

Table des matières

Introduction	5
1 Les cordes bosoniques	8
1.1 Approche de Nambu	9
1.2 Corde ouverte	10
1.2.1 Equations du mouvement de la corde bosonique ouverte	10
1.2.2 Solutions des équations du mouvement	12
1.3 Quantification	13
1.3.1 Jauge covariante	14
1.3.2 La jauge transverse	19
1.4 Formalisme paraquantique	27
1.4.1 Introduction	27
1.4.2 Paraquantification	28
1.4.3 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs	31
2 La théorie des cordes parabosoniques	33
2.1 Jauge covariante	33
2.1.1 Formalisme paraquantique	33
2.1.2 Algèbre de Virasoro	34
2.2 Jauge transverse	38
2.2.1 Formalisme paraquantique	38
2.2.2 Opérateur de masse	45
2.2.3 Spectre	46

2.2.4	Dégénérescence	47
2.2.5	Fonction de partition	48
3	Configurations de cordes ouvertes sur des D-branes	50
3.1	Introduction	50
3.2	La corde bosonique ouverte sur une D _p -brane	50
3.2.1	Opérateur de masse	51
3.2.2	Spectre et Dégénérescence	52
3.2.3	Fonction de partition	55
3.3	La corde bosonique ouverte entre deux D _p -branes en parallèle	55
3.3.1	Opérateur de masse	56
3.3.2	Spectre	56
3.4	La corde bosonique ouverte entre deux D _p -, D _q -branes en parallèle	58
3.4.1	Opérateur de masse	59
3.4.2	Spectre et dégénérescence	61
3.4.3	Fonction de partition	64
3.4.4	Algèbre de Virasoro	65
4	Corde parabosonique entre deux D_p-, D_q-branes en parallèle	68
4.1	Formalisme paraquantique	68
4.2	Opérateur de masse	70
4.3	Spectre et dégénérescence	71
4.4	Fonction de partition	74
4.5	Algèbre de Virasoro	75
	Conclusion Générale	77
	Annexe A	79
	Annexe B	83
	Bibliographie	85

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
ET
SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Douria Hamam

THEME

Cordes bosoniques ouvertes et D-branes dans le formalisme de la
paraquantification

Soutenu le : 06 / 07 /2010

Devant le Jury :

Président :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	N. Belaloui	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Examineurs :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur M. N. Belaloui, Professeur à l'université Mentouri Constantine, pour ses discussions, sa disponibilité infailible à mon égard, son aide, son soutien moral et scientifique. Qu'il en soit grandement remercié.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, M. Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs : Ms. A. Bounames, T. Boudjedaa, professeurs à l'université de Jijel, qui ont bien accepté de juger ce travail.

Je remercie vivement Ms. O. Boutaghoul, A. Ahriche, Maîtres de conférences à l'université de Jijel, pour l'aide scientifique qu'il m'ont accordé .

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de la post graduation de physique théorique. En particulier, Mlles. Z. Belghobsi, Z. Lehtihet, Maîtres de conférences à l'université de Jijel, M. M. Maamache, professeur à l'université de Setif, L. Chetouani, professeur à l'université Mentouri Constantine, Ms. P. Aurenche, J. -Ph. Guillet, P. Sorba, Directeurs de Recherche au LAPTH-Annecy (France).

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2007/2008.

Quant à mes très chers parents, je ne trouverai jamais les mots pour les remercier suffisamment, pour leur soutien moral et financier, leur assistance et engagement permanent. Je les remercie infiniment et j'implore Allah le tout puissant de les protéger et leur prêter longue vie.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes frères : Redhwane, Walid, Ishak et mes sœurs : Souhila, Aziza, Faiza, Hanan qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Introduction

Newton et ses successeurs ont d'une part mis en place la description classique des phénomènes physiques, détrônée ensuite par la mécanique quantique. Einstein a d'autre part défini le cadre dans lequel ces phénomènes physiques prennent place, en unifiant les notions intuitives d'espace et de temps pour construire l'espace-temps de Minkowski et pour montrer que ce dernier est courbe. L'origine de cette courbure se trouve dans l'interaction des champs de matière classique avec le champ de la métrique de l'espace-temps. Ces différentes notions ont finalement conduit à décrire le monde en terme d'interaction de champs relativistes aux quels sont associées au niveau quantique des particules ponctuelles relativistes qui se transforment continuellement les unes en les autres.

A l'heure actuelle, l'une des plus grandes quêtes de la physique est l'unification des deux théories fondamentales en une seule théorie, la théorie quantique des champs, qui décrit les interactions électrofaibles (électromagnétiques et faibles) et les interactions fortes, et de la relativité générale qui décrit la gravitation. C'est donc l'unification de l'infiniment petit et de l'infiniment grand en un tout cohérent, domaines respectifs dans lesquels les deux théories en question décrivent le monde réel avec une précision incroyable. A présent, la théorie la plus prometteuse pour une description unifiée et finie de ces deux théories fondamentales est la théorie des cordes [1].

Initialement développée sous le nom de modèle dual à la fin des années soixante, celui ci est basé sur l'étude des interactions fortes entre les hadrons et conduit à l'existence d'une particule sans masse de spin 2 (qui n'apparaît pas dans le spectre des hadrons) et à une condition de cohérence un peu inhabituelle qui impose un espace-temps à $D = 26$ dimensions. Ces deux inconvénients ("apparents") s'avèrent être les deux points précurseurs de la nouvelle théorie des cordes. En effet, en associant la particule en question au graviton, et en s'inspirant de l'idée de Kaluza Klein ($D > 4$ impliquerait une possibilité d'unification) [2] fait que la théorie des cordes est une candidate naturelle potentielle à la description de la gravitation quantique [3].

L'idée de base de cette théorie considère qu'au niveau quantique ($< 10^{-34}cm$), les objets fondamentaux de la physique ne sont plus vus comme des particules ponctuelles de dimension

nulle mais plutôt comme des objets étendus de dimension un et de tension T . Il s'agit de cordes bosoniques (ouverte ou fermée) ou fermioniques (ouverte, fermée). A l'échelle de Planck, les cordes bosoniques fermées sont assimilées à des cercles, ses excitations quantiques contiennent entre autres le graviton et un tenseur antisymétrique de rang deux jouant un rôle crucial en théorie des cordes. Quant aux cordes bosoniques ouvertes, elles sont assimilées à de petits segments avec des conditions aux bords de Dirichlet ou de Neumann, leurs excitations quantiques contiennent naturellement les champs de jauge [4, 5]. Les contraintes d'invariance conforme de la théorie quantique des cordes exigent que la dimension critique de l'espace-temps soit $D = 26$ pour la corde bosonique et $D = 10$ pour la supercorde.

L'introduction du formalisme paraquantique dans la théorie des cordes a été faite par F. Ardalan et F. Mansouri [6], dans cette étude cependant, une ansatz a été introduite séparant ainsi le statut du centre de masse de la corde de ses modes de vibration. Une deuxième approche a été développée Par N. Belaloui et H. Bennacer [7, 8], consistant à éliminer cette ansatz. La conséquence de cette étude est que (à la différence de la première) les variables de la corde bosonique (resp. fermionique) satisfont des relations trinéaires traduisant ainsi le statut paraquantique de la théorie. Aussi, et pour les deux approches, l'étude de l'algèbre de Poincaré dans ce formalisme a conduit à une dimension d'espace-temps D reliée à l'ordre de la paraquantification Q par la relation $D - 2 = \frac{24}{Q}$ (resp. $D' - 2 = \frac{8}{Q}$).

En 1995, Polchinski a démontré que, pour être cohérente, la théorie des cordes devait contenir non seulement des cordes, mais aussi des surfaces de dimension supérieures qui se déplacent sur un fond spatial. Ces surfaces sont aussi des objets dynamiques appelés « p-branes ». Ces branes jouent un rôle particulier dans la description des cordes : elles constituent les endroits où les cordes ouvertes peuvent se terminer (voir chapitre 3). Normalement, les extrémités des cordes ouvertes se déplacent librement dans l'espace, mais parfois elles peuvent être contraintes de vivre à la surface d'une brane parce que les branes portent des charges électriques et magnétiques [9, 10].

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la théorie des cordes et des D-branes dans le formalisme paraquantique.

Le mémoire est présentée comme suit :

Le premier chapitre vise à introduire la théorie des cordes et le formalisme paraquantique,

en mettant l'accent sur ce qui sera nécessaire dans la suite pour présenter nos travaux.

Dans le deuxième chapitre nous commençons par un rappel du formalisme des cordes parabosoniques [7], on calculera quelques relations de commutation trilinéaires entre les modes α_n et le centre de masse x^i et p^i , puis on abordera la construction de l'algèbre de Virasoro dans ce formalisme.

Dans le troisième chapitre on s'intéressera à l'étude de trois configurations de Dp-branes à savoir : une corde sur une Dp-brane, une corde entre deux Dp-branes parallèles et enfin une corde entre deux Dp-, Dq-branes parallèles. Dans les deux premiers cas on étudiera le formalisme, le spectre et sa dégénérescence qui sera confrontée au développement de la fonction de partition. Dans le dernier cas qui correspond au cas le plus général, on développera en plus le calcul de l'algèbre de Virasoro qui va s'avérer non triviale.

Le chapitre quatre consistera à étudier la théorie d'une corde parabosonique entre deux Dp-, Dq-branes parallèles, toutes les questions abordées dans le dernier cas du chapitre précédent seront reprises dans le cadre de la paraquantification où on démontrera la cohérence de ce modèle paraquantique.

Enfin, on terminera par une conclusion.

Les solutions des équations du mouvement pour les différentes conditions aux bords et quelque détails de calcul seront traités dans les annexes.

Chapitre 1

Les cordes bosoniques

La théorie des cordes considère les objets fondamentaux de la physique classique non plus comme des particules ponctuelles (de dimension 0) mais plutôt comme des objets de dimension 1, dotés d'une longueur très petite. Les différentes particules élémentaires que nous connaissons apparaîtraient alors comme différents modes de vibration de la corde. Le but essentiel de la théorie des cordes est alors la construction d'une mécanique quantique relativiste des objets étendus ayant une structure interne de dimension 1. Pour mieux illustrer l'idée, il est intéressant de rappeler tout d'abord l'action classique d'une particule libre ponctuelle relativiste $X^\mu(\tau)$, de masse m dans l'espace-temps plat

$$S(X^\mu) = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[- \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \right) \left(\frac{dX^\nu}{d\tau} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

où $X^\mu(\tau, \sigma)$ est la variable coordonnée qui décrit l'évolution de la corde dans l'espace-temps et $\mu = 0, \dots, D - 1$ où D est la dimension de l'espace-temps et τ est le paramètre qui nous donne la position de cette particule dans l'espace-temps. Cette action est prise proportionnelle à la longueur de la "ligne-d'univers" de la particule entre la position initiale et finale. Nous prenons comme convention $\eta^{00} = -\eta^{ii} = -1$ et $\eta^{ij} = 0$ si $i \neq j$ (η est la métrique de l'espace-temps de Minkowski) [11].

1.1 Approche de Nambu

Comme pour la particule ponctuelle, les cordes sont des objets à une dimension, elles engendrent une "surface-d'univers" par analogie avec la "ligne-d'univers", cette surface d'univers peut être paramétrisée par deux paramètres (τ, σ) . τ est le paramètre d'évolution et σ est un paramètre qui dénombre les points de la corde ($\sigma \in [0, \pi]$). Si nous voulons que la corde ne se propage pas plus vite que la lumière, nous devons considérer dans chaque point de la surface-d'univers l'existence de vecteur tangent de genre temps et espace

$$\eta_{\mu\nu} \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} + \lambda \frac{dX^\mu}{d\sigma} \right) \left(\frac{dX^\nu}{d\tau} + \lambda \frac{dX^\nu}{d\sigma} \right) \leq 0. \quad (1.2)$$

La condition nécessaire et suffisante de ceci est

$$\left[\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X}^2 X'^2 \right) \right] \geq 0, \quad (1.3)$$

où nous avons défini

$$\dot{X} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau},$$

et

$$X' = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}.$$

Comme pour les particules ponctuelles, Nambu suggère que l'action d'une corde relativiste libre est proportionnelle à la surface engendrée par la configuration initiale $X^\mu(\sigma, \tau_i)$ et finale $X^\mu(\sigma, \tau_f)$ de la corde

$$S = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X}^2 X'^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.4)$$

où α' a la dimension d'une [longueur]² et correspond à la pente de la trajectoire de Regge (pour la corde ouverte) [11]. Cette action est appelée l'action de Nambu-Goto, elle décrit seulement des degrés de liberté bosonique d'où l'appellation, théorie de corde bosonique.

1.2 Corde ouverte

1.2.1 Equations du mouvement de la corde bosonique ouverte

On rappelle que l'action de la corde bosonique est donnée par

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma L, \quad (1.5)$$

où

$$L = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \left[(\dot{X}X')^2 - (\dot{X}^2 X'^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de la variation de S (principe de moindre action $\delta S = 0$) correspondant à une petite variation $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ avec $\delta X^\mu(\sigma, \tau_i) = \delta X^\mu(\sigma, \tau_f)$ et $\delta X^\mu(\sigma = 0, \pi)$ arbitraire, l'action devient [2]

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta X^\mu + \left(\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta X^\mu \right] \\ &= \int_0^\pi d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) \delta X^\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} \right) \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \\ &\quad - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} \right) \right] \delta X^\mu. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le premier terme s'annule quand la position initiale et finale de la corde sont prises fixées. Les équations du mouvement sont données par

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial X'_\mu} = 0, \quad (1.7)$$

avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial L}{\partial X'_\mu}(\sigma = 0, \tau) = \frac{\partial L}{\partial X'_\mu}(\sigma = \pi, \tau) = 0. \quad (1.8)$$

On définit

$$\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X}X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (1.9)$$

qui est le moment conjugué de $X^\mu(\sigma, \tau)$ décrivant la dynamique du système et vérifiant les crochets de Poisson canoniques

$$\{X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)\} = \{\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau), \mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)\} = 0, \quad (1.10)$$

$$\{X^\mu(\sigma, \tau), \mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)\} = -g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (1.11)$$

$X^\mu(\sigma, \tau)$ et $\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ sont considérés comme variables dynamiques indépendantes.

et

$$\Pi^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (1.12)$$

(σ dénote les points de la corde).

L'invariance de l'action sous les transformation de lorentz ($\delta X_\mu = \delta \Lambda_{\mu\nu} X^\nu$) [12] avec les relation (1.7) et (1.8) conduit aux moments énergie et angulaire de la corde. En particulier, on peut montrer qu'il y a conservation locale de l'écoulement du moment énergie et du moment angulaire à l'intérieur de la corde qui sont définis par

$$P^\mu(\tau) = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) \quad \text{moment énergie total de la corde.}$$

$$M^{\mu\nu}(\tau) = \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{P}^\mu X^\nu - \mathcal{P}^\nu X^\mu) \quad \text{moment angulaire total de la corde.}$$

La symétrie de reparamétrisation de l'action se traduit par l'existence d'équations de contraintes entre $\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ et $X^\mu(\sigma, \tau)$ données par les identités

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 + \frac{X'^2}{\alpha'^2} = 0 \\ \mathcal{P}^\mu X'_\mu = 0 \end{cases}. \quad (1.13)$$

Maintenant les équations de mouvement (1.7) sont non linéaires. Un choix particulier d'une jauge orthogonale permet de les ramener aux équations de D'Alembert suivantes

$$\ddot{X}_\mu(\sigma, \tau) - X''_\mu(\sigma, \tau) = 0, \quad (1.14)$$

et les relations (1.13) se ramènent aux équations

$$\begin{cases} \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \\ \dot{X} X' = 0 \end{cases}, \quad (1.15)$$

qui décrivent un système de coordonnées orthonormées sur le world-sheet¹. Donc, les équations (1.9) et (1.12) deviennent

$$\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad (1.16)$$

$$\Pi^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \quad (1.17)$$

¹Ligne d'univers.

1.2.2 Solutions des équations du mouvement

La solution générale de l'équation du mouvement (1.14) est donnée par

$$X^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)). \quad (1.18)$$

Dans le cas de la corde ouverte, où la coordonnée σ varie entre 0 et π , les champs $X^\mu(\sigma, \tau)$ satisfont des conditions aux bords. On distingue deux types d'extrémités pour les cordes ouvertes [11] :

1- Celles qui obéissent à la condition aux limites de Neumann lorsque les deux extrémités de la corde sont libres

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0. \quad (1.19)$$

2- Celles qui restent fixes dans un hyperplan répondent à la condition aux limites de Dirichlet quand les deux extrémités d'une corde en mouvement sont fixées

$$X^\mu(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0. \quad (1.20)$$

Notons ici que la condition de Neumann respecte l'invariance de Poincaré et donc la conservation du tenseur énergie-impulsion. Celle de Dirichlet brise cette invariance et il y a une possibilité de perte d'impulsion pour les directions parallèles au bord de la surface. C'est l'indication de la présence d'un objet étendu sur lequel s'appuie la corde. C'est aussi l'origine de la dénomination Dp-brane (introduite au chapitre trois), le D se réfère aux conditions de Dirichlet.

Lorsque les deux extrémités de la corde sont libres, les conditions aux bords de Neumann permettent d'écrire l'équation (1.18) sous la forme suivante, (Annexe A.a)

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \{a_n^\mu(0) \exp(-in\tau) - a_n^{\mu*}(0) \exp(in\tau)\} \cos n\sigma, \quad (1.21)$$

où $2\alpha'$ est une constante arbitraire avec une dimension de longueur. x^μ et p^μ sont deux constantes d'intégration qui correspondent à la coordonnée du centre de masse et à l'impulsion totale de la corde respectivement, a_n^μ représentent les modes de vibration de la corde. Si on définit

$$a_n^\mu = a_n^\mu(0) \exp(-in\tau) \quad , \quad a_n^{\mu*} = a_n^{\mu*}(0) \exp(in\tau), \quad (1.22)$$

$$\alpha_0^\mu = 2\alpha' p^\mu, \quad (1.23)$$

$$\alpha_n^\mu = \sqrt{2n\alpha'} a_n^\mu \quad , \quad \alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu*} \quad n \geq 0, \quad (1.24)$$

on peut écrire l'équation (1.21) sous la forme

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu\exp(-in\tau)\cos n\sigma, \quad (1.25)$$

en particulier

$$\dot{X}^\mu(\sigma, \tau) \pm X'^\mu(\sigma, \tau) = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}}\alpha_n^\mu\exp(-in(\tau \pm \sigma)). \quad (1.26)$$

Les générateurs de Virasoro sont donnés par

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\pi\alpha'\int_{-\pi}^{\pi}d\sigma\exp in(\tau + \sigma)\left(\mathcal{P}^2 + \frac{(X^\mu)^2}{2\pi\alpha'}\right) \\ &= \frac{1}{4\alpha'}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Le Hamiltonien de la corde ouverte est donné par [12]

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\pi d\sigma\left(\mathcal{P}_\mu\dot{X}^\mu - L\right) \\ &= \int_0^\pi d\sigma\left(\mathcal{P}_\mu\dot{X}^\mu - \frac{1}{4\pi\alpha'}\left((2\pi\alpha'\mathcal{P})^2 - X'^2\right)\right) \\ &= \pi\int_0^\pi d\sigma\left(\alpha'\mathcal{P}^2 + \frac{X'^2}{4\pi^2\alpha'}\right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le cas particulier $H = L_0$ et la condition $L_0 = 0$ permettent d'écrire la masse de la corde suivant l'équation

$$M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m, \quad (1.29)$$

qui est l'équivalent relativiste de l'expression de l'énergie d'une corde de violon en vibration, et le moment angulaire peut s'écrire

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu\right). \quad (1.30)$$

1.3 Quantification

Quand $X^\mu(\sigma, \tau)$ et $\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ sont traités comme indépendants, les contraintes de Virasoro sont incompatibles avec les crochets de Poisson et par suite, la quantification canonique n'est plus directe, ce qui nous conduit à utiliser deux méthodes de quantification [12] :

La quantification covariante :

Cette méthode traite les coordonnées et les moments conjugués comme indépendantes et les contraintes (conditions de Virasoro) seront considérées comme des conditions initiales sur les fonctions d'onde.

La quantification dans la jauge transverse :

Avant de quantifier le système on résout les équations des contraintes dans le cadre d'un choix spécifique d'une paramétrisation σ et τ , ceci nous conduira à ne garder que les variables dynamiques effectivement indépendantes.

