Table des matières

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
ET DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Asma CHERIGUENE

THEME

Physique au-delà du Modèle Standard et Matière Noire

Soutenu le :04/07/2010

Devant le Jury :

Président :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	Z. Belghobsi	M.C.A.	Univ. Jijel
Examinateurs :	P. Aurenche	Directeur de recherche	LAPTH. France
	Ch. Benchouk	Prof.	USTHB. Alger
Invité	A. Ahriche	M.C.B.	Univ. Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur Mlle. Z. Belghobsi, Maître de conférences à l'Université de Jijel, pour m'avoir confié ce sujet et pour l'aide et le temps et la disponibilité qu'elle a bien voulu me consacrer.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, M. Kh. Nouicer, Professeur à l'Université de Jijel pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, les examinateurs : P. Aureche, Directeur de Recherche au CNRS, M.Ch. Benchouk, Professeur au USTHB, Alger et M. A. Amine, Maître de conférences à l'Université de Jijel, qui ont bien accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier M. P. Aurenche, ex-Directeur du Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de la Physique Théorique "LAPTH" et M. F. Boudjema, le Directeur actuel du LAPTH de m'avoir accueillie au sein du laboratoire pour les quatres mois du stage aussi Mme. G. Belanger de m'avoir pafaitement guidés lors de ce projet.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de la post graduation de physique théorique, en particulier M. A. Bounames, M. T. Boudjedaa, Professeurs à l'Université de Jijel, M. P. Sorba et M. J.P. Guillet, Directeurs de Recherche au CNRS, Mlle. Lehtihet Zahouwa, M. O. Boutaghou, Maîtres de conférences à l'Université de Jijel, L. Chetouani, N. Belaloui, Professeurs à l'Université Mentouri de Constantine, M. M. Maamache, Professeur à l'Université de Sétif.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille,mes frères Mohammed Amine, Zinnedine,mes soeurs Meryème, Soraya, et en particulier mon père qui m'a toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire, sans pour autant oublier l'encouragement de la part de ma mère et ce, depuis le début de mes études où hélas, celle-ci fut rappelée à Dieu il ya de celà bientôt huit mois.

Asma

Introduction Générale

Le Modèle Standard de la physique des particules (SM) est une théorie de jauge basée sur le groupe de jauge non-abélien $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \times U(1)_Y$. Le groupe $SU(3)_C$ est une symétrie de jauge de la chromodynamique quantique (QCD) décrivant les interactions fortes et le groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ décrit l'interaction électro-faible (électromagnétique et failbe), ainsi que l'ensemble des particules élémentaires qui constituent la matière. Le SM est développé entre les années 1970 et 1973, c'est une théorie quantique des champs qui est naturellement compatible avec les principes de la mécanique quantique et de la relativité.

Malgré les nombreux succès du Modèle Standard de la Physique des Particules (prédiction du quark charmé, des bosons de jauge faibles, du quark top, mesures de précision ...), celui-ci souffre de plusieurs problèmes comme notamment le problème de hiérarchie des masses ou encore celui de la Matière Noire. En effet, une grande partie de l'Univers est constituée de matière invisible non baryonique et inexpliquée par le Modèle Standard. De nouveaux modèles théoriques ont alors été élaborés pour résoudre ces imperfections et donc décrire plus précisément la Nature. Le modèle le plus prometteur actuellement est la Supersymétrie qui représente une nouvelle symétrie entre les fermions et les bosons. Cette théorie, non vérifiée expérimentalement, présente plusieurs avantages et contient des candidats de matière noire comme, par exemple, le neutralino. La recherche de signaux supersymétriques ainsi que la découverte du boson de Higgs sont les principaux objectifs du futur collisionneur hadronique, le LHC (Large Hadron Collider), situé au CERN qui est déja démaré la fin d'année 2009. Son potentiel successeur, le ILC (International Linear Collider), permettrait d'étudier en détail leurs propriétés fondamentales. Compte tenu de la grande précision des futures mesures expérimentales, il est important que les prédictions théoriques atteignent au moins ce même degré de précision.

L'objectif de ce mémoire est de travailler en physique au-delà du Modèle Standrad ; étudier les problèmes de celui-ci : le problème de la gravité, le problème de la hiérarchie, et celui de la matière manquante (matière noire et énergie sombre).... Après, on donne l'une des solutions de ces problèmes la Supersymétrie (susy) quio est une nouvelle symétrie entre les bosons et les

fermions. En suite on va étudier les différents spectres de l'extension supersymétrique minimale du Modèle standrad, le MSSM. Enfin on appliquera cette étude pour le problème de la matière noire qui constitue environ 23% de la densité totale d'Univers, en traitant les neutralinos et le sneutrinos comme candidats de cette matière sombre.

Dans le premier chapitre, on présentera une étude détaillée de l'invariance de la densité Lagrangienne du SM sous le groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, de plus le problème de la théorie electrofaible la "brisure spontanée de la symétrie" qui consiste à introduire une nouvelle particule le Higgs qui a une particularité d'avoir les mêmes nombres quantiques que le vide (toutes les charges sont nulles) sauf pour la masse qui est non nulle.

Le deuxième chapitre sera consacré à une introduction au Modèle Standard de la Physique des Particules (SM), ainsi qu'à ses divers problèmes expérimentaux et théoriques.

Dans le troisième chapitre nous détaillerons la supersymétrie comme une nouvelle symétrie entre les bosons et les fermions, les superchamps ainsi que les particules contenues dans la version minimale du Modèle Standard.

Le chapitre suivant détaillera le Modèle Standard supersymétrique minimal "MSSM". Les différents secteurs du modèle seront présentés et les masses des particules à l'ordre de l'arbre seront dérivées.

Le dernier chapitre sera consacré à une brève introduction au Modèle Standard en Cosmologie avec notamment un aperçu du problème de la matière noire. Dans cette même partie, nous aborderons la prédiction de la densité relique de matière noire à partir de la physique des particules dans un modèle cosmologique standard dominé par la radiation. Ainsi, on étudiera les candidats de matière noire dans le MSSM, le neutralino et le sneutrino. Pour le neutralino, on dérive les amplitudes d'annihilation en paires de fermions ainsi qu'en bosons de jauge et de Higgs. Pour le sneutrino (partenaire supersymétrique du neutrino), on va calculer la section efficace de diffusion élastique sur les nucléons et on montrera comment ce processus cintraignerait fortement le sneutrino comme candidat de la Matière Noire, ceci est une conséquence du couplage du sneutrino au boson neutre Z.

Enfin, nous donnerons en conclusion un aperçu de l'avancement du projet mais aussi les diverses exploitations possibles de ce dernier. Dans les annexes, nous rappelerons certaines pro-

priétés des matrices de masse du secteur neutralinos du MSSM. On donnera aussi les propriètés de quelques fonctions spéciales ainsi qu'un rappel des spineurs de Weyl et de Majorana.

Chapitre 1

L'invariance de jauge et Brisure Spontanée de la Symétrie

Le Modèle Standard est une théorie de jauge basée sur le groupe non abélien $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Le problème qui se pose avec la théorie electrofaible si on introduit les termes de masse pour les leptons et les bosons de jauge est que elle n'est plus invariante sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, pour pouvoir générer des masses aux fermions et aux bosons de jauge on brise la symétrie spontanément. Dans ce chapitre on va étudier l'invariance de la densité Lagrangienne sous ce goupe et ce phénomène de brisure de la symétrie.

1.1 Transformation de phase globale pour les intéractions faibles

La densité Lagrangienne pour des leptons libres sans masse est donnée par [2] :

$$\mathcal{L}_0 = i\left[\overline{\psi}_l(x)\partial\!\!\!/\psi_l(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}(x)\right]. \tag{1.1}$$

avec : $l = e, \mu, ...$

Les champs de Dirac sont donnés par

$$\begin{cases} \psi^L(x) = P_L\psi(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi(x), \\ \psi^R(x) = P_R\psi(x) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

Ainsi la densité Lagrangienne (1.1) devient,

$$\mathcal{L}_0 = i\left[\left(\overline{\psi}_l^R(x) + \overline{\psi}_l^L(x)\right)\partial\!\!\!/\left(\psi_l^R(x) + \psi_l^L(x)\right) + (\overline{\psi}_{\nu_l}^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^L(x))\partial\!\!\!/\left(\psi_{\nu_l}^R(x) + \psi_{\nu_l}^L(x)\right)\right]$$

$$\mathcal{L}_0 = i\left[\overline{\psi}_l^L(x)\partial\!\!\!/\psi_l^L(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^L(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\partial\!\!\!/\psi_l^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}^R(x)\right].$$

On combine les champs $\psi_l^L(x)$ et $\psi_{\nu_l}^L(x)$ dans deux composantes d'un champ donner par

$$\Psi_l^L(x) = \begin{pmatrix}\psi_{\nu_l}^L(x)\\ \psi_l^L(x)\end{pmatrix}.$$

La densité Lagrangienne devient alors,

$$\mathcal{L}_0 = i\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\partial\!\!\!/\Psi_l^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\partial\!\!\!/\psi_l^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}^R(x)\right]. \tag{1.3}$$

Pour les deux composantes de la partie gauche $\Psi_l^L(x)$ et $\Psi_{\nu_l}^L(x)$, on applique une transformation à deux dimensions, donc on introduit les matrices τ_1, τ_2, τ_3 de Pauli qui satisfont la relation de commutation $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k$.

L'oprérateur $U(\alpha) = \exp(\frac{i\alpha_j\tau_j}{2})$ est unitaire $\forall\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Les transformations :

$$\begin{cases} \Psi_l^L(x) \to \Psi_l^{L'}(x) = U(\alpha)\,\Psi_l^L(x) = \exp(\frac{i\alpha_j\tau_j}{2})\Psi(x), \\ \overline{\Psi}_l^L(x) \to \overline{\Psi}_l^{L'}(x) = \overline{\Psi}_l^L(x)\,U^+(\alpha) = \overline{\Psi}_l^L(x)\exp(\frac{-i\alpha_j\tau_j}{2}), \end{cases} \tag{1.4}$$

laissent le terme $i\overline{\Psi}_l^L(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^L(x)$ invariant en effet :

$$\overline{\Psi}_l^{L'}(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^{L'}(x) = \overline{\Psi}_l^L(x)\exp(\frac{-i\alpha_j\tau_j}{2})\partial\!\!\!/\exp(\frac{i\alpha_j\tau_j}{2})\Psi_l^L(x) = \overline{\Psi}_l^L(x)\,\Psi_l^L(x).$$

Les opérateurs $U(\alpha)$ sont des matrices (2×2) unitaires avec la propriété $\det U(\alpha) = +1$. Donc ils composent les transformations $SU(2)_L$.

Les transformations (1.4) sont la géneralisation de la transformation de la phase globale à une dimension. Pour la parité droite, on a les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \psi_l^R(x) \to \psi_l^{R\prime}(x) = \psi_l^R(x), \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \to \psi_{\nu_l}^{R\prime}(x) = \psi_{\nu_l}^R(x), \\ \overline{\psi}_l^R(x) \to \overline{\psi}_l^{R\prime}(x) = \overline{\psi}_l^R(x), \\ \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x) \to \overline{\psi}_{\nu_l}^{R\prime}(x) = \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x). \end{cases} \tag{1.5}$$

Donc avec ces transformations et les transformations (1.4), la densité Lagrangienne $\mathcal{L}_0$ est invariante.

1.2 Transformation de phase locale pour les interactions faibles

Pour obtenir l'invariance sous une transformation de jauge locale il faut introduire des champs de jauge.

Pour la symétrie $SU(2)_L$, les transformations locales sont [2] :

$$\begin{cases} \Psi_l^L(x) \to \Psi_l^{L'}(x) = \exp(\frac{ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Psi_l^L(x)\,, \\ \overline{\Psi}_l^L(x) \to \overline{\Psi}_l^{L'}(x) = \overline{\Psi}_l^L(x)\exp(\frac{-ig\tau_j\omega_j(x)}{2}), \\ \psi_l^R(x) \to \psi_l^{R\prime}(x) = \psi_l^R(x), \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \to \psi_{\nu_l}^{R\prime}(x) = \psi_{\nu_l}^R(x), \\ \overline{\psi}_l^R(x) \to \overline{\psi}_l^{R\prime}(x) = \overline{\psi}_l^R(x), \\ \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x) \to \overline{\psi}_{\nu_l}^{R\prime}(x) = \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x), \end{cases} \tag{1.6}$$

avec $\omega_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ une fonction arbitraire de x et g est une constante (constante de couplage).

On applique les transfomations précédentes pour la densité Lagrangienne (1.3) les deux dernièrs termes sont invariants, pour le premier terme on trouve

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_l^L(x)\partial\!\!\!/\Psi_l^L(x) &\to \overline{\Psi}_l^{L'}(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^{L'}(x)\,, \\ \overline{\Psi}_l^{L'}(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^{L'}(x) &= \left[\overline{\Psi}_l^L(x)\exp(\frac{-ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\right]\partial\!\!\!/\left[\exp(\frac{ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Psi_l^L(x)\right], \\ \overline{\Psi}_l^{L'}(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^{L'}(x) &= \overline{\Psi}_l^L(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^L(x) + \frac{i}{2}g\tau_j\overline{\Psi}_l^L(x)\,\partial\!\!\!/\omega_j(x)\Psi_l^L(x)\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Donc la densité Lagrangienne $\mathcal{L}_0$ devient :

$$\mathcal{L}_0' = i\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\,\partial\!\!\!/\Psi_l^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\partial\!\!\!/\psi_l^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}^R(x) - \frac{g}{2}\tau_j\overline{\Psi}_l^L(x)\,\partial\!\!\!/\omega_j(x)\overline{\Psi}_l^L(x)\right] \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0 - \frac{g}{2}\tau_j\overline{\Psi}_l^L(x)\,\partial\!\!\!/\omega_j(x)\overline{\Psi}_l^L(x)\,. \tag{1.9}$$

Pour obtenir une densité Lagrangienne invariante on introduit des champs de jauge $W_j^\mu(x)$ via la dérivée covariante :

$$\partial^\mu\Psi_l^L(x) \to D^\mu\Psi_l^L(x) = \left(\partial^\mu + \frac{i}{2}g\tau_j W_j^\mu(x)\right)\Psi_l^L(x)\,. \tag{1.10}$$

Donc le lagrangien $\mathcal{L}_0$ devient :

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = i\left[\overline{\psi}_l^L(x)D\!\!\!/\psi_l^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\partial\!\!\!/\psi_l^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}^R(x)\right].$$

Les W_J^μ sont les trois champs vecteurs de jauge.

Pour que la densité Lagrangienne $\tilde{\mathcal{L}}_0$ soit invariante, il faut que les transformations (1.6) des champs leptoniques soient en relation avec la transformation du champ de jauge $W_j^\mu(x)$ tel que :

$$W_j^\mu(x) \rightarrow W_j'^\mu(x) = W_j^\mu(x) + \delta W_j^\mu(x) \tag{1.11}$$

et la dérivée covariante $D^\mu \Psi_l^L(x)$ se transforme comme le champ $\Psi_l^L(x)$:

$$D^\mu \Psi_l^L(x) \rightarrow \exp(\frac{ig\tau_j\omega_j(x)}{2}) D^\mu \Psi_l^L\,(x) \tag{1.12}$$

La transformation infinitésimale est donnée par :

$$W_J^\mu(x) \rightarrow W_J^{'\mu}(x) = W_j^\mu(x) + \delta W_j^\mu(x) = W_j^\mu(x) - \partial^\mu \omega_j(x) - g\varepsilon_{ijk}\omega_j(x) W_k^\mu(x) \tag{1.13}$$

où $\omega_j(x)$ est petit, on obtient alors

$$\delta W_j^\mu(x) = -\partial^\mu \omega_j(x) - g\varepsilon_{ijk}\omega_j(x) W_k^\mu(x) \tag{*}$$

Démonstration de la relation $(*)$:

On pose :

$$\omega\,(x) = \tau_j \omega_j\,(x)\,,$$

$$W^\mu(x) = \tau_j W_j^\mu(x).$$

La transformation du champ de jauge $W^\mu(x)$ est donnée par :

$$W^\mu(x) \rightarrow W'^\mu(x) = W^\mu(x) + \delta W^\mu(x) \tag{1.14}$$

où $\delta W^\mu(x) = \tau_j \delta W_j^\mu(x)$.

Sachant que la dérivée covariante se transforme comme $\Psi_l^L(x)$, alors

$$D^\mu \Psi_l^L(x) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} ig\omega\right) D^\mu \Psi_l^L(x) = \left(1 + \frac{1}{2} ig\omega\right) (\partial^\mu + \frac{1}{2} igW^\mu) \Psi_l^L(x). \tag{1.15}$$

La transformation du champ leptonique $\Psi_l^L(x)$ est

$$\Psi_l^L(x) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} ig\omega\right) \Psi_l^L(x). \tag{1.16}$$

En plus on a la transformation(1.11), et finalement on trouve

$$D^{\mu}\Psi_l^L(x) \rightarrow (\partial^{\mu} + \frac{1}{2}igW^{\mu} + \frac{1}{2}ig\delta W^{\mu})\left(1 + \frac{1}{2}ig\omega\right)\Psi_l^L(x). \tag{1.17}$$

égalissons les équation (1.15) et (1.17), on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{2}ig\omega(x)\right)(\partial^{\mu} + \frac{1}{2}igW^{\mu}) = (\partial^{\mu} + \frac{1}{2}igW^{\mu} + \frac{1}{2}ig\delta W^{\mu})\left(1 + \frac{1}{2}ig\omega(x)\right),$$

$$\Rightarrow \delta W^{\mu} = -\partial^{\mu}\omega(x) + \frac{1}{2}ig\left[\omega(x), W^{\mu}(x)\right]. \tag{1.18}$$

Calculons le commutateur $[\omega(x), W^{\mu}(x)]$:

$$[\omega(x), W^{\mu}(x)] = [\omega_j(x)\tau_j, W_k^{\mu}(x)\tau_k] = \omega_j(x)W_k^{\mu}(x)\left[\tau_j, \tau_k\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^{\mu}(x)\tau_i.$$

Remplaçant ce résultat dans l'équation (1.18), on obtient

$$\delta W^{\mu} = -\partial^{\mu}\omega(x) - ig\varepsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^{\mu}(x)\tau_i. \tag{1.19}$$

Alors

$$\delta W_i^{\mu} = -\partial^{\mu}\omega_i(x) - ig\varepsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^{\mu}(x). \tag{1.20}$$

1.3 Symétrie locale U(1)

La transformation locale de la phase est donnée par [2]

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(ig'Yf(x))\psi(x), \\ \overline{\psi}(x) \rightarrow \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)\exp(-ig'Yf(x)). \end{cases} \tag{1.21}$$

où g' est une constante et $f(x)$ est une fonction arbitraire.

$Y = -\frac{1}{2}, -1, 0$ (l'hypercharge faible) associée aux champs $\Psi_l^L(x), \psi_l^R(x)$ et $\psi_{\nu_l}^R(x)$.

Avec ces transformations locales on trouve une densité Lagrangienne $\mathcal{L}_0$ invariante si on remplace la dérivée normale par une dérivée covariante D^{μ} tel que

$$D^{\mu}\psi(x) = (\partial^{\mu} + ig'YB^{\mu}(x))\,\psi(x). \tag{1.22}$$

où $\psi(x)$ est un champ à quatres composantes $\Psi_l^L(x), \overline{\Psi}_l^L(x), \psi_l^R(x)$ et $\psi_{\nu_l}^R(x)$.

Le champ réel $B^\mu(x)$ qu'on introduit doit se transfome comme

$$B^\mu(x) \to B'^\mu(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x). \tag{1.23}$$

Donc, la densité Lagrangienne est invariante sous les transformations de $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. Si on remplace ces transformations simultanément dans $\mathcal{L}_0$ on trouve que $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}^L$ tel que,

$$\mathcal{L}^L = i\left[\overline{\psi}_l^L(x)\not{D}\psi_l^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\not{D}\psi_l^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\not{D}\psi_{\nu_l}^R(x)\right], \tag{1.24}$$

avec :

$$\begin{cases} D^\mu\psi_l^L(x) = (\partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_j W_j^\mu(x) - \frac{1}{2}ig'B^\mu(x))\psi_l^L(x), \\ D^\mu\psi_l^R(x) = (\partial^\mu - ig'B^\mu(x))\,\psi_l^R(x), \\ D^\mu\psi_{\nu_l}^R(x) = \partial^\mu\psi_{\nu_l}^R(x). \end{cases} \tag{1.25}$$

Donc, le lagrangien $\mathcal{L}^L$ est invariant sous les deux transformmations $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ donc sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

On écrit $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, où

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = i\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\left(ig\gamma_\mu\tau_j W_J^\mu - \frac{1}{2}ig\gamma^\mu B^\mu(x)\right)\Psi_l^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\left(-ig'B^\mu(x)\right)\psi_l^R(x)\right] \\ \mathcal{L}_1 = -gJ_i^\mu(x)W_{i\mu}(x) - g'J_Y^\mu(x)B_\mu(x) \end{cases} \tag{1.26}$$

avec :

$$J_i^\mu(x) = \frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L(x)\gamma^\mu\tau_j\Psi_l^L(x).\ i = 1,2,3 \text{ est le courant faible d'isospin} \tag{1.27}$$

$$J_Y^\mu(x) = -\frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L(x)\gamma^\mu\Psi_l^L(x) - \overline{\psi}_l^R(x)\gamma^\mu\psi_l^R(x) \text{ est le courant d'hypercharge} \tag{1.28}$$

On peut écrire les courants $J_i^\mu(x)$ $(i = 1,2)$ en terme des courants $J^\mu(x)$ et $J^{\mu^+}(x)$ (courant faible d'isospin en terme des courants leptoniques) et même chose pour $W_i^\mu(x)$.

Pour la troixième composante, on pose

$$W_3^\mu(x) = \cos(\theta_w)Z^\mu(x) + \sin(\theta_w)A^\mu, \tag{1.29}$$

$$B^\mu(x) = -\sin(\theta_w)Z^\mu(x) + \cos(\theta_w)A^\mu, \tag{1.30}$$

où θ_w est connue comme l'angle de Weinberg .

1.4 Propriétés des bosons de jauge

La densité Lagrangienne $\mathcal{L}^L$ de l'équation (1.24) décrit les leptons libres et leurs interactions avec les bosons de jauge. Pour la compléter, il faut ajouter des termes qui décrivent les bosons de jauge si les leptons ne sont pas présents et ces termes là il faut qu'ils soient invariants sous $SU(2) \otimes U(1)$.

Pour le champ $B^\mu(x)$ on a la même loi de transformation $(B^\mu(x) \to B'^\mu(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x))$ que celle du champ électromagnétique, donc la densité Lagrangienne de $B^\mu(x)$ est donné par [2]

$$-\frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x). \tag{1.31}$$

où

$$B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x). \tag{1.32}$$

Pour $SU(2)$ si on considère le même terme que le précédent, on a

$$-\frac{1}{4} F_i^{\mu\nu}(x) F_{i\mu\nu}(x), \tag{1.33}$$

où

$$F_i^{\mu\nu} = \partial^\nu W_i^\mu(x) - \partial^\mu W_i^\nu(x). \tag{1.34}$$

Mais cette expression n'est pas invariante sous la transformation (1.6). on a toujours le terme $-g\varepsilon_{ijk}\omega_j(x) W_k^\mu(x)$ en plus. Remplaçons $F_{\mu\nu}$ par

$$G_{i\mu\nu} = F_{i\mu\nu} + g\varepsilon_{ijk} W_{\mu j} W_{\nu k}. \tag{1.35}$$

Alors

$$-\frac{1}{4} F_i^{\mu\nu}(x) F_{i\mu\nu}(x) \to -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) = \mathcal{L}_G. \tag{1.36}$$

En combinant les deux équations $-\frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x)$ et $-\frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x)$ on obtient une densité Lagrangienne invariante.

1.4.1 Masse des bosons de jauge

Dans l'éxpression de la densité Lagrangienne, il n'ya plus de terme de masses des bosons de jauge, mais en réalité seul le photon qui est sans masse et les bosons $W^\pm$ et Z^0 sont avec

masse. Pour décrire les masses de $W^{\pm}$ et Z^{0} on ajoute le terme $m_w^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{2} m_z^2 Z_\mu(x) Z^\mu(x)$ à la densité Lagrangienne.

En ajoutant ces termes de masse, la densité Lagrangienne n'est plus invariante sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, ce qui implique une brisure de symétrie. On va ajouter le terme $-m_e \overline{\psi}_l(x) \psi_l(x)$ pour les leptons électroniques et la densité devient invariante car

$$-m_e \overline{\psi}_l(x) \psi_l(x) = -m_e \overline{\psi}_l(x) (P_L + P_R) \psi_l(x) = -m_e \left(\overline{\psi}_l^L(x) \psi_l^R(x) + \overline{\psi}_l^R(x) \psi_l^L(x) \right) \quad (1.37)$$

où $\overline{\psi}_l^R(x)$ et $\psi_l^R(x)$ sont des isoscalaire, alors que $\overline{\psi}_l^L(x)$ et $\psi_l^L(x)$ sont des isospineurs.

Donc si on ajoute des termes de masse dans la théorie on perd l'invariance de jauge, ou bien on brise la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (modèle de Glashow, qui n'est pas renormalisable).

Donc, pour introduire les masses des bosons de jauge, on va utiliser le mécanisme de la brisure spontanée de la symétrie et on obtient une théorie renormalisable en accord avec les résultats éxpérimentaux [2].

1.5 Brisure spontanée de la symétrie

On a obtenu une théorie qui unifie les intéractions éléctromagnétique et faible. Cette théorie est invariante sous le groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ et elle est renormalisable.

Le poblème qui se pose avec cette théorie est que tous les leptons et les bosons de jauge sont considèrés sans masse, mais en réalité il sont avec masse. Si on ajoute des termes de masse dans la densité Lagrangienne de la théorie on perd l'invariance de jauge et la théorie devient non-renormalisable.

Pour obtenir une théorie renormalisable on introduit les masses avec un mécanisme qui conserve l'invariance de jauge de la densité Lagrangienne ce mécanisme est connu sous le nom de *"Brisure spontanée de la symétrie"* [9].

1.5.1 Modèle de Goldstone

Considérons la densité Lagrangienne [5]

$$\mathcal{L}(x) = (\partial^\mu \Phi^*(x)) (\partial_\mu \Phi(x)) - \mu^2 |\Phi(x)|^2 - \lambda |\Phi(x)|^4, \quad (1.38)$$

où :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\right), \text{ champ complexe} \tag{1.39}$$

μ^2 et λ sont des paramètres réels.

La densité Lagrangienne est invariante sous la transformation de phase globale $U(1)$,

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x)\exp(i\alpha) \tag{1.40}$$

L'hamiltonien de cette théorie est

$$H(x) = \left(\partial^0\Phi^*(x)\right)\left(\partial_0\Phi(x)\right) + \left(\nabla\Phi^*(x)\right)\left(\nabla\Phi(x)\right) + V(\Phi), \tag{1.41}$$

où le potentiel $V(\Phi)$ est donné par

$$V(\Phi) = \mu^2\left|\Phi(x)\right|^2 + \lambda\left|\Phi(x)\right|^4.$$

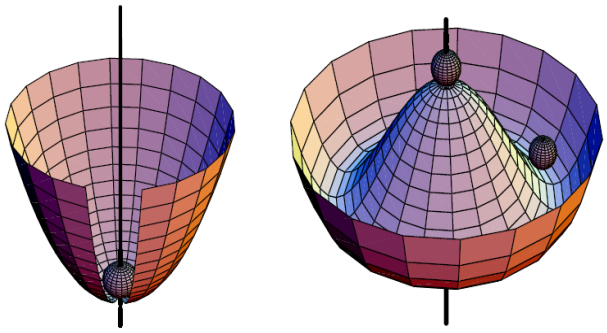


Fig. 1 : Le potentiel $V(\Phi)$

Pour le minimum du potentiel, on a deux possibilités :

$*$ $\mu^2 > 0$: dans ce cas $\frac{\partial V(\Phi)}{\partial\Phi} = 0 \Rightarrow \mu^2\Phi(x) + \lambda\Phi^3(x) = 0$ et le potentiel a un seul minimum qui est : $\Phi(x) = 0$

$*$ $\mu^2 < 0$: dans ce cas le potentiel a une valeur maximale à $\Phi(x) = 0$ et un cercle tout entier de minimum :

$\Phi(x) = \Phi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}\exp(i\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

Dans ce cas, l'état avec la plus base énergie, c'est à dire l'état fondamental n'est pas unique. Donc on a un choix arbitraire pour la direction de θ. Si on choisit une direction particulière pour présenter l'état fondamental on brise la symétrie .

On prend $\theta = 0$ donc $\Phi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}}$ (> 0)(v.e.v ; vaccum expectation value) et on introduit les deux champs réels $\sigma(x)$ et $\eta(x)$ via l'équation suivante

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \sigma(x) + i\eta(x)\right). \tag{1.42}$$

En terme de nouveaux champs la densité Lagrangienne devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma(x)\,\partial_\mu\sigma(x) - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x) + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta(x)\,\partial_\mu\eta(x) \\ &\quad -\lambda v\sigma(x)\left(\sigma^2(x) + \eta^2(x)\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\sigma^2(x) + \eta^2(x)\right)^2.\end{aligned} \tag{1.43}$$

On prend les trois premiers champs comme une densité Lagrangienne libre

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma(x)\,\partial_\mu\sigma(x) - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x) + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta(x)\,\partial_\mu\eta(x), \tag{1.44}$$

et les autres termes comme des intéractions.

Les champs $\sigma(x)$ et $\eta(x)$ expriment la déviation de la configuration stable $\Phi(x) = \Phi_0$.

Cette densité Lagrangienne présente un des champs scalaires $\sigma(x)$ avec une masse $2\lambda v^2$ et $\eta(x)$ sans masse, le boson sans masse qui apparait dans la théorie via la brisure spontanée de la symétrie est connu sous le nom de *"boson de Goldstone"*.

