot{x}_3 \end{cases} \quad (5.26)$$

pour $\alpha = 0$ l'équation (4.22) s'écrira de la même forme de l'équation (3-6) de [1]

$$\dot{x}_4^{cl} = a\sqrt{1 - \left(\frac{f(\omega x_4)}{\bar{\gamma}}\right)^2} \quad (5.27)$$

- L'opérateur de fluctuations et son déterminant

Pour $\alpha = 0$, l'opérateur de fluctuations (4.12), aura la même forme que elle de l'équation (3-13) de [1]

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} & -eEf'(\omega x_4)\frac{d}{d\tau} - eE\omega f''(\omega x_4)\dot{x}_4 \\ eEf'(\omega x_4)\frac{d}{d\tau} & -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} + eE\omega f''(\omega x_4)\dot{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{d\tau^2} & \left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4}\right)\frac{d}{d\tau} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4}\right) \\ -\left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4}\right)\frac{d}{d\tau} & -\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

L'équation (4.49) devient

$$\eta^{(3)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3(0)\dot{x}_3(\tau)\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_3(0)\int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ -\dot{x}_3(\tau)\int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(\tau)\dot{x}_3(0)\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(\tau)\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

qui donne

$$\eta^{(3)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3(0)\dot{x}_3(\tau)\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_3(0)\int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ -\dot{x}_3(\tau)\int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} + a^2\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(\tau)\dot{x}_3(0)\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(\tau)\int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

et (4.50) aura

$$\eta^{(4)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_4(0) \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \dot{x}_4(0) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

On peut écrire $\eta^{(3)}$ et $\eta^{(4)}$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} &= \dot{x}_3(0) \phi^{(3)}(\tau) - \phi^{(4)}(\tau) \\ \eta^{(4)} &= \dot{x}_4(0) \phi^{(3)}(\tau) \end{aligned} \quad (5.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \\ \phi^{(4)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3(\tau) \int_0^\tau dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} - \int_0^\tau dt \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ \dot{x}_4(\tau) \int_0^\tau \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$

qui est la même forme (3 - 15) de [1]

Le déterminant des fluctuations a la forme suivante

$$\det M = \det [\eta^{(3)}(1), \eta^{(4)}(1)] \quad (5.34)$$

Alors

$$\begin{aligned} \det M &= \dot{x}_4(0) \dot{x}_4(\lambda) \left\{ \left[\int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right] \left[\int_0^\lambda dt \frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \int_0^\lambda dt \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{[\dot{x}_4(0)]^3}{[\dot{x}_4(\lambda)]} \left\{ \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right] \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \left(\frac{[\dot{x}_3(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} + \frac{[\dot{x}_4(t)]^2}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{[\dot{x}_4(0)]^3}{[\dot{x}_4(\lambda)]} \{ a^2 [I_1(\lambda)]^2 - [I_2(\lambda)]^2 \} \end{aligned} \quad (5.35)$$

avec

$$\begin{cases} I_1(\lambda) = \frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda \frac{dt}{[\dot{x}_4(t)]^2} \\ I_2(\lambda) = \frac{\dot{x}_4(\lambda)}{\dot{x}_4(0)} \int_0^\lambda dt \frac{\dot{x}_3(t)}{[\dot{x}_4(t)]^2} \end{cases} \quad (5.36)$$

Le déterminant des fluctuations est de la même forme que l'équation (3-16) et l'équation (3-17) de [1]

3. Application : $E = E(t)$

- Les solutions classiques

Pour $\alpha = 0$ dans les solutions classiques de l'équation (4.65) donnée par l'équation (3-8) de [1]

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{w} \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \operatorname{arcsh} \left[\bar{\gamma} \cos \left(2eE \sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1} (\tau + \tau_0) \right) \right] \\ x_4 = \frac{1}{w} \arcsin \left[\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{(1 + \bar{\gamma}^2)}} \sin \left(2eE \sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1} (\tau + \tau_0) \right) \right] \end{cases} \quad (5.37)$$