1.3.1 Jauge covariante

Rappelons que $X^\mu(\sigma, \tau)$ est la coordonnée de la corde dans l'espace-temps et $\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ est le moment associé à la corde.

Relations de commutations

On postule les relations de commutation suivantes

$$[X^\mu(\sigma, \tau), \mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (1.31)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = [\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau), \mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)] = 0, \quad (1.32)$$

en termes des variables dynamiques x^μ, p^μ et α_n^μ , elles deviennent

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

où x^μ et p^ν sont les variables du centre de masse et les α_n peuvent être perçus (analogie au cas quantique de l'oscillateur harmonique) comme des opérateurs de création ou d'annihilation pour les n négatifs ou positifs respectivement.

Maintenant, il est fondamental de noter que l'espace de Fock généré par l'application à l'état fondamental des $a_n^{\dagger\mu}$ n'est pas défini positif, car les composantes temporelles des a_n^μ ont un signe moins; inhabituel dans leur relation de commutation

$$[a_n^0, a_n^{\dagger 0}] = -1, \quad (1.35)$$

et de ce fait un état de la forme $\alpha_n^{\dagger 0} |0\rangle$ a une norme négative. Il faut donc veiller à éliminer ces états dit de ghost (à faire par la suite).

On peut maintenant faire correspondre aux générateurs de Virasoro classique les opérateurs

$$l_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n-m}^{\mu} \alpha_{m,\mu} : . \quad (1.36)$$

La définition de l'opérateur l_0 pose un problème d'ambiguïté d'ordre, une constante arbitraire quelconque pourrait alors être ajoutée pour éliminer ce problème : $l_0 \rightarrow l_0 - \alpha(0)$

le Hamiltonien devient

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n - \frac{\alpha(0)}{\alpha'} . \quad (1.37)$$

Contrairement à ce qui précède, le moment angulaire reste le même

$$M^{\mu\nu} = x^{\mu} p^{\nu} - x^{\nu} p^{\mu} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^{\mu} \alpha_n^{\nu} - \alpha_{-n}^{\nu} \alpha_n^{\mu}) . \quad (1.38)$$

La condition d'annulation de l_0 qui donnait classiquement la condition sur la masse m de la corde s'écrit

$$(l_0 - \alpha(0)) |0\rangle , \quad (1.39)$$

et les états physiques $|\Psi\rangle_{ph}$ satisfont les contraintes suivantes

$$l_n |\Psi\rangle_{ph} = 0 , \quad n \geq 0, \quad (1.40)$$

$$(l_0 - \alpha(0)) |\Psi\rangle_{ph} = 0, \quad (1.41)$$

A cause de la métrique $\eta^{\mu\nu}$ qui n'est pas définie positive, on ne peut pas affirmer qu'il n'y a pas de ghosts parmi ces états physiques. Le «no-ghost-theorem» permet de construire un ensemble d'opérateurs dit «transverses» vérifiant certaines propriétés fondamentales qui assurent que les opérateurs transverses transforment un état physique en d'autres états physiques et en particulier, quand on les applique au vide $|0\rangle$ ils décrivent un sous espace F des états physiques avec une norme définie positive. La théorie est alors libre de ghosts ssi ($\alpha(0) \leq 1$, $D \leq 25$) ou ($\alpha(0) = 1$, $D = 26$) D est la dimension d'espace-temps. Cette dernière est justement la condition qu'il faut pour une théorie de cordes cohérente.

Algèbre de Virasoro :

L'algèbre de Virasoro fournit un cadre extrêmement puissant pour unifier les concepts de la symétrie et de la localité.

D'une part, l'algèbre de Virasoro est appropriée dans n'importe quelle théorie dans un espace à deux dimensions qui possède une invariance conforme.

D'autre part, la solution des équations du mouvement d'une corde bosonique ouverte mène à l'apparition de quelques contraintes qui sont exprimées en termes d'un ensemble infini de conditions initiales.

Rappelons que les opérateurs de Virasoro sont définis par

$$l_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu}.$$

Premièrement, on va calculer le commutateur entre les opérateurs de Virasoro et les modes α_n [1]

$$\begin{aligned} [l_n, \alpha_m^\nu] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu}, \alpha_m^\nu] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{n-p}^\mu [\alpha_{p,\mu}, \alpha_m^\nu] + [\alpha_{n-p}^\mu, \alpha_m^\nu] \alpha_{p,\mu}), \end{aligned}$$

en utilisant la relation (1.34) on trouve

$$\begin{aligned} [l_n, \alpha_m^\nu] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (p \alpha_{n-p}^\mu \delta_{p+m,0} \eta_\mu^\nu + \alpha_{p,\mu} (n-p) \delta_{n-p+m,0} \eta^{\mu\nu}) \\ &= -m \alpha_{n+m}^\nu, \end{aligned}$$

maintenant, on va calculer le commutateur entre les opérateurs de Virasoro

$$\begin{aligned} [l_n, l_m] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [l_n, \alpha_{m-p}^\mu \alpha_{p,\mu}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^\mu [l_n, \alpha_{p,\mu}] + [l_n, \alpha_{m-p}^\mu] \alpha_{p,\mu}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-p \alpha_{m-p}^\mu \alpha_{n+p,\mu} - (m-p) \alpha_{n+m-p}^\mu \alpha_{p,\mu}), \end{aligned} \tag{1.42}$$

en remplaçant (p) par $(p-n)$ dans le premier terme, on obtient

$$[l_n, l_m] = (n-m) l_{n+m}, \quad m+n \neq 0, \tag{1.43}$$

Ce commutateur est appelé algèbre de Virasoro mais à une éventuelle correction quantique près dans le cas où $m + n \neq 0$. Une telle correction a, dans le cas le plus général, la forme d'une fonction de m . On obtient donc

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m} + A(m) \delta_{n+m}, \quad (1.44)$$

L'algèbre ainsi obtenue est appelée extension centrale de l'algèbre de Virasoro et $-A(m)$ l'anomalie de cette algèbre. On a trivialement $A(m) = A(-m)$ et $A(0) = 0$, et il suffit donc de déterminer $A(m)$ pour $m > 0$. En utilisant l'identité de Jacobi [12, 13]

$$[l_k, [l_n, l_m]] = 0, \quad (1.45)$$

on obtient

$$[(m - n) A(k) + (n - k) A(m) + (k - m) A(n)] \delta_{n+m+k} = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$(n - m) A(n + m) + (2n + m) A(m) - (2m + n) A(n) = 0,$$

pour $m = 1$

$$(n - 1) A(n + 1) + (2 + n) A(1) - (2 + n) A(n) = 0,$$

et donc

$$A(n + 1) = \frac{(2 + n) A(1) - (2 + n) A(n)}{(n - 1)}. \quad (1.46)$$

La forme générale de la solution de cette relation de récurrence est

$$A(n) = c_3 n^3 + c_1 n. \quad (1.47)$$

La détermination des constantes se fait en calculant les valeurs moyennes suivantes

Calcul de $\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle$

Remarquons que $|0\rangle$ étant un état physique.

$$l_n |0\rangle = 0, \quad n \geq 0. \quad (1.48)$$

Calculons alors

$$\begin{aligned} \langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle &= \langle 0 | l_1 l_{-1} | 0 \rangle \\ &= \|l_{-1} |0\rangle\|^2, \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}
l_{-1} |0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-1-n} \alpha_n |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_{-1-n} \alpha_n + \alpha_{-1} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-1-n} \alpha_n \right) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n'=1}^{\infty} \alpha_{-1+n'} \alpha_{-n'} \right) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n'=1}^{\infty} \alpha_{-n'} \alpha_{-1+n'} |0\rangle \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

donc

$$\langle 0 | [l_1, l_{-1}] |0\rangle = 0. \tag{1.51}$$

De l'expression (1.44) on a

$$[l_1, l_{-1}] = 2l_0 + A(1), \tag{1.52}$$

et de l'équation (1.51), on trouve que

$$A(1) = 0. \tag{1.53}$$

Calcul de $\langle 0 | [l_2, l_{-2}] |0\rangle$

$$\langle 0 | [l_2, l_{-2}] |0\rangle = \langle 0 | l_2 l_{-2} |0\rangle, \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
l_{-2} |0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-2-n} \alpha_n |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} \alpha_{-2-n} \alpha_n + \alpha_{-1} \alpha_{-1} + \alpha_{-2} \alpha_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-2-n} \alpha_n \right) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} \alpha_n \alpha_{-2-n} + \alpha_{-1} \alpha_{-1} \right) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \alpha_{-1} \alpha_{-1} |0\rangle,
\end{aligned} \tag{1.55}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [l_2, l_{-2}] |0\rangle &= \|l_{-2} |0\rangle\|^2 \\
&= \left\| \frac{1}{2} \alpha_{-1} \alpha_{-1} |0\rangle \right\|^2 \\
&= \frac{1}{4} \langle 0 | \alpha_{-1}^\mu \alpha_{1,\mu} \alpha_{-1}^\nu \alpha_{-1,\nu} |0\rangle.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Utilisons la relation (1.34) pour ordonner les modes, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [l_2, l_{-2}] | 0 \rangle &= \frac{1}{4} \langle 0 | \alpha_1^\mu (\alpha_{-1}^\nu \alpha_{1,\mu} + \eta_{\mu\nu}^\nu) \alpha_{-1,\nu} | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{4} \langle 0 | [\alpha_1^\mu \alpha_{-1}^\nu (\alpha_{-1,\nu} \alpha_{1,\mu} + \eta_{\mu\nu}) + \eta_{\mu\nu}^\nu (\alpha_{-1,\nu} \alpha_1^\mu + \eta_{\nu\mu}^\mu)] | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle 0 | \eta_\mu^\nu \eta_\nu^\mu | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} D.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

De même que précédemment

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [l_2, l_{-2}] | 0 \rangle &= \langle 0 | (4l_0 + A(2)) | 0 \rangle \\
&= A(2) \\
&= \frac{1}{2} D.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

De la relation (1.47) et les résultats (1.53, 1.58) on obtient

$$\begin{aligned}
c_3 &= -c_1 \\
&= \frac{1}{12} D,
\end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à

$$A(n) = \frac{1}{12} D (n^3 - n), \tag{1.59}$$

l'algèbre de Virasoro prend alors la forme suivante

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m} + \frac{D}{12} n (n^2 - 1) \delta_{n+m,0}. \tag{1.60}$$

1.3.2 La jauge transverse

Ici par contre, on résout d'abord les équations de contraintes (1.13), en faisant un choix spécifique pour la paramétrisation τ et σ ce qui nous conduit aux variables dynamiques effectivement indépendantes $X^i(\tau, \sigma)$, $\mathcal{P}^j(\tau, \sigma')$, x_0^i, p^i, x_0^-, p^+ . C'est la jauge transverse, et dans cette jauge, au lieu de considérer les directions x^0, x^1, \dots, x^{D-1} , on utilise les directions x^+, x^- et x^i du cône de lumière où $i = 2, \dots, D - 2$ et

$$\begin{aligned}
x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^1), \\
x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^1).
\end{aligned}$$

Relations de commutations

On postule les relations de commutations suivantes

$$[X^i(\tau, \sigma), \mathcal{P}^j(\tau, \sigma')] = i\eta^{ij}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (1.61)$$

$$[X^i(\tau, \sigma), X^j(\tau, \sigma')] = [\mathcal{P}^i(\tau, \sigma), \mathcal{P}^j(\tau, \sigma')] = 0, \quad (1.62)$$

et

$$[x_0^-, p^+] = -i, \quad (1.63)$$

les autres commutateurs sont nuls.

$$[x_0^-, p^+] = 0, \quad (1.64)$$

$$[x_0^-, X^i(\tau, \sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^i(\tau, \sigma)] = 0, \quad (1.65)$$

$$[p^+, X^i(\tau, \sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^i(\tau, \sigma)] = 0. \quad (1.66)$$

Dans cette jauge l'expression

$$X^i(\tau, \sigma) = x_0^i + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^i\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^i \cos n\sigma \exp(-in\tau), \quad (1.67)$$

reste inchangée par rapport à celle de l'équation (1.25). De même par rapport à l'expression (1.26)

$$\dot{X}^i \pm X^i = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^i \exp(-in(\tau \pm \sigma)). \quad (1.68)$$

Faisons le prolongement par continuité de l'expression ci dessus de $\sigma \in [0, \pi]$ à $\sigma \in [-\pi, \pi]$.

Pour l'intervalle complet on obtient

$$\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^i \exp(-in(\tau + \sigma)) = \begin{cases} (\dot{X}^i + X^i)(\tau, \sigma) & \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^i - X^i)(\tau, \sigma) & \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases}. \quad (1.69)$$

A partir de (1.61), (1.62) et (1.16) On peut construire les autres relations de commutations

$$[X^i(\tau, \sigma), \dot{X}^j(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{ij}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (1.70)$$

$$[X^i(\tau, \sigma), X^{tj}(\tau, \sigma')] = \frac{d}{d\sigma'} [X^i(\tau, \sigma), X^j(\tau, \sigma')] = 0, \quad (1.71)$$

$$[X^i(\tau, \sigma), \dot{X}^j(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (1.72)$$

$$[X^i(\tau, \sigma), X^{tj}(\tau, \sigma')] = [\dot{X}^i(\tau, \sigma), \dot{X}^j(\tau, \sigma')] = 0, \quad (1.73)$$

$$[(\dot{X}^i \pm X^i)(\tau, \sigma), (\dot{X}^j \pm X^{tj})(\tau, \sigma')] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (1.74)$$

Maintenant, on va calculer les relation de commutations entre les α_n^i, x_0^i et p^i .

Calcul de $[\alpha_n^i, \alpha_m^j]$

D'une part

$$E = \left[\left(\dot{X}^i + X'^i \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^j + X'^j \right) (\tau, \sigma') \right] = 4\pi\alpha' i \eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (1.75)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} E &= \left[\sqrt{2\alpha'} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \alpha_{n'}^i \exp(-in'(\tau + \sigma)), \sqrt{2\alpha'} \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \alpha_{m'}^j \exp(-im'(\tau + \sigma')) \right] \\ &= 2\alpha' \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} \exp(-in'(\tau + \sigma)) \exp(-im'(\tau + \sigma')) [\alpha_{n'}^i, \alpha_{m'}^j], \end{aligned} \quad (1.76)$$

ce qui est équivalent à

$$2\alpha' \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} \exp(-in'(\tau + \sigma)) \exp(-im'(\tau + \sigma')) [\alpha_{n'}^i, \alpha_{m'}^j] = 4\pi\alpha' i \eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (1.77)$$

En introduisant l'opérateur $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \exp(in\sigma)$ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \exp(im\sigma')$ dans l'équation (1.77). Le terme à gauche qu'on note L devient

$$L = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \exp(-i(n+m)\tau) [\alpha_n^i, \alpha_m^j] \quad , \quad \text{avec } m = m' \text{ et } n = n'. \quad (1.78)$$

Dans le terme à droite qu'on note R , en utilisant les relations $\int dx f(x) \delta(x-x') = f(x')$ et $\int dx \exp(ipx) = 2\pi\delta_{p,0}$ on trouve

$$R = -m\eta^{ij} \delta_{m+n,0}, \quad (1.79)$$

donc

$$\sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \exp(-i(n+m)\tau) [\alpha_n^i, \alpha_m^j] = -m\eta^{ij} \delta_{m+n,0}, \quad (1.80)$$

pour $n = -m$, on trouve

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\eta^{ij} \delta_{m+n,0}. \quad (1.81)$$

Notons que le mode α_0^i commute avec tous les oscillateurs, ainsi il est proportionnel au moment de la corde selon la formule

$$\alpha_0^i = \sqrt{2\alpha'} p^i, \quad (1.82)$$

par analogie à (1.23).

Calcul de $[x_0^i, p^j]$

l'intégration de la relation (1.70) sur les coordonnées σ ($\sigma \in [0, \pi]$) donne

$$\left[x_0^i, \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right] + \sqrt{2\alpha'} \tau \left[\alpha_0^i, \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' i\eta^{ij}. \quad (1.83)$$

Le calcul du commutateur $\left[\alpha_0^i, \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right]$ demande l'utilisation de (1.81) qui permet d'obtenir le résultat suivant

$$\left[\alpha_0^i, \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right] = 0, \quad (1.84)$$

et donc

$$\left[x_0^i, \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' i\eta^{ij}. \quad (1.85)$$

Pour absorber le commutateur $[x_0^i, p^j]$, en prenant la dérivée de $X^j(\tau, \sigma')$ par rapport à τ et en reportant dans (1.85) on obtient

$$\sqrt{2\alpha'} [x_0^i, \alpha_0^j] + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n'=1}^{\infty} \left\{ \exp(-in'\tau) [x_0^i, \alpha_{n'}^j] + \exp(in'\tau) [x_0^i, \alpha_{-n'}^j] \right\} \cos n'\sigma' = 2\alpha' i\eta^{ij}. \quad (1.86)$$

En introduisant l'opérateur $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos n\sigma$, $n \geq 1$ dans (1.86) on obtient

$$\frac{1}{\pi} [x_0^i, \alpha_{n'}^j] \exp(-in'\tau) + \frac{1}{\pi} [x_0^i, \alpha_{-n'}^j] \exp(in'\tau) = 0, \quad (1.87)$$

de sorte que

$$\int_0^\pi d\sigma \cos n\sigma = 0, \quad (1.88)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n'=1}^{\infty} \cos n\sigma \cos n'\sigma = \delta(n - n'). \quad (1.89)$$

L'équation (1.87) donne nécessairement

$$[x_0^i, \alpha_n^j] = 0, \quad n \neq 0. \quad (1.90)$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (1.86) on trouve

$$[x_0^i, \alpha_0^j] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{ij}, \quad (1.91)$$

et de l'équation (1.82) on arrive finalement à

$$[x_0^i, p^j] = i\eta^{ij}. \quad (1.92)$$

Opérateur de masse

L'opérateur de masse est défini par

$$M^2 = 2p^+p^- - p^i p^i, \quad (1.93)$$

où p^- est le conjugué canonique dans la direction x^+ et p^+ est le conjugué canonique dans la direction x^- . Ces derniers sont reliés par le générateur l_0 à travers la relation

$$\frac{1}{\alpha'} l_0 = 2p^+p^-, \quad (1.94)$$

l'opérateur l_0 peut être décomposé sous la forme suivante

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^i \alpha_{-p}^i, \end{aligned} \quad (1.95)$$

et pour ordonner le dernier terme on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^i \alpha_{-p}^i &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^i \alpha_p^i + [\alpha_p^i, \alpha_{-p}^i]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (p \eta^{ii} \delta_{p-p,0}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{(D-2)}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p, \end{aligned} \quad (1.96)$$

L'expression de l_0 quantique devient

$$l_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{(D-2)}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (1.97)$$

Cette expression contient un terme divergent, ce terme joue le rôle de la constante additive évoquée auparavant et qu'on notera a

$$a = \frac{(D-2)}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p, \quad (1.98)$$

en introduisant la fonction zeta $\xi(s)$

$$\xi(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^s},$$

si $s = -1$

$$\begin{aligned}\xi(-1) &= 1 + 2 + \dots \\ &= -\frac{1}{12},\end{aligned}\tag{1.99}$$

l'équation (1.97) devient

$$l_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^i\alpha_p^i - \frac{(D-2)}{24},\tag{1.100}$$

Donc, la substitution de (1.100) dans (1.93) nous conduit à la formule de l'opérateur de masse que nous écrivons en termes d'opérateurs de créations et annihilations

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{(D-2)}{24} + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{\dagger i} a_p^i \right].\tag{1.101}$$

Spectre et Dégénérescence

Considérons les équations (1.101) et déterminons le spectre de masse des états de la corde bosonique.

Etat fondamental

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{-1(D-2)}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle,\tag{1.102}$$

où $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ est un état de vide d'impulsion \vec{p}_T .

$$m^2 = \frac{-1(D-2)}{\alpha'}.$$

$|p^+, \vec{p}_T\rangle$ représente un état tachyonique.

1^{er} niveau excité

Après utilisation de la relation (1.81) qui permet d'écrire les opérateurs d'annihilations à droite des opérateurs de créations on trouve

$$M^2 \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{(D-2)}{24} + 1 \right] \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right).\tag{1.103}$$

Pour la corde bosonique $D = 26$. Donc

$$m^2 = 0.$$

$a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ représente un état vectoriel avec spin égal à 1 et une masse égale à 0 (état photonique).