1.5.2 Modèle de Higgs

On considère la densité lagranginne [5]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x) + \left(D_\mu\Phi(x)\right)^*\left(D_\mu\Phi(x)\right) - V(\Phi), \tag{1.45}$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x), \tag{1.46}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \tag{1.47}$$

et

$$V(\Phi) = \mu^2\left|\Phi(x)\right|^2 + \lambda\left|\Phi(x)\right|^4. \tag{1.48}$$

Cette densité Lagrangienne est invariante sous la transformation de jauge $U(1)$

$$\begin{cases} \Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp(-iqf(x))\Phi(x), \\ \Phi^*(x) \to \Phi^{*\prime}(x) = \Phi^*(x)\exp(iqf(x)), \\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x). \end{cases} \tag{1.49}$$

Pour $\mu^2 < 0$:

$$\langle\Phi\rangle_0 = \langle 0\,|\Phi|\,0\rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}}. \tag{1.50}$$

Posons

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \eta\left(x\right) + i\xi\left(x\right)\right). \tag{1.51}$$

tel que la valeur moyenne des champs $\eta\left(x\right)$ et $\xi\left(x\right)$ sur le vide $|0\rangle$ est nulle, c'est à dire

$$\langle 0\,|\eta\left(x\right)|\,0\rangle = \langle 0\,|\xi\left(x\right)|\,0\rangle = 0. \tag{1.52}$$

La densité Lagrangienne devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\left(x\right)F^{\mu\nu}\left(x\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\left(x\right)\partial^\mu\eta\left(x\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\left(x\right)\partial^\mu\xi\left(x\right) + \frac{1}{2}qv^2A^\mu A_\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu(2v\eta + \eta^2 + +\xi^2) - evA^\mu\partial_\mu\xi + eA^\mu\xi\partial_\mu\eta + qA^\mu\eta\partial_\mu\xi \\ &\quad -\lambda v^2\eta^2 - \frac{1}{4}\left(\eta^2+\xi^2\right)^2 - \lambda v\eta\left(\eta^2+\xi^2\right) + \frac{1}{4}\lambda v^4.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Si on compare les degrés de liberté entre éq.(1.45) et éq.(1.53) on voit que dans éq.(1.45), on a quatre degrés de liberté deux pour Φ et Φ^* et deux pour le photon, par contre dans éq.(1.53), on a cinq degrés de liberté η, ξ et trois pour le champ vectoriel massif donc il ya un degré en plus (un champ) non physique dans la théorie.

On peut éliminer le champ ξ de sorte que $\Phi\left(x\right)$ soit $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \sigma\left(x\right)\right)$, la densité éq.(1.45) devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\sigma\left(x\right)\right)\left(\partial_\mu\sigma\left(x\right)\right) - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2\left(x\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\left(x\right)F^{\mu\nu}\left(x\right)\frac{1}{2}\left(qv\right)^2A^\mu A_\mu, \quad (1.54) \\ \mathcal{L}_1 &= -\lambda\sigma^3 v - \frac{1}{4}\lambda\sigma^4 + \frac{1}{2}q^2A^\mu A_\mu\left(2v\sigma\left(x\right) + \sigma^2\left(x\right)\right). \quad (1.55)\end{aligned}$$

Dans cette densité $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, on a quatre degrés de liberté. Le phénomène qu'un boson vecteur devient avec une masse sans perturber l'invariance de jauge est connu sous le nom de *"mécanisme de Higgs"* ($\sigma\left(x\right)$ est le champ de Higgs).

1.5.3 Théorème de Goldstone

En général, si le groupe G de la symétrie interne continue est brisé spontanément à un groupe $H \subset G$ (correspondant à la symétrie de l'état du vide), le nombre de bosons de Goldstone

correspond au nombre de générateurs de G moins le nombre de générateurs de H [8]. Puisque la dimension d'un groupe est donnée par le nombre de ses générateurs, on peut écrire que le nombre de bosons de Goldstone est donné par

$$\dim(G) - \dim(H) = \dim(G/H), \tag{1.56}$$

où G/H est appelé le groupe quotient. L'origine physique de ces particules sans masse est due au fait que les générateurs brisés permettent des transitions, ne coutant aucune énergie au système entre les états du vide (qui ont la même énergie).

1.5.4 Mécanisme de Higgs

Le théorème de Goldstone constitue un problème plutôt qu'une solution pour la génération des masses. On a obtenu des particules sans masse dans la brisure spontanée de la symétrie. Quand on brise spontanément une théorie de jauge les résultats sont très différents. La raison en est que le théorème de Goldstone ne s'applique pas à une symétrie de jauge parce qu'il est impossible de quantifier une théorie de jauge en gardant en même temps la covariance de la théorie et un espace de Hilbert à norme positive [8]. Dans le cas de la brisure spontanée d'une théorie de jauge, les symétries brisées ont une masse et les bosons de Goldstone correspondants disparaissent. On appelle ce phénomène *"mécanisme de Higgs"*.

1.5.5 La théorie électrofaible

On considère la densité Lagrangienne

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B, && (1.57)\\
\mathcal{L}^L &= i\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\not{D}\Psi_l^L(x) + \overline{\psi}_l^R(x)\not{D}\psi_l^R(x) + \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\not{D}\psi_{\nu_l}^R(x)\right], && (1.58)\\
\mathcal{L}^B &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)\,B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}(x)\,G_i^{\mu\nu}(x)\,. && (1.59)
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}^L$: la densité Lagrangienne leptonique.

$\mathcal{L}^B$: la densité Lagrangienne pour les bosons de gauge.

Pour briser l'invariance de jauge spontanément, on introduit le champ de Higgs :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix}\phi_a(x)\\ \phi_b(x)\end{pmatrix}, \tag{1.60}$$

$\phi_a(x)$ et $\phi_b(x)$ sont des champs scalaires.

La transformation $SU(2)$ de $\Phi(x)$ est donnée par

$$\begin{cases} \Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp(\frac{ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Phi(x) \\ \Phi^+(x) \to \Phi^{+\prime}(x) = \exp(\frac{-ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Phi^+(x) \end{cases} \tag{1.61}$$

Pour $U(1), \Phi(x)$ se transfome comme :

$$\begin{cases} \Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp(\frac{ig'Yf(x)}{2})\Phi(x), \\ \Phi^+(x) \to \Phi^{+'}(x) = \exp(\frac{-ig'Yf(x)}{2})\Phi^+(x), \end{cases} \tag{1.62}$$

où Y est l'hypercharge faible.

Sous ces transformtions $\mathcal{L}$ devient : $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H$, avec

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu\Phi(x))^+ (D_\mu\Phi(x)) - \mu^2\Phi^+(x)\Phi(x) - \lambda\left(\Phi^+(x)\Phi(x)\right)^2, \tag{1.63}$$

où la dérivée covariante est donnée par

$$D^\mu\Phi(x) = \left(\partial^\mu + \frac{1}{2}ig\tau_j W_j^\mu(x) + ig'YB^\mu(x)\right)\Phi(x). \tag{1.64}$$

Pour $\mu^2 < 0$ le minimum du potentiel est

$$\Phi(x) = \Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix}, \tag{1.65}$$

tel que

$$\Phi_0^+\Phi_0 = \left|\phi_a^0\right|^2 + \left|\phi_b^0\right|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}.$$

On choisit l'état fondamental pour une valeur particulière de Φ_0

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \tag{1.66}$$

La transformation électromagnétique du champ de Higgs est

$$\Phi(x\ ) \to \Phi'(x) = \exp\left(-ie\left(Y + I_3^w\right)f(x)\right)\Phi(x). \tag{1.67}$$

I_3^w : la charge d'isospin. e est la charge électrique sera définie dans le chapitre suivant.

Le vide $\Phi_0 = \binom{0}{v/\sqrt{2}}$ est invariant sous la transformation de jauge électromagnétique.

Posons

$$\Phi\left(x\ \right)=\begin{pmatrix}\eta_1\left(x\right)+i\eta_2\left(x\right)\\ v+\sigma(x)+i\eta_3\left(x\right)\end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

En remplaçant, dans éq.(1.63) on trouve l'éxpression de $\mathcal{L}^H$ en fonction de $\eta_i\left(x\right)$ et $\sigma(x)$ $(i=1,2,3)$.

Pour obtenir la masse non nulle des leptons, il faut ajouter un terme L^{LH}à la densité lagangienne $\mathcal{L}$ donc :

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^L+\mathcal{L}^B+\mathcal{L}^H+\mathcal{L}^{LH}, \tag{1.69}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{LH} &= -g_L\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\psi_l^R(x)\Phi\left(x\ \right)+\Phi^+\left(x\ \right)\overline{\psi}_l^R(x)\Psi_l^L(x)\right]- \\ &\quad g_{\nu_l}\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\psi_{\nu_l}^R(x)\widetilde{\Phi}\left(x\ \right)+\widetilde{\Phi}^+\left(x\ \right)\overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\Psi_l^L(x)\right],\end{aligned} \tag{1.70}$$

avec $l=e,\mu,....$

$\mathcal{L}^{LH}$: la densité Lagrangienne qui décrit l'intéraction entre les leptons et le boson de Higgs (interaction de Yukawa).

$$\tilde{\Phi}\left(x\ \right)=-i\left(\Phi^+\left(x\ \right)\tau_2\right)^T=\begin{pmatrix}\phi_b^*\\ -\phi_a^*\end{pmatrix}. \tag{1.71}$$

Pour que $\mathcal{L}^{LH}$ soit invariante sous $SU(2)\otimes U(1)$, il faut que

$$\tilde{\Phi}\left(x\ \right)\rightarrow\tilde{\Phi}'\left(x\ \right)=\exp\left(ig'f(x)\right)\tilde{\Phi}\left(x\ \right). \tag{1.72}$$

Donc la densité Lagrangienne totale est

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\not{D}\Psi_l^L(x)+\overline{\psi}_l^R(x)\not{D}\psi_l^R(x)+\overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\not{D}\psi_{\nu_l}^R(x)\right] \\ &\quad -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}\left(x\right)B^{\mu\nu}\left(x\right)-\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}\left(x\right)G_i^{\mu\nu}\left(x\right)+\left(D^\mu\Phi\left(x\right)\right)^+\left(D_\mu\Phi\left(x\right)\right) \\ &\quad -\mu^2\Phi^+\left(x\right)\Phi\left(x\right)-\lambda\left(\Phi^+\left(x\right)\Phi\left(x\right)\right)^2-g_L\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\psi_l^R(x)\Phi\left(x\ \right)+\Phi^+\left(x\ \right)\overline{\psi}_l^R(x)\Psi_l^L(x)\right] \\ &\quad -g_{\nu_l}\left[\overline{\Psi}_l^L(x)\psi_{\nu_l}^R(x)\widetilde{\Phi}\left(x\ \right)+\widetilde{\Phi}^+\left(x\ \right)\overline{\psi}_{\nu_l}^R(x)\Psi_l^L(x)\right],\end{aligned} \tag{1.73}$$

où

$$B_{\mu\nu}\left(x\right) = \partial_\mu B_\nu\left(x\right)-\partial_\nu B_\mu\left(x\right), \tag{1.74}$$

$$F_i^{\mu\nu} = \partial^\nu W_i^\mu(x)-\partial^\mu W_i^\nu(x), \tag{1.75}$$

$$G_{i\mu\nu} = F_{i\mu\nu}+g\varepsilon_{ijk}W_{\mu j}W_{\nu k}. \tag{1.76}$$

Pour $\lambda > 0$ et $\mu^2 < 0$, la symétrie est brisée spontanément et la valeur moyenne sur le vide du champ de Higgs est

$$\langle 0 \left| \Phi\left(x\right) \right| 0 \rangle = \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \tag{1.77}$$

Donc le champ de Higgs n'est pas invariant sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ mais il est invariant seulement sous $U(1)_Q$ ce qui laisse le photon toujours sans masse et la charge électrique conservée.

Avec la brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ (de quatre générateurs à un seul), le boson de Goldstone a été absorbé par les bosons $W^{\pm}$ et Z^0 pour former leurs composantes longitudinales et leurs masses.

Etant donné que la symétrie $U(1)_Q$ est non brisée, le photon reste sans masse ce qui donne une densité Lagrangienne et un état du vide Φ_0 simultanément invariant sous $U(1)_Q$ qui est une conséquence directe de la conservation de la charge électrique Q et cette dernière a une relation avec les valeurs propres de l'opérateur d'isospin $T_3 = \tau_3$ et la charge du champ de Higgs :

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad \text{formule de Gell-Mann Nishijima} \tag{1.78}$$

1.5.6 Le problème des masses des fermions

On a la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{LH}, \tag{1.79}$$

où $\mathcal{L}^L, \mathcal{L}^B, \mathcal{L}^H$ et $\mathcal{L}^{LH}$ les densité définient précédement .

Si on ajoute le terme de masse $-m\overline{\psi}\psi$ à la densité Lagrangienne $\mathcal{L}$ elle ne devient plus invariante sous $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ puisque on a des termes de type $\left(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L\right)$ et les deux composantes gauche et droite ne se transfoment pas de la même manière sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Pour résoudre ce problème on couple le champ leptonique avec celui du Higgs via la densité $\mathcal{L}^{LH}$ définie précédemment [9].

Montrons que $\mathcal{L}^{LH}$ est invariante sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Le terme multiplié par g_L subit

les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \Psi_l^L(x) \to \Psi_l^{L'}(x) = \exp(\frac{ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Psi_l^L(x)\,, \\ \overline{\Psi}_l^L(x) \to \overline{\Psi}_l^{L'}(x) = \overline{\Psi}_l^L(x)\exp(\frac{-ig\tau_j\omega_j(x)}{2}), \\ \psi_l^R(x) \to \psi_l^{R\prime}(x) = \psi_l^R(x), \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \to \psi_{\nu_l}^{R\prime}(x) = \psi_{\nu_l}^R(x), \\ \overline{\psi}_l^R(x) \to \overline{\psi}_l^{R\prime}(x) = \overline{\psi}_l^R(x), \\ \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x) \to \overline{\psi}_{\nu_l}^{R\prime}(x) = \overline{\psi}_{\nu_l}^R(x). \end{cases} \tag{1.80}$$

Pour le champ de Higgs

$$\begin{cases} \Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp(\frac{ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Phi(x)\,, \\ \Phi^+(x) \to \Phi'^+(x) = \exp(\frac{-ig\tau_j\omega_j(x)}{2})\Phi^+(x)\,, \\ \Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp(\frac{1}{2}ig'Yf(x))\Phi(x)\,, \\ \Phi^+(x) \to \Phi'^+(x) = \exp(-\frac{1}{2}ig'Yf(x))\Phi^+(x)\,, \end{cases} \tag{1.81}$$

et pour $\tilde{\Phi}(x) = -i\left(\Phi^+(x\ )\tau_2\right)^T$ on a les transformations suivantes

$$\tilde{\Phi}'(x) = -i\left(\Phi'^+(x\ )\tau_2\right)^T = -i(\exp(-\frac{1}{2}ig'Yf(x))\Phi^+(x)\tau_2)^T = \exp(-\frac{1}{2}ig'Yf(x))\tilde{\Phi}(x). \tag{1.82}$$

Maintenant il faut montrer que $\tilde{\Phi}(x)$ se transforme comme $\Phi(x)$ sous $SU(2)$. Pour cette raison, on considère la transformation infinitésimale suivante

$$\Phi(x) \to \Phi(x) + \delta\Phi(x) = \left(1 + \frac{1}{2}ig\tau_j\omega_j(x) + ...\right)\Phi(x)\,. \tag{1.83}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\Phi(x) = \frac{1}{2}ig\tau_j\omega_j(x)\Phi(x)\,, \tag{1.84}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\Phi^+(x) = -\frac{1}{2}ig\tau_j\omega_j(x)\Phi^+(x)\,. \tag{1.85}$$

On a :

$$\tilde{\Phi}(x) = -i\left(\Phi^+(x\ )\tau_2\right)^T. \tag{1.86}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\tilde{\Phi}(x) = -i\left(\delta\Phi^+(x\ )\tau_2\right)^T = -i(-\frac{1}{2}ig\tau_j\omega_j(x)\Phi^+(x)\tau_2)^T, \tag{1.87}$$

en utilisant la propriété suivante des matrices de Pauli

$$\tau_j\tau_2 = -\tau_2\tau_j^T. \tag{1.88}$$

On trouve

$$\delta\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{2} i g \omega_j(x) \tau_j \tilde{\Phi}(x). \tag{1.89}$$

Donc $\tilde{\Phi}(x)$ se transforme comme $\Phi\,(x)$, et le terme muliplié par g_{ν_l} est invariant.

Exemple : La masse des électrons

On considère la densité suivante

$$\mathcal{L}^{e-H} = -g_L \left[\overline{\Psi}_e^L(x) \psi_e^R(x) \Phi\,(x\ ) + \Phi^+\,(x\ )\, \overline{\psi}_e^R(x) \Psi_e^L(x) \right]. \tag{1.90}$$

$$\Psi_e^L(x) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix},\ \psi_e^R(x) = e_R \text{ et } \Phi\,(x\ ) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \tag{1.91}$$

$$\text{Ce qui donne } \mathcal{L}^{e-H} = -g_e \frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L \right) - \frac{g_e}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L \right) h(x). \tag{1.92}$$

le premier terme de $\mathcal{L}^{e-H}$ est un terme de masse $m_e = g_e \frac{v}{\sqrt{2}}$.

1.6 Applications

1.6.1 La diffusion Compton

La diffusion Compton est définie par les deux digrammes de Feynmann suivants

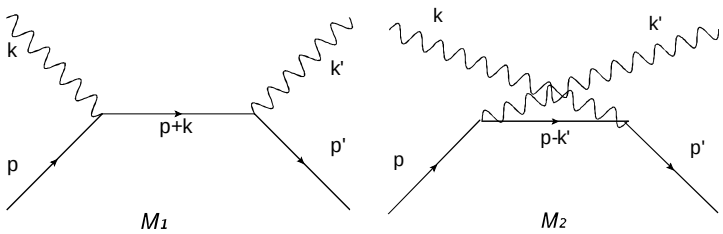


Fig. 2 : La diffusion Compton $e^-\gamma \to e^-\gamma$

Les amplitudes M_1et M_2 sont données par

$$-iM_1 = \overline{u}^{(s')}(p') \left[\varepsilon_\nu^* \left(ie\gamma^\nu \right) \frac{i\left(\not{p} + \not{k} + m \right)}{(p+k)^2 - m^2} \left(ie\gamma^\mu \right) \varepsilon_\mu \right] u^{(s)}(p), \tag{1.93}$$

$$-iM_2 = \overline{u}^{(s')}(p') \left[\varepsilon_\mu \left(ie\gamma^\mu \right) \frac{i\left(\not{p} + \not{k}' + m \right)}{(p+k')^2 - m^2} \left(ie\gamma\nu \right) \varepsilon_\nu^* \right] u^{(s)}(p). \tag{1.94}$$

On définit les quantités suivantes appelées les variables de Mandelslam et on suppose que la masse des deux électrons est nulle

$$s = (p+k)^2 = 2kp, \tag{1.95}$$

$$t = (k-k')^2 = -2pp' = -2kk', \tag{1.96}$$

$$u = (k-p') = -2kp' = -2pk'. \tag{1.97}$$

Les amplitudes éqs. (1.93) - (1.94) deviennent

$$M_1 = \frac{e^2}{s}\varepsilon^*_\nu \varepsilon_\mu \overline{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu (\not{p}+\not{k})\gamma^\mu u^{(s)}(p), \tag{1.98}$$

$$M_2 = \frac{e^2}{u}\varepsilon^*_\nu \varepsilon_\mu \overline{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu (\not{p}+\not{k}')\gamma^\nu u^{(s)}(p). \tag{1.99}$$

On prend le module au carré des deux amplitudes et on somme sur toutes les polarisations et tous les spins, on touve

$$\left|\overline{M_1}\right|^2 = \sum_{pol,spin}\left|M_1\right|^2 = \frac{e^4}{4s^2}Tr\left[\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\not{p}\gamma_\mu(\not{p}+\not{k})\gamma_\nu\right], \tag{1.100}$$

$$\left|\overline{M_2}\right|^2 = \sum_{pol,spin}\left|M_2\right|^2 = \frac{e^4}{4u^2}Tr\left[\not{p}'\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}')\gamma^\nu\not{p}\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}')\gamma_\mu\right], \tag{1.101}$$

évaluant les traces et calculant le produit $M_1M_2^*$, on touve

$$\left|\overline{M_1}\right|^2 = 2e^4\left(\frac{-u}{s}\right), \tag{1.102}$$

$$\left|\overline{M_2}\right|^2 = 2e^4\left(\frac{-s}{u}\right), \tag{1.103}$$

$$\left|\overline{M_1M_2^*}\right|^2 = 0, \tag{1.104}$$

finalement, l'amplitudes totale est

$$|M|^2 = |M_1+M_2|^2 = -2e^4\left(\frac{u}{s}+\frac{s}{u}\right).$$

1.6.2 Paire annihilation (électron-positron)

L'annihilation de l'eléctron avec un positron est caractérisée par les diagrammes de Feynman suivants

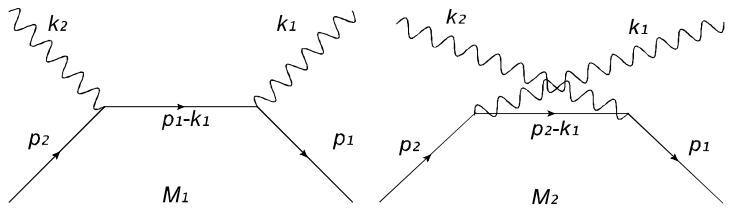


Fig. 3 : Paire annihilation d'un électron avec un positron $e^+e^- \to \gamma\gamma$

Les amplitudes sont données par

$$\begin{cases} -iM_1 = \overline{v^{(s')}}(p_1)\left[\varepsilon_{1\nu}\left(ie\gamma^\nu\right)\frac{i\left(\not{p}_1-\not{k}_1+m\right)}{(p_1-k_1)^2-m^2}\left(ie\gamma^\mu\right)\varepsilon^*_{2\mu}\right]u^{(s)}\left(p_2\right), \\ -iM_2 = \overline{v^{(s')}}(p_1)\left[\varepsilon_{2\mu}\left(ie\gamma^\mu\right)\frac{i\left(\not{p}_2-\not{k}_1+m\right)}{(p_2-k_1)^2-m^2}\left(ie\gamma^\nu\right)\varepsilon^*_{1\nu}\right]u^{(s)}\left(p_2\right). \end{cases} \tag{1.105}$$

On définit les quantités s, t et u comme précédemment et on substitut dans éq.(1.105)

$$\begin{cases} M_1 = \frac{e^2}{t}\varepsilon_{1\nu}\varepsilon^*_{2\mu}\bar{v}^{(s')}(p_1)\gamma^\nu\left(\not{p}_1-\not{k}_1\right)\gamma^\mu u^{(s)}\left(p_2\right), \\ M_2 = \frac{e^2}{u}\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{1\nu}\bar{v}^{(s')}(p_1)\gamma^\mu\left(\not{p}_2-\not{k}_1\right)\gamma^\nu u^{(s)}\left(p_2\right). \end{cases} \tag{1.106}$$

Par sommation sur le spin et les polarisations, on trouve

$$\begin{cases} \left|\overline{M_1}\right|^2 = \frac{e^4}{4t^2}Tr\left[\not{p}_1\left(\not{p}_1-\not{k}_1\right)\not{p}_2\left(\not{p}_1-\not{k}_1\right)\right], \\ \left|\overline{M_2}\right|^2 = \frac{e^4}{4u^2}Tr\left[\not{p}_1\left(\not{p}_2-\not{k}_1\right)\not{p}_2\left(\not{p}2-\not{k}_1\right)\right]. \end{cases} \tag{1.107}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment le terme $M_1M_2^*$ est nul, on aura

$$\left|\overline{M_1}\right|^2 = 2e^4\frac{u}{t}, \tag{1.108}$$

$$\left|\overline{M_2}\right|^2 = 2e^4\frac{t}{u}, \tag{1.109}$$

et l'amplitude totale est donnée par

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \left|\overline{M_1+M_2}\right|^2 = 2e^4\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right). \tag{1.110}$$

1.6.3 Paire annihilation (quark-antiquark)

quark-antiquark →deux photons

L'annihilation d'un quark avec un anti-quark est décrite par les deux diagrammes suivants

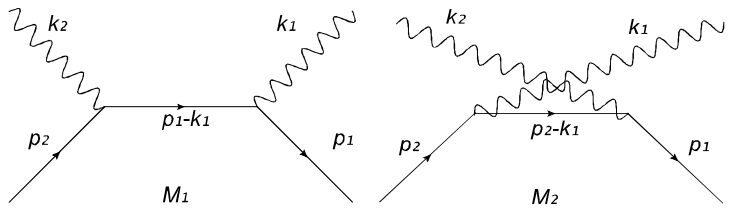


Fig. 4 : Quark-antiquark → deux photons $q\bar{q} \to \gamma\gamma$

Les deux amplitudes sont données par

$$\begin{cases} -iM_1 = \overline{v^{(s')}}(p_1)\left[\varepsilon_{1\nu}\left(ie\gamma^\nu\right)\frac{i\left(\not{p}_1-\not{k}_1+m\right)}{(p_1-k_1)^2-m^2}\left(ie\gamma^\mu\right)\varepsilon^*_{2\mu}\right]u^{(s)}\left(p_2\right), \\ -iM_2 = \overline{v^{(s')}}(p_1)\left[\varepsilon_{2\mu}\left(ie\gamma^\mu\right)\frac{i\left(\not{p}_2-\not{k}_1+m\right)}{(p_2-k_1)^2-m^2}\left(ie\gamma^\nu\right)\varepsilon^*_{1\nu}\right]u^{(s)}\left(p_2\right). \end{cases} \tag{1.111}$$

De la même manière, on trouve

$$\left|\overline{M_1}\right|^2 = \frac{2e^4}{N^2}\frac{u}{t}, \tag{1.112}$$

$$\left|\overline{M_2}\right|^2 = \frac{2e^4}{N^2}\frac{t}{u}, \tag{1.113}$$

$$\left|\overline{M_1 M_2^*}\right|^2 = 0. \tag{1.114}$$

Alors, l'amplitude totale est

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \left|\overline{M_1+M_2}\right|^2 = \frac{2e^4}{N^2}\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right). \tag{1.115}$$

quark-antiquark →deux bosons W

Cette annihilation est caractérisée par le diagramme de Feynman suivant

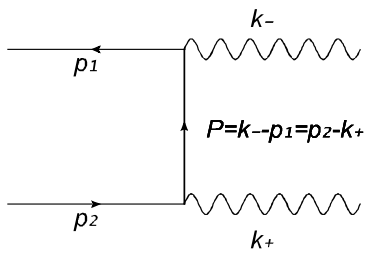


Fig. 5 : Quark-antiquark →deux bosons W $q\bar{q} \to W^+W^-$

L'amplitude est donnée par

$$M = \frac{-i}{\sqrt{2}}G_F\overline{v}\left(p_1\right)\not{P}\left(1-\gamma_5\right)\frac{\not{P}+m}{p^2-m^2}\left(-\not{P}\right)\left(1-\gamma_5\right)u\left(p_2\right). \tag{1.116}$$

Après simplification et tout calcul des sommes sur les spins et les couleurs, on obtient

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \sum_{spin,couleur} |M|^2 = \frac{G_F^2}{N^2} Tr\left[(1+\gamma_5)\not{P}\not{p}_2\not{P}\not{p}_1\right], \tag{1.117}$$

en évaluant la trace et remplaçant G par $\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{g^2}{m_W^2}$, on trouve pour l'amplitude totale l'expression suivante

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \frac{g^4}{4N^2 m_W^2}\left[(P.p_1)(P.p_2)\right]. \tag{1.118}$$

1.6.4 La désintégration du boson W^+

On considére la désintégration du boson W^+ :

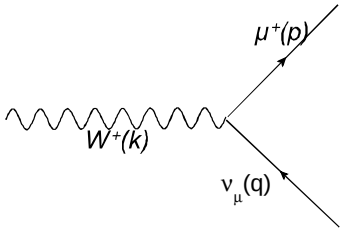


Fig. 6 : La désintégration du boson W^+ $W^+ \to \mu^+\nu_\mu$

L'amplitude est donnée par

$$M = \frac{-ig}{2\sqrt{2}}\overline{u}(q)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\varepsilon_\alpha v(p). \tag{1.119}$$

On prend le module au carré et on somme sur les spins

$$\sum_{spin}|M|^2 = \frac{g^2}{8}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta^* Tr\left[(\not{p}+m_\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{q}\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right], \tag{1.120}$$

$$\sum_{spin}|M|^2 = \frac{g^2}{8}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta^* Tr\left[\not{p}\gamma^\alpha\not{q}\gamma^\beta - \not{p}\gamma^\alpha\not{q}\gamma^\beta\gamma_5\right]. \tag{1.121}$$

On somme maintenant sur les polarisations, on trouve

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \sum_{pol,spin}|M|^2 = \frac{g^2}{3}\left[p.q + \frac{2(p.k)(q.k)}{m_W^2}\right]. \tag{1.122}$$

Si on calcule les produits des quadri-impulsions p, q et k en fonction des masses m_μ et m_W, on trouve

$$p.q = \frac{1}{2}\left(m_\mu^2 - m_W^2\right), \tag{1.123}$$

$$p.k = \frac{1}{2}\left(m_\mu^2 + m_W^2\right), \tag{1.124}$$

$$q.k = p.q = \frac{1}{2}\left(m_\mu^2 - m_W^2\right), \tag{1.125}$$

substituant dans l'éq. (1.122),

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \frac{g^2}{3}\left[\left(m_\mu^2 - m_W^2\right) + \frac{\left(m_\mu^2 + m_W^2\right)\left(m_\mu^2 - m_W^2\right)}{m_W^2}\right], \tag{1.126}$$

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \frac{g^2}{3}\left(m_\mu^2 - m_W^2\right)\left(1 + \frac{m_\mu^2}{2m_W^2}\right). \tag{1.127}$$

On calcule maintenant le taux de désintégration

$$\Gamma\left(W^+ \to \mu^+\nu_\mu\right) = \frac{1}{2m_W}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_\mu}\frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2E_\nu}(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(k - p - q\right)\left|\overline{M}\right|^2. \tag{1.128}$$

Remplaçons la valeur de $\left|\overline{M}\right|^2$ et calculons l'intégrale

$$\Gamma\left(W^+ \to \mu^+\nu_\mu\right) = \frac{g^2}{48\pi}m_W\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_W^2}\right)^2\left(1 + \frac{m_\mu^2}{m_W^2}\right). \tag{1.129}$$

