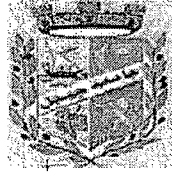


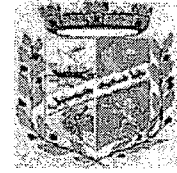
جامعة جيجل
المكتبة المركزية
رقم الجرد: TH-404

530.1/10

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Yacine Bouguerra

THEME

Systèmes à deux dimensions dépendants du temps en
présence de l'effet Aharonov-Bohm

Soutenu le : 11/05/2006

Devant le Jury :

Président :	L. Chetouani	Prof.	UM. Constantine
Rapporteur :	M. Maamache	Prof.	UFA. Setif
Examineurs :	K. Bencheikh	Prof.	UFA. Setif
	F. Benamira	MC	UM. Constantine
	A. Bounames	MC	Univ. Jijel
Invité :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique (LPTh) de Jijel.

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur Mr. Maamache Mustapha, professeur à l'université de Sétif, pour m'avoir confié ce sujet et pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je remercie également Mr. A. Bounames, maître de conférence à l'université de Jijel, qui a collaboré en tant que co-encadreur dans les différentes étapes de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont à Mr. Lyazid Chetouani professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie, également et sincèrement à M. K Bencheikh, professeur à l'université de Sétif, et Mr. F. Benamira, maître de conférence à l'université de Constantine et Mr. T. Boudjedaa, professeur à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger.

J'exprime ma gratitude à tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin dans la recherche bibliographique. Je remercie en particulier Mr. T. Boudjedaa, professeur à l'université de Jijel, qui a accepté de répondre à mes questions.

Je remercie également tous les enseignants de la post-graduation de physique théorique 2003/2004 ainsi que mes collègues étudiants de la promotion.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Yacine

Table des matières

Introduction	4
1 Théorie des invariants	6
1.1 Solution de L'équation de Schrödinger	6
1.2 Recherche d'un invariant	9
1.3 Exemples	9
1.3.1 Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables	10
1.3.2 Particule chargée dans un champ électromagnétique	13
2 Oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm	19
2.1 Effet Aharonov-Bohm (AB)	19
2.2 Oscillateur dépendant du temps à 2D en présence de l'effet AB	22
3 Equation de Pauli dépendante du temps	29
3.1 Introduction	29
3.2 Equation de Pauli dépendante du temps en présence de l'effet AB	32
3.3 Cas particuliers	43
Conclusion	45
Bibliographie	46
Annexe : Article accepté	49

Introduction

L'étude des systèmes dépendants du temps a été un sujet de grand intérêt en mécanique classique et quantique [1, 2, 3]. Le grand intérêt de ce sujet est dû au fait que les systèmes dépendants du temps peuvent être traités comme des modèles exactement solubles et peuvent être utilisés dans plusieurs applications en physique; par exemple en physique moléculaire, chimie quantique, optique, mécanique quantique. Plusieurs méthodes ont été proposées pour déterminer les solutions exactes de tels problèmes telles que, la méthode des invariants de Lewis et Riesenfeld [4, 6, 7, 8], la méthode des intégrales de chemins [9, 10, 11, 12], la méthode directe [13, 14], et le principe d'action de Schwinger [15, 16].

En utilisant l'approche des invariants, on s'intéresse dans ce travail aux solutions de deux problèmes physiques bidimensionnels dépendants du temps en présence de l'effet Aharonov-Bohm. En effet, le travail précurseur de David Bohm et son étudiant Yakir Aharonov [17] a révélé que les potentiels électromagnétiques n'ont pas été introduits seulement comme des outils mathématiques commodes pour calculer les champs, mais aussi comme des objets qui peuvent produire des effets observables. Ils peuvent affecter l'état de la matière dans des régions où les champs correspondants n'exercent aucune force. En particulier, une particule chargée se déplaçant en présence d'un potentiel vecteur acquiert une phase topologique qui peut provoquer un déplacement des franges dans une expérience d'interférences où le champ magnétique est confiné dans une région très réduite de l'espace. Ce phénomène s'appelle l'effet Aharonov-Bohm (AB); c'est un phénomène purement quantique et n'ayant aucun équivalent classique. Il est observé dans l'expérience d'interférence avec un dispositif à deux fentes de Young-Fresnel [18, 19].

Le premier chapitre introduit la théorie des invariants ainsi que la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Pour illustrer cette théorie deux exemples sont traités : (i) l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendante du temps. (ii) particule chargée de masse dépendante du temps plongée dans un champ électromagnétique dépendant du temps.

Le chapitre II traite l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendants du temps en présence de l'effet AB. La recherche de l'invariant et ses fonctions propres est basée sur un outil mathématique puissant qui est l'algèbre de Lie. La solution de l'équation de Schrödinger est déduite en terme de fonctions hypergéométriques confluentes. Des remarques intéressantes seront notées le long de ce chapitre. Ce travail a fait l'objet d'un article accepté[20].

En fin, le chapitre III traite l'équation de Pauli à deux dimensions dépendante du temps en présence de l'effet AB. Cette équation de Pauli sera déduite à partir de l'oscillateur de Dirac dans la limite non relativiste. L'algèbre de Lie nous permet de retrouver l'invariant sous forme d'une matrice diagonale (2×2), qui à son tour nous facilite le calcul des valeurs propres, fonctions propres et des phases.

On montre que les solutions irrégulières contribuent dans ce problème et des valeurs propres particulières leur correspondent.

Une conclusion et un article accepté couronne ce travail.

Chapitre 1

Théorie des invariants

1.1 Solution de L'équation de Schrödinger

Les systèmes physique décrits par des Hamiltoniens dépendants du temps sont souvent très difficiles à résoudre que se soit en mécanique classique ou quantique. Les techniques d'approximation habituelles pour traiter de tels systèmes sont la théorie de perturbation dépendante du temps (dans laquelle le terme dépendant du temps est considéré petit), l'approximation adiabatique (dans laquelle l'échelle de variation du terme dépendant du temps est long comparé à toutes les périodes caractéristiques du système), et l'approximation brusque (dans laquelle les paramètres externes sont plus rapides que la période courte du système). Les résultats de l'approximation adiabatique et brusque seront la limite des résultats rigoureux d'une théorie appelée théorie des invariants ou de Lewis-Riesenfeld [4].

La théorie des invariants, ou théorie de Lewis-Riesenfeld, à été d'un grand apport pour l'obtention de la solution "exacte" de tels systèmes. Cette théorie consiste à trouver le lien entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger[5].

Pour cela, considérons un système quantique décrit par un Hamiltonien $H(t)$ dépendant explicitement du temps, tel que son évolution obéit à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H(t) |\psi\rangle. \quad (1.1)$$

Une question naturelle qui surgit est comment obtenir les solutions d'une telle équation ?

Pour cela, supposons qu'il existe un opérateur Hermitien $I(t)$ qui vérifie l'équation de Von-Neuman

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0, \quad (1.2)$$

et la solution de (1.1) conduit à

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I|\psi\rangle) = H(t) (I|\psi\rangle), \quad (1.3)$$

qui implique que l'action de l'invariant sur un vecteur d'état $|\psi\rangle$ solution de l'équation de Schrödinger est aussi solution de l'équation Schrödinger.

L'opérateur invariant $I(t)$ admet un ensemble d'états propres $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$

$$I(t) |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \lambda |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.4)$$

lui correspondant des valeurs propres λ , où k représente tous les autres nombres quantiques nécessaire pour spécifier les états propres de $I(t)$ (car cet opérateur peut très bien avoir un spectre dégénéré). Ces fonctions propres sont orthonormées

$$\langle \varphi_{\lambda',k'} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \delta_{\lambda',\lambda} \delta_{k',k}. \quad (1.5)$$

En vertu de l'Hermiticité de $I(t)$, les valeurs propres λ sont réelles et indépendantes du temps, en effet, la dérivée par rapport au temps de l'équation (1.4) donne

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.6)$$

multiplions ensuite à gauche par $\langle \varphi_{\lambda,k'} |$, on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} \delta_{k',k} = \langle \varphi_{\lambda,k'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.7)$$

La valeur moyenne de (1.2) dans les états $\langle \varphi_{\lambda',k'} | \dots | \varphi_{\lambda,k} \rangle$ s'écrit

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda',k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle = 0, \quad (1.8)$$

qui implique que pour $\lambda' = \lambda$ (L'Hamiltonien H est borné)

$$\langle \varphi_{\lambda,k} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = 0, \quad (1.9)$$

d'où les valeurs propres sont constantes.

Le fait que les valeurs propres λ sont constantes on peut voir facilement le lien entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger, en effet l'équation (1.6) multiplié à gauche par $\langle \varphi_{\lambda',k'} |$ donne

$$(\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle, \quad (1.10)$$

qui est pour $\lambda' \neq \lambda$ permet d'écrire l'équation (1.8) sous la forme suivante

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \langle \varphi_{\lambda',k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.11)$$

On voit que si l'équation (1.11) est vérifiée pour $\lambda = \lambda'$, on aurait pu en déduire immédiatement que $| \varphi_{\lambda,k} \rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger.

Pour obtenir un résultat pareil, on utilisera le fait que les phases des états stationnaires ne sont pas fixées. On peut donc très bien multiplier $| \varphi_{\lambda,k} \rangle$ par un facteur de phase dépendant du temps :

$$| \varphi_{\lambda,k} \rangle_{\alpha} = \exp [i\alpha_{\lambda k}(t)] | \varphi_{\lambda,k} \rangle, \quad (1.12)$$

où $\alpha_{\lambda k}(t)$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie. Ces $| \varphi_{\lambda,k} \rangle_{\alpha}$ sont des états propres orthonormés de $I(t)$ associés à λ , aussi bien que les $| \varphi_{\lambda,k} \rangle$. Si on choisit bien les phases $\alpha_{\lambda k}(t)$, l'équation (1.11) sera vérifiée pour $\lambda = \lambda'$ et donc l'objectif sera atteint. Il faut juste avoir

$$\hbar \delta_{\lambda k'} \frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \varphi_{\lambda,k'} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.13)$$

Cela nous oblige aussi, de bien choisir les $| \varphi_{\lambda,k} \rangle$ tels que les deuxièmes termes de ces égalités s'annulent, pour $k \neq k'$. Cette diagonalisation est toujours possible car $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H$ est Hermitien. Une fois cette diagonalisation est effectuée la phase $\alpha_{\lambda k}(t)$ doit vérifier une simple équation :

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \varphi_{\lambda,k} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.14)$$

Sachant qu'un état propre de $I(t)$ multiplié par le facteur de phase correspondant est solution de l'équation de l'équation de Schrödinger, alors toute combinaison linéaire de cette solution est aussi solution, c'est-à-dire que la solution générale est donnée par

$$| \psi \rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} \exp [i\alpha_{\lambda k}(t)] | \varphi_{\lambda,k}(t) \rangle, \quad (1.15)$$

En résumé :

(1) L'action de l'invariant I sur une solution de l'équation de Schrödinger (1.1), nous donne une autre solution de cette équation.

(2) Cet invariant I a un spectre constant au cours de temps (indépendant du temps).

(3) Si I a un spectre non-dégénéré, toutes ses fonctions propres sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger (1.1). Et si il a un spectre dégénéré, on peut introduire des bases adaptées à chaque sous-espace propre, dont les éléments deviennent des solutions de l'équation de Schrödinger.

1.2 Recherche d'un invariant

Une fois qu'on connaît l'intérêt d'utiliser les invariants pour décrire les solutions de l'équation de Schrödinger, on peut attaquer directement le problème de trouver ces invariants. Par exemple, dans le cas d'un système décrit par des générateurs d'une algèbre de Lie $\Lambda = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ fermée

$$H(t) = \sum_{l=1}^n \beta_l(t) T_l. \quad (1.16)$$

On peut chercher un invariant de ce système (1.16) sur la même base

$$I(t) = \sum_{l=1}^n \beta_l(t) T_l, \quad (1.17)$$

en substituant $H(t)$ et $I(t)$ dans l'équation (1.2), on déduit les équations différentielles que les $\beta_l(t)$ doivent vérifier

$$i\dot{\beta}_l(t) = \hbar \sum_{j=1}^n C_l^j \beta_j(t) \quad l \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.18)$$

Ainsi, à chaque ensemble de $\beta_l(t)$ qui vérifient (1.18), est associé un invariant $I = \sum \beta_l(t) T_l$.

