REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
ET
DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Aitour Mourad

THEME

Cosmologie du modèle de Kaluza-Klein avec champs vectoriels

Soutenue :00/06/2011

Devant le jury:

Président:	Ahmed Bouda	Professeur	Université de Béjaïa
Rapporteur:	Khireddine Nouicer	Professeur	Université de Jijel
Examinateurs:	Achour Benslama	Professeur	Univrsité Mentouri Constantine
	Zouina Belghobsi	MCA	Université de Jijel
Invité:	Salah Haouat	MCB	Université de Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur M. Khireddine Nouicer, Professeur à l'Université de jijel, pour ses discussions, sa disponibilité infaillible à mon égard et son aide. Qu'il en soit grandement remercié.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, Mr Ahmed Bouda Professeur à l'Université de Béjaïa pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs, Melle. Zouina Belghobsi, Maitre de Conférnces A à l'Université de jijel, et Mr Achour Benslama Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, qui ont bien accepté de juger ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de la post graduation de physique théorique. En particulier, Mrs Abdelhafid Bounames et Tahar Boudjedaa Professeurs à l'Université de Jijel, Mlles. Z. Belghobsi, Z. Lehtihet, Maîtres de conférences à l'université de Jijel, M. M. Maamache, Professeur à l'Université de Sétif, L. Chetouani, Professeur à l'Université Mentouri Constantine, Ms. Patrick Aurenche, Jean-Philipe. Guillet, et Paul Sorba, Directeurs de Recherche au LAPTH-Annecy (France).

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2007/2008.

Quant à mes très chers parents, je ne trouverai jamais les mots pour les remercier suffisamment, pour leur soutien moral et financier, leur assistance et engagement permanent. Je les remercie infiniment et j'implore Allah le tout puissant de les protéger et de leur prêter longue vie.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes frères : Mounir, Kamel, et ma sœur, Souad, et ma nièce soundos, qui m'ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Mourad

Table des matières

Chapitre 1

Intoduction générale

Le début de 20 ème siécle a été le théatre de révolutions scientifiques importantes. L'émergence des théories de la relativité restreinte, la relativite générale et la mécanique quantique a completement changé nôtre conception de l'univers. En effet nos certitudes millénaires sur le caractére absolu de l'espace et du temps ont été ébranlé, ouvrant la voie à des nouvelles théories possedant le potentiel d'unifier toutes les lois de la physique en une seule théorie du tout.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les premières théories ayant tenter de reformuler la notion d'espace-temps, ainsi que celles prétendant à unifier les forces de la physique connues et bien étudiés au début du 20 ème siècle. En effet on présentera les fondements conceptuels et techniques des théories telles que la relativité restreinte, la relativité générale d'Einstein et la théorie de Kaluza-Klein. .

1.1 La Relativité générale

Bien que la relativité resreinte ait connu beaucoup de succés, elle ne permettait pas de tout comprendre et de tout calculer. En effet, les mouvements non uniformes et les accélérations ne peuvent pas étre traités de manière satisfaisante par la relativité restreinte. Il faudra un postulat supplémentaire, le principe d'équivalance, généralisant la notion de référentiel inertiel, et par la même occasion y inclure un cadre théorique naturel pour expliquer la gravité. En effet, le principe d'équivalence stipule qu'en présence d'un champ gravitationnel, un repére inertiel est un repére en chute libre [1]. La version «forte» de ce principe, quant à elle, affirme que toutes les lois physique qui peuvent s'exprimer en notation tensorielle en relativité restreinte ont exactement la méme forme dans un repére inertiel générale (dans le sens défini plus haut), c'est ce qu'on appelle la covariance relativiste

En relativité générale, l'espace n'est donc plus plat et la métrique peut dépendre des coordonnées de l'observateur. On dira qu'on est dans un espace de Riemann [1].

En conséquence, les vecteurs de base d'un repére ne sont, en général, pas constants et définissent la métrique

$$g_{ij} = \overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j} \neq cte. \tag{1.1}$$

Les symboles de Christoffel sont définis comme la variation des vecteus de base par rapport à aux coordonnées [2]

$$\frac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial x^j} = \partial_j \overrightarrow{e_j} - \Gamma^k_{ij} \overrightarrow{e_k}. \tag{1.2}$$

Ceux-ci se définissent également entermes des dérivées de la métrique [2] :

$$\Gamma^n_{ij} = \frac{1}{2} g^{nk} \left[\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right]. \tag{1.3}$$

A l'aide de ces symboles, on définira un nouvevel opérateur, la derivée covariante qui permettra de tenir compte de la variation des vecteurs de base :

$$\nabla_i V_j = \partial_i V_j - \Gamma^\lambda_{ij} V_\lambda. \tag{1.4}$$

Si la dérivée covariante d'un vecteur est nulle le long d'une trajectoire, on dit que celuici est transporté parallélement. Une trajectoire qui transporte parallélement son vecteur tangent est appelée géodésique. Sur une surface de courbure quelconque, l'équation de cette trajectoire est obtenue par la minimisation de l'intervalle entre deux événements voisins :

$$\frac{\partial^2 x^i}{ds^2} - \frac{\partial x^j}{ds}\frac{\partial x^k}{ds}\Gamma^i_{jk} = 0. \tag{1.5}$$

On voit donc que, de façon générale, la géodésique pourra ne pas être une droite si les symboles de Christoffel sont non nuls. Ce n'est pas une implication à double sens, i.e. des symboles de Christoffel non nuls n'impliquent pas une courbure non nulle de l'espace.

En fait, la courbure de l'espace-temps est définie par la non-commutativité de la dérivée covariant [2]:

$$\nabla_k V_j V_i - \nabla_j V_k V_i \equiv R^l_{ijk} V_i, \tag{1.6}$$

où R^l_{ijk} , le tenseur de courbure de Riemann, s'exprime naturellement en termes des symboles de Christoffel

$$R^l_{ij\lambda} = \partial_j \Gamma^l_{i\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^l_{ij} + \Gamma^n_{i\lambda}\Gamma^l_{in} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{im}. \tag{1.7}$$

Le tenseur de Ricci R_{ij} est défini comme la contraction sur deux indices du tenseur de Riemann. Une contraction sur les indices restants donne le scalaire de Ricci R (ou courbure scalaire). A partir de ces deux quantités, on construit le tenseur d'Einstein :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \ . \tag{1.8}$$

Et enfin, les équations covariantes du champ de la relativité générale, les équations d'Einstein sont données par

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ij}, \tag{1.9}$$

où Λ est la constante cosmologique, G la constante gravitationnelle de Newton, $c$la vitesse de la lumière et T_{ij} le tenseur moment-énergie de la matière.

1.2 La théorie de Kaluza-klein

1.2.1 La théorie de Kaluza

Nordstrom en 1914 et Kaluza en 1921 ont été les premiers à proposer une théorie unifiant la gravité et l'éléctromagnétisme dans une théorie à cinq dimensions. Leurs travaux s'inspiraient de l'interprétation géométrique de la relativité par Minkowski (1909) [3]. Néanmoins, cette tentative a apporté plus de questions que de réponses. En effet, comment se fait-il que nous n'ayons jamais appréhendé cette cinquième dimension ?. Afin de régler cette question épineuse, Kaluza proposa sa fameuse condition du cylindre, qui contraint la physique que nous connaissons à prendre place sur une hypersurface quadridimensionnelle plongée dans l'espace pentadimensionnel. Cela a pour effet de laisser la relativité générale usuelle invariante par rapport à l'ajout de la nouvelle coordonnée associée à la cinquième dimension, x^4, du moment les dérivées par rapport à celle-ci sont nulles sur l'hypersurface.

Cette proposition ad-hoc resta sans justification, et ce n'est que lorsque Klein proposera sa version de la théorie de Kaluza que les théories à dimensions supplémentaires ont commencé par attirer l'attention des physiciens et mathématiciens. L'idée fandamentale de la théorie de Kaluza-Klein était d'associer les lois régissant les forces dans l'éspace-temps quadridimensionnel à des considérations uniquement géométriques en cinq dimensions. De cette volonté découle l'hypothése de l'espace vide en cinq dimensions. Ainsi, on pose que les équations d' Einstein en cinq dimensions s'écrivent comme :

$$^{(5)}G_{AB} = 0, \tag{1.10}$$

où les indices latins vont de 0 à 4.

Tout comme dans le cas de la relativité générale en 4 dimensions, les équations d'Einstein en 5 dimensions s'obtiennent le plus aisément à partir du principe variationnel. En mécanique classique, l'extrémisation de l'action mène aux équations du mouvement, i.e, les équations d'Euler-Lagrange, alors qu'en relativité générale l'extrémisation de l'action d'Einstein-Hilbert mène aux équation d'Einstein.

On doit uniquement substituer l'action en 4 dimensions par son analogue en 5 dimensions [4]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \ {}^{(5)}R\sqrt{-g^{(5)}} d^{(5)}x \ . \tag{1.11}$$

où ${}^{(5)}R$ et $g^{(5)}$ sont respectivement le scalaire de Ricci et le déterminant métrique à 5 dimensions. On constate que le formalisme de la relativité générale en 5 dimensions est essentiellement le méme qu'on 4 dimensions. Ainsi, nous pourrons connaitre les équations du champ simplement par la connaissance de la métrique. En effet, l'hypothèse d'un espace vide nous conduit à la condition suivante :

$${}^{(5)}R_{AB} = 0, \tag{1.12}$$

Or, le tenseur de Ricci ne dépend que des dérivées de la métrique. Nous avons donc uniquement besoin de la métrique. La métrique introduite par Kaluza est exprimée en termes de la métrique quadridimensionnelle, du potentiel vecteur quadridimensionnel, d'un champ scalaire ϕ et d'un facteur d'échelle k ([3],[5]) :

$${}^{(5)}g = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} - k^2\phi^2 A_\alpha A_\beta & k\phi^2 A_\alpha \\ k\phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix} , \tag{1.13}$$

Cette métrique en cinq dimensions, posséde donc 25 éléments et comme elle doit étre symétrique , elle aura donc 15 éléments indépendants. Cela implique donc 15 équations à déterminer. Si on observe l'hypersurface à 4 dimensions , on retrouve alors 10 équations analogues à celles de la relativité usuelle. Il reste quatre équations supplémentaires pour les composontes indicées $\alpha 4$ et une équation pour la composante 44. Pour les obtenir, on doit calculer les composantes du tenseur de Ricci, ce qui est conceptuellement simple mais fastidieux. A cet effet utilisons les résultats obtenus par Wesson [3] :

$$G_{\alpha\beta} = \frac{k^2\phi^2}{2} - T_{\alpha\beta} - \frac{1}{\phi}\left[\nabla_\alpha\left(\partial_\beta\phi\right) - g_{\alpha\beta}\Box\phi\right], \tag{1.14}$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = -3\frac{\partial^\alpha\phi}{\phi}F_{\alpha\beta}, \tag{1.15}$$

$$\Box\phi = \frac{k^2\phi^3}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{1.16}$$

Pour obtenir ces équations il est nécéssaire d'utiliser la condition du cylindre de Kaluza afin d'éliminer les dérivées par rapport à la cinquiéme coordonnée x^4. Le tenseur antisymétrique de Maxwell et le tenseur moment-énérgie du champ électromagnétique sont respectivement donnés par

$$F_{\mu\rho} = \partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu, \quad T_{\alpha\beta}^{EM} \equiv \frac{g_{n\beta}F_{\gamma\sigma}F^{\gamma\sigma}}{4} - F_\alpha^\gamma F_{\beta\gamma}. \tag{1.17}$$

et où $\Box = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\left(\partial_\alpha\phi\right)$ est L'opérateur d'Alembertien.

Dans la version origionale de la théorie de Kaluza le champ scalaire ϕ était constant et égal à un. Si maintenant on reprend cette hypothèse et on pose $\phi = 1$ dans les Eqs $(1.14), (1.15), (1.16)$, on est réduit aux équations suivantes :

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}^{EM} \quad \text{et} \quad \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.18}$$

où $k = 4\sqrt{\pi G}$. Ces équations ne sont rien d'autre que les équations usuelles d'Einstein et de Maxwell en notation tensorielle. Ce qui est vraiment remarquable et peut être magique, c'ést l'apparition du tenseur moment-énergie du champ électromagnétique dans les équations d'Einstein en quatre dimensions, alors qu'elles sont le résultat d'un espace vide en cinq dimensions. Cependant, la troisiéme équation n'est cohérente avec les deux autres que si ([3],[5]) :

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0. \tag{1.19}$$

Ce qui impose une contrainte sur les deux autres équations. En effet, pour respecter cette condition, il faut que les champ magnétique et éléctrique aient la même amplitude partout [5] . Dans ce cas on obtient l'équation de Kein-Gordon d'un champ scalaire sans masse

$$\Box\phi = 0. \tag{1.20}$$

Dans le cas où l'on permet à ϕ de varier, l'équation (1.20) devient une équation de Klein-Gordon avec une masse non nulle et, par conséquent, fait apparaitre des constantes de couplage variables pour les forces gravitationnelle et éléctromagnétique.

De nos jours, cette condition n'est généralement plus imposée méme en considérant le fait que cela constitue une issue pour expliquer le possible changement de la constante de structure fine depuis le début de l'univers ([5], [6]). De façon générale la variation des constantes de couplage est considérée comme allant à l'encontre des évidences expérimentales [5].

1.2.2 Interprétation de Klein

La condition du cylindre introduite par Kaluza semble artificielle , et c'est à Oskar Klein , en 1926 , que revient le mérite de justifier cette condition, que beaucoup considéraient comme une restriction forte et purement conjecturale. La contribution de Klein peut être résumée en deux points ;

1−La cinquiéme dimension est une dimension compacte ayant une topologie connexe, en l'occurrence celle d'un cercle S^1.

2−La taille R de cette dimension est trés petite. Avec cette hypotése , on se retrouve dans l'espace $M^4 \times S^1$plutôt que dans l'espace M^5 comme précédemment. Prenons la notation suivante :

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ et } y = x^4 \tag{1.21}$$

Explicitons maintenant la topologie de la cinquiéme dimension :

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi R). \tag{1.22}$$

Avec cette propriété , on peut supposer que les quantités physiques ont une dépendance quelconque en y. En effet, la condition de continuité force une périodicité qui nous permet de développer les champs en modes de Fourier suivant la cinquième dimension [3] :

$$g_{ij}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_{ij}^{(n)}(x) e^{ik_n y} \tag{1.23}$$

$$A_i(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_i^{(n)}(x) e^{ik_n y}, \tag{1.24}$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi^{(n)} e^{ik_n y}. \tag{1.25}$$

où $k_n = n/R$. La longueur d'onde d'un mode particulier est simplement donnée par

$$\lambda_{kk}^{(n)} = \frac{2\pi R}{|n|}. \tag{1.26}$$

Si on utilise maintenant la relation de Planck exprimant l'énergie en fonction de la longueur d'onde, on obtient une relation simple pour les énergies des modes de Kaluza-Klein :

$$E_{kk}^{(n)} = \frac{|n|\,\hbar c}{R}, \tag{1.27}$$

qui présentent un espacement régulier. Cette propriété à conduit à nommer ces modes ‹‹la tour de Kaluza-Klein ››. Si on prend la relation (1.27) et qu'on applique maintenant la deuxiéme hypothése de Klein , c'est à dire que R est trés petit , on s'aperçoit que l'énergie des modes excités est potentiellement colossalle. Si on postule que la dimension a un rayon inférieur à un attométre, l'énergie du premier mode excité dépasse 1 TeV . On en conclut donc que pour une dimension supplémentaire suffisamment petite, les modes excités ne peuvent pas étre produits à des énergies accéssibles dans nos laboratoires (du moins pas en 1926). Il ne reste donc que les modes fondamentaux ($n = 0$) et, si on se rapporte aux Eqs. $(1.23 - 1.27)$, on constate que , dans ce cas, les champs sont strictement indépendants de la cinquiéme coordonnée. Voilà donc pourquoi les phénoménes physique se sont toujours montrés indépendants d'une cinquième dimension. Cette explication permet donc d'obtenir qualitativement les mémes résultats qu'en utilisant la condition du cylindre, mais sans devoir à postuler une indépendance artificielle des champs par rapport à y. On ouvre également la porte à la confirmation directe de l'existence des dimensions supplémentaires par l'observation, moyennant une énergie suffisante, en detectant les modes excités de Kaluza-Klein .