2^{ème} niveau excité

Le 2^{ème} niveau excité est représenté par deux type d'états

$$\begin{aligned} & \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\ & \left(a_2^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^2 \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{(D-2)}{24} + 2 \right] \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right). \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}.$$

$a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ représente un état tensoriel avec masse .

$$\begin{aligned} M^2 \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{(D-2)}{24} + 2 \right] \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right). \end{aligned} \quad (1.105)$$

$a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ représente un état vectoriel avec masse.

3^{ème} niveau excité

Les types d'états sont définis comme suit

$$\begin{aligned} & \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} a_1^{\dagger l} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\ & \left(a_2^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\ & \left(a_3^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right). \end{aligned}$$

$$M^2 \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} a_1^{\dagger l} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} a_1^{\dagger l} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \quad (1.106)$$

$$M^2 \left(a_2^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(a_2^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \quad (1.107)$$

$$M^2 \left(a_3^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(a_3^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right). \quad (1.108)$$

Les trois états représentent des états avec masse.

Revenons maintenant à la dégénérescence de chaque type d'état

<i>Niveau</i>	<i>Type d'état</i>	<i>Dégénérescence</i>
0	$ p^+, \vec{p}_T\rangle$	1
1	$a_1^{\dagger j} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D - 2)$
2	$a_2^{\dagger j} p^+, \vec{p}_T\rangle$ $a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D - 2)$ $(D - 2) + \frac{(D-2)(D-3)}{2}$
3	$a_3^{\dagger j} p^+, \vec{p}_T\rangle$ $a_2^{\dagger j} a_1^{\dagger k} p^+, \vec{p}_T\rangle$ $a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} a_1^{\dagger l} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D - 2)$ $(D - 2)^2$ $(D - 2) + (D - 2)(D - 3) + \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{6}$

Tableau 1

Fonction de partition

L'étude du spectre se base sur la construction de la fonction génératrice du système. La dégénérescence des états pour chaque niveau de masse augmente en exponentiel, cette dégénérescence est obtenue à partir de cette fonction génératrice appelée fonction de partition qui est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n = \text{Tr} x^N, \quad (1.109)$$

où $d(n)$ est la dégénérescence au niveau excité n .

Pour les cordes bosoniques, la fonction est définie par

$$f(x) = \sum_{N=0}^{\infty} d_b(N) x^N, \quad (1.110)$$

avec

$$\begin{aligned} d(N) &\rightarrow \text{nombre d'états pour chaque niveau.} \\ N &= \alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^i a_n^i, \\ \text{avec } i &= \overline{2, (D-2)}, \end{aligned} \quad (1.111)$$

ce qui nous conduit à écrire

$$f(x) = \text{Tr} x^{\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^i a_n^i}, \quad (1.112)$$

nous avons

$$Tr A = \sum_n \langle n | A | n \rangle. \quad (1.113)$$

On montre facilement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n' | x^{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} n a_{-n}^i a_n^i} | n' \rangle \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{D-2} \sum_{n'=0}^{\infty} x^{nn'} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{D-2}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Le développement limité au voisinage de $x = 0$ donne

$$f(x) = 1 + (D-2)x + \frac{1}{2}(D-2)(D+1)x^2 + (D-2) \left[2 + (D-2) + (D-3) + \frac{(D-3)(D-4)}{6} \right] x^3 + \dots \quad (1.115)$$

Les coefficients de ce polynôme représentent effectivement les dégénérescence des états pour chaque niveau de masse qui étaient représentés dans le tableau 1.

1.4 Formalisme paraquantique

1.4.1 Introduction

Les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière sont inséparables. la lumière se comporte à la fois comme une onde et comme un flux des particules de même à une particule matérielle libre d'énergie w et de quantité de mouvement p on devait associer une onde plane de fréquence ν et de longueur d'onde λ . Ces deux aspects sont bien déterminés par :

La condition de fréquence de Bohr

$$w = h\nu = E_1 - E_2, \quad (1.116)$$

et la relation de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{|p|}. \quad (1.117)$$

En théorie relativiste, ces deux dernières relations sont une conséquence directe des équations du mouvement de Heisenberg

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial A}{\partial q_\mu} &= [A, P_\mu], \\ \mu &= \overline{0, 3}, \end{aligned} \quad (1.118)$$

où A est une observable arbitraire et P_μ le quadrivecteur énergie-impulsion où $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (H, P_x, P_y, P_z)$ et $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (t, q_x, q_y, q_z)$.

En mécanique classique, un système de particules est décrit au moyen de quantités telles que la position \vec{q} et l'impulsion \vec{p} de chaque particule. On peut alors écrire le Hamiltonien en fonction des coordonnées q_i et leurs conjugués p_i avec ($i = \overline{1, d}$; $d = \text{DDL}$).

La description quantique du même système peut être construite en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs qui agissent dans un espace des états approprié (espace de Hilbert).

Il existe des contraintes sur les opérateurs q_i et p_i

$$\begin{cases} [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \\ [q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \end{cases} . \quad (1.119)$$

Le point essentiel de la MQ est l'équation de Heisenberg, mais les équations de commutations (1.119) ne sont pas uniques [15], ceci conduit à une généralisation de la M.Q qu'on appellera paraquantification (P.Q).

1.4.2 Paraquantification

On peut mettre en évidence cette généralisation à travers l'étude de l'oscillateur harmonique. Le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique s'écrit sous la forme

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) . \quad (1.120)$$

Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} . \quad (1.121)$$

Le principe de correspondance avec l'équation de Heisenberg nous donnent

$$i\dot{q} = [q, H] = ip, \quad (1.122)$$

$$i\dot{p} = [p, H] = -iq, \quad (1.123)$$

mais avec la restriction $[q, p] = i$, on montre que cette condition n'est pas unique. Pour cela, on utilisera les opérateurs définis par

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \quad (1.124)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip). \quad (1.125)$$

Pour l'oscillateur bosonique

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) \equiv N, \quad (1.126)$$

$$[a, N] = a, \quad [a^\dagger, N] = -a^\dagger, \quad (1.127)$$

le spectre de N est défini comme suit

$$\begin{cases} N |n\rangle = N_n |n\rangle \\ \langle n | n'\rangle = \delta_{n,n'} \end{cases}, \quad (1.128)$$

et

$$N_n = N_0 + n \quad \text{avec} \quad N_0 \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.129)$$

Nous savons que

$$\begin{cases} a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \\ a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ \langle n | a = \sqrt{n+1} \langle n+1 | \\ \langle n | a^\dagger = \sqrt{n} \langle n-1 | \end{cases}. \quad (1.130)$$

D'après les équations (1.126), (1.128), (1.129) et (1.130) on montre facilement que

$$N_0 + n = \frac{1}{2}(|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2), \quad (1.131)$$

avec

$$a_{n,n'} \equiv \langle n | a | n'\rangle. \quad (1.132)$$

On peut alors résoudre cette équation par récurrence sur n pour obtenir

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n}^\dagger = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases}. \quad (1.133)$$

Donc on arrive à montrer

$$\begin{aligned}\langle n | [a, a^\dagger] | n' \rangle &= \sum_{n''} \{ \langle n | a | n'' \rangle \langle n'' | a^\dagger | n' \rangle - \langle n | a^\dagger | n'' \rangle \langle n'' | a | n' \rangle \} \\ &= \delta_{nn'} \left(|a_{n,n+1}|^2 - |a_{n,n-1}^\dagger|^2 \right).\end{aligned}\quad (1.134)$$

Ce qui est équivalent à écrire

$$\langle n | [a, a^\dagger] | n' \rangle = \delta_{nn'} \begin{cases} 2N_0 & n \text{ pair} \\ 2(1 - N_0) & n \text{ impair} \end{cases}.$$

Nous définissons l'ordre de la paraquantification de telle sorte que $N_0 = \frac{Q}{2}$ où Q est l'ordre de la PQ.

Remarquons que seule la valeur $Q = 1$ nous conduit à la relation de commutation ordinaire $[a, a^\dagger] = 1$ qui représente le cas d'un oscillateur harmonique (bosonique) dans le cadre quantique.

Pour $Q = 2$ c-à-d $N_0 = 1$ nous aurons une relation du type

$$aaa^\dagger - a^\dagger aa = 2a. \quad (1.135)$$

De même, le Hamiltonien d'un oscillateur fermionique est défini par

$$H = \frac{1}{2} (b^\dagger b - bb^\dagger) \equiv N, \quad (1.136)$$

on peut alors montrer que

$$N = \frac{1}{2} (|b_{n-1,n}|^2 - |b_{n,n+1}|^2). \quad (1.137)$$

De la même manière, on montre que $Q = 1$ conduit aux relations d'anticommutation

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0, \quad (1.138)$$

donc $b^2 = (b^\dagger)^2 = 0$.

Pour $Q = 2$ nous aurons les relations

$$bb^\dagger b = 2b, \quad bbb^\dagger + b^\dagger bb = 2b, \quad (1.139)$$

et

$$b^3 = (b^\dagger)^3 = 0. \quad (1.140)$$

1.4.3 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs

Soit un système de plusieurs oscillateurs harmoniques bosoniques ou fermioniques.

Dans le cadre paraquantique, les opérateurs a_k et a_k^\dagger (bosoniques ou fermioniques) vérifient des relations trilinéaires de telle sorte que [14]

$$\left[a_k, \left[a_l^\dagger, a_n \right]_{\mp} \right] = 2\delta_{kl}a_n, \quad (1.141)$$

$$\left[a_k, \left[a_l^\dagger, a_n^\dagger \right]_{\mp} \right] = 2\delta_{kl}a_n^\dagger \mp 2\delta_{kn}a_l^\dagger, \quad (1.142)$$

$$\left[a_k, \left[a_l, a_n \right]_{\mp} \right] = 0. \quad (1.143)$$

Le signe en haut est associé aux parafermions, celui en bas pour les parabosons.

Le vide est défini par

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1, \quad (1.144)$$

$$a_k | 0 \rangle = 0 \quad \forall k, \quad (1.145)$$

avec la condition qui fixe l'ordre de la paraquantification

$$a_k a_l^\dagger | 0 \rangle = Q \delta_{kl} | 0 \rangle. \quad (1.146)$$

Ces relations dépendent du vide, mais on peut trouver des relations qui se suffisent à elles seules ("self-contained").

Le problème qui se pose est que lorsque l'ordre de la paraquantification augmente les relations se compliquent. L'une des solutions à ce problème est d'utiliser la décomposition de Green [4], qui est définie comme suit

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^Q a_k^{(\alpha)} \quad , \quad a_k^\dagger = \sum_{\alpha=1}^Q a_k^{(\alpha)\dagger}, \quad (1.147)$$

où $a_k^{(\alpha)}$ est la composante de Green qui agit dans le para-espace de Green.

les relations (1.141), (1.142) et (1.143) deviennent bilinéaires (mais du type anormal) :

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)\dagger} \right]_{\pm} = \delta_{kl}, \quad (1.148)$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)} \right]_{\pm} = 0, \quad (1.149)$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)\dagger} \right]_{\mp} = \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)} \right]_{\mp} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (1.150)$$

Le vide $|0\rangle'$ vérifie

$$a_k^{(\alpha)} |0\rangle' = 0, \quad \forall k, \alpha.$$

Donc

$$a_k |0\rangle' = 0, \quad \forall k, \tag{1.151}$$

et

$$a_k a_l^\dagger |0\rangle' = Q \delta_{kl} |0\rangle'. \tag{1.152}$$

Ce qui implique que $|0\rangle'$ et $|0\rangle$ sont équivalents.

Chapitre 2

La théorie des cordes parabosoniques

2.1 Jauge covariante

2.1.1 Formalisme paraquantique

A partir des variables dynamiques classiques $X^\mu(\sigma, \tau)$ et $\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ la paraquantification de la théorie est donnée par la réinterprétation de celles-ci comme opérateurs satisfaisant les relations de commutation trilinéaires suivantes

$$[X^\mu(\sigma, \tau), [\mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau), \mathcal{P}^\rho(\sigma'', \tau)]_+] = 2\iota g^{\mu\nu} \mathcal{P}^\rho \delta(\sigma - \sigma') + 2\iota g^{\mu\rho} \mathcal{P}^\nu \delta(\sigma - \sigma''), \quad (2.1)$$

$$[\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau), [X^\nu(\sigma', \tau), X^\rho(\sigma'', \tau)]_+] = -2\iota g^{\mu\nu} X^\rho \delta(\sigma - \sigma') - 2\iota g^{\mu\rho} X^\nu \delta(\sigma - \sigma''), \quad (2.2)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), [X^\nu(\sigma', \tau), \mathcal{P}^\rho(\sigma'', \tau)]_+] = 2\iota g^{\mu\rho} X^\nu \delta(\sigma - \sigma''), \quad (2.3)$$

$$[\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau), [X^\nu(\sigma', \tau), \mathcal{P}^\rho(\sigma'', \tau)]_+] = 2\iota g^{\mu\nu} \mathcal{P}^\rho \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.4)$$

Pour les variables du centre de masse x^μ , p^μ et les modes d'excitation α_n^μ , les relations trilinéaires sont

$$[x^\mu, [x^\nu, p^\rho]_+] = 2\iota g^{\mu\rho} x^\nu, \quad (2.5)$$

$$[x^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+] = 2\iota (g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\mu\rho} p^\nu), \quad (2.6)$$

$$[x^\mu, [p^\nu, \alpha_n^\rho]_+] = 2\iota g^{\mu\nu} \alpha_n^\rho, \quad (2.7)$$

$$[p^\mu, [x^\nu, p^\rho]_+] = -2\iota g^{\mu\nu} p^\rho, \quad (2.8)$$

$$[p^\mu, [x^\nu, x^\rho]_+] = -2i (g^{\mu\nu} x^\rho + g^{\mu\rho} x^\nu), \quad (2.9)$$

$$[\alpha_n^\mu, [\alpha_m^\nu, \alpha_l^\rho]_+] = 2 (g^{\mu\nu} n \delta_{n+m,0} \alpha_l^\rho + g^{\mu\rho} n \delta_{n+l,0} \alpha_m^\nu), \quad (2.10)$$

$$[\alpha_n^\mu, [p^\nu, \alpha_m^\rho]_+] = 2n g^{\mu\rho} \delta_{n+m,0} p^\nu, \quad (2.11)$$

$$[\alpha_n^\mu, [x^\nu, \alpha_m^\rho]_+] = 2n g^{\mu\rho} \delta_{n+m,0} x^\nu. \quad (2.12)$$

Ces relation sont équivalentes aux relations(2.1, ..., 2.4) .

En utilisant la décomposition de Green

$$x^\mu = \sum_{\alpha=1}^Q x^{\mu(\alpha)} \quad , \quad p^\mu = \sum_{\alpha=1}^Q p^{\mu(\alpha)} \quad , \quad \alpha_n^\mu = \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_n^{\mu(\beta)}. \quad (2.13)$$

Les relations de commutation trilinéaires (2.5 à 2.12) se transforment en relations de commutation bilinéaires du type "anormal"

$$[x^{\mu(\sigma)}, p^{\nu(\sigma)}] = i g^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

$$[x^{\mu(\sigma_1)}, p^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad (2.15)$$

$$[p^{\mu(\sigma)}, p^{\nu(\sigma)}] = [x^{\mu(\sigma)}, x^{\nu(\sigma)}] = 0, \quad (2.16)$$

$$[p^{\mu(\sigma_1)}, p^{\nu(\sigma_2)}]_+ = [x^{\mu(\sigma_1)}, x^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad (2.17)$$

$$[\alpha_n^{\mu(\sigma)}, \alpha_m^{\nu(\sigma)}] = n g^{\mu\nu} \delta_{n+m,0}, \quad (2.18)$$

$$[\alpha_n^{\mu(\sigma_1)}, \alpha_l^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad (2.19)$$

$$[x^{\mu(\sigma)}, \alpha_n^{\nu(\sigma)}] = [p^{\mu(\sigma)}, \alpha_n^{\nu(\sigma)}] = 0, \quad (2.20)$$

$$[x^{\mu(\sigma_1)}, \alpha_n^{\nu(\sigma_2)}]_+ = [p^{\mu(\sigma_1)}, \alpha_n^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2. \quad (2.21)$$

2.1.2 Algèbre de Virasoro

On définit les générateurs de Virasoro dans le cas paraquantique de la façon suivante

$$l_n = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\alpha_{n-m}^\mu, \alpha_{m,\mu}]_+, \quad (2.22)$$

et comme la paraquantification est basée sur des relations trilineaire, l'idée serait de calculer les commutateurs de l'algèbre de Virasoro directement à partir de ces relations.

Calcul de $[l_n, \alpha_m^\mu]$

$$[l_n, \alpha_m^\mu] = -\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_m^\mu, [\alpha_{n-l}^\nu, \alpha_{l,\nu}]_+ \right].$$

En utilisant la relation

$$[\alpha_l^\mu, [\alpha_m^\nu, \alpha_n^\sigma]_+] = 2l\eta^{\mu\nu}\alpha_n^\sigma\delta_{m+l,0} + 2l\eta^{\mu\sigma}\alpha_m^\nu\delta_{l+n,0}. \quad (2.23)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} [l_n, \alpha_m^\mu] &= -\frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [2m\eta^{\mu\sigma}\alpha_{l,\nu}\delta_{m+n-l,0} + 2l\eta^{\mu\sigma}\alpha_{n-l}^\nu\delta_{m+l,0}] \\ &= -m\alpha_{m+n}^\mu. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Calcul de $[l_n, l_m]$

$$\begin{aligned} [l_n, l_m] &= \frac{1}{4} \left[l_n, \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\alpha_{m-l}^\mu, \alpha_{l,\mu}]_+ \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[l_n, \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\alpha_{m-l}^\mu \alpha_{l,\mu} + \alpha_{l,\mu} \alpha_{m-l}^\mu) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{ \alpha_{m-l}^\mu [l_n, \alpha_{l,\mu}] + [l_n, \alpha_{m-l}^\mu] \alpha_{l,\mu} + \alpha_{l,\mu} [l_n, \alpha_{m-l}^\mu] + [l_n, \alpha_{l,\mu}] \alpha_{m-l}^\mu \} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{ -l\alpha_{m-l}^\mu \alpha_{n+l,\mu} - (m-l)\alpha_{n+m-l}^\mu \alpha_{l,\mu} - (m-l)\alpha_{l,\mu} \alpha_{n+m-l}^\mu - l\alpha_{n+l,\mu} \alpha_{m-l}^\mu \} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ l [\alpha_{m-l}^\mu, \alpha_{n+l,\mu}]_+ + (m-l) [\alpha_{n+m-l}^\mu, \alpha_{l,\mu}]_+ \right\}, \end{aligned}$$

en remplaçant l par $(l-n)$ dans le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned} [l_n, l_m] &= -\frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ (l-n) [\alpha_{m-l}^\mu, \alpha_{n+l,\mu}]_+ + (m-l) [\alpha_{n+m-l}^\mu, \alpha_{l,\mu}]_+ \right\} \\ &= \frac{1}{4} (n-m) \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\alpha_{n+m-l}^\mu, \alpha_{l,\mu}]_+ \\ &= (n-m) l_{n+m}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Maintenant, par analogie au cas ordinaire, on peut montrer que

$$[l_n, l_m] = (n-m) l_{n+m} + f(Q, D) \delta_{n+m,0}. \quad (2.26)$$

Le terme central $f(Q, D)$ peut être déterminé en calculant successivement les valeurs moyennes $\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle$ et $\langle 0 | [l_2, l_{-2}] | 0 \rangle$.