1.3 Exemples

Dans cette section on traite deux modèles intéressants : l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendante du temps et une particule chargée de masse dépendante du temps dans un champ électromagnétique dépendant du temps.

1.3.1 Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables

L'oscillateur harmonique dépendant du temps (OHDT) présente un grand intérêt en mécanique quantique [4, 6, 7, 8, 13, 21]. La théorie des invariants est une méthode typique et puissante pour étudier ce système, car il peut être traité d'une manière "exacte" et offre plusieurs applications pour la description des systèmes physiques.

L'équation de Schrödinger décrivant un oscillateur harmonique de masse et fréquence dépendant du temps est

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H(t) \psi, \quad (1.19)$$

où l'Hamiltonien $H(t)$ est donné par

$$H(t) = \left[\frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) q^2 \right], \quad (1.20)$$

q étant l'opérateur canonique, p son moment conjugué, la fréquence $\omega(t)$ et la masse $M(t)$ sont des fonction dépendantes du temps.

Remarquons que l'Hamiltonien $H(t)$ (1.20) s'écrit sur la base des générateurs du groupe de Lie [6, 7] $SU(1, 1)$

$$H(t) = \frac{1}{M(t)} T_1 + M(t) \omega^2(t) T_3, \quad (1.21)$$

où les générateurs de l'algèbre de Lie

$$T_1 = \frac{1}{2} p^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \{p, q\}, \quad T_3 = \frac{1}{2} q^2, \quad (1.22)$$

vérifient les relations de commutations

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (1.23)$$

Comme on l'a mentionné ci-dessus, on peut écrire l'invariant $I(t)$ sur la même base sous la forme

$$I(t) = \sum_{l=1}^3 \beta_l(t) T_l, \quad (1.24)$$

on en déduit que le système d'équations (1.18) conduit à un système d'équations linéaires simples du premier ordre pour les coefficients β_l

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1 &= -\frac{2}{M}\beta_2, \\ \dot{\beta}_2 &= M\omega_1^2\beta_1 - \frac{1}{M}\beta_3, \\ \dot{\beta}_3 &= 2M\omega^2\beta_2,\end{aligned}\tag{1.25}$$

qui se découple facilement en posant $\beta_1 = \rho^2$, et

$$\begin{aligned}\beta_2 &= -M\rho\dot{\rho}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2).\end{aligned}$$

Ainsi, l'invariant s'écrit sous la forme

$$I(t) = \frac{1}{2}\left\{\rho^2 p^2 - M\rho\dot{\rho}(pq + qp) + \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)q^2\right\},\tag{1.26}$$

où ρ vérifié l'équation auxiliaire non linéaire suivante :

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \rho\omega^2 = \frac{1}{M^2\rho^3}.\tag{1.27}$$

Pour trouver les fonctions propres de $I(t)$

$$I(t)|\phi_n\rangle = \lambda_n|\phi_n\rangle,\tag{1.28}$$

introduisons la transformation unitaire dépendante du temps

$$U(t) = \exp\left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right],\tag{1.29}$$

tel que

$$\phi_n(q, t) = U^{-1}\phi'_n(q, t),\tag{1.30}$$

alors l'équation aux valeurs propres (1.28) se transforme sous la forme suivante

$$I'\phi'_n(q, t) = \lambda_n\phi'_n(q, t),\tag{1.31}$$

où l'invariant I' est donné par

$$I' = UIU^{-1} = \frac{1}{2} \left[\rho^2 p^2 + \frac{q^2}{\rho^2} \right]. \quad (1.32)$$

Introduisons la variable $\sigma = \frac{q}{\rho}$, l'équation aux valeurs propres (1.31) prend la forme d'une équation de Schrödinger stationnaire

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma), \quad (1.33)$$

dont la solution est bien connue [8] et s'écrit en fonction des polynômes d'Hermites H_n d'ordre n

$$\varphi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{n! 2^n \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar} \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right], \quad (1.34)$$

les fonctions ϕ'_n sont reliées aux fonctions φ_n à l'aide de la relation

$$\phi'_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_n(\sigma). \quad (1.35)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ a été introduit pour garantir la condition de normalisation

$$\int \phi_n'^*(q, t) \phi_n'(q, t) dq = \int \varphi_n'^*(\sigma) \varphi_n'(\sigma) d\sigma = 1. \quad (1.36)$$

Les valeurs propres sont données par

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.37)$$

En fin, en regroupant les résultats intermédiaires ci-dessus, on obtient les fonction propres de $I(t)$

$$\phi_n(q, t) = \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right]. \quad (1.38)$$

Sachant que la phase $\alpha_n(t)$ est donnée par

$$\hbar \dot{\alpha}_n(t) = \langle \phi_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \phi_n \rangle, \quad (1.39)$$

en utilisant $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\rho}} U^{-1} \varphi_n$, ainsi que l'équation auxiliaire pour éliminer ω^2 de l'Hamiltonien on obtient la phase totale

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= \int_0^t dt' \langle \varphi_n | -\frac{I'}{\hbar M \rho^2} | \varphi \rangle, \\ \alpha_n(t) &= - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

D'où l'évolué ψ_n , solution de l'équation de Schrödinger, est donné par

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ & \times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

et la solution générale de l'équation de Schrödinger est donné par

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \sum_n C_n \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ & \times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.3.2 Particule chargée dans un champ électromagnétique

Cette exemple traite une particule de masse variable $M(t)$, de charge e , plongée dans un champ électromagnétique de symétrie axiale. Le potentiel vecteur et scalaire associé à ce champ sont

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} B(t) \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \quad (1.43)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{2}{M(t)} \eta(t) r^2, \quad (1.44)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position, \mathbf{k} est le vecteur unitaire suivant l'axe de symétrie, $\eta(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions du temps continu et arbitrairement choisies. Le champ électrique et magnétique sont donnés par les équations de Maxwell

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{M(t)} \eta(t) \mathbf{r} - \frac{1}{2} \dot{B}(t) \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B(t) \mathbf{k}. \quad (1.46)$$

Comme le mouvement de la particule suivant l'axe de symétrie est trivial, on va considérer seulement le système dans le plan (x, y) et par suite l'Hamiltonien s'écrit [4]

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + e\phi \\ &= \frac{1}{2M(t)} [p_x^2 + p_y^2] + \frac{e^2}{2M(t)} \left[\frac{B^2(t)}{4} + \eta(t) \right] (x^2 + y^2) - \frac{eB(t)}{2M(t)} [xp_y - yp_x], \end{aligned} \quad (1.47)$$

en coordonnées polaire

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

les moments conjugués sont donnés par

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{r}(xp_x + yp_y) - \frac{i\hbar}{2r}, \\ p_\varphi &= xp_y - yp_x, \end{aligned}$$

et à l'aide des relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

on déduit que

$$p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right), \quad p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad [r, p_r] = [\varphi, p_\varphi] = i\hbar. \quad (1.48)$$

D'où l'Hamiltonien s'écrit en coordonnées polaire sous la forme suivante :

$$H(t) = \frac{1}{2M(t)} \left(p_r^2 + \frac{(p_\varphi - \frac{\hbar}{2})(p_\varphi + \frac{\hbar}{2})}{r^2} \right) + \frac{M(t)}{2} \Omega^2(t) r^2 - \frac{\omega_c(t)}{2} p_\varphi, \quad (1.49)$$

où $\omega_c(t) = \frac{eB(t)}{M(t)}$ et $\Omega^2(t) = \frac{e^2 \eta(t)}{M^2(t)} + \frac{\omega_c^2(t)}{4}$.

On procède d'une manière identique à celle de l'exemple précédent, il suffit de prendre pour les générateurs de l'algèbre de Lie la base suivante

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} p_\varphi, \\ T_1 &= \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{(p_\varphi - \frac{\hbar}{2})(p_\varphi + \frac{\hbar}{2})}{r^2} \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_r r + r p_r), \\ T_3 &= \frac{1}{2} r^2, \end{aligned} \quad (1.50)$$

qui vérifient les relations de commutations suivantes

$$\begin{aligned} [T_0, T_1] &= [T_0, T_2] = [T_0, T_3] = 0, \\ [T_1, T_2] &= -2i\hbar T_1, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1, T_3] = -i\hbar T_2. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Alors, l'Hamiltonien $H(t)$ s'écrit sur cette base

$$H(t) = \frac{1}{M(t)} T_1 + M(t) \Omega^2(t) T_3 - \omega_c(t) T_0. \quad (1.52)$$

Remarquons que T_0 commute avec $H(t)$, la transformation unitaire [22] définie par

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} T_0 \int \omega_c(t) dt} \Phi, \quad (1.53)$$

réduit le problème à un oscillateur à deux dimensions H_{os}^{2D}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left[\frac{1}{M(t)} T_1 + M(t) \Omega^2(t) T_3 \right] \Phi = H_{os}^{2D} \Phi. \quad (1.54)$$

Pour trouver l'invariant il suffit de suivre la même démarche que celle de l'exemple précédent et remplace $\omega^2(t)$ par $\Omega^2(t)$ dans le système d'équations (1.25), ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -\frac{2}{M} \beta_2, \\ \dot{\beta}_2 &= M \Omega^2 \beta_1 - \frac{1}{M} \beta_3, \\ \dot{\beta}_3 &= 2M \Omega^2 \beta_2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

L'invariant s'écrit donc

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right) \right] - M \rho \dot{\rho} (p_r r + r p_r) + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) r^2 \right\}, \quad (1.56)$$

où ρ vérifié l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \rho \Omega^2 = \frac{1}{M^2 \rho^3}. \quad (1.57)$$

Pour trouver les fonctions propres de $I(t)$

$$I\phi(r, \varphi, t) = \lambda\phi(r, \varphi, t), \quad (1.58)$$

introduisons la transformation unitaire

$$U(t) = \exp\left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}r^2\right], \quad (1.59)$$

tel que

$$\phi(r, \varphi, t) = U^{-1}\phi'(r, \varphi, t), \quad (1.60)$$

l'équation aux valeurs propres (1.58) se transforme comme suit

$$I'\phi'(r, \varphi, t) = \lambda\phi'(r, \varphi, t), \quad (1.61)$$

où I' est donné par

$$I' = UIU^+ = \rho^2 T_1 + \frac{1}{\rho^2} T_3. \quad (1.62)$$

L'équation aux valeurs propres (1.61) s'écrit en coordonnées polaires

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{4} \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \right] \phi' = \lambda \phi', \quad (1.63)$$

faisons le changement de variable $\xi = \frac{r}{\rho}$, l'équation précédente se transforme comme suit

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \xi^2 \right] \varphi(\xi, \varphi) = \lambda \varphi(\xi, \varphi), \quad (1.64)$$

où

$$\phi'(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \varphi(\xi, \varphi).$$

Les solutions de cette dernière équation peuvent être factorisées comme

$$\varphi(\xi, \varphi) = f_m(\xi) e^{im\varphi}, \quad (1.65)$$

qui conduit à l'équation différentielle

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} \right) + \left(\frac{2\lambda}{\hbar^2} - \frac{\xi^2}{\hbar^2} \right) \right] f_m(\xi) = 0, \quad (1.66)$$

où le premier terme est le Laplacien en coordonnées polaire. Posons

$$f_m(\xi) = \xi^{|m|} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\hbar}\right] g_m(\xi), \quad (1.67)$$

l'équation différentielle (1.66) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{2|m|+1}{\xi} - 2\frac{\xi}{\hbar} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{2}{\hbar} [|m|+1] - \frac{2\lambda}{\hbar^2} \right) \right] g_m(\xi) = 0. \quad (1.68)$$

Sous le changement de variable $\zeta = \frac{\xi^2}{\hbar}$, l'équation (1.68) se transforme en une équation de type Kummer

$$\left[\zeta \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (|m|+1-\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \left([|m|+1] - \frac{\lambda}{2\hbar} \right) \right] g_m(\zeta) = 0. \quad (1.69)$$

Dont les solutions connues [23] sont de type hypergéométrique confluite

$$g_m(\zeta) = C_1 {}_1F_1\left(\left[|m|+1\right] - \frac{\lambda}{2\hbar}, |m|+1, \zeta\right) + C_2 \zeta^{-|m|} {}_1F_1\left(1 - \frac{\lambda}{2\hbar}, 1 - |m|, \zeta\right), \quad (1.70)$$