1.3 La théorie de la matière induite

En se lançant dans l'étude des grandes théories unifiées et théories à dimensions supplémentaires, un des buts principaux est de permettre aux équations décrivant les phénoménes de découler le plus naturellement possible de la géométrie sous-jacente. Suite à la découverte de la relativité générale et la théorie de Kaluza -Klein, le monde scientifique a ensuite était confronté aux difficultés mathématiques liées aux autres théories unificatrices comme la théorie des cordes, la supergravité et les supercordes. Quelques physiciens ont eu l'idée de se tourner vers des théories plus simples et plus naturelles. C'est le cas de Paul Wesson , de l'université de Waterloo, à qui nous devions une théorie plus simple ainsi que son interprétation géométrique très élégante.

En généralisant le principe de Kaluza-Klein, il découvrit une toute nouvelle approche à la théorie de la relativité générale et au concept de masse. C'est la théorie de la matiére induite. En effet, les propriétés de la matiére, symbolisées par le tenseur moment-énergie, émergent d'un espace à 5 dimensions vide pour décrire un espace à 4 dimesions contenant de la matière.

Dans le formalisme qui suivra, on utilise les indices latins majuscules pour les termes en $5D$ (les indices vont de 0 à 4) et les indices greques pour les termes en $4D$.

Les équations du champ dans le vide à 5D sont données, en terme du tenseur de Ricci, par

$$R_{AB} = 0. \tag{1.28}$$

On peut aussi écrire cette équation en fonction du tenseur d'Einstein

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{Rg_{AB}}{2}. \tag{1.29}$$

Il découle d'un théorème de Campell que toute variété Riemannienne analytique de dimension N peut être incorporer dans une variété plate à $N+1$ dimensions (dont le tenseur de Ricci est plat ($R_{AB} = 0$)). Ce résultat est important puisque ça nous permet d'incorporer un espace 4D contenant des sources dans un espace $5D$ sans sources. Bien que cette technique mène vers description rigoureuse et plus simple de certaines situations physiques, néanmoins elle ne décrit pas tous les situations.

Le théoréme centrale de la théorie de la matiére induite est que l'équation du champ à 4 dimensions, $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$, est un sous-ensemble de l'équation .(1.29) avec un tenseur moment-énergie induit $T_{\alpha\beta}$ contenant les propriétés usuelles de la matiére.

1.3.1 Solutions cosmologiques

Il y a beaucoup de solutions exactes de l'équation (1.28) qui donnent des informations au niveau cosmologique. On peut identifier ces solutions du fait que leurs métriques ressemblent à la métique utilisée dans la cosmologie standard, soit la métrique de Robert-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right], \tag{1.30}$$

où $a\,(t)$ est le facteur d'échelle et K une constante experimant la courbure de l'espace-temps. On le voit aussi du fait que la dynamique est régie par des relations semblables aux relations de Friedman. Celles ci sont les équations du champ d'Einstein appliquées à un fluide sans torsion ni vorticité (fluide parfait) décrit par un tenseur moment-énergie donné par

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P)\, u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta},$$

où u_α est le vecteur tangent aux lignes d'univers du fluide, p la pression du le fluide, et ρ la densité d'énergie du fluide. Il est alors facile de montrer qu'on présence d'une constante cosmologique les équations de Friedman s'écrivent

$$8\pi G\rho = \frac{3}{a^2}\left(Kc^2 + \dot{a}^2\right) - \Lambda, \tag{1.31}$$

$$\frac{8\pi G}{c^2}P = \frac{1}{a^2}\left(Kc^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}\right) + \Lambda c^2. \tag{1.32}$$

1.3.1.1 La métrique cosmologique générale

La métrique solution de (1.28) et qui mène à des solution cosmologiques est de la forme suivantes

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\varpi}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) - e^{\mu}dl^2. \tag{1.33}$$

Dans cette équation, on utilise les coordonnées sphériques en plus de la nouvelle coordonnée l. Les differents termes de la métrique ν, μ, ω dépendront en général de t et de l, pour des raisons d'homogénéité et d'isotropie. Les dérivées partielles par rapport à l seront dénotées par un astérisque.

À partir de cette équation on peut trouver les différents composantes du tenseur d'Einstein :

$$G_0^0 = e^{-\nu}\left[\frac{-3\dot{\omega}}{4} - \frac{3\dot{\omega}\dot{\mu}}{4}\right] + e^{-\mu}\left[\frac{3\overset{**}{\omega}}{2} + \frac{3\overset{*}{\omega}^2}{2} - \frac{3\omega\overset{**}{\mu}}{4}\right],$$

$$G_4^0 = e^{-\nu}\left[\frac{3\overset{*}{\dot{\omega}}}{2} + \frac{3\dot{\omega}\overset{*}{\omega}}{4} - \frac{3\dot{\omega}\overset{*}{\nu}}{4} - \frac{3\overset{*}{\omega}\dot{\mu}}{4}\right],$$

$$\begin{aligned} G_1^1 &= G_2^2 = G_3^3 = -e^{-\nu}\left[\ddot{\omega} + \frac{3\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\mu}}{4}\right] \\ &+ e^{-\mu}\left[\overset{**}{\omega} + \frac{3\overset{*}{\omega}^2}{4} + \frac{\overset{**}{\nu}}{2} + \frac{\overset{*}{\nu}^2}{4} - \frac{\overset{*}{\omega}\overset{*}{\mu}}{2} + \frac{\overset{*}{\nu}\overset{*}{\omega}}{2} - \frac{\overset{*}{\nu}\overset{*}{\mu}}{4}\right], \end{aligned}$$

$$G_4^4 = e^{-\nu}\left[\frac{3\ddot{\omega}}{2} + \frac{3\dot{\omega}^2}{4} - \frac{3\dot{\nu}\dot{\omega}}{4}\right] + e^{-\mu}\left[\frac{3\overset{*}{\omega}^2}{4} + \frac{3\overset{*}{\nu}\overset{*}{\omega}}{4}\right]. \tag{1.34}$$

On peut , à l'aide de ces composantes et en les comparant avec le tenseur moment énergie pour un fluide parfait, $T_{AB} = (\rho + P)\, u_A u_B + P g_{AB}$, arriver à des expressions pour la pression et pour la densité. En effet à partir de G_0^0 et de G_1^1 on déduit que

$$8\pi\rho = \frac{-3}{4}e^{-\nu}\dot{\omega}\dot{\mu} + \frac{3}{2}e^{-\mu}\left(\overset{**}{\omega} + \overset{*}{\omega}^2 - \frac{\overset{**}{\mu}\omega}{2}\right),$$

$$8\pi P = e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \frac{\dot{\omega}\dot{\mu}}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\mu}}{4}\right) - e^{-\mu}\left(\overset{**}{\omega} + \frac{3\overset{*}{\omega}^2}{4} + \frac{\overset{**}{\nu}}{2} + \frac{\overset{*}{\nu}^2}{4} - \frac{\overset{*}{\omega}\overset{*}{\mu}}{2} + \frac{\overset{*}{\nu}\overset{*}{\omega}}{2} - \frac{\overset{*}{\nu}\overset{*}{\mu}}{4}\right). \tag{1.35}$$

Ces éqution décrivent des situations physiques en 4D allors qu'elle découlent directement de la géométrie de l'éspace-temps à 5D. Nous devions tout de même vérifier qu élles mèment à des résultats physiques possibles. Pour le faire , on remplace les Eqs. $(1.34), (1.35)$ dans l'équation (1.29). Ceci nous permet de vérifier que la densité est nécessairement positive et que la pression peut en principe être négative et peut certainement être positive. Il faut tout de même noter dans les modéles cosmologiques, il est souvent utile d'introduire une pression négative pour modéliser certaines situations. On vient vérifié la viabilité au niveau cosmologique d'une solution générale de Eq. (1.28) et de (1.29). Cependant, pour ètre plus explicite nous allons étudier des cas plus spécifiques.

1.3.1.2 La solution radiative

Pour obtenir une solution exhibant un comportement typique de la radiation, soit $P = \frac{\rho}{3}$ on pose $\nu = 0$, $\varpi = \log t$, $\mu = -\log t$ dans les Eqs. (1.33). La métrique et les équations de Friedman correspondant à cette solution sont respectivement données par

$$ds^2 = dt^2 - t\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) - t^{-1} dl^2. \tag{1.36}$$

$$8\pi\rho = \frac{3}{4t^2}, \tag{1.37}$$

$$8\pi P = \frac{1}{4t^2}. \tag{1.38}$$

Il est facile de voir que $w = P/\rho = 1/3$.

1.3.1.3 La solution de Ponce de Léon (1988) :

Une solution bien plus générale que la précédente est celle obtenue par Ponce de Léon et qui consiste à poser $e^{\nu} = l^2, e^{\varpi} = t^{\frac{2}{\alpha}} l^{\frac{2}{(l-\alpha)}}, e^{\mu} = \alpha^2 (1-\alpha)^{-2} t^2 dl^2$ dans (1.33). Dans ce cas on obtient [7] :

$$ds^2 = l^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} l^{\frac{2}{(l-\alpha)}} \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) - \alpha^2 (1-\alpha)^{-\alpha} t^2 dl^2. \tag{1.39}$$

Ce qui conduit à une densité d'énergie et une pression données par

$$8\pi\rho = \frac{3}{\alpha^2 l^2 t^2},\ 8\pi p = \frac{2\alpha - 3}{\alpha^2 l^2 t^2}. \tag{1.40}$$

Il est alors aisé de déduire que

$$w = \frac{2}{3}\alpha - 1. \tag{1.41}$$

Ces équations sont fonctions du temps propre $T = lt$. L'utilisation de différents paramètres α amène les équations à décrire des modèles cosmologiques déjà existants. Par exemple, pour $\alpha = \frac{3}{2}$ on obtient $8\pi\rho = \frac{4}{3l^2t^2}$, $p = 0$, $w = 0$, soit le modéle d'Einstein-de Sitter décrivant un univers vieux empli de poussière. Si on utilise $\alpha = 2$ les équations deviennent $8\pi\rho = \frac{3}{4l^2t^2}$, $8\pi p = \frac{1}{4l^2t^2}$, $w = \frac{1}{3}$, et décrivent ainsi un univers dominé par la radiation (la solution radiative déja trouvée ci-dessus, et qui décrit un univers à 4 dimensions dominé par la radiation ou par des particules hautement relativises).

1.3.1.4 L'apparition de la masse

La métrique. (1.36) est représentative de photons sans masse et ne dépend pas du nouveau paramétre l. Par contre, la métrique (1.39), qui gouverne la matiére avec une masse, contient des termes dépandant directement de l. C'est le premier indice que l , la taille de la dimension supplémentaire, est peut-être une mésure du contenu en masse.

La métrique (1.39) , représente un univers contenant de la matiére relativiste et est donc un bon modéle de début de l'univers ($\alpha = 2$) ainsi que de son comportement plus tard $\left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$.

Une information trés intéressant à propos de cette métrique apparît lorsqu'on fait le changement de coordonnées suivant :

$$T = \left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1/\alpha} l^{1/(1-\alpha)} \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) - \frac{\alpha}{2(1-2\alpha)} \left(t^{-1} l^{\alpha/(1-\alpha)}\right) \tag{1.42}$$

$$R = r t^{1/\alpha} l^{1/(1-\alpha)}, \tag{1.43}$$

$$L = \left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1/\alpha} l^{1/(1-\alpha)} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) + \frac{\alpha}{2(1-2\alpha)} \left(t^{-1} l^{\alpha/(1-\alpha)}\right)^{(1-2\alpha)/\alpha}. \tag{1.44}$$

Avec ce changement des coordonnées la métrique de Ponc de Léon s'écrit simplement comme

$$ds^2 = dT^2 - \left(dR^2 + R^2 d\Omega^2\right) - dL^2. \tag{1.45}$$

Cette métrique décrit bien espace-temps non-courbé en 5D. Ceci montre clairement qu'un espace-temps vide et plat en 5D peut représenter l'espace-temps courbé à 4 dimensions.

L'idée d'incorporer $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ dans $R_{AB} = 0$ découle du désir de donner une origine géométrique à la matière au lieu de seulement la considérer comme un élément de la scène cosmique. Dans le cas cosmologique, on a bien vu que des objets tel que la densité d'énergie et la pression apparaître naturellement.

Chapitre 2

Cosmologie quantique et inflation

2.1 Univers primordial

La formation des grandes structures dans l'univers peut être expliquée par la croissance dûe à l'instabilité gravitationnelle de perturbations apparues durant l'ére primordiale de l'univers. Il existe actuellement des théories physiques révolutionnaires capables d'expliquer la création de ces fluctuations et leur évolution. Ces théories font appel aussi bien à la Relativité Générale qu'à la théorie quantique des champs, et c'est ce dernier aspect qui a connu et connait encore un développement spectaculaire, créant une nouvelle discipline à l'interface de la cosmologie et la physique des particules.

En effet pour construire des modèles cosmologiques viables, il faut comprendre la physique qui prévaut à des énergies typiques d l'ordere de 10^{15} Gev. Les empreintes laissées par les fluctuations primordiales dans un scénario donné fournissent des indications sur la physique des forces fondamentalesaux à des échelles d'énergie inaccessibles expérimentalement dans les laboratoires d'aujourd'hui. Cet aspect suscite de nombreuses recherches de la part dse physiciens des hautes énergies, en parallèle avec la précision grandissante des données observationnelles. Cette activité très intense concerne les deux modèles d'univers primordial qui sont actuellement acceptés, les modèles infationnaires et modèles à base de production de défauts topologiques.

2.2 Modèles inflationnaires

Dans les modèles inflationnaires, un (ou plusieurs) champ quantique, l'inflaton, prend des valeurs telles que la densité d'énergie dûe aux interactions devient beaucoup plus grande que l'énergie thermique. Cette densité d'énergie quasi-constante provoque une phase d'accélération de l'expanion de l'univers. L'idée est séduisante pour les physiciens sur plusieurs plans. En effet, si l'accroissement du facteur d'échelle est suffisamment grand, elle permet de relier causalement des régions de l'univers qui sans cela ne le seraient pas, résolvant ainsi des problèmes majeurs du modèle standard de la cosmologie, le Big Bang, comme celui de l'horizon ou encore celui de la platitude. Un autre attrait des modèles inflationnaires est que les fluctuations primordiales de densité ont pour origine les fluctuations quantiques de champs (scalaires). De nombreuses prédictions quantitatives peuvent alors être faites. De manière générale les modèles inflationnaires prédisent des fluctuations scalaires (adiabatique ou isocourbure) et tensorielles, ou ondes gravitationnelles primordiales. Le détail des propriétés de ces fluctuations dépend des modèles considérés. Chacun d'eux contient un nombre limité de paramètres libres variant selon la complexité du modèle et qui déterminent entèrement les fluctuations primordiales à savoir la statistique, le spectre de puissance, etc. Dans la majorité des modèles, il s'agit de fluctuations quantiques du vide, dont une prédiction générique majeure est la statistique gaussienne du champ de fluctuation. De plus, les modèles les plus simples prédisent des spectres de fluctuations scalaires et d'ondes gravitationnelles invariants d'échelle sur les échelles cosmologiques (indices de la puissance spectrale scalaire et tensorielle valant respectivement $n_s \simeq 1$ et $n_T \simeq 0$).

Les propriétés des fluctuations se retrouvent imprimées telles quelles, ou presque, sur les échelles cosmologiques. En effet, pour une échelle donnée, les fluctuations primordiales restent inchangées jusqu'au moment où elles dépassent le rayon de Hubble ; elles induisent alors des fluctuations de température sur la surface de dernière diffusion sur toutes les échelles. Celles-ci sont entièrement prévisibles et calculables dans tout modèle où l'ensemble des paramètres cosmologiques (Ω_0, Ω_Λ, Ω_B.....) sont connus. En particulier, le spectre de fluctuations de température du FRC (Fond de Rayonnement Cosmologique) contient l'empreinte d'une physique des hautes énergies aussi bien que de l'ensemble des paramètres cosmologiques. En effet, la première détection de l'anisotropie de température du FRC par l'expérience COBE a enthousiasmé la communauté scientifique. Toutefois la résolution angulaire était trop médiocre limitant ainsi l'extraction de conditions fortes sur l'univers primordial. Il n'en reste pas moins, que l'observation détaillée avec une plus grande précision des anisotropies de tempéarture du FRC est considérée comme une source de données inestimables pour comprendre et appréhender la nature et l'évolution des fluctuations de densité de l'univers primordial.