En utilisant

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}. \tag{1.130}$$

On trouve finalement

$$\Gamma\left(W^+ \to \mu^+\nu_\mu\right) = \frac{G}{6\pi\sqrt{2}}m_W^3\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_W^2}\right)^2\left(1 + \frac{m_\mu^2}{m_W^2}\right). \tag{1.131}$$

1.6.5 La désintegration du Higgs

La désintégration du Higgs en fermion antifermion

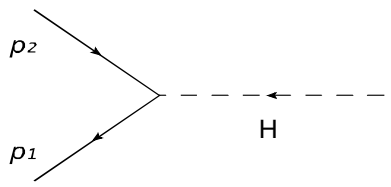


Fig. 7 : La désintégration du Higgs en $f\ \overline{f}\ \ H\,(P) \rightarrow f\,(p_1)\,\overline{f}\,(p_2)$

L'amplitude

$$M = -im_f \left(G_F\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{u}(p_1)v(p_2), \tag{1.132}$$

où les impulsions des fermions (antifermions) sont

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}m_H\,(1,0,0,1)\,. \tag{1.133}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}m_H\,(1,0,0,-1)\,. \tag{1.134}$$

$$|M|^2 = m_f^2 G_F\sqrt{2}\sum_{spin}\overline{u}(p_1)v(p_2)\overline{v}(p_2)u(p_1) \tag{1.135}$$

$$|M|^2 = m_f^2 G_F\sqrt{2}Tr\left[(\not{p}_1 + m_f)\,(\not{p}_2 - m_f)\right]$$

$$|M|^2 = m_f^2 G_F\sqrt{2}Tr\,(\not{p}_1\not{p}_2)$$

$$|M|^2 = 4m_f^2 G_F\sqrt{2}p_1p_2. \tag{1.136}$$

On pose

$$P = p_1 + p_2 \Rightarrow P^2 = m_H^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = 2m_f^2 + 2p_1p_2. \tag{1.137}$$

$$\Rightarrow\ p_1p_2 = \frac{1}{2}m_H^2 - m_f^2. \tag{1.138}$$

On remplace dans l'éq. (1.136)

$$|M|^2 = 2\sqrt{2}G_F m_f^2 m_H \left(m_H - \frac{2m_f^2}{m_H}\right). \tag{1.139}$$

Le taux de désintégration

$$\Gamma\left(H \to f\ \overline{f}\right) = \frac{1}{2m_H}\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3\, 2E_f}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\overline{f}}}\,|M|^2\,\delta^{(4)}\left(P - p_1 - p_2\right). \tag{1.140}$$

On pose :

$$I = \int \frac{d^3p_1}{2E_f}\frac{d^3p_2}{2E_{\bar{f}}}\delta^{(4)}\left(P - p_1 - p_2\right). \tag{1.141}$$

On a

$$\int \frac{d^3p_2}{2E_{\bar{f}}} = \int d^4p_2\delta\left(p_2^2 - m_f^2\right). \tag{1.142}$$

Alors

$$I = \int \frac{d^3p_1}{2E_f}d^4p_2\delta^{(4)}\left(P - p_1 - p_2\right)\left(\delta p_2^2 - m_f^2\right). \tag{1.143}$$

On choisit un repère pour P et p_1 tel que

$$P = (m_H, 0, 0, 0), \tag{1.144}$$

$$p_1 = (E_f, p_1\sin\theta\cos\varphi, p_1\sin\theta\sin\varphi, p_1\cos\theta). \tag{1.145}$$

$$I = \int \frac{p_1^2 dp_1}{E_f}\delta\left(m_H^2 - 2E_f m_H\right), \tag{1.146}$$

d'autre part on a :

$$E_f^2 = \mathbf{p}_1^2 + m_f^2 \Rightarrow E_f dE_f = p_1 dp_1, \tag{1.147}$$

donc :

$$I = 2\pi\int p_1 dE_f\delta\left(m_H^2 - 2E_f m_H\right) = 2\pi p_1|_{E_f=\frac{m_H}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_H^2}{4} - m_f^2}. \tag{1.148}$$

Finalement remplaçons ce résultat dans l'éq. (1.140) ,on trouve

$$\Gamma\left(H \to f\ \overline{f}\right) = \frac{G_F}{4\pi\sqrt{2}}m_f^2 m_H\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.149}$$

La désintégration du Higgs en deux bosons W

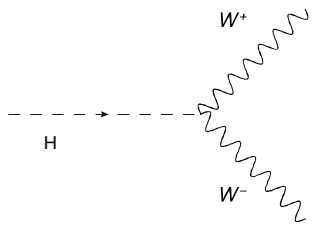


Fig. 8 : La désintégration du Higgs en $W^+\ W^-$ $\quad H\,(P) \to W^+(k_1, \varepsilon_1) W^-(k_2, \varepsilon_2)$

L'amplitude

$$M = \frac{2}{v} m_w^2 \varepsilon_1^* \varepsilon_2^*. \tag{1.150}$$

$$P = (m_H, 0)\,, k_1 = \left(\frac{m_H}{2}, k\right), k_2 = \left(\frac{m_H}{2}, -k\right) \tag{1.151}$$

avec

$$|k| = \frac{1}{2} m_H \sqrt{1 - \frac{4m_w^2}{m_{2H}}}. \tag{1.152}$$

Les vecteurs de polarisation des bosons W sont

$$\varepsilon^{(1)}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon^{(2)}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.153}$$

alors que la troixième composante est donnée par

$$\varepsilon^{(3)}(k_1) = \frac{1}{m_w} \begin{pmatrix} -|k| \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} m_H \end{pmatrix}, \varepsilon^{(3)}(k_2) = \frac{1}{m_w} \begin{pmatrix} |k| \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} m_H \end{pmatrix}. \tag{1.154}$$

Les amplidutes suivant les directions sont données par

$$M^{(11)} = M^{(22)} = \frac{-2m_w^2}{v}. \tag{1.155}$$

$$M^{(33)} = \frac{-2m_w^2}{v m_H^2}\left(|k|^2 + \frac{m_H^2}{4}\right) = \frac{-2}{v}\left[\frac{m_H^2}{4}\left(1 - 4\frac{m_w^2}{m_H^2}\right) + \frac{m_H^2}{4}\right]. \tag{1.156}$$

$$M^{(33)} = \frac{1}{v}\left(m_H^2 - 2m_w^2\right). \tag{1.157}$$

Le taux de désintégration

$$\Gamma\left(H \to W^+\ W^-\right) = \frac{1}{2m_H} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3\, 2E_1} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3\, 2E_2} \left|M\right|^2 \delta^{(4)}\left(P - k_1 - k_2\right). \tag{1.158}$$

Calculons l'intégrale

$$I = \int \frac{d^3k_1}{2E_1} \frac{d^3k_2}{2E_2} \delta^{(4)}\left(P - k_1 - k_2\right), \tag{1.159}$$

de la même manière que la précédente, on trouve

$$\Gamma\left(H \to W^+\ W^-\right) = \frac{G_F m_H^3}{8\pi\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{4m_w^2}{m_H^2}} \left(1 + \frac{12m_w^4}{m_H^4} - \frac{4m_w^2}{m_H^2}\right). \tag{1.160}$$

Chapitre 2

Le Problème du Modèle Standard

Le Modèle Standard en Physique des Particules permet de rendre compte d'une grande majorité d'observations en ce qui concerne trois des quatre interactions fondamentales. En effet, l'interaction gravitationnelle n'est pas prise en compte dans ce modèle et elle est décrite séparément par la Théorie de la Relativité Générale.

Le Modèle Standard (SM) est basé sur le groupe de jauge non abélien $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Le groupe $SU(3)_C$ est une symétrie de jauge de la chromodynamique quantique (QCD) décrivant les interactions fortes et le groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ décrit l'interaction électro-faible (électromagnétique et faible). Enfin, le mécanisme de Higgs confère une masse aux particules du modèle par l'introduction d'un champ scalaire. Ce mécanisme brise spontanément la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ne laissant que la symétrie $U(1)_Q$ de la QED. Toutes les particules du SM peuvent être classées suivant leurs nombres quantiques associés à chaque groupe de symétrie, voir Tab. 2.1 :

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_Q$
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$1/3$	$2/3$ $-1/3$
$\overline{u}_L$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	$-4/3$	$-2/3$
$\overline{d}_L$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	$2/3$	$1/3$
$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	-1	0 -1
$\overline{e}_L$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	2	1
H	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	-1	0
B	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	0
W	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	0	$0, \pm 1$
g	$\mathbf{8}$	$\mathbf{1}$	0	0

Tab. 2.1 : particules du SM

Le lagrangien du SM s'écrit

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_J + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_H, \tag{2.1}$$

où

$\mathcal{L}_J$: le lagrangien du secteur de jauge, $\mathcal{L}_F$: le lagrangien du secteur des fermions, $\mathcal{L}_Y$: le lagrangien du secteur de Yukawa et $\mathcal{L}_H$: le lagrangien du secteur de Higgs.

2.1 Secteur de jauge

Les termes de jauge du SM sont contenus dans l'expression $\mathcal{L}_J$ qui s'écrit comme,

$$\mathcal{L}_J = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{g_i^2}F^a_{i\mu\nu}F^{\mu\nu}_{ia}, \tag{2.2}$$

avec pour chaque indice i,

$$F^a_{i\mu\nu} = \partial_\mu G^a_{i\nu} - \partial_\nu G^a_{i\mu} - f^{abc}G^a_{i\mu}G^a_{i\nu}. \tag{2.3}$$

Les champs $G_{i\mu} = \left\{B_\mu, W^{1..3}_\mu, g^{1..8}\right\}$ représentent les bosons vecteurs associés aux groupes $U(1)_Y, SU(2)_L$ et $SU(3)_C$ respectivement [8]. Les termes f^{abc} sont les constantes de structure associées à chaque goupe. Ces constantes sont déduites à partir des relations de commutation entre les générateurs de chaque groupe :

$$\left[T^a_j, T^b_j\right] = if^{adc}T^c_j. \tag{2.4}$$

2.2 Secteur fermionique

Les parties gauches de chaque génération de leptons L et de quarks Q se transforment comme des doublets $SU(2)_L$ tandis que les parties droites se transforment comme des singlets [8],

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix} \quad \bar{e}_{i_R}. \tag{2.5}$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L \bar{u}_{iR}\bar{d}_{i_R}. \tag{2.6}$$

On admettra que les neutrinos sont sans masse.

Le Lagrangien $\mathcal{L}_F$ de la partie fermionique est,

$$\mathcal{L}_F = L_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu L_i + \bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{e}_i + Q_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu Q_i + \bar{u}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{u}_i + \bar{d}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{d}_i, \tag{2.7}$$

où la dérivée covariante peut s'écrire sous la forme

$$D_\mu = \partial_\mu - i\sum_{j=1}^{3} g_j n_j G^a_{j\mu} T^a_j, \tag{2.8}$$

avec $n_1 = Y$ pour l'hypercharge $U(1)_Y$, $n_2 = 0, 1$ pour un singlet ou un doublet de $SU(2)_L$ respectivement et $n_3 = 0, 1$ et -1 pour un singlet, un triplet ou un antitriplet de $SU(3)_C$ respectivement. Les termes de Yukawa s'obtiennent en formant tous les invariants de jauge de type fermion-fermion-scalaire avec le champ H défini plus tard,

$$\mathcal{L}_Y = i\lambda^e_{ij} L^t_i \sigma_2 \bar{e}_{iL} H^* + i\lambda^u_{ij} Q^t_i \sigma_2 \bar{u}_{iL} \tau_2 H + i\lambda^d_{ij} Q^t_i \sigma_2 \bar{d}_{jL} H^* + h.c. \tag{2.9}$$

La symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ interdit l'introduction directe des termes de masse pour les fermions et les bosons. Ces termes seront générés grâce à la brisure spontanée de symétrie dans le secteur de Higgs.

2.3 Secteur de Higgs

Le secteur de Higgs du SM est composé d'un doublet $SU(2)_L$ de champs scalaires complexes avec une hypercharge $Y = 1$,

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Ce doublet est couplé aux bosons de jauge grâce à la dérivée covariante D_μ donnée par éq.(2.8) Le terme de Higgs du Lagrangien s'écrit comme [8],

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^+ (D^\mu H) - V(H), \tag{2.11}$$

$V(H)$ est le potentiel de Higgs donné par :

$$V(H) = -\mu^2 H^+ H + \lambda \left(H^+ H\right)^2. \tag{2.12}$$

Le mécanisme de Higgs du SM suppose que ces paramètres μ et λ sont choisis de telle manière que le potentiel $V(H)$ est minimal pour une valeur non nulle du champ du Higgs (considérée comme le vide), ce vide n'étant plus invariant sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, autrement dit, la valeur moyenne dans le vide $\langle 0|H|0\rangle$ satisfait :

$$|\langle 0|H|0\rangle|^2 = \frac{v^2}{2} \neq 0. \tag{2.13}$$

Par conséquent, on peut développer le champ de Higgs autour de cette valeur (voir chapitre 1),

$$H = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + h^0 + iG^0\right) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Le champ h^0 représente le boson de Higgs et les champs G^+, G^- et G^0 sont des degrés non physiques (Goldstones) et peuvent être éliminés par une transformation de jauge adéquate.

Après la brisure de symétrie, les bosons de jauge W^3_μ et B_μ du secteur électrofaible ne représentent plus des états physiques du modèle. Les champs physiques sont obtenus par des combinaisons linéaires faisant intervenir l'angle de Weinberg θ_W,

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & -\sin(\theta_W) \\ \sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \pm W^2_\mu), \tag{2.16}$$

avec

$$\cos(\theta_W) = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin(\theta_W) = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \tag{2.17}$$

Le photon A_μ reste sans masse et peut être interprété comme le boson de jauge de la symétrie résiduelle $U(1)_Q$ des interactions électromagnétiques. Les bosons dits de Nambu-Goldstone $G^\pm$ et G_0 sont réabsorbés afin de donner une masse aux bosons $W^\pm$ et Z^0.

2.4 Problèmes du Modèle Standard

Toutes les recherches en physique des hautes énergies durant ces trentes dernières années sont basées sur la quête d'une théorie capable de remplacer le Modèle Standard (SM) et décrire la nature au-delà de l'échelle du TeV. Ainsi, il est important de savoir si cette quête est justifiée ou non étant donné que jusqu'à présent le SM nous a offert certains accords (plus frappantes) entre données expérimentales et prédictions théoriques. Nous allons commencer par examiner brièvement les raisons pour oublier un tel SM succès.

Actuellement on y trouve une variété de tels arguments, à la fois théoriques et expérimentaux qui conduisent à la conclusion que le Modèle Standard devraît être seulement une théorie effective d'une autre plus fondamentale, nous mentionnons brièvement queleques-uns :

- Le SM ne contient pas la gravité.
- Le problème de la hiérarchie.
- Le problème de la matière manquante (matière noire et énergie sombre).
- La résolution du problème CP.

2.4.1 Le problème de la gravité

Nous décrivons ici certains de ces arguments de façon plus détaillée en commençant par la gravité. Si nous suivons notre intuition que la théorie fondamentale doit décrire toutes les forces de la nature dans le même cadre quantique, nous aurons besoin d'etendre le SM de manière à faire inclure cette force. Cependant, ceci s'avère plus difficile pour diverses raisons : la gravité ne peut être quantifiée systématiquement comme une théorie des champs [12], de plus, la gravité est une force extrêment faible à basses énergies (petites masses i.e, grandes distances) même si on compare à la force faible comme le montre le tableau ci-dessous (voir Tab. 2.2), ect .... La nouvelle théorie est tenue à fournir une explication naturelle à la faiblesse apparente de la gravité par rapport aux trois autres interactions fondamentales.

La force gravitationelle entre deux particules de masse m est :

$$F_{grav} = G_N \frac{m^2}{r^2} \ , \quad G_N^{-\frac{1}{2}} = M_{Planck} = 10^{19} \text{ GeV}. \tag{2.18}$$

Si on compare cette froce avec la force électrique $F_{el} = \frac{e^2}{r^2}$ pour le proton :

$$\frac{F_{grav}}{F_{el}} = G_N \frac{m_{proton}^2}{e^2} \simeq 10^{-40}. \tag{2.19}$$

force	gamme	intensité de 2 protons	intensité à $10^{-16}cm$
Gravitation	∞	10^{-18}	10^{-30}
Electromagnétique	∞	10^{-2}	10^{-2}
faible (radioactivité β)	$10^{-15}cm$	10^{-5}	10^{-2}
forte (force nucleaire)	$10^{-12}cm$	1	10^{-1}

Tab. 2.2 : Comparaison entre les 4 intéractions fondamentales

La distance à laquelle la gravitation devient comparable aux autres interactions est $10^{-33}cm$, l'échelle de Planck. L'énergie qui correspond à cette longueur est de l'ordre de la masse de Planck ($\backsim 10^{15} \times$ l'énergie de LHC !).Une autre grande difficulté qui s'ajoute est même si on peut construire un tel modèle, sa vérification phénoménologique sera extrêmement difficile.

2.4.2 Le problème de la hiérarchie

L'un des argument le plus convaincant en faveur de la supersymétrie est le problème de hiérarchie du SM ainsi que le besoin d'un ajustement très rigoureux. Ceux-ci sont caractérisés par une dépendance des masses prédites de certaines particules par rapport à l'échelle d'unification des intéractions. Ceci est dû même à des masses théoriques plus grandes que les limites éxpérimentales connues.

Le problème d'ajustement fin provient des divergences quadratiques qui apparaissent lors du calcul des énergies d'auto-interaction de certaines particules. En effet la théorie quantique des champs admet qu'une particule interagisse avec elle-même va créer une auto-énergie fournissant ainsi une correction à la masse de la particule. Par exemple, un photon peut se désintégrer en

une paire virtuelle électron-positron qui s'annihile pour reformer le photon :

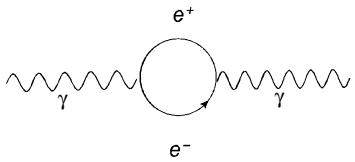


Fig. 9 : Couplage e^+e^- du photon

Dans le cas du photon, lorsqu'on calcule l'intégrale sur l'espace des phases du diagrammes de Feynman ci-haut, on obtient une correction nulle en raison de la symétrie de jauge $U(1)$ en QED. Cette symétrie protège donc la masse du photon contre les corrections qui la rendraient nulle.

Par contre, lorsqu'on applique des corrections d'auto-interaction du Higgs, des divergences surviennent parce que, la masse du Higgs reçoit des corrections dues à son couplage avec les différents fermions de SM. Considérons la boucle fermion-antifermion suivante :

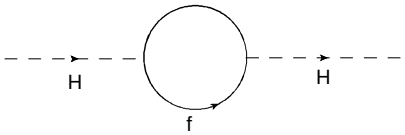


Fig. 10 : Couplage fermion-antifermion du Higgs

Soit λ_f le couplage Higgs-fermion-antifermion. La correction à la masse du Higgs s'obtient en intégrant la trace de l'amplitude de probabilité du processus sur tout l'espace des phases [13]. On aura alors deux termes de somme fermion-Higgs $i\lambda_f/\sqrt{2}$ et deux propagateurs fermioniques $[i/(k-m_f)]$, où k est la quadri-impulsion. $N(f)$ est un facteur de multiplicité des interactions, par exemple $N(q)=3$ pour les quarks en raison des 3 couleurs.

$$\begin{aligned}
\Delta m_H^2 &= -N(f)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}Tr\left[\left(\frac{i\lambda_f}{\sqrt{2}}\right)\frac{i}{\not{k}-m_f}\left(\frac{i\lambda_f}{\sqrt{2}}\right)\frac{i}{\not{k}-m_f}\right] \\
\Delta m_H^2 &= -2N(f)\lambda_f^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{k^2+m_f^2}{\left(k^2-m_f^2\right)^2}\right] \\
\Delta m_H^2 &= -2N(f)\lambda_f^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{k^2-m_f^2}+\frac{2m_f^2}{\left(k^2-m_f^2\right)^2}\right]. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégrale (2.20) montre une divergence quadratique à haute énergie ($k \to \infty$), c'est-à dire qu'il ne diminue pas assez vite pour que l'intégrale converge. On peut éviter cette divergence en introduisant une coupure Λ qui régularise le comportement de l'intégrale aux hautes énergies en tenant compte d'une nouvelle physique modifiant la dynamique d'interaction à ces échelles, par exemple une unification des forces.

Ceci correspond à une régularisation de type Pauli-Villard :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k)dk = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} f(k)k^3 dk. \tag{2.21}$$

La correction due au premier terme de l'équation (2.20) est

$$\hat{\Delta} m_H^2 = -N(f)\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2}\Lambda^2. \tag{2.22}$$

On obtient ainsi une correction à la masse du Higgs qui est proportionelle à la coupure Λ^2. Or, cette dernière devrait raisonnablement être de l'ordre de l'échelle d'unification ultime de la théorie utilisée. Ainsi, on obtient $\Lambda_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV dans le cadre de la théorie grandement unifiée et $\Lambda_p \sim M_p \sim 10^{19}$ GeV, dans le cas d'une éventuelle théorie quantique de la gravité (M_p est la masse de Planck). Ceci est bien au-delà de la masse attendue du Higgs physique $M_H \leq 1$TeV.

On aboutit alors au *problème d'ajustement fin* : il faut une concordance étroite entre les paramètres du SM afin qu'une massse nue élevée du Higgs s'annule avec les énormes corrections d'auto-interaction prédites pour donner un résultat de l'ordre de TeV. C'est également là le coeur du *problème d'hiérarchie du SM :* les corrections à la masse du Higgs dépendent du niveau où l'on se situe dans la hiérarchie des théories physiques.

2.4.3 Le probléme de la matière noire (et l'énergie sombre)

Une autre raison pour aller au-delà du Modèle Standard est l'existance de la Matière Noire. Les observations astronomiques nous disent que la matière baryonique ordinaire est seulement une fraction miniscule de l'énergie de l'Univers. Il y a des observations qui pointent vers le fait qu'une espèce de matière non-lumineuse est là-bas et c'est réellement beaucoup plus abondante que la matière baryonique, consistant autour de 25% de la densité d'énergie totale de

l'Univers. Une explication naturelle est que cette matière noire consiste en une nouvelle espèce de particules stables, massives à l'échelle électrofaible et intéragissant faiblement (WIMPs).

Ainsi, on a l'énergie noire qui est une forme d'énergie inconnue en laboratoire emplissant tout l'Univers et dotée d'une pression négative, qui fait que cette dernière se comporter comme une force gravitationelle répulsive. L'énergie sombre est indirectement mise en évidence par diverses observations astrophysiques, notament l'accélération de l'expansion de l'Univers [15].

L'énergie noire est, en terme de densité d'énergie, la composante majeure de l'Univers. Elle représente 65% à 80% de la densité totale de l'Univers (72% d'après le site de la NASA).

Pour résoudre ces problèmes, plusieurs modèles existent. La théorie la plus prometteuse est la supersymétrie car elle répond de manière élégante à ces différents problèmes.

Chapitre 3

Une Solution : La Supersymétrie

Une des principales motivations en faveur de la supersymétrie est que cette théorie permet de résoudre le problème de hiérarchie du SM. La supersymétrie introduit une nouvelle symétrie entre les fermions et les bosons qui ajoute de nouvelle particules et permet ainsi de stabiliser la masse du Higgs. En effet, si on regarde l'impact des boucles de scalaires sur les corrections à la masse du Higgs h^0, l'energie propre du boson de Higgs reçoit une contribution supplémentaire, on note Δm_H^2 par $-i\sum_H(0)$ [13].

$$-i\sum_H(0) \supset -\lambda_s \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{l^2-m_s^2}. \tag{3.1}$$

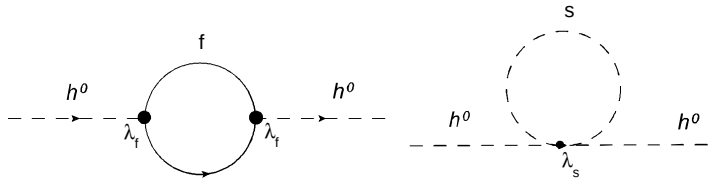


Fig. 11 : Contribution fermionique et scalaire à l'énergie propre du champ de Higgs en Supersymétrie.

Les paramètres λ_f et λ_s représentent respectivement les couplages du champs de Higgs avec des fermions et des scalaires. Ce qui donne pour la masse du Higgs

$$\delta m_h^2 \supset \frac{\lambda_s}{16\pi^2}\left(\Lambda^2 - 2m_s^2\ln(\frac{\Lambda}{m_s}) + ...\right). \tag{3.2}$$

Si on suppose que les deux couplages λ_s et λ_f sont reliés par

$$\lambda_s = \lambda_f^2 \tag{3.3}$$

et qu'il existe deux degrés de liberté bosoniques pour chaque degré de liberté fermionique, les divergences quadratiques se compensent exactement [13].

La supersymétrie permet, par ailleurs, d'unifier beaucoup mieux les constantes de couplages à grande échelle. En effet, dans une théorie supersymétrique, le spectre des particules est différent de celui du SM et ces nouvelles particules contribuent alors dans les équations d'évolution des constantes de couplages $\alpha_i = \frac{g_i 2}{4\pi}$

$$\frac{1}{\alpha_i(Q)} = \frac{1}{\alpha_i(\mu)} + \frac{b_i}{2\pi}\left(\frac{\mu}{Q}\right) \quad \text{(à une boucle).} \tag{3.4}$$

μ : l'énergie où on mesure la constante de couplage α_i.

Q : autre échelle pour l'energie.

Les coefficients b_i sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} b_1 &= 2N_g + \frac{3}{10}N_H, \\ b_2 &= 2N_g + \frac{1}{2}N_H - 6, \\ b_3 &= 2N_g - 9. \end{aligned} \tag{3.5}$$

N_g et le N_H représentent respectivement le nombre de génération et cel du doublet de Higgs.

La supersymétrie inclut de plus un candidat favorable à la description de la Matière Noire, le neutralino χ_1^0. Enfin, la supersymétrie apparait naturellement dans les théories des supercordes qui font partie des principales voies de recherche dans la découverte d'une théorie quantique de la gravité.

3.1 Algèbre Supersymétrique

La supersymétrie est une nouvelle symétrie qui relie les bosons et les fermions. Les générateurs de la supersymétrie sont des spineurs de Weyl à deux composantes, Q et son conjugué

$\tilde{Q}$, qui satisfont les relations suivantes [13]

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \left\{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\right\} = 0, \\ \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu, \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les indices $\alpha, \beta, \dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ prennent les valeurs 1 ou 2, $\sigma^\mu(1, \sigma_i)$ avec σ_i les matrices de Pauli, enfin P_μ est le générateur de translation. Une transformation de supersymétrie transforme un boson $|s\rangle$ en un fermion $|f\rangle$ et vise versa

$$Q\,|s\rangle = |f\rangle\,, \qquad Q\,|f\rangle = |s\rangle\,. \tag{3.7}$$

La superalgèbre (3.6) contient l'algèbre de Poincaré comme sous-algèbre. Si on introduit les opérateurs de Casimir pour le groupe de Poincaré, la masse $P^2 = P_\mu\, P^\mu$ et l'opérateur de spin $W^2 = W_\mu W^\mu$ avec

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}. \tag{3.8}$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \left[Q_\alpha, P^2\right] &= 0, \\ \left[Q_\alpha, W^2\right] &\neq 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

c'est-à-dire que les multiplets de la supersymétrie contiennent des particules de spins différents mais de la même masse.

3.2 Supermultiplets

La supersymétrie est une symétrie qui relie également les couplages et les masses des particules de différents spin. Les particules différentes de spin $\frac{1}{2}$ sont regoupées pour reformer des supermultiplets. Tous les autres nombres quantiques ainsi que les masses sont identiques à l'interieur d'un supermultiplet. Il apparait donc que pour construire une théorie réaliste, il est nécessaire que cette supersymétrie soit brisée. Il existe deux types de supermultiplets dans l'extension supersymétriques minimale "*MSSM*" : supermultiplets chiraux et supermultiplets vectoriels.