Calculons $\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle &= \frac{1}{4^2} \sum_{l,k \in \mathbb{Z}} \langle 0 | \left[\alpha_{1-l}^\mu \alpha_{l,\mu}, [\alpha_{-1-k}^\nu, \alpha_{k,\mu}]_+ \right] | 0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{4^2} \sum_{l,k \in \mathbb{Z}} \langle 0 | \left[\alpha_{l,\mu} \alpha_{1-l}^\mu, [\alpha_{-1-k}^\nu, \alpha_{k,\nu}]_+ \right] | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{16} \sum_{l,k \in \mathbb{Z}} \langle 0 | \left\{ \alpha_{1-l}^\mu \left[\alpha_{l,\mu}, [\alpha_{-1-k}^\nu, \alpha_{k,\nu}]_+ \right] + \left[\alpha_{1-l}^\mu, [\alpha_{-1-k}^\nu, \alpha_{k,\nu}]_+ \right] \alpha_{l,\mu} \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{l,\mu} \left[\alpha_{1-l}^\mu, [\alpha_{-1-k}^\nu, \alpha_{k,\nu}]_+ \right] + \left[\alpha_{l,\mu}, [\alpha_{-1-k}^\nu, \alpha_{k,\nu}]_+ \right] \alpha_{1-l}^\mu \right\} | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle 0 | \left\{ l \alpha_{1-l}^\mu \alpha_{l-1}^\mu + (1-l) \alpha_{-l,\mu} \alpha_{l,\mu} + (1-l) \alpha_{l,\mu} \alpha_{-l,\mu} + l \alpha_{l-1}^\mu \alpha_{1-l}^\mu \right\} | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{l=-\infty}^0 \langle 0 | l \alpha_{1-l}^\mu \alpha_{l-1}^\mu | 0 \rangle + \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 | l \alpha_{1-l}^\mu \alpha_{l-1}^\mu | 0 \rangle \right. \\
&\quad + \sum_{l=-\infty}^0 \langle 0 | (1-l) \alpha_{-l,\mu} \alpha_{l,\mu} | 0 \rangle + \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 | (1-l) \alpha_{-l,\mu} \alpha_{l,\mu} | 0 \rangle \\
&\quad + \sum_{l=-\infty}^0 \langle 0 | (1-l) \alpha_{l,\mu} \alpha_{-l,\mu} | 0 \rangle + \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 | (1-l) \alpha_{l,\mu} \alpha_{-l,\mu} | 0 \rangle \\
&\quad \left. + \sum_{l=-\infty}^0 \langle 0 | l \alpha_{l-1}^\mu \alpha_{1-l}^\mu | 0 \rangle + \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 | l \alpha_{l-1}^\mu \alpha_{1-l}^\mu | 0 \rangle \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{l=-\infty}^0 l \langle 0 | \alpha_{1-l}^\mu \alpha_{l-1}^\mu | 0 \rangle + \sum_{l=-\infty}^0 (1-l) \langle 0 | \alpha_{-l,\mu} \alpha_{l,\mu} | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{\infty} (1-l) \langle 0 | \alpha_{l,\mu} \alpha_{-l,\mu} | 0 \rangle + \sum_{l=0}^{\infty} l \langle 0 | \alpha_{l-1}^\mu \alpha_{1-l}^\mu | 0 \rangle \right\}, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

donc la moyenne $\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle$ devient

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{l=-\infty}^0 l(1-l) QD - \sum_{l=-\infty}^0 l(1-l) QD \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{\infty} l(1-l) QD - \sum_{l=0}^{\infty} l(1-l) QD \right\} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$= 0, \tag{2.29}$$

et

$$[l_1, l_{-1}] = 2l_0 + f_1(Q, D), \tag{2.30}$$

où

$$f_n(Q, D) = an + bn^3, \quad (2.31)$$

pour $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1(Q, D) &= a + b \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Calculons $\langle 0 | [l_2, l_{-2}] | 0 \rangle$

De la même façon, on trouve que

$$\langle 0 | [l_2, l_{-2}] | 0 \rangle = \frac{QD}{2}. \quad (2.33)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} [l_2, l_{-2}] &= 4l_0 + f_2(Q, D) \\ \Rightarrow f_2(Q, D) &= \frac{QD}{2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

pour $n = 2$

$$\begin{aligned} f_2(Q, D) &= 2a + 8b \\ \Rightarrow b &= \frac{QD}{12} \text{ et } a = -\frac{QD}{12}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

où

$$a = -b, \quad (2.36)$$

donc

$$f_n(Q, D) = \frac{QD}{12} n (n^2 - 1). \quad (2.37)$$

Finalement, l'algèbre de Virasoro s'écrit

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m} + \frac{QD}{12} n (n^2 - 1) \delta_{n+m,0}. \quad (2.38)$$

2.2 Jauge transverse

2.2.1 Formalisme paraquantique

On postule les relations trilinéaires entre : $X^i(\sigma, \tau)$, $\mathcal{P}^i(\sigma, \tau)$, x_0^- et p^+

$$\left[X^i(\sigma, \tau), [\mathcal{P}^j(\sigma', \tau), \mathcal{P}^k(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2\eta^{ij}\mathcal{P}^k\delta(\sigma - \sigma') + 2\eta^{ik}\mathcal{P}^j\delta(\sigma - \sigma''), \quad (2.39)$$

$$\left[X^i(\sigma, \tau), [X^j(\sigma', \tau), \mathcal{P}^k(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2\eta^{ik}X^j\delta(\sigma - \sigma''), \quad (2.40)$$

$$\left[X^i(\sigma, \tau), [x_0^-, X^j(\sigma', \tau)]_+ \right] = \left[\mathcal{P}^i(\sigma, \tau), [x_0^-, \mathcal{P}^j(\sigma', \tau)]_+ \right] = 0, \quad (2.41)$$

$$\left[\mathcal{P}^i(\sigma, \tau), [x_0^-, X^j(\sigma', \tau)]_+ \right] = -\eta^{ij}x_0^-\delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.42)$$

$$\left[X^i(\sigma, \tau), [x_0^-, \mathcal{P}^j(\sigma', \tau)]_+ \right] = \eta^{ij}x_0^-\delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.43)$$

$$\left[x_0^-, [X^j(\sigma, \tau), \mathcal{P}^j(\sigma', \tau)]_+ \right] = 0, \quad (2.44)$$

$$\left[x_0^-, [X^j(\sigma, \tau), p^+]_+ \right] = -iX^j(\sigma, \tau), \quad (2.45)$$

$$\left[x_0^-, [\mathcal{P}^i(\sigma, \tau), p^+]_+ \right] = -i\mathcal{P}^i(\sigma, \tau). \quad (2.46)$$

Les autres commutateurs sont nuls.

On se propose de calculer les relations trilineaire en termes de modes α_n^i et de x^i , p^i à partir de celles en termes de coordonnées de la corde $X^i(\sigma, \tau)$ et de son moment conjugué $\mathcal{P}^i(\sigma, \tau)$.

Calcul de $\left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right]$

Calculons alors la relation suivante

$$A = \left[\left(\dot{X}^i + X'^i \right) (\tau, \sigma), \left[\left(\dot{X}^j + X'^j \right) (\tau, \sigma'), \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma'') \right]_+ \right], \quad (2.47)$$

on peut écrire

$$A = \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \left[\left(\dot{X}^j + X'^j \right) (\tau, \sigma'), \left(\dot{X}^k, X'^k \right) (\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ + \left[X'^i(\tau, \sigma), \left[\left(\dot{X}^j + X'^j \right) (\tau, \sigma'), \left(\dot{X}^k, X'^k \right) (\tau, \sigma'') \right]_+ \right],$$

qu'on posera sous la forme

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8,$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \left[\dot{X}^j(\tau, \sigma'), \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \left[\dot{X}^j(\tau, \sigma'), X'^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ &= 2 \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), X'^k(\tau, \sigma'') \right] \dot{X}^j(\tau, \sigma') \\ &= -4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma''} \delta(\sigma - \sigma'') \dot{X}^j(\tau, \sigma'), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \left[X'^j(\tau, \sigma'), \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ &= 2 \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), X'^j(\tau, \sigma') \right] \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \\ &= -4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \dot{X}^k(\tau, \sigma''), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \left[X'^j(\tau, \sigma'), X'^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ &= 2 \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), X'^j(\tau, \sigma') \right] X'^k(\tau, \sigma'') + 2 \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), X'^k(\tau, \sigma'') \right] \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) X'^k(\tau, \sigma'') + 4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma''} \delta(\sigma'' - \sigma) X'^j(\tau, \sigma') \\ &= -4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') X'^k(\tau, \sigma'') - 4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma''} \delta(\sigma - \sigma'') X'^j(\tau, \sigma'), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} A_5 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), \left[\dot{X}^j(\tau, \sigma'), \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ &= 2 \left[X'^i(\tau, \sigma), \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right] \dot{X}^k(\tau, \sigma'') + 2 \left[X'^i(\tau, \sigma), \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \right] \dot{X}^j(\tau, \sigma') \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \dot{X}^k(\tau, \sigma'') + 4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'') \dot{X}^j(\tau, \sigma'), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} A_6 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), \left[\dot{X}^j(\tau, \sigma'), X'^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\ &= 2 \left[X'^i(\tau, \sigma), \dot{X}^j(\tau, \sigma') \right] X'^k(\tau, \sigma'') \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') X'^k(\tau, \sigma''), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
A_7 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), \left[X'^j(\tau, \sigma'), \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\
&= 2 \left[X'^i(\tau, \sigma), \dot{X}^k(\tau, \sigma'') \right] X'^j(\tau, \sigma') \\
&= 4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'') X'^j(\tau, \sigma'), \tag{2.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_8 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), \left[X'^j(\tau, \sigma'), X'^k(\tau, \sigma'') \right]_+ \right] \\
&= 0. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

De sorte que A se ramène à l'expression

$$\begin{aligned}
A &= -4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma''} \delta(\sigma - \sigma'') \left(\dot{X}^j(\tau, \sigma') + X'^j(\tau, \sigma') \right) \\
&\quad -4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \left(\dot{X}^k(\tau, \sigma'') + X'^k(\tau, \sigma') \right) \\
&\quad +4\pi\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \left(\dot{X}^k(\tau, \sigma'') + X'^k(\tau, \sigma') \right) \\
&\quad +4\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'') \left(\dot{X}^j(\tau, \sigma') + X'^j(\tau, \sigma') \right) \\
&= -4\pi\sqrt{2\alpha'}\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma''} \delta(\sigma - \sigma'') \sum_{n' \in z} \alpha_{n'}^j \exp(-in'(\tau + \sigma')) \\
&\quad -4\pi\sqrt{2\alpha'}\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \sum_{n' \in z} \alpha_{n'}^k \exp(-in'(\tau + \sigma'')) \\
&\quad +4\pi\sqrt{2\alpha'}\alpha' i\eta^{ij} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \sum_{n' \in z} \alpha_{n'}^k \exp(-in'(\tau + \sigma'')) \\
&\quad +4\pi\sqrt{2\alpha'}\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'') \sum_{n' \in z} \alpha_{n'}^j \exp(-in'(\tau + \sigma')),
\end{aligned}$$

qu'on notera (dans cet ordre) sous la forme :

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \tag{2.56}$$

D'autre part, par substitution directe de l'équation (1.68) dans (2.47) on trouve

$$\begin{aligned}
A &= 2\alpha' \sqrt{2\alpha'} \sum \exp(-il(\tau + \sigma)) \exp(-im(\tau + \sigma')) \exp(-in(\tau + \sigma'')) \\
&\quad \times \left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right]. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2\alpha' \sqrt{2\alpha'} \sum \exp(-il(\tau + \sigma)) \exp(-im(\tau + \sigma')) \exp(-in(\tau + \sigma'')) \\
&\quad \times \left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right]. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

On peut vérifier que par un prolongement par continuité de la variable σ de $[0, \pi]$ à $[0, 2\pi]$ la relation (1.74) reste valable de sorte que la longueur de l'intervalle σ passe de π à 2π . On peut alors introduire les intégrales $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \exp(il\sigma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \exp(im\sigma') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma'' \exp(in\sigma'')$ à gauche et à droite de la relation (2.58). Le membre de droite donnera (d'une part)

$$\begin{aligned}
B &= 2\alpha' \sqrt{2\alpha'} \sum_{l,m,n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma'' \exp(-i(l+m+n)\tau) \left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right] \\
&= 2\alpha' \sqrt{2\alpha'} \sum_{l,m,n} \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{1}{2\pi} 2\pi \exp(-i(l+m+n)\tau) \left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right] \\
&= 2\alpha' \sqrt{2\alpha'} \sum_{l,m,n} \exp(-i(l+m+n)\tau) \left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right], \tag{2.59}
\end{aligned}$$

et celui de gauche donnera (d'autre part)

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \tag{2.60}$$

avec

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{l,m,n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \exp(il\sigma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \exp(im\sigma') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma'' \exp(in\sigma'') a_1 \\
&= -4\pi \sqrt{2\alpha'} \alpha' i \eta^{ik} \sum_{n' \in z} \alpha_{n'}^j \exp(-in'\tau) \sum_{l,m,n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \exp(il\sigma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \exp(i(m-n')\sigma') \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma'' \exp(in\sigma'') \frac{d}{d\sigma''} \delta(\sigma - \sigma'').
\end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\sigma' \exp(i(m-n')\sigma') &= 2\pi \delta_{m-n,0}, \\
\int_0^{2\pi} d\sigma \exp(il\sigma) \delta(\sigma - \sigma'') &= \exp(il\sigma'').
\end{aligned}$$

Un calcul direct conduit au résultat suivant

$$B_1 = 2l\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_m^j \eta^{ik} \exp(-im\tau) \delta_{l+n,0}. \tag{2.61}$$

De même on trouvera les autres

$$B_2 = 2l\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^k \eta^{ij} \exp(-in\tau) \delta_{m+l,0}, \quad (2.62)$$

$$B_3 = -2m\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^k \eta^{ij} \exp(-in\tau) \delta_{l+m,0}, \quad (2.63)$$

$$B_4 = -2n\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_m^j \eta^{ik} \exp(-im\tau) \delta_{l+n,0}. \quad (2.64)$$

Le terme à gauche se simplifie sous la forme suivante

$$\begin{aligned} B &= 2(l-m)\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^k \eta^{ij} \exp(-in\tau) \delta_{m+l,0} + 2(l-n)\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_m^j \exp(-im\tau) \delta_{l+n,0} \\ &= 4l\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^k \eta^{ij} \exp(-in\tau) \delta_{m+l,0} + 4l\alpha' \sqrt{2\alpha'} \alpha_m^j \exp(-im\tau) \delta_{l+n,0}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

En égalisant les membres de droite et de gauche de la relation (2.59) et après intégration on obtient

$$\sum_{l,m,n} \exp(-i(l+m+n)\tau) \left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right] = 2l\eta^{ij} \alpha_n^k \exp(-in\tau) \delta_{m+l,0} + 2l\eta^{ik} \alpha_m^j \exp(-im\tau) \delta_{l+n,0}. \quad (2.66)$$

Ce qui conduit finalement à la relation

$$\left[\alpha_l^i, [\alpha_m^j, \alpha_n^k]_+ \right] = 2l\eta^{ij} \alpha_n^k \delta_{m+l,0} + 2l\eta^{ik} \alpha_m^j \delta_{l+n,0}. \quad (2.67)$$

Calcul de $\left[\alpha_l^i, [x_0^j, \alpha_m^k]_+ \right]$

De même que précédemment on note

$$C = \left[\left(\dot{X}^i + X'^i \right) (\tau, \sigma), \left[x_0^j, \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma') \right]_+ \right], \quad (2.68)$$

d'une part

$$\begin{aligned} C &= \left[\left(\dot{X}^i + X'^i \right) (\tau, \sigma), \left[x_0^j, \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma') \right]_+ \right] \\ &= \left[\dot{X}^i (\tau, \sigma), \left[x_0^j, \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma') \right]_+ \right] + \left[X'^i (\tau, \sigma), \left[x_0^j, \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma') \right]_+ \right] \\ &= \left[\dot{X}^i (\tau, \sigma), \left[x_0^j, \dot{X}^k (\tau, \sigma') \right]_+ + \left[x_0^j, \dot{X}^k (\tau, \sigma) \right]_+ \right] + \\ &\quad \left[X'^i (\tau, \sigma), \left[x_0^j, \dot{X}^k (\tau, \sigma') \right]_+ + \left[x_0^j, \dot{X}^k (\tau, \sigma') \right]_+ \right], \end{aligned} \quad (2.69)$$

qu'on posera (dans cet ordre) sous la forme

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \quad (2.70)$$

où

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \left[x_0^j, \dot{X}^k(\tau, \sigma') \right]_+ \right] \\
&= 2 \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), x_0^j \right] \dot{X}^k(\tau, \sigma') + 2 \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \dot{X}^k(\tau, \sigma') \right] x_0^j \\
&= 2\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-in\tau) \cos n\sigma \left[\alpha_n^\mu, x_0^j \right] \dot{X}^k(\tau, \sigma') \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), \dot{X}^k(\tau, \sigma') \right] x_0^j \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-in\tau) \cos n\sigma \left[\alpha_n^\mu, x_0^j \right] X'^k(\tau, \sigma') \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \left[\dot{X}^i(\tau, \sigma), X'^k(\tau, \sigma') \right] x_0^j \\
&= -2\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') x_0^j,
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
C_5 &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-in\tau) \sin n\sigma \left[\alpha_n^\mu, x_0^j \right] \dot{X}^k(\tau, \sigma') \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
C_6 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), \dot{X}^k(\tau, \sigma') \right] x_0^j \\
&= 2\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') x_0^j,
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
C_7 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), x_0^j \right] X'^k(\tau, \sigma') \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
C_8 &= \left[X'^i(\tau, \sigma), X'^k(\tau, \sigma') \right] x_0^j \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.78}$$

$$C = -8\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') x_0^j. \tag{2.79}$$

D'autre part

$$C = \sqrt{2\alpha'} \sum_{l,m} \exp(-il(\tau + \sigma)) \exp(-im(\tau + \sigma')) \left[\alpha_l^i, [x_0^j, \alpha_m^k]_+ \right] \tag{2.80}$$

De sorte que

$$-8\pi\alpha' i\eta^{ik} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') x_0^j = \sqrt{2\alpha'} \sum_{l,m} \exp(-il(\tau + \sigma)) \exp(-im(\tau + \sigma')) \left[\alpha_l^i, [x_0^j, \alpha_m^k]_+ \right], \tag{2.81}$$

Introduisons l'opérateur $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \exp(il\sigma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \exp(im\sigma')$ dans l'équation (2.81). Le terme à gauche donne

$$a = 4\alpha' m \eta^{ik} x_0^j \delta_{l+m,0}, \quad (2.82)$$

et le terme à droite donne

$$b = 2\alpha' \exp(-i(l+m)\tau) \left[\alpha_l^i, [x_0^j, \alpha_m^k]_+ \right]. \quad (2.83)$$

Ces deux dernières relations donnent le commutateur trilinéaire suivant

$$\left[\alpha_l^i, [x_0^j, \alpha_m^k]_+ \right] = 2m\eta^{ik} x_0^j \delta_{l+m,0}. \quad (2.84)$$

Calcul de $\left[x_0^i, [p^j, \alpha_n^k]_+ \right]$

Pour obtenir la relation trilinéaire $\left[x_0^i, [p^j, \alpha_n^k]_+ \right]$ on va calculer la relation suivante

$$D = \left[x_0^i, \left[p^j, \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma) \right]_+ \right]. \quad (2.85)$$

La simplification de cette relation donne :

$$\begin{aligned} D &= \left[x_0^i, \left[p^j, \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma) \right]_+ \right] \\ &= \left[x_0^i, \left[p^j, \dot{X}^k (\tau, \sigma) \right]_+ \right] + \left[x_0^i, \left[p^j, X'^k (\tau, \sigma) \right]_+ \right] \\ &= 2 \left[x_0^i, p^j \right] \dot{X}^k (\tau, \sigma) + 2 \left[x_0^i, \dot{X}^k (\tau, \sigma) \right] p^j + 2 \left[x_0^i, p^j \right] X'^k (\tau, \sigma) + 2 \left[x_0^i, X'^k (\tau, \sigma) \right] p^j \\ &= 2i\eta^{ij} \left(\dot{X}^k + X'^k \right) (\tau, \sigma) \\ &= 2i\eta^{ij} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^k \exp(-in(\tau + \sigma)). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Utilisons l'équation (1.68) dans (2.85) on trouve

$$D = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-in(\tau + \sigma)) \left[x_0^i, [p^j, \alpha_n^k]_+ \right], \quad (2.87)$$

de sorte que

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-in(\tau + \sigma)) \left[x_0^i, [p^j, \alpha_n^k]_+ \right] = 2i\eta^{ij} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^k \exp(-in(\tau + \sigma)), \quad (2.88)$$

qui donne finalement

$$\left[x_0^i, [p^j, \alpha_n^k]_+ \right] = 2i\eta^{ij} \alpha_n^k. \quad (2.89)$$

On trouvera de même toutes les autres relations trilineaires qui seront regroupées comme suit

$$\left[x^i, [p^j, A]_+ \right] = 2i\delta^{ij} A, \quad (2.90)$$

$$\left[x^-, [p^+, B]_+ \right] = 2iB, \quad (2.91)$$

$$\left[\alpha_n^i, [\alpha_m^j, C]_+ \right] = 2n\delta_{n+m,0}\delta^{ij}C, \quad (2.92)$$

où A , B , et C sont données par

$$A = x^i, x^- \text{ et } p^+.$$

$$B = x^i, x^-, p^j, p^+ \text{ et } \alpha_n^i.$$

$$C = p^i, x^- \text{ et } p^+.$$

En appliquant la décomposition de Green

$$x^i = \sum_{\alpha=1}^Q x^{i(\alpha)} \quad , \quad p^i = \sum_{\alpha=1}^Q p^{i(\alpha)} \quad , \quad \alpha_n^i = \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_n^{i(\beta)} \quad , \quad x^- = \sum_{\alpha=1}^Q x^{i-(\alpha)} \quad , \quad p^+ = \sum_{\alpha=1}^Q p^{+(\alpha)}, \quad (2.93)$$

On obtient les relations bilinéaires de type anormal suivantes

$$\left[x^{i(\alpha)}, p^{j(\alpha)} \right] = i\delta^{ij} \quad ; \quad \left[x^{i(\alpha)}, p^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta, \quad (2.94)$$

$$\left[x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)} \right] = i \quad ; \quad \left[x^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta, \quad (2.95)$$

$$\left[\alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\alpha)} \right] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta, \quad (2.96)$$

et tous les autres commutateurs (et anticommutateurs) du type $[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}] = 0$ (et $[A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}]_+ = 0$, pour $\alpha \neq \beta$).