2.3 Inflation comme dynamique d'un champ scalaire

2.3.1 L'inflaton

Considérons un univers de Friedmann-Lemaître dont la densité d'énergie est dominée par *un champ scalaire* φ (appelé inflaton). Dans ce cas l'action est donnée par

$$S_\varphi = -\int \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + V(\varphi)\right] d^4x. \tag{2.1}$$

Le champ scalaire peut interagir avec d'autres champs de matiére (ψ^μ, A^μ, χ) (correspondant à des degrés de liberté fermioniques et bosoniques). Pendant l'inflation, nous supposons que la densité d'énergie est dominée par celle de l'inflaton. Le tenseur d'énergie-impulsion du champ φ est donné par

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + V(\varphi)\right]. \tag{2.2}$$

Il est facile de déduire que la densité d'énergie et la pression sont données par

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi), \tag{2.3}$$

$$P_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\varphi)^2 - V(\varphi). \tag{2.4}$$

Si pour un instant t_i donné on a

$$(\dot{\varphi}(x, t_i))^2, (\nabla\varphi(x, t_i))^2 \ll V(\varphi), \tag{2.5}$$

et

$$\varphi(x, t_i) > 0, \tag{2.6}$$

Pour avoir une phase d'expansion accélérée il faut que la densité d'énergie et la pression ρ_φ et P_φ satisfont l'inégalité suivante

$$\rho_\varphi + 3P_\varphi < 0. \tag{2.7}$$

Pour que l'on ait une période d'inflation, les contraintes suivantes

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi), \tag{2.8}$$

$$(\nabla\varphi)^2 \ll V(\varphi)\,, \tag{2.9}$$

doivent être réalisées suffisamment longtemps. Dans le cas de champs scalaires, plusieurs possibilités s'offrent à nous, conduisant à des modéles d'inflation différents (*"ancienne inflation"*, *"nouvelle inflation", "inflation chaotique"*).

Dans le scénario *"ancienne inflation"*, l'inflation est générée par une transition de phase du premier ordre. Un champ scalire est piégé dans un minimum local de son potentiel, imposant une densité d'énergie constante, $\rho_\varphi \approx V(\varphi_i)$, assimilable à une constante cosmologique. Tant que cette phase dure, l'univers est de de Sitter d'expansion exponenetielle. Cette phase est métastable, car le champ peut quitter son minimum local, et rejoindre son minimum global, $V(\varphi_f) = 0$, par effet tunnel. Dans le cas du scénario *"nouvelle inflation"*, le champ scalaire quitte son faux vite en roulant lentement vers son vrai vide. Cette phase de roulement lent est capital pour la génération des fluctuations de densité qui donnent naissances aux grandes structures observées actuellement ([30]). Ce scénario éxige un potentiel très plat autour de φ_i, ce qui est artificiel. Ce scénario a été abondonné à la faveur d'autres scénarios comme l'inflation avec un potentiel polynômial, l'inflation en loi de puissance, et l'inflation hybride faisant intervenir deux champs scalaires couplés.

2.3.1.1 Conditions de roulement lent

Nous allons maintenant quantifier les circonstances dans lesquelles un champ scalaire peut donner lieu à une phase d'inflation.

L'équation du mouvement du champ est

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \tag{2.10}$$

Si nous exigeons que $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$, le champ scalaire peut rouler lentement sur la barrière de potentiel. C'est la raison pour laquelle une telle période est appelée roulement lent. On peut s'attendre à ce que, puisque le potentiel est plat, $\ddot{\varphi}$ est négligeable par rapport à$V(\varphi)$. Nous supposons que cela est vrai et nous allons quantifier cette condition. Sous cette condition uniquement le terme du potentiel domine dans la densité d'énergie de l'inflaton, et la première équation de Friedman s'écrit alors

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\varphi)\,. \tag{2.11}$$

L'équation de mouvement prend la forme simple suivante

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi)\,, \tag{2.12}$$

En utilisant l'équation(2.12) , les conditions de de roulement lent deviennent

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \Longrightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2, \tag{2.13}$$

et

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Longrightarrow V' \ll H^2. \tag{2.14}$$

A ce stade on introduit les paramètres clés pour décrire la phase inflationnaire. Ce sont ϵ, η et δ définis par

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{4\pi \dot{G\varphi}^2}{H^2} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2. \tag{2.15}$$

$$\eta = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right) = \frac{V'}{3H^2}. \tag{2.16}$$

$$\delta = \eta - \epsilon = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}. \tag{2.17}$$

Il est clair que l'inflation peut être maintenue que si $\epsilon < 1$. Dès que cette condition n'est plus valide, l'inflation se termine. En général, l'inflation par roulement lent est maintenue si $\epsilon \ll 1$ et $\eta \ll 1$. Au cours de l'inflation les paramètres de roulement lent peuvent être considérés comme constants dés que le potentiel $V(\varphi)$ est très plat.

En fin on résume les conditions nécessaires pour avoir une pahse d' inflation réussie :

i) une densité d'énergie définie positive $\rho > 0$

ii) la condition d'énergie dominante (DEC) $\rho + 3p < 0$

iii) La dynamique du champ scalaire satisfait aux conditions de roulement lent.

2.3.1.2 Durée de l'inflation et taux d'expansion

Le taux d'expansion entre un instant t et la fin de l'expansion à l'instant t_f est donnée par

$$N(t, t_f) = \int_t^{t_f} H dt \tag{2.18}$$

ce qui donne

$$a(t) = a(t_f)e^{-N}, \tag{2.19}$$

où N, appellé le nombre de *e-folds,* est une mesure de la quantité d'inflation entre l'instant de début de l'inflation et la fin de l'inflation.

2.3.1.3 Fin de l'inflation

On associe la fin de l'inflation à la fin du régime lent caractérisé par

$$\max\ (\varepsilon, \delta) \approx 1. \tag{2.20}$$

A la fin de l'inflation l'univers devient trés plat, qu'on peut négliger tous les effets de coubures.

2.3.1.4 Le spectre de puissance

Nous allons définir maintenant le spectre de puissance, une quantité utile pour caractériser les propriétés des perturbations. Pour une quantité générique $\delta(\boldsymbol{x}; t)$, qui peut représenter des fluctuations primordiales, il est bien plus utile d'écrire son développement suivant le smodes de fourier

$$\delta(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D/2}} e^{i\boldsymbol{kx}} \delta_{\boldsymbol{k}}(t) . \tag{2.21}$$

Comme on a à faire à des champs réels les coefficients δ_k vérifient la relation de conjugaison

$$\delta^*_{\boldsymbol{k}} = \delta_{-\boldsymbol{k}}. \tag{2.22}$$

Dans les modèles de l'univers primordial les fluctuations de densités sont considérées comme des champs aléatoires, et par conséquent on est réduit à calculer les propriétés statistiques des coéfficients δ_k. Ainsi on peut exprimer la fonction de corrélation $\langle \delta(\boldsymbol{x}, t)\delta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle$ comme

$$\langle \delta_{\boldsymbol{k}} \delta_{\boldsymbol{k}'} \rangle = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^{D/2}} \frac{d^D r}{(2\pi)^{D/2}} e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}} e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}} \langle \delta(\boldsymbol{x}, t)\delta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle . \tag{2.23}$$

En intégrant sur $\boldsymbol{x}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{\boldsymbol{k}} \delta_{\boldsymbol{k}'} \rangle &= \int d^D r \delta_{Dirac}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') e^{i\boldsymbol{kr}} \langle \delta(\boldsymbol{x}, t)\delta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle \\
&= \delta_{Dirac}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') \int d^D r e^{i\boldsymbol{kr}} \langle \delta(\boldsymbol{x}, t)\delta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle \\
&= \delta_{Dirac}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') P_\delta(k) ,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où le spectre de puissance est défini par

$$P_\delta(k) = \int d^D r e^{i\boldsymbol{kr}} \langle \delta(\boldsymbol{x}, t)\delta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle . \tag{2.25}$$

Il est utile de définir un spectre de puissance redimensionné

$$\mathcal{P}_\delta(k) = \frac{2S^{[D-2]}}{(2\pi)^D} k^D P_\delta(k), \tag{2.26}$$

où $S^{[D-1]}$ est la surface de la sphère de dimension $D-1$ et rayon unité

$$S^{[D-1]} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \tag{2.27}$$

On inverse (2.25) et on intègre sur les variables angulaires pour déduire que

$$\begin{aligned}\langle \delta(\boldsymbol{x},t)\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\rangle &= \frac{2S^{[D-2]}}{(2\pi)^D}\int \frac{dk}{k} k^D P_\delta(k)\frac{\sin kr}{kr}. \\ &= \int \mathcal{P}_\delta(k)\frac{\sin kr}{kr}\frac{dk}{k}\end{aligned} \tag{2.28}$$

En outre on défini l'indice spectral par la relation

$$n_s - 1 = \frac{d\ln \mathcal{P}_\delta}{d\ln k},$$

où la valeure observée de est $n_s \lesssim 0.016$.

Dans de nombreux cas on distingue deux régimes d'évolution des fluctuations de densité

- Les modes sub-hubble pour lesquels la longueur d'onde des fluctuations est superieure au rayon de Hubble, $k \gg H$. C'est le régime Ultra-Violet (UV).
- Les modes super-Hubble pour lesquels la longueur d'onde des fluctuations est inferieure au rayon de Hubble, $k \ll H$. C'est le régime Infra-Rouge (IR)

Les observations montre que l'univers est presque invariant d'échelle sur les échelles cosmologiques. Dans ce cas on peut considérér le spectre de puissance uniquement pour les modes super-Hubble. Alors on peut prendre $k < \varepsilon k_H(t)$, où $\varepsilon = \frac{k_{max}^{IR}}{k_p} \ll 1$, k_p est le nombre d'ondes de Planck et k_H est le nombre d'ondes qui sépare les secteurs IR et UV. Ici, $k_{max}^{IR} = k_H(t_i)$ est le nombre d'ondes correspondant à l'entrée de l'horizon à l'instant t_i.

2.4 Champ scalaire à 4 dimensions

Considérons l'action suivante où φ est un champ scalaire sans masse couplé avec la gravité

$$S = -\int dx^4 \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R^{(4)} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu}\right] \tag{2.29}$$

où G est la constante gravitationelle et $R^{(4)}$ le scalaire de Ricci, et $\varphi_{;\mu} = \nabla_\mu \varphi$ désigne la dérivée covariante de φ. On remarque que l'action de matière ne contient que le terme cinétique.

Etudions alors l'évolution du champ scalaire dans un univers décrit par la métrique suivante (2.30)

$$ds^2 = dt^2 - e^{2tH} dR^2, \tag{2.30}$$

où $dR^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$. Cette métrique est de type de Sitter, 3D spatialement plate, homogénne et isotrope avec un paramétre de Hubble H constant et une courbure scalaire 4D constante, ${}^{(4)}R = 12H^2$.

2.4.1 Les équations de mouvements

Pour obtenir l'équation d'évolution du champ scalaire, nous utiliserons les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \varphi \right)} \right) = 0. \tag{2.31}$$

Il est facile alors d'obtenir

$$\Box \varphi = 0, \tag{2.32}$$

où

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi \equiv \Box \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \left[\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta} \right]. \tag{2.33}$$

C'est l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire sans masse.

En évaluant (2.33) sur (2.30) on obtient

$$\varphi_{,tt} + 3H\varphi_{,t} - e^{-2tH} \nabla_R^2 \varphi = 0 \ . \tag{2.34}$$

La transformation suivante

$$\varphi\left(t, \vec{R}\right) = e^{\frac{-3}{2}tH_0} \chi\left(t, \vec{R},\right), \tag{2.35}$$

permet d'écrire l'équation de Klein-Gordon pour le champ χ

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{9H^2}{4}\chi - e^{-2tH} \nabla_r^2 \chi = 0. \tag{2.36}$$

Developpons maintenant le champ χ en une série de Fourier suivant le modes ζ_{k_R}

$$\chi\left(t, \vec{R}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k_R \ \left[\mathfrak{a}_{k_R} e^{i\vec{k}_R \vec{R}} \zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}_{k_R}^\dagger e^{-i\vec{k}_R \vec{R}} \zeta_{k_R}^*(t) \right]. \tag{2.37}$$

où l'astérique désigne la conjugaison complèxe et $\left(\mathfrak{a}_{k_R}, \mathfrak{a}_{k_R}^\dagger\right)$ sont les opérateurs d'annihilation et de création vérifiant les relations de commutation usuelles

$$\left[\mathfrak{a}_{k_R}, \mathfrak{a}^{\dagger}_{k'_R}\right] = \delta^{\{3\}}\left(\overrightarrow{k}_R - \overrightarrow{k'}_R\right),$$
$$\left[\mathfrak{a}_{k_R}, \mathfrak{a}_{k'_R}\right] = \left[\mathfrak{a}^{\dagger}{}_{k_R}, \mathfrak{a}^{\dagger}_{k'_R}\right] = 0.$$

Ces relations conduisent à

$$\left[\chi\left(t, \overrightarrow{R}\right), \dot{\chi}\left(t, \overrightarrow{R'}\right)\right] = i\delta^{\{3\}}\left(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{R}'\right).$$

Pour que cette condition soit satisfaite il faut que la condition de renormalisation suivante soit vérifiée

$$\zeta_{\overrightarrow{k}_R}\dot{\zeta}^*_{\overrightarrow{k}_R} - \zeta^*_{\overrightarrow{k}_R}\dot{\zeta}_{\overrightarrow{k}_R} = i. \tag{2.38}$$

En substituant dans (2.36) on obtient

$$\ddot{\zeta}_{k_R}(t) + \left[e^{-2tH}k_R^2 - \frac{9H^2}{4}\right]\zeta_{k_R}(t) = 0. \tag{2.39}$$

Le membre de droite dans (2.38) est tout simplement le Wronskien de deux solutions indépendantes de cette équation, et par conséquent est indépendate de t.

La solution générale de (2.39 est de la forme

$$\zeta_{k_R}(t) = F_1\mathcal{H}_\nu^{(1)}[x(t)] + F_2\mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(t)], \tag{2.40}$$

où $\mathcal{H}_\nu^{(1)}$ et $\mathcal{H}_\nu^{(2)}$ sont les fonctions de Hankel et

$$x(t) = \frac{k_R}{H}e^{-tH} \quad, \nu = \frac{3}{2}. \tag{2.41}$$

En renplaçant (2.38) on obtient

$$(F_1 - F_2)(F_1 + F_2) = \frac{\pi}{4H}.$$

A ce state nous appellons au vide de Bunch-Davis. En théorie quantique des champs sur un espace courbé, il n'existe qu'un seul état du vide sur un fond de de Sitter invariant sous toute les isométries. C'est un état thermique à la température $T = \frac{H}{2\pi}$.

En utilisant le vide généralisé de Bunch-Davis on a $F_1 = 0$ et $F_2 = i\sqrt{\frac{\pi}{4H}}$, et alors on obtient

$$\zeta_{k_R}(t) = i\sqrt{\frac{\pi}{4H}}\mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(t)]. \tag{2.42}$$

Une comparaison entre (2.41) et (2.17) montre que le paramétre δ de roulement lent est alors nul.