La dernière expression est exponentiellement divergente. Cette divergence ne sera pas évitée sauf si on pose $[|m|+1] - \frac{\lambda}{2\hbar} = -n$ [52], avec $n = 0, 1, 2, \dots$. D'où les solutions de l'équation (1.64) sont données par une combinaison linéaire de solutions régulières et irrégulières

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}(\xi, \varphi) = & A_{n,m} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\hbar}\right] \xi^{|m|} {}_1F_1\left(-n, |m|+1, \frac{\xi^2}{\hbar}\right) \exp[i m \varphi] \\ & + B_{n,m} \xi^{-|m|} {}_1F_1\left(-n-2|m|, 1-|m|, \frac{\xi^2}{\hbar}\right) \exp[i m \varphi]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

On pourrait exiger simplement que $\varphi_{n,m}(\xi, \varphi)$ soye fini à l'origine $\xi = 0$ et de cette façon, on élimine la solution irrégulière [23, 24]. c'est-à-dire

$$\varphi_{n,m}(\xi, \varphi) = A_{n,m} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\hbar}\right] \xi^{|m|} {}_1F_1\left(-n, |m|+1, \frac{\xi^2}{\hbar}\right) \exp[i m \varphi], \quad (1.72)$$

les valeurs propres λ sont donnés par

$$\lambda_{n,m} = \hbar(2n + |m| + 1). \quad (1.73)$$

Sachant que la phase $\alpha_{n,m}(t)$ peut être calculée à l'aide de l'équation (1.39), en utilisant $\phi_{n,m} = \frac{1}{\rho} U^{-1} \varphi_{n,m}$, et l'équation auxiliaire pour éliminer Ω^2 de l'Hamiltonien on obtient la phase

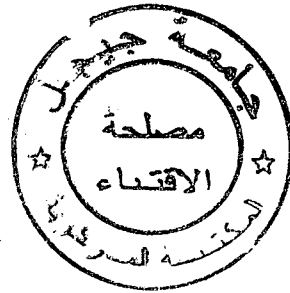
$$\begin{aligned} \alpha_{n,m}(t) &= \int_0^t dt' \langle \varphi_{n,m} | -\frac{I'}{\hbar M \rho^2} | \varphi_{n,m} \rangle, \\ \alpha_{n,m}(t) &= -(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

D'où l'évolué ψ_n , solution de l'équation de Schrödinger, est donné par

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(\xi, \varphi, t) = & C_{n,m} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 - i(2n + |m| + 1) \int_0^\infty \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ & \times \exp \left[\frac{m}{2} \int_0^t \omega_c(t') dt' \right] \xi^{|m|} {}_1F_1 \left(-n, |m| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp [im\theta], \end{aligned} \quad (1.75)$$

et la solution générale de l'équation de Schrödinger est donné par

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n,m} C_{n,m} \psi_{n,m}(r, \theta, t). \quad (1.76)$$



Chapitre 2

Oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm

2.1 Effet Aharonov-Bohm (AB)

L'effet Aharonov-Bohm est un effet de déplacement des franges d'interférence dû au potentiel vecteur d'un champ magnétique localisé dans une région infiniment petite de l'espace. Il a été démontré qu'il n'est pas possible de décrire tous les phénomènes électromagnétiques seulement en tenant compte de la force du champ [17]. Cet effet est observé dans l'expérience d'interférence avec un dispositif à deux fentes de Young-Fresnel [18, 19].

Pour mettre en évidence l'effet AB, considérons une expérience d'interférence avec un dispositif à deux fentes de Young-Fresnel (figure (1)). On place derrière une plaque et à la même distance des fentes, un solénoïde à l'intérieur duquel le champ magnétique uniforme est confiné (il ne crée absolument aucun champ à l'extérieur). On fait interférer des ondes associées à des électrons qui passent à travers ces deux fentes. A priori, la région où le champ magnétique est non nul ne se trouve pas sur la trajectoire des électrons, on pourrait donc s'attendre naïvement à ce qu'il n'y ait aucun effet observable. Mais en pratique, on observe un décalage des franges par rapport aux franges obtenues en absence du champ [18, 19] comme prévu par Aharonov et

Bohm[17] (figures (2) et (3)).

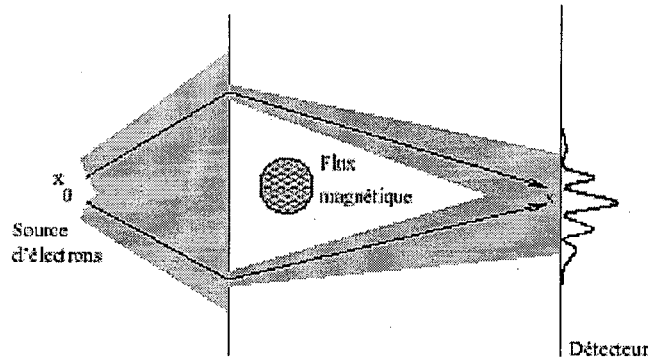


Figure (1) : L'expérience suggérée par Aharonov et Bohm

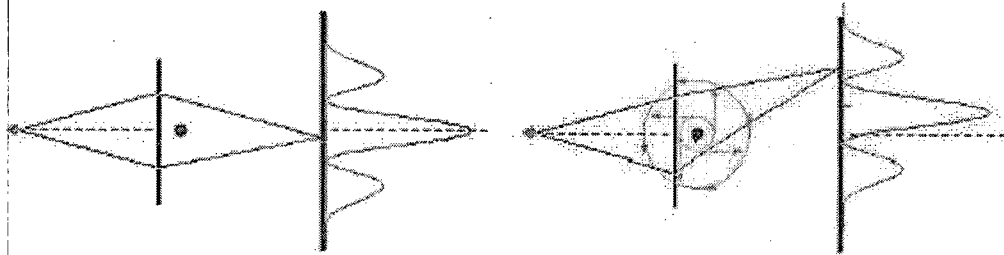


Figure (2) : Champ magnétique nul

Figure (3) : Champ magnétique non nul

En effet, on peut calculer l'expression du déphasage responsable de ce décalage. A l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique \mathbf{B} est uniforme et à l'extérieur le champ est nul. Le potentiel vecteur \mathbf{A} associé au champ magnétique \mathbf{B} par la relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et vérifie en particulier

$$\oint_{C_r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.1)$$

où C_r est un cercle de rayon r centré sur l'axe du solénoïde et orthogonal à celui-ci. Le membre de droite est le flux magnétique $\Phi(r)$ à travers la surface orientée s'appuyant sur ce cercle. Si le rayon r du cercle C_r est supérieur au rayon R du solénoïde, alors $\Phi(r) = \pi R^2 B$ ($B = |\mathbf{B}|$), et si $r < R$ le flux vaut $\Phi(r) = \pi r^2 B$. Compte tenu des symétries du problème, on peut chercher un potentiel vecteur \mathbf{A} tel que $A_r = A_z = 0$ et dont la composante A_φ ne dépend que de r . On a alors

$$2\pi r A_\varphi(r) = \Phi(r), \quad (2.2)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} A_\varphi(r) = \frac{BR^2}{2r} & \text{si } r > R, \\ A_\varphi(r) = \frac{Br}{2} & \text{si } r < R. \end{cases} \quad (2.3)$$

Un calcul explicite du rotationnel de ce potentiel vecteur confirme qu'il conduit bien au champ magnétique \mathbf{B} du solénoïde. On se place maintenant dans la limite où le rayon R du solénoïde devient infinitésimal, alors que le flux magnétique $\Phi = \pi r^2 B$ reste fixe. Le champ magnétique est donc partout nul, à l'exception de la droite correspondant au solénoïde. on peut se demander quant à l'existence d'une fonction scalaire Λ telle que $\mathbf{A} = \nabla\Lambda$, c'est-à-dire

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

on peut voir facilement qu'une telle fonction doit satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} = r A_\varphi(r). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Comme $R \rightarrow 0$, on se trouve toujours dans la région externe au solénoïde, de sorte que $r A_\varphi(r) = \frac{BR^2}{2} = \frac{\Phi}{2\pi}$. Il existe donc une fonction Λ qui satisfait toutes ces conditions, qui est donnée à une constante près par

$$\Lambda(\varphi) = \frac{\Phi\varphi}{2\pi}. \quad (2.6)$$

On peut d'ores et déjà noter que cette fonction est multivaluée, puisque les angles φ et $\varphi + 2\pi$, qui correspondent au même point de l'espace, donnent des valeurs différentes de $\Lambda(\varphi)$.

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger d'une particule ponctuelle de masse M et charge électrique e en présence d'un champ magnétique

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}))^2}{2M} + e\phi(t, r) \right] \psi, \quad (2.7)$$

sous la transformation de jauge d'un champ électromagnétique

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda(r, t), \\ \phi' = \phi - \partial_t\Lambda(r, t), \end{array} \right. \quad (2.8)$$

l'équation de Schrödinger (2.7) est invariante de jauge si la loi de transformation de la fonction d'onde ψ est

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = e^{-ie\Lambda} \psi. \quad (2.9)$$

Puisque le potentiel \mathbf{A} est de la forme $\nabla\Lambda$ partout à l'extérieur du solénoïde, les considérations relatives à l'invariance de jauge permettent d'écrire directement la solution de l'équation de Schrödinger en présence du solénoïde sous la forme :

$$\psi(t, r, z, \varphi) = e^{-ie\Lambda}\psi_0(t, r, z, \varphi), \quad (2.10)$$

où ψ_0 est une solution de l'équation de Schrödinger lorsque $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, (i.e. $\mathbf{A} = 0$). Pour les deux trajectoires

$$\psi_{1,2}(t, r, z, \varphi) = e^{-ie\Lambda_{1,2}}\psi_0(t, r, z, \varphi),$$

il est évident que l'interférence de ces deux trajectoires dépend de déphasage ($\delta = e\Lambda_1 - e\Lambda_2$), on peut écrire compte tenu de (2.4) le résultat suivant

$$\delta = e \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{r} = e \iint ds \cdot \nabla \times \mathbf{A}' = e \iint ds \cdot \mathbf{B} = e\Phi. \quad (2.11)$$

Notons que le déphasage dépend uniquement du flux magnétique se trouvant entre ces deux trajectoires. Il convient d'insister encore une fois sur le fait que cet effet a lieu même si la région, dans laquelle se trouve un champ magnétique non nul, est infinitésimale.

2.2 Oscillateur dépendant du temps à 2D en présence de l'effet AB

Dans les dernières décennies le problème des systèmes dépendants du temps ont joué un rôle important dans l'étude de plusieurs phénomènes physiques. Beaucoup d'attention a été prêtée à quelques problèmes spécifiques dépendants du temps : l'oscillateur harmonique dépendant du temps et l'oscillateur singulier dépendant du temps. En fait ces deux problèmes spécifiques ont été étudiés intensivement dans différentes directions par plusieurs d'auteurs dont les solutions sous plusieurs formes sont obtenues explicitement [6, 7, 8, 13, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

Les systèmes bidimensionnels (2D) aussi bien que les oscillateurs harmoniques dépendants du temps à 2D en présence d'un champ magnétique [14, 22, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] ont été considérés pour lesquels les opérateurs dynamiques et les fonctions d'ondes ont été

obtenus. D'autre part, l'effet Aharonov-Bohm suscite toujours un intérêt considérable avec son application dans divers phénomènes physique [19, 45, 46, 47, 48, 49, 50].

Dans ce chapitre, nous considérons un oscillateur harmonique bidimensionnel avec masse et fréquence dépendantes du temps confinées au plan (x,y) en présence de l'effet AB. L'équation de Schrödinger est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)r^2 \right] \psi, \quad (2.12)$$

où \mathbf{A} est le potentiel vecteur. Le champ magnétique \mathbf{B} , associé à l'effet AB, est supposé perpendiculaire au plan et confiné à un filament de rayon tendant vers zéro de sorte que le flux

$$\nu = -e \int_0^\infty B(r)r dr, \quad (2.13)$$

est fini et non nul. Cependant, le champ magnétique \mathbf{B} doit être de la forme [45, 46]

$$eB(r) = -\frac{\nu}{r}\delta(r). \quad (2.14)$$

Le potentiel vecteur associé \mathbf{A} dans la jauge de Coulomb est donc

$$e\mathbf{A} = -\frac{\nu}{r}\mathbf{u}_\varphi. \quad (2.15)$$

En développant $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= \mathbf{p}^2 + e^2\mathbf{A}^2 - 2e\mathbf{A}\mathbf{p} \\ (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\nu^2}{r^2} - 2i\hbar \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + i\frac{\nu}{\hbar} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

on aboutit à

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right),$$

où $p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)$ et $p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$, satisfont les relations de commutations (1.51).