2.2.2 Opérateur de masse

Dans ce formalisme, le problème d'ambiguïté d'ordre qui sera dans le générateur l_0 se traite par l'utilisation de la décomposition de Green dans (1.96)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^i \alpha_{-p}^i &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \left[\alpha_p^{i(\alpha)}, \alpha_{-p}^{i(\alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i - \frac{Q(D-2)}{24}. \end{aligned}$$

L'expression de l_0 devient

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i - \frac{Q(D-2)}{24} \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\alpha_{-p}^i, \alpha_p^i]_+, \end{aligned} \quad (2.97)$$

de sorte que

$$\sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^{i(\alpha)} \alpha_p^{i(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} [\alpha_{-p}^{i(\alpha)}, \alpha_p^{i(\alpha)}]_+ - \frac{1}{2} p \right), \quad (2.98)$$

et donc l'opérateur de masse sous la forme symétrisée s'écrit comme

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [\alpha_{-p}^i, \alpha_p^i]_+ \right]. \quad (2.99)$$

2.2.3 Spectre

Etat fondamental

$$\begin{aligned} M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle &= \frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \frac{Q(D-2)}{24} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \end{aligned}$$

$|p^+, \vec{p}_T\rangle$ représente un état tachyonique.

1^{er} niveau excité

$$M^2 (\alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle) = \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 1 \right] (\alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle),$$

qui représente un état vectoriel sans masse.

2^{ème} niveau excité

Ce niveau contient à priori trois types d'états : $\alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle$, $\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle$, $\alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle$

$$M^2 (\alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle) = \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 2 \right] (\alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle).$$

Remarquons néanmoins que pour les deux autres (qui sont identiques dans le cas quantique), leurs masses étant la même

$$M^2 (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle) = \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 2 \right] (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle).$$

La symétrisation de l'opérateur de masse suggère aussi celle des états, de sorte que les deux derniers sont regroupés en un seul sous la forme

$$\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle,$$

avec

$$M^2 \left(\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 2 \right] \left(\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right).$$

Les masse de ces états sont équivalentes à celles du cas ordinaire quand $Q = 1$ et $D = 26$.

2.2.4 Dégénérescence

1^{er} niveau excité

Type d'état	Nombre
$\alpha_{-1}^i p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D-2)$

Le nombre total des états est

$$d(1) = (D-2),$$

D	26	14	10	8	6	5	4
1 ^{er} niveau excité	24	12	8	6	4	3	2

2^{ème} niveau excité

Type d'état	Nombre
$\alpha_{-2}^i p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D-2)$
$\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+ p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)$

Le nombre total des états est

$$d(2) = \frac{1}{2}(D-2)(D+1),$$

D	26	14	10	8	6	5	4
2 ^{ème} niveau excité	324	90	44	27	14	9	5

3^{ème} niveau excité

Type d'état	Nombre
$\alpha_{-3}^i p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D-2)$
$\langle \alpha_{-2}^i, \alpha_{-1}^j p^+, \vec{p}_T\rangle \leftrightarrow \frac{1}{2} [\alpha_{-2}^i, \alpha_{-1}^j]_+ p^+, \vec{p}_T\rangle$	$(D-2)^2$
$\langle \alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k p^+, \vec{p}_T\rangle \leftrightarrow \frac{1}{3!} \alpha_{-1}^{(i} \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^{k)}$	$(D-2) + (D-2)(D-3) + \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{3!}$

Ici, on utilise une nouvelle notation $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ qui définit le produit symétrisé (où antisymétrisé) d'opérateurs de sorte que [16]

$$\langle \alpha_{-n}^{i_1}, \alpha_{-n}^{i_2}, \dots, \alpha_{-n}^{i_p} \rangle = \frac{1}{p!} \alpha_{-n}^{(i_1} \alpha_{-n}^{i_2} \dots \alpha_{-n}^{i_p)}. \quad (2.100)$$

Le nombre total des états est

$$d(3) = (D-2) \left[1 + 2(D-2) + \frac{(D-3)(D-4)}{6} \right],$$

D	26	14	10	8	6	5	4
3 ^{ème} niveau excité	3200	520	192	98	36	22	10

2.2.5 Fonction de partition

$$f(x) = \text{Tr} x^N,$$

on définit l'opérateur N comme suite

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} n N_n^i \\ &= \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} [a_n^\dagger, a_n]_+ - \frac{Q}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.101)$$

où N_n^i est le nombre d'occupations du niveau excité caractérisé par n . Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \langle n | [a^\dagger, a]_+ | n \rangle &= \sum_{n'} \{ \langle n | a | n' \rangle \langle n' | a^\dagger | n \rangle + \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \} \\ &= |a_{n,n+1}|^2 + |a_{n-1,n}|^2. \end{aligned} \quad (2.102)$$

De les équations (1.126, 1.129, 1.131 et 2.101) nous déduisons que

$$\langle n | [a^\dagger, a]_+ | n \rangle = Q + 2n, \quad (2.103)$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{n=1}^{\infty} x^{\sum_{\alpha=1}^Q n^{n'} \left(\frac{1}{2} [a_n^{\dagger(\alpha)}, a_n^{i(\alpha)}]_+ - \frac{Q}{2} \right) | n' \rangle} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{\alpha=1}^Q \sum_{n'=0}^{\infty} x^{n \frac{1}{2} (Q+2n') - n \frac{Q}{2}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{D-2}. \end{aligned}$$

Utilisons la relation qui relie la dimension d'espace-temps D et l'ordre de la paraquantification Q et qui donnée par [7]

$$D - 2 = \frac{24}{Q}. \quad (2.104)$$

La fonction de partition devient

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - x^n} \right)^{\frac{24}{Q}}, \quad (2.105)$$

Q	D	$f(x)$
1	26	$1 + 24x + 324x^2 + 3200x^3 + \dots$
2	14	$1 + 12x + 90x^2 + 520x^3 + \dots$
3	10	$1 + 8x + 44x^2 + 192x^3 + \dots$
4	8	$1 + 6x + 27x^2 + 98x^3 + \dots$
6	6	$1 + 4x + 14x^2 + 36x^3 + \dots$
8	5	$1 + 3x + 9x^2 + 22x^3 + \dots$
12	4	$1 + 2x + 5x^2 + 10x^3 + \dots$

Remarquons bien que les coefficients de ces fonctions sont identiques à ceux donnés par le degré de dégénérescence de chaque niveau excité.

Chapitre 3

Configurations de cordes ouvertes sur des D-branes

3.1 Introduction

Les équations du mouvement pour la surface d'univers demandent l'annulation des variations du terme intégral bidimensionnel et du terme de bord, donnant ainsi à la fois les équations du mouvement et les conditions aux bords, qui définissent les points de l'espace-temps auxquels les extrémités des cordes ouvertes sont attachées. L'ensemble de ces points forme une membrane, dite de Dirichlet, ou D-brane. En se propageant dans la direction temporelle, une D-brane de dimension p , ou D p -brane, engendre un volume d'univers, de dimension $p + 1$.

Par extension, on considère que lorsqu'on a des conditions aux bords de Neumann sur toutes les coordonnées, on a affaire à une D25-brane remplissant tout l'espace-temps.

Dans ce chapitre, on s'intéressera à l'étude de trois configurations de cordes ouvertes sur des D p -branes à savoir : une corde sur une D p -brane, une corde entre deux D p -branes parallèles et enfin une corde entre deux D p -, D q -branes parallèles.

3.2 La corde bosonique ouverte sur une D p -brane

En présence d'un objet étendu de dimension $p + 1$, les coordonnées bosoniques vérifient des conditions aux bords de type Neumann pour les indices $i = 2, \dots, p$ et de type Dirichlet

pour les $d - p$ coordonnées transverses $X^{a=p+1, \dots, d}$. Les coordonnées de la corde $X^{i=2, \dots, p}$, dites tangentielles, vérifient les conditions de Neumann aux deux extrémités libres de la corde (dites du type NN)

$$X'^i(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=0} = X'^i(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=\pi} = 0 \quad , \quad i = 2, \dots, p \quad (3.1)$$

Les coordonnées X^a vérifiant des conditions de Dirichlet aux deux extrémités de la corde (dites du type DD) se décomposent comme suit (Annexe A.b)

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a \exp(-in\tau) \sin n\sigma. \quad (3.2)$$

Ces coordonnées dites aussi normales satisfont les conditions aux bords de Dirichlet

$$X^a(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=0} = X^a(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=\pi} = \bar{x}^a \quad , \quad a = p + 1, \dots, d \quad (3.3)$$

remarquons que dans l'équation (3.2) le moment a disparu et donc les modes zéro ($\alpha_0^a = \sqrt{2\alpha'} p^a$), et les relations de commutations sont données par

$$\left[X^a(\tau, \sigma), \dot{X}^b(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.4)$$

qui seront équivalentes à

$$[\alpha_m^a, \alpha_n^b] = m\delta^{ab} \delta_{m+n,0} \quad , \quad m, n \neq 0. \quad (3.5)$$

3.2.1 Opérateur de masse

De la même façon que dans le cas des cordes ordinaires, le calcul de l_0 est similaire sauf que ici nous avons deux directions tangentielle et normale et donc deux types de modes de vibration

$$l_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^a \alpha_p^a + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^i \alpha_{-p}^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^a \alpha_{-p}^a, \quad (3.6)$$

introduisons l'ordre normal dans cette expression. Pour les modes de type NN on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^i \alpha_{-p}^i &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^i \alpha_p^i + [\alpha_p^i, \alpha_{-p}^i]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{ii} \delta_{p-p,0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i - \frac{(p-1)}{24}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

de même pour les modes de type DD

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^a \alpha_{-p}^a &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^a \alpha_p^a + [\alpha_p^a, \alpha_{-p}^a]) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^a \alpha_p^a + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{aa} \delta_{p-p,0} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^a \alpha_p^a - \frac{(d-p)}{24},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$l_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^a \alpha_p^a - \frac{(d-1)}{24}, \tag{3.9}$$

ici d dénote la dimension d'espace où $D = d + 1$ et $D = 26$, donc

$$l_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^i \alpha_p^i + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^a \alpha_p^a - 1, \tag{3.10}$$

l'opérateur de masse est donné par

$$\begin{aligned}
 M_1^2 &= 2p^+ p^- - p^i p^i \\
 &= \frac{1}{\alpha'} (l_0 + a) - p^i p^i \\
 &= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{\dagger i} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{\dagger a} a_m^a \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha'} (-1 + N_i + N_a).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2.2 Spectre et Dégénérescence

Etat fondamental

$$\begin{aligned}
 M_1^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle &= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{\dagger i} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{\dagger a} a_m^a \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
 &= -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle \rightarrow \text{état tachyonique.}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

1^{er} niveau excité

Ce niveau contient deux types d'états

$$\begin{aligned}
 a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad j &= 2, \dots, p \\
 a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad b &= p+1, \dots, d
 \end{aligned}$$

$$M_1^2 \left(a_1^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = 0, \quad (3.13)$$

de telle sorte que

$$[a^a, a^{j\dagger}] = 0, \quad (3.14)$$

et

$$M_1^2 \left(a_1^{b\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = 0, \quad (3.15)$$

de telle sorte que

$$[a^i, a^{b\dagger}] = 0. \quad (3.16)$$

Les deux états sont de masse nulle, sauf que, $a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ est un état photonique qui sera associé au champ de Maxwell sur la brane alors que $a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ est un scalaire dans la direction normale.

2^{ème} niveau excité

Les états de ce niveau sont

$$a_2^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, a_2^{b\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \left(a_1^{b\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \left(a_1^{b\dagger} a_1^{c\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \left(a_1^{j\dagger} a_1^{k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right)$$

$$M_1^2 a_2^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} a_2^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.17)$$

$$M_1^2 a_2^{b\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} a_2^{b\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.18)$$

$$M_1^2 \left(a_1^{b\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(a_1^{b\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \quad (3.19)$$

$$M_1^2 \left(a_1^{b\dagger} a_1^{c\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(a_1^{b\dagger} a_1^{c\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \quad (3.20)$$

$$M_1^2 \left(a_1^{j\dagger} a_1^{k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(a_1^{j\dagger} a_1^{k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right). \quad (3.21)$$

Ces états physiques représentent aussi bien des champs scalaires que des champs vectoriels à la différence du cas de la corde ordinaire qui contient seulement des champs vectoriels.

Calculons maintenant la dégénérescence de chaque niveau.

Etat fondamental

L'état fondamental n'a pas de dégénérescence, donc le nombre des états est égal à 1.

1^{er} niveau excité

$$a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \rightarrow \alpha_S = (d - p), \quad (3.22)$$

$$a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \rightarrow \alpha_V = (p - 1). \quad (3.23)$$

2^{ème} niveau excité

$$\left\{ a_2^{\dagger a}, a_1^{\dagger a} a_1^{\dagger b} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_S = (d-p) + \frac{(d-p)(d-p-1)}{2} + (d-p), \quad (3.24)$$

$$\left\{ a_2^{\dagger i}, a_1^{\dagger i} a_1^{\dagger a} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_V = (p-1) + (d-p)(p-1), \quad (3.25)$$

$$a_1^{\dagger i} a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_{T_2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + (p-1). \quad (3.26)$$

3^{ème} niveau excité

$$\left\{ \begin{array}{c} a_3^{\dagger a} \\ a_2^{\dagger a} a_1^{\dagger b} \\ a_1^{\dagger a} a_1^{\dagger b} a_1^{\dagger c} \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \gamma_S = \left\{ \begin{array}{c} (d-p) + (d-p)^2 + (d-p) + (d-p)(d-p-1) \\ + \frac{(d-p)(d-p-1)(d-p-2)}{6} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_3^{\dagger i} \\ a_2^{\dagger a} a_1^{\dagger i} \\ a_1^{\dagger a} a_2^{\dagger i} \\ a_1^{\dagger i} a_1^{\dagger a} a_1^{\dagger b} \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \gamma_V = (p-1) + 3(d-p)(p-1) + (p-1) \frac{(d-p)(d-p-1)}{2},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_2^{\dagger i} a_1^{\dagger j} \\ a_1^{\dagger i} a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger a} \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \gamma_{T_2} = (p-1)^2 + (d-p)(p-1) + (d-p) \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

$$a_1^{\dagger i} a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \gamma_{T_3} = (p-1) + (p-1)(p-2) + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{6}.$$

Pour les trois premiers niveaux excités, les dégénérescences totales sont regroupées dans le tableau suivant :

0	1	2	3
1	$\alpha_{tot} = d - 1$	$\beta_{tot} = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d^2 - 1$	$\gamma_{tot} = -\frac{7}{6}d + \frac{1}{6}d^3 + d^2$

Tableau 2

avec

$$\alpha_{tot} = \alpha_S + \alpha_V,$$

$$\beta_{tot} = \beta_S + \beta_V + \beta_{T_2},$$

$$\gamma_{tot} = \gamma_S + \gamma_V + \gamma_{T_2} + \gamma_{T_3},$$

et

S : Scalaire, V : Vecteur, T_2, T_3 : Tenseurs.

3.2.3 Fonction de partition

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n'_i, n'_a} x^{\langle n'_i, n'_a | N_i + N_a | n'_i, n'_a \rangle} \\
 &= \sum_{n'_i=0}^{\infty} \sum_{n'_a=0}^{\infty} \left[x^{\langle n'_i, n'_a | \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{\dagger i} a_n^i | n'_i, n'_a \rangle} x^{\langle n'_i, n'_a | \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d n a_n^{\dagger a} a_n^a | n'_i, n'_a \rangle} \right] \\
 &= \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^p \sum_{n'_i=0}^{\infty} x^{n n'_i} \right] \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d \sum_{n'_a=0}^{\infty} x^{n n'_a} \right] \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{p-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{d-p}, \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

le développement de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$ donne

$$f(x) = 1 + (d-1)x + \left(\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d^2 - 1 \right)x^2 + \left(-\frac{7}{6}d + \frac{1}{6}d^3 + d^2 \right)x^3 + \dots \tag{3.28}$$

Les coefficients de cette fonction sont exactement les mêmes que ceux obtenus dans le tableau 2, ce qui prouve la cohérence de ce modèle.

3.3 La corde bosonique ouverte entre deux Dp-branes en parallèle

Dans ce cas où la corde ouverte est entre deux Dp-branes en parallèles (Figure 1) [1], quatre secteurs caractérisent la position des extrémités de la corde notés $[ij]$ où $i, j = 1, 2$ (1 pour la première brane et 2 pour la deuxième brane)

La décomposition des coordonnées de type DD s'écrit comme suit (Annexe A.c)

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a \exp(-in\tau) \sin n\sigma. \tag{3.29}$$

Ces coordonnées satisfont les conditions aux bords de Dirichlet

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = \bar{x}_1^a \quad , \quad X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^a \quad , \quad a = p+1, \dots, d \tag{3.30}$$

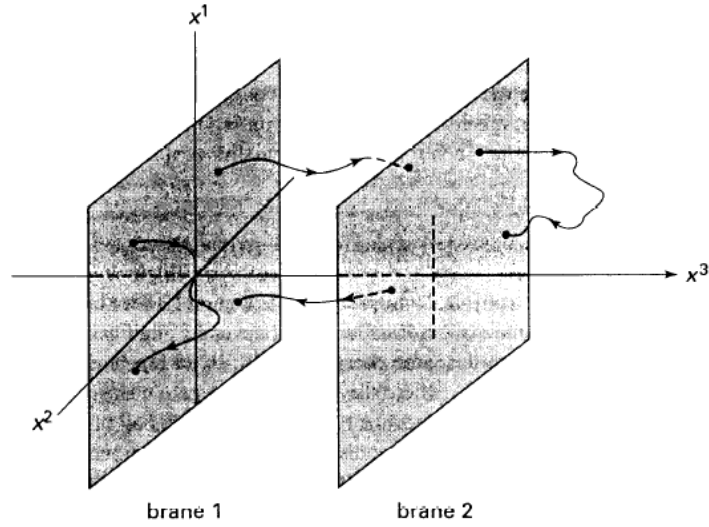


Figure 1 : une corde entre deux Dp-branes en parallèles.

Les constantes \bar{x}_1^a et \bar{x}_2^a fixent seulement les D-branes (ne participent pas à la fluctuation de la corde ouverte) et la séparation $(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)$ représente la distance entre les deux extrémités $\sigma = 0$ et $\sigma = \pi$ [1]. Notons que le développement se fait en modes entiers.

3.3.1 Opérateur de masse

La masse d'un état excité bosonique est donnée par

$$M_{||}^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + M_{||}^2, \quad (3.31)$$

où $\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2$ est le décalage de l'opérateur de masse dans le sens positif.

3.3.2 Spectre

L'état de la corde prend la forme $|p^+, \vec{p}_T; [ij]\rangle$ où $[ij]$ est le secteur de la corde sur les deux branes de sorte que $i, j = 1, 2$.

Maintenant et pour la suite on considérera uniquement le secteur $[12]$.