2.5 Densité d'énergie et pression

L' expression de tenseur moment-énergie du champ scalaire est donné par

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi \right) g_{\mu\nu}. \tag{2.43}$$

Il est alors facile de déduire que

$$\langle \rho \rangle = \left\langle \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{e^{-2Ht}}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 \right\rangle. \tag{2.44}$$

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{e^{-2Ht}}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 \right\rangle. \tag{2.45}$$

En utilisant (2.37) et en substituant dans (2.44) on obtient

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left(\dot{\chi}^2 - \frac{3H}{2} (\dot{\chi} \chi + \chi \dot{\chi}) + \frac{9H^2}{4} \chi^2 \right) e^{-3tH} - e^{-2Ht} e^{-3tH} \left(\vec{\nabla} \chi \right)^2 \right\rangle. \tag{2.46}$$

En termes des modes de Fourier cette relation devient

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = \frac{e^{-3tH}}{(2\pi)^3} \int d^3 k_R \Bigg\{ & \frac{1}{2} \dot{\zeta}_{k_R}(t) \dot{\zeta}^*_{k_R}(t) - \frac{3H}{4} \left(\dot{\zeta}_{k_R}(t) \overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t) + \zeta_{k_R}(t) \dot{\zeta}^*_{k_R}(t) \right) \\ & + \frac{9H^2}{8} \zeta_{k_R}(t) \overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t) + \frac{k_R^2}{2} e^{-2Ht} \zeta_{k_R}(t) \overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

En utilisant le comportement asymtotique des fonctions de Hankel pour un argument petit et $\nu > 0$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(t)] = -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2} \right)^{-\nu}, \tag{2.48}$$

on montre que

$$\zeta_{k_R}(t) \overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t) = \frac{1}{\pi} \Gamma^2(\nu) 2^{2\nu-2} H^{2\nu-1} \left(k_R e^{-tH} \right)^{-2\nu}. \tag{2.49}$$

$$\dot{\zeta}_{k_R}(t) \overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t) = \frac{\nu}{\pi} \Gamma^2(\nu) 2^{2\nu-2} H^{2\nu} \left(k_R e^{-tH} \right)^{-2\nu}. \tag{2.50}$$

$$\zeta_{k_R}(t) \dot{\zeta}^*_{k_R}(t) = \frac{\nu}{\pi} \Gamma^2(\nu) 2^{2\nu-2} H^{2\nu} \left(k_R e^{-tH} \right)^{-2\nu}. \tag{2.51}$$

$$\dot{\zeta}_{k_R}(t) \dot{\zeta}^*_{k_R}(t) = \frac{\nu^2}{\pi} H^{2\nu+1} \Gamma^2(\nu) (2)^{2\nu-2} \left(k_R e^{-tH} \right)^{-2\nu}. \tag{2.52}$$

Remplaçons $(2.49), (2.50), (2.51)\,(2.52),$ dans (2.47) et considérant le secteur IR où $0 <$

$k_R \leq \varepsilon k_H$, où ε est un paramétre sans dimension de l'ordre de $10^{-3} - 10^{-8}$.

$$\langle\rho\rangle = \frac{e^{-3tH}}{(\pi)^3} 2^{2\nu-3} H^{2\nu+1} \left(e^{-tH}\right)^{-2\nu} \Gamma^2(\nu) \left\{ \int_0^{\varepsilon k_H} \left(\frac{\nu^2}{2} - \frac{3\nu}{2} + \frac{9}{8} \right) (k_R)^{-2\nu+2} \; dk_R + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\varepsilon k_H} \left(\frac{k_R^{(-2\nu+4)}}{2H^2} e^{-2Ht} \right) \; dk_R \right\}.$$

.

En intégrant sur k_R on obtient

$$\langle\rho\rangle = \frac{-e^{-3tH}}{(\pi)^3} 2^{2\nu-5} H^{2\nu+1} \left(e^{-tH}\right)^{-2\nu} \Gamma^2(\nu) \left\{ \left(\nu - \frac{3}{2} \right) (k_R)^{-2\nu+3} + \frac{e^{-2Ht} k_R^{(-2\nu+5)}}{2H^2(-2\nu+5)} \right\} \Bigg|_0^{\varepsilon k_H}, \tag{2.53}$$

où

$$k_R^2 \ll k_H^2 \quad \text{et} \quad k_H = He^{Ht} \;, \nu = \frac{3}{2}.$$

Finalement , on déduit que

$$\langle\rho\rangle \simeq 0. \tag{2.54}$$

Le calcule de la pression $\langle P\rangle$ se fait selon les même étapes et on arrive au résulat

$$\langle P\rangle \simeq 0. \tag{2.55}$$

Il est clair qu'à partir de la solution exprimant les modes, le spectre de puissance est donnée par $\mathcal{P}_\zeta \sim |\zeta_k|^2 \sim k_R^{3-2\nu}$, et on a alors $n_s = 3 - 2\nu$. Comme $\nu = 3/2$, on déduit que $n_s = 0$. Dans ce modèle où nous avons utilisé un champ scalaire purement cinitique (sans potentiel) conduisant à un indice spectral nul. Ce qui signifie que le spectrte de puissance des fluctuations scalaires est invariant d'échelle (On dit aussi spectre plat). Ces données ($n_s = 0$ et $\langle\rho\rangle \simeq 0$) caracérise un univers homogène et isotrope.

2.6 Champ vectoriel quantifié à 4 dimensions

L'inflation maintenue par un champ vectoriel a été premièrement réalisée dans la Réf [8]. Récemment, un modèle réussi d'inflation par un champ vectoriel a été construit en utilisant un ensemble orthogonal de vecteurs avec couplage non-minimal à la gravité [9]. De plus, si un champ vectoriel existe, l'inflation anisotrope peut être réalisable [10]. Le champ vectoriel est également considéré pour expliquer le problème de l'énergie sombre [11]. Cependant, la plupart des modèles de champ vectoriel sont infestées par des instabilités ou par les modes fantômes [12, 13].

2.6.1 Equations de mouvements

Considérons l'action suivante décrivant un fluide cosmique représenté par un champ vectoriel A^μ couplé non-minimalement à la gravité, dans un espace-temps décrit par la métrique de De Sitter (2.30),

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R^{(4)} - \frac{1}{2} K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \right], \tag{2.56}$$

où

$$K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \beta_1 g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \beta_2 \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma + \beta_3 \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho. \tag{2.57}$$

et les β_i sont des paramètres sans dimensions.

La densité Lagrangienne du champ vectoriel A^μ est alors

$$\mathcal{L}(A^\mu, A^\mu_{;\nu}) = \frac{1}{2} \left(K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \right), \tag{2.58}$$

Le terme cinétique standard de Maxwell, -$\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, correspond à $\beta_1 = -\beta_3 = 1$, et $\beta_2 = 0$. Dans [14] les auteurs ont classé plusieurs modéles en termes des β_i's. Parmi ces modèles, on trouve le modèle $\beta_1 = \beta_T$, le modèle $\beta_T = 0$ et le modèle $\beta_1 = 0$ modèle, où $\beta_T = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$.

Pour déduire les équations d'évolutions du champ A^μ, nous allons utiliser les équations d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial^{(4)} L}{\partial A_\alpha} - \nabla_\lambda \left(\frac{\partial^{(4)} L}{\partial \left(\nabla_\lambda A_\alpha \right)} \right) = 0. \tag{2.59}$$

Le premièr terme est nul, et le second est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(4)} L}{\partial \left(\nabla_\lambda A_\alpha \right)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \left[K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \right]}{\partial \left(\nabla_\lambda A_\alpha \right)} \\ &= -\frac{1}{2} K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \left[\frac{\partial \left(\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \right)}{\partial \left(\nabla_\lambda A_\alpha \right)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\beta_1 g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \beta_2 \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma + \beta_3 \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho \right] \left[\delta^\lambda_\mu \delta^{\rho\alpha} \left(\nabla_\nu A^\sigma \right) + \delta^\lambda_\nu \delta^{\sigma\alpha} \left(\nabla_\mu A^\rho \right) \right]. \end{aligned} \tag{2.60}$$

En évaluant les dérivées covariantes on obtient

$$\frac{\partial^{(4)} L}{\partial \left(\nabla_\lambda A_\alpha \right)} = - \left[\beta_1 \nabla^\lambda A^\alpha + \beta_2 g^{k\alpha} \delta^\lambda_k \nabla_\mu A^\mu + \beta_3 \nabla^\alpha A^\lambda \right]. \tag{2.61}$$

En remplaçant dans les équations d'Euler-Lagrange on obtient

$$\beta_1 \Box A^\alpha + \beta_2 \nabla^\alpha \nabla_\mu A^\mu + \beta_3 \nabla_\mu \nabla^\alpha A^\mu = 0. \tag{2.62}$$

Par la suite nous anayserons le cas où $A^\alpha = \left(A^0 = \varphi,\, \overrightarrow{0}\right)$. En effet, montre que

$$\begin{aligned}
\beta_1 \Box A^\alpha &= g^{\sigma\alpha} \beta_1 \left[\nabla_\lambda \nabla^\lambda A_\sigma\right] \\
&= \beta_1 g^{\sigma\alpha} \left[\partial_\lambda \left(\nabla^\lambda A_\sigma\right) + \Gamma^\lambda_{\lambda\beta}\left(\nabla^\beta A_\sigma\right) - \Gamma^\beta_{\lambda\sigma}\left(\nabla^\lambda A_\beta\right)\right]. \\
&= B_1 g^{\sigma\alpha} \left[\partial_\lambda \left(\partial^\lambda A_\sigma - \Gamma^{\lambda\rho}{}_\sigma A_\rho\right) + \Gamma^\lambda_{\lambda\beta}\left(\partial^\beta A_\sigma - \Gamma^{\beta\rho}{}_\sigma A_\rho\right) - \Gamma^\beta_{\lambda\sigma}\left(\partial^\lambda A_\beta - \Gamma^{\lambda\rho}{}_\beta A_\rho\right)\right] \\
&= B_1 g^{\sigma\alpha} \left[\partial_0 \left(\partial^0 A_\sigma\right) + \partial_i \left(\partial^i A_\sigma\right) - \partial_0 \left(\Gamma^{00}{}_\sigma A_0\right) - \partial_i \left(\Gamma^{i0}{}_\sigma A_0\right) + \Gamma^\lambda_{\lambda 0}\left(\partial^0 A_\sigma\right)\right. \\
&- -\Gamma^\lambda_{\lambda 0}\Gamma^{00}{}_\sigma A_0 - \Gamma^\lambda_{\lambda i}\Gamma^{i0}{}_\sigma A_0 - \Gamma^0_{0\sigma}\left(\partial^0 A_0\right) - \Gamma^0_{i\sigma}\left(\partial^i A_0\right) + \Gamma^\beta_{0\sigma}\Gamma^{00}{}_\beta A_0 + \left.\Gamma^\beta_{i\sigma}\Gamma^{i0}{}_\beta A_0\right]
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Pour $\alpha = 0$ arrive à

$$\begin{aligned}
\beta_1 \Box A^\alpha &= g^{00} B_1 \left[\partial_0 \left(\partial^0 A_0\right) + \partial_i \left(\partial^i A_0\right) + \Gamma^i_{i0}\left(\partial^0 A_0\right) + g^{ki}\Gamma^j_{i0}\Gamma^0_{jk} A_0\right] \\
&= g^{00} B_1 \left[\partial_0 \left(\partial_0 A_0\right) + g^{ji}\partial_i \left(\partial_j A_0\right) + 3\left(\partial_0 A^0\right) H_0 - e^{-2tH_0}\delta^{ki}\delta^i_j \delta_{jk} H_0 H_0 e^{2tH_0}\right].
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Finalement on a

$$\beta_1 \Box A^0 = \beta_1 \left[A^0_{,tt} + 3A^0_{,t} H - e^{-2tH_0}\nabla^2_r A^0 - 3H^2 A^0\right].$$

Considérons le deuxiéme terme donné par

$$\begin{aligned}
\beta_2 \nabla^\alpha \nabla_\mu A^\mu &= \beta_2 g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda \left[3HA^0 + A^0_{,t}\right] \\
&= \beta_2 g^{00} \partial_0 \left[3HA^0 + A^0_{,t}\right], \\
&= -\beta_2 \left[3HA^0_{,t} + A^0_{,tt}\right].
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Pour le $3^{\underline{\text{éme}}}$terme on a

$$\begin{aligned}
\beta_3 \nabla_\mu \nabla^\alpha A^\mu &= \beta_3 g^{\alpha\lambda} \nabla_\mu \nabla_\lambda A^\mu \\
&= \beta_3 g^{\alpha\lambda} \left[\partial_\mu \left(\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} A^\rho\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\left(\partial_\sigma A^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} A^\rho\right)\right. \\
&+ \left.\Gamma^\mu_{\mu\sigma}\left(\partial_\lambda A^\sigma + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} A^\rho\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\beta_3 \nabla_\mu \nabla^\alpha A^\mu &= \beta_3 g^{00}\left[\partial_0\left(\partial_0 A^0\right) - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{i0}A^0 + \Gamma^i_{i0}\left(\partial_0 A^0\right)\right] \\
&= \beta_3[A^0_{,tt} + 3HA^0_{,t} - 3H^2A^0].
\end{aligned} \tag{2.67}
$$

On remplaçe dans (2.62)

$$
\left[A^0_{,tt} + 3HA^0_{,t}\right] - \frac{\beta_1}{\beta_T}\left[e^{-2tH}\nabla^2_R A^0\right] + 3\left(\frac{\beta_2}{\beta_T} - 1\right)H^2A^0 = 0. \tag{2.68}
$$

avec $\beta_T = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$.
Comme $A^0\left(t, \vec{R}\right) \equiv \varphi\left(t, \vec{R}\right)$ l'équation (2.68) s'écrit

$$
\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2tH}\left(\nabla^2_R\varphi\right) + 3H^2\left(\frac{\beta_2}{\beta_T} - 1\right)\varphi = 0. \tag{2.69}
$$

Notons que le dernier terme agit comme un potentiel effectif pour le champ A^0. Si on compare (2.69) et (2.34) obtenue dans le cas d'un champ scalaire, on déduit que, contrairement au champ scalaire sans masse. le champ vectoriel décrit par une action purement cinétique acquière une masse. Ce résultat est prometteur pour pouvoir décrire une phase inflationnaire de l'évolution de l'univers.

Effectuons la tronsformation suivante

$$
\varphi\left(t, \vec{R}\right) = e^{\frac{-3}{2}tH}\chi\left(t, \vec{R},\right), \tag{2.70}
$$

avec

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\chi}{\partial t}e^{\frac{-3t}{2}H} - \frac{3H}{2}e^{\frac{-3t}{2}}\chi, \tag{2.71}
$$

$$
\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)e^{\frac{-3t}{2}H} - 3He^{\frac{-3t}{2}H}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) + \frac{9H_0^2}{4}e^{\frac{-3t}{2}H_0}\chi. \tag{2.72}
$$

Par substitution dans (2.69) on obtient l'équation de KG pour le champ χ

$$
\ddot{\chi} - \frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2tH_0}\nabla^2_R\chi + \left[3\frac{\beta_2}{\beta_T}H^2 - \frac{21}{4}H^2\right]\chi = 0\ , \tag{2.73}
$$

Il est clair que le dernier terme est le terme de masse du champ χ.