L'équation (2.12) en coordonnées polaires s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2M} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right] + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \right] \psi. \quad (2.16)$$

En suivant la même démarche précédent à savoir celle de l'oscillateur harmonique, et en identifiant les générateurs de l'algèbre de Lie

$$\begin{aligned} T_1^\nu &= \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_r r + r p_r), \\ T_3 &= \frac{1}{2} r^2, \end{aligned}$$

on montre qu'ils vérifient les relations de commutations suivantes

$$[T_1^\nu, T_2] = -2i\hbar T_1^\nu, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1^\nu, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (2.17)$$

Ainsi on peut écrire l'Hamiltonien $H(t)$ comme une combinaison linéaire des générateurs T_l ($l = 1, 2, 3$)

$$H(t) = \frac{1}{M(t)} T_1^\nu + M(t) \omega^2(t) T_3. \quad (2.18)$$

D'où l'invariant $I(t)$ s'écrit sur la même base sous la forme

$$I(t) = \sum_{l=1}^3 \beta_l(t) T_l, \quad (2.19)$$

le système d'équations (1.18) conduit à un système d'équations linéaires simples du premier ordre pour les coefficient β_l

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -\frac{2}{M} \beta_2, \\ \dot{\beta}_2 &= M \omega^2 \beta_1 - \frac{1}{M} \beta_3, \\ \dot{\beta}_3 &= 2M \omega^2 \beta_2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

en posant $\beta_1 = \rho^2$, on déduit immédiatement la forme des deux autres coefficients

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -M \rho \dot{\rho}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2). \end{aligned}$$

D'où, l'invariant prend la forme

$$I(t) = \rho^2 T_1^\nu - M \rho \dot{\rho} T_2 + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) T_3, \quad (2.21)$$

où ρ vérifié une équation auxiliaire indépendante du flux magnétique ν , i.e.

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \rho \omega^2 = \frac{1}{M^2 \rho^3}. \quad (2.22)$$

Pour trouver les fonction et les valeurs propres de $I(t)$

$$I \phi_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi_m(r, \varphi, t), \quad (2.23)$$

considérons la transformation unitaire dépendante du temps

$$U(t) = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} T_3 \right], \quad (2.24)$$

qui transforme ϕ_m en ϕ'_m tel que

$$\phi_m(r, \varphi, t) = U^{-1} \phi'_m(r, \varphi, t), \quad (2.25)$$

et ainsi l'équation (2.23) se transforme en

$$I' \phi'_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi'_m(r, \varphi, t), \quad (2.26)$$

où l'invariant I' est donné par

$$I' = UIU^+ = \rho^2 T_1^\nu + \frac{1}{\rho^2} T_3. \quad (2.27)$$

D'où l'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \right] \phi'_{n,m} = \lambda_{n,m} \phi'_{n,m}, \quad (2.28)$$

le changement de variable $\xi = \frac{r}{\rho}$, permet d'écrire l'équation (2.28) sous la forme

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2 \frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \right) + \xi^2 \right] \chi_{n,m} = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}, \quad (2.29)$$

où on à introduit

$$\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m}(\xi, \varphi). \quad (2.30)$$

Les solutions de cette dernière équation peuvent être factorisées comme suit

$$\chi_{n,m}(\xi, \varphi) = f_{n,m}(\xi) e^{im\varphi}, \quad (2.31)$$

qui conduit à

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{(m + \frac{\nu}{\hbar})^2}{\xi^2} \right) + \left(\frac{2\lambda_{n,m}}{\hbar^2} - \frac{\xi^2}{\hbar^2} \right) \right] f_{n,m}(\xi) = 0. \quad (2.32)$$

Les solutions hypergéométriques confluentes de l'Eq. (2.32) sont les mêmes solutions le l'équation (1.64) où on a remplacé m par $m + \frac{\nu}{\hbar}$ [23]. Alors, les

fonctions propres régulières à l'origine sont données par [51]

$$\chi_{n,m}(\xi, \varphi) = A_{n,m} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \xi^{|m + \frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi], \quad (2.33)$$

dont les valeurs propres constantes associées sont données par

$$\lambda_{n,m} = \hbar \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.34)$$

Pour calculer la phase, il suffit de substituer l'Hamiltonien (2.18) du système dans l'équation (1.14), qui conduit à

$$\hbar \dot{\alpha}(t) = \langle \phi_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2M} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right] - \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 | \phi_{n,m} \rangle,$$

en utilisant l'Eq.(2.25), la phase s'écrit

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | U \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2\frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \right\} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sachant que

$$U \frac{\partial}{\partial r} U^+ \phi'_{n,m} = \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r + \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi'_{n,m}, \quad (2.36)$$

$$U \frac{\partial^2}{\partial r^2} U^+ \phi'_{n,m} = \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} r^2 + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi'_{n,m}, \quad (2.37)$$

et

$$U \frac{\partial}{\partial t} U^+ \phi'_{n,m} = \left(i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 + i \frac{M\ddot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 - i \frac{M\dot{\rho}^2}{2\hbar\rho^2} r^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi'_{n,m}. \quad (2.38)$$

L'équation (2.35) devient

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | \left\{ i\hbar \left(i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 + i \frac{M\ddot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 - i \frac{M\dot{\rho}^2}{2\hbar\rho^2} r^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \right. \\ & + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} r^2 + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \\ & + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r + \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2 \frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \\ & \left. - \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \right\} | \phi'_{n,m} \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{M\dot{\rho}}{\rho} + \frac{M\ddot{\rho}}{\rho} \right) r^2 \right. \\ & + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \\ & + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2 \frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \\ & \left. - \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \right\} | \phi'_{n,m} \rangle, \end{aligned} \quad (2.40)$$

en utilisant l'équation auxiliaire (2.22), il vient

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2M\rho^4} r^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2 \frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \right\} | \phi'_{n,m} \rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le changement de variable $\xi = \frac{r}{\rho}$, implique $\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \varphi_{n,m}(\xi, \varphi)$ et $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$,
implique

$$\hbar\dot{\alpha}(t) = \langle \phi'_{n,m} | -\frac{I'}{M\rho^2} | \phi'_{n,m} \rangle,$$

qui finalement, donne pour la phase

$$\alpha_{n,m}(t) = - \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2}. \quad (2.42)$$

Enfin, les solutions exactes de l'équation de Schrödinger (2.12) en coordonnées polaires sont données par

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(\xi, \varphi, t) = & \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 \right] \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ & \times \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi], \end{aligned} \quad (2.43)$$

qui réécrites en fonction des polynômes de Laguerre [52] donne

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(\xi, \varphi, t) = & \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 \right] \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ & \times \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{n! \Gamma \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)}{\Gamma \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 + n \right)} L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \exp [im\varphi], \end{aligned} \quad (2.44)$$

où $A_{n,m}$ sont des constantes reliées aux conditions initiales.

On remarquons que, en l'absence de l'effet AB $\nu = 0$, la solution (2.44) est réduite à la solution de oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D. D'autre part, nous pouvons faire une observation intéressante, si le flux magnétique est quantifié, c'est-à-dire $\frac{\nu}{\hbar} = \text{nombre entier}$, les fonctions d'ondes (2.44) coïncident exactement avec la solution de oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D.

Chapitre 3

Equation de Pauli dépendante du temps

3.1 Introduction

Dans le cas non relativiste, le potentiel parabolique $V = \frac{1}{2}M\omega r^2$ est souvent utilisé pour décrire des systèmes confinés. Pour le cas relativiste, de tels systèmes sont décrits par l'oscillateur de Dirac [53, 54, 55].

L'oscillateur de Dirac a été introduit pour la première fois par Moshinsky et Szczepaniak [53]. L'idée de base est que l'impulsion \mathbf{p} est remplacée dans l'équation de Dirac libre par $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - iM\omega\beta\mathbf{r}$ où \mathbf{r} est le vecteur position, M la masse de la particule et ω la fréquence de l'oscillateur. L'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'attention et a plusieurs applications physiques[56], en particulier dans la physique des semi-conducteurs [54]. A la limite non relativiste, l'oscillateur de Dirac devient un oscillateur harmonique avec un terme de couplage spin-orbite.

Le comportement quantique non relativiste d'une particule chargée de spin 1/2 en présence d'un champ magnétique a une grande importance dans beaucoup de contextes en physique. Les fonctions d'ondes de ce système sont les solutions de l'équation de Pauli, qui a deux composantes correspondant aux deux orientations possibles de spin. Cette équation est obtenue dans la limite non relativiste de l'équation de Dirac.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la limite non relativiste de l'oscillateur de Dirac en

présence de l'effet AB ce qui correspond à l'équation de Pauli en présence de l'effet Aharonov Bohm. Une fois l'Hamiltonien de Pauli obtenu on fait dépendre les paramètres (masse et fréquence) du temps et enfin on résout ce problème à l'aide de la théorie des invariants. On montre que le spectre d'énergie dépend du spin de la particule et du paramètre du flux magnétique associé à l'effet AB. Pour certains cas particuliers, On montre que les solutions irrégulières rejetées dans le chapitre précédent contribuent et leur correspondent des valeurs propres particulières. D'autre part, on note que l'équation de Pauli dépendante du temps en présence d'un champ magnétique a fait l'objet de plusieurs travaux en utilisant la supersymétrie[57, 58] ou les transformations unitaires[59].

Commençons par écrire l'équation de Dirac stationnaire pour une particule de masse M en terme de spineur à deux composantes Ψ [50]

$$E\Psi = (\beta\gamma\pi + \beta M)\Psi, \quad (3.1)$$

où $\pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ est le couplage minimal et \mathbf{A} le potentiel vecteur .

L'oscillateur de Dirac à deux dimensions est défini en remplaçant l'impulsion \mathbf{p} dans l'équation de Dirac libre par[53, 55]

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - iM\omega\beta\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

Le champ magnétique \mathbf{B} associé à l'effet Aharonov-Bohm est supposé perpendiculaire au plan (r, φ) et confiné dans un filament de rayon infinitésimal tendant vers zéro. On doit alors prendre la forme de \mathbf{B} comme dans le chapitre précédent

$$e\mathbf{B} = -\frac{\nu}{r}\delta(r)\mathbf{u}_z, \quad (3.3)$$

le potentiel vecteur \mathbf{A} correspondant, en utilisant la jauge de Coulomb, est

$$e\mathbf{A} = -\frac{\nu}{r}\mathbf{u}_\varphi. \quad (3.4)$$

Ainsi, l'équation stationnaire pour l'oscillateur de Dirac à 2D en présence de l'effet AB est

$$E\Psi = [\beta\gamma. (\pi - iM\omega\beta\mathbf{r}) + \beta M]\Psi, \quad (3.5)$$

il est préférable, en 2D de définir les matrices β et $\beta\gamma_i$ en terme de matrices de Pauli comme

$$\beta\gamma_1 = \sigma^1, \quad \beta\gamma_2 = s\sigma^2, \quad \beta = \sigma^3, \quad s = \pm 1, \quad (3.6)$$

l'équation (3.5) peut s'écrire sous la forme

$$\beta [\gamma (\pi - iM\omega\beta\mathbf{r}) + M - \beta E] \Psi = 0. \quad (3.7)$$