3.2.1 le supermultiplet chiral

Lagrangien du supermultiplet chiral

La plus simple théorie supersymétrique qu'on peut construire consiste en un fermion de Weyl à deux composantes et, pour avoir le même nombre de degrés de liberté bosonique, un champ scalaire complexe [20]

$$\mathcal{L} = -i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi, \tag{3.10}$$

sous transformation de supersymétrie le scalaire devient un fermion

$$\delta\phi = \epsilon\psi, \qquad \delta\phi^* = \epsilon^\dagger \psi^\dagger. \tag{3.11}$$

ϵ étant un paramètre infinitésimal, anticommutant avec deux composantes de Weyl. Avec les transformations (3.11), la variation de la partie scalaire du lagrangien (3.10) est :

$$\delta\mathcal{L}_s = -\epsilon\partial^\mu\psi\partial_\mu\phi^* - \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\phi. \tag{3.12}$$

La transformation du champ fermionique doit permettre de compenser la variation du lagrangien scalaire. Il nous faut une variation $\delta\psi$ linéaire en ϕ, $\epsilon^\dagger$ et la dérivée :

$$\delta\psi_\alpha = i\left(\sigma^\mu\epsilon^\dagger\right)_\alpha \partial_\mu\phi, \quad \delta\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = -i\left(\epsilon\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu\phi^*. \tag{3.13}$$

La variation correspondante du lagrangien fermionique est :

$$\delta\mathcal{L}_f = \psi^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\varepsilon^\dagger\partial_\mu\partial_\nu\phi - \epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\psi\partial_\mu\phi^*, \tag{3.14}$$

et avec les identités pour les matrices de Pauli :

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^\beta_\alpha = -2g^{\mu\nu}\delta^\beta_\alpha, \qquad (\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} = -2g^{\mu\nu}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}, \tag{3.15}$$

on peut écrire

$$\delta\mathcal{L}_f = \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\phi + \epsilon\partial^\mu\psi\partial_\mu\phi^* - \partial_\mu\left(\epsilon\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi\partial_\nu\phi + \epsilon\psi\partial^\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi\right), \tag{3.16}$$

et on conclut que :

$$\delta S = \int d^4x\left(\delta\mathcal{L}_f + \delta\mathcal{L}_s\right) = 0. \tag{3.17}$$

Il reste à vérifier que l'algèbre des transformations (3.11) et (3.13) soit fermée, c'est à dire que le commutateur de deux transformations de symétrie appartienne à la superalgèbre. Pour les scalaires :

$$[\delta_1, \delta_2]\,\phi = i\left(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger\right)\partial_\mu\phi, \tag{3.18}$$

le commutateur étant proportionnel à la dérivée et donc à l'impulsion, un élément de l'algèbre. Pour les fermions :

$$[\delta_1, \delta_2]\,\psi_\alpha = i\left(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger\right)\epsilon_2\partial_\mu\psi - i\left(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger\right)\epsilon_1\partial_\mu\psi. \tag{3.19}$$

Les identités de Fierz :

$$\chi_\alpha\,(\xi\eta) = -\xi_\alpha\,(\eta\chi) - \eta_\alpha\,(\chi\xi)\,, \tag{3.20}$$

avec $\chi = \sigma^\mu\epsilon_1^\dagger, \eta = \partial_\mu\psi, \xi = \epsilon_2$ et $\chi = \sigma^\mu\epsilon_2^\dagger, \eta = \partial_\mu\psi, \xi = \epsilon_1$ suivies de l'utilisation des identités

$$\begin{aligned}\xi\chi \equiv \xi^\alpha\chi_\alpha = \xi^\alpha\epsilon_{\alpha\beta}\chi_\beta = -\chi_\beta\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \chi_\beta\epsilon_{\beta\alpha}\xi^\alpha = \chi^\beta\xi_\beta \equiv \chi\xi,\\ \xi^\dagger\bar\sigma^\mu\chi = -\chi\sigma^\mu\xi^\dagger = \left(\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\xi\right)^* = -\left(\xi\sigma^\mu\chi^\dagger\right)^*,\end{aligned} \tag{3.21}$$

permettent d'écrire

$$[\delta_1, \delta_2]\,\psi_\alpha = i\left(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_1\sigma\epsilon_2^\dagger\right)\partial_\mu\psi_\alpha + i\epsilon_{1\alpha}\epsilon_2^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi - i\epsilon_{2\alpha}\epsilon_1^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi. \tag{3.22}$$

Les deux premiers termes à droite sont de la forme requise par les transformtions de supersymétrie, les deux termes restants sont zéro sur la couche de masse (on-shell) à cause des équations du mouvement :

$$\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi = 0. \tag{3.23}$$

La supersymétrie est donc valable seulement sur couche de masse et la raison en est la non correspondance hors couche de masse entre le nombre des bosons et et celui des fermions. Pour avoir une supersymétrie valable aussi hors couche de masse on peut introduire dans le lagrangien un champ scalaire complexe F sans terme cinétique (champ auxiliaire) :

$$\mathcal{L}_{aux} = F^*F, \tag{3.24}$$

avec des transformations de supersymértie :

$$\delta F = i\epsilon^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi, \qquad \delta F^* = -i\partial_\mu\psi^\dagger\bar\sigma^\mu\epsilon, \tag{3.25}$$

qui donnent pour le lagrangien :

$$\mathcal{L}_{aux} = i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi F^* - i\partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \epsilon F, \tag{3.26}$$

cette variation est nulle sur couche de masse à cause des équations du mouvement $F = F^* = 0$. Hors couche de masse on peut exploiter cette variation pour construire un lagrangien invariant, avec une modiffication des transformations sous supersymétrie pour les fermions

$$\delta\psi_\alpha = i\left(\sigma^\mu \epsilon^\dagger\right)_\alpha \partial_\mu \phi + \epsilon_\alpha F, \qquad \delta\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = -i\left(\epsilon\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* + \epsilon^\dagger_{\dot{\alpha}} F^*. \tag{3.27}$$

On peut vérifier que ces transformations, pour les champs $\Phi = \phi, \phi^*, \psi, \psi^\dagger, F, F^*$donnent :

$$[\delta_1, \delta_2]\,\Phi = i\left(\epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger - \epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger\right) \partial_\mu \Phi, \tag{3.28}$$

sans faire référence aux équations du mouvement. L'utilisation des champs auxiliaires sera importante dans la discussion de la brisure de la supersymétrie.

Interactions du supermultiplet chiral

Le supermultiplet chiral est à la base de la construction du Modèle Standard supersymétrique. Dans la section précédente on a écrit la partie libre du lagrangien. En général on utilisera plusieurs de ces mutiplets et on ajoutera des termes d'interaction .

On a un lagrangien libre de la forme [20] :

$$\mathcal{L}_{libre} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i, \tag{3.29}$$

où i est un indice sur les degrés de liberté de jauge et de la saveur. Les transformations supersymétriques qui laissent invariant ce lagrangien sont :

$$\begin{aligned} \delta\phi_i &= \epsilon\psi_i, & \delta\phi^{*i} &= \epsilon^\dagger \psi^{i\dagger} \\ \delta(\psi_i)_\alpha &= i\left(\sigma^\mu \epsilon\right)_\alpha \partial_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i, & \delta(\psi^{i\dagger})_{\dot{\alpha}} &= -i\left(\epsilon\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^{*i} + \epsilon^\dagger_{\dot{\alpha}} F^{*i} \\ \delta F_i &= i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i, & \delta F^{*i} &= -i\partial_\mu \psi^{i\dagger} \bar{\sigma}^\mu \epsilon \end{aligned} \tag{3.30}$$

On va maintenant montrer que le terme d'intéraction invariant sous les transformations de supersymétrie et renormalisable est de la forme :

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + c.c. \tag{3.31}$$

avec W^{ij} et W^i des fonctions des champs bosoniques ayant respectivement une dimension de masse et de masse au carré. La propriété $\xi\chi = \chi\xi$ pour les spineurs implique que W^{ij} doit être symétrique par rapport à ses indices. W^{ij} et W^i ne sont pas fonctions des champs fermioniques afin de limiter la dimension de masse à 4. On ne peut pas non plus introduire des termes d'interaction purement bosoniques dans les champs ϕ_i et ϕ^{*i} parce qu'il serait impossible de compenser leur variation sous une transformation de supersymétrie. Le lagrangien d'intéraction (3.31) est le plus général possible, mais il reste à imposer l'invariance de ce terme par rapport aux transformations de supersymétrie. On peut analyser séparément les différentes parties de ce lagrangien. La transformation de la partie qui contient quatre spineurs est :

$$\delta\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2}\frac{\delta W^{ij}}{\delta\phi_k}\left(\epsilon\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{1}{2}\frac{\delta W^{ij}}{\delta\phi^{*k}}\left(\epsilon^\dagger\psi^{k\dagger}\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + c.c. \tag{3.32}$$

Pour le premier terme de droite, on peut utiliser l'identité de Fierz suivante :

$$\left(\epsilon\psi_i\right)\left(\psi_j\psi_k\right) + \left(\epsilon\psi_j\right)\left(\psi_k\psi_j\right) + \left(\epsilon\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) = 0, \tag{3.33}$$

qui implique qu'on peut avoir une variation nulle si $\delta W^{ij}/\delta\phi_k$ est symétrique dans les indices i, j, k. Pour le deuxième terme de droite une identité semblable n'est pas disponible et la seule possibilité pour avoir une intéraction invariante est d'éliminer complètement les champs ϕ^{*k} du terme δW^{ij}, qui est donc analytique dans le champ complexe ϕ_k. On peut écrire

$$W^{ij} = m^{ij} + y^{ijk}\phi_k, \tag{3.34}$$

m^{ij} étant la matrice symétrique de masse et y^{ijk} les couplages de Yukawa.

$$\delta\mathcal{L}_{der} = -iW^{ij}\partial_\mu\phi_j\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger - iW^i\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger + c.c. \tag{3.35}$$

Si on définit

$$W^{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta\phi_i\delta\phi_j}, \qquad W^i = \frac{\delta W}{\delta\phi_i}, \tag{3.36}$$

on observe que

$$W^{ij}\partial_\mu\phi_j = \partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right), \tag{3.37}$$

on peut vérifier que la variation (3.35) est une dérivée totale à condition que :

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i} = m^{ij}\phi_j + y^{ijk}\phi_j\phi_k, \tag{3.38}$$

les relations (3.36) et (3.38) nous amènent à définir le superpotentiel :

$$W = \frac{1}{2}m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k, \tag{3.39}$$

qui est une fonction analytique des champs complexe ϕ_i. Les variations restantes de $\mathcal{L}_{int}$ sont linéaires en F_i ou F^{*i} et s'annulent. Les équations du mouvement pour le lagrangien avec le terme d'interation sont :

$$F_i = -W_i^*, \qquad F^{*i} = -W^i. \tag{3.40}$$

On peut les utiliser pour écrire le lagrangien sans employer les champs auxiliaires

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi^{*i}\partial^\mu\phi_i - i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}\left(W^{ij}\psi_i\psi_j + W^*_{ij}\psi^{i\dagger}\psi^{j\dagger}\right) - W^iW_i^*, \tag{3.41}$$

où le potentiel scalaire de la théorie est donné par :

$$\begin{aligned} V &= W^iW_i^* = F_iF^{*i} = m^*_{ik}m^{kj}\phi^{*i}\phi_j + \frac{1}{2}m^{il}y^*_{jkl}\phi_i\phi^{*j}\phi^{*k} + \frac{1}{2}m^*_{il}y^{jkl}\phi^{*i}\phi_j\phi_k \\ &\quad + \frac{1}{4}y^{ijl}y^*_{kml}\phi_i\phi_j\phi^{*k}\phi^{*m}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

En utilisant la forme explicite du superpotentiel (3.39) on peut écrire le lagrangien sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\partial_\mu\phi^{*i}\partial^\mu\phi_i - i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}m^{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}m^*_{ij}\psi^{i\dagger}\psi^{j\dagger} - V \\ &\quad - \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_i\phi_j\psi_k - \frac{1}{2}y^*_{ijk}\phi^{*i}\psi^{j\dagger}\psi^{k\dagger}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

3.2.2 Le supermulptiplet vecteur

Lagrangien du supermultiplet vecteur

Le supermultiplet vecteur de jauge contient un boson de jauge sans masse A_μ et un fermion de Weyl, le gaugino λ^a. Les transformations de jauge du supermultiplet vecteur sont :

$$\delta_{jauge}A^a_\mu = -\partial_\mu\Lambda^a + gf^{abc}A^b_\mu\Lambda^c, \tag{3.44}$$

$$\delta_{jauge}\lambda^a = gf^{abc}\lambda^b\Lambda^c, \tag{3.45}$$

où g est le couplage de jauge, f^{abc} les costantes antisymétriques du groupe de jauge et Λ^a un paramètre infinitésimal de transformation de jauge. Sur la couche de masse on a deux polarisations pour le champ vectoriel et deux composantes pour le spineur de Weyl. Par contre hors couche de masse le champ vectoriel a trois composantes et le spineur de Weyl quatre. Pour que la supersymétrie soit respectée hors couche de masse il faut ajouter un champ scalaire réel D^a [8]. Le lagrangien correspondant est [20] :

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - i\lambda^{a\dagger}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a + \frac{1}{2}D^aD^a, \tag{3.46}$$

avec

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^a_\mu A^c_\nu, \tag{3.47}$$

$$D_\mu\lambda^a = \partial_\mu\lambda^a - gf^{abc}A^b_\mu\lambda^c. \tag{3.48}$$

Les transformations de supersymétrie pour les champs sont :

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\epsilon^\dagger\bar{\sigma}_\mu\lambda^a + \lambda^{a\dagger}\bar{\sigma}_\mu\epsilon\right), \tag{3.49}$$

$$\delta\lambda^a_\alpha = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\epsilon\right)_\alpha F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_\alpha D^\alpha, \tag{3.50}$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a - D_\mu\lambda^{a\dagger}\bar{\sigma}^\mu\epsilon\right). \tag{3.51}$$

Comme dans le cas du lagrangien pour le multiplet chiral, on peut montrer que la lagrangien (3.46) est invariant sous las transformations de supersymétrie et que l'algèbre est fermée.

Interaction de jauge supersymétrique

Le premier pas pour construire un lagrangien invariant de jauge avec les multiplets chiraux et vecteurs consiste à introduire des dérivées covariantes pour les champs des multiplets chiraux [20] :

$$D_\mu\psi_i = \partial_\mu\psi_i + igA^a_\mu\left(T^a\psi\right)_i, \tag{3.52}$$

$$D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + igA^a_\mu\left(T^a\phi\right)_i, \tag{3.53}$$

$$D_\mu\phi^{*i} = \partial_\mu\phi^{*i} - igA^a_\mu\left(\phi^*T^a\right)^i. \tag{3.54}$$

Le lagrangien complet doit aussi contenir tous les autres invariants de jauge, renormalisables et compatibles avec les transformations de supersymétrie :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{chiral} + g\left(\phi^* T^a \phi\right) D^a - \sqrt{2} g \left[\left(\phi^* T^a \psi\right) \lambda^a + \lambda^{a\dagger} \left(\psi^\dagger T^a \phi\right)\right], \tag{3.55}$$

où les T^a sont les générateurs de la transformation de jauge, $\mathcal{L}_{chiral}$ le lagrangien pour le multiplet chiral avec les dérivées covariantes. Les transformations de supersymétrie sont aussi modifiées par les dérivées covariantes :

$$\delta\left(\psi_i\right)_\alpha = i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha D_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i, \tag{3.56}$$

$$\delta F_i = i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + \sqrt{2} g \left(T^a \phi\right)_i \epsilon^\dagger \lambda^{a\dagger}. \tag{3.57}$$

L'équation du mouvement pour le champ auxiliaire est :

$$D^a = -g\left(\phi^* T^a \phi\right), \tag{3.58}$$

on peut l'utiliser pour éliminer le champ auxiliaire du lagrangien. Le potentiel scalaire complet est :

$$V = F^{*i} F_i + \frac{1}{2}\sum_a D^a D^a = W_i^* W^i + \frac{1}{2}\sum_a g_a^2 \left(\phi^* T^a \phi\right)^2, \tag{3.59}$$

où la somme sur a fait référence à la possibilité d'avoir différents facteurs dans le groupe de jauge avec des couplages différents. On parle de termes F et D pour le potentiel scalaire. le potentiel scalaire est complètement déterminé par les autres interactions dans la théorie : les termes de type F sont déterminés par les couplages de Yukawa et les termes de type D par les interactions de jauge.

3.3 Le Modèle Standard Supersymétrique

L'idée d'une version supersymétrique du Modèle Standard a été motivée par les considérations de "naturalité" de l'échelle électrofaible par rapport à l'échelle de Planck dans une théorie des champs à quatre dimensions de l'espace-temps lors de l'introduction de la supersymétrie. L'étude de la brisure spontanée de la supersymétrie montre que de nouveaux ingrédients sont nécessaires et qu'un modèle minimal ne peut être qu'une description effective. Le Modèle

Standard Supersymétrique Minimal (MSSM) constitue cette description effective. Chaque particule du Modèle Standard a un partenaire supersymétrique puisque l'élément fondamental de construction du lagrangien est le multiplet [20].

3.3.1 Les particules

Les fermions du SM ont la propriété que la partie gauche et la partie droite se transforment différemment sous le groupe de jauge. Seuls les multiplets chiraux ont la propriété de contenir des fermions avec des composantes gauches et droites qui peuvent se transformer différemment sous le groupe de jauge. Les partenaires scalaires des fermions sont les sfermions (squarks, sleptons). Les parties gauches et droites des fermions sont des spineurs de Weyl différents avec chacun un partenaire scalaire complexe. On va les désigner avec *tilde* et un indice L ou R qui indique la chiralité de son partenaitre fermionique (les sfermions sont des scalaires et ils n'ont pas d'hélicité).

Multiplet	scalaire	fermion	$(SU(3), SU(2), U(1))$
L	$(\tilde{\nu} \;\; \tilde{e}_L)$	$(\nu \;\; e_L)$	$(1, 2, -1/2)$
$\bar{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(1, 1, 1)$
Q	$(\tilde{u}_L \;\; \tilde{d}_L)$	$(u_L \;\; d_L)$	$(3, 2, 1/6)$
$\bar{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\bar{3}, 1, -2/3)$
$\bar{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\bar{3}, 1, 1/3)$
H_u	$(H_u^+ \;\; H_u^0)$	$\left(\tilde{H}_u^+ \;\; \tilde{H}_u^0\right)$	$(1, 2, 1/2)$
H_d	$\left(H_d^+ \;\; H_d^0\right)$	$\left(\tilde{H}_d^+ \;\; \tilde{H}_d^0\right)$	$(1, 2, -1/2)$

Tab. 3.1 : Multiplets chiraux du MSSM

On va indiquer les doublets de Higgs par H_u et H_d et les higgsinos correspondents par $\tilde{H}_u$ et $\tilde{H}_d$. Pour les bosons vecteurs, on utilise des multiplets vecteurs et les partenaires fermioniques

correspondants sont les gauginos.

Particules	fermion	vecteur	$(SU(3), SU(2), U(1))$
gluino, gluon	$\tilde{g}$	g	$(8,1,0)$
winos, W^i	$\tilde{W}^{\pm}$ $\tilde{W}^0$	$W^{\pm}$ W^0	$(1,3,0)$
bino, B	$\tilde{B}^0$	B^0	$(1,1,0)$

Tab. 3.2 : Multiplets vecteurs du MSSM

Les particules indiqués dans les Tabs 3.1 et 3.2 constituent le spectre du MSSM mais ne sont pas les états propres de masse de la théorie. Après brisure de la symétrie électrofaible et de la supersymétrie, on a des mélanges entre les gauginos et les higgsinos et entre les scalaires de Higgs et les sfermions (voir le chapitre suivant).

3.3.2 Le superpotentiel

Le superpotentiel du MSSM faissant intervenir les multiplets chiraux :

$$W_{MSSM} = \mu H_u H_d - y_e \bar{e} L H_d - y_d \bar{d} Q H_d + y_u \bar{u} Q H_u. \tag{3.60}$$

Les paramètres de Yukawa y_e, y_d, y_u sont des matrices 3×3. On a éliminé tous les indices de jauge et de famille dans l'équation précédente. Par exemple, $\mu H_u H_d$ signifie $\mu (H_u)_\alpha (H_d)_\beta \epsilon^{\alpha\beta}$ avec $\alpha\beta = 1,2$ indices d'isospin faible de $SU(2)_L$; $y_d \bar{d} Q H_d$ signifie $(y_d)_i^j \bar{d}_a^i Q_{j\alpha}^a (H_d)_\beta \epsilon^{\alpha\beta}$ avec $i = 1,2,3$ indices de famille et $a = 1,2,3$ indices de couleurs de $SU(3)_C$.

La formule (3.60) ne contient pas de termes avec H_d^* et H_u^* en accord avec le fait que le superpotentiel est une fonction holomorphe des supermultilpets Φ_i. Des termes de Yukawa du type $\bar{u} Q H_d^*$ qui seraient présents en général dans un modèle non supersymétrique, sont exclus par l'invariance sous la transformation de supersymétrie. Pour cette raison deux doublets de Higgs sont nécessaires dans les modèles supersymétriques pour donner une masse aux fermions.

Le paramètre μ a la dimension d'une masse au carré, c'est l'équivalent supersymétrique d'un terme de masse pour le boson de Higgs dans le Modèle Standard. D'autre terme de dimension de masse deux sont donnés par les termes de brisure douce de la supersymétrie [8].

Chapitre 4

Le Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM)

4.1 Construction du MSSM

Le Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM) est basé sur le même groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que le Modèle Standard. Il est donc nécessaire d'introduire trois superchamps vectoriels : un octet de couleur V^a, un triplet faible V^i et un singlet d'hypercharge V. Ces superchamps sont composés d'un boson de jauge de spin 1 du Modèle Standard (G, W, B) et du superpartenaire respectif de spin 1/2 (gluinos $\tilde{g}$, winos $\tilde{W}$, binos $\tilde{B}$). Ces superchamps interagissent avec des superchamps chiraux contenant à la fois les champs fermioniques de spin 1/2 du Modèle Standard (q, l) et aussi leur superpartenaire scalaire de spin 0 (squarks $\tilde{q}$, sleptons $\tilde{l}$). Enfin, pour générer les masses, deux doublets de Higgs complexes H_1 et H_2 de spin 0 sont nécessaires. La supersymétrie contient donc deux superpartenaires de spin 1/2, les Higgsinos $\tilde{H}_1$ et $\tilde{H}_2$.

Le MSSM prévoit donc l'existence d'un superpartenaire pour chaque particule du Modèle Standard de même masse, ce qui n'a jamais été révélé expérimentalement. Par conséquent, la supersymétrie doit être brisée afin que les superpartenaires non détectés à ce jour puissent avoir une masse suffisament grande.

Après cette brisure, sur les 8 degrés de liberté des particules de Higgs, 3 se retrouvent absorbés par les champs W et Z pour leur conférer une masse. Il reste donc 5 particules de

Higgs incluant deux particules neutres CP-paires H_0 et h_0, une particule neutre CP-impaire A_0 ainsi que deux particules chargées $H^{\pm}$. D'autre part, les Higgsinos $\tilde{H}_{1,2}$, les winos $\tilde{W}$ ainsi que les binos $\tilde{B}$ se mélangent. Les états de masse qui en découlent forment 2 spineurs de Dirac chargés $\chi^{\pm}_{1,2}$ et 4 spineurs de Majorana neutres $\chi^0_{1,2,3,4}$ que l'on nomme respectivement charginos et neutralinos.

Le lagrangien du MSSM peut s'écrire sous la forme suivante [22] :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{susy} + \mathcal{L}_{soft}, \tag{4.1}$$

où le $\mathcal{L}_{soft}$ est la partie du lagrangien responsable de la brisure de la supersymétrie.

la partie $\mathcal{L}_{susy}$ s'ecrit comme,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{susy} &= \int d^4\theta \Phi^+ \exp\left(g_1 VT + g_2 V^i T^i + g_3 V^a T^a\right)\Phi \\ &+2\int d^4\theta \left(\mathcal{W}_{MSSM}\delta^2(\bar{\theta}) + \mathcal{W}_{MSSM}\delta^2(\theta)\right) \\ &+\left[\int d^4\theta \frac{1}{4}\left(W^a W^a + W^i W^i + WW\right) + h.c.\right],\end{aligned} \tag{4.2}$$

avec $\Phi = \left(Q, \bar{U}, \bar{D}, L, \bar{E}, H_1, H_2\right)^t$ et

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{\mathcal{D}\mathcal{D}} e^{-gV} \mathcal{D}_\alpha e^{gV}, \tag{4.3}$$

représente les forces des superchamps vectoriels, $\mathcal{D}$ est la dérivée covariante en supersymétrie et $\mathcal{W}_{MSSM}$ est le superpotentiel.

Le MSSM nécessite l'introduction de deux doublets de Higgs pour que le superpotentiel doit être analytique dans les supermultiplets chiraux Φ_i.

Les couplages de Yukawa ainsi que le potentiel scalaire sont définis par le superpotentiel $\mathcal{W}_{MSSM}$ invariant de jauge qui peut s'écrire dans le cas le plus général comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{MSSM} &= \mu H_1.H_2 - f^E_{ij} L_i H_1 \overline{E}_j - f^D_{ij} Q_i H_1 \overline{D}_j - f^U_{ij} Q_i H_2 \overline{U}_j \\ &+ \left\{\mu'^i L_i H_2 + \lambda'_{ijk} L_i Q_j \overline{D}_k + \lambda''_{ijk} L_i L_j \overline{E}_k + \lambda'''_{ijk} \overline{U}_i \overline{D}_j \overline{D}_k\right\}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Les f_{ijk} sont des matrices 3×3 et représentent la généralisation supersymétrique des couplages de Yukawa du SM. Le terme $\mu H_1.H_2$ représente la version supersymétrique de la masse du boson de Higgs. Les termes entre accolades de la formule du superpotentiel induisent une violation

du nombre baryonique B et leptonique L, pour résoudre ce problème on impose une symétrie appelée la parité R_p qui laisse invariant les superchamps vectoriels $\{V^a, V^i, V\} \rightarrow \{V^a, V^i, V\}$ et transforme les multiplets chiraux comme $\left\{Q, \overline{U}, \overline{D}, L, \overline{E}\right\} \rightarrow -\left\{Q, \overline{U}, \overline{D}, L, \overline{E}\right\}$ et $\{H_1, H_2\} \rightarrow \{H_1, H_2\}$ lorsque on applique $\theta \rightarrow -\theta$. La conservation de la parité R_p peut s'exprimer avec les nombres associés à chaque particule,

$$R_p = (-1)^{3B+L+2S}, \tag{4.5}$$

où B, L et S sont respectivement le nombre baryonique, leptonique et le spin de la particule considérée.

La valeur $R_p = 1$ est associée aux particules du SM et $R_p = -1$ pour les particules supersymétriques. Donc une particule supersymétrique ne peut être produite que par paire, et ne peut se désintégrer qu'en un nombre impair de particules supersymétriques.

Le lagrangien $\mathcal{L}_{soft}$ de la partie de la brisure de symétrie est donné par [22] :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{soft} \;=\; & -\frac{1}{2}(M_1\tilde{B}\tilde{B} + M_2\tilde{W}\tilde{W} + M_3\tilde{g}\tilde{g} + c.c.) \\
& -\left(M_e\widetilde{\overline{e}}\tilde{L}H_1 + M_d\widetilde{\overline{d}}\tilde{Q}H_1 - M_u\widetilde{\overline{u}}\tilde{Q}H_2 + c.c.\right) \\
& -\tilde{Q}^\dagger M_Q^2\tilde{Q} - \tilde{L}^\dagger M_L^2\tilde{L} - \widetilde{\overline{u}}M_{\overline{u}}^2\widetilde{\overline{u}}^\dagger - \widetilde{\overline{d}}M_{\overline{d}}^2\widetilde{\overline{d}}^\dagger - \widetilde{\overline{e}}M_{\overline{e}}^2\widetilde{\overline{e}}^\dagger \\
& -m_{H_1}^2H_1^*H_1 - m_{H_2}^2H_2^*H_2 - B\mu\left(H_1H_2 + c.c.\right),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

avec $M_e, M_u, M_d, M_Q^2, M_L^2, M_{\overline{u}}^2, M_{\overline{d}}^2$ et $M_{\overline{e}}^2$ sont des matrices 3×3. M_1, M_2 et M_3 représentent les termes de masse du bino, wino et gluino. Ce terme $\mathcal{L}_{soft}$ introduit énormément de paramètres dans le lagrangien du MSSM. En effet après la brisure de la supersymérie, le modèle contient 105 paramètres libres dans le cas le plus général, il ya plusieurs moyens d'introduire cette brisure par exemple on peut considérer des modèles de brisure avec un secteur caché, les particules supersymétriques faisant partie au secteur visible. Des interactions entre les deux secteurs sont nécéssaires pour génerer la brisure de la supersymétrie à la partie visible, ces interactions peuvent être de différentes sortes ; généralement les modèles les plus utilisés considérant, soit des interactions gravitationnelles, soit des interactions de jauge pour communiquer cette brisure entre les deux secteurs.

4.2 Spectre du MSSM

4.2.1 Secteur de Higgs

Le secteur de Higgs fait intervenir plusieurs ingrédients particuliers : la brisure de symétrie, le t_β le paramètre central du MSSM représente à l'ordre le plus bas le rapport des valeurs dans le vide v_1, v_2 de deux doublets de Higgs. Le potentiel scalaire V pour le champ de Higgs dans le MSSM est donné par deux termes F et G qui sont deux champs auxiliaires introduits dans les superchamps chiraux et vectoriels pour avoir un nombre égal de degrés fermioniques et bosoniques [13].

Les superchamps chiraux Φ peut s'écrire en fonction du champ auxiliaire F comme [13] :

$$\Phi\left(y,\theta\right)=\phi\left(y\right)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+\theta\theta F(y), \tag{4.7}$$

avec ϕ est un champ scalaire complexe, ψ est un spineur de Weyl et F un champ scalaire complexe auxiliaire.

Pour les superchamps vectoriels V, ils sécrivent en fonction du champ auxilaire D comme :

$$V\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=-\theta\sigma_\mu\bar{\theta}A^\mu\left(x\right)+i\theta\theta\overline{\theta\lambda}\left(x\right)-i\overline{\theta\theta}\theta\lambda\left(x\right)+\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}D\left(x\right), \tag{4.8}$$

avec A^μ est le boson vecteur, λ est un spineur de Majorana et D un champ scalaire réel auxiliaire.

Alors le potentiel pour le champ de Higgs est donné par [13] :

$$V_{SUSY}=F_k^*F_k+\frac{1}{2}\left[g_3^2D^aD^a+g_2^2D^iD^i+g_1^2DD\right]. \tag{4.9}$$

Les termes F et G peuvent s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{\partial\mathcal{W}_{MSSM}(\phi_k)}{\partial\phi_k},\\
D^a &= g_3\phi^*T^a\phi,\\
D^i &= \frac{1}{2}g_2\phi^*\sigma^i\phi,\\
D &= \frac{1}{2}g_1Y_\phi\phi^*\phi.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Par conséquent, le potentiel est :

$$\begin{aligned}
V &= m_1^2H_1^*H_1+m_2^2H_2^*H_2+m_{12}^2\left(H_1H_2+h.c.\right)\\
&\quad+\frac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)\left(H_1^*H_1-H_2^*H_2\right)^2+\frac{g^2}{2}\left|H_1^*H_2\right|^2.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Avec la notation condensée : $m_1^2 = m_{H_1}^2 + |\mu|^2$, $m_2^2 = m_{H_2}^2 + |\mu|^2$ et $m_{12}^2 = B\mu$.

On va développer les deux doubets de Higgs $H_{1,2}$ autour de leurs valeurs respectives dans le vide v_1, v_2,

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(v_1 + \phi_1^0 - i\varphi_1^0\right)/\sqrt{2} \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \left(v_2 + \phi_2^0 + i\varphi_2^0\right)/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Ces doublets font intervenir 4 champs scalaires et 2 champs complexes donc 8 degrés de liberté.