Etat fondamental

$$\begin{aligned} M_{||}^2 |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle &= \left[\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + M_{||}^2 \right] |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \\ &= \left[\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 - \frac{1}{\alpha'} \right] |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si la séparation entre les deux branes disparaît, on obtient l'état tachyonique habituel. Si les deux branes sont séparées par la distance particulière suivante :

$$\frac{|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a|}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \Rightarrow |\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 2\pi\sqrt{\alpha'}, \quad (3.33)$$

alors, dans ce cas, on obtient un état qui représente un champ scalaire sans masse (élimination du tachyon). Pour une large séparation, l'état fondamental représente un champ scalaire avec masse.

1^{er} niveau excité

L'état $a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle$

$$M_{||}^2 \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right) = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right) \quad (3.34)$$

l'état $\left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right)$ représente un état vectoriel avec masse .

L'état $a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle$

$$M_{||}^2 \left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right) = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 \left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right), \quad (3.35)$$

l'état $\left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right)$ représente un scalaire avec masse.

2^{ème} niveau excité

Nous caractérisons trois types d'états : $a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle$, $a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle$, $a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle$

$$M^2 \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right) = \left[\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \right] \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right), \quad (3.36)$$

$$M^2 \left(a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right) = \left[\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \right] \left(a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right), \quad (3.37)$$

$$M^2 \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right) = \left[\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \right] \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle \right). \quad (3.38)$$

Le décalage de l'opérateur de masse a pour conséquence une théorie :

- sans tachyon.
- sans état vectoriel de masse nulle.
- avec des champs scalaires.

Remarque

On observe que la définition de l'opérateur N est la même que celle dans le cas d'une corde sur une Dp-brane et donc nous trouvons la même fonction de partition et la même dégénérescence, sauf qu'ici, l'état fondamental est défini par $|p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle$.

3.4 La corde bosonique ouverte entre deux Dp-, Dq-branes en parallèle

Dans cette section nous étudions la configuration de deux D-branes en parallèles de dimensions différentes (Figure 2) [1]. Il s'agit d'une théorie de corde bosonique entre deux Dp-, Dq-branes en parallèle où p et q sont des entiers vérifiant $1 \leq q < p \leq 25$.

Dans les deux cas précédents, deux types de coordonnées ont été introduites, celles de Neumann-Neumann NN et celles de Dirichlet-Dirichlet DD .

Dans le cas présent, un troisième type de coordonnées sont introduites appelées Neumann-Dirichlet ND , qu'on notera X^r où $r = \overline{q+1, p}$ sachant que l'indice i de coordonnées NN prend les valeurs de 2 jusqu'à q et l'indice a de coordonnées DD prend les valeurs de $p+1$ jusqu'à d .

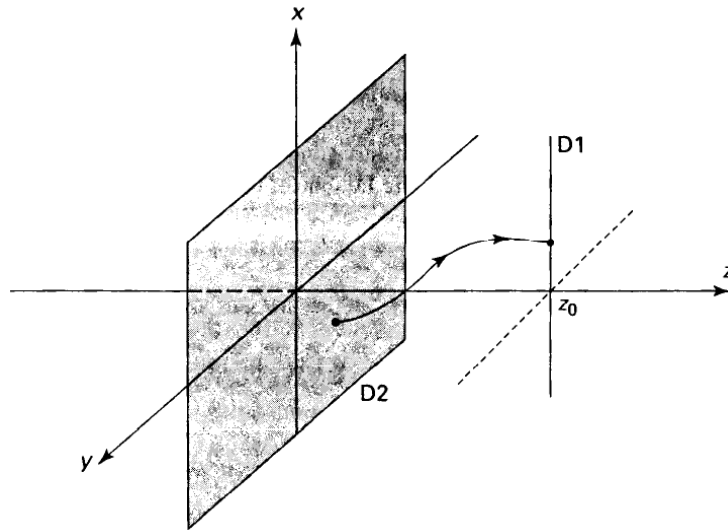


Figure 2 : une corde entre deux Dp-, Dq-branes en parallèle.

La figure ci-dessus illustre que les coordonnées suivant la direction x sont des coordonnées tangentielles de type NN , les coordonnées suivant la direction y sont des coordonnées mixtes

de type ND (N à $\sigma = 0$ car y est tangente à la D2-brane et D à $\sigma = \pi$ car y est normale à la D1-brane) et les coordonnées suivant la direction z sont des coordonnées normales aux deux branes donc de type DD . Ici, la position de la Dp-brane est spécifiée par les coordonnées \bar{x}_1^a et la Dq-brane est spécifié par les coordonnées \bar{x}_2^r et \bar{x}_2^a .

Dans le cas des coordonnées mixtes ND , les conditions aux bords sont

$$\left. \frac{\partial X^r}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=0} = 0 \quad , \quad X^r(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^r, \quad (3.39)$$

La particularité de la mixité des conditions aux bords conduit à une expansion en modes appropriée donnée par la relation

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in z_{odd}} \frac{2}{n} \alpha_n^r \exp\left(-i\frac{n}{2}\tau\right) \cos\left(\frac{n}{2}\sigma\right), \quad (3.40)$$

où la sommation sur n porte uniquement sur les entiers impaires, ce qui implique des indices demi entiers pour les modes de vibration (Annexe A.d).

Néanmoins l'expression de

$$\dot{X}^r(\sigma, \tau) \pm \dot{X}^r(\sigma, \tau) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in z_{odd}} \alpha_n^r \exp\left(-i\frac{n}{2}(\tau \pm \sigma)\right), \quad (3.41)$$

reste identique à celle des composantes a ou i de sorte qu'à partir du commutateur

$$\left[X^r(\tau, \sigma), \dot{X}^s(\tau, \sigma') \right] = i(2\pi\alpha') \delta(\sigma - \sigma') \delta^{rs}, \quad (3.42)$$

on démontre la relation

$$\left[\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{\frac{n}{2}}^s \right] = \frac{m}{2} \delta^{rs} \delta_{m+n,0}. \quad (3.43)$$

3.4.1 Opérateur de masse

L'opérateur de masse reçoit des contributions de tous les types de coordonnées : NN , ND et DD . l'expression du produit $2p^+p^-$ prend la forme

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + a_{NN} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^a \alpha_n^a + a_{DD} + \sum_{m \in z_{odd}^+} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + a_{ND} \right). \quad (3.44)$$

Les contributions a_{NN} et a_{DD} se retrouvent comme dans le cas habituel où $i = \overline{2, q}$ (pour les coordonnées NN) et $a = \overline{p+1, d}$ (pour les coordonnées DD), de sorte que

$$a_{NN} = -\frac{(q-1)}{24}, \quad (3.45)$$

$$a_{DD} = -\frac{(d-p)}{24}. \quad (3.46)$$

Il reste à calculer la contribution a_{ND} , à partir du développement suivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m \in z_{odd}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r &= \sum_{m \in z_{odd}^+} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + \frac{1}{2} \sum_{m \in z_{odd}^+} \left[\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \right] \\ &= \sum_{m \in z_{odd}^+} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + \frac{1}{4} (p-q) \sum_{m \in z_{odd}^+} m, \end{aligned} \quad (3.47)$$

la sommation sur les entiers impaires se calcule de la manière suivante

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n &= \sum_{n \in z_{odd}^+} n + \sum_{n \in z_{even}^+} n \\ &= \sum_{n \in z_{odd}^+} n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \\ \Rightarrow \sum_{n \in z_{odd}^+} n &= - \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m \in z_{odd}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r &= \sum_{m \in z_{odd}^+} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + \frac{1}{48} (p-q) \\ &= \sum_{m \in z_{odd}^+} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + a_{ND}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Finalement on obtient l'expression de l'opérateur de masse sous la forme suivante :

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(N - \frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) \right), \quad (3.49)$$

où

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q n a_n^{i+} a_n^i + \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \frac{k}{2} a_{\frac{k}{2}}^{r+} a_{\frac{k}{2}}^r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a+} a_m^a \quad (3.50)$$

$$= N_i + N_r + N_a. \quad (3.51)$$

3.4.2 Spectre et dégénérescence

on se propose de déterminer la nature des états physiques (scalaire, vecteur, tenseur) et leurs dégénérescences pour les premiers niveaux de masse excités. Ces états sont représentés comme suit

Niveau 0

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) \right] \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.52)$$

Où, à partir de maintenant, on notera $|p^+, \vec{p}_T; [12]\rangle = |p^+, \vec{p}_T\rangle$. L'état fondamental correspond à un champ scalaire sur la Dq-brane. Ce scalaire est en général massif, mais peut être tachyonique où sans masse suivant la séparation entre les branes et la valeur $(p-q)$.

Niveau 1

$$M^2 \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) + \frac{1}{2} \right] \right\} \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \alpha_S = (p-q).$$

Niveau 2

$$M^2 \left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) + 1 \right] \right\} \left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) + 1 \right] \right\} \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) + 1 \right] \right\} \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$\left\{ a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_S = (d-p) + \frac{(p-q)(p-q-1)}{2} + (p-q),$$

$$a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_V = (q-1).$$

Niveau 3

$$\begin{aligned}
M^2 \left(a_1^{\dagger b} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} E \right\} \left(a_1^{\dagger b} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} E \right\} \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_{\frac{3}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} E \right\} \left(a_{\frac{3}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_1^{\dagger j} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} E \right\} \left(a_1^{\dagger j} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),
\end{aligned}$$

où $E = \left[-\frac{1}{24}(d-1) + \frac{1}{16}(p-q) + \frac{3}{2} \right]$.

$$\begin{aligned}
\left\{ a_1^{\dagger b} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u}, a_{\frac{3}{2}}^{\dagger s} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle &\longrightarrow \gamma_S = \left\{ \begin{aligned} &(p-q) + (p-q)(p-q-1) + \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6} \\ &+(d-p)(p-q) + (p-q) \end{aligned} \right\}, \\
a_1^{\dagger j} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle &\longrightarrow \gamma_V = (q-1)(p-q).
\end{aligned}$$

Niveau 4

$$\begin{aligned}
M^2 \left(a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_1^{\dagger b} a_1^{\dagger c} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_1^{\dagger b} a_1^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger v} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger v} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{3}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{3}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_1^{\dagger j} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_1^{\dagger j} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_1^{+b} a_{\frac{1}{2}}^{+s} a_{\frac{1}{2}}^{+t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} F \right\} \left(a_1^{+b} a_{\frac{1}{2}}^{+s} a_{\frac{1}{2}}^{+t} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),
\end{aligned}$$

où $F = -\frac{1}{24}(d-1) + \frac{1}{16}(p-q) + 2$.

$$\left\{ \begin{array}{c} a_2^{\dagger b} \\ a_1^{\dagger b} a_1^{\dagger c} \\ a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger v} \\ a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{3}{2}}^{\dagger t} \\ a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} a_1^{\dagger b} \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \delta_S = \left\{ \begin{array}{c} (d-p) + (d-p) + \frac{(d-p)(d-p-1)}{2} \\ + (p-q) + (p-q)(p-q-1) \\ + \frac{(p-q)(p-q-1)}{2} + \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6} \\ + \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{24} + (p-q)^2 \\ + (d-p)(p-q) + (d-p)\frac{(p-q)(p-q-1)}{2} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_2^{\dagger j} \\ a_1^{\dagger j} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \\ a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger b} \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \delta_V = \left\{ \begin{array}{c} (q-1) + (q-1)(p-q) + (q-1)\frac{(p-q)(p-q-1)}{2} \\ + (q-1)(d-p) \end{array} \right\},$$

$$a_1^{\dagger j} a_1^{\dagger k} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \delta_{T_2} = (q-1) + \frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

Pour une large séparation, la masse de chaque niveau est toujours positive et les états sont des scalaires où des vecteurs selon les différents type des indices. En particulier, nous n'avons aucun champ de jauge non massif. Les nombres des états pour chaque niveau sont regroupées dans le tableau suivant

0	1	2	3	4
1	$\alpha_{tot} = (p-q)$	$\beta_{tot} = d + \frac{1}{2}p^2$ $-pq - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q^2$ $+\frac{1}{2}q - 1$	$\gamma_{tot} = \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}q - \frac{1}{2}p^2$ $+pq - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}p^3$ $-\frac{1}{2}p^2q + \frac{1}{2}pq^2 - \frac{1}{6}q^3$ $+dp - dq$	$\delta_{tot} = -1 - \frac{23}{12}p + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}dq^2 - \frac{1}{2}dq$ $+\frac{83}{24}p^2 - dpq - \frac{7}{12}p^3 - \frac{1}{12}q^3 + \frac{5}{4}p^2q + \frac{1}{24}q^4$ $+\frac{1}{24}p^4 - \frac{1}{6}pq^3 - \frac{1}{6}p^3q + \frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{3}{4}pq^2$ $+\frac{23}{12}q - \frac{77}{12}pq + \frac{71}{12}q^2 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}dp^2$

Tableau 3

3.4.3 Fonction de partition

Il s'agit maintenant de confronter les résultats du tableau ci dessus à la fonction de partition pour vérifier la cohérence de ce modèle.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= Tr x^N = \sum_{n'_i, n'_r, n'_a} x^{\langle n'_i, n'_r, n'_a | N_i + N_r + N_a | n'_i, n'_r, n'_a \rangle} \\
 &= \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^q \sum_{n'_i=0}^{\infty} x^{nn'_i} \right] \left[\prod_{n \in z_{odd}^+} \prod_{r=q+1}^p \sum_{n'_r=0}^{\infty} x^{\frac{n}{2}n'_r} \right] \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d \sum_{n'_a=0}^{\infty} x^{nn'_a} \right] \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{q-1} \prod_{n \in z_{odd}^+} \left(\frac{1}{1-x^{\frac{n}{2}}} \right)^{p-q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{d-p} \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{q-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^n}{1-x^{\frac{n}{2}}} \right)^{p-q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{d-p}, \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

où après quelques manipulations le produit sur les entiers impaires se ramène à un produit sur des entiers.

Faisons un développement de $f(x)$, en posant $X = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 f(X) &= 1 + (p-q)X + \left(d + \frac{1}{2}p^2 - pq - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q - 1 \right) X^2 + \left(\frac{1}{3}p - \frac{1}{3}q - \frac{1}{2}p^2 + pq \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{2}p^2q + \frac{1}{2}pq^2 - \frac{1}{6}q^3 + dp - dq \right) X^3 + \left(-1 - \frac{23}{12}p + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}dq^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}dq + \frac{83}{24}p^2 - dpq - \frac{7}{12}p^3 + \frac{1}{12}q^3 + \frac{5}{4}p^2q + \frac{1}{24}q^4 - \frac{1}{6}pq^3 - \frac{1}{6}p^3q + \frac{1}{4}p^2q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{24}p^4 - \frac{3}{4}pq^2 + \frac{23}{12}q - \frac{77}{12}pq + \frac{71}{12}q^2 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}dp^2 \right) X^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Les coefficients de ce polynôme correspondent exactement aux degrés de dégénérescence obtenus dans le tableau 3.

Si $p = q$ on obtient

$$f(X) = 1 + (d-1)X^2 + \left(\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d^2 - 1 \right) X^4 + \dots$$

et lorsque $d = 25$ la fonction de partition est celle d'une corde ordinaire

$$f(X) = 1 + 24X^2 + 324X^4 + \dots$$

3.4.4 Algèbre de Virasoro

Considérons les générateurs de Virasoro décomposés suivant les types de coordonnées NN, DD, ND

$$l_n^{tot} = l_n^{NN} + l_n^{ND} + l_n^{DD}, \quad (3.54)$$

où

$$l_n^{NN} = \frac{1}{2} \sum_{p \in z} \alpha_{n-p}^i \alpha_{p,i}, \quad n \neq 0, \quad (3.55)$$

$$l_n^{DD} = \frac{1}{2} \sum_{p \in z} \alpha_{n-p}^a \alpha_{p,a}, \quad n \neq 0, \quad (3.56)$$

$$l_n^{ND} = \frac{1}{2} \sum_{p \in z_{odd}} \alpha_{n-\frac{p}{2}}^r \alpha_{\frac{p}{2},r}, \quad n \neq 0. \quad (3.57)$$

Le calcul de l'algèbre de Virasoro demande la détermination des commutateurs suivants : $[l_n^{NN}, l_m^{NN}]$, $[l_n^{ND}, l_m^{ND}]$ et $[l_n^{DD}, l_m^{DD}]$ (tous les commutateurs mixtes sont nuls).

Remarque

Le calcul des deux premiers commutateurs $[l_n^{NN}, l_m^{NN}]$ et $[l_n^{DD}, l_m^{DD}]$ est exactement identique à celui de (1.60), à la différence maintenant que pour les coordonnées NN, $i = \overline{2, q}$ et pour celles DD, $a = \overline{p+1, d}$. Il suffit alors de faire la substitution

$$\frac{D}{12} \rightarrow \frac{(q-1)}{12} \quad \text{pour} \quad l_n^{NN} \quad \text{et} \quad \frac{D}{12} \rightarrow \frac{(d-p)}{12} \quad \text{pour} \quad l_n^{DD} \quad (3.58)$$

Les résultats sont donnés par

$$[l_n^{NN}, l_m^{NN}] = (n-m) l_{n+m}^{NN} + \frac{(q-1)}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0}, \quad (3.59)$$

$$[l_n^{DD}, l_m^{DD}] = (n-m) l_{n+m}^{DD} + \frac{(d-p)}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0}. \quad (3.60)$$

Calcul de $[l_n^{ND}, l_m^{ND}]$

En première étape, on commence par le commutateur $[l_n^{ND}, \alpha_{\frac{m}{2}}^s]$

Un calcul directe donne

$$\begin{aligned} [l_n^{ND}, \alpha_{\frac{m}{2}}^s] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in z_{odd}} \left(\alpha_{n-\frac{p}{2}}^r \frac{p}{2} \delta_r^s \delta_{p+m,0} + \left(n - \frac{p}{2} \right) \delta_{2n-p+m,0} \frac{p}{2} \delta^{rs} \alpha_{\frac{p}{2},r} \right), \quad m \in z_{odd} \\ &= \frac{1}{2} \alpha_{n+\frac{m}{2}}^s, \end{aligned} \quad (3.61)$$

en utilisant les mêmes étapes de calcul que celles de l'équation (1.42), on trouve

$$\begin{aligned} [l_n^{ND}, l_m^{ND}] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} \left[l_n, \alpha_{m-\frac{p}{2}}^r \alpha_{\frac{p}{2}, r} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} \left[\left(-\frac{p}{2} \right) \alpha_{m-\frac{p}{2}}^r \alpha_{n+\frac{p}{2}, r} - \left(m - \frac{p}{2} \right) \alpha_{m+n-\frac{p}{2}}^r \alpha_{\frac{p}{2}, r} \right], \end{aligned}$$

si nous remplaçons $(\frac{p}{2})$ par $(\frac{p}{2} - n)$ dans le premier terme à droite, il vient

$$[l_n^{ND}, l_m^{ND}] = (n - m) l_{n+m}^{ND}. \quad (3.62)$$

L'expression générale de l'algèbre de Virasoro contient un terme central $A(n)$ de sorte que

$$[l_n^{ND}, l_m^{ND}] = (n - m) l_{n+m}^{ND} + A(n). \quad (3.63)$$

L'expression du terme central vient du calcul des moyennes $\langle 0 | [l_1^{ND}, l_{-1}^{ND}] | 0 \rangle$ et $\langle 0 | [l_2^{ND}, l_{-2}^{ND}] | 0 \rangle$

*Calcul de $\langle 0 | [l_1^{ND}, l_{-1}^{ND}] | 0 \rangle$

à partir de la relation (3.57), la moyenne ci dessus s'écrit comme suit

$$\langle 0 | [l_1^{ND}, l_{-1}^{ND}] | 0 \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 | \alpha_{\frac{1}{2}}^r \alpha_{\frac{1}{2}, r} \alpha_{-\frac{1}{2}}^s \alpha_{-\frac{1}{2}, s} | 0 \rangle,$$

l'utilisation de la relation (3.43) donne

$$\langle 0 | [l_1^{ND}, l_{-1}^{ND}] | 0 \rangle = \frac{1}{8} (p - q), \quad (3.64)$$

d'un autre côté, la relation (3.63) (avec $n = -m = 1$) donne

$$\langle 0 | [l_1^{ND}, l_{-1}^{ND}] | 0 \rangle = A(1), \quad (3.65)$$

ce qui conduit au résultat

$$A(1) = \frac{1}{8} (p - q). \quad (3.66)$$

*Calcul de $\langle 0 | [l_2^{ND}, l_{-2}^{ND}] | 0 \rangle$

$$\langle 0 | [l_2^{ND}, l_{-2}^{ND}] | 0 \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 | \alpha_{\frac{3}{2}}^r \alpha_{\frac{3}{2}, r} \alpha_{-\frac{3}{2}}^s \alpha_{-\frac{3}{2}, s} | 0 \rangle,$$

Utilisons aussi la relation (3.44), on trouve

$$\langle 0 | [l_2^{ND}, l_{-2}^{ND}] | 0 \rangle = \frac{3}{4} (p - q),$$

De même que précédemment, le terme central correspondant à $n = -m = 2$ est

$$A(2) = \frac{3}{4}(p - q). \quad (3.67)$$

A partir de la forme générale de $A(n)$ et les équations (3.66) et (3.67) on peut simplement déterminer les coefficients c_3 et c_1

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{24}(p - q), \\ c_3 &= \frac{2}{24}(p - q), \end{aligned}$$

et donc

$$A(n) = \frac{(p - q)}{24}n(2n^2 + 1).$$

Finalement

$$[l_n^{ND}, l_m^{ND}] = (n - m)l_{n+m} + \frac{(p - q)}{24}n(2n^2 + 1)\delta_{n+m,0}. \quad (3.68)$$

Le commutateur entre deux générateurs de types différents étant nul, l'algèbre totale de Virasoro prend la forme finale :

$$\begin{aligned} [l_n^{tot}, l_m^{tot}] &= (n - m)l_{n+m}^{tot} + \left[\frac{(q - 1)}{12} + \frac{(d - p)}{12} \right] n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} + \frac{(p - q)}{24}n(2n^2 + 1)\delta_{n+m,0} \\ &= \underbrace{(n - m)l_{n+m}^{tot} + \frac{(d - 1)}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}}_{\text{expression habituelle de l'algèbre de Virasoro}} + \frac{1}{8}n(p - q)\delta_{n+m,0}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Comparée à l'algèbre de Virasoro habituelle, cette dernière est modifiée par un terme central additionnel (anomalie additionnelle) de signe positif, remarquons aussi qu'on retrouve bien cette algèbre (1.60) quand $p = q$ (avec la substitution $d - 1 \rightarrow D - 2$).