En appliquant à l'équation précédente, l'opérateur

$$[\gamma \cdot (\pi - iM\omega\beta\mathbf{r}) - M - \beta E] \beta,$$

nous conduit à l'équation

$$[\gamma \cdot (\pi - iM\omega\beta\mathbf{r}) \gamma \cdot (\pi - iM\omega\beta\mathbf{r}) - M^2 + E^2] \Psi = 0, \quad (3.8)$$

le premier terme dans l'équation (3.8) peut se développer comme suit

$$\begin{aligned} I &= (\gamma \cdot \pi - iM\omega\gamma\beta\mathbf{r}) (\gamma \cdot \pi - iM\omega\gamma\beta\mathbf{r}) \\ &= \gamma\pi\gamma\pi - iM\omega\gamma \cdot \pi\gamma\beta\mathbf{r} - iM\omega\gamma\beta\mathbf{r}\gamma\pi - M^2\omega^2r^2, \end{aligned}$$

qui se décompose de la façon suivante

$$I = \gamma\pi\gamma\pi - iM\omega\gamma^i\pi_i\gamma^j r_j\beta + iM\omega\gamma^j r_j\gamma^i\pi_i\beta - M^2\omega^2r^2, \quad i, j = 1, 2,$$

ou encore

$$\begin{aligned} I &= \gamma\pi\gamma\pi + iM\omega\beta\gamma^i\pi_i\beta\gamma^i r_i\beta - iM\omega\beta\gamma^i r_i\beta\gamma^i\pi_i\beta \\ &\quad + iM\omega\beta\gamma^i\pi_i\beta\gamma^j r_j\beta + iM\omega\beta\gamma^i\beta\gamma^j r_j\pi_i\beta - M^2\omega^2r^2, \end{aligned}$$

on peut écrire aussi

$$I = \gamma\pi\gamma\pi + iM\omega\pi_i r_i\beta - iM\omega r_i\pi_i\beta + 2iM\omega\beta\gamma^i\pi_i\beta\gamma^j r_j\beta - M^2\omega^2r^2,$$

ou bien

$$I = \gamma\pi\gamma\pi - iM\omega [r_i, \pi_i] \beta + 2iM\omega (\sigma^1\pi_1\beta s\sigma^2 r_2\beta + s\sigma^2\pi_2\beta s\sigma^1 r_1\beta) - M^2\omega^2r^2,$$

sachant que, $[r_i, \pi_i] = 2i\hbar$, il vient

$$I = \gamma\pi\gamma\pi + 2\hbar M\omega\beta + 2M\omega s(\pi_1 r_2 - \pi_2 r_1)\beta - M^2\omega^2r^2,$$

ce qui revient à écrire

$$I = \gamma\pi\gamma\pi + 2M\omega\beta + 2M\omega s(\pi \wedge \mathbf{r})_z \cdot \beta - M^2\omega^2 r^2,$$

du fait que $\mathbf{L} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{r}$ et $\pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, on aura

$$I = \gamma\pi\gamma\pi + 2M\omega [1 - s(L_z + \nu)]\beta - M^2\omega^2 r^2,$$

ainsi, l'équation (3.8) s'écrit sous une forme plus claire

$$[-\pi^2 + e s \sigma_3 B - M^2\omega^2 r^2 + 2M\omega [1 - s(L_z + \nu)]\beta + E^2 - M^2] \Psi = 0, \quad (3.9)$$

avec $L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, et

$$\gamma\pi\gamma\pi = -\pi^2 + e s \sigma_3 B. \quad (3.10)$$

Dans la limite non relativiste E est remplacé dans l'équation (3.9) par $E = M + \epsilon$, avec $\epsilon \ll M$. Ce qui permet d'approximer E^2 par $E^2 \approx M^2 + 2M\epsilon$, et ainsi on obtient

$$H_P \Psi = \epsilon \Psi, \quad (3.11)$$

où

$$H_P = \frac{\pi^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 - \omega [1 - s(L_z + \nu)] \sigma^3 - s \frac{eB}{2M} \sigma^3, \quad (3.12)$$

est l'Hamiltonien de Pauli d'un oscillateur à deux dimensions en présence de l'effet AB plus un terme supplémentaire correspondant au couplage spin orbite.

3.2 Equation de Pauli dépendante du temps en présence de l'effet AB

Le problème qu'on étudie correspond au système décrit par l'Hamiltonien de Pauli (3.12), où on fait dépendre la masse et la fréquence du temps. L'Hamiltonien s'écrit donc

$$H_P(t) = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 - \omega(t) [1 - s(L_z + \nu)] \sigma^3 - s \frac{eB}{2M(t)} \sigma^3, \quad (3.13)$$

l'équation de Pauli s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_P(t) \psi, \quad (3.14)$$

où $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ sont les spineurs de Pauli.

En substituant le champ magnétique \mathbf{B} et le potentiel vecteur \mathbf{A} associés à l'effet AB, définies par les Eqs. (3.3) et (3.4), dans l'Hamiltonien (3.13), qui en coordonnées polaires s'écrit

$$H_P(t) = \frac{1}{2M} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) - s \frac{\nu \hbar}{r} \delta(r) \sigma^3 \right] - \omega(t) [1 - s(p_\varphi + \nu)] \sigma^3 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2, \quad (3.15)$$

où on rappelle que p_r et p_φ sont donné par

$$p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right), \quad p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad [r, p_r] = [\varphi, p_\varphi] = i\hbar.$$

La démarche est identique à celle de l'oscillateur harmonique en présence de l'effet AB, pour cela il suffit d'identifier les générateurs de l'algèbre de Lie qui sont

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} [1 - s(p_\varphi + \nu)] \sigma^3 \\ T_1^\nu &= \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) - s \frac{\nu \hbar}{r} \delta(r) \sigma^3 \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_r r + r p_r), \\ T_3 &= \frac{1}{2} r^2, \end{aligned}$$

vérifiant les relations de commutations suivantes

$$\begin{aligned} [T_1^\nu, T_2] &= \frac{1}{4} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) - \frac{\nu \hbar}{r} \delta(r) \sigma^3, \{p_r, r\} \right] \\ [T_1^\nu, T_3] &= \frac{1}{4} \left\{ [p_r^2, p_r r + r p_r] + \left[\frac{1}{r^2}, p_r r + r p_r \right] \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \hbar \left[\frac{\delta(r)}{r}, p_r r + r p_r \right] \sigma^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T_1^\nu, T_2] &= \frac{1}{4} \left\{ [p_r^2, p_r r] + [p_r^2, r p_r] + \left[\frac{1}{r^2}, p_r r \right] \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right. \\
&\quad + \left[\frac{1}{r^2}, r p_r \right] \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) - \nu \hbar \left[\frac{\delta(r)}{r}, p_r r \right] \sigma^3 \\
&\quad \left. - \nu \hbar \left[\frac{\delta(r)}{r}, r p_r \right] \sigma^3 \right\} \\
[T_1^\nu, T_2] &= \frac{1}{4} \left[-4i\hbar p_r^2 - \frac{4i\hbar}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) + 4i\hbar \frac{\nu \hbar}{r} \delta(r) \sigma^3 \right] \\
[T_1^\nu, T_2] &= -2i\hbar T_1^\nu.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T_1^\nu, T_2] &= -2i\hbar T_1^\nu, & [T_2, T_3] &= -2i\hbar T_3, \\
[T_1^\nu, T_3] &= -i\hbar T_2 & \text{et} & [T_0, T_l] = 0 \quad \text{où } l = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

L'Hamiltonien $H_p(t)$ s'écrit donc en fonction de ces générateurs T_l ($l = 1, 2, 3$) comme suit

$$H_P(t) = \frac{1}{M} T_1^\nu - 2\omega T_0 + M\omega^2 T_3. \tag{3.17}$$

Remarquons que T_0 commute avec $H(t)$, la transformation unitaire standard définie par

$$\psi = e^{\frac{2i}{\hbar} T_0 \int \omega(t) dt} \Phi, \tag{3.18}$$

réduit le problème à

$$\tilde{H}_P(t) = \frac{1}{M} T_1^\nu + M\omega^2 T_3. \tag{3.19}$$

L'invariant $I(t)$ peut s'écrire aussi sur la même base T_l ($l = 1, 2, 3$) sous la forme

$$I(t) = \sum_{l=1}^3 \beta_l(t) T_l, \tag{3.20}$$

on constate que le système d'équation (1.18) conduit à un système d'équation linéaire simple du premier ordre pour les coefficient β_l

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_1 &= -\frac{2}{M} \beta_2, \\
\dot{\beta}_2 &= M\omega_1^2 \beta_1 - \frac{1}{M} \beta_3, \\
\dot{\beta}_3 &= 2M\omega^2 \beta_2,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

en posant $\beta_1 = \rho^2$, on déduit

$$\begin{aligned}\beta_2 &= -M\rho\dot{\rho}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2),\end{aligned}$$

et ρ vérifie l'équation auxiliaire indépendante du flux magnétique ν

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \rho\omega^2 = \frac{1}{M^2\rho^3}. \quad (3.22)$$

Ainsi, l'invariant prend la forme

$$I(t) = \rho^2 T_1^\nu - M\rho\dot{\rho} T_2 + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2) T_3, \quad (3.23)$$

nous allons résoudre l'équation aux valeurs propres

$$I\phi_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi_m(r, \varphi, t), \quad (3.24)$$

avec $\phi_m = \begin{pmatrix} \phi_m^1 \\ \phi_m^2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_m = \begin{pmatrix} \lambda_m^1 & 0 \\ 0 & \lambda_m^2 \end{pmatrix}$.

En introduisant la transformation unitaire dépendante du temps

$$U = \exp \left[-i \frac{M\dot{\rho}}{\hbar\rho} T_3 \right], \quad (3.25)$$

tel que

$$\phi_m(r, \varphi, t) = U^{-1} \phi'_m(r, \varphi, t). \quad (3.26)$$

L'équation aux valeurs propres (3.24) devient

$$I' \phi'_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi'_m(r, \varphi, t), \quad (3.27)$$

où l'invariant I' est donné par

$$I' = UIU^{-1} = \rho^2 T_1^\nu + \frac{1}{\rho^2} T_3.$$

En coordonnées polaires, l'équation aux valeurs propres prend la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{4} - 2i\hbar\nu \frac{\partial}{\partial \varphi} + \nu^2 \right) \right. \\ & \left. - s \frac{\nu \hbar \rho^2}{r} \delta(r) \sigma^3 + \frac{r^2}{\rho^2} \right] \phi'_m \\ & = \lambda_m \phi'_m, \end{aligned} \quad (3.28)$$

le changement $\xi = \frac{r}{\rho}$, conduit à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{2\nu \hbar}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\nu^2}{\xi^2} + \xi^2 - \frac{\nu \hbar s}{\xi} \delta(\xi) \sigma^3 \right] \chi_m \\ & = \lambda_m \chi_m, \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $\chi_m = \begin{pmatrix} \chi_m^1 \\ \chi_m^2 \end{pmatrix}$ et

$$\phi'_m(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \chi_m(\xi, \varphi),$$

en factorisant la première composante

$$\chi_m^1 = f_m(\xi) \exp[i m \varphi],$$

dans ce cas l'équation (3.29) régissant la première composante se réduit à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \hbar^2 \frac{\left(m + \frac{\nu}{\hbar} \right)^2}{\xi^2} + \xi^2 - \frac{\nu \hbar s}{\xi} \delta(\xi) \right] f_m(\xi) \\ & = \lambda_m^1 f_m(\xi). \end{aligned} \quad (3.30)$$

On remarque que le champ magnétique $eB = -\frac{\nu}{\xi} \delta(\xi)$ introduit une singularité dans l'équation (3.30). Ce problème est mal défini mathématiquement au point singulier $\xi = 0$, pour éviter celle singularité on procède à un léger changement mathématique qui consiste à remplacer $\frac{\nu}{\xi} \delta(\xi)$ par $\frac{\nu}{R} \delta(\xi - R)$ et le potentiel vecteur prendra la forme $\mathbf{A} = \frac{-\nu}{\xi} \theta(\xi - R) \mathbf{u}_\varphi$, puis faire tendre à la fin des calculs $R \rightarrow 0$, ce changement n'altère en rien le problème physique engendré [24, 45, 46].