Développons mantenant χ en termes des modes de Fourier

$$
\chi\left(t, \vec{R}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_R\ \left[\mathfrak{a}_{k_R}e^{i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R}e^{-i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta^*_{k_R}(t)\right]. \tag{2.74}
$$

Remplaçons dans l'équation (2.73)

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_R\left\{\mathfrak{a}_{k_R}e^{i\vec{k}_R\vec{R}}\left[\frac{\partial^2\zeta_{k_R}(t)}{\partial t^2}+\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2tH_0}(k_R^2)\zeta_{k_R}(t)\right.\right.$$
$$\left.+\left(3\beta_2H_0^2-\beta_T\frac{21}{4}H_0^2\right)\frac{1}{\beta_T}\zeta_{k_R}(t)\right]+\mathfrak{a}^\dagger_{k_R}e^{-i\vec{k}_R\vec{R}}\left[\frac{\partial^2\zeta^*_{k_R}(t)}{\partial t^2}+\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2tH_0}(k_R^2)\zeta^*_{k_R}(t)\right.$$
$$\left.\left.+\left(3\beta_2H_0^2-\beta_T\frac{21}{4}H_0^2)\right)\frac{1}{\beta_T}\zeta^*_{k_R}(t)\right]\right\}=0.$$

Avec

$$\mathfrak{a}_{k_R}\neq 0\neq e^{i\vec{k}_R\vec{R}},\quad \mathfrak{a}^\dagger_{k_R}\neq 0\neq e^{-i\vec{k}_R\vec{R}}$$

L'équation de mouvement pour les modes $\zeta_{k_R}(t)$ est alors donnée par

$$\ddot{\zeta}_{k_R}(t)+\left[\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2tH}k_R^2-\left(\frac{21}{4}-3\frac{\beta_2}{\beta_T}\right)H^2\right]\zeta_{k_R}(t)=0, \tag{2.75}$$

On remarque l'apparence d'un terme de masse donnée par

$$m^2=3\left(\frac{7}{4}-\frac{\beta_2}{\beta_T}\right)H^2. \tag{2.76}$$

La solution générale de l'équation (2.75) est donnée en termes des fonctions de Hankel

$$\zeta_{k_R}(t)=F_1\mathcal{H}^{(1)}_\nu[x(t)]+F_2\mathcal{H}^{(2)}_\nu[x(t)]\ , \tag{2.77}$$

Si on considère les conditions de Bunch- Davies

$$F_1=0 \text{ et } F_2=i\sqrt{\frac{\pi}{4H}}, \tag{2.78}$$

on obtient

$$\zeta_{k_R}(t)=i\sqrt{\frac{\pi}{4H}}\mathcal{H}^{(2)}_\nu[x(t)], \tag{2.79}$$

où

$$x(t)=\frac{e^{-tH}k_R}{H}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}.\quad \nu=\sqrt{\frac{21}{4}-3\frac{\beta_2}{\beta_T}}. \tag{2.80}$$

La réalité de ν (qui est aussi la réalité de la masse de χ) conduit à la condition suivante

$$\frac{\beta_2}{\beta_T}\leq\frac{7}{4}.$$

2.6.2 Fluctuations du champ

En utilisant les équations (2.74) et (2.70) on a

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi^2 \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-3tH_0} \int\int d^3k_R d^3\acute{k}_R \left\langle 0 \left| \left[\mathfrak{a}_{k_r k_\Psi} e^{i\vec{k}_R \vec{R}} \zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R k_\Psi} e^{-i\vec{k}_R \vec{R}} \zeta^*_{k_R}(t) \right] \right.\right. \\ &\left.\left. \left[\mathfrak{a}_{k_{\vec{R}} \acute{k}_\Psi} e^{i\vec{\acute{k}}_R \vec{\acute{R}}} \zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_{\acute{R}}} e^{-i\vec{\acute{k}}_r \vec{\acute{R}}} \zeta^\star_{\acute{k}_R}(t) \right] \right| 0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-3tH} \int\int d^3k_R d^3k_R \left[e^{i\left(\vec{k}_R \vec{R} - \vec{k}_{\acute{R}} \vec{\grave{R}}\right)} \zeta_{k_R}(t) \zeta^\star_{\acute{k}_R}(t) \right] \left\langle 0 \left| \mathfrak{a}_{k_R k_\Psi} \mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_R \acute{k}_\Psi} \right| 0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-3tH} \int\int d^3k_R d^3\acute{k}_R \left[e^{i\left(\vec{k}_R \vec{R} - \vec{\acute{k}}_R \vec{\acute{R}}\right)} \zeta_{k_R}(t) \zeta^\star_{\acute{k}_R}(t) \right] \langle 0 \mid 0 \rangle \, \delta^{(3)}\left(\vec{k}_R - \vec{\acute{k}}_R \right).\end{aligned} \tag{2.81}$$

Grâce à la propriété

$$\int dx f(x) \delta(x-a) = f(a), \tag{2.82}$$

on obtient

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \frac{e^{-3tH}}{2\pi^2} \int \frac{dk_R}{k_R} k_R^3 \zeta_{k_R}(t) \zeta^\star_{k_R}(t) \tag{2.83}$$

Intéressons nous maintenant au calcul de la valeur moyenne du champ dans le secteur IR, où le mode de Fourier s'écrit

$$\zeta_{k_R}(t) = i\sqrt{\frac{\pi}{4H}} \mathcal{H}^{(2)}_\nu[x(t)]. \tag{2.84}$$

Ce résultat est obtenu grâce au comportement de la fonction de Hankel pour x petit et $\nu > 0$,

$$\mathcal{H}^{(2)}_\nu[x(t)] = -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}. \tag{2.85}$$

En substituant (2.84) dans (2.83) on obtient

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \frac{(2)^{2\nu-1}}{4H\pi^3} e^{-3tH_0} \int_0^{\varepsilon k_H} \frac{dk_R}{k_R} k_R^3 \Gamma^2(\nu) x(t)^{-2\nu}. \tag{2.86}$$

Comme

$$x(t) = \frac{e^{-tH} k_R}{H} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}, \tag{2.87}$$

on arrive à l'expression

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^3} H^{2\nu-1} \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \right)^{-2\nu} \Gamma^2(\nu) e^{-(3-2\nu)tH} \int_0^{\varepsilon k_H} \frac{dk_R}{k_R} k_R^{3-2\nu}. \tag{2.88}$$

En utilisant la définition du spectre de puissance $\mathcal{P}(k_R)$, on déduit alors

$$\mathcal{P}(k_R) \sim \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-2\nu} \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^3}\Gamma^2\left(\nu\right) H_0^{2\nu-1} e^{-(3-2\nu)tH_0} k_R^{3-2\nu}. \tag{2.89}$$

Aprés intégration sur k_R on obtient

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{H^2 2^{-n_s}}{\pi^3}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} \frac{(\varepsilon)^{n_s}}{n_s}, \tag{2.90}$$

A partir de la définition de l'indice spectral on obtient

$$n_s = 3 - 2\nu, \tag{2.91}$$

et en utilisant la relation (2.80) donnant ν on arrive à la relation

$$n_s = 3 - 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{7}{4} - \frac{\beta_2}{\beta_T}}. \tag{2.92}$$

2.6.3 Densité d'énergie du champ

L'éxpréssion de la densité d'énergie est calculée dans l'annexe et est donnée par

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}\rangle = \Big\langle & \beta_1\left(\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A_\rho - \nabla^\rho A_\mu \nabla_\rho A_\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\nabla_\rho\left(A_\nu J^\rho{}_\mu + A_\mu J^\rho{}_\nu\right)\right.\\ & + \nabla_\rho\left(A^\rho J_{\mu\nu} + A^\rho J_{\nu\mu}\right) - \nabla_\rho(A_\nu J_\mu{}^\rho + A_\mu J_\nu{}^\rho)\big]\\ & - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[\beta_1\left(\nabla^\rho A_\alpha \nabla_\rho A^\alpha\right) + \beta_2\left(\nabla_\rho A^\rho\right)^2 + \beta_3\left(\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho\right)\right]\Big\rangle,\end{aligned} \tag{2.93}$$

La densité d'énergie se calcule à partir de $\rho = T^0_0$.

– En effet, considérons le premier terme

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A_\rho &= (\partial_\mu A^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\alpha}A^\alpha)(\partial_\nu A_\rho - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}A_\alpha)\\ &= \left(\partial_0 A^0\right)\left(\partial_0 A_0\right) - \left(\partial_0 A^0\right)\Gamma^0_{00}A_0 + \Gamma^0_{00}A^0\left(\partial_0 A_0\right)\\ &\quad - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00}A^0A_0 - \Gamma^i_{00}\Gamma^0_{0i}A^0A_0\\ &= \left(\partial_0 A^0\right)\left(\partial_0 A_0\right).\end{aligned} \tag{2.94}$$

Le terme $(\nabla^\rho A_\mu \nabla_\rho A_\nu)$:

$$\nabla^{\rho}A_{\mu}\nabla_{\rho}A_{\nu} = \left(\partial^{\rho}A_{\mu} - \Gamma^{\rho\alpha}{}_{\mu}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\rho}A_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}A_{\alpha}\right)$$
$$= \left(\partial^{0}A_{0}\right)\left(\partial_{0}A_{0}\right) + \left(\partial^{i}A_{0}\right)\left(\partial_{i}A_{0}\right), \tag{2.95}$$

alors

$$\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A_{\rho} - \nabla^{\rho}A_{\mu}\nabla_{\rho}A_{\nu} = \left(\partial_{0}A^{0}\right)\left(\partial_{0}A_{0}\right) - \left(\partial^{0}A_{0}\right)\left(\partial_{0}A_{0}\right) - \left(\partial^{i}A_{0}\right)\left(\partial_{i}A_{0}\right), \tag{2.96}$$

– Le deuxiéme terme est donné par

$$\nabla_{\rho}\left(A_{\nu}J^{\rho}{}_{\mu}\right) = \left(\nabla_{\rho}A_{\nu}\right)J^{\rho}{}_{\mu} + \left(\nabla_{\rho}J^{\rho}{}_{\mu}\right)A_{\nu}, \tag{2.97}$$

où

$$J^{\rho}{}_{\mu} = \beta_{1}\nabla^{\rho}A_{\mu} + \beta_{2}\delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\alpha}A^{\alpha} + \beta_{3}\nabla_{\mu}A^{\rho}, \tag{2.98}$$

Alors

$$\nabla_{\rho}\left(A_{\nu}J^{\rho}{}_{\mu}\right) = \left[\beta_{1}\left(\partial_{0}A_{0}\right)\left(\partial^{0}A_{0}\right) + \beta_{1}(\partial_{i}A_{0})(\partial^{i}A_{0}) + \beta_{2}\delta^{0}_{0}(\partial_{0}A_{0})\left(\partial_{0}A^{0} + \Gamma^{i}_{i0}A^{0}\right)\right.$$
$$\left. + \beta_{3}(\partial_{0}A_{0})(\partial_{0}A^{0})\right] + \left[\beta_{1}\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}A_{\mu} + \beta_{2}\delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\rho}\nabla_{\alpha}A^{\alpha} + \beta_{3}\nabla_{\rho}\nabla_{\mu}A^{\rho}\right]A_{\nu}. \tag{2.99}$$

On calcule les terme suivants :

$$\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}A_{\mu} = \partial_{\rho}\left(\nabla^{\rho}A_{\mu}\right) + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\left(\nabla^{\lambda}A_{\mu}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\left(\nabla^{\rho}A_{\lambda}\right)$$
$$= \partial_{\rho}\left(\partial^{\rho}A_{\mu} - \Gamma^{\rho\alpha}{}_{\mu}A_{\alpha}\right) + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\left(\partial^{\lambda}A_{\mu} - \Gamma^{\lambda\alpha}{}_{\mu}A_{\alpha}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\left(\partial^{\rho}A_{\lambda} - \Gamma^{\rho\alpha}{}_{\lambda}A_{\alpha}\right)$$
$$= g^{00}\partial_{0}(\partial_{0}A_{0}) + g^{ij}\partial_{i}(\partial_{j}A_{0}) + g^{00}\Gamma^{i}_{i0}(\partial_{0}A_{0}) + g^{jk}\Gamma^{i}_{j0}\Gamma^{0}_{ki}A_{0}.$$
$$= \partial_{0}\partial_{0}A_{0} - e^{\frac{-2t}{\Psi_{0}}}\nabla^{2}_{r}A_{0} + 3H(\partial_{0}A_{0}) - 3H^{2}A_{0}. \tag{2.100}$$

$$\delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\rho}\nabla_{\alpha}A^{\alpha} = \delta^{\rho}_{\mu}\left[\partial_{\rho}\left(\nabla_{\alpha}A^{\alpha}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}\left(\nabla_{\lambda}A^{\alpha}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}\left(\nabla_{\alpha}A^{\lambda}\right)\right]$$
$$= \delta^{\rho}_{\mu}\left[\partial_{\rho}\left(\partial_{\alpha}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}A^{\lambda}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}\left(\partial_{\lambda}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}A^{\beta}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}\left(\partial_{\alpha}A^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}A^{\beta}\right)\right]$$
$$= \delta^{0}_{0}\left[\partial_{0}(\partial_{0}A^{0}) + \partial_{0}(\delta^{i}_{i}HA^{0})\right],$$
$$= \left[\partial_{0}\partial_{0}A^{0} + 3H\left(\partial_{0}A^{0}\right)\right]. \tag{2.101}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho \nabla_\mu A^\rho &= \partial_\rho \left(\nabla_\mu A^\rho\right) - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\left(\nabla_\lambda A^\rho\right) + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\left(\nabla_\mu A^\lambda\right) \\
&= \partial_\rho(\partial_\mu A^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}A^\lambda) - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}(\partial_\lambda A^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\beta}A^\beta) + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\left(\partial_\mu A^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\beta}A^\beta\right) \\
&= \partial_0\left(\partial_0 A^0\right) - \Gamma^j_{i0}\Gamma^i_{j0}A^0 + \Gamma^j_{j0}\left(\partial_0 A^0\right), \\
&= \partial_0\partial_0 A^0 + 3H\left(\partial_0 A^0\right) - 3H^2 A^0, \qquad (2.102)
\end{aligned}
$$

Finalement, en remplaçant dans (2.99), on obtient

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho\left(A_\nu J^\rho{}_\mu\right) = &\left[\beta_1(A_{0,t})^2 + \beta_1(\partial_i A_0)(\partial^i A_0) + \beta_2\delta^0_0(A_{0,t})\left(A^0_{,t} + \frac{3}{\Psi_0}A^0\right) + \beta_3\left(A_{0,t}\right)\left(A^0_{,t}\right)\right] \\
&+\left[\beta_1\left(A_{0,tt} - e^{\frac{-2t}{\Psi_0}}\nabla^2_r A_0 + \frac{3}{\Psi_0}A_{0,t} - \frac{3}{\Psi_0^2}A_0\right) + \beta_2\left(A^0_{,tt} + \frac{3}{\Psi_0}A^0_{,t}\right) + \right. \\
&\left. +\beta_3\left(\partial_0\partial_0 A^0 + \frac{3}{\Psi_0}\partial_0 A^0 - \frac{3}{\Psi_0^2}A^0\right)\right] A_0. \qquad (2.103)
\end{aligned}
$$

On a aussi

$$
\nabla_\rho\left(A_\mu J^\rho{}_\nu\right) \equiv \nabla_\rho\left(A_\nu J^\rho{}_\mu\right). \qquad (2.104)
$$

– Le troisième terme $\nabla_\rho\left(A^\rho J_{\mu\nu} + A^\rho J_{\nu\mu}\right)$.

Nous avons

$$
\nabla_\rho\left(A^\rho J_{\mu\nu}\right) = (\nabla_\rho A^\rho)J_{\mu\nu} + (\nabla_\rho J_{\mu\nu})A^\rho, \qquad (2.105)
$$

avec

$$
J_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}J^\alpha{}_\nu = \beta_1\nabla_\mu A_\nu + \beta_2\delta_{\mu\nu}\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\nu A_\mu. \qquad (2.106)
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho\left(A^\rho J_{\mu\nu}\right) = &\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right)\left[\beta_1\nabla_\mu A_\nu + \beta_2\delta_{\mu\nu}\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\nu A_\mu\right] + \\
&\left[\beta_1\nabla_\rho\nabla_\mu A_\nu + \beta_2\delta_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\rho\nabla_\nu A_\mu\right] A^\rho \qquad (2.107)
\end{aligned}
$$

on bien

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho\left(A^\rho J_{\mu\nu}\right) = &\left(\partial_0 A^0 + \frac{3}{\Psi_0}A^0\right)\left[\beta_1\left(\partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda\right) + \beta_2\delta_{\mu\nu}\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right) + \right. \\
&\left. + \beta_3\left(\partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}A_\lambda\right)\right] + \left[\beta_1\nabla_\rho\nabla_\mu A_\nu + \beta_2\delta_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\rho\nabla_\nu A_\mu\right] A^\rho.
\end{aligned}
\qquad (2.108)
$$

On calcule les termes suivants :

$$\begin{aligned}\nabla_\rho \nabla_\mu A_\nu &= \partial_\rho \left(\nabla_\mu A_\nu\right) - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\left(\nabla_\lambda A_\nu\right) - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\left(\nabla_\mu A_\lambda\right) \\ &= \partial_\rho \left(\partial_\mu A_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha\right) - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\left(\partial_\lambda A_\nu - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} A_\alpha\right) - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\left(\partial_\mu A_\lambda - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} A_\alpha\right) \\ &= \partial_\rho(\partial_0 A_0) - \Gamma^\lambda_{\rho 0}(\partial_\lambda A_0), \end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\nabla_\rho \nabla_\alpha A^\alpha = \partial_\rho \left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right). \tag{2.110}$$

$$\nabla_\rho \nabla_\nu A_\mu = \partial_\rho(\partial_0 A_0) - \Gamma^\lambda_{\rho 0}(\partial_\lambda A_0). \tag{2.111}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\nabla_\rho \left(A^\rho J_{\mu\nu}\right) = &\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right)\left[\beta_1(\partial_0 A_0) + \beta_2 \delta_{\mu\nu}\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right) + \beta_3(\partial_0 A_0)\right] \\ &+ \left[\beta_1\left(\partial_0\partial_0 A_0\right) + \beta_2 \partial_0\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right) + \beta_3\left(\partial_0\partial_0 A_0\right)\right] A^0 \\ &+ \left[\beta_1\left(\partial_0\partial_0 A_0\right) + \beta_2 \partial_0\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right) + \beta_3\left(\partial_0\partial_0 A_0\right)\right] A^0. \end{aligned} \tag{2.112}$$

On a aussi

$$\nabla_\rho \left(A^\rho J_{\mu\nu}\right) \equiv \nabla_\rho \left(A^\rho J_{\nu\mu}\right). \tag{2.113}$$

– Le quatrième terme $\nabla_\rho \left(A_\nu J_\mu{}^\rho + A_\mu J_\nu{}^\rho\right)$.