Remplaçons les relations de H_1 et H_2 dans l'experssion de superpotentiel, on obtient :

$$V = V_{const} + V_{linear} + V_{mass} + V_{cubic} + V_{quartic}, \tag{4.14}$$

avec V_{cubic} et $V_{quartic}$ sont des termes d'interaction des 3 et 4 champs, le terme V_{linear} est donné par :

$$\begin{aligned} V_{linear} &= \left(m_1^2 v_1 + m_{12}^2 v_2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right) v_1\right)\phi_1^0 \\ &\quad + \left(m_2^2 v_2 + m_{12}^2 v_1 - \frac{g^2 + g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right) v_2\right)\phi_2^0 \\ &\equiv T_{\phi_1^0}\phi_1^0 + T_{\phi_2^0}\phi_2^0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

La minimisation du potentiel scalaire implique la suppression des deux termes $T_{\phi_1^0}$ et $T_{\phi_2^0}$. À l'ordre de l'arbre ces termes sont inutils, alors que à l'ordre d'une boucle il est intéressant de les garder car ils vont induise des contres-termes supplémentaires δT_{ϕ_i}.

Le terme V_{mass} est donné par :

$$\begin{aligned} V_{mass} &= \left[\frac{1}{2}\left(m_1^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}\left(3v_1^2 - v_2^2\right)\right)\phi_1^{0^2} + \left(m_2^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}\left(3v_2^2 - v_1^2\right)\right)\phi_2^{0^2}\right. \\ &\quad \left. + \left(2m_{12}^2 - \frac{g^2 + g'^2}{8} v_1 v_2\right)\phi_1^0\phi_2^0\right] + \frac{1}{2}\left[\left(m_1^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right)\right)\varphi_1^{0^2}\right. \\ &\quad \left. + \left(m_2^2 - \frac{g^2 + g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right)\right)\varphi_2^{0^2} + 2m_{12}\varphi_1^0\varphi_2^1\right] + \left(m_1^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}v_1^2 + \frac{g^2 - g'^2}{8}v_2^2\right)|\phi_1|^2 \\ &\quad + \left(m_2^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}v_1^2 + \frac{g^2 - g'^2}{8}v_2^2\right)|\phi_2|^2 + \left(m_{12}^2 - \frac{g^2}{4}v_1 v_2\right)\left(\phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^-\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

qu'on peut l'écrire sous une forme matricielle comme suit :

$$
\begin{aligned}
V_{mass} &= \begin{pmatrix} \varphi_1^0 & \varphi_2^0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1^2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right) & m_{12}^2 \\ m_{12}^2 & m_2^2 - \frac{g^2+g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right) \end{pmatrix}}_{M^2_{\varphi^0}} \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^0 \end{pmatrix} \underbrace{\left\{ M^2_{\varphi^0} + \frac{g^2+g'^2}{4} \begin{pmatrix} v_1^2 & -v_1 v_2 \\ -v_1 v_2 & v_2^2 \end{pmatrix} \right\}}_{M^2_{\phi^0}} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \phi_1^- & \phi_2^- \end{pmatrix} \underbrace{\left\{ M^2_{\varphi^0} + \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1 v_2 \\ -v_1 v_2 & v_1^2 \end{pmatrix} \right\}}_{M^2_{\phi^c}} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

les paramètres du secteur de Higgs sont m_1, m_2 et m_{12} et les valeurs dans le vide des doublets de Higgs v_1 et v_2.

Suivant le même principe de la brisure de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ ce qui donne une masse aux champs bosoniques faibles $W^\pm$ et Z^0 :

$$M_W^2 = \frac{1}{2} g^2 v^2, \tag{4.18}$$

$$M_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2) v^2. \tag{4.19}$$

On définit le paramètre t_β par le rapport dans le vide des deux doublets de Higgs :

$$\tan(\beta) \equiv t_\beta = \frac{v_2}{v_1}. \tag{4.20}$$

Donc on va redéfinir les paramètres du secteur de Higgs :

$$(m_1, m_2, m_{12}, v_1, v_2) \rightarrow \left(T_{\phi_1^0}, T_{\phi_2^0}, M_{A^0}, v, t_\beta \right), \tag{4.21}$$

avec les relations de passage suivantes :

$$T_{\phi_1^0} = \left(m_1^2 v_1 + m_{12}^2 v_2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right) v_1 \right), \tag{4.22}$$

$$T_{\phi_2^0} = \left(m_2^2 v_2 + m_{12}^2 v_1 - \frac{g^2+g'^2}{8}\left(v_1^2 - v_2^2\right) v_2 \right), \tag{4.23}$$

$$M_{A^0}^2 = -\frac{v^2}{v_1 v_2} m_{12}^2, \tag{4.24}$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \tag{4.25}$$

$$t_\beta = \frac{v_2}{v_1}. \tag{4.26}$$

Les 8 degrés de liberté induits par les doublets de Higgs ; 3 sont absorbés par les bosons de jauge et 5 degrés restants forment les champs physiques H^0, h^0, A^0 et $H^\pm$.

En utilisant les notations $c_\beta = \frac{v_1}{v}, s_\beta = \frac{v_2}{v}$ on peut exprimer les matrices de masse $M^2_{\varphi^0,\phi^0,\phi^\pm}$ comme :

$$M^2_{\varphi^0} = \begin{bmatrix} \frac{T_{\phi_1^0}}{v_1} + s_\beta^2 M^2_{A^0} & -\frac{1}{2}s_{2\beta}M^2_{A^0} \\ -\frac{1}{2}s_{2\beta}M^2_{A^0} & \frac{T_{\phi_2^0}}{v2} + c_\beta^2 M^2_{A^0} \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

$$M^2_{\phi^c} = \begin{bmatrix} \frac{T_{\phi_1^0}}{v_1} + s_\beta^2 \left(M^2_{A^0} + M^2_W\right) & -\frac{1}{2}s_{2\beta}\left(M^2_{A^0} + M^2_W\right) \\ -\frac{1}{2}s_{2\beta}\left(M^2_{A^0} + M^2_W\right) & \frac{T_{\phi_2^0}}{v2} + c_\beta^2 \left(M^2_{A^0} + M^2_W\right) \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

$$M^2_{\phi^0} = \begin{bmatrix} \frac{T_{\phi_1^0}}{v_1} + s_\beta^2 M^2_{A^0} + M^2_Z c_\beta^2 & -\frac{1}{2}s_{2\beta}\left(M^2_{A^0} + M^2_Z\right) \\ -\frac{1}{2}s_{2\beta}\left(M^2_{A^0} + M^2_Z\right) & \frac{T_{\phi_2^0}}{v2} + c_\beta^2 M^2_{A^0} + M^2_Z s_\beta^2 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Pour trouver les états propres de masse, on va introduire trois matrices unitaires $U_{\gamma,\tau,\alpha}$ pour diagonaliser les matrices précédentes :

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = U_\gamma \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\gamma & s_\gamma \\ -s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = U_\tau \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\tau & s_\tau \\ -s_\tau & c_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = U_\alpha \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha \\ -s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

où les $G^\pm, G^0$ sont des Goldstones, H^0, h^0 sont les Higgs neutres CP-pairs, le A^0 est le Higgs neutre CP-impair et les $H^\pm$ sont les Higgs chargés .

les matrices de masse :

$$M^2_{G^0A^0} = U_\gamma M^2_{\varphi^0} U^t_\gamma, \tag{4.33}$$

$$M^2_{G^\pm H^\pm} = U_\tau M^2_{\phi^\pm} U^t_\tau, \tag{4.34}$$

$$M^2_{H^0h^0} = U_\alpha M^2_{\phi^0} U^t_\alpha, \tag{4.35}$$

s'écrivent comme :

$$M^2_{G^0A^0} = \begin{bmatrix} c^2_\gamma \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1} + s^2_\gamma \frac{T_{\phi^0_2}}{v2} + & \frac{1}{2}s_{2\gamma}\left(\frac{T_{\phi^0_2}}{v2} - \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1}\right) \\ \frac{1}{2}s_{2\gamma}\left(\frac{T_{\phi^0_2}}{v2} - \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1}\right) & s^2_\gamma \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1} + c^2_\gamma \frac{T_{\phi^0_2}}{v2} + \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m^2_{A^0} s^2_{\beta-\gamma} & -\frac{1}{2}M^2_{A^0} s_{2(\beta-\gamma)} \\ -\frac{1}{2}M^2_{A^0} s_{2(\beta-\gamma)} & m^2_{A^0} c^2_{\beta-\gamma} \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

$$M^2_{G^\pm h^\pm} = \begin{bmatrix} c^2_\tau \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1} + s^2_\tau \frac{T_{\phi^0_2}}{v2} + & \frac{1}{2}s_{2\tau}\left(\frac{T_{\phi^0_2}}{v2} - \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1}\right) \\ \frac{1}{2}s_{2\tau}\left(\frac{T_{\phi^0_2}}{v2} - \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1}\right) & s^2_\tau \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1} + c^2_\tau \frac{T_{\phi^0_2}}{v2} + \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(m^2_{A^0} + M^2_W\right) s^2_{\beta-\tau} & -\frac{1}{2}\left(m^2_{A^0} + M^2_W\right) s_{2(\beta-\tau)} \\ -\frac{1}{2}\left(m^2_{A^0} + M^2_W\right) s_{2(\beta-\tau)} & \left(m^2_{A^0} + M^2_W\right) c^2_{\beta-\tau} \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

$$M^2_{H^0h^0} = \begin{bmatrix} c^2_\alpha \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1} + s^2_\alpha \frac{T_{\phi^0_2}}{v2} + & \frac{1}{2}s_{2\alpha}\left(\frac{T_{\phi^0_2}}{v2} - \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1}\right) \\ \frac{1}{2}s_{2\alpha}\left(\frac{T_{\phi^0_2}}{v2} - \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1}\right) & s^2_\alpha \frac{T_{\phi^0_1}}{v_1} + c^2_\alpha \frac{T_{\phi^0_2}}{v2} + \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m^2_{A^0} s^2_{\alpha-\beta} + M^2_Z c^2_{\alpha+\beta} & \frac{1}{2}\left(m^2_{A^0} s_{2(\alpha-\beta)} - M^2_Z s_{2(\alpha+\beta)}\right) \\ \frac{1}{2}\left(m^2_{A^0} s_{2(\alpha-\beta)} - M^2_Z s_{2(\alpha+\beta)}\right) & m^2_{A^0} c^2_{\alpha-\beta} + M^2_Z s^2_{\alpha+\beta} \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Après minimisation du potentiel les $T_{\phi^0_{1,2}}$ deviennent nuls et les matrices de masse sont diagonales pour $\gamma = \tau = \beta$ et

$$t_{2\alpha} = t_{2\beta}\frac{M^2_A + M^2_Z}{M^2_A - M^2_Z}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \tag{4.39}$$

Les masses des champs physiques sont données par :

$$M^2_{H^\pm} = M^2_{A^0} + M^2_W, \tag{4.40}$$

$$M^2_{H^0,h^0} = \frac{1}{2}\left[M^2_{A^0} + M^2_Z \pm \sqrt{\left(M^2_{A^0} + M^2_Z\right)^2 - 4M^2_{A^0}M^2_Z c^2_{2\beta}}\right]. \tag{4.41}$$

Alors que les masses des Goldstones G^0 et $G^\pm$ sont évidement nulles.

4.2.2 Secteur des Charginos/Neutralinos

Les jauginos électrofaibles $\tilde{B}, \tilde{W}^0$, $\tilde{W}^\pm$ et les Higgsinos $\tilde{H}^0_{1,2}$, $\tilde{H}^\pm_{1,2}$ peuvent se mélanger pour donner les états de masses appelés charginos $\tilde{\chi}^\pm_i$ et neutralinos $\tilde{\chi}^0_i$. D'une manière générale, on

peut écrire le lagrangien de masse comme [22] :

$$\mathcal{L}^f = i\left[\psi^{Rt}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^R + \bar{\psi}^{Lt}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi^L\right] - \left[\psi^{Rt}M\partial_\mu\psi^L + \bar{\psi}^{Lt}M^\dagger\partial_\mu\bar{\psi}^R\right], \tag{4.42}$$

où l'on rassemble les parties gauches L et droites R suivantes :

$$\psi_c^R = \begin{pmatrix} -i\tilde{W}^- \\ \tilde{H}_1^- \end{pmatrix}, \quad \psi_c^L = \begin{pmatrix} -i\tilde{W}^+ \\ \tilde{H}_2^+ \end{pmatrix}, \quad \psi_n^R = \psi_n^R = \begin{pmatrix} -i\tilde{B}^0 \\ -i\tilde{W}_3^0 \\ \tilde{H}_1^0 \\ \tilde{H}_2^0 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Les indices c, n indiquent respectivement que ces spineurs $\psi^{l,R}$ vont donner les états propres de masse des charginos et des neutralinos. La matrice de masse M non diagonale notée X pour les charginos et Y pour les neutralinos est donnée par :

$$X = \begin{bmatrix} M_2 & \sqrt{2}M_W s_\beta \\ \sqrt{2}M_W c_\beta & \mu \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_W c_\beta & M_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_W c_\beta & -M_Z c_W s_\beta \\ -M_Z s_W c_\beta & M_Z c_W c_\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_W s_\beta & -M_Z c_W s_\beta & -\mu & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

On peut noter que ce secteur introduit 3 nouveaux paramètres M_1, M_2 et μ, les autres termes provenant du secteur de jauge et du secteur de Higgs. Afin de diagonaliser ces deux matrices 2×2 et 4×4, on introduit deux matrices de diagonalisation U, V pour les charginos et une matrice N pour diagonaliser la matrice symétrique des neutralinos. Ainsi le spectre de masse s'écrit comme :

$$\tilde{X} = U^* X V^{-1} = diag\left(m_{\tilde{\chi}_1^\pm}, m_{\tilde{\chi}_2^\pm}\right), \qquad \tilde{Y} = N^* Y N^{-1} = diag(m_{\tilde{\chi}_1^0}, m_{\tilde{\chi}_2^0}, m_{\tilde{\chi}_3^0}, m_{\tilde{\chi}_4^0}). \tag{4.45}$$

Les états de masse sont donc donnés par :

$$\chi_c^R = U\psi_c^R, \quad \chi_c^L = V\psi_c^L \tag{4.46}$$

$$\chi_n^R = N\psi_n^R, \quad \chi_n^L = N\psi_n^L \tag{4.47}$$

Les charginos sont des spineurs de Dirac et les neutralinos sont des spineurs de Majorana construits à partir de spineurs de Weyl $\chi_i^{L,R}$,

$$\tilde{\chi}_i^\pm = \begin{pmatrix} \chi_{ci}^L \\ \bar{\chi}_{ci}^R \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\chi}_i^0 = \chi_n^L. \tag{4.48}$$

Les masses des charginos s'obtiennent en calculant les valeurs propres de $\tilde{X}$ et $\tilde{X}^\dagger$:

$$m^2_{\tilde{\chi}_1^\pm,\tilde{\chi}_2^\pm} = \frac{1}{2}\left[M_2^2 + \mu^2 + 2M_W^2 \pm \sqrt{(M_2^2-\mu^2)^2 + 4M_W^4\left(M_2^2+\mu^2+2\mu M_2 s_{2\beta}\right)}\right]. \tag{4.49}$$

Dans la limite $M_Z << |\mu + M_1|, |\mu + M_1|$, les masses des charginos et neutralinos s'écrivent :

$$\begin{aligned}
m_{\tilde{\chi}_1^\pm} &\simeq M_2 - \frac{M_W^2\left(M_2+\mu s_{2\beta}\right)}{\mu^2 - M_2^2}, \\
m_{\tilde{\chi}_2^\pm} &\simeq |\mu| + \frac{M_W^2\left(|\mu|+\epsilon M_2 s_{2\beta}\right)}{\mu^2 - M_2^2}, \\
m_{\tilde{\chi}_1^0} &\simeq M_1 - \frac{M_Z^2 s_W^2\left(M_1+\mu s_{2\beta}\right)}{\mu^2 - M_1^2}, \\
m_{\tilde{\chi}_2^0} &\simeq M_2 - \frac{M_W^2\left(M_2+\mu s_{2\beta}\right)}{\mu^2 - M_2^2}, \\
m_{\tilde{\chi}_3^0} &\simeq |\mu| + \frac{M_Z^2(1-\epsilon s_{2\beta})\left(|\mu|+M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2\right)}{2\left(|\mu|+M_1\right)\left(|\mu|+M_2\right)}, \\
m_{\tilde{\chi}_4^0} &\simeq |\mu| + \frac{M_Z^2(1+\epsilon s_{2\beta})\left(|\mu|-M_1 c_W^2 - M_2 s_W^2\right)}{2\left(|\mu|-M_1\right)\left(|\mu|-M_2\right)}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

avec $\epsilon = \text{sign}(\mu) = \pm 1$.

4.2.3 Secteur des sfermions

Secteur des squarks

Le terme cinétique et le terme de masse du secteur des squarks sont donnés par [22] :

$$\mathcal{L}^{\tilde{q}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_\mu \tilde{q}_L^* & \partial_\mu \tilde{q}_R^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_\mu \tilde{q}_L \\ \partial_\mu \tilde{q}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{q}_L^* & \tilde{q}_R^* \end{pmatrix} M^2_{\tilde{q}_{L,R}} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}, \tag{4.51}$$

avec

$$M^2_{\tilde{q}_{L,R}} = \begin{bmatrix} M^2_{\tilde{Q}_L} + m_q^2 + c_{2\beta}\left(T_q^3 - Q_q s_W^2\right) M_Z^2 & m_q M_{\tilde{q}}^{L,R} \\ m_q M_{\tilde{q}}^{L,R} & M^2_{\tilde{q}_R} + m_q^2 + c_{2\beta} Q_q s_W^2 M_Z^2 \end{bmatrix}. \tag{4.52}$$

$M^2_{\tilde{Q}_L}$ et $M^2_{\tilde{q}_R}$ représentent réspectivement le paramètre de brisure douce du doublet et du singlet de $SU(2)_L$.T_q^3 et Q_q sont l'isospin et la charge électrique du squark. Les mélanges sont donnés par les termes non diagonaux :

$$M_u^{L,R} = A_u - \mu/t_\beta, \tag{4.53}$$

$$M_d^{L,R} = A_d - \mu/t_\beta, \tag{4.54}$$

où les $M_{u,d}^{L,R}$ sont des couplages trilinéaires.

La symétrie $S(U)_L$ implique que $M_{\tilde{u}_L} = M_{\tilde{d}_L}$ alors que $M_{\tilde{u}_R} = M_{\tilde{d}_R}$ (les paramètres de brisure $M_{\tilde{q}_L}$ des quarks $\tilde{q}_L$ associés aux quarks de chiralité gauche q_L de chaque doublet d'isospin sont identiques). Le secteur des squarks du MSSM contient donc 5 paramètres pour chaque génération :

$$\left(M_{\tilde{Q}_L}, M_{\tilde{u}_R}, M_{\tilde{u}_d}, A_u, A_d\right). \tag{4.55}$$

Pour obtenir les états propres de masse $\tilde{q}_{1,2}$, on va introduire une matrice unitaire R_q telle que :

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = R_q \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}, \qquad R_q = \begin{pmatrix} c_{\theta q} & s_{\theta q} \\ -s_{\theta q} & c_{\theta q} \end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

Alors la matrice de masse diagonale s'ecrit comme,

$$M_{\tilde{q}}^2 = R_q M_{\tilde{q}_{L,R}}^2 R_q^\dagger = diag(m_{\tilde{q}_1}^2, m_{\tilde{q}_2}^2). \tag{4.57}$$

Donc les masses des champs $\tilde{q}_{1,2}$ sont données par :

$$\begin{aligned} m_{\tilde{q}_{1,2}}^2 &= \frac{1}{2}\left(M_{\tilde{Q}_L}^2 + M_{\tilde{q}_R}^2\right) + m_q^2 + \frac{1}{2}T_q^3 c_{2\beta} M_Z^2 \\ &\pm\sqrt{\left[M_{\tilde{Q}_L}^2 - M_{\tilde{q}_R}^2 + c_{2\beta}(T_q^3 - 2Q_q s_W^2)M_Z^2\right]^2 + 4m_q^2 M_{\tilde{q}}^{L,R}}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Secteur des sleptons

Le neutrino ne contient qu'une chiralité gauche, donc il n'existe qu'un seul partenaire scalaire $\tilde{\nu}$. D'autre part, ils ont une charge Q nulle et on supposera qu'ils sont de masse nulle [22].

Écrivant les matrices de masse

$$M_{\tilde{\nu}}^2 = \begin{bmatrix} M_{\tilde{L}_L}^2 + c_{2\beta}T_\nu^3 M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

$$M_{\tilde{e}_{L,R}}^2 = \begin{bmatrix} M_{\tilde{L}_L}^2 + m_e^2 + c_{2\beta}\left(T_e^3 - Q_e s_W^2\right)M_Z^2 & m_e M_{\tilde{e}}^{L,R} \\ m_e M_{\tilde{e}}^{L,R} & M_{\tilde{e}_R}^2 + m_e^2 + c_{2\beta}Q_e s_W^2 M_Z^2 \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

On remarque que ce secteur ne contient qu'un seul paramètre de couplage trilinéaire pour l'électron A_e contenu dans le terme de mélange,

$$M_{\tilde{e}}^{L,R} = A_e - \mu t_\beta. \tag{4.61}$$

Le secteur des sleptons du MSSM contient donc 3 nouveaux paramètres pour chaque génération :

$$\left(M_{\tilde{L}_L}, M_{\tilde{e}_R}, A_e\right). \tag{4.62}$$

Afin d'obtenir les états propres de masse $\tilde{e}_{1,2}$, on introduit une matrice unitaire R_e telle que

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} = R_e \begin{pmatrix} \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix}, \qquad R_e = \begin{pmatrix} c_{\theta_e} & s_{\theta_e} \\ s_{\theta_e} & c_{\theta_e} \end{pmatrix}. \tag{4.63}$$

Ainsi, la matrice diagonale de masse s'écrit comme

$$M^2_{\tilde{e}_{1,2}} = R_e M^2_{\tilde{e}_{L,R}} R_e^\dagger = diag(m^2_{\tilde{e}_1}, m^2_{\tilde{e}_2}). \tag{4.64}$$

Les masses des champs $\tilde{e}_{1,2}$ peuvent se calculer à partir des relations

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{e}_{1,2}} &= \frac{1}{2}(M^2_{\tilde{L}_L} + M^2_{\tilde{e}_L}) + m_e^2 + \frac{1}{2}T_e^3 c_{2\beta} M_Z^2 \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[M^2_{\tilde{L}_L} - M^2_{\tilde{e}_L} + c_{2\beta}\left(T_e^3 - 2Q_e s_W^2\right) M_Z^2\right]^2 + 4m_e^2 M_{\tilde{e}}^{2^{L,R}}}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

De la même manière que dans le secteur des squarks on peut remplacer les paramètres :

$$\left(M_{\tilde{L}_L}, M_{\tilde{e}_L}, A_e\right) \rightarrow \left(m_{\tilde{e}_1}, m_{\tilde{e}_2}, A_e\right), \tag{4.66}$$

la masse des sneutrinos $\tilde{\nu}$ est prédite dans se secteur à cause de l'invaraince $SU(2)_L$:

$$m^2_{\tilde{\nu}} = c^2_{\theta_e} m^2_{\tilde{e}_1} + s^2_{\theta_e} m^2_{\tilde{e}_2} + m_e^2 + c_{2\beta} M_W^2. \tag{4.67}$$

Chapitre 5

Le Problème de La Matière Noire

En 1933, l'astronome suisse Zwicky détermina la distribution de vitesse au sein de l'amas de Coma. Ses observations surprenantes montraient que la masse dynamique de Coma était une centaine de fois supérieure à la valeur déduite de sa luminosité. La présence de grande quantité de matière invisible dans l'Univers a été de nombreuses fois confirmée par diverses expériences. On donna ainsi le nom de "*Matière Noire*" à toute cette quantité invisible. Dans les galaxies spirales, voir Fig. 12, l'observation des vitesses de rotation en fonction de la distance au centre galactique révèle de manière "claire" la présence de Matière Noire. En effet, les orbites des étoiles suivent la loi de Kepler. Si on considère la masse $M(R)$ à l'intérieur de la sphère de rayon R à partir du centre galactique, l'équilibre entre la force gravitationnelle et l'accélération centrifuge induit,

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2}, \tag{5.1}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \tag{5.2}$$

G représente la constante de gravitation. Pour des grandes distances englobant la majeure partie de la composante visible de la galaxie (sur la Fig. 12, $R \gtrsim 5kpc$), on s'attend naturellement à ce que la masse $M(R)$ devienne constante. Par conséquent, pour de telles distances, la vitesse de rotation v doit décroitre comme $R^{-1/2}$. Les observations indiquent pourtant clairement un palier, ce qui induit la présence d'une grande quantité de matière invisible que l'on appelle halo

de Matière Noire.

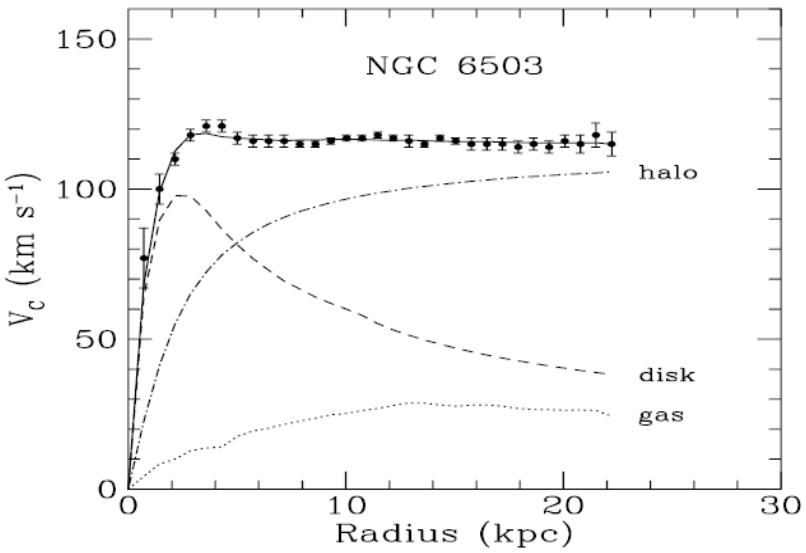


Fig. 12 : Courbe de rotation de la galaxie spirale NGC6530 [26]

Par ailleurs, plusieurs observations expérimentales comme par exemple, l'observation du fond diffus cosmique par la sonde WMAP [27] ont confirmé depuis la présence de matière noire dans l'Univers. Récemment, l'observation de l'amas 1E0657-56 (voir Fig. 13) surnommé *Bullet Cluster* pour sa forme particulière conduit à penser que la matière noire est de nature non baryonique. La Fig. 13 montre la collision de deux amas de galaxies et indique une séparation nette entre les baryons et la distribution de masse. On peut comprendre cette séparation en considérant la présence de particules peu collisionnelles. Lors de l'interaction de ces deux amas de galaxies, les baryons interagissent entre eux et sont donc chauffés. Ces derniers émettent alors un rayonnement X. Les particules de Matière Noire, quant à elles, ne subissent pas ce ralentissement par frottement et se sépare donc du gaz de baryons. Cette observation est difficilement explicable par les théories de gravité modifiée [28] et offre donc un argument fort en faveur de la nature non baryonique de Matière Noire.

Fig. 13 : Observation de l'amas 1E0657-56 (Bullet cluster) [29]. Les zones rouges représentent le flux de rayons X (observés par le satellite CHANDRA [30]) révélant la présence de baryons chauds. Les zones bleues représentent la distribution de la masse (obtenue par effet de lentille gravitationnelle par les télescopes VLT [31] et Hubble [32]).

5.1 Modèle Standard en Cosmologie

Pour construire un modèle cosmologique, il suffit de donner une théorie reliant la géométrie et le contenu de l'Univers, une métrique rendant compte des symétries de celui-ci et enfin son contenu matériel et énergétique.

Le modèle de Friedmann-Lemaître représente actuellement le Modèle Standard en cosmologie. Il se base naturellement sur les équations d'Einstein de la Relativité Générale [37] :

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu}, \tag{5.3}$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ représentent respectivement le tenseur et la courbure de Ricci (qui se déduisent du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ considéré). Enfin, $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion qui décrit le contenu de l'Univers.

Le principe cosmologique stipulant que l'Univers est homogène et isotrope et qu'il n'existe pas d'observateur privilégié conduisant à la métrique dite de Robertson-Walker (en coordonnées sphériques) [37] :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega\right], \tag{5.4}$$

où t est le temps propre et $k = 0, -1, +1$ la courbure. Il semblerait, d'après les observations actuelles, que l'Univers soit plat ; c'est-à-dire de courbure nulle. r représente la distance comobile d'un objet, c'est-à-dire qui suit l'expansion de l'Univers. Pour obtenir la distance métrique correspondante, il faut multiplier cette coordonnée radiale r par le facteur d'échelle $R(t)$. Ainsi, lorsque le facteur d'échelle double, les distances relatives (par exemple entre deux galaxies) sont doublées elles aussi.

Si le contenu de l'Univers est assimilé à un fluide parfait de pression p et de densité d'énergie ρ reliées par une équation d'état :

$$p = \omega\rho, \tag{5.5}$$

alors le tenseur énergie-impulsion s'écrit : $\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = dig\,(-\rho, p, p, p)$ et les deux équations (5.3) et (5.4) conduisent aux deux équations de Friedmann-Lemaître :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{5.6}$$

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{k}{R^2} + \Lambda = 8\pi G p. \tag{5.7}$$

Si on suppose que l'Univers est plat et que le terme de constante cosmologique est du à un fluide de pression négative $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ (on parlera d'une manière générale d'énergie noire), on peut alors réécrire les équations (5.6) et (5.7) sous la forme simplifiée :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{5.8}$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = 8\pi G p. \tag{5.9}$$

où on a introduit le paramètre de Hubble :

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}. \tag{5.10}$$

Ce paramètre représente le taux d'expansion de l'Univers à l'instant t. En combinant les équations (5.8) et (5.9) puis en utilisant la dérivée de la relation (5.8) par rapport au temps

propre, on trouve :

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)H = 0. \tag{5.11}$$

Si on injecte l'équation d'état (en supposant ω constant) correspondant au contenu de l'Univers, on déduit que :

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)}, \tag{5.12}$$

$$H \propto R^{-\frac{3(1+\omega)}{2}}. \tag{5.13}$$

Par conséquent, si l'Univers est dominé par un type particulier de fluide (radiation, matière, énergie noire), le facteur d'échelle $R(t)$ suit une évolution bien particulière, voir Tab. 5.1

Univers dominé par la ...	ω	ρ	R	H
radiation	$\frac{1}{3}$	$\propto R^{-4}$	$\propto t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}t^{-1}$
matière	0	$\propto R^{-3}$	$\propto t^{2/3}$	$\frac{2}{3}t^{-1}$
énergie noire	-1	$\propto R^{0}$	$\propto e^{t}$	t

Tab. 5.1 : Evolution du facteur d'échelle $R(t)$

Il est habituel de décrire le contenu de l'Univers en définissant la quantité Ω_i de l'espèce i par :

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \tag{5.14}$$

qui représente le rapport de la densité de l'espèce i par rapport à la densité critique ρ_c définie par :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{5.15}$$

D'après l'équation (5.8), la somme totale des densités ρ_i est strictement égale à la densité critique ρ_c, ou de manière équivalente :

$$\sum \Omega_i = 1 \text{ pour } k = 1. \tag{5.16}$$

Le Modèle Standard en cosmologie est le modèle ΛCDM (Cold Dark Matter) où l'énergie noire est décrite au travers d'une constante cosmologique Λ et où la matière noire est supposée non relativiste, donc froide.