Donc l'équation (3.30) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \hbar^2 \frac{\left(m + \frac{\nu}{\hbar} (\xi - R) \right)^2}{\xi^2} + \xi^2 - \frac{\nu \hbar s}{R} \delta(\xi - R) \right] f_m(\xi) \\ &= \lambda_m^1 f_m(\xi), \end{aligned} \quad (3.31)$$

et de cette manière, on obtient les équations suivantes pour les deux régions

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \hbar^2 \frac{\left(m + \frac{\nu}{\hbar} \right)^2}{\xi^2} + \xi^2 \right] f_m(\xi) = \lambda_m^1 f_m(\xi), \quad \xi > R, \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \hbar^2 \frac{m^2}{\xi^2} + \xi^2 \right] f_m(\xi) = \lambda_m^1 f_m(\xi), \quad \xi < R, \quad (3.33)$$

les solutions des l'équations (3.32) et (3.33) s'obtiennent dans la première région ($\xi > R$) en fonction des fonctions hypergéométriques confluentes régulières et irrégulières

$$\begin{aligned} f_m(\xi) = & \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \left\{ A_m \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m}{\hbar} \right], \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \right. \\ & \left. + B_m \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m}{\hbar} \right], - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

et dans la seconde région ($\xi < R$)

$$f_m(\xi) = D_m \exp \left[-\frac{r^2}{2\hbar} \right] \xi^{|m|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 + |m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], |m| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right). \quad (3.35)$$

L'effet de la fonction delta est alors pris en considération au moyen des relations de continuités

$$f_m(R - \epsilon) = f_m(R + \epsilon), \quad (3.36)$$

$$\left[\frac{df_m(\xi)}{d\xi} \right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \frac{\nu}{\hbar R} f_m(R). \quad (3.37)$$

Pour l'ordre le plus bas en R , la série confluite et sa première dérivée se comportent comme

$$\left[{}_1F_1 \left(\alpha, \gamma; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \right]_{\xi=R} \approx 1, \quad (3.38)$$

$$\left[\frac{d_1 F_1 \left(\alpha, \gamma; \frac{\xi^2}{\hbar} \right)}{dr} \right]_{\xi=R} = \frac{2\alpha}{\gamma\hbar} R. \quad (3.39)$$

La condition (3.36) nous donne

$$D_m R^{|m|} = A_m R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} + B_m R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}, \quad (3.40)$$

par ailleurs on peut voir que

$$\begin{aligned} \left[\frac{df_m(\xi)}{d\xi} \right]_{R+\epsilon} &= \left\{ A_m \left[\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} - \frac{2+2\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{\hbar \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)} R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] \right. \\ &\quad \left. B_m \left[-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} - \frac{2+2\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{\hbar \left(1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right)} R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left[\frac{-R^2}{2\hbar} \right], \end{aligned}$$

et que

$$\left[\frac{df_m(\xi)}{d\xi} \right]_{R-\epsilon} = D_m \left[|m| R^{|m|-1} - \frac{2+2|m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{\hbar (|m|+1)} R^{|m|+1} \right] \exp \left[\frac{-R^2}{2\hbar} \right].$$

Ainsi, la condition (3.37) nous donne

$$\begin{aligned} &A_m \left[\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} - \frac{2+2\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{\hbar \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)} R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] \\ &B_m \left[-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} - \frac{2+2\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{\hbar \left(1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right)} R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] \\ &= D_m \left[\left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right) R^{|m|-1} - \frac{2+2|m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{\hbar (|m|+1)} R^{|m|+1} \right], \quad (3.41) \end{aligned}$$

d'après (3.40) et (3.41) on obtient

$$\frac{A_{n,m}}{D_{n,m}} = \frac{\left(|m| + \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + \frac{\nu s}{\hbar}\right) R^{|m|-1} + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m|+1} \right] R^{|m|+1}}{2 \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-1} + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1}}, \quad (3.42)$$

et

$$\frac{B_{n,m}}{D_{n,m}} = R^{|m|+|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[1 - \frac{\left(|m| + \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + \frac{\nu s}{\hbar}\right) + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m|+1} \right] R^2}{2 \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] R^2} R^2 \right], \quad (3.43)$$

ce qui revient à écrire

$$\begin{aligned} f_m(\xi) = & \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \left\{ R^{|m|-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{|m|+|m+\frac{\nu}{\hbar}| + \frac{\nu s}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m|+1} \right] R^2}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] R^2} R^2 \right. \\ & \times \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 + \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \\ & + R^{|m|+|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[1 - \frac{|m|+|m+\frac{\nu}{\hbar}| + \frac{\nu s}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m|+1} \right] R^2}{2 \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{1-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} - \frac{2+2|m+\frac{\nu}{\hbar}| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar}}{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1} \right] R^2} R^2 \right] \\ & \left. \times \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], -\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \right\} \quad (3.44) \end{aligned}$$

En passant ensuite à la limite $R \rightarrow 0$, ($R^2 \approx 0$), on obtient

$$\begin{aligned} f_m(\xi) = & R^{|m|} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \left\{ R^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left(\frac{1}{2} + \frac{|m| + \frac{\nu s}{\hbar}}{2 \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right|} \right) \right. \\ & \times \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 + \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \\ & + R^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left[\frac{1}{2} - \frac{|m| + \frac{\nu s}{\hbar}}{2 \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right|} \right] \\ & \left. \times \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], -\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \right\}. \quad (3.45) \end{aligned}$$

Par conséquent, dans la limite $R \rightarrow 0$, il est clair que la solution irrégulière contribue si la condition [45, 50].

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| = -|m| - \frac{\nu s}{\hbar}, \quad (3.46)$$

est vérifiée et l'équation (3.45) s'écrit donc comme suit

$$f_m(\xi) = R^{|m|} e^{-\frac{\xi^2}{2\hbar}} \left\{ C_m R^{|m| + \frac{\nu s}{\hbar}} \xi^{|m + \frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) + R^{-|m| - \frac{\nu s}{\hbar}} \xi^{-|m + \frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|; \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \right\}, \quad (3.47)$$

où C_m est une constante.

Il s'ensuit que la solution irrégulière domine

$$f_m(\xi) \rightarrow {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|; \frac{\xi^2}{\hbar} \right),$$

à condition que

$$\left| m \right| + \frac{\nu s}{\hbar} + 1 > 0, \quad (3.48)$$

en utilisant la relation (3.46), la dernière condition (3.48) s'écrit sous la forme

$$\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| < 1. \quad (3.49)$$

Dans la limite $R \rightarrow 0$, on remarque que la solution (3.45) est toujours régulière sauf dans le cas où les deux relations (3.46) et (3.49) soient simultanément vérifiées.

Pour avoir la signification de (3.46) et (3.49), il est commode d'écrire

$$\frac{\nu}{\hbar} = N + \eta \quad \text{où } N \text{ entier et } 0 \leq \eta < 1. \quad (3.50)$$

Par conséquent, la solution $f_m(\xi)$ est toujours la solution régulière à l'exception des deux cas

$$a) \quad m = -N \quad N \geq 0 \quad s = -1, \quad (3.51)$$

$$b) \quad m = -N - 1 \quad N + 1 \leq 0 \quad s = +1. \quad (3.52)$$

Ainsi, la fonction χ^1 donnée par $\chi^1 = \sum_m \chi_m^1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \chi^1(\xi, \varphi) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty'} a_m \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2\hbar}} e^{im\varphi} \\ & + \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N} \xi^{-\eta} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[1 - \eta - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], 1 - \eta, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2\hbar}} e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N-1} \xi^{\eta-1} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left[\eta - \frac{\lambda_m^1}{\hbar} \right], \eta, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2\hbar}} e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

où le signe prime sur la somme indique l'omission des deux termes spécifiés par les conditions (3.51) et (3.52), le comportement asymptotique de la série confluyente pour les grandes valeurs positives de son argument est

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) \rightarrow \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}, \quad (3.54)$$

il s'ensuit que la fonction χ^1 se comporte comme

$$\begin{aligned} \chi^1 \sim & \sum_{m=-\infty}^{+\infty'} a_m \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \xi^{-\left[\frac{\lambda_m^1}{\hbar} + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1\right]} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \\ & + \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N} \xi^{-\eta} \xi^{-\left[\frac{\lambda_m^1}{\hbar} + 1 - \eta\right]} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N-1} \xi^{\eta-1} \xi^{-\left[\frac{\lambda_m^1}{\hbar} + \eta\right]} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside et a_m une constante.

La dernière expression est exponentiellement divergente. Cette divergence ne sera pas évitée sauf si on pose $\alpha = -n$ [52], avec $n = 0, 1, 2, \dots$, cela transforme la série en un polynôme de degré n (polynômes de Laguerre), qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \chi^1(\xi, \varphi) = & \sum_{-\infty}^{+\infty'} \left(a_{m,n} \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{im\varphi} \right) \\ & + \theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N-1,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

où la constante $a_{m,n} = \frac{n! \Gamma\left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1\right)}{\Gamma\left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 + n\right)} a_m$.

Dans le cas où les conditions (3.51) et (3.52) ne sont pas satisfaites (contribution de la solution régulière), les valeurs propres pour la solution régulière sont obtenues à partir de la condition

$$\frac{1}{2} \left[\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 - \frac{\lambda_{m,n}^1}{\hbar} \right] = -n,$$

ainsi,

$$\lambda_{m,n}^1 = \hbar \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right). \quad (3.57)$$

Dans le cas où la solution est irrégulière, les valeurs propres prennent des valeurs différentes pour les deux cas suivants :

- Premier cas où ($m = -N$, $N \geq 0$, $s = -1$) :

La valeur propre prend la valeur

$$\frac{1}{2} \left[1 - \eta - \frac{\lambda_{m,n}^1}{\hbar} \right] = -n,$$

$$\lambda_{m,n}^1 = \hbar (2n + 1 - \eta). \quad (3.58)$$

- Deuxième cas où ($m = -N - 1$, $N + 1 \leq 0$, $s = +1$) :

La valeur propre prend la valeur

$$\frac{1}{2} \left[\eta - \frac{\lambda_{m,n}^1}{\hbar} \right] = -n,$$

$$\lambda_{m,n}^1 = \hbar (2n + \eta). \quad (3.59)$$

On déduit la première composante des fonctions propres de I

$$\phi_{m,n}^1 = \frac{1}{\rho} U^{-1} \chi_{m,n}^1,$$

avec les valeurs propres correspondantes

$$\lambda_{m,n}^1 = - \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) - \left[\theta(-s) \theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + 1 - \eta) + \theta(s) \theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + \eta) \right]. \quad (3.60)$$

Sachant que la phase $\alpha_n^1(t)$ est donnée par l'équation (1.39), et en utilisant $\phi_{m,n}^1 = \frac{1}{\rho} U^{-1} \chi_{m,n}^1$, ainsi que l'équation auxiliaire pour éliminer ω^2 de l'Hamiltonien on obtient la phase

$$\hbar \dot{\alpha}_{m,n}^1(t) = \langle \chi_{m,n}^1 | - \frac{I'}{M\rho^2} | \chi_{m,n}^1 \rangle. \quad (3.61)$$

Son integration par rapport au temps donne

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n}^1(t) = & - \left[2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right] \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \\ & - \left[\theta(-s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + 1 - \eta) + \theta(s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + \eta) \right] \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

On remarque que la phase dépend du spin et du flux magnétique dont le premier terme est dû à la solution régulière et le deuxième terme lorsque la solution est irrégulière.

Par contre la deuxième composante des fonctions propres $\phi_{m,n}^2 = \frac{1}{\rho} U^{-1} \chi_{m,n}^2$ peut être déduite à partir de l'équation (3.56), en remplaçant s par $-s$

$$\begin{aligned} \chi^2(\xi, \varphi) = & \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(a_{m,n} \xi^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} L_n^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{im\varphi} \right) \\ & + \theta(s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N,n} \xi^{-\eta} L_n^{-\eta} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{-iN\varphi} \\ & + \theta(-s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) a_{-N-1,n} \xi^{\eta-1} L_n^{\eta-1} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] e^{-i(N+1)\varphi}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

avec les valeurs propres

$$\lambda_{m,n}^2 = - \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) - \left[\theta(s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + 1 - \eta) + \theta(-s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + \eta) \right]. \quad (3.64)$$

De la même manière que (3.61), la phase $\alpha_{m,n}^2(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n}^2(t) = & - \left[2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right] \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \\ & - \left[\theta(s)\theta\left(\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + 1 - \eta) + \theta(-s)\theta\left(-\frac{\nu}{\hbar}\right) (2n + \eta) \right] \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La solution générale s'écrit en utilisant les Eqs.(3.25), (3.56), (3.62), (3.63), (3.63) sous la forme

$$\Phi(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} \begin{pmatrix} \psi_{m,n}^1 \\ \psi_{m,n}^2 \end{pmatrix} = \sum_{m,n} \frac{a_{m,n}}{\rho} \exp \left[i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 \right] \begin{pmatrix} \exp [i\alpha_{m,n}^1(t)] \chi_{m,n}^1 \\ \exp [i\alpha_{m,n}^2(t)] \chi_{m,n}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

où $a_{m,n}$ est une constante.