On a

$$J_\mu{}^\rho = g_{\mu\alpha} g^{\beta\rho} J^\alpha{}_\beta = \beta_1 \nabla_\mu A^\rho + \beta_2 \delta^\rho_\mu \nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3 \nabla^\rho A_\mu. \tag{2.114}$$

$$\nabla_\rho \left(A_\nu J_\mu{}^\rho\right) = \left(\nabla_\rho A_\mu\right) J_\nu{}^\rho + \left(\nabla_\rho J_\nu{}^\rho\right) A_\mu. \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\rho \left(A_\nu J_\mu{}^\rho\right) = &\left(\partial_\rho A_\nu - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} A_\alpha\right)\left[\beta_1 \nabla_\mu A^\rho + \beta_2 \delta^\rho_\mu \nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3 \nabla^\rho A_\mu\right] \\ &+ \left[\beta_1 \nabla_\rho \nabla_\mu A^\rho + \beta_2 \delta^\rho_\mu \nabla_\rho \nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3 \nabla_\rho \nabla^\rho A_\mu\right] A_\nu\,. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left(\nabla_\rho J_\nu{}^\rho\right) A_\mu = &\left[\beta_3\left(\partial_0 A_0\right)\left(\partial_0 A_0\right) + \beta_1(\partial_i A_0)(\partial^i A_0) + \beta_2(\partial_0 A_0)\left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right) + \right. \\ &\left. + \beta_1(\partial_0 A_0)(\partial_0 A^0)\right] + \left[\beta_3\left(\partial_0\partial_0 A_0 - e^{\frac{-2t}{\Psi_0}} \nabla^2_r A_0 + \frac{3}{\Psi_0}\partial_0 A_0 - \frac{3}{\Psi_0^2} A_0\right)\right. \\ &\left. + \beta_2\left(\partial_0\partial_0 A^0 + 3H\left(\partial_0 A^0\right)\right) + \beta_1\left(\partial_0\partial_0 A^0 + 3H\left(\partial_0 A^0\right) - 3H^2 A^0\right)\right] A_0. \end{aligned} \tag{2.117}$$

On aussi

$$(\nabla_\rho J_\nu{}^\rho) A_\mu \equiv \left(\nabla_\rho J_\mu{}^\rho\right) A_\nu. \tag{2.118}$$

– Le cinquième terme$\left[\beta_1 \left(\nabla^\rho A_\alpha \nabla_\rho A^\alpha\right) \ + \beta_2 \left(\nabla_\rho A^\rho\right)^2 + \beta_3 \left(\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho\right)\right]$.

On a :

$$\begin{aligned}
\nabla^\rho A_\alpha \nabla_\rho A^\alpha &= \left(\partial^\rho A_\alpha - \Gamma^{\rho\lambda}_{\ \ \alpha} A_\lambda\right)\left(\partial_\rho A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} A^\lambda\right) \\
&= (\partial^\rho A_0)(\partial_\rho A^0) + (\partial^\rho A_0)(\partial_\rho A^0) - g^{jk}\Gamma^0_{ki}\Gamma^i_{j0} A_0 A^0 \\
&= (\partial^0 A_0)(\partial_0 A^0) + (\partial^i A_0)(\partial_i A^0) + \delta^{jk} e^{\frac{-2t}{\Psi_0}} e^{\frac{2t}{\Psi_0}} \delta_{ki}\delta^i_j H^2 A_0 A^0.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

donc

$$\nabla^\rho A_\alpha \nabla_\rho A^\alpha = (\partial^0 A_0)(\partial_0 A^0) + (\partial^i A_0)(\partial_i A^0) + 3H^2 A_0 A^0 \tag{2.120}$$

Pour $(\nabla_\rho A^\rho)^2$on a

$$\begin{aligned}
(\nabla_\rho A^\rho)^2 &= \left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right)^2 \\
&= (\partial_0 A^0)^2 + (\partial_0 A^0)(3HA^0) + 3HA^0(\partial_0 A^0) + 9H^2(A^0)^2,
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Pour $(\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho)$ on a

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho &= \left(\partial_\rho A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} A^\lambda\right)\left(\partial_\alpha A^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} A^\lambda\right) \\
&= (\partial_0 A^0)(\partial_0 A^0) + 3H^2 A^0 A^0.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

On collecte maintenant toutes les contributions dans (2.93). Puisque $A^0 \equiv \varphi$ on obtient

$$\begin{aligned}
\langle\rho\rangle = \Bigg\langle \beta_1 & \left[\varphi_{,tt}\varphi + \frac{1}{2}(\varphi_{,t})^2 - \frac{1}{2}(\partial^i\varphi)(\partial_i\varphi) - e^{-2tH}(\nabla_r^2\varphi)\varphi + 3H\varphi\varphi_{,t} - \frac{3}{2}H^2\varphi^2\right] \\
&+ \beta_2\left[\varphi_{,tt}\varphi + \frac{1}{2}(\varphi_{,t})^2 + \frac{9}{2}H\varphi_{,t}\varphi + \frac{3}{2}H\varphi\varphi_{,t} + H^2\frac{9}{2}\varphi^2\right] \\
&+ \beta_3\left[\varphi_{,tt}\varphi + \frac{1}{2}(\varphi_{,t})^2 + 3HA^0\varphi_{,t} - (\partial_i\varphi)(\partial^i\varphi) + e^{-2tH_0}\left(\nabla_R^2\varphi\right)\varphi - \frac{3}{2}H^2\varphi^2\right]\Bigg\rangle.
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Après simplification on arrive à l'expression

$$\begin{aligned}
\langle\rho\rangle = \Bigg\langle & \beta_T\ddot{\varphi}\varphi + \frac{\beta_T}{2}(\dot{\varphi})^2 + 3\left(\beta_T - \frac{\beta_2}{2}\right)H\varphi\dot{\varphi} \\
&+ \beta_2\frac{9}{2}H\dot{\varphi}\varphi + \frac{3}{2}\left(-\beta_T + 4\beta_2\right)H^2\varphi^2 \\
&+ \left(\beta_3 - \beta_1\right)e^{-2tH}\left(\nabla_R^2\varphi\right)\varphi - (\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_1)(\partial_i\varphi)(\partial^i\varphi)\Bigg\rangle.
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Pour écrire la densité d'énergie en termes des $\zeta_{k_R}(t)$ on utilise les relations (2.70)et(2.37). En effet on montre que

$$\nabla_R^2\chi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_R\,\left(-k_R^2\right)\left[\mathfrak{a}_{k_R}e^{i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}_{k_R}^{\dagger}e^{-i\left(\vec{k}_R\vec{R}\right)}\zeta_{k_R}^{*}(t)\right], \tag{2.125}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle\ddot{\varphi}\varphi\rangle &= e^{-3tH}\left\langle\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\chi - 3H_0\frac{\partial\chi}{\partial t}\chi + \frac{9H_0^2}{4}\chi^2\right\rangle \\
&= \frac{e^{-3tH}}{(2\pi)^3}\int d^3k_R\left[\ddot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^{*}(t) - 3H\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^{*}(t) + \frac{9H_0^2}{4}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right]
\end{aligned} \tag{2.126}$$

$$\begin{aligned}
\langle\dot{\varphi}\varphi\rangle &= e^{-3tH}\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\chi - \frac{3H}{2}\chi^2\right\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-3tH_0}\int d^3k_R\left[\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^{*}(t) - \frac{3H_0}{2}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right],
\end{aligned} \tag{2.127}$$

et

$$\langle\varphi\dot{\varphi}\rangle = e^{-3tH_0}\left\langle\chi\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{3H_0}{2}\chi^2\right\rangle \tag{2.128}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-3tH}\int d^3k_R\left[\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}_{k_R}^{*}(t) - \frac{3H}{2}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right]. \tag{2.129}$$

$$\left\langle\left(\nabla_R^2\varphi\right)\varphi\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-3tH}\int d^3k_R(-k_R^2)\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\,. \tag{2.130}$$

On aussi

$$-\left(\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_1\right)(\partial^i\varphi)(\partial_i\varphi) = \left(\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_1\right)e^{-2tH}\delta^{ij}(\partial_j\varphi)(\partial_i\varphi). \tag{2.131}$$

donc

$$-\left(\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_1\right)(\partial^i\varphi)(\partial_i\varphi) = \left(\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_1\right)e^{-2tH}\left[(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_y\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2\right], \tag{2.132}$$

comme

$$\varphi = e^{\frac{-3}{2}tH}\chi = \frac{e^{\frac{-3}{2}tH}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_R\,\left[\mathfrak{a}_{k_R}e^{i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}_{k_R}^{\dagger}e^{-i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}^{*}(t)\right], \tag{2.133}$$

on obtient

$$\left\langle(\partial^i A^0)(\partial_i A^0)\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-3tH_0}e^{-2tH_0}\int d^3k_R(k_R^2)\zeta_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^{*}(t)\,, \tag{2.134}$$

et finalement

$$\left\langle\left(\beta_3+\frac{1}{2}\beta_1\right)(\partial^i A^0)(\partial_i A^0)\right\rangle=\left(\beta_3+\frac{1}{2}\beta_1\right)\frac{e^{-3tH}e^{-2tH}}{(2\pi)^3}\int d^3k_R(k_R^2)\zeta_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t)\,. \quad (2.135)$$

On remplace maintenant dans (2.124)

$$\begin{aligned}\langle\rho\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-3tH_0}\int d^3k_R\left\{\beta_T\left(\ddot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t)+\frac{1}{2}\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t)\right)\right.\\ &+H\left(-\beta_T\frac{3}{4}-\frac{3\beta_2}{2}\right)\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t)\\ &+H\left(-\beta_T\frac{3}{4}+\beta_2\frac{9}{2}\right)\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t)\\ &+\left(\frac{21}{8}\beta_T-\frac{9}{2}\beta_2+6\beta_2\right)H^2\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\\ &\left.+\left(-2\beta_3+\frac{1}{2}\beta_1\right)e^{-2tH}k_R^2\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right\rangle. \quad (2.136)\end{aligned}$$

En substituant les équations (2.49) ,(2.50) , (2.51) , (2.52) dans (2.136) on obtient

$$\begin{aligned}\langle\rho\rangle &= \frac{H^{2\nu+1}(2)^{2\nu-3}}{\pi^3}\Gamma^2(\nu)\,e^{2tH\nu}e^{-3tH_0}\int dk_R\left\{\beta_T\left(\frac{3\nu^2}{2}-\frac{3\nu}{2}+\frac{27}{8}-6\right)\right.\\ &\left.+\beta_2\left(3\nu-\frac{9}{2}+6\right)+\left(-2\beta_3+\frac{1}{2}\beta_1\right)e^{-2tH}k_R^2\right\}(k_R)^{2-2\nu}. \quad (2.137)\end{aligned}$$

On sait que l'univers est presque invariant sur les échelles cosmologiques pour lesquelles on $|n_s| \ll 1$. Dans ce cas on peut considérér le spectre de puissance uniquement pour les modes super-Hubble pour lesquelles la longeur d'onde des fluctuations est plus petite que le rayon de Hubble. Alors on peut prendre $k_R < \varepsilon k_H(t)$, où $\varepsilon = \frac{k^{IR}_{max}}{k_p} \ll 1$, k_p est le nombre d'ondes de Planck et k_H est le nombre d'ondes qui sépare les secteurs IR et UV. Ici, $k^{IR}_{max} = k_H(t_i) = He^{Ht_i}$ est le nombre d'ondes correspondant à l'entrée de l'horizon à l'instant t_i.

Aprés intégration on a

$$\begin{aligned}\langle\rho\rangle &= \frac{H^{2\nu+1}(2)^{2\nu-3}}{\pi^3}\Gamma^2(\nu)\,e^{2tH\nu}e^{-3tH_0}\left\{\frac{1}{(3-2\nu)}\left[\beta_T\left(\frac{3\nu^2}{2}-\frac{3\nu}{2}+\frac{27}{8}-6\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\beta_2\left(3\nu-\frac{9}{2}+6\right)\right]\left[k_R^{3-2\nu}\right]_0^{\nu k_H}+\frac{1}{(5-2\nu)}\left(-2\beta_3+\frac{1}{2}\beta_1\right)e^{-2tH}\left[k_R^{5-2\nu}\right]_0^{\varepsilon k_H}\right\} \quad (2.138)\end{aligned}$$

En utilisant

$$k_R^2 \ll k_H^2 \quad \text{et} \quad k_H = He^{Ht}. \quad (2.139)$$

on trouve finalement

$$\langle\rho\rangle = \frac{H^{2\nu+1}(2)^{2\nu-3}}{\pi^3}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-2\nu}\Gamma^2(\nu)\frac{e^{2tH\nu}e^{-3tH}}{(3-2\nu)}\left\{\left[\beta_T\left(\frac{3\nu^2}{2}-\frac{3\nu}{2}-\frac{21}{8}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_2\left(3\nu+\frac{3}{2}\right)\right]\left[k_R^{3-2\nu}\right]_0^{\varepsilon k_H}\right\}. \quad (2.140)$$

Si on pose $\nu = \frac{3}{2}$, la densité d'énergie devient infinie.

2.6.4 Préssion

Calculons maintenant la pression p. On utilise l'équation (2.93) avec $\mu = i$ et $\nu = j$. On a besoin des termes suivants :

–

$1 \stackrel{\text{ére}}{=}$ terme :

$$\begin{aligned}\nabla_i A^\rho \nabla_j A_\rho &= (\partial_i A^\rho + \Gamma^\rho_{i\alpha}A^\alpha)(\partial_j A_\rho - \Gamma^\alpha_{j\rho}A_\alpha)\\ &= (\partial_i A^\rho)\left(\partial_j A_\rho - \Gamma^\alpha_{j\rho}A_\alpha\right) + \Gamma^\rho_{i\alpha}A^\alpha\left(\partial_j A_\rho - \Gamma^\alpha_{j\rho}A_\alpha\right)\\ &= (\partial_i A^0)(\partial_j A_0) - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk}A^0A_0\\ &= (\partial_i A^0)(\partial^j A_0) - e^{2tH}H^2A^0A_0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned}\nabla^\rho A_i \nabla_\rho A_j &= (\partial^\rho A_i - \Gamma^{\rho\alpha}{}_i A_\alpha)\left(\partial_\rho A_j - \Gamma^\alpha_{\rho j}A_\alpha\right)\\ &= \Gamma^{k0}{}_i\Gamma^0_{kj}A_0A_0\\ &= -H^2A_0A_0e^{2tH}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

alors

$$\beta_1\left(\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A_\rho - \nabla^\rho A_\mu \nabla_\rho A_\nu\right) = \beta_1(\partial_i A^0)(\partial_j A_0). \quad (2.143)$$

–

$2 \stackrel{\text{éme}}{=}$ terme $\nabla_\rho\left(A_j J^\rho{}_i + A_i J^\rho{}_j\right)$.