Chapitre 4

Corde parabosonique entre deux Dp-, Dq-branes en parallèle

On se propose maintenant d'étudier (dans la jauge transverse) l'extension paraquantique d'une théorie de corde bosonique entre deux Dp-, Dq-branes en parallèle positionnées en \bar{x}_1^a et en \bar{x}_2^r ou \bar{x}_2^a respectivement, p et q étant des entiers vérifiant $1 \leq q < p \leq 25$. Bien sûr, trois types de coordonnées transverses sont présentes :

► celles de Neumann-Neumann NN obéissant à

$$\left. \frac{\partial X^i}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial X^i}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=\pi} = 0 \quad , \quad i = 2, \dots, q \quad (4.1)$$

► celles de Dirichlet-Dirichlet DD obéissant à

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = \bar{x}_1^a \quad , \quad X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^a \quad , \quad a = p+1, \dots, d \quad (4.2)$$

► celles (dites mixtes) de Neumann-Dirichlet ND obéissant à

$$\left. \frac{\partial X^r}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=0} = 0 \quad , \quad X^r(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^r \quad , \quad r = q+1, \dots, p \quad (4.3)$$

4.1 Formalisme paraquantique

On postule les relations trilineaires entre les variables dynamiques effectivement indépendantes : $X^I(\sigma, \tau)$, $\mathcal{P}^I(\sigma, \tau)$, x_0^- et p^+ où maintenant, l'indice transverse I correspond à

$I = i, r, a$

$$\left[X^I(\sigma, \tau), [\mathcal{P}^J(\sigma', \tau), \mathcal{P}^K(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2\eta^{IJ}\mathcal{P}^K\delta(\sigma - \sigma') + 2\eta^{IK}\mathcal{P}^J\delta(\sigma - \sigma''), \quad (4.4)$$

$$\left[X^I(\sigma, \tau), [X^J(\sigma', \tau), \mathcal{P}^K(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2\eta^{IK}X^J\delta(\sigma - \sigma''), \quad (4.5)$$

$$\left[X^I(\sigma, \tau), [x_0^-, X^J(\sigma', \tau)]_+ \right] = \left[\mathcal{P}^I(\sigma, \tau), [x_0^-, \mathcal{P}^J(\sigma', \tau)]_+ \right] = 0, \quad (4.6)$$

$$\left[\mathcal{P}^I(\sigma, \tau), [x_0^-, X^J(\sigma', \tau)]_+ \right] = -\eta^{IJ}x_0^-\delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.7)$$

$$\left[X^I(\sigma, \tau), [x_0^-, \mathcal{P}^J(\sigma', \tau)]_+ \right] = \eta^{IJ}x_0^-\delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.8)$$

$$\left[x_0^-, [X^J(\sigma, \tau), \mathcal{P}^J(\sigma', \tau)]_+ \right] = 0, \quad (4.9)$$

$$\left[x_0^-, [X^J(\sigma, \tau), p^+]_+ \right] = -iX^J(\sigma, \tau), \quad (4.10)$$

$$\left[x_0^-, [\mathcal{P}^I(\sigma, \tau), p^+]_+ \right] = -i\mathcal{P}^I(\sigma, \tau). \quad (4.11)$$

Les autres commutateurs sont nuls.

On se propose de calculer les relations trilineaires en termes de modes $\alpha_n^{I'}$, $\alpha_{\frac{n}{2}}^r$ et de x^i , p^i , à partir de celles en termes de coordonnées de la corde $X^{I'}(\sigma, \tau)$ et $X^r(\sigma, \tau)$ et de leurs moments conjugués (respectifs) $\mathcal{P}^{I'}(\sigma, \tau)$ et $\mathcal{P}^r(\sigma, \tau)$ où $I' = i, a$. En procédant de la même façon que dans le chapitre deux, un calcul long mais sans difficultés conduit aux relations trilineaires suivantes entre les opérateurs $x^-, p^+, x^I, p^I, \alpha_n^{I'}$ et $\alpha_{\frac{n}{2}}^r$

$$\left[\alpha_l^{I'}, [\alpha_m^{J'}, \alpha_n^{K'}]_+ \right] = 2l\delta^{I'J'}\delta_{m+l,0}\alpha_n^{K'} + 2l\delta^{I'K'}\delta_{l+n,0}\alpha_m^{J'}, \quad (4.12)$$

$$\left[\alpha_{\frac{l}{2}}^r, [\alpha_{\frac{m}{2}}^s, \alpha_{\frac{n}{2}}^t]_+ \right] = l\delta^{rs}\delta_{m+l,0}\alpha_{\frac{n}{2}}^t + l\delta^{rt}\delta_{l+n,0}\alpha_{\frac{m}{2}}^s, \quad (4.13)$$

$$\left[\alpha_l^{I'}, [\alpha_m^{J'}, A]_+ \right] = 2l\delta^{I'J'}\delta_{l+m,0}A, \quad (4.14)$$

$$\left[\alpha_{\frac{l}{2}}^r, [\alpha_{\frac{m}{2}}^s, B]_+ \right] = l\delta^{rs}\delta_{m+l,0}B, \quad (4.15)$$

$$\left[x^I, [p^J, C]_+ \right] = 2i\delta^{IJ}C, \quad (4.16)$$

$$\left[x^-, [p^+, D]_+ \right] = 2iD, \quad (4.17)$$

$$\left[x^I, [p^I, p^K]_+ \right] = 2i(g^{IJ}p^K + g^{IK}p^J), \quad (4.18)$$

$$\left[x^-, [p^+, p^+]_+ \right] = 4ip^+, \quad (4.19)$$

avec

$$A = p^I, x^I, x^-, p^+ \text{ et } \alpha_{\frac{l}{2}}^r.$$

$$B = p^I, x^I, x^-, p^+ \text{ et } \alpha_l^{I'}$$

$$C = x^I, x^-, p^+, \alpha_l^{I'} \text{ et } \alpha_{\frac{l}{2}}^r$$

$$D = p^I, x^I, x^-, \alpha_l^{I'} \text{ et } \alpha_{\frac{l}{2}}^r$$

où $I' = i, a$ et $I = i, a, r$.

introduisons la décomposition de Green définie par

$$x^I = \sum_{\alpha=1}^Q x^{I(\alpha)} \quad ; \quad p^I = \sum_{\alpha=1}^Q p^{I(\alpha)}, \quad (4.20)$$

$$x^- = \sum_{\alpha=1}^Q x^{-(\alpha)} \quad ; \quad p^+ = \sum_{\alpha=1}^Q p^{+(\alpha)}, \quad (4.21)$$

$$\alpha_n^{I'} = \sum_{\beta=1}^Q \alpha_n^{I'(\beta)} \quad ; \quad \alpha_{\frac{n}{2}}^r = \sum_{\beta=1}^Q \alpha_{\frac{n}{2}}^{r(\beta)}, \quad (4.22)$$

Les relations trilineaires ci dessus sont équivalentes aux relations bilinéaires suivantes

$$[x^{I(\alpha)}, p^{J(\alpha)}] = i\delta^{IJ} \quad ; \quad [x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)}] = i, \quad (4.23)$$

$$[\alpha_n^{I'(\alpha)}, \alpha_m^{J'(\alpha)}] = n\delta^{I'J'}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_{\frac{n}{2}}^{r(\alpha)}, \alpha_{\frac{m}{2}}^{s(\alpha)}\right] = \frac{n}{2}\delta^{rs}\delta_{n+m,0}, \quad (4.24)$$

$$[A^{I(\alpha)}, B^{I(\alpha)}] = 0 \text{ pour tous les autres} \quad (4.25)$$

$$[A^{I(\alpha)}, B^{J(\beta)}]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \text{ pour tous} \quad (4.26)$$

4.2 Opérateur de masse

En termes de composantes de Green des modes α_n^I ($I = i, r, a$) on peut ordonner les expressions ci dessous de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_n^{i(\alpha)} \alpha_{-n}^{i(\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q \sum_{\alpha=1}^Q \left(\alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} + [\alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_{-n}^{i(\alpha)}] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} - \frac{Q(q-1)}{24}, \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} \alpha_{-\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \sum_{\alpha=1}^Q \left(\alpha_{-\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} \alpha_{\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} + [\alpha_{\frac{k}{2}}^{r(\alpha)}, \alpha_{-\frac{k}{2}}^{r(\alpha)}] \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} \alpha_{\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} - \frac{Q(p-q)}{48}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p}^d \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_m^{a(\alpha)} \alpha_{-m}^{a(\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p}^d \sum_{\alpha=1}^Q \left(\alpha_{-m}^{a(\alpha)} \alpha_m^{a(\alpha)} + \left[\alpha_m^{a(\alpha)}, \alpha_{-m}^{a(\alpha)} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p}^d \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-m}^{a(\alpha)} \alpha_m^{a(\alpha)} - \frac{Q(d-p)}{24}, \end{aligned}$$

L'expression de l_0 devient

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + Q \left(-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} \alpha_{\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p}^d \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-m}^{a(\alpha)} \alpha_m^{a(\alpha)}, \end{aligned}$$

et donc, l'expression de l'opérateur de masse est

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(N - \frac{Q}{24} (d-1) + \frac{Q}{16} (p-q) \right), \quad (4.27)$$

où

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} \alpha_{\frac{k}{2}}^{r(\alpha)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p}^d \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-m}^{a(\alpha)} \alpha_m^{a(\alpha)}, \quad (4.28)$$

alors que, sous forme symétrisée, il prend la forme suivante

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} N_+, \quad (4.29)$$

où

$$N_+ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^q \frac{1}{2} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + \sum_{k \in z_{odd}^+} \sum_{r=q+1}^p \frac{1}{4} [\alpha_{-\frac{k}{2}}^r, \alpha_{\frac{k}{2}}^r]_+ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p}^d \frac{1}{2} [\alpha_{-m}^a, \alpha_m^a]_+.$$

4.3 Spectre et dégénérescence

on se propose de déterminer la nature de états physiques (scalaire, vecteur, tenseur) et leurs dégénérescences pour les premiers niveaux de masse excités. Avec une symétrisation adéquate, ces états sont représentés comme suit :

Niveau 0

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24} (d-1) + \frac{1}{16} (p-q) \right] \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

Niveau 1

$$M^2 \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} \left[-\frac{1}{24}(d-1) + \frac{1}{16}(p-q) + \frac{1}{2} \right] \right\} \left(a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \alpha_S = (p-q).$$

Niveau 2

$$M^2 \left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} G \right\} \left(a_1^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(\frac{1}{2} \left[a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} G \right\} \left(\frac{1}{2} \left[a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} G \right\} \left(a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

où $G = \left[-\frac{1}{24}(d-1) + \frac{1}{16}(p-q) + 1 \right]$.

$$\left\{ a_1^{\dagger b}, \frac{1}{2} \left[a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right]_+ \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_S = \left(1 + \frac{24}{Q} - p \right) + (p-q) + \frac{(p-q)(p-q-1)}{2},$$

$$a_1^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \beta_V = (q-1).$$

Niveau 3

$$M^2 \left(a_{\frac{3}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} S \right\} \left(a_{\frac{3}{2}}^{\dagger s} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(\frac{1}{2} \left[a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} \right]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} S \right\} \left(\frac{1}{2} \left[a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} \right]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(\left\langle a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} S \right\} \left(\left\langle a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),$$

$$M^2 \left(\frac{1}{2} \left[a_1^{\dagger j}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} \right]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) = \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} S \right\} \frac{1}{2} \left[a_1^{\dagger j}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} \right]_+ (|p^+, \vec{p}_T\rangle),$$

où $S = \left[-\frac{1}{24}(d-1) + \frac{1}{16}(p-q) + \frac{3}{2} \right]$.

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} \right]_+, \left\langle a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u} \right\rangle, a_{\frac{3}{2}}^{\dagger s} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \gamma_S = \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{24}{Q} - p \right) (p-q) + (p-q) \\ + (p-q)(p-q-1) \\ \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[a_1^{\dagger j}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s} \right]_+ \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longrightarrow \gamma_V = (q-1)(p-q).$$

Niveau 4

$$\begin{aligned}
M^2 \left(a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(a_2^{\dagger b} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(\frac{1}{2} [a_1^{\dagger b}, a_1^{\dagger c}]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(\frac{1}{2} [a_1^{\dagger b}, a_1^{\dagger c}]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(a_2^{\dagger j} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(\frac{1}{2} [a_1^{\dagger j}, a_1^{\dagger k}]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(\frac{1}{2} [a_1^{\dagger j}, a_1^{\dagger k}]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(\left\langle a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger v} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(\left\langle a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger v} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(\left\langle a_1^{\dagger j}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(\left\langle a_1^{\dagger j}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right), \\
M^2 \left(\left\langle a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right) &= \left\{ \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{Q}{\alpha'} T \right\} \left(\left\langle a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\rangle |p^+, \vec{p}_T\rangle \right),
\end{aligned}$$

où $T = [-\frac{1}{24}(d-1) + \frac{1}{16}(p-q) + 2]$.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} a_2^{\dagger b} \\ \frac{1}{2} [a_1^{\dagger b}, a_1^{\dagger c}]_+ \\ \left\langle a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger u}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger v} \right\rangle \\ \left\langle a_1^{\dagger b}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\rangle \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle &\longrightarrow \delta_S = \left\{ \begin{array}{l} (1 + \frac{24}{Q} - p) + (1 + \frac{24}{Q} - p) + \frac{(1 + \frac{24}{Q} - p)(1 + \frac{24}{Q} - p - 1)}{2} \\ + (p - q) + (p - q)(p - q - 1) \\ + \frac{(p - q)(p - q - 1)}{2} + \frac{(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2)}{6} \\ + \frac{(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2)(p - q - 3)}{24} \\ + (1 + \frac{24}{Q} - p)(p - q) + (1 + \frac{24}{Q} - p) \frac{(p - q)(p - q - 1)}{2} \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{l} a_2^{\dagger j} \\ \left\langle a_1^{\dagger j}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger s}, a_{\frac{1}{2}}^{\dagger t} \right\rangle \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle &\longrightarrow \delta_V = (q - 1) + (q - 1)(p - q) + \frac{(p - q)(p - q - 1)}{2} \\
\frac{1}{2} [a_1^{\dagger j}, a_1^{\dagger k}]_+ |p^+, \vec{p}_T\rangle &\longrightarrow \delta_{T_2} = (q - 1) + \frac{(q - 1)(q - 2)}{2}
\end{aligned}$$

Pour une large séparation, la masse de chaque niveau est toujours positive et les états sont des scalaires où des vecteurs selon les différents type d' indices. En particulier, nous n'avons aucun champ de jauge non massif. Les nombres des états pour chaque niveau sont regroupées dans le

tableau suivant

0	1	2	3	4
1	$\alpha_{tot} = (p - q)$	$\beta_{tot} = \frac{24}{Q} + \frac{1}{2}p^2$ $-pq - \frac{1}{2}p$ $+\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q$	$\gamma_{tot} = \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}q - \frac{1}{2}p^2$ $+pq - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}p^2q$ $+\frac{1}{2}pq^2 + \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{6}q^3$ $+\frac{24p}{Q} - \frac{24q}{Q}$	$\delta_{tot} = -\frac{23}{12}p + \frac{23}{12}q + \frac{36}{Q} + \frac{12q^2}{Q} - \frac{24p}{Q}q$ $+\frac{12p^2}{Q} + \frac{59}{24}p^2 - \frac{59}{12}pq + \frac{59}{24}q^2 + \frac{7}{4}p^2q$ $-\frac{7}{4}pq^2 - \frac{7}{12}p^3 + \frac{7}{12}q^3 - \frac{12P}{Q} + \frac{12q}{Q} - \frac{1}{6}p^3q$ $+\frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{1}{6}pq^3 + \frac{1}{24}p^4 + \frac{1}{24}q^4 + \frac{288}{Q}$

Tableau 4

4.4 Fonction de partition

Il s'agit maintenant de confronter les résultats du tableau ci dessus à la fonction de partition pour vérifier la cohérence de ce modèle

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n'_i=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{q-1} \prod_{n=1}^{\infty} x^{\alpha=1} \sum_{n'_i=0}^Q n \langle n'_i | \left(\frac{1}{2} [a_n^{\dagger i(\alpha)}, a_n^{i(\alpha)}]_+ - \frac{Q}{2} \right) | n'_i \rangle \sum_{n'_r=0}^{\infty} \prod_{r=1}^{p-q} \prod_{n \in z_{odd}} x^{\alpha=1} \sum_{n'_r=0}^Q \frac{n}{2} \langle n'_r | \left(\frac{1}{2} [a_n^{\dagger r(\alpha)}, a_n^{r(\alpha)}]_+ - \frac{Q}{2} \right) | n'_r \rangle \\
&\quad \sum_{n'_a=0}^{\infty} \prod_{a=1}^{d-p} \prod_{n=1}^{\infty} x^{\alpha=1} \sum_{n'_a=0}^Q n \langle n'_a | \left(\frac{1}{2} [a_n^{\dagger a(\alpha)}, a_n^{a(\alpha)}]_+ - \frac{Q}{2} \right) | n'_a \rangle \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{q-1} \prod_{\alpha=1}^Q \sum_{n'_i=0}^{\infty} x^{n \frac{1}{2}(Q+2n'_i) - n \frac{Q}{2}} \prod_{n \in z_{odd}} \prod_{r=1}^{p-q} \prod_{\alpha=1}^Q \sum_{n'_r=0}^{\infty} x^{n \frac{1}{4}(Q+2n'_r) - n \frac{Q}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{a=1}^{d-p} \prod_{\alpha=1}^Q \sum_{n'_a=0}^{\infty} x^{n \frac{1}{2}(Q+2n'_a) - n \frac{Q}{2}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{(q-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^n}{1-x^{\frac{n}{2}}} \right)^{(p-q)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{(1+\frac{24}{Q}-p)}, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

où, de même que précédemment, le produit sur les entiers impaires est ramené à un produit sur des entiers. Notons ici que $D - 2 = d - 1 = \frac{24}{Q}$

Posons $X = \sqrt{x}$

Le développement de $f(x)$ au voisinage de $X = 0$ donne

$$\begin{aligned}
&1 + (p - q)X + \left(\frac{24}{Q} + \frac{1}{2}(p - q)(p - q - 1) \right) X^2 + \left\{ (p - q) \left(1 + \frac{24}{Q} - p \right) + 2p - 2q + (p - q)^2 \right. \\
&\quad \left. + (p - q)(p - q - 1) + \frac{1}{6}(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2) + (-p + 2q - 1)(p - q) \right\} X^3 + \dots
\end{aligned}$$

Le développement de la fonction de partition possède le bon comportement assurant ainsi la cohérence de ce modèle paraquantique

$$Q = 1, d = 25$$

$$f(x) = 1 + (p - q)X + (24 + \frac{1}{2}(p - q)(p - q - 1))X^2 + \left\{ (p - q)(25 - p) + 2p - 2q + (p - q)^2 + \frac{1}{6}(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2) + (p - q)(p - q - 1) + (-p + 2q - 1)(p - q) \right\} X^3 + ..$$

et pour $p = q$ le développement de $f(x)$ est équivalent à celui de la corde ordinaire.