3.3 Cas particuliers

Nous allons discuter deux cas particuliers à savoir :

1- Dans le cas du *spin* 0, la solution (3.66) se réduit à celle (2.44) du chapitre 3, avec

$$a_{m,n} = \frac{n! \Gamma(|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1)}{\Gamma(|m + \frac{\nu}{\hbar}| + 1 + n)} A_{n,m}.$$

2- En absence de l'effet AB ($\nu = 0$), la solution (3.66) se réduit à la solution d'un oscillateur harmonique dépendant du temps à deux dimension

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(r, \varphi, t) = & \frac{a_{m,n}^{\nu=0}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 \right] \exp \left[-i(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \right] \\ & \times L_n^{|m|} \left(\frac{\xi^2}{\hbar} \right) e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

qui s'écrit à l'aide des fonctions hypergéométriques confluentes comme suit

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(r, \varphi, t) = & \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) \xi^2 \right] \exp \left[-i(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \right] \\ & \times {}_1F_1 \left(-n, |m| + 1, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) e^{im\varphi}. \end{aligned}$$



Conclusion

Ce mémoire traite de la méthode des invariants pour trouver les solutions exactes de deux problèmes physiques dépendant du temps à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm.

Dans un premier temps, nous avons exploité la théorie des invariants [4] pour résoudre l'équation de Schrödinger associée à un oscillateur harmonique à deux dimensions avec masse et fréquence variables en présence de l'effet AB. Les solutions obtenues sont des fonctions hypergéométriques confluentes dont l'argument dépend du flux. Le paramètre du flux agit sur les valeurs propres pour écarter les niveaux "d'énergies".

Dans un deuxième temps, on s'est intéressé à la solution de l'équation de Pauli dépendante du temps à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm. L'équation de Pauli en présence d'un oscillateur harmonique a été obtenue à partir de la limite non relativiste de l'équation de l'oscillateur de Dirac relativiste. En exploitant la théorie des invariants, on a trouvé l'invariant sous forme d'une matrice diagonale (2×2) et calculé les spineurs solutions de l'équation de Pauli. Ces Spineurs sont des fonctions hypergéométriques confluentes dont l'argument dépend du flux.

Pour certains cas particuliers, on montre que les solutions irrégulières contribuent et leurs correspondent des valeurs propres particulières. Pour les deux problèmes, on note que l'équation auxiliaire est indépendante du paramètre du flux magnétique.

Bibliographie

- [1] M. A. Markov (Ed.), *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, 1989, Nova Science Publishers, Commack.
- [2] M. Kleber, Phys. Rep. **236** (1994) 331.
- [3] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon, and Thomas F. George, Phys. Rep. **362** (2002) 63.
- [4] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10** (1969) 1458.
- [5] M Mirrahimi, *Contrôlabilité des Systèmes Quantiques*, Mémoire de DEA, Analyse Numérique de Paris VI. (2003).
- [6] J. Y. Ji, J. Kim and S. P. Kim, Phys. Rev. A **51** (1995) 4268.
- [7] M. Maamache, Phys. Rev. A **52** (1995) 936.
- [8] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, Phys. Rev. A **56** (1997) 4300.
- [9] L. Chetouani, L. Guechi and T.F. Hammann, Phys. Rev. A **40** (1989) 1157.
- [10] Kh. Nouicer and L. Chetouani, Act. Phys. Slovaca, **49** (1999) 905.
- [11] F. Benamira and L. Guechi, Czech. J. Phys. **53** (2003) 717, quant-ph/0112003.
- [12] F. Benamira and L. Guechi, Europhys. Lett. **60** (2002) 649, quant-ph/0304134.
- [13] L. S. Brown, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 527.
- [14] C. Yüce, Ann. Phys. **308** (2003) 599.
- [15] N.J.M. Horing and K. Sabeech, Mod. Phys. Lett. **B11** (1997) 1193.
- [16] Kh. Nouicer, *Thèse de Doctorat d'Etat*, 1999, Université Mentouri de Constantine.
- [17] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115** (1959) 4859.
- [18] A. Tonomura and all, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 792.

- [19] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer, Berlin, 1989.
- [20] Y. Bouguerra, M. Maamache and A. Bounames, *Int. J. Theo. Phys.* (accepté).
- [21] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55** (1997) 3219.
- [22] M. Maamache, A. Bounames and N. Ferkous, *Phys. Rev A* **73** (2006) 016101.
- [23] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, second Ed., Springer, Berlin, 1994, pp.107-110.
- [24] C. R. Hagen, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 2015.
- [25] M. Maamache, J. P. Provost and G. Vallée, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 1777.
- [26] M. Maamache, K. Bencheikh and H. Hachemi, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 3124.
- [27] M. Maamache and H. Choutri, *J. Phys. A* **33** (2000) 6203.
- [28] M. Maamache, *J. Phys. A* **29** (1996) 2833.
- [29] D. Trifonov, *J. Phys. A* **32** (1999) 3649.
- [30] M. Maamache, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 026102.
- [31] J. R. Choi and B. H. Kweon, *Int. J. Mod. Phys. B* **16** (2002) 4733.
- [32] I. A. Pedrosa and I. Guedes, *Int. J. Mod. Phys. B* **17** (2003) 2903.
- [33] M. Maamache and H. Bekkar, *J. Phys. A* **36** (2003) L359.
- [34] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A* **39** (1972) 377.
- [35] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Nuovo Cimento B* **24** (1974) 46.
- [36] I. A. Malkin, V. I. Man'ko and D. A. Trifonov, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1371.
- [37] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Physica*, **72** (1970) 597.
- [38] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *J. Phys. A* **9** (1976) 10.
- [39] A. B. Nassar, *Physica A* **24** (1987) 24.
- [40] M. S. Abdalla, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 4026.
- [41] J. M. F. Bassalo, L. C. L. Botelho, H. S. A. Neto and P. T. S. Alencar, *Rev. Bras. Fis.* **19** (1989) 598.
- [42] B. Baseia, S. S. Mizrahi and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 5885.
- [43] C. A. S. Ferreira, P. T. S. Alencar and J. M. F. Bassalo, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 024103.

- [44] J. R. Choi, J. Phys. C **15** (2004) 823.
- [45] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 503.
- [46] C. R. Hagen, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 3119.
- [47] X. Zhu and W. C. Henneberger, Nuovo Cimento B **108** (1993) 381.
- [48] C. Furtado and F. Moraes, J. Phys. A **33** (2000) 5513.
- [49] S. Azevedo, Phys. Lett. A **293** (2002) 283.
- [50] N. Ferkous and A. Bounames, Phys. Lett. A **325** (2004) 21.
- [51] C. R. Hagen, Phys. Rev. D **64** (1993) 5935.
- [52] Z. X. Wang and D. R. Due, *Special Function*, World Scientific Pub., Singapore, 1989, pp.327.
- [53] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A **22** (1989) L817.
- [54] V. M. Villalba and A. R. Maggiolo, Eur. Phys. J. B **22** (2001) 31, cond-mat/0107529.
- [55] V. M. Villalba, Phys. Rev. A **49** (1994) 586, hep-th/9310010.
- [56] M. Moshinsky and Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1996.
- [57] V. Alan Kostelecky, V. I. Man'ko, M. M. Nieto and D. R. Truax, Phys. Rev. A **48** (1993) 951.
- [58] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **31** (1998) 1859.
- [59] E. P. Velicheva and A. A. Suzko, Theo. Math. Phys. **115** (1998) 687.

ANNEXE
Article accepté

From: "Prof. Heinrich Saller" <hs@mpipmu.mpg.de> [Save Address] [Block Sender] [This Is Spam]
To: a.bounames@lycos.com
CC:
Subject: Your Submission IJTP684
Date: Tue, 07 Mar 2006 09:07:00 -0500

Show Full Headers

As Attachment

Dear Dr. BOUNAMES Abdelharid, PhD,

We are pleased to inform you that your manuscript, "Time-Dependent 2D Harmonic Oscillator in Presence of the Aharanov-Bohm Effect", has been accepted for publication in International Journal of Theoretical Physics.

You will be contacted about proofs and offprints in due course by our Manufacturing Department. Any queries concerning your manuscript should now be addressed to the Editorial Department at: editdept@springer-sbm.com

Please remember to quote the manuscript number, IJTP684, whenever inquiring about your manuscript.

If you would like to have your accepted article published with open access in our Open Choice program, please access the following URL: <http://www.springer.com/openchoice>

With best regards,
Journals Editorial Office
Springer

Editorial Manager(tm) for International Journal of Theoretical Physics
Manuscript Draft

Manuscript Number:

Title: Time-Dependent 2D Harmonic Oscillator in Presence of the Aharonov-Bohm Effect

Article Type: Original research

Section/Category:

Keywords: harmonic oscillator; magnetic field; Aharonov-Bohm effect; exact wave function

Corresponding Author: Dr. BOUNAMES Abdelhafid, PhD

Corresponding Author's Institution: University of Jijel

First Author: BOUGUERRA Yacine, M.D

Order of Authors: BOUGUERRA Yacine, M.D; MAAMACHE Mustapha, PhD; BOUNAMES Abdelhafid, PhD

Manuscript Region of Origin:

Abstract: We use the Lewis-Riesenfeld theory to determine the exact form of the wavefunctions of a two-dimensional harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency in presence of the Aharonov-Bohm effect (AB). We find that the auxiliary equation is independent of the AB magnetic flux. In the particular case of quantized AB magnetic flux the wavefunctions coincide exactly with the wavefunctions of the 2D time-dependent harmonic oscillator.

Time-dependent 2D harmonic oscillator in presence of the Aharonov-Bohm effect

Y. Bouguerra^a, M. Maamache^b and A. Bounames^a *

*(a) Laboratoire de Physique Théorique
Faculté des Sciences, Université de Jijel,
BP 98, Ouled Aissa, Jijel 18000, Algeria.*

*(b) Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques,
Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas de Sétif, Sétif 19000 , Algeria.*

Abstract

We use the Lewis-Riesenfeld theory to determine the exact form of the wavefunctions of a two-dimensionnal harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency in presence of the Aharonov-Bohm effect (AB). We find that the auxiliary equation is independent of the AB magnetic flux. In the particular case of quantized AB magnetic flux the wavefunctions coincide exactly with the wavefunctions of the 2D time-dependent harmonic oscillator.

PACS: 03.65Ge, 03.65Fd, 03.65Bz

Keywords: harmonic oscillator; magnetic field; Aharonov-Bohm effect, exact wave function

*Corresponding author.

In the last few decades the problem of time-dependent systems have played a major role in the study of several physics phenomena [1, 2, 3]. A great deal of attention has been paid to some specific problems of time-dependent oscillators among them the time-dependent singular oscillator. In fact this specific problem has been studied extensively in different direction by many authors by whom closed-form solutions are obtained in explicit form [5, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. The construction of the invariant [12] (constants of the motion), has attracted much attention, which describe a quantum system governed by a time-dependent Hamiltonian. Lewis and Riensfeld [12] have shown that, if the system admits an invariant $I(t)$, it is possible to find a privileged basis of eigenstates of this operator when multiplied by suitable time-dependent phase factor, evolve according to the time Schrodinger equation.

In the meantime the problem of two-dimensional (2D) systems as well as the 2D time-dependent harmonic oscillators in the presence of a magnetic field [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24] has been considered, for which the dynamical operators and the wave function have been obtained.

On the other hand, the Aharonov-Bohm (AB) effect [25] i.e. systems in which charged particle interact with the vector potential of an infinitely long thin magnetic string (AB potential) are still receiving considerable interest with applications in various area in the literature [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. In such systems the nonlocal character of the interaction of the charged particle with the magnetic field of the string leads, quantum mechanically, to observable physical effect despite the absence of Lorentz forces on the particle.

In the present work, we consider a two-dimensional (2D) harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency confined to the (x,y) plane, with a whisker of flux (a very thin solenoid) ν on the z -axis in the positive direction. The time-dependent Schrodinger equation is given by

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) (x^2 + y^2) \right] \psi, \quad (1)$$

where \mathbf{A} is the potential vector. The magnetic field \mathbf{B} , associated to the AB effect, is assumed to be perpendicular to the plane and confined to a thin magnetized filament

$$eB(r) = -\frac{\nu}{r} \delta(r), \quad (2)$$

where ν is a finite and nonzero flux parameter.