- Calcul du déterminant

Pour $\alpha = 0$ le déterminant dans (4.72) prend la forme suivante

$$\det M = \left[\frac{2eE}{\omega} \dot{x}_4(0) \bar{\gamma}(\lambda) I_1(\lambda) \right]^2 \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{Eucl}^s &= \frac{e^{i\theta}}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-m^2\lambda} \frac{V_3}{(4\pi\lambda)^2} \int d\tau_0 \dot{x}_4(0) e^{-s[x^{cl}(\lambda)]} \sqrt{\frac{\lambda^4}{\left[\frac{2eE}{\omega} \dot{x}_4(0) \bar{\gamma}(\lambda) I_1(\lambda) \right]^2}} \\ &= \frac{V_3}{2} \frac{e^{i\theta}}{(4\pi)^2} \frac{\omega}{4eE} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\exp[-(s[x^{cl}(\lambda)] + m^2\lambda)]}{\bar{\gamma}(\lambda) I_1(\lambda)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pour $\alpha = 0$, l'équation (4.85) s'écrira de la même forme que l'équation (3.31) de [1]

$$\Delta s = \frac{m^2\pi}{eE} \left\{ \frac{eE\lambda}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \right) + \frac{\pi}{eE\lambda} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \right\} \quad (5.40)$$

et l'équation (4.88) prend la forme suivante

$$\Gamma_{Eucl}^s = \frac{1}{2} \frac{V_3}{16\pi\omega} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3 \sqrt{1 - \left(\frac{eE\lambda}{\pi} \right)^2}} \exp \left\{ \frac{m^2\pi}{eE} \left[\frac{eE\lambda}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \right) + \frac{\pi}{eE\lambda} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \right] \right\} \quad (5.41)$$

et λ_c dans l'équation (4.91) reste le même

$$\lambda_c = \frac{\pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \quad (5.42)$$

Les équations (4.92) et (4.93) de $\Delta^* s$ et Δs pour le point critique λ_c prennent les formes suivantes

$$\Delta^* s(\lambda_c) = \frac{2eEm^2}{\pi} \frac{(\gamma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\gamma^2} \quad (5.43)$$

et

$$\Delta s(\lambda_c) = 2 \frac{m^2 \pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1} + 1} \quad (5.44)$$

La partie imaginaire de l'action effective est alors

$$\text{Im } \Gamma_{Mink}^s = \frac{V_3}{2} \frac{(eE)^{\frac{5}{2}}}{16\pi^3 m \omega} (1 + \gamma^2)^{\frac{5}{4}} \exp \left\{ -2 \frac{m^2 \pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1} + 1} \right\} \quad (5.45)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im } \Gamma_{Mink} &= \text{Im} (\Gamma_{Mink}^+ + \Gamma_{Mink}^-) \\ &= V_3 \frac{(eE)^{\frac{5}{2}}}{16\pi^3 m \omega} (1 + \gamma^2)^{\frac{5}{4}} \exp \left\{ -2 \frac{m^2 \pi}{eE} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1} + 1} \right\} \end{aligned}$$

En conclusion, on voit bien que notre résultat s'accorde avec ceux de Schubert dans toutes les étapes. Ce qui assure que nos calculs faits suivant cette méthode en plus de la quantité de spin sont corrects.

Bibliographie

- [1] C.Schubert, Phys. Rev.D 73, 065028(2006)
- [2] J.Schwinger, Phys.Rev. 82 (1951) 664
- [3] E.B.Brezin and C.Itzykson, Phys. Rev. D2,1191(1970)
- [4] I.K. Affleck, O. Alvarez, and N. S Manton,
Nuclear Physics B197(1982)509-519
- [5] G.Bartion"Elements of Green's functions and propagation
potentiel, diffusion andwaves" Oxford Science Publication(1989)
- [6] C.Schubert,Phys.Rep.355,73 (2001).
- [7] C.Schubert, Phys. Rev.D 72, 105004(2005)
- [8] I.S Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of integrals, series,
and products, Academic press, Newyork, (1979)
- [9] S. Levit and U. Smilansky, Ann. Phys. (N.Y.) 103, 198
(1977).
- [10] B.R Holstein "Topics in Advanced Quantan méchanics"
Addisson-wesley publishing compegny (1992)
- [11] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum Mechanics,
Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets
(World Scientific, Singapore, 2004).
Complément
- [12] E.S.Fredkin and Gitman, Phys. Rev.D 44 3320 (1991).