5.2 Observations

Les observations combinées de diverses expériences, notamment WMAP *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* [33] et SDSS *Sloan Digital Sky Survey* [34] permettent de dériver [35] par

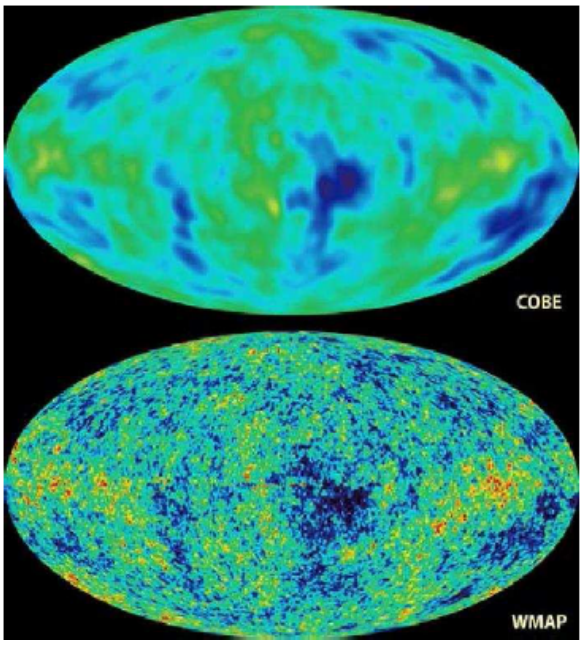
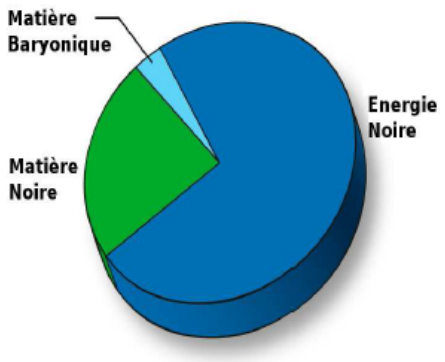


Fig. 14 : Mesures des fluctuations de température du fond diffus cosmique (CMB) par les experiences COBE [36] et WMAP [33].

l'observation du fond diffus cosmologique les différentes densités actuelles Ω_i avec une très grande précision, voir Tab. 5.2. Ces données expérimentales font apparaître trois problèmes majeurs en cosmologie.

Tout d'abord, on s'aperçoit que la somme des densités donne $\sum \Omega_i h^2 = 1$ et ceci révèle donc que notre Univers est plat, cependant, rien ne suggère a priori que la courbure de l'Univers soit nulle. Ensuite, les mesures montrent que la composante d'énergie noire est très importante.

Son interprétation physique est toujours un mystère. En physique quantique, une explication possible serait de penser cette composante en terme de densité d'énergie du vide. Cependant, tous les modèles en physique des particules prédisent une valeur du vide trés éloignée de la valeur observée. Une autre explication proviendrait des modèles de quintessence dans lesquels on considère Λ comme un paramètre légèrement variable et induit par un champ scalaire de pression négative. Enfin, on remarque une part importante de matière non baryonique $\Omega_{nb}h^2 \simeq 0.1$ correspondant à la Matière Noire. Cette contribution peut être expliquée par l'introduction de nouvelles particules dans des théories au-delà du Modèle Standard (Supersymétrie, Dimensions Supplémentaires...).



Ω_γ	Ω_ν	Ω_b	Ω_{nb}	Ω_Λ	$\Sigma\Omega_i$
$4.6^{+0.5}_{-0.5} \times 10^{-5}$	< 0.014	$0.042^{+0.003}_{-0.005}$	$0.20^{+0.02}_{-0.04}$	$0.76^{+0.04}_{-0.06}$	$1.003^{+0.013}_{-0.017}$

Tab. 5.2 : Valeurs expérimentales des densités actuelles Ω_i pour différents espèces.

Les indices γ, ν, b, nb et Λ indiquent respectivement la radiation, les neutrinos, la matière baryonique, la matière noire non-baryonique (ou Matière Noire) et l'énergie noire. Ces valeurs sont calculées en prenant pour le paramètre de Hubble h, défini par $H = 100\ h.km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, sa valeur actuelle $h_0 = 0.73$.

5.3 Densité Relique

Dans la suite sera détaillée la résolution [38, 39] de l'équation de Boltzmann qui conduit à la prédiction de la densité relique $\Omega_{nb}h^2 = \Omega_\chi h^2$ à partir de la physique des particules.

5.3.1 Equation de Boltzmann

Dans l'Univers primordial, les particules présentes (du Modèle Standard et autres...) intéragissent entre elles et sont en équilibre thermique. Cependant, compte tenu de l'expansion de l'Univers, certaines particules sortent de leur état d'équilibre et se découplent du reste des particules. Ceci intervient plus lorsque le parcours moyen $l \sim 1/(n\sigma)$ devient plus petit que le taux d'expansion $H \sim 1/t$. On parle alors du moment du découplage (*ou freeze-out*). Après cet instant, ces particules n'interagissent plus assez avec la soupe cosmique et leur nombre reste alors constant. Par conséquent, leur densité décroit comme le cube du facteur d'échelle $n \sim 1/R^3$.

La densité numérique d'une particule découplée peut être calculée à partir de l'équation de transport de Boltzmann. Si on considère N particules χ_i de masse m_i et possédant un nombre interne de degrés de liberté g_i (spin, couleur ...), l'évolution de la densité numérique n_i de la particule χ_i est donnée par l'équation de Boltzmann (écrite ici dans le cas général dit de coannihilation) :

$$\frac{dn_i}{dt} = -3Hn_i - \sum_{j=1}^{N} \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle \left(n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq} \right). \tag{5.17}$$

On a supposé ici que la particule la plus légère d'indice $i = 1$ est stable. Le premier terme du membre de droite correspond au facteur de dilution due à l'expansion de l'Univers. Si aucune réaction n'a lieu, l'équation (5.17) conduit simplement à $n_i R^3 = \text{const}$. Par conséquent, la densité diminue comme l'inverse du cube du facteur d'échelle.

Le second terme représente quant à lui les réactions de (co)annihilation entre deux particules χ_i et χ_j dont la section efficace totale est donnée par :

$$\sigma_{ij} = \sum_X \sigma \left(\chi_i \chi_j \to X \right), \tag{5.18}$$

avec X l'ensemble de particules du Modèle Standard. Plus précisément, on doit calculer la moyenne thermique $\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle$ du produit de cette section efficace par la vitesse relative qui est

donnée par :

$$v_{ij} = \frac{2}{1 - M_-^2/s}\sqrt{1 - 2M_+^2/s + M_-^4/s^2}, \text{ avec } M_\pm^2 = m_i^2 \pm m_j^2 \tag{5.19}$$

Comme χ_1 est stable, toutes les particules de masse plus élevées vont se désintégrer pour contribuer à sa densité. Donc la somme des densités numériques,

$$n = \sum_{i=1}^{N} n_i, \tag{5.20}$$

représente la réelle abondance à prendre en compte. D'autre part, on suppose

$$\frac{n_i}{n} \simeq \frac{n_i^{eq}}{n_{eq}}. \tag{5.21}$$

On obtient finalement l'équation

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_{eff} v \rangle \left(n^2 - n_{eq}^2\right), \tag{5.22}$$

dont la moyenne thermique est donnée par

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \sum_{i,j} \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle \frac{n_i^{eq}}{n_{eq}} \frac{n_j^{eq}}{n_{eq}}. \tag{5.23}$$

À l'équilibre $n = n_{eq}$, on retrouve bien la compensation entre créations et annihilations.

5.3.2 Moyenne thermique

La moyenne thermique de la section efficace multipliée par la vitesse relative est donnée par :

$$\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle = \frac{\int d^3\vec{p}_i d^3\vec{p}_j f_i f_j \sigma_{ij} v_{ij}}{\int d^3\vec{p}_i d^3\vec{p}_j f_i f_j}, \tag{5.24}$$

où f_i représente la fonction de distribution de l'espèce i. Dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann ($T \lesssim m$), cette distribution est simplement donnée par :

$$f_i = e^{-E_i/T}. \tag{5.25}$$

La densité numérique de la particule i à l'équilibre s'exprime en fonction du nombre interne de degrés de liberté g_i :

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p_i f_i = \frac{T}{2\pi^2} g_i m_i^2 K_2(\frac{m_i}{T}). \tag{5.26}$$

Pour le dénominateur on obtient en utilisant la statistique de Maxwell-Boltzmann pour f_i :

$$n^{eq} = \sum_i n_i^{eq} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-E_i/T} = \frac{T}{2\pi^2} \sum_i g_i m_i^2 K_2(\frac{m_i}{T}), \tag{5.27}$$

où on a introduit la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce $K_2(x)$, (voir Annexe.A).

Il est facile de montrer que seules les particules de masse proche de celle de la particule la plus légère m_1 contribuent significativement à la densité numérique n. En effet, pour une particule i de masse $m_i = m_1 + \delta m_i$, la fonction de Bessel $K_2(x)$ contient le facteur de Boltzmann $e^{-x\delta m_i/m_1}$ qui devient non négligeable lorsque la différence de masse δm_i est petite. En première approximation, la densité numérique de la particule i à l'équilibre est donnée par :

$$n_i^{eq} \simeq n_1^{eq} \underbrace{\frac{g_i}{g_1} \left(1 + \frac{\delta m_i}{m_1}\right)^2 e^{-x\frac{\delta m_i}{m_1}}}_{\tilde{g}_{i,eff}}, \tag{5.28}$$

avec x est le rapport m_i/T.

et par conséquent

$$n^{eq} = n_1^{eq} \sum_{i=1}^{N} \tilde{g}_{i,eff}. \tag{5.29}$$

Finalement, la moyenne (5.23) se réduit à :

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \sum_{i,j} \frac{\tilde{g}_{i,eff} \tilde{g}_{j,eff}}{g_{eff}^2} \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle . \tag{5.30}$$

5.3.3 Modification de l'équation de Boltzmann

Pour pouvoir trouver une solution approchée de l'équation (5.22), on effectue le changement de variable suivant :

$$Y = \frac{n}{s}, \tag{5.31}$$

où s représente la densité d'entropie. On considère donc,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{\dot{n}}{s} - \frac{n}{s^2}\dot{s}. \tag{5.32}$$

On suppose aucune production d'entropie, par conséquent le terme $S = R^3 s$ reste constant (où R est le facteur d'échelle), ce qui donne :

$$\dot{Y} = \frac{\dot{n}}{s} + 3H\frac{n}{s}, \tag{5.33}$$

d'où on peut écrire l'équation (5.22) comme suit :

$$\dot{Y} = -s \langle \sigma_{eff} v \rangle \left(Y^2 - Y_{eq}^2 \right). \tag{5.34}$$

Le membre de droit de l'équation précédente ne dépend que de la température T, On va l'exprimer en fonction de x avec $x = m_1/T$:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{m_1}{x} \frac{1}{3H} \frac{ds}{dT} \langle \sigma_{eff} v \rangle \left(Y^2 - Y_{eq}^2 \right), \tag{5.35}$$

où on a utilisé :

$$\frac{1}{\dot{T}} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{ds}{dT} = \frac{1}{3Hs} \frac{ds}{dT}. \tag{5.36}$$

En utilisant l'équation de Friedmann-Lemaître (5.8) et en supposant que l'Univers est dominé par la radiation à l'origine induisant le paramétrage suivant

$$\rho = g_{eff}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4, \tag{5.37}$$

$$s = h_{eff}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3, \tag{5.38}$$

pour la densité d'énergie ρ et pour la densité d'entropie s en fonction des degrés de liberté effectifs $g_{eff}(T)$ et $h_{eff}(T)$, on trouve :

$$\frac{dY}{dx} = -\sqrt{\frac{\pi}{45G}} \frac{\sqrt{g_*} m_1}{x^2} \langle \sigma_{eff} v \rangle \left(Y^2 - Y_{eq}^2 \right). \tag{5.39}$$

$\sqrt{g_*}$ est une notation condensée définie par :

$$\sqrt{g_*} = \frac{h_{eff}}{\sqrt{g_{eff}}} \left(1 + \frac{T}{3h_{eff}} \frac{dh_{eff}}{dT} \right). \tag{5.40}$$

5.3.4 Solution approchée

L'équation (5.39) est une forme particulière de l'équation de Riccati $Y' = q_0(x) + q_1(x)Y + q_2(x)Y^2$ qui n'a malheureusement pas de solution analytique. Plusieurs programmes, comme **DarkSUSY** [41] et **MicrOMEGAs** [42], permettent la résolution numérique de l'équation (5.39) et prédisent la densité relique de matière noire dans différents modèles.

On peut cependant trouver une solution approchée. Pour cela, on va résoudre cette équation pour deux époques particulières : le moment du *freeze-out* pour $x = x_F$ et aujourd'hui pour $x = x_0 \to \infty$.

Au moment du *freeze-out*, les particules χ_i sont en équilibre thermique et on va donc poser $\frac{Y-Y_{eq}}{Y_{eq}} = c$ où c est un nombre choisi "convenablement", l'équation (5.39) devient alors :

$$\frac{dY_{eq}}{dx} = -\sqrt{\frac{\pi}{45G}}\frac{\sqrt{g_*}m_1}{x^2}\langle\sigma_{eff}v\rangle c(c+2)Y_{eq}^2, \qquad \text{pour } x = x_F \tag{5.41}$$

D'après ce que l'on a trouvé pour n^{eq} dans l'équation (5.29), on obtient,

$$Y_{eq} = \frac{g_1}{4\pi^4}x^2\frac{K_2(x)}{h_{eff}(T)}\sum_{i=1}^{N}\tilde{g}_{i,eff}(x). \tag{5.42}$$

En développant au premier ordre les fonctions de Bessel, l'eq.(5.41) conduit à la relation itérative :

$$x_F^{-1} = \ln\left[0.03824 g_{eff}\frac{M_p}{\sqrt{g_*}}m_1\langle\sigma_{eff}v\rangle c(c+2)x_F^{1/2}\right], \tag{5.43}$$

avec $M_p = 1/\sqrt{G}$ la masse de Planck.

Aujourd'hui, les particules χ_i ne sont plus à l'équilibre thermique et on peut négliger Y_{eq} devant $Y(x)$, l'équation (5.39) se simplifie alors en

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{Y}) \approx \sqrt{\frac{\pi}{45G}}\sqrt{g_*}m_1\langle\sigma_{eff}v\rangle/x^2. \tag{5.44}$$

En intégrant de $x = x_F$ à $x = \infty$, on trouve en négligeant le terme $1/Y_F$ et en considérant $\sqrt{g_*}(x_F)$ comme étant une valeur typique pour $\sqrt{g_*}(x)$:

$$Y_\infty^{-1} = \sqrt{\frac{\pi}{45G}}\sqrt{g_*}(x_F)m_1 J, \tag{5.45}$$

avec la notation

$$J = \int_{x_F}^{\infty}\langle\sigma_{eff}v\rangle\, dx/x^2. \tag{5.46}$$

Finalement, la densité relique de matière noire est donnée par :

$$\Omega_\chi = \rho_{\chi^0}/\rho_{crit} = \frac{Y_\infty s_0 m_1}{\rho_{crit}}, \tag{5.47}$$

où $s_0 = s(T_0)$ l'entropie à $T_0 = 2.726$ K.

En utilisant le facteur de conversion $\hbar^2c^3 = 1.171\times10^{-17}\text{GeV}^2.\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$, on obtient :

$$\Omega_\chi h^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{g_*(x_F)}}\frac{x_F}{24}\right)\frac{0.237\times10^{-26}\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}}{x_F J}. \tag{5.48}$$

De plus, pour être un peu plus rigoureux, il faut normalement tenir compte dans nos calculs de la vitesse de Mϕller [38], au lieu de la vitesse reative v.

$$v_{M\phi l} = v_{cm}\frac{1}{2}\left[1 - \vec{v}_1\vec{v}_2\frac{m^2}{E_1E_2}\right], \tag{5.49}$$

Si on effectue ce changement, on doit modifier la moyenne thermique $\langle\sigma v\rangle$,

$$\langle\sigma v_{M\phi l}\rangle = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{K_1^2(x)}{K_2^2(x)} + ...\right]\langle\sigma v\rangle \simeq \left(1 - \frac{3}{2x} + ...\right)\langle\sigma v\rangle, \quad \text{pour } x >> 1 \tag{5.50}$$

qui change légèrement les prédictions (de l'ordre de 5%). La Fig. 14 montre une solution numérique de l'équation de Boltzman. On voit apparaître clairement l'instant du *freeze-out* (ici pour $x_F \sim 20$). D'autre part, on constate que plus la section efficace est grande et plus la densité relique est petite [43].

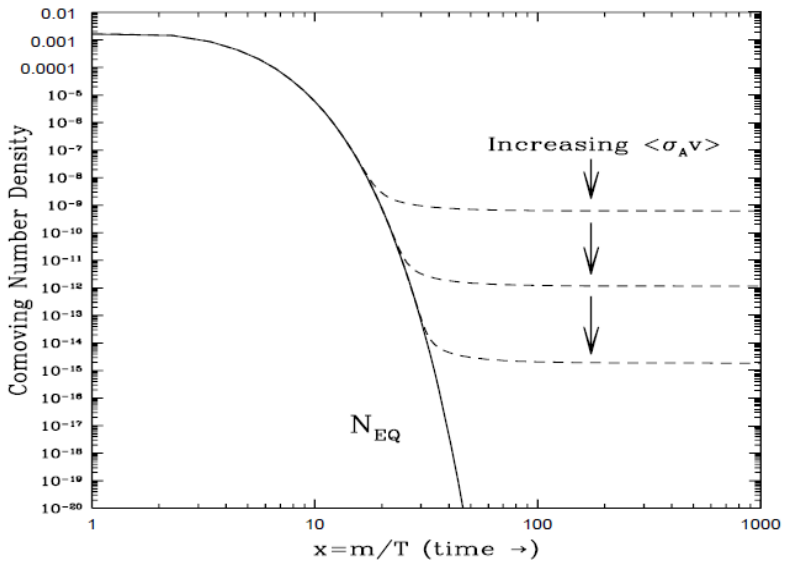


Fig. 15 : Evolution de la densité comobile numérique aujourd'hui (en pointillé) et à l'équilibre (en trait plein).

5.3.5 Approximation et première estimation

On peut montrer que la moyenne thermique $\langle\sigma v\rangle$ est donnée par :

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{x^{3/2}}{2\pi^{1/2}}\int_0^\infty (\sigma v)v^2 e^{-xv^2/4}dv \qquad \text{pour } x = \frac{m}{T} \gtrsim 1 \tag{5.51}$$

Il est souvent possible de développer σv comme un polynôme de la vitesse. Il est intéressant de connaître le résultat suivant qui donne la moyenne thermique de la vitesse à une certaine puissance α :

$$\langle v^\alpha \rangle = \frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{3+\alpha}{2}) x^{-\alpha/2}, \quad \text{avec } \alpha > -3 \tag{5.52}$$

Plus précisément, les puissances qui nous seront utiles par la suite, $\alpha = -1, 0, 1, 2$, conduisent à :

$$\left\langle v^{-1} \right\rangle = \sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad \left\langle v^0 \right\rangle = 1, \quad \left\langle v^1 \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi x}}, \quad \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{6}{x} ... \tag{5.53}$$

Si on suppose que l'on est loin des pôles et des seuils qui peuvent intervenir dans les sections efficaces (pour plus de détails voir Ref. [43]), σv peut raisonablement s'écrire en première approximation :

$$\sigma v = a + b v^2. \tag{5.54}$$

On obtient alors, en utilisant les relations (5.53), $\langle \sigma v \rangle = a + 6b/x$ et donc,

$$\langle \sigma v_{M\phi l} \rangle = a + 6(b - \frac{a}{4})/x + ... \tag{5.55}$$

La densité relique est ainsi reliée aux facteurs a et b par :

$$\Omega_\chi h^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{g_*(x_F)}} \frac{x_F}{24} \right) \frac{0.237 \times 10^{-26}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}}{a + \frac{3}{x_F}(b - a/4)}. \tag{5.56}$$

Par conséquent, si on se donne un modèle au-delà du Modèle Standard, on peut relier la physique des particules à la prédiction cosmologique par le biais du calcul des différentes (co)annihilations du candidat de matière noire (pour un calcul plus détaillé, voir [38]). On a ainsi, pour un modèle standard cosmologique de domination de la radiation à l'origine :

$$\Omega_\chi h^2 \sim \frac{10^{-10}\mathrm{GeV}^{-2}}{\langle \sigma v \rangle}. \tag{5.57}$$

Une section efficace électrofaible donne typiquement la valeur :

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{\alpha^2}{M_{EW}^2} \sim 10^{-9}\mathrm{GeV}^{-2}, \tag{5.58}$$

avec $\alpha \sim 1/137$ la constante de couplage électromagnétique et $M_{EW} \sim 100$ GeV, l'échelle électrofaible. Les deux relations (5.57) et (5.58) induisent une densité relique de $\Omega h^2 \sim 0.1$ ce qui correspond aux observations, (voir Sect.5.2). Cette coïncidence semble indiquer que les

problèmes de brisure de symétrie électrofaible et celui de la matière noire sont intimement liés et ainsi encourage à explorer des modèles de nouvelle physique au-delà de l'échelle électrofaible.

Enfin, on peut noter que dans certains cadres cosmologiques non standards, la relation (5.57) peut être modifiée. Si dans les collisionneurs (LHC, LC), on découvre le candidat responsable de la Matière Noire, il deviendra intéressant de vérifier le scénario cosmologique standard et le résultat donnant la densité relique en fonction des probabilités d'annihilation. Le cadre standard suppose la conservation de l'entropie de matière et de radiation ainsi que l'équilibre thermique (et chimique) des particules massives interagissant faiblement (WIMPs) avant le decouplage. Ces hypothèses de base ne sont pas nécessairement valables dans certains modèles cosmologiques où une création d'entropie et une production non thermique des WIMPs peuvent avoir lieu [44]. D'autres scénarios peuvent être envisagés comme l'introduction de dimensions supplémentaires [45] ou d'un champ scalaire [46], comme les cosmologies scalaire-tenseur [47], anistropiques [48] ou encore en supposant que l'ère de domination de la radiation a débuté à une température basse de "réchauffement" [49]. Les relations que nous venons de dériver se trouvent grandement changées. La conséquence est qu'une observation (même indirecte) des WIMPs et l'analyse de ces propriétés, aux collisionneurs par exemple, contraindrait ces modèles cosmologiques. Pour que ces analyses et ces contraintes puissent être menées à bien et interprétées avec un minimum d'ambiguïté et un maximum de précision, il nous faut du côté théorique, en ce qui concerne la partie physique des particules, pouvoir donner des prédictions fiables sur les sections efficaces impliquant les WIMPs et les processus ayant trait aux paramètres du modèle sous-jacent. En supersymétrie, par exemple, un calcul au-delà de l'approximation de Born est donc essentiel.

5.4 Détection directe et indirecte de la matière noire

5.4.1 Détection directe

Beaucoup d'expériences de la détection directe ont déjà produit des limites tout à fait fortes sur la section efficace de la diffusion élastique des candidats de matière noire avec les protons et les neutrons. En outre, les expérience dans les années prochaines veulent améliorer

les limites actuelles par plusieurs ordres de magnitude qui fait les perspectives de la découverte très grandes. Pour l'instant, les meilleures limites de la détection directe viennent des expéreinces CDMS, Edelweiss et ZEPLIN-I (voir Fig. 16), ces limites sont pour les intéractions spin-indépendantes (scalaires). Avec les expériences modernes qui utilisent des cibles avec des nucléons très lourds les intéractions spin-indépendantes ne sont pas sensibles à la plupart des candidats de la Matière Noire.

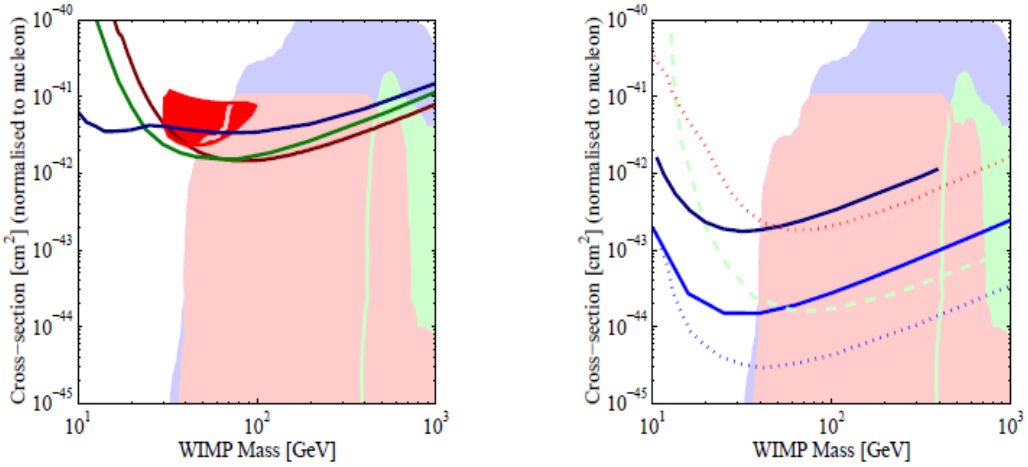


Fig.16 : Courant (gauche) et futur (droit) ; sensibilités d'expériences de la détection directe

Le cadre gauche de la Fig. 16 montre la région où l'expérience DAMA demande une découverte (voir par exemple Ref. [50]). DAMA est localiseé aux laboratoires INFN sous la montagne Gran Sasso en Italie, cette expérience a rapporté une modulation de taux d'événement produit par la détection d'une WIMP avec une masse approximativement de 60 GeV et une section efficace de diffusion d'ordre de 10^{-41} cm^2.

Autres expériences comme EDELWEISS [51] et CDMS [52] ont exploré l'espace de paramètres favorisé par l'expérience DAMA sans trouver aucune évidence de Matière Noire.

Les résultats théoriques et expérimentaux de détection directe sont obtenus habituellement sous quelques suppositions simplifiées sur le profil de la matière sombre. En particulier, un profil isothermique est souvent assumé, avec $\rho \propto r^{-2}$ (donc, avec une courbe de rotation plate), une densité locale, $\rho_0 = 0.3$ GeV cm^{-3}, une distribution de vitesse de Maxwell Boltzmann et une vitesse caractéristique $v_0 = 270\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Les incertitudes de la densité et la distribution de vitesse

de la matière sombre jouent un rôle principal pour l'agrandissement de la région permise dans le plan section efficace-masse montré sur la Fig .16, cependant, étendre la gamme de masse jusqu'à ~ 250 GeV et celle de section efficace jusqu'à $\sigma_{\chi \to n} \sim 10^{-7}$ pb. Si ce résultat sera comfirmé il pourrait expliquer la contradiction entre les conclusions d'observation de différentes expériences. Malheureusement, les analyses subséquentes mènent aux résultats différents (voir en particulier [54, 55]), qui laissent la situation expérimentale indéfinie.

5.4.2 Détection indirecte

La détection indirecte de la matière noire est la technique d'observation des radiations produites dans les annihilations de celle-ci. Le flux de telle radiation est proportionnel au taux de l'annihilation, qui dépend de la densité au carré de Matière Noire, $\Gamma_A \propto \rho_{DM}^2$. Par conséquent, les places naturelles à regarder pour observer les flux considérables, sont les régions de grande densité de la matière sombre accumulent. Nous ferons référerence à ces régions ou objets comme amplificateurs. Les régions denses de halo galactique, tel que le centre galactique peuvent être des excellents amplificateurs pour les besoins de détecter les rayons gamma ou les neutrinos. Les autres objets astrophysiques, tel que le Soleil ou la terre pourraient aussi être des amplificateurs pour l'annihilation de la matière noire en capturant ses particules quand ells perdent l'énergie à travers la diffusion avec les nucléons à l'intérieur de ces objets, seulement les neutrinos peuvent s'échapper de ces objets denses, en outre les observations des positrons et anti-positrons cosmiques peuvent être des outils précieux pour la recherche des particules de matière noire [40].

5.5 Les candidats

Nous avons vus dans les sections précédentes, que l'évidence de la matière noire est montrée par tous les observations astrophysiques. Il est donc naturel de poser la question : de quoi cette matière noire est-elle composée ? Pour répondre à cette question il y a plusieurs particules qui sont considérées comme candidats de cette matière sombre, on peut citer [40] :

- Les neutrinos du Modèle Standard.
- Les neutrinos stériles.

- Les axions.
- Les candidates supersymétriques : les neutralinos, les sneutrinos, les gravitinos, les axinos.
- La matière noire scalaire lumineuse.
- La matière noire à partir des modèles du Little Higgs.
- Les états de Kaluza-Klein.
- Super-lourde Matière Noire.

Dans cette section nous concentrons notre attention sur deux candidats : les neutralinos, probablement le candidat le plus largement étudié, et aussi on édutie le sneutrino.

5.5.1 Les neutralinos

Les jauginos électrofaibles $\tilde{B}, \tilde{W}^0$, $\tilde{W}^{\pm}$ et les Higgsinos $\tilde{H}^0_{1,2}$, $\tilde{H}^{\pm}_{1,2}$ peuvent se mélanger pour donner les états de masses appelés charginos $\tilde{\chi}^{\pm}_i$ et neutralinos $\tilde{\chi}^0_i$(voir sect.5.2.2). On va donner les amplitudes et les sections efficaces des canaux les plus importants des annihilations des neutralinos dans la limite de faible vitesse (le premièr terme du $\sigma v = a + bv^2 + ...$).