It is well known [27, 28, 29] that for a flux tube of zero radius the corresponding form of the potential \mathbf{A} in the coulomb gauge is

$$e\mathbf{A} = \left(\frac{\nu y}{x^2 + y^2}, -\frac{\nu x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Then the time-dependent Schrodinger equation (1) becomes

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_\nu(t) \psi,$$

where the Hamiltonian $H_\nu(t)$ is given by

$$H_\nu(t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)(x^2 + y^2) + \frac{\nu L_z}{2M(t)(x^2 + y^2)} + \frac{\nu^2}{2M(t)(x^2 + y^2)}, \quad (3)$$

and $L_z = (xp_y - yp_x)$ is the angular momentum.

For the construction of an exact invariant for the quantum system described by the time-dependent Hamiltonian (3), we use the Lie algebraic approach [6]. Let us introduce the Hermitian basis

$$\begin{aligned} T_1^\nu &= \frac{1}{2} \left[p_x^2 + p_y^2 + \frac{2\nu L_z}{x^2 + y^2} + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_x x + x p_x + y p_y + p_y y), \\ T_3 &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \end{aligned}$$

which is closed with respect to

$$[T_1^\nu, T_2] = -2i\hbar T_1^\nu, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1^\nu, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (4)$$

We note that the above Lie algebra $\{T_1^\nu, T_2, T_3\}$ is identical to the 2D oscillator algebra $\{T_1^{\nu=0}, T_2, T_3\}$ for the particular case $\nu = 0$.

Now, we look for the invariant in the form

$$I(t) = \mu_1(t)T_1^\nu + \mu_2(t)T_2 + \mu_3(t)T_3, \quad (5)$$

and by means of $\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [I, H]$ and comparison of the coefficients of a system of first-order linear differential equation for the unknown μ_r in (5) is obtained

$$\dot{\mu}_1 = -\frac{2}{M}\mu_2, \quad (6)$$

$$\dot{\mu}_2 = M\omega^2\mu_1 - \frac{1}{M}\mu_3, \quad (7)$$

$$\dot{\mu}_3 = 2M\omega^2\mu_2, \quad (8)$$

which can be simplified by setting $\mu_1 = \rho^2$ where ρ is the solution of the auxiliary equation

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \rho\omega^2 = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (9)$$

and the other coefficients are $\mu_2 = -M\rho\dot{\rho}$, and $\mu_3 = \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)$. We note that the above auxiliary equation does not depend on the magnetic flux ν .

Thus, the invariant (5) can be written in the form

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{2\nu L_z}{x^2 + y^2} + \frac{\nu^2}{x^2 + y^2} \right) - M\rho\dot{\rho} (p_x x + x p_x + y p_y + p_y y) + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2) (x^2 + y^2) \right\}. \quad (10)$$

According to the Lewis-Riesenfeld theory [12], given a physical system that contains an invariant operator $I(t)$, the following results can be obtained:

a) its eigenvalues $\lambda_{n,m}$ are time-independent,

$$I\phi_{n,m}(x, y, t) = \lambda_{n,m}\phi_{n,m}(x, y, t), \quad (11)$$

b) its eigenfunctions $\phi_{n,m}(x, y, t)$ are time-dependent and if multiplied by suitable phases such as $\exp[i\alpha_{n,m}(t)]$, with the $\alpha_{n,m}(t)$ verifying

$$\hbar\dot{\alpha}_{n,m}(t) = \langle \phi_{n,m} | i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{n,m} \rangle, \quad (12)$$

then, the wavefunctions $\psi_{n,m}(x, y, t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)]\phi_{n,m}(x, y, t)$ evolve according to the time-dependent Shrodinger equation. The general solution $\psi(x, y, t)$ can then be written as

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n,m} C_{n,m} \psi_{n,m}(x, y, t), \quad (13)$$

where $C_{n,m}$ are arbitrary constants coefficients fixed by the initial conditions of the physical system.

Let us consider the unitary transformation

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = U\phi_{n,m}(x, y, t), \quad (14)$$

where

$$U = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} (x^2 + y^2) \right]. \quad (15)$$

Under this unitary transformation the eigenvalue equation (11) is mapped into

$$I'\phi'_{n,m}(x, y, t) = \lambda_{n,m}\phi'_{n,m}(x, y, t), \quad (16)$$

with

$$I' = UIU^+ = \frac{1}{2} \left[\rho^2 (p_x^2 + p_y^2) + \frac{2\nu\rho^2}{x^2 + y^2} L_z + \frac{\nu^2\rho^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \right]. \quad (17)$$

If one define the new variables $\sigma(t) = \frac{x}{\rho}$, $\eta(t) = \frac{y}{\rho}$ and in polar coordinates the eigenvalues equation (11) takes the form

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{2\nu\hbar}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\nu^2}{r^2} + r^2 \right] \chi_{n,m} = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}, \quad (18)$$

where $r^2 = \sigma^2 + \eta^2$, $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ and

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m}(\sigma, \eta), \quad (19)$$

the solution of the above equation (18) is given by [34]

$$\begin{aligned} \chi_{n,m}(r, \varphi) = & A_{n,m} \exp \left[-\frac{r^2}{2\hbar} \right] r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi] \\ & + B_{n,m} r^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n - 2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi], \end{aligned} \quad (20)$$

with the constant eigenvalues

$$\lambda_{n,m} = \hbar \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

that depends on the magnetic flux ν which breaks the degeneracy of the eigenvalues levels.

Since (20) contains a regular and irregular solutions, one could simply require that $\chi_{n,m}(r, \varphi)$ be finite at the origin $r = 0$ and thereby eliminate ab initio the irregular solution [29]. This, in fact, gives

$$\chi_{n,m}(r, \varphi) = A_{n,m} \exp \left[-\frac{r^2}{2\hbar} \right] r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi]. \quad (22)$$

On the other hand, substituting the Hamiltonian (3) and Eq. (14) into Eq. (12), we find that the phase function $\alpha_{n,m}(t)$ is given by

$$\alpha_{n,m}(t) = - \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2}. \quad (23)$$

Finally, the exact solution of the Schrodinger equation (1) in the polar coordinates is given by

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) = & \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho\dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) r^2 \right] \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2} \right] \\ & \times r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi]. \end{aligned} \quad (24)$$

In the absence of the AB effect $\nu = 0$, the solution (24) reduces to the solution of the time-dependent 2D harmonic oscillator. On the other hand, we note that if the AB magnetic flux is quantized, $\frac{\nu}{\hbar} = \text{integer}$, the wavefunctions (24) coincide also exactly with the solution of the time-dependent 2D harmonic oscillator.

In conclusion, such model has in fact been presented in the contest of obtaining the solution corresponding to zero radius of filament containing the Aharonov-Bohm flux. On the other hand, if we replace the flux tube of zero radius by one of finite radius R , with the additional condition that the magnetic field is confined to the surface of the tube, we point that the part of the operator T_1^ν which depends on the space-coordinates must be multiplied by the step function $\theta(r - R)$. Consequently, the problem becomes complicated because the algebra based on T_1^ν , T_2 and T_3 is not closed and there exist a physical formulation [27, 28, 29] which eliminates these mathematical difficulties. Work in this direction is in progress.

Acknowledgements

Professor M. Maamache, visiting Professor at ULP, wishes to thank Prof J.P Munch, head of Physics Department, Dr. F. Garin Director of LMSPC laboratory, and Dr. C. Demangeat (IPCMS) at Louis Pasteur University (ULP) of Strasbourg (France) for their hospitality during the preparation of this work. This visit is done in the frame of the cooperation contract between Ferhat Abbas University of Setif (UFAS) and Louis Pasteur University of Strasbourg (ULP) signed in September 2003.

References

- [1] M. A. Markov (Ed.), Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems, 1989, Nova Science Publishers, Commack, New-York.
- [2] M. Kleber, Phys. Rep. **236** (1994) 331.
- [3] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon, and Thomas F. George, Phys. Rep. **362** (2002) 63.
- [4] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **39** (1972) 377.
- [5] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Nuovo Cimento B **24** (1974) 46.
- [6] M. Maamache, Phys. Rev. A **52** (1995) 936 .
- [7] M . Maamache, J. Phys. A **29** (1996) 2833.
- [8] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, Phys. Rev. A **56** (1997) 4300.

- [9] D. Trifonov, *J. Phys. A* **32** (1999) 3649.
- [10] M. Maamache, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 026102 .
- [11] M. Maamache and H. Bekkar, *J. Phys. A* **36** (2003) L359.
- [12] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1458 .
- [13] I. A. Malkin, V. I. Man'ko and D. A. Trifonov, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1371.
- [14] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Physica*, **72** (1970) 597.
- [15] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *J. Phys. A* **9** (1976) 10.
- [16] A. B. Nassar, *Physica A* **24** (1987) 24 .
- [17] M. S. Abdalla, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 4026.
- [18] J. M. F. Bassalo, L. C. L. Botelho, H. S. A. Neto and P. T. S. Alencar, *Rev. Bras. Fis.* **19** (1989) 598.
- [19] B. Baseia, S. S. Mizrahi and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 5885.
- [20] C. A. S. Ferreira, P. T. S. Alencar and J. M. F. Bassalo, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 024103 .
- [21] M.L. Liang and W.Q. Zhang , *Int. J. Theo. Phys.* **42** (2003) 2881.
- [22] C. Yüce, *Ann. Phys.* **308** (2003) 599.
- [23] J. R. Choi, *J. Phys. C* **15** (2004) 823 .
- [24] M. Maamache, A. Bounames and N. Ferkous, (submitted).
- [25] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959) 4859 .
- [26] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer, Berlin, 1989.
- [27] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 503 .
- [28] C. R. Hagen, *Int. J. Mod. Phys. A* **6** (1991) 3119.
- [29] C. R. Hagen, *Phys. Rev. D* **64** (1993) 5935 .
- [30] X. Zhu and W. C. Henneberger, *Nuovo Cimento B* **108** (1993) 381.
- [31] C. Furtado and F. Moraes, *J. Phys. A* **33** (2000) 5513 .

[32] S. Azevedo, Phys. Lett. A **293** (2002) 283.

[33] N. Ferkous and A. Bounames, Phys. Lett. A **325** (2004) 21.

[34] S. Flügge, Practical Quantum Mechanics, second Ed., Springer, Berlin, 1994, pp.107-110.

RESUME :

Dans ce mémoire, on a traité deux problèmes physiques dépendants du temps en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB) en utilisant la théorie des invariants. Dans le premier travail, on a résolu l'équation de Schrödinger d'un oscillateur harmonique à deux dimensions avec masse et fréquence variables en présence de l'effet AB. Dans le deuxième travail, on a résolu l'équation de Pauli à deux dimensions dépendante du temps en présence de l'effet AB. Pour certains cas particuliers, on montre que les solutions irrégulières contribuent et leurs correspondent des valeurs propres particulières. Pour les deux problèmes, l'équation auxiliaire est indépendante du paramètre du flux magnétique.

المخلص:

في هذه المذكرة قمنا بحل مسألتين مهمتين في الجمل المتعلقة بالزمن بإستعمال نظرية المؤثرات الصامدة (Théorie des invariants) في الجزء الأول قمنا بحل معادلة شرودينغر لهزاز توافقي في بعدين ذو كتلة وتواتر متغيرين بالنسبة للزمن بوجود فعل أهارونوف بوم (Aharonov-Bohm). في الجزء الثاني قمنا بحل معادلة باولي المتعلقة بالزمن في بعدين بوجود فعل أهارونوف بوم. تم تبين أنه في بعض الحالات الخاصة تسيطر الحلول الشاذة فينجم عنها قيم ذاتية خاصة. في كلتا الحالتين المعادلة المساعدة لا تتعلق بوسيط التدفق المغناطيسي.



Abstract

In this work, we used the invariants method of Lewis-Riesenfeld to find the exact solutions of two times dependent problems in the presence of the Aharonov-Bohm effect. In the first work, one solved the Schrödinger equation of a two dimensional harmonic oscillator with mass and frequency variables in the presence of the AB effect. In the second work, one solved the time dependent Pauli equation of a two dimensional harmonic oscillator in the presence of the AB effect. For certain particular cases, it is shown that, for certain particular cases, the irregular solutions contribute and their corresponding a particular eigenvalues. For the two problems, the auxiliary equation is independent of the parameter of the magnetic flux.