$$\begin{aligned}\nabla_\rho\left(A_j J^\rho{}_i\right) &= (\nabla_\rho A_j)\, J^\rho{}_i + (\nabla_\rho J^\rho{}_i)A_j\\ &= \left(\partial_\rho A_j - \Gamma^\alpha_{\rho j}A_\alpha\right)\left[\beta_1\nabla^\rho A_i + \beta_2\delta^\rho_i\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_i A^\rho\right]\\ &= \left(\partial_\rho A_j - \Gamma^0_{\rho j}A_0\right)\left[\beta_1\left(\partial^\rho A_i - \Gamma^{\rho\sigma}{}_\mu A_\sigma\right) + \beta_2\delta^\rho_i\left(\partial_\alpha A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}A^\lambda\right) + \beta_3\left(\partial_i A^\rho + \Gamma^\rho_{i\alpha}A^\alpha\right)\right]\\ &= -\Gamma^0_{\rho j}A_0\left[\beta_1\left(-\Gamma^{\rho 0}{}_i A_0\right) + \beta_2\delta^\rho_i\left(\partial_\alpha A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}A^\lambda\right) + \beta_3\left(\partial_i A^\rho + \Gamma^\rho_{i0}A^0\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.144)$$

alors

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho\left(A_j J^\rho{}_i\right) &= \beta_1 \Gamma^0_{\rho j}\Gamma^{\rho 0}{}_i A_0 A_0 - \beta_2 \Gamma^0_{\rho j}\delta^\rho_i\left(\partial_\alpha A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}A^\lambda\right)A_0 - \beta_3\Gamma^0_{\rho j}\Gamma^\rho_{i0}A^0 A_0 \\
&= \beta_1 \Gamma^0_{kj}\Gamma^{k0}{}_i A_0 A_0 - \beta_2 \Gamma^0_{kj}\delta^k_i\left(\partial_\alpha A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}A^\lambda\right)A_0 - \beta_3\Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0}A^0 A_0 \\
&= \beta_1 g^{kf}\Gamma^0_{kj}\Gamma^0_{fi}A_0A_0 - \beta_2\delta_{jj}He^{2tH}\left(A^0_{,t} + 3HA^0\right) - \beta_3\delta_{kj}\delta^k_i He^{2tH}A^0A_0 \\
&= -\beta_1\delta^{kf}\delta_{kj}\delta_{fi}H^2e^{2tH}A_0A_0 - \beta_2\delta_{jj}He^{2tH}\left(A^0_{,t} + 3HA^0\right) - \beta_3\delta_{kj}\delta^k_i He^{2tH}A^0A_0 \\
&= -\beta_1\delta_{ij}H^2e^{2tH}A_0A_0 - \beta_2\delta_{jj}He^{2tH}A_0\left(A^0_{,t} + 3HA^0\right) - \beta_3\delta_{ij}He^{2tH}A^0A_0.
\end{aligned}
\tag{2.145}
$$

On a aussi

$$
\nabla_\rho\left(A_i J^\rho{}_j\right) \equiv \nabla_\rho\left(A_j J^\rho{}_i\right). \tag{2.146}
$$

– $3 \overset{éme}{=}$ terme $\nabla_\rho(A^\rho J_{ij} + A^\rho J_{ij})$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho\left(A^\rho J_{ij}\right) &= \left(\nabla_\rho A^\rho\right)J_{ij} + \left(\nabla_\rho J_{ij}\right)A^\rho \\
&= \left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right)\left[\beta_1\nabla_i A_j - \beta_2\delta_{ij}e^{2tH}\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_j A_i\right] + \\
&+ \left[\beta_1\nabla_\rho\nabla_i A_j - \beta_2\delta_{ij}e^{2tH}\nabla_\rho\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\rho\nabla_j A_i\right]A^\rho\,,
\end{aligned}
\tag{2.147}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho\left(A^\rho J_{ij}\right) &= \left(A^0_{,t} + 3HA^0\right)\left[-\beta_1\Gamma^0_{ij}A_0 - \beta_2\delta_{ij}e^{2tH}\left(\partial_0A^0 + 3HA^0\right) - \beta_3\Gamma^0_{ji}A_0\right] + \\
&+ \left[\beta_1\nabla_\rho\nabla_iA_j - \beta_2e^{2tH}\delta_{ij}\nabla_\rho\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\rho\nabla_jA_i\right]A^\rho\,.
\end{aligned}
\tag{2.148}
$$

Calculons maintenant le terme :$\left[\beta_1\nabla_\rho\nabla_iA_j - \beta_2e^{2tH}\delta_{ij}\nabla_\rho\nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3\nabla_\rho\nabla_jA_i\right]A^\rho$.

En effet on a

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_\rho\nabla_iA_j\right)A^\rho &= \left[\partial_\rho\left(\nabla_iA_j\right) - \Gamma^\lambda_{\rho i}\left(\nabla_\lambda A_\sigma\right) - \Gamma^\lambda_{\rho j}\left(\nabla_iA_\lambda\right)\right]A^\rho \\
&= \left[\partial_\rho\left(\partial_iA_j - \Gamma^\alpha_{ij}A_\alpha\right) - \Gamma^\lambda_{\rho i}\left(\partial_\lambda A_j - \Gamma^\alpha_{\lambda j}A_\alpha\right) - \Gamma^\lambda_{\rho j}\left(\partial_iA_\lambda - \Gamma^\alpha_{i\lambda}A_\alpha\right)\right]A^\rho \\
&= \left[-\partial_\rho(\Gamma^\alpha_{ij}A_\alpha) + \Gamma^\lambda_{\rho i}\Gamma^\alpha_{\lambda j}A_\alpha + \Gamma^\lambda_{\rho j}\Gamma^0_{i\lambda}A_0\right]A^\rho \\
&= \left[-\partial_0(\Gamma^0_{ij}A_0)A^0 + \Gamma^k_{0i}\Gamma^0_{kj}A_0A^0 + \Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik}A_0A^0\right] \\
&= \left[-\partial_0\left(\delta_{ji}e^{2tH}A_0\right)HA^0 + H^2e^{2tH}\delta^k_i\delta_{kj}A_0A^0 + H^2e^{2tH}\delta^k_j\delta_{ki}A_0A^0\right], \\
&= -\delta_{ji}He^{2tH}A_{0,t}A^0,
\end{aligned}
\tag{2.149}
$$

pour $(\nabla_\rho \nabla_\alpha A^\alpha)\, A^\rho$:

$$\begin{aligned}(\nabla_\rho \nabla_\alpha A^\alpha)\, A^\rho &= \partial_0 \left(\partial_0 A^0 + 3HA^0\right) A^0 \\ &= \left(A^0_{,tt} + 3HA^0_{,t}\right) A^0. \end{aligned} \tag{2.150}$$

On conclut que

$$(\nabla_\rho \nabla_j A_i)\, A^\rho = -\delta_{ji} H e^{2tH} A_{0,t} A^0, \tag{2.151}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\left[\beta_1 \nabla_\rho \nabla_i A_j - \beta_2 e^{2tH} \delta_{ij} \nabla_\rho \nabla_\alpha A^\alpha + \beta_3 \nabla_\rho \nabla_j A_i\right] A^\rho \\ &= \beta_1 \left(-\delta_{ji} H e^{2tH} A_{0,t} A^0\right) - \beta_2 e^{2tH} \delta_{ij} \left(A^0_{,tt} + 3HA^0_{,t}\right) A^0 + \beta_3 \left(-\delta_{ji} H e^{2tH} A_{0,t} A^0\right). \end{aligned} \tag{2.152}$$

Collectant tous les termes

$$\begin{aligned}\nabla_\rho(A^\rho J_{ij}) = &-\beta_1 \left[\delta_{ji} e^{2tH} H \left(A^0_{,t} A_0 + A_{0,t} A^0\right) + 3\delta_{ji} e^{2tH} H^2 A_0 A^0\right] \\ &- \beta_2 \delta_{ji} e^{2tH} \left[\left(A^0_{,t}\right)^2 + 3H\left(A^0_{,t} A^0 + A^0 A^0_{,t}\right) + 9H^2 (A^0)^2 + A^0_{,tt} A^0 + 3HA^0_{,t} A^0\right] \\ &- \beta_3 \left[\delta_{ji} e^{2tH} H \left(A^0_{,t} A_0 + A_{0,t} A^0\right) + 3\delta_{ji} e^{2tH} H^2 A_0 A^0\right]. \end{aligned} \tag{2.153}$$

On a aussi

$$\nabla_\rho(A^\rho J_{ij}) \equiv \nabla_\rho(A^\rho J_{ji}). \tag{2.154}$$

– 4 $\stackrel{\text{éme}}{=}$ terme $\nabla_\rho(A_i J_j^{\ \rho} + A_j J_i^{\ \ \rho})$.

$$\begin{aligned}\nabla_\rho \left(A_i J_j^{\ \ \rho}\right) &= (\nabla_\rho A_i)\, J_j^{\ \ \rho} g^{\sigma\nu} + \left(\nabla_\rho J_j^{\ \ \rho}\right) A_i. \\ &= -\beta_3 \delta_{ij} H^2 e^{2tH} A_0 A_0 - \beta_2 \delta_{jj} H e^{2tH} A_0 \left(A^0_{,t} + 3HA^0\right) - \beta_1 \delta_{ij} H e^{2tH} A^0 A_0, \end{aligned} \tag{2.155}$$

et

$$\nabla_\rho \left(A_i J_j^{\ \ \rho}\right) \equiv \nabla_\rho \left(A_j J_i^{\ \ \rho}\right). \tag{2.156}$$

– 5 $\stackrel{\text{éme}}{=}$ terme $\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\beta_1 \left(\nabla^\rho A_\alpha \nabla_\rho A^\alpha\right) + \beta_2 \left(\nabla_\rho A^\rho\right)^2 + \beta_3 \left(\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho\right)\right]$.

$$\begin{aligned}\nabla^\rho A_\alpha \nabla_\rho A^\alpha &= \left(\partial^\rho A_\alpha - \Gamma^{\rho\lambda}_{\ \ \alpha} A_\lambda\right)\left(\partial_\rho A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} A^\lambda\right) \\ &= (\partial^\rho A_0)(\partial_\rho A^0) - \Gamma^{\rho 0}_{\ \ \alpha} \Gamma^\alpha_{\rho 0} A_0 A^0 \\ &= (\partial^0 A_0)(\partial_\rho A^0) + (\partial^i A_0)(\partial_i A^0) - \Gamma^{j0}_{\ \ i} \Gamma^i_{j0} A_0 A^0 \\ &= (A^0_{,t})^2 + (\partial^i A_0)(\partial_i A^0) + H^2 3 A_0 A^0. \end{aligned} \tag{2.157}$$

Pour $\left((\nabla_\rho A^\rho)^2\right)$:

$$(\nabla_\rho A^\rho)^2 = (A^0_{,t} + 3HA^0)^2 = (A^0_{,t})^2 + 3H(A^0_{,t}A^0 + A^0 A^0_{,t}) + 9H^2(A^0)^2. \tag{2.158}$$

Pour $(\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho)$:

$$\begin{aligned}\nabla_\rho A^\alpha \nabla_\alpha A^\rho &= \left(\partial_\rho A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} A^\lambda\right)\left(\partial_\alpha A^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} A^\lambda\right) \\ &= (\partial_0 A^0)(\partial_0 A^0) + \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{i0} A^0 A^0 \\ &= (A^0_{,t})^2 + 3H^2 A^0 A^0. \end{aligned} \tag{2.159}$$

On substitut toutes les contributions dans l'expression de la pression donnée par (2.93). Après simplification on trouve

$$\begin{aligned}\langle P\rangle = \delta_{ij}\big\langle & 2\beta_2 \varphi_{,tt}\varphi + (-\beta_T + 2\beta_2)(\varphi_{,t})^2 + (2\beta_T + 7\beta_2) H\varphi_{,t}\varphi + (2\beta_T + \beta_2) H\varphi\varphi_{,t} \\ & + (3\beta_T + 6\beta_2) H^2 \varphi\varphi + 2\beta_1 \left[-(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) + e^{-2tH}\frac{1}{2}\delta^{ij}(\partial_j\varphi)(\partial_i\varphi)\right]\Big\rangle .\end{aligned} \tag{2.160}$$

Maintenant on utilse le developpement du champ χ en série de Fourier pour écrire $\langle P\rangle$ en fonction de $\zeta_{k_R}(t)$. En effet on montre que

$$\begin{aligned}\langle P\rangle = \frac{e^{-3tH}}{(2\pi)^3}\int d^3k_R \Bigg\{ & 2\beta_2\left(\ddot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) - 3H\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) + \frac{9H^2}{4}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right) \\ & + (-\beta_T + 2\beta_2)\Bigg(\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t) - \frac{3H}{2}\left(\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) + \zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t)\right) \\ & + \frac{9H^2}{4}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\Bigg) + H(2\beta_T + 7\beta_2)\left(\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) - \frac{3H_0}{2}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right) \\ & + H(2\beta_T + \beta_2)\left(\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t) - \frac{3H}{2}\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\right) \\ & + H^2(3\beta_T + 6\beta_2)\varphi\varphi\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t) + 2\beta_1\left(-(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) + e^{-2tH}\frac{1}{2}\delta^{ij}(\partial_j\varphi)(\partial_i\varphi)\right) \\ & \zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t)\Bigg\} .\end{aligned} \tag{2.161}$$

En substituant (2.49) , (2.50) ,(2.51) , (2.52) dans cette équation, et en effectuant l'intégration sur k_R on obtient

$$\begin{aligned}\langle P\rangle = {} & \frac{H^{2\nu+1}2^{2\nu-3}}{\pi^3}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-2\nu}\Gamma^2(\nu)\,\frac{e^{2tH\nu}e^{-3tH}}{(3-2\nu)}\Bigg\{(-\beta_T + 4\beta_2)\left(\nu - \frac{3}{2}\right)^2 \\ & + (4\beta_T + 8\beta_2)\left(\nu - \frac{3}{2}\right) + (3\beta_T + 6\beta_2)\Bigg\}\, k_R^{3-2\nu}\Big|_0^{\nu k_H} .\end{aligned} \tag{2.162}$$

Le paramétre w de l'équation d'état est définie par

$$w = \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} \,. \tag{2.163}$$

En substituant les expressions de la densité d'énergie et de la pression données respectivement par (2.162) et (2.140) et posons $\nu = \frac{3-n_s}{2}$, on arrive à la relation

$$w = \frac{\left(-\frac{n_s^2}{4} - 2n_s + 3\right) + \frac{\beta_2}{\beta_T}\left(n_s^2 - 4n_s + 6\right)}{\left(\frac{3n_s^2}{8} - \frac{3n_s}{2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\beta_2}{\beta_T}\left(6 - \frac{3n_s}{2}\right)}. \tag{2.164}$$

2.6.5 Fluctuations de la densité d'énergie

L'expréssion donnant les fluctuations de la densité d'énergie est donnée par

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\langle \rho \rangle - \langle \rho \rangle^{(0)}}{\langle \rho \rangle} \tag{2.165}$$

où $\langle \rho \rangle^0$ est la moyenne de la densité d'énergie sur les modes de nombre d'onde $k_R = 0$. En calculant les différentes contributions on trouve que

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 1 - \left(\frac{n_s}{2^{-n_s}\left(\frac{\beta_1}{\beta_T}\right)^{\frac{n_s}{2}}}\right)\left(\frac{\left(6\beta_2 - \frac{3\beta_T}{2}\right)\left[\ln k_R\right]_0^{\varepsilon k_H}}{\frac{-3\beta_T}{2}\left(n_s + 1\right) + \beta_2\left(6 - \frac{3}{2}n_s\right)}\right) > 0,$$

avec $\left[\ln k_R\right]_0^{\varepsilon k_H} \geqslant 60$. Le valeur 60 est le nombre de *e-folds* requis pour avoir une phase d'inflation réussie, $N \geq 60$.

En utilisant l'approximation valide pour n_s petit

$$\frac{1}{2^{-n_s}\left(\frac{\beta_1}{\beta_T}\right)^{\frac{n_s}{2}}} \simeq 1,$$

on obtient

$$n_s < \frac{1}{60 - \frac{1+\frac{\beta_2}{\beta_T}}{1-4\frac{\beta_2}{\beta_T}}}.$$

Si on utilise la valeur experimental généralement admise, $n_s^{\text{obs}} \lesssim 1/60$, on obtient la contrainte suivante sur le rapport β_2/β_T,

$$\frac{\beta_2}{\beta_T} > \frac{1}{4},$$

et en utilisant la condition déja trouvée plus haut on déduit que

$$\frac{7}{4} \geq \frac{\beta_2}{\beta_T} > \frac{1}{4}$$

On note aussi que l'indice spectral diverge pour $\frac{\beta_2}{\beta_T} = \frac{1}{4}$.