4.5 Algèbre de Virasoro

Avec la même notation que dans le chapitre précédent on note les générateurs de Virasoro sous la forme

$$l_n^{tot} = l_n^{NN} + l_n^{ND} + l_n^{DD},$$

Considérons maintenant les formes symétrisées de chacun d'eux

$$\begin{aligned} l_n^{NN} &= \frac{1}{2} \sum_{p \in z_{odd}} [\alpha_{n-p}^i, \alpha_{p,i}]_+ , \quad n \neq 0, \\ l_n^{ND} &= \frac{1}{2} \sum_{p \in z_{odd}} [\alpha_{n-\frac{p}{2}}^r, \alpha_{\frac{p}{2},r}]_+ , \quad n \neq 0, \\ l_n^{DD} &= \frac{1}{2} \sum_{p \in z} [\alpha_{n-p}^a, \alpha_{p,a}]_+ , \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

A partir des relations trilineaires (4.12) le calcul des commutateurs $[l_n^{NN}, l_m^{NN}]$ et $[l_n^{DD}, l_m^{DD}]$ conduit aux deux résultats suivants

$$[l_n^{NN}, l_m^{NN}] = (n - m) l_{n+m}^{NN} + \frac{Q(Q-1)}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0}, \quad (4.31)$$

$$[l_n^{DD}, l_m^{DD}] = (n - m) l_{n+m}^{DD} + \frac{Q(d-p)}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0}. \quad (4.32)$$

Calcul de $[l_n^{ND}, l_m^{ND}]$

On peut facilement montrer que

$$[l_n^{ND}, l_m^{ND}] = (n - m) l_{n+m}^{ND} + f(Q, p, q) \delta_{n+m,0}, \quad (4.33)$$

le terme centrale $f(Q, p, q)$ sera obtenu à partir du calcul des moyennes $\langle 0 | [l_1^{ND}, l_{-1}^{ND}] | 0 \rangle$ et $\langle 0 | [l_2^{ND}, l_{-2}^{ND}] | 0 \rangle$ de sorte que la relation $(f(Q, D) = an + bn^3)$ reste valable.

$$\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle = \frac{1}{4^2} \sum_{l,k \in z_{odd}} \langle 0 | \left[[\alpha_{1-\frac{l}{2}}^r, \alpha_{\frac{k}{2},r}]_+, [\alpha_{-1-\frac{k}{2}}^s, \alpha_{\frac{l}{2},s}]_+ \right] | 0 \rangle. \quad (4.34)$$

Utilisons les relations trilineaire (4.13) et la décomposition de Green sur les modes α on obtient

$$\langle 0 | [l_1, l_{-1}] | 0 \rangle = \frac{Q(p-q)}{8}. \quad (4.35)$$

De même

$$\langle 0 | [l_2, l_{-2}] | 0 \rangle = \frac{3}{4}Q(p-q). \quad (4.36)$$

Par identification de ces moyennes et la relation (2.32), on trouve les coefficients a et b suivants

$$\begin{aligned} a &= \frac{Q}{24}(p-q), \\ b &= \frac{Q}{12}(p-q). \end{aligned}$$

L'expression de $[l_n^{ND}, l_m^{ND}]$ devient

$$[l_n^{ND}, l_m^{ND}] = (n-m)l_{n+m} + \frac{Q(p-q)}{24}n(2n^2+1)\delta_{n+m,0}, \quad (4.37)$$

et l'algèbre totale de Virasoro prend la forme finale

$$[l_n^{tot}, l_m^{tot}] = (n-m)l_{n+m}^{tot} + \frac{Q(d-1)}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} + \frac{1}{8}nQ(p-q)\delta_{n+m,0}. \quad (4.38)$$

Notons ici que comparée au cas quantique, le terme d'anomalie est multiplié par l'ordre de la paraquantification Q .

Conclusion Générale

Le propos de ce mémoire est l'étude de trois configurations de Dp-branes à savoir : une corde sur une Dp-brane, une corde entre deux Dp-branes parallèles et enfin une corde entre deux Dp-, Dq-branes parallèles et sa version paraquantique.

la première étape consistait en l'étude de la corde parabosonique (de Neumann) qui a permis de dériver dans la jauge transverse les relations de commutation trilinéaires vérifiées par les opérateurs du centre de masse et des modes de vibration de la corde. Ces dernières ont été obtenues après avoir postulé celles que vérifient les coordonnées de la corde et leurs moments en utilisant les solutions des équations du mouvement.

La deuxième étape a consisté en l'étude d'une théorie de cordes bosonique suivant les trois configurations évoquées précédemment, d'abord :

* sur une Dp-brane impliquant des coordonnées du type NN et DD où seules celles de type NN portent des indices de Lorentz. L'étude du spectre a permis de montrer la cohérence de ce modèle, comme résultat l'état tachyonique est toujours présent, il y a par contre de nouveaux types d'états qui, à savoir, possibilité d'états scalaires aussi bien sans masse que massifs et des états vectoriels massifs.

*ensuite entre deux Dp-branes parallèles impliquant aussi les mêmes types de coordonnées que précédemment à savoir les types NN et DD, de même l'étude du spectre a permis de prouver la cohérence de ce modèle, sauf que maintenant pour ce cas, la distance qui sépare les deux branes donne une contribution positive à l'opérateur de masse ce qui conduit à la possibilité (avec un choix particulier de cette distance) d'éliminer définitivement le tachyon, en plus de la disparition éventuelle des états vectoriels sans masse.

*enfin entre deux Dp-, Dq-branes parallèles impliquant maintenant, en plus des coordonnées du type NN et DD, de nouvelles coordonnées dites mixtes du type ND qui (comme le cas DD) ne portent toujours pas d'indice de Lorentz alors que les indices des modes sont maintenant demi entiers modifiant ainsi les relations de commutation entre ces derniers. En plus de la contribution positive à l'opérateur de masse dûs à la distance qui sépare les deux branes, un deuxième terme positif dépendant des paramètres p et q (en particulier du nombre des coordonnées de type ND) donne une deuxième contribution à la masse. L'algèbre de Virasoro

a été dérivée, un terme d'anomalie additionnel qui dépend aussi du nombre des coordonnées de type ND est rajouté au terme central, remarquons néanmoins que le signe positif de ce terme n'a aucun effet sur cette anomalie.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'une corde parabolosonique entre deux Dp-, Dq-branes parallèles. Le premier point développé a été la dérivation des relations de commutation trilineaires entre les modes $\alpha_n^{I'}$, $\alpha_{\frac{n}{2}}^r$ et les coordonnées du centre de masse x^-, p^+, x^I, p^I dans la jauge transverse à partir de celles postulées sur les coordonnées $X^{I'}(\sigma, \tau)$, $X^r(\sigma, \tau)$ et les moments conjugués (respectifs) de la corde effectivement indépendantes $\mathcal{P}^{I'}(\sigma, \tau)$ et $\mathcal{P}^r(\sigma, \tau)$ où $I' = i, a$. La particularité des coordonnées du type ND a conduit à une séparation de l'indice r des deux autres indices $I' = i, a$. Le deuxième point développé est l'étude du spectre, comparé à la corde bosonique de Neumann, l'opérateur de masse comporte deux termes supplémentaires, le premier dépend de la séparation des deux branes et le second du nombre de coordonnées de type ND multiplié par l'ordre de la paraquantification. deux formes équivalentes de cet opérateur ont été données, une en termes de composantes de Green et une symétrisée. Le signe positif de ces deux termes contribue à plus de possibilités quant à la nature massive ou pas des états, en particulier l'absence de tachyons. Une symétrisation adéquate a permis la description des quatre premiers niveaux du spectre ainsi que leurs dégénérescences suivant leurs natures (scalaire, vectorielle, etc..), les résultats sont regroupés dans un tableau. La vérification de la cohérence de ce modèle nécessite le calcul de la fonction de partition et sa confrontation aux résultats obtenus pour la dégénérescence. la concordance parfaite entre les deux résultats conforte la validité du modèle paraquantique développé. Le dernier point développé est l'algèbre de Virasoro où la contribution de l'extension paraquantique est traduite par le facteur Q dans le terme central.

Une des perspectives pour ce travail consisterait à introduire des degrés de liberté fermioniques.

Annexe A

solution des équations du mouvement

Dans cette annexe, on va trouver les solutions exactes qui seront de type

$$X^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)). \quad (\text{A.1})$$

a. Le cas d'une corde bosonique dont les extrémités sont libres :

D'une part, la condition au bord de Neumann en $\sigma = 0$ donne

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau) + g^{\mu'}(\tau)) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ce qui conduit à

$$g^\mu = f^\mu - c^\mu, \quad (\text{A.3})$$

par substitution dans l'équation (A.1) on obtient

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)). \quad (\text{A.4})$$

D'autre part, la condition au bord de Neumann en $\sigma = \pi$ donne

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$f^{\mu'}$ est une fonction périodique de période 2π qui s'écrit sous forme de série de Fourier comme suite

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu), \quad (\text{A.6})$$

par intégration on trouve

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu). \quad (\text{A.7})$$

Remplaçons l'expression de $f^\mu(u)$ dans l'équation (A.4), on obtient

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma. \quad (\text{A.8})$$

On définit

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2} ((B_n^\mu + iA_n^\mu) \exp in\tau - (B_n^\mu - iA_n^\mu) \exp (-in\tau)) \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} \exp in\tau - a_n^\mu (-in\tau)). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Déterminons maintenant l'expression de f_1^μ .

De l'équation (1.18)

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots \quad (\text{A.10})$$

le moment total est alors

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^\mu d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu. \quad (\text{A.11})$$

Donc, l'expression de f_1^μ est

$$f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu, \quad (\text{A.12})$$

si on note

$$f_0^\mu = x_0^\mu, \quad (\text{A.13})$$

la substitution des définitions (A.9, A.12 et A.13) dans (A.8) donne finalement le résultat suivant

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \{a_n^\mu(0) \exp(-in\tau) - a_n^{\mu*}(0) \exp(in\tau)\} \cos n\sigma. \quad (\text{A.14})$$

b. Le cas d'une corde bosonique sur une D-brane :

Dans ce cas, les composantes des extrémité attachées sur la D-brane sont soumises aux conditions de Dirichlet

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}^a, \quad a = p+1, \dots, d \quad (\text{A.15})$$

les coordonnées $X^a(\tau, \sigma)$ sont dites du type *DD*. Celles qui restent libres satisfont les conditions aux bords de Neumann

$$X'^i(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X'^i(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = 0, \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{A.16})$$

concentrons nous sur les conditions de Dirichlet

pour $\sigma = 0$ la solution (A.1) devient

$$X^a(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^a(\tau) + g^a(\tau)) = \bar{x}^a, \quad (\text{A.17})$$

ce qui permet de déduire que

$$g^a(\tau) = -f^a(\tau) + 2\bar{x}^a, \quad (\text{A.18})$$

en portant (A.18) dans (A.1)

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \frac{1}{2}(f^a(\tau + \sigma) - f^a(\tau - \sigma)), \quad (\text{A.19})$$

la condition aux bords pour $\sigma = \pi$ donne

$$\begin{aligned} X^a(\tau, \pi) &= \frac{1}{2}(f^a(\tau + \pi) - f^a(\tau - \pi)) = 0 \\ \implies f^a(\tau + \pi) &= f^a(\tau - \pi). \end{aligned}$$

$f^a(u)$ est une fonction périodique de période 2π qui prend la forme suivante

$$f^a(u) = \bar{x}^a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{f}_n^a \cos nu + \tilde{g}_n^a \sin nu \right), \quad (\text{A.20})$$

substituons (A.20) dans (A.19)

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n^a \cos n\tau + \tilde{f}_n^a \sin n\tau \right) \sin n\sigma. \quad (\text{A.21})$$

les coefficients f_n^a , \tilde{f}_n^a et \tilde{g}_n^a sont arbitraires. Remarquons qu'il n'y a pas des termes linéaires avec τ , la corde ne porte donc pas de moment suivant la direction x^a .

De même que dans le cas précédent, l'équation (A.21) se simplifie sous la forme

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a \exp(-in\tau) \sin n\sigma. \quad (\text{A.22})$$

c. le cas d'une corde bosonique entre deux Dp-branes en parallèle

Les conditions aux bords pour les coordonnées de type DD sont données par

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = \bar{x}_1^a \quad , \quad X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^a \quad , \quad a = p+1, \dots, d \quad (\text{A.23})$$

les mêmes étapes que celles du cas d'une corde sur une Dp-brane conduisent au résultat

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a \exp(-in\tau) \sin n\sigma. \quad (\text{A.24})$$

d. le cas d'une corde bosonique entre deux Dp-, Dq-branes en parallèle

Dans le cas des coordonnées mixtes ND , les conditions aux bords sont

$$\left. \frac{\partial X^r}{\partial \sigma} (\tau, \sigma) \right|_{\sigma=0} = 0 \quad , \quad X^r (\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^r, \quad (\text{A.25})$$

l'équation (A.1) avec les conditions aux bords en $\sigma = 0$ donnent

$$\begin{aligned} f^{r'}(u) &= g^{r'}(u) \\ \implies f^r(u) &= g^r(u) + c_0^r, \end{aligned}$$

d'autre part, les conditions aux bords en $\sigma = \pi$ impliquent

$$c_0^r = 2\bar{x}_2^r,$$

substituons ces résultats dans (A.1) on trouve

$$X^r (\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + \frac{1}{2} (f^r (\tau + \sigma) + f^r (\tau - \sigma)), \quad (\text{A.26})$$

si on soumet cette solution aux conditions aux bords en $\sigma = \pi$ on trouve

$$f^r (u + 2\pi) = -f^r (u). \quad (\text{A.27})$$

Le signe moins de l'équation ci dessus implique que $f^r (u)$ est une fonction périodique de période 4π . Pour trouver une expansion appropriée de $f^r (u)$ en modes, rappelons que toute fonction périodique de période T peut se développer en termes des fonctions $\left\{ \cos \left(\frac{2\pi nu}{T} \right), \sin \left(\frac{2\pi nu}{T} \right) \right\}$ où $n = 0, 1, \dots, \infty$, pour $T = 4\pi$ on peut écrire

$$f^r (u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n^r \cos \left(\frac{nu}{2} \right) + h_n^r \sin \left(\frac{nu}{2} \right) \right], \quad (\text{A.28})$$

et

$$f^r (u + 2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[f_n^r \cos \left(\frac{nu}{2} \right) + h_n^r \sin \left(\frac{nu}{2} \right) \right]. \quad (\text{A.29})$$

Pour que le terme à droite de l'équation (A.29) soit égal au terme à droite de l'équation (A.28) précédé du signe moins (pour satisfaire (A.27)), il faut que n prenne des valeurs impaires.

Un calcul direct conduit alors à l'expression de $X^r (\tau, \sigma)$ en terme des modes d'oscillations d'indices demi entiers

$$X^r (\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in z_{odd}} \frac{2}{n} \alpha_{\frac{n}{2}}^r \exp \left(-i \frac{n}{2} \tau \right) \cos \left(\frac{n}{2} \sigma \right). \quad (\text{A.30})$$

Annexe B

Calcul de quelques masses dans le cas paraquantique

Ces calculs sont basés sur l'utilisation des relations de commutations trilinéaires. Nous prenons (2.99) et calculons comme exemple les masses des états ci dessous

Niveau 1

$$\begin{aligned}
M^2 (\alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle) &= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{12} + \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)}]_+ \right] (\alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle) \\
&= \frac{-1}{\alpha'} \frac{Q(D-2)}{12} \alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle + \frac{1}{\alpha'} \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)}]_+ \alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{-1}{\alpha'} \frac{Q(D-2)}{12} \alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle + \frac{1}{\alpha'} \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{-1}^j [\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)}]_+ \right. \\
&\quad \left. - 2(-\delta^{ij}\delta_{-1-n}\alpha_{n,i} - \delta^{ji}\delta_{-1+n}\alpha_{-n,i}) \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{-1}{\alpha'} \frac{Q(D-2)}{12} \alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle + \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2} \left[\frac{Q(D-2)}{12} + 2 \right] \alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 1 \right] (\alpha_{-1}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle). \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Niveau 2

$$\begin{aligned}
M^2 (\alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle) &= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{12} + \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)}]_+ \right] (\alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle) \\
&= \frac{-1}{\alpha'} \frac{Q(D-2)}{12} \alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle + \frac{1}{\alpha'} \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{-2}^j [\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)}]_+ \right. \\
&\quad \left. - 2(-2\delta^{ij}\delta_{-2-n}\alpha_{n,i} - 2\delta^{ji}\delta_{-2+n}\alpha_{-n,i}) \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{-1}{\alpha'} \frac{Q(D-2)}{12} \alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle + \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2} \left[\frac{Q(D-2)}{12} + 4 \right] \alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 2 \right] (\alpha_{-2}^j |p^+, \vec{p}_T\rangle). \tag{B.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^2 (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle) &= \frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)} \right]_+ \right] (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle) \\
&= \frac{1}{\alpha'} \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{-1}^j \left[\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)} \right]_+ \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(-\delta^{ij} \delta_{-1-n} \alpha_{n,i} - \delta^{ji} \delta_{-1+n} \alpha_{-n,i} \right) \right\} \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2} \alpha_{-1}^j \left[\left[\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)} \right]_+ + 2 \right] \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha'} \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha_{-1}^j \left\{ \alpha_{-1}^k \left[\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)} \right]_+ + 2 \alpha_{-1}^k \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(-\delta^{ik} \delta_{-1-n} \alpha_{n,i} - \delta^{ki} \delta_{-1+n} \alpha_{-n,i} \right) \right\} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \left\{ \frac{1}{\alpha'} \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{Q(D-2)}{12} + 4 \right] \right\} \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha'} \left[-\frac{Q(D-2)}{24} + 2 \right] (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |p^+, \vec{p}_T\rangle). \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] B. Zwiebach, *A First Course In String Theory*, Cambridge University Press 2004.
- [2] J. Scherk, *An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings*, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 123-164.
- [3] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Dual Models for non-hadrons*, Nucl. Phys. B81. 118-144 (1974).
- [4] J. Polchinski, *String Theory*, Vol.I, Cambridge University Press 1998.
- [5] D. Lüüst and S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Springer-Verlag, 1989.
- [6] F. Ardalan and F. Mansouri, Phys. Rev. D9 (1974) 3341.
- [7] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 53 (2003) 769.
- [8] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 54 (2004) 621.
- [9] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. 75 (26). 4724-4727 (1995), hep-th/9510017.
- [10] L. Smolin, *Rien ne va plus en Physique!*, Préface d'Alain Connes, Quai des Sciences, Dunod, 2006.
- [11] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell*, Pinceton University Press, 2007.
- [12] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vol.I, Cambridge University Press 1987.
- [13] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particules and Strings*, Westview Press 1989.
- [14] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics*, Springer-Verlag, 1982.
- [15] E. P. Wigner, Phys. Rev. 77, (1950) 711.

-
- [16] L. Khodja, thèse de Doctora en sciences physiques 2010, Constantine.
- [17] H. S Green, Phys. Rev. 90, (1953) 270.
- [18] B. M. Barbashov and V. V. Nesterenko, *Introduction to the Relativistic String Theory*, World Scientific 1990.
- [19] J. H. Schwarz, *The First 15 Years of Superstring Theory*, Vol.1, World Scientific 1985.
- [20] M. Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer-Verlag 1990.
- [21] U. Gürsoy and C. Saçhoğlu, arXiv : hep-th/0102003 v2 (2001).
- [22] P. Grange, arXiv : hep-th/0508242 v1 (2005).
- [23] B. Pioline, arXiv : hep-th/9806123 (1998).
- [24] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *D-brane in String Theory*, arXiv : hep-th/9912161 v1 (1999).
- [25] C. Bachas, *Lecture on D-branes*, arXiv : hep-th/9806199.
- [26] L. Khodja, thèse de Magister 2005, constantine.
- [27] H. Bennacer, thèse de magister 2002, constantine.