Annihilation en des fermions

Les neutralinos peuvent s'annihiler en paires de fermions par trois diagrammes d'arbre [56] :

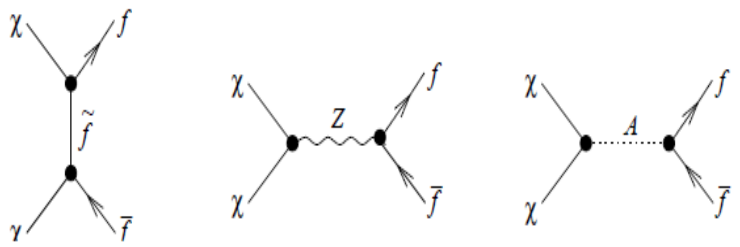


Fig.17 : Diagrammes d'annihilation des neutralinos en pairs de fermions [56]

Ces processus consistent en canal-s avec échange d'un Higgs pseudoscalaire et un boson Z^0, canal-t avec échange d'un sfermion.

L'amplitude avec un échange d'un Higgs pseudoscalaire est donnée par :

$$\mathcal{A}_A = 4\sqrt{2} g T_{A11} h_{Aff} \frac{1}{4 - (m_A/m_\chi)^2 + i\Gamma_A m_A/m_\chi^2}, \tag{5.59}$$

où, m_A est la masse du Higgs pseudoscalaire, Γ_A est la largeur du Higgs et T_{A11} est le couplage A^0-neutralions-neutralions donné par :

$$T_{A11} = -s_\beta Q''_{1,1} + c_\beta S''_{1,1}, \tag{5.60}$$

où : $Q''_{1,1} = N_{3,1}(N_{2,1} - t_{\theta_W} N_{1,1})$ et $S''_{1,1} = N_{4,1}(N_{2,1} - t_{\theta_W} N_{1,1})$. N est la matrice qui diagonalise celle des masses des neutralinos $M^{diag}_{\chi^0} = N^\dagger \mathcal{M}_N N$ (voir Annexe C). h_{Aff} est le couplge de Yukawa A^0-neutralinos-neutralinos donné par :

$$h_{Aff} = -\frac{g m_f \cot\beta}{2 m_{W^\pm}}, \quad \text{pour des fermion de type-up} \tag{5.61}$$

$$h_{Aff} = -\frac{g m_f \tan\beta}{2 m_{W^\pm}}, \quad \text{pour des fermion de type-down} \tag{5.62}$$

L'amplitude avec un échange d'un sfermion est :

$$\mathcal{A}_{\tilde{f}} = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{P_j} \left(\left[\left(X'_{ij1}\right)^2 + \left(W'_{ij1}\right)^2 \right] \frac{m_{f_i}}{m_\chi} + 2 X'_{ij1} W'_{ij1} \right), \tag{5.63}$$

où $P_j = 1 + \left(m_{\tilde{f}_j}/m_\chi\right)^2 - (m_{f_i}/m_\chi)^2$, la somme porte sur les six états des sfermions. Les couplages fermion-sfermion-neutralinos X'_{ij1} et W'_{ij1} sont donnés par :

$$X'_{ij1} = X_1 (\Pi_L \Theta_f)_{i,j} + Z_{i,k,1} (\Pi_R \Theta_f)_{k,j}, \tag{5.64}$$

et

$$W'_{ij1} = Y_1 (\Pi_R \Theta_f)_{i,j} + Z_{i,k,1} (\Pi_L \Theta_f)_{k,j}, \tag{5.65}$$

avec

$$X_1 = -g\sqrt{2} \left[T_3(f_i) N^*_{2,1} - \tan\theta_W \left(T_3(f_i) - e(f_i) \right) N^*_{1,1} \right], \tag{5.66}$$

et

$$Y_1 = g\sqrt{2} \tan\theta_W e(f_i) N^*_{1,1}, \tag{5.67}$$

$$Z_{i,j,1} = -\frac{g}{\sqrt{2} m_{W^\pm} s_\beta} \Theta_{i,j} N^*_{4,1}, \quad \text{pour un état final quark de type-up} \tag{5.68}$$

$$Z_{i,j,1} = -\frac{g}{\sqrt{2} m_{W^\pm} c_\beta} \Theta_{i,j} N^*_{3,1}, \quad \text{pour un état final quark de type-down} \tag{5.69}$$

$$Z_{i,j,1} = -\frac{g}{\sqrt{2} m_{W^\pm} c_\beta} \Theta_{i,j} N^*_{3,1}, \quad \text{pour un état final leptons} \tag{5.70}$$

Ici, $T_3(f_i)$ et $e(f_i)$ sont l'hypercharge faible et la charge eléctrique des états finals fermioniques. N est la matrice qui diagonalise celle des masses des neutralinos, Θ_f sont les matrices 6×6 des masses des sfermions et $\Pi_{L,R}$ sont les operateurs gauches et droits de projection.

$$\Pi_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Pi_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

Finalement, l'amplitude d'annihilation des neutralions avec échange d'un boson Zest :

$$\mathcal{A}_Z = 2\sqrt{2}\frac{g^2}{\cos\theta_W} O''^L_{1,1} T_3(f_i) \frac{m_{f_i} m_\chi}{m_Z^2}. \tag{5.72}$$

Le couplage $O''^L_{1,1}$ est donné par : $\frac{1}{2}\left(-N_{3,1}N^*_{3,1} + N_{4,1}N^*_{4,1}\right)$.

Additionnant ces trois contributions à l'amplitude, nous pouvons calculer la section efficace du processus,

$$\sigma v(\chi\chi \to \bar{f}_i f_i)_{v\to 0} = \frac{c_f \beta_f}{128\pi m_\chi^2} \left|\mathcal{A}_A(\chi\chi \to \bar{f}_i f_i) + \mathcal{A}_{\tilde{f}}(\chi\chi \to \bar{f}_i f_i) + \mathcal{A}_Z(\chi\chi \to \bar{f}_i f_i)\right|^2, \tag{5.73}$$

où $\beta_f = \sqrt{1 - m_f^2/m_\chi^2}$. c_f est le facteur de couleur qui est 3 pour les états finals de quarks et 1 autrement.

Nous accentuons que tous les diagrammes d'arbre du processus d'annihilation ont des amplitudes qui sont proportionnelles aux masses des états finals. Pour l'échange du sfermion et Z^0 c'est parce que les couplages Z^0-fermion-fermion et neutralino-fermion-fermion conservent la chiralité. Pour l'échange du Higgs pseudoscalaire l'amplitude introduit un facteur explicit de masse du fermion dans le couplage de Yukawa. On note aussi que le couplage de Yukawa qui apparaît dans l'amplitude avec échange d'un Higgs pseudoscalaire est proportionnel à $\tan\beta$ pour des quarks de type down et $\cot\beta$ pour des quarks de type up. Le résultat de cette observation est que l'annihilation des neutralions en des fermion sera dominée par des états finals lourds, $b\bar{b}$, $\tau^-\tau^+$. En outre si $\tan\beta$ est grand les fermions de type bottom seront les dominants même si avec petite masse.

Annihilation en des bosons de jauge

Généralement, les neutralinos peuvent s'annihiler en paires de boson de jauge par plusieurs processus [56]. Dans la limite de faible vitesse, seulement le canal t avec éhange de charginos

et neutralinos qui ne sont pas négligeables.

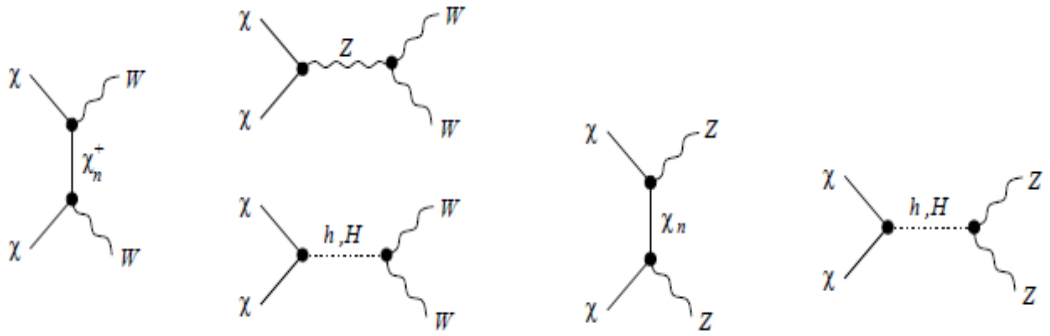


Fig.18 : Diagrammes d'annihilation des neutralinos en paires de bosons de jauge [56]

L'amplitude d'annihilation des neutralinos en paires de $W^{\pm}$ est :

$$\mathcal{A}(\chi\chi \to W^+W^-)_{v\to 0} = 2\sqrt{2}\beta_W g^2 \sum_{n=1}^{2} \left[\left(O^L_{1,n}\right)^2 + \left(O^R_{1,n}\right)^2 \right] \frac{1}{P_n}, \tag{5.74}$$

où, $\beta_W = \sqrt{1 - m_W^2/m_\chi^2}$ et $P_n = 1 + \left(m_{\chi_n^\pm}/m_\chi\right)^2 - \left(m_W/m_\chi\right)^2$. La somme est sur les états des charginos. $O^L_{1,n}$ et $O^R_{1,n}$ sont les couplages neutralinos- charginos donnés par : $\frac{-1}{\sqrt{2}} N_{4,1} V^*_{2,n} + N_{2,1} V^*_{1,n}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}} N^*_{3,1} U_{2,n} + N^*_{2,1} U_{1,n}$ respectivement ; V et U sont les matrices de masse des charginos :

$$U = \begin{pmatrix} \cos\phi_- & -\sin\phi_- \\ \sin\phi_- & \cos\phi_+ \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \cos\phi_+ & -\sin\phi_+ \\ \sin\phi_+ & \cos\phi_- \end{pmatrix}, \tag{5.75}$$

où,

$$\tan 2\phi_- = 2\sqrt{2} m_W \frac{(\mu \sin\beta + M_2 \cos\beta)}{(M_2^2 - \mu^2 + 2m_W^2 \cos 2\beta)}, \tag{5.76}$$

et

$$\tan 2\phi_+ = 2\sqrt{2} m_W \frac{(\mu \cos\beta + M_2 \sin\beta)}{(M_2^2 - \mu^2 - 2m_W^2 \cos 2\beta)}. \tag{5.77}$$

L'amplitude d'annihilation des neutralinos en pairs de Z^0 est similaire :

$$\mathcal{A}(\chi\chi \to Z^0 Z^0)_{v\to 0} = 4\sqrt{2}\beta_Z \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} \sum_{n=1}^{4} \left(O''^L_{1,n}\right)^2 \frac{1}{P_n}, \tag{5.78}$$

ici $\beta_Z = \sqrt{1 - m_Z^2/m_\chi^2}$ et $P_n = 1 + \left(m_{\chi_n}/m_\chi\right)^2 - \left(m_Z/m_\chi\right)^2$. La somme est sur les états des neutralinos, le couplage $O''^L_{1,n}$ est donné par $\frac{1}{2}\left(-N_{3,1}N^*_{3,n} + N_{4,1}N^*_{4,n}\right)$.

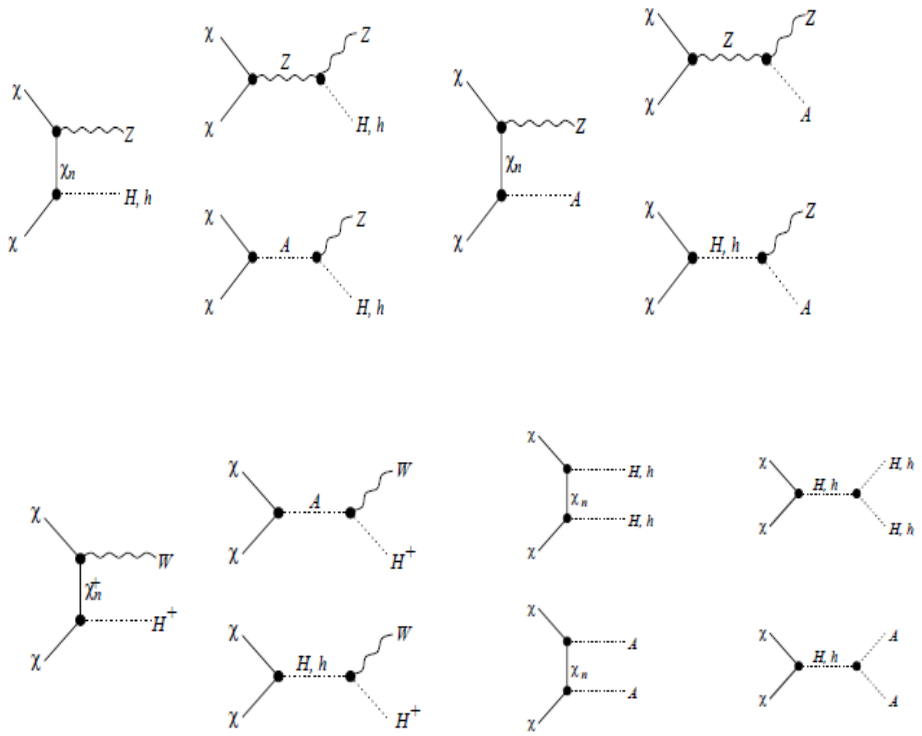
La section efficace du processus est :

$$\sigma v(\chi\chi \to GG)_{v\to 0} = \frac{1}{S_G}\frac{\beta_G}{128\pi m_\chi^2}\left|\mathcal{A}(\chi\chi \to GG)\right|^2 . \tag{5.79}$$

G désigne le boson de jauge considéré, S_G est le facteur statistique égale à un pour W^+W^- et deux pour Z^0Z^0.

Annihilation en boson de Higgs

Il y a plusieurs de diagrammes au niveau de l'arbre qui peuvent contribuer dans l'annihilation des neutralinos en boson de Higgs [56] :



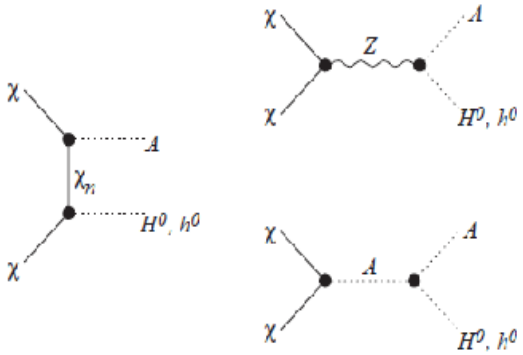


Fig.19 : Diagrammes d'annihilation des neutralinos en boson de Higgs [56]

L'amplitude d'annihilation des neutralinos en Z^0 et en Higgs léger neutre est :

$$\mathcal{A}(\chi\chi \rightarrow Z^0 h^0)_{v\to 0} = -2\sqrt{2}\beta_{Z\,h}\frac{m_\chi}{m_Z}\frac{g^2}{\cos\theta_W} - \left[2\sum_{n=1}^{4} O''^{L}_{1,n} T_{h\;1,n} \times \frac{m_{\chi_n} - m_\chi}{m_\chi P_n} + O''^{L}_{1,1}\frac{m_\chi \sin(\beta-\alpha)}{m_Z\cos\theta_W} - \frac{2\cos(\alpha-\beta)\,T_{A\;1,1}}{4-(m_A/m_\chi)^2 + i\Gamma_A m_A/m_\chi^2}\right] \tag{5.80}$$

où, Γ_A est la largeur du Higgs pseudoscalaire et $T_{h\;1,n}$ est le couplage de Yukawa $h^0-\chi_0-\chi_n$, les coulages $O''^{L}_{1,n}$ sont donnés par : $N_{3,1}(N_{2,n} - t_{\theta_W}N_{1,n})/2 + N_{3,n}(N_{2,1} - t_{\theta_W}N_{1,1})/2$ et $P_n = 1 + \left(m_{\chi_n}/m_\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m_Z/m_\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m_h/m_\chi\right)^2$, l'angle β est relié à α par :

$$\sin 2\alpha = -\sin 2\beta\left(\frac{m_H^2 + m_h^2}{m_H^2 - m_h^2}\right), \qquad \cos 2\alpha = -\cos 2\beta\left(\frac{m_A^2 + m_Z^2}{m_H^2 - m_h^2}\right) \tag{5.81}$$

Les trois termes d'équation (5.80) correspondent aux neutralinos, Z^0 et A^0. les couplages de Yukawa sont :

$$T_{h\;1,n} = \sin\alpha Q''_{1,n} + \cos\alpha S''_{1,n}, \tag{5.82}$$

et

$$T_{H\;1,n} = -\cos\alpha Q''_{1,n} + \sin\alpha S''_{1,n}, \tag{5.83}$$

ici, $S''_{1,n} = N_{4,1}(N_{2,n} - t_{\theta_W}N_{1,n})/2 + N_{4,n}(N_{2,1} - t_{\theta_W}N_{1,1})/2$, $Q''_{1,n}$ est déja défini précedement.

L'amplitude d'annihilation des neutralinos en $W^\pm$ et en Higgs chargé est :

$$\mathcal{A}(\chi\chi \rightarrow W^\pm H^\mp)_{v\to 0} = 4\sqrt{2}\beta_{W\;H}g^2\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{m_\chi}{m_W}\frac{Q^R_{1,n}Q'^R_{1,n} - Q^L_{1,n}Q'^L_{1,n}}{P_n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{m_{\chi_n^+}}{m_W}\frac{Q^R_{1,n}Q'^L_{1,n} - Q^L_{1,n}Q'^R_{1,n}}{P_n} - \frac{m_\chi T_{A\;11}}{m_W\left(4 - m_A^2/m_\chi^2\right)}\right], \tag{5.84}$$

où, $P_n = 1 + \left(m_{\chi_n^\pm}/m_\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m_{H^\mp}/m_\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m_W/m_\chi\right)^2$. $Q^R_{1,n}$ et $Q^L_{1,n}$ sont les couplages qui sont déja définis. $Q'^R_{n,m}$ et $Q'^L_{n,m}$ sont les couplages charginos-neutralinos-Higgs chargé, donnés par :

$$Q'^L_{n,m} = \cos\beta \left[N^*_{4n} V^*_{1m} + \sqrt{\frac{1}{2}} \left(N^*_{2n} + \tan\theta_W N^*_{1n} \right) V^*_{2m} \right], \tag{5.85}$$

et

$$Q'^R_{n,m} = \sin\beta \left[N_{3n} U_{1m} - \sqrt{\frac{1}{2}} \left(N_{2n} + \tan\theta_W N_{1n} \right) U_{2m} \right]. \tag{5.86}$$

Finalement l'amplitude d'annihilation des neutralinos en Higgs neutre et un Higgs pseudoscalaire est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\chi\chi \;\rightarrow\; h^0 A^0)_{v\to 0} = \sqrt{2} g^2 - 4 \Bigg\{ & \sum_{n=1}^{4} T_{h0n} T_{A0n} \left[\frac{m_{\chi_n}}{m_\chi P_n} - \frac{m_A^2 - m_h^2}{m_\chi^2} \right] \\ & - 2 \frac{m_Z}{m_\chi} \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos 2\beta}{2\cos\theta_W} \frac{T_{A00}}{4 - m_A^2/m_\chi^2} - \frac{\cos(\alpha-\beta)\, O''_{L00}}{2\cos^2\theta_W} \frac{m_A^2 - m_h^2}{m_Z^2} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.87}$$

ici, $P_n = 1 + \left(m_{\chi_n}/m_\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m_A/m_\chi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m_h/m_\chi\right)^2$.

La section efficace du processus est :

$$\sigma v(\chi\chi \to XY)_{v\to 0} = \frac{\beta_{XY}}{128\pi m_\chi^2} \left| \mathcal{A}(\chi\chi \to XY)_{v\to 0} \right|^2. \tag{5.88}$$

où X et Y désignent les états finals des particules.

5.5.2 Les sneutrinos

Un sneutrino (partenaire supersymétrique du neutrino) est une particule supersymétrique la plus lègère (LSP), est théoriquement considérée comme candidat de la matière noire [58, 59]. Les études antérieures de la densité relique du sneutrino [58, 59] s'intéressent au sneutrino avec une masse moins que m_W. Les sneutrinos plus lourds peuvent s'annihilier en des états finals importants pour $m_{\tilde{\nu}} \simeq 100$ GeV, le taux d'annihilation est très grand et la densité relique des sneutrinos est trop petite, par conséquent ceci n'a pas d'intérêt cosmologique ou astrophysique. Pour des sneutrinos lourd ($m_{\tilde{\nu}} \gtrsim 500$ GeV), ils peuvent avoir une densité relique importante pour la cosmologie ou astrophysique [60].

L'abondance relique est trop petite, elle est très inférieure à la gamme cosmologique pour la matière noire dérivée par le WMAP [61] :

$$0.092 \leq \Omega_{CDM} h^2 \leq 0.124, \tag{5.89}$$

cela veut dire que les sneutrinos dans l'extension supersymétrique minimale du Modèle Standard ne sont pas des bons candidats de Matière Noire.

La détection directe de la matière noire qui est la détection de l'energie de recul des nucléons du détecteur à cause de la diffusion élastique de ces derniers avec les particules de la Matière Noire, le taux de cette détection dépend de la masse des particules de la matière sombre et la section efficace de diffusion.

On considère maintenant le processus de diffusion du sneutrino $\tilde{\nu}$ avec des nucléons N :

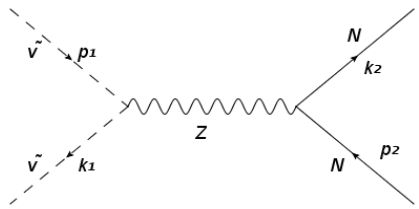


Fig.20 : Diffusion du sneutrino par des nucléons avec échange d'un boson Z

Le lagrangien d'interaction est donné par :

$$i\mathcal{L} = C_N(p_1 + k_1)_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x), \tag{5.90}$$

avec $C_N = Zh_P + (A - Z)h_n$, où A et Z sont le nombre de masse et le nombre des protons respectivement des nucléons. h_P et h_n sont les couplages effectifs seutrinos-proton et sneutrinos-neutron donnés par :

$$h_P = 2h_u + h_d, \tag{5.91}$$

$$h_N = h_u + 2h_d. \tag{5.92}$$

Où, les h_u et h_d sont les couplages des sneutrinos avec les quaks u et d.

L'amplitude de diffusion est :

$$iM = \bar{u}(k_2)C_N(p_1 + k_1)_\mu \gamma^\mu u(p_2),$$

on calcule les sommes sur le spin et on substitue les traces, on trouve :

$$\left|\overline{M}\right|^2 = 16\left|C_N\right|^2 m_{\tilde{\nu}}^2 m_N^2. \tag{5.93}$$

La section efficace de ce processus :

$$\sigma = \frac{|C_N|^2}{\pi} \frac{m_{\tilde{\nu}}^2 m_N^2}{(m_{\tilde{\nu}} + m_N)^2}, \tag{5.94}$$

si on pose $\mu = \frac{m_{\tilde{\nu}} m_N}{m_{\tilde{\nu}} + m_N}$: la masse réduite, on trouve :

$$\sigma = \frac{|C_N|^2}{\pi} \mu^2. \tag{5.95}$$

Calculons maintenant Le couplage C_N.

Les couplages h_u et h_d sont donnés en fonction de l'angle de Weinberg comme suit,

$$h_u = \frac{g^2}{4m_W^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right), \tag{5.96}$$

$$h_d = \frac{g^2}{4m_W^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right), \tag{5.97}$$

remplaçons ces relations dans éq.(5.91) et éq.(5.92), on trouve finalement,

$$|C_N|^2 = \frac{G_F^2}{2} \left[A + 2 \left(2 \sin^2 \theta_W - 1 \right) Z \right]^2. \tag{5.98}$$

La section efficace (5.95) devient

$$\sigma = \frac{G_F^2}{2\pi} \mu^2 \left[A + 2 \left(2 \sin^2 \theta_W - 1 \right) Z \right]^2. \tag{5.99}$$

Avec G_F est la constante de Fermi telle que

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \tag{5.100}$$

Le code MicrOMEGAs

MicrOMEGAs est un code pour calculer les propriétés des particules stables massives dans un modèle générique. Il a été développé pour calculer la densité relique de ces particules, et aussi pour calculer le taux de la détection directe et indirecte de la Matière Noire. Il est supposé qu'une symétrie discrète comme la parité R assure la stabilité des particules légères impaires. Tous les canaux d'annihilation et de (co)annohilation sont inclus dans le calcul de la densité relique. Les exemples spécifiques de cette approche générale sont inclus dans le MSSM et plusieures extensions. Les extensions aux autres modèles peuvent être appliquées par l'utilisateur. La section efficace des interactions dépendantes et indépendantes du spin des

WIMPs avec les nucléons sont évaluées automatiquement aussi que le taux de diffusion. Le code inclut le Modèle Supersymétrique Minimal (MSSM), le NMSSM, le MSSM avec une phase complexe (CPVMSSM), le modèle du Little Higgs (LHM) et le modèle avec la contribution droite des neutrinos (RHNM). Pour plus de détail voir [63, 64].

En utilisant ce code, on peut calculer les sections efficaces de diffusion des sneutrinos avec les protons et les neutrons et aussi la densité relique Ωh^2 pour différentes massses des sneutrinos, on trouve à les diagrammes suivants :

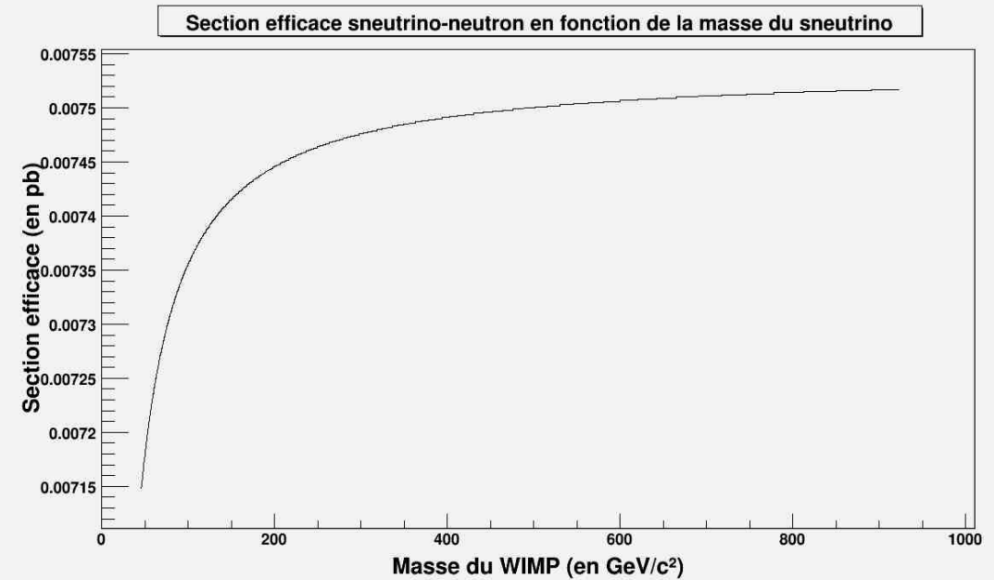


Fig. 21 : Section efficace sneutrinos-neutron en fonction de la masse des sneutrinos

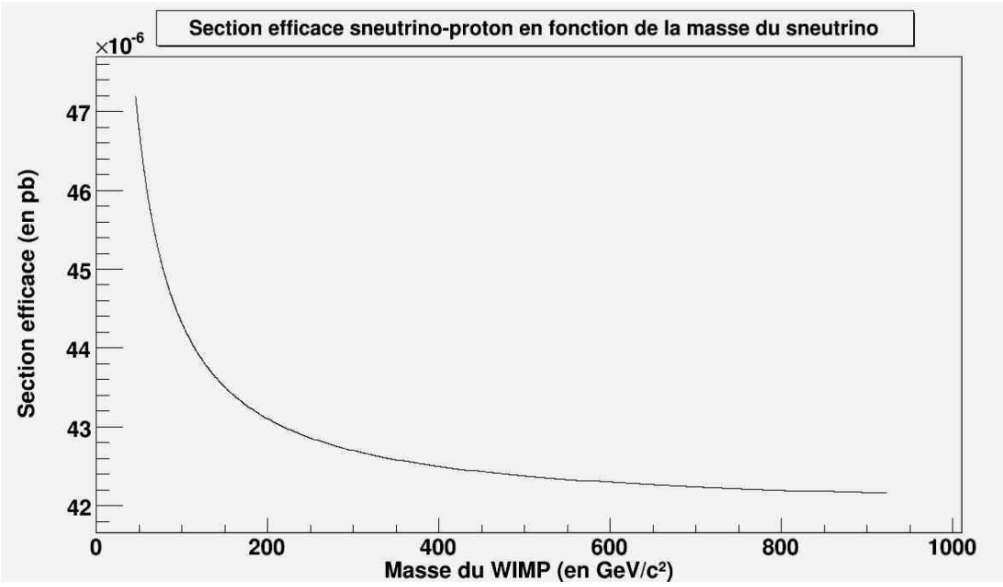


Fig. 22 : Section efficace sneutrinos-proton en fonction de la masse des sneutrinos

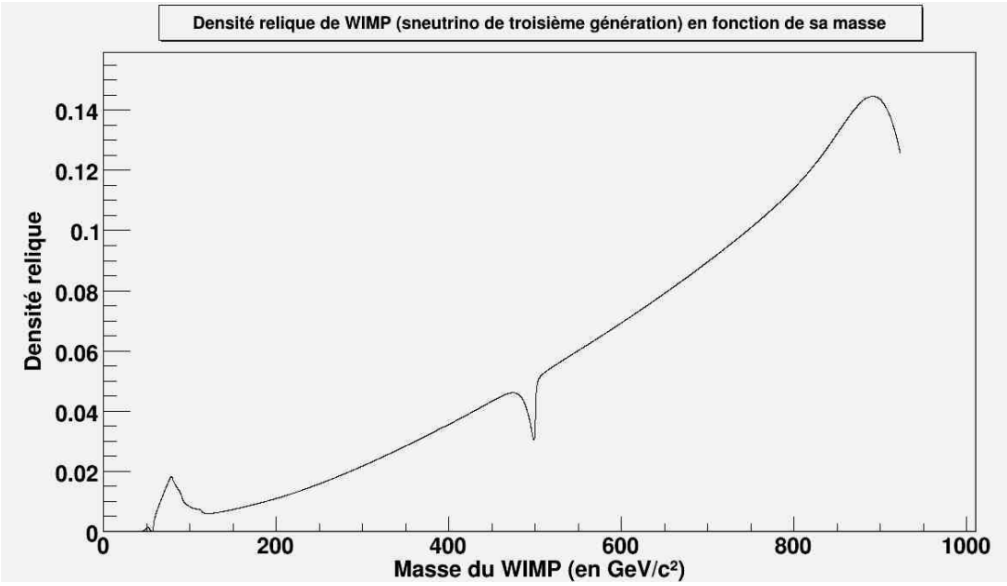


Fig. 23 : Densité relique en fonction de la masse des sneutrinos

Les Figs. 21 et 22 montrent que la section efficace croit pour le cas de la diffusion avec des neutron et décroit pour le cas des protons. La fig. 23 montre que le sneutrino peut être un bon candidat de matière noire si sa masse est entre 600 et 700 GeV, car il possède une densité relique dans la gamme des observations cosmologiques. Vers les 900 GeV il ya de la coannihilation et aussi le WIMP change de nature.