Chapitre 3

Cosmologie du champ vectoriel à cinq dimensions

Les versions actuelles d'une théorie de la gravité à 5 dimensions sont la théorie des branes de Dvali-Gabadadze-Poratti (GDP) ([15], [16]), la théorie de Randall-Sundrum avec les deux scénarios RS1 et RS2, et la théorie de la matiére induite de Paul wesson ([18]). Dans les deux premiéres théories, la gravité se propage librement dans le volume, tandis que les interactions des particules du modéle standard sont confinées sur une hypersurface à 4 dimensions, appelée la brane. La théorie de la matiére induite dans sa forme la plus simple à pour base la théorie de Kaluza-Klein (KK) dans laquelle la cinquiéme dimension n'est pas compactifiée et est extra large. Elle est responsable de l'apparition de nouvelles sources dans la relativité générale à 4D. Par conséquent, le monde 4D de la relativité générale est incorporé dans un collecteur 5D Ricci-plat. Un résultat intéressant de la théorie de la matiére induite est que si $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$ est la métrique d'un espace-temps 4D, l'élément $dS^2 = \left(\frac{\Psi}{\Psi_0}\right) ds^2 - d\Psi^2$ représente une métrique décrivant une variété 5D qui est Ricci-plate [19, 20].

Au cours des deux derniéres décennies, le paradigme de l'inflation est devenue un scénario quasi-universellement accepté et a permis d'expliquer la platitude observée à grande échelle et l'homogènité de l'univers [21]. En particulier, l'inflation stochastique ([22], [23], [25], [24]) (ou en général, pour un traitement semi-classique du champ inflaton) a fait l'objet d'un grand intérêt ces derniéres années. Toutefois, l'un des problémes avec cette approche est que l'on doit faire un développement perturbatif du potentiel du champ scalaire en termes des fluctuations quantiques de l'inflaton. Il s'agit d'une bonne approximation, car les fluctuations sont faibles au cours de l'inflation aux échelles cosmologiques. Toutefois, les prédictions de la théorie de l'inflation pourrait être significativement améliorée en utilisant un calcul non perturbatif sue l'inflaton. Bien sûr, il est impossible de le faire à partir d'un formalisme quantique des champs 4D, mais pourrait être développé à partir d'un champ scalaire quantique sur le fond d'un état du vide 5D. L'objectif de ce travail consiste à développer une approche non perturbative à partir d'un état du vide apparent 5D exprimé par un terme

5D purement cinétique dans la densité Lagrangienne d'un champ vectoriel minimalement couplé à la gravité dans une métrique 5D Ricci-plate [26]. Pour le faire, nous considérons la métrique canonique à 5D [27]

$$ds^2 = \Psi^2 dN^2 - \Psi^2 e^{2N} dr^2 - d\Psi^2. \tag{3.1}$$

Ici, les coordonnées $(N, \vec{r})$ sont sans dimensions et la cinquiéme coordonnée Ψ a des dimensions spatiales. Nous supposerons dans ce qui suit que la dimension supplémentaire est de genre espace et que l'univers est 3D spatialement plat, homogéne et isotrope. La métrique (3.1) décrit un espace-temps 5D plat et vide ($G_{AB} = 0$). Nous considérons une métrique diagonale parce que nous ne traitons que des effets gravitationnels. Pour décrire la matiére neutre dans le vide géométrique 5D on peut utiliser le Lagrangien suivant

$${}^{(5)}L(A^C, A^C_{,B}) = -\sqrt{\left|\frac{g^{(5)}}{g_0^{(5)}}\right|}\mathcal{L}(A^C, A^C_{;B}), \tag{3.2}$$

où $|{}^{(5)}g| = \Psi^8 \, e^{3N}$ est la valeur du déterminant du tenseur métrique $5D$ avec les composantes G_{AB} (A, B =$0, 1, 2, 3, 4$) et $|{}^{(5)}g_0| = \Psi_0^8 \, e^{3N_0}$ est une constante de normalisation déterminée par $|{}^{(5)}g|$ quand $\Psi = \Psi_0$ et $N = N_0$. Dans ce travail nous examinerons le cas $N_0 = 0$, de sorte que ${}^{(5)}g_0 = \Psi_0^8$. Ici, l'indice "0" représente les valeurs à la fin de l'inflation.

Considérons alors l'action suivante

$$S = -\int dx^4 d\Psi \sqrt{\left|\frac{g^{(5)}}{g_0^{(5)}}\right|}\left[\frac{R^{(5)}}{16\pi G} + \frac{1}{2}K^{DE}{}_{FN}\nabla_D A^F \nabla_E A^N\right], \tag{3.3}$$

où A^C est un champ vectoriel couplé non minimalement à la gravité et G est la constante gravitationnelle. En outre, ${}^{(5)}R$ est le scalaire de Ricci à $5D$, qui bien sûr, est zero pour la métrique 5D plate (3.1).

Il est facile de noter que la densité Lagrangiénne du champ vectoriel est donnée par

$$\mathcal{L}\left(A^C, A^C_{;B}\right) = \frac{1}{2}K^{DE}{}_{FN}(\nabla_D A^F)(\nabla_E A^N), \tag{3.4}$$

avec

$$K^{DE}{}_{FN} = \beta_1 g^{DE} g_{FN} + \beta_2 \delta^D_F \delta^E_N + \beta_3 \delta^D_N \delta^E_F. \tag{3.5}$$

A partir des équations de Lagrange on obtient l'équation de mouvement du champ vectoriel

$$\beta_1 \Box A^B + \beta_2 \nabla^B \nabla_D A^D + \beta_3 \nabla_C \nabla^B A^C = 0. \tag{3.6}$$

Dans ce qui suit nous allons traiter plusieurs configuration du champ vectoriel.

3.1 Premier cas $A^B \equiv \left(A^0, \overrightarrow{0}, 0\right)$

Nous allons explicitement calculer les différentes contributions dans (3.6). Commencons par le premier terme. On montre que

$$
\begin{aligned}
\Box A^B = \nabla_C \nabla^C A^B &= g^{BF} \nabla_C \nabla^C A_F \\
&= \partial_C \left(\nabla^C A_F\right) + \Gamma^C_{CD} \left(\nabla^D A_F\right) - \Gamma^D_{CF} (\nabla^C A_D) \\
&= \partial_0 (\partial^0 A_F) + \partial_i (\partial^i A_F) + \partial_\Psi (\partial^\Psi A_F) - \partial_\Psi (\Gamma^{\Psi D}_{\ \ F} A_D) + \Gamma^C_{C0} (\partial^0 A_F) \\
&+ \Gamma^C_{Ci} (\partial^i A_F) + \Gamma^C_{C\Psi} (\partial^\Psi A_F) - \Gamma^0_{0D} \Gamma^{DK}_{\ \ F} A_K - \Gamma^i_{iD} \Gamma^{DK}_{\ \ F} A_K - \Gamma^D_{0F} (\partial^0 A_D) \\
&+ - \Gamma^D_{iF} (\partial^i A_D) - \Gamma^D_{\Psi F} (\partial^\Psi A_D) + \Gamma^D_{0F} \Gamma^{0K}_{\ \ D} A_K + \Gamma^D_{iF} \Gamma^{iK}_{\ \ D} A_K + \Gamma^D_{\Psi F} \Gamma^{\Psi K}_{\ \ D} A_K,
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

qu'on peut simplifier comme suit

$$
\nabla_C \nabla^C A_F = \left[A^0_{,NN} + 3A^0_{,N} - e^{-2N} \nabla^2_r A^0 - \Psi^2 \frac{4}{\Psi} A^{\ 0}_{,\Psi} - \Psi^2 A^{\ 0}_{,\Psi\Psi} \right]. \tag{3.8}
$$

Pour la deuxiéme terme, on a

$$
\begin{aligned}
\nabla^B \nabla_D A^D &= \nabla^B \left[\frac{1}{\sqrt{|^{(5)}g|}} \left(\sqrt{|^{(5)}g|} A^D \right)_{,D} \right] \\
&= \partial^B \left[A^0_{,N} + 3A^0 \right] \\
&= \Psi^{-2} \left[A^0_{,NN} + 3A^0_{,N} \right].
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Pour le $3^{\underline{\text{éme}}}$ terme, en procédant de la même manière on obtient

$$
\begin{aligned}
\nabla_C \nabla^B A^C &= g^{BE} \nabla_C \nabla_E A^C \\
&= g^{BE} \left[\partial_C \left(\nabla_E A^C\right) - \Gamma^D_{CE} \left(\nabla_D A^C\right) + \Gamma^C_{CD} \left(\nabla_E A^D\right) \right] \\
&= g^{00} [\partial_0 \left(\partial_0 A^0\right) + \partial_4 \left(\Gamma^4_{00} A^0\right) - \Gamma^4_{00} \left(\partial_4 A^0\right) - \Gamma^0_{40} \Gamma^4_{00} A^0 \\
&+ - \Gamma^i_{j0} \Gamma^j_{\ i\,0} A^0 - \Gamma^4_{00} \Gamma^0_{40} A^0 + \Gamma^i_{i0} \left(\partial_0 A^0\right) + \Gamma^0_{04} \Gamma^4_{00} A^0 + \Gamma^i_{i4} \Gamma^4_{00} A^0].
\end{aligned}
$$

En calculant toutes les contributions on obtient

$$
\nabla_C \nabla^B A^C = \Psi^{-2} \left[A^0{}_{,NN} + 3A^0{}_{,N} \right]. \tag{3.10}
$$

En rassemblant tous les termes et en posons $A^0 \equiv \varphi$ et $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta_T$, l'équation de mouvement pour le champ φ à 5D prend la forme

$$\overset{**}{\varphi}+3\overset{*}{\varphi}-\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}\nabla_r^2\varphi-\frac{\beta_1}{\beta_T}\left(4\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}+\Psi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2}\right)=0, \tag{3.11}$$

où $\varphi\equiv\varphi(N,\overrightarrow{R},\Psi)$ et l'étoile désigne la dérivée par rapport à N. Afin de simplifier cette équation, on introduit la décomposition suivante

$$\varphi\left(N,\overrightarrow{r},\Psi\right)=\chi\left(N,r,\Psi\right)e^{\frac{-3N}{2}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2.$$

Un calcul élémentaire conduit à

$$\overset{**}{\chi}-\left[\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}\nabla_r^2+\left(\frac{\beta_1}{\beta_T}\Psi^2\frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}-2\frac{\beta_1}{\beta_T}+\frac{9}{4}\right)\right]\chi=0. \tag{3.12}$$

Pour trouver les solutions de cette équation nous allons travailler dans l'espace des vecteurs d'onde. A cet effet dévelloppons le champ χ en une série de Fourier des modes $\left\{\overrightarrow{k}\right\}$

$$\chi\left(N,\overrightarrow{r},\Psi\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_r\int dk_\Psi\left[\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi}e^{i\overrightarrow{k_r}\overrightarrow{r}}\zeta_{k_rk_\Psi}\left(N,\Psi\right)+\mathfrak{a}^\dagger_{k_rk_\Psi}e^{-i\overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r}}\zeta^*_{k_rk_\Psi}\left(N,\Psi\right)\right]. \tag{3.13}$$

où l'astérisque désigne le complexe conjugué et $\mathfrak{a}_{k_Rk_\Psi}$et $\mathfrak{a}^\dagger_{k_Rk_\Psi}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation. Ces opérateurs verifient les relations de commutation standards

$$\left[\mathfrak{a}^\dagger_{k_rk_\Psi},\mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\right]=\left[\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi},\mathfrak{a}_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\right]=0, \tag{3.14}$$

$$\left[\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi},\mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\right]=\delta^{(3)}(\overrightarrow{k_r}-\overrightarrow{\acute{k}_r})\delta\left(k_\Psi-\acute{k}_\Psi\right). \tag{3.15}$$

La relation de commutation entre χ et $\overset{*}{\chi}$ est facilement obtenue. En effet on a

$$\begin{aligned}\left[\chi\left(N,\overrightarrow{r},\Psi\right),\overset{*}{\chi}\left(N,\overrightarrow{\acute{r}},\acute{\Psi}\right)\right]=&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\int d^3k_rd^3\acute{k}_r\int\int dk_\Psi d\acute{k}_\Psi\\&\left\{\left(\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi}\mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}-\mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi}\right)e^{i\overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r}}e^{-i\overrightarrow{k_{\acute{r}}}\overrightarrow{\acute{r}}}\zeta_{k_rk_\Psi}\overset{*}{\zeta^\star_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}}\right.\\&\left.+\left(\mathfrak{a}^\dagger_{k_rk_\Psi}\mathfrak{a}_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}-\mathfrak{a}_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\mathfrak{a}^\dagger_{k_rk_\Psi}\right)e^{-i\overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r}}e^{i\overrightarrow{\acute{k}_r}\overrightarrow{\acute{r}}}\zeta^\star_{k_rk_\Psi}\overset{*}{\zeta_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}}\right\}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

On utilisant les relations de commutations suivantes

$$\left[\zeta_{k_rk_\Psi}\left(N,\Psi\right),\overset{*}{\zeta^\star_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}}\left(N,\acute{\Psi}\right)\right]=0, \tag{3.17}$$

$$\left[\zeta^\star_{k_rk_\Psi}\left(N,\Psi\right),\overset{*}{\zeta_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}}\left(N,\acute{\Psi}\right)\right]=0, \tag{3.18}$$

et les identités

$$\int dx f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,, \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int dx e^{ix(y-y_0)} = \delta(y-y_0)\,, \tag{3.20}$$

on obtient

$$\left[\chi\left(N,\overrightarrow{r},\Psi\right),\overset{*}{\chi}\left(N,\overrightarrow{\acute{r}},\acute{\Psi}\right)\right] = \left(\zeta_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\left(N,\Psi\right)\overset{*}{\zeta^{\star}_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}}\left(N,\acute{\Psi}\right) - \zeta^{\star}_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\left(N,\Psi\right)\overset{*}{\zeta_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}}\left(N,\acute{\Psi}\right)\right)$$
$$\delta^{(3)}(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{\acute{r}})\delta\left(\Psi-\acute{\Psi}\right). \tag{3.21}$$

En normalisant $\zeta_{k_rk_\Psi}$ comme suit

$$\zeta_{\acute{k}_r\acute{k}_\Psi}\left(\overset{\star}{\zeta}_{k_rk_\Psi}\right)^* - \left(\overset{\star}{\zeta}_{k_rk_\Psi}\right)\overset{*}{\zeta}_{k_rk_\Psi} = i, \tag{3.22}$$

on obtient finalement

$$\left[\chi\left(N,\overrightarrow{r},\Psi\right),\overset{*}{\chi}\left(N,\overrightarrow{\acute{r}},\acute{\Psi}\right)\right] = i\delta^{(3)}\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{\acute{r}}\right)\delta\left(\Psi-\acute{\Psi}\right). \tag{3.23}$$

Déduisons maintenant les équations de mouvement pour le mode $\zeta_{k_rk_\Psi}(N,\Psi)$. A partir de (3.12), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_r\int dk_\Psi\left\{\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi}\left[\overset{**}{\zeta}_{k_rk_\Psi}+\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}\left(k_r^2\right)\zeta_{k_rk_\Psi}-\right.\right.\\
&\left.\left(-2\frac{\beta_1}{\beta_T}+\frac{9}{4}\right)\zeta_{k_rk_\Psi}-\left(\frac{\beta_1}{\beta_T}\Psi^2\right)\frac{\partial^2\zeta_{k_rk_\Psi}}{\partial\Psi^2}\right]e^{i\overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r}}\\
&+\mathfrak{a}^{\dagger}_{k_rk_\Psi}\left[\overset{**}{\zeta^{\star}_{k_rk_\Psi}}+\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}\left(k_r^2\right)\zeta^*_{k_rk_\Psi}-\left(-2\frac{\beta_1}{\beta_T}+\frac{9}{4}\right)\zeta^*_{k_rk_\Psi}\right.\\
&\left.\left.-\left(\frac{\beta_1}{\beta_T}\Psi^2\right)\frac{\partial^2\zeta^*_{k_rk_\Psi}}{\partial\Psi^2}\right]e^{-i\overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r}}\right\}=0\,.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Il est facile de déduire de cette équations les équations de mouvement pour les modes $\zeta_{k_rk_\Psi}$ et $\zeta^{\star}_{k_rk_\Psi}$ respectivement

$$\overset{\star\star}{\zeta^{\star}_{k_rk_\Psi}}+\left[\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}k_r^2-\left(-2\frac{\beta_1}{\beta_T}+\frac{9}{4}+\Psi^2\frac{\beta_1}{\beta_T}\frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right)\right]\zeta^{\star}_{k_rk_\Psi}=0, \tag{3.25}$$

$$\zeta^{