- [13] Dmitri M. Gitman and Sh. M.Shvartsman, Phys. B 318 (1993) 122-126.
- [14] S.P. Gavrilov and D.M. Gitman, arXiv : hep-th /9603189 v1 (1996)
- [15] Dmitri M. Gitman and Stoian I.Zlatev, arXiv : hep-th /9608179 v1 (1996)
- [16] Dmitri M. Gitman, arXiv :hep-th /9608180 v1 (1996)
- [17] C. Alexandrou, R.Rosenfelder and A.W.Schreiber, arXiv : hep-th/9809101 v2 (1999)
- [18] S.Zeggari, T. Boudjedaa and L.Chetouani, Phys Scripta. vol. 61,1-7 (2001)

Résumé :

Le but de ce mémoire est de calculer l'action effective à partir des fonctions de Green correspondantes pour les particules relativistes de spin 0 et $\frac{1}{2}$ en présence d'un champ extérieur, suivant deux méthodes :

- méthode des valeurs propres basée sur les multi-instantons pour trouver le facteur de fluctuation.

- méthode proposée par Schubert pour spin 0 basée sur un seul instanton utilisant la solution de l'équation de Jacobi pour calculer ce facteur de fluctuation.

Dans le premier cas, la formule de Schwinger de l'action effective pour un champ constant est convenablement re-déduite.

Dans le deuxième cas, le calcul est généralisé d'une manière unifiée pour les deux spins 0 et $\frac{1}{2}$. Les résultats concordent avec ceux de Schubert.

Mots clef:

L'action effective, facteur de fluctuations, multi-instantons¹, instantons, les particules relativistes.

ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو حساب المقطع الفعال انطلاقاً من دوال غرين الموافقة للجسيمات النسبية ذات السبين 0 و 1/2 بوجود حقل خارجي وفقاً لطريقتين:

- طريقة القيم الذاتية التي تعتمد على متعدد اللحظات الجسيمة لإيجاد معامل الاضطراب .
- طريقة شوبرت من أجل سبين 0 التي تعتمد على جسيم لحظي واحد فقط باستخدام حل معادلة جاكوبي لحساب معامل الاضطراب.

ففي الحالة الأولى، صيغة شوينغر للمقطع الفعال من أجل حقل ثابت هي مناسبة من أجل استخلاصه. أما في الحالة الثانية، الحساب عمم بطريقة موحدة من أجل سبين 0 و 1/2. النتائج منسجمة مع نتائج شوبرت.

كلمات المفاتيح:

المقطع الفعال, معامل الاضطراب, متعدد اللحظات الجسيمة, الجسيمات النسبية, جسيم لحظي

Abstract:

The goal of this memory is to calculate the effective action starting from the corresponding functions of Green for the relativistic particles of spin 0 and $\frac{1}{2}$ in the presence of an external field, according to two methods:

- Method of the eigenvalues based on let us multi-instantons to find the factor of fluctuation.

- Method suggested by Schubert for spin 0 based on only one instanton using the solution of the equation of Jacobi to calculate this factor of fluctuation.

In the first case, the formula of Schwinger of the effective action for a constant field Re- is suitably deduced.

In the second case, calculation is generalized in a way unified for two spins 0 and $\frac{1}{2}$. The results agree with those of Schubert.

Keywords:

The effective action, the factor of fluctuation, multi-instantons, instanton, the relativistic particles.