5.5.3 Prospective

Les modèles avec un champ sneutrino droit

Dans cette classe de modèles, le secteur du neutrino/sneutrino est agrandi par l'inclusion de la contribution droite des superchamps $\hat{N}^I$, où ses composantes scalaires sont les contributions droites des champs des sneutrinos [65]. On appelle cette classe de modèle les "*LR modèles*". Les composantes doites fermioniques sont des spineurs de Dirac avec des masses $(m_D)^I$ pour les neutrinos massifs, le terme de masse du superpotentiel est :

$$V_{masss} = \left[m_L^2 + \frac{1}{2}m_Z^2\cos(2\beta) + m_D^2\right]\tilde{\nu}_L^*\tilde{\nu}_L + \left[m_N^2 + m_D^2\right]\tilde{N}^*\tilde{N} + F^2\left(\tilde{\nu}_L^*\tilde{N} + \tilde{N}^*\tilde{\nu}_L\right). \quad (5.101)$$

Le paramètre F qui mélange la partie gauche et droite des champs des sneutrinos est donné par :

$$F^2 = v\Lambda_\nu \sin\beta - \mu m_D \cot\beta. \quad (5.102)$$

Dans la base définie par le vecteur $\Phi^\dagger = \left(\tilde{\nu}_L^*, \tilde{N}^*\right)$, on peut réécrire le V_{mass} comme suit :

$$V_{masss} = \frac{1}{2}\Phi_{LR}^\dagger \mathcal{M}_{LR}^2 \Phi_{LR}, \tag{5.103}$$

où la matrice de masse au carré est :

$$\mathcal{M}_{LR}^2 = \begin{pmatrix} m_L^2 + \frac{1}{2}m_Z^2 \cos(2\beta) + m_D^2 & F^2 \\ F^2 & m_N^2 + m_D^2 \end{pmatrix}. \tag{5.104}$$

Le mélange LR est donné par :

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_1 = -\sin\theta\tilde{\nu}_L + \cos\theta\tilde{N}, \\ \tilde{\nu}_2 = +\cos\theta\tilde{\nu}_L + \sin\theta\tilde{N}, \end{cases} \tag{5.105}$$

θ est l'angle du mélage LR. Les mélanges considérables réduisent le couplge avec le boson Z qui couple seulement avec la partie gauche des sneutrinos et par conséquent, porte l'impact sur la phénoménologie des sneutrinos comme reconnu dans les références [65, 66].

Si on considère maintenant le processus précedent de la Fig. 20 ; on calcule la section efficace de diffusion mais en tenant compte la contribution droite des sneutrinos. Les couplages h_u et h_d sont donnés en fonction de l'angle θ de mélange

$$h_u = \frac{2G_F}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right), \tag{5.106}$$

$$h_d = \frac{2G_F}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right), \tag{5.107}$$

on trouve après susbstition dans (5.95)

$$\sigma = \frac{G_F^2}{2\pi}\mu^2\left[(A-Z) - \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right)Z\right]^2\sin^4\theta. \tag{5.108}$$

Conclusion Générale

Dans la première partie de cette thèse, on a traité le problème d'invariance de jauge de la densité Lagrangienne du Modèle Standard avec la brisure spontannée de la symétrie électrofaible qui consiste l'introduction d'une nouvelle particule le Higgs la seule particule du Modèle Standard qui élude encore la détection (les contraintes expérimentales requièrent $m_H \geq 77.5$ GeV). Ensuite on a étudié divers problèmes expérimentaux et théoriques du SM : le problème de la gravité, le problème de la hiérarchie, et celui de la matière manquante (matière noire), après on a donné une des solutions la plus prometteuse la supersymétrie qui implique un nombre égal des bosons et des fermions. Cette théorie, non vérifiée expérimentalement, présente plusieurs avantages comme la solution du problème de la hiérarchie. De plus, on a traité l'extension minimale du Modèle Standard le MSSM, les différents secteurs du modèle sont présentés et les masses des particules à l'arbre sont dérivées.

Dans la deuxième partie on a abordé la prédiction de la densité relique de la matière noire à partir de la physique des particules dans un modèle cosmologique standard dominé par la radiation. De plus on a étudié les deux types de détection des particule de telle matière sombre : la détection directe qui est la détection de l'énergie de recul des nucléons du détecteur à cause de la diffusion élastique de ces deniers avec les particules de la matière noire et la détection indirecte qui est la technique d'observer les radiations produites dans les annihilations de la Matière Noire. Comme candidats de cette matière, on a traité les neutralinos et le sneutrinos, en concluant l'importance de la partie droites des sneutrinos pour qu'ils peuvent être des bons candidats.

Finalement, ce travail a permis de donner une vision sur le problème de la Matière Noire, le projet pourrait s'orienter vers les calculs de précision dans le cadre de l'extension supersymétrique minimale du Modèle Standard pour avoir des sections efficaces plus précises et par suite une desnsité relique qui peut expliquer la Matière Noire.

Annexe A

Fonctions Spéciales

Nous détaillons ici diverses propriétés sur les fonctions spéciales entrant en jeu dans les calculs de densité relique de Matière Noire.

Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel rentrent en jeu lors de la résolution de l'équation de Boltzman, voir Chap.5. Les fonctions de Bessel modifiées sont solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 K_\nu''(x) + x K_\nu'(x) - (x^2 + \nu^2) K_\nu(x) = 0. \tag{A.1}$$

D'une manière équivalente, on peut écrire une relation intégrale des fonctions K_ν :

$$K_\nu(x) = \frac{\pi^{1/2}(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty e^{-xt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt. \tag{A.2}$$

La dérivée K_ν' est reliée aux fonctions K_ν et $K_{\nu-1}$ par :

$$K_\nu'(x) = -K_{\nu-1}(x) - \nu \frac{K_\nu(x)}{x}. \tag{A.3}$$

Le développement asymptotique de K_ν pour ν fixé et $x \gg 1$ donne le résultat utile,

$$K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8x} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8x)^2} + ... \right\}. \tag{A.4}$$

Fonctions Gamma

La fonction Γ est définie par l'égalité

$$\alpha \Gamma(\alpha) = (\alpha + 1). \tag{A.5}$$

La représentation intégrale de $\Gamma(\alpha)$ est donnée par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{t-1}, \text{ avec } \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \tag{A.6}$$

Il résulte des relations (A.5) et (A.6) que :

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!, \;\; \text{pour } n = 2, 3, 4... \tag{A.7}$$

De plus, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Les deux limites suivantes de la fonction Γ sont également utiles,

$$\lim_{\alpha \to 0} \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \gamma_E + \mathcal{O}(\alpha), \tag{A.8}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \Gamma(\alpha) A^{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \gamma_E + \ln A + \mathcal{O}(\alpha), \tag{A.9}$$

où γ_E représente la constante d'Euler de valeur numérique :

$$\gamma_E = \lim_{n \to 0} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215... \tag{A.10}$$

Annexe B
Spineurs de Weyl et Majorana

On donne ici la définition des spineurs de Weyl et de Majorana qui apparaîent dans la définition des supermultiplets de la Supersymétrie.

Spineur de Weyl

Pour les champs de spin 1/2 on a deux représentations non équivalentes de $SL(2,\mathcal{C})$:

$$\xi^a \in (1/2,0) \quad a=1,2 \qquad \bar{\xi}^{\dot{a}}(0,1/2) \quad \dot{a}=1,2 \tag{B.1}$$

Une représentation du groupe $SL(2,\mathcal{C})$ est donnée par les matrices :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathcal{C}) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{B.2}$$

avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathcal{C}$ (les nombres complexes). Si ξ^1,ξ^2 sont les deux composantes d'un spineur $(1/2,0)$ et $\bar{\xi}^{\dot{1}},\bar{\xi}^{\dot{2}}$ les composantes d'un spineur $(1/2,0)$, les transformations sous $SL(2,\mathcal{C})$ sont données par :

$$\xi'^1 = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2 \qquad \bar{\xi}'^{\dot{1}} = \alpha^*\bar{\xi}^{\dot{1}} + \beta^*\bar{\xi}^{\dot{2}} \tag{B.3}$$

$$\xi'^2 = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 \qquad \xi'^{\dot{2}} = \gamma^*\bar{\xi}^{\dot{1}} + \delta^*\bar{\xi}^{\dot{2}} \tag{B.4}$$

avec α^* complexe conjugué de α. On peut donc définir :

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi_\alpha)^* \qquad \chi^\alpha \equiv (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^*. \tag{B.5}$$

La matrie

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.6}$$

avec $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ et $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\alpha\beta}$, relie les spineurs covariants ξ_α et contravariants ξ^α par les formules :

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta \qquad \chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta \tag{B.7}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \qquad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{B.8}$$

L'équation de Dirac avec masse m en fonction des spineurs $\bar{\eta}_{\dot{b}} \in (0, 1/2)$ et $\xi^a \in (1/2, 0)$ est dans la représentation des impultions

$$p^{a\dot{b}}\bar{\eta}_{\dot{b}} = m\xi^a, \tag{B.9}$$

$$p_{\dot{b}a}\xi^a = m\bar{\eta}_{\dot{b}}, \tag{B.10}$$

avec :

$$p^{a\dot{b}} = (\vec{p}.\vec{\sigma} + p_0.\sigma_0)^{a\dot{b}} \qquad p_{\dot{b}a} = (-\vec{p}.\vec{\sigma} + p_0.\sigma_0)_{\dot{b}a}\,, \tag{B.11}$$

où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

Si $m = 0$ les deux équations (B.9) et (B.10) se découplent. À l'aide des matrices de Pauli on peut définir des vecteurs de matrices :

$$\sigma^\mu \equiv (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,, \tag{B.13}$$

$$\bar{\sigma}^\mu \equiv (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) = \sigma_\mu, \tag{B.14}$$

et des tenseurs :

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\right), \tag{B.15}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right). \tag{B.16}$$

Ces matrices sont reliées aux transformations de Lorentz des spineurs et on peut montrer qu'elles ont des indices de $SL(2, \mathcal{C})$:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\alpha} \qquad (\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha \qquad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,. \tag{B.17}$$

Les champs des spineurs anti-commutent entre eux (varibles de Grassmann) et on peut par exemple vérifier que

$$\chi^\alpha\psi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \psi^\alpha\chi_\alpha, \tag{B.18}$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \tag{B.19}$$

Souvent le supersymétrie les indices sommés des spineurs ne sont pas indiqués et le définition utilisée est la suivante :

$$\chi\psi = \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \psi\chi, \tag{B.20}$$

$$\bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi}. \tag{B.21}$$

Une conséquence de l'anti-commutation est que les polynômes complexes d'une variable de Grassmann η sont limités, puisque $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$ et $\eta\bar{\eta} = -\bar{\eta}\eta$:

$$P(\eta, \bar{\eta}) = a_o + a_1\eta + a_2\bar{\eta} + a_3\eta\bar{\eta}, \tag{B.22}$$

où les a_i sont des coefficients complexes.

Spineur de Majorana

La conjugaison de charge pour un spineur de Dirac est donné par :

$$\psi_D^c \equiv C\bar{\psi}_D^T. \tag{B.23}$$

La forme de la matrice de conjuguaison de charge C dépend de la représentation. En fonction des spineurs de Weyl on a :

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \qquad \psi_D^c = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{B.24}$$

Un spineur de Majorana est défini comme le spineur à quatre composantes qui est égal à son conjugué de charge,

$$\psi_M = \psi_M^c. \tag{B.25}$$

Ceci est possible seulement si

$$\psi_{\alpha} = \chi_{\alpha} \qquad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \tag{B.26}$$

On peut construire un spineur de Majorana à partir d'un spineur de Weyl comme suit :

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{B.27}$$

Avec les spineurs de Majorana

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \qquad \Phi_M = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{B.28}$$

on peut construire des formes bilinéaires et les exprimer en termes des spineurs de Weyl :

$$\bar{\Psi}_M \Phi_M = \bar{\psi}\bar{\phi} + \psi\phi = \bar{\Phi}_M \Psi_M = \left(\bar{\Psi}_M \Phi_M\right)^\dagger, \tag{B.29}$$

$$\bar{\Psi}_M \gamma_5 \Phi_M = \bar{\psi}\bar{\phi} - \psi\phi = \bar{\Phi}_M \gamma_5 \Psi_M = -\left(\bar{\Psi}_M \gamma_5 \Phi_M\right)^\dagger, \tag{B.30}$$

$$\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Phi_M = \psi\sigma^\mu\bar{\phi} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\phi = -\bar{\Phi}_M \gamma^\mu \Psi_M = -\left(\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Phi_M\right)^\dagger, \tag{B.31}$$

$$\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \gamma_5 \Phi_M = \psi\sigma^\mu\bar{\phi} - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\phi = \bar{\Phi}_M \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_M = \left(\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \gamma_5 \Phi_M\right)^\dagger. \tag{B.32}$$

$$\gamma_E = \lim_{n\to 0}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.577215... \tag{A.10}$$

Annexe C

Les états propres de masse des neutralinos

Nous détaillons dans cette Annexe diverses formules concernant les matrices de diagonalisation des neutralinos.

Dans le Modèle Standard Supersymmétrique Minimal (MSSM), les gauginos electrofaible $\left(\tilde{B}, \tilde{W}^3\right)$ et les higgsinos $\left(\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0\right)$ ont les mêmes nembres quantiques, donc ils se mélangent dans quatre états propres de masse appelé neutralinos. La matrice de masse des neutralinos dans la base $\tilde{B} - \tilde{W}^3 - \tilde{H}_1^0 - \tilde{H}_2^0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_{\theta_W} c_\beta & M_Z s_{\theta_W} s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_{\theta_W} c_\beta & -M_Z c_{\theta_W} s_\beta \\ -M_Z s_{\theta_W} c_\beta & M_Z c_{\theta_W} c_\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_{\theta_W} s_\beta & -M_Z c_{\theta_W} s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

où M_1, M_2 et μ sont les masses des bino, wino et higgsino respectivement, θ_W l'angle de Weinberg. Cette matrice peut être diagonalisée avec la matrice N :

$$M_{\chi^0}^{diag} = N^\dagger \mathcal{M}_N N \tag{C.2}$$

Les masses des états propres de masse sont données par [57] :

$$\epsilon_1 M_{\chi_1^0} = -\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}C_2\right)^{1/2} + \left[-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}C_2 + \frac{C_3}{\left(8a - \frac{8}{3}C_2\right)^{1/2}}\right]^{1/2} + \frac{1}{4}\left(M_1 + M_2\right), \tag{C.3}$$

$$\epsilon_2 M_{\chi_2^0} = +\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}C_2\right)^{1/2} - \left[-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}C_2 - \frac{C_3}{\left(8a - \frac{8}{3}C_2\right)^{1/2}}\right]^{1/2} + \frac{1}{4}\left(M_1 + M_2\right), \tag{C.4}$$

$$\epsilon_3 M_{\chi_3^0} = -\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}C_2\right)^{1/2} - \left[-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}C_2 + \frac{C_3}{\left(8a - \frac{8}{3}C_2\right)^{1/2}}\right]^{1/2} + \frac{1}{4}\left(M_1 + M_2\right), \tag{C.5}$$

$$\epsilon_4 M_{\chi_3^0} = +\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}C_2\right)^{1/2} + \left[-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}C_2 - \frac{C_3}{\left(8a - \frac{8}{3}C_2\right)^{1/2}}\right]^{1/2} + \frac{1}{4}\left(M_1 + M_2\right), \tag{C.6}$$

où ϵ_i est le signe de la i'ème valeur propre de la matrice de masse des neutralinos, et :

$$C_2 = (M_1 M_2 - M_Z^2 - \mu^2) - \frac{3}{8}(M_1 + M_2)^2, \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{1}{8}(M_1+M_2)^3 + \frac{1}{2}(M_1+M_2)(M_1M_2 - M_Z^2 - \mu^2) + (M_1+M_2)\mu^2, \\ &+ \left(M_1 c_{\theta_W}^2 + M_2 s_{\theta_W}^2\right) M_Z^2 + \mu M_Z^2 s_{2\beta}, \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -\left(M_1 c_{\theta_W}^2 + M_2 s_{\theta_W}^2\right) M_Z^2 \mu s_{2\beta} - M_1 M_2 \mu^2 \\ &+ \frac{1}{4}(M_1+M_2)\left[(M_1+M_2)\mu^2 + \left(M_1 c_{\theta_W}^2 + M_2 s_{\theta_W}^2\right) M_Z^2 + \mu M_Z^2 s_{2\beta}\right] \\ &+ \frac{1}{16}\left(M_1M_2 - M_Z^2 - \mu^2\right)(M_1+M_2)^2 - \frac{3}{256}(M_1+M_2)^4, \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$a = \frac{1}{2^{1/3}} \mathrm{Re}\left[-S + i(D/27)^{1/2}\right]^{1/3}, \tag{C.10}$$

$$D = -4U^3 - 27S^2, \quad U = -\frac{1}{3}C_2^2 - 4C_4, \quad S = -C_3^2 - \frac{2}{27}C_2^3 + \frac{8}{3}C_2C_4. \tag{C.11}$$

Les quatres masses au-dessus ne sont pas dans l'ordre $M_{\chi_1^0} < M_{\chi_2^0} < M_{\chi_3^0} < M_{\chi_4^0}$.

La matrice de diagonalisation N est donnée par :

$$\frac{N_{i2}}{N_{i1}} = -\frac{1}{t_\beta}\frac{M_1 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}}{M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}}, \tag{C.12}$$

$$\frac{N_{i3}}{N_{i1}} = \frac{-\mu\left[M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right]\left[M_1 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right] - M_Z^2 s_\beta c_\beta\left[(M_1 - M_2)\, c_{\theta_W}^2 + M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right]}{M_Z\left[M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right] s_\beta \left[-\mu c_\beta + \epsilon_i M_{\chi_i^0} s_\beta\right]}, \tag{C.13}$$

$$\frac{N_{i4}}{N_{i1}} = \frac{-\epsilon_i M_{\chi_i^0}\left[M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right]\left[M_1 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right] - M_Z^2 c_\beta^2\left[(M_1 - M_2)\, c_{\theta_W}^2 + M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right]}{M_Z\left[M_2 - \epsilon_i M_{\chi_i^0}\right] s_\beta \left[-\mu c_\beta + \epsilon_i M_{\chi_i^0} s_\beta\right]}, \tag{C.14}$$

et

$$N_{i1} = \left[1 + \left(\frac{N_{i2}}{N_{i1}}\right)^2 + \left(\frac{N_{i3}}{N_{i1}}\right)^2 + \left(\frac{N_{i4}}{N_{i1}}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{C.15}$$

Le neutralino le plus léger χ_1^0 est un mélange des gauginos et higgsinos :

$$\chi_1^0 = N_{11}\tilde{B} + N_{12}\tilde{W}^3 + N_{13}\tilde{H}_1^0 + N_{14}\tilde{H}_2^0. \tag{C.16}$$

La fraction des gauginos est définie par :

$$f_G = N_{11}^2 + N_{12}^2, \tag{C.17}$$

et celle des hoggsinos est :

$$f_G = N_{13}^2 + N_{14}^2. \tag{C.18}$$

Bibliographie

[1] Donald H.Peskins "Introduction to High Energy Physics", Cambridge University Press (2000, New York USA).

[2] F.Mandl, G.Shaw "Quantum Field Theory", A Wiley Interscience Publication(July 1984, Chichester, New York, Brisbane,Singapore).

[3] P.Becher, M.Böhm, H.Joos "Gauge Theories of Strong and Electroweak interaction", A Wiley Interscience Publication(1984, Chichester, New York, Brisbane,Singapore).

[4] Elliot Leader, Enroco Predazzi "An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics"(volume 1), Cambridge Monographs, on particle physics, Nuclear Physics and Cosmology.

[5] J.C Taylor "Gauge Theories of Weak Theories", Cambridge Monographs on Mathematical Physics(1979, UK).

[6] S.Dawson "Introduction to Electroweak symmetry breaking ", arXiv, hep-ph/990128v1(1999).

[7] S.M Bilenky and J.Hošek "Galshow-Weinberg-Salam Theory of Electroweak Interactions and the Neutral Currents" (review section of physics letters, 1990).

[8] Aldo Deandea "Intéraction électrofaible et Introduction à la Supersymétrie", (Cours de Master de Sciences de la matière).

[9] A.Pich "The Standard Model of electroweak interaction", arXiv, hep-ph/0705426v1(2007).

[10] Francis Halzen and Alan D.Martin "An Introductory course in Modern particle Physics", A Wiley Interscience Publication (1984, Chichester, New York, Brisbane,Singapore).

[11] IAN J R Aitchion and Anthony J G Hey "Gauge Theories in Partice Physics", (British Library Cataloguig in Publication, 1982).

[12] Ignatios Antoniadis and Pantelis Tzivelogloua (February, 2009).

[13] Renormalisation et prédictions à une boucle en supersymétrie, applications pour la matière noire et pour les collisionneurs. (2008, LAPTH France)

[14] Hitoshi Mayanna "Physics Beyond the Stabdard Model and Dark Matter", arXiv, hep-ph/0704.2276v1 (2007).

[15] Ignatios Antoniadis, Pawel O Mazur and Emil Mottola "Cosmological dark energy : prospects for a dynamical theory" (New Journal of Physics).

[16] V.A Bednykov and N.D Giokaris "On Higgs mass generation mechanism in the standard model", arXiv, hep-ph/0703280v1 (2007).

[17] Martinus Veltman "Diagrammatica The Path to Feynman Diagrams", Cambridge University Press (1994, New York USA).

[18] Julius Wess and Jonathan Bagger "Supersymmetry and supergravity", Princeton University Press, New Jersey (1992).

[19] Herbi K. Dreiner Howard E. Haber "Supersymmetry" (2004).

[20] Stephen P. Martin " A supersymmetry Primer", arXiv, hep-ph/9709356v5 (2008).

[21] Michael E. Peskin "supersymmmerty in Elementry Particle Physics", arXiv, hep-ph/0801.1928v1 (2008).

[22] IAN J R Aitchison "Supersymmmetry in Partcle Physics", Cambridge University Pess (2007).

[23] S. Weinberg "The Quantum Theory of Fields", Volume III : Supersymmetry.
Cambridge University Press, Cambrige, UK, 2000

[24] M.M. El Kheisen A.A. Shafik and A.A. Aboshousha "Analytic formulas for the neutralino masses and the neutralino mixing matrix". phys, Rev. **D45** (1992) 4345.

[25] Massaki Kuroda "Complete lagrangian of MSSM", arXiv, hep-ph/9902340 (2005).

[26] K.G. Begeman, A.H. Broeils, R.H. Sanders, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 249 (1991) 523.

[27] [WMAP Collaboration]
C.L. Bennett et al, Astrophys. J. Supp. 148 (2003) 1, astro-ph/ 0302207.
D.N. Spergel et al, Astrophys. J. Supp. 148 (2003) 175, astro-ph/0302209.

[28] R.H Sanders, S.S. McGaugh, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 40, 263 (2002), astroph/0204521. J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D70, 083509 (2004), [Erratum-ibid. D71, 069901 (2005)], astro-ph/0403694.

[29] D. Clowe, M. Bradac, A.H. Gonzalez, M. Markevitch, S.W. Randall, C. Jones, D. Zaritsky, Astrophys. J. 648, L109 (2006), astro-ph/0608407.

[30] [CHANDRA], http ://chandra.harvard.edu/.

[31] [VLT], http ://www.eso.org/projects/vlt/.

[32] [HUBBLE], http ://hubblesite.org/.

[33] [WMAP Collaboration]

E. Komatsu et al., arXiv :0803.0547 [astro-ph] ;

J. Dunkley et al., arXiv :0803.0586 [astro-ph] ;

G. Hinshaw et al., arXiv :0803.0732 [astro-ph].

[34] [SDSS Collaboration], J.K. Adelman-McCarthy et al., Astrophys. J. Suppl. 175, 297 (2008), arXiv :0707.3413 [astro-ph].

[35] [SDSS Collaboration], M. Tegmark et al, Phys.Rev. D69 (2004) 103501, astro-ph/0310723.

[36] C.L. Bennett et al., Astrophys. J. 464 (1996) L1, astro-ph/9601067.

[37] Sean M. Carroll "Lecture Notes on General Relativity", arXiv, gr-qc/9712019v1 (1997).

[38] Paolo Gondolo and Graciela Gelmini, Nuclear physics B360 (1991) 145-179.

[39] J. Edsjö, P. Gondolo. Phys. Rev. D56 (1997) 1879, hep-ph/9704361.

[40] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk 3 Particle Dark Matter : Evidence, Candidates and Constraints arXiv, hep-ph/0404175 (2004).

[41] DarkSUSY P.Gondolo et al., JCAP 0407 (2004) 008, astro-ph/046204

http ://www.physto.se/∼/darksusy/.

[42] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, A. Semenov, Comput. Phys. Commun. 149 (2002) 103, hep-ph/0112278 ;

G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, A. Semenov, Comput. Phys. Commun. 176 (2007) 367, hep-ph/0607059 ;

G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, A. Semenov, Comput. Phys. Commun. 174 (2006)577, hep-ph/0405253 ;

http ://www.lapp.in2p3.fr/lapth/micromegas.

[43] E.W. Kolb, M.S. Turner, The Early Universe, Addison-Wesley, Reading, MA 1990.

[44] B. Murakami, J.D. Wells, Phys. Rev. D64 (2001) 015001, hep-ph/0011082.

[45] T. Nihei, N. Okada, O. Seto, Phys. Rev. D71 (2005) 063535, hep-ph/0409219.

[46] P. Salati, Phys. Lett. B571 (2003) 121, astro-ph/0207396 ;

F. Rosati, Phys. Lett. B570 (2003) 5, hep-ph/0302159 ;

G.B. Gelmini, P. Gondolo, Phys. Rev. D74 (2006) 023510, hep-ph/0602230 ;

M. Joyce, Phys. Rev. D55 (1997) 1875, hep-ph/9606223 ;

M. Joyce, T. Prokopec, JHEP 0010 (2000) 030, hep-ph/0003190.

[47] R. Catena, N. Fornengo, A. Masiero, M. Pietroni, F. Rosati, Phys. Rev. D70 (2004) 063519, astro-ph/0403614.

[48] M. Kamionkowski, M.S. Turner, Phys. Rev. D42 (1990) 3310 ; S. Profumo, P. Ullio, astro-ph/0404390.

[49] G.F. Giudice, E.W. Kolb, A. Riotto, Phys. Rev. D64 (2001) 023508, hep-ph/0005123 ; S. Khalil, C. Munoz, E. Torrente-Lujan, New J. Phys. 4 (2002) 27, hep-ph/0202139.

[50] R. Bernabei et al., Talk at the 10th International Workshop on Neutrino Telescopes, Venice, Italy, (2003), [arXiv :astro-ph/0305542].

[51] A. Benoit et al., Phys. Lett. B 545 (2002) 43 [arXiv :astro-ph/0206271].

[52] D. S. Akerib et al. [CDMS Collaboration], Phys. Rev. D 68 (2003) 082002, [arXiv :hep-ex/0306001].

[53] A. Kurylov and M. Kamionkowski, Phys. Rev. D 69, 063503 (2004) [arXiv :hepph/0307185].

[54] C. J. Copi and L. M. Krauss, Phys. Rev. D 67 (2003) 103507 [arXiv :astroph/0208010].

[55] A. M. Green, Phys. Rev. D 68 (2003) 023004 [arXiv :astro-ph/0304446].

[56] G. Jungman, M. Kamionkowski and K. Griest "Supersymmetric Dark Matter", Phys. Rept. 267, [arXiv :hep-ph/9506380].(1996) 195.

[57] M. M. El Kheishen, A. A. Aboshousha and A. A. Shafik, Phys. Rev. D 45 (1992) 4345.

[58] J. Hagelin, G.L. Kane, and S. Raby, Nucl. Phys. B241 (1984) 638.

[59] L.E. Ibanez, Phys. Lett. B137 (1984) 160.

[60] T. Falk, K. A. Olive, and M. Srednicki, Heavy sneutrinos as dark matter, Phys. Lett. B339 (1994) 248–251, [hep-ph/9409270].

[61] WMAP Collaboration, D. N. Spergel et al., Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results : Implications for cosmology, Astrophys. J. Suppl. 170 (2007) 377, [astro-ph/0603449].

[62] C. Arina and N. Fornengo "Sneutrino cold dark matter, a new analysis : relic abundance and dectection rate, [arXiv :hep-ph/0709.4477v1](2007).

[63] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, A. Semenov "Dark Matter direct detection rate in generic model with micrOMEGAs-2.2", [arXiv :hep-ph/0803.2360v2](2007).

[64] G. Belanger, F. Boudjema, P. Brun, A. Pukhov, S. Rosier-Lees, P. Salati, A. Semenov "Indirect search for dark matter with micrOMEGAs 2.4", [arXiv :hep-ph/1004.1092v1](2010).

[65] N. Arkani-Hamed, L. J. Hall, H. Murayama, D. R. Smith, and N. Weiner, "Small neutrino masses from supersymmetry breaking", Phys. Rev. D64 (2001) 115011, [hep-ph/0006312].

[66] Y. Grossman and H. E. Haber, Sneutrino mixing phenomena, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 3438–3441, [hep-ph/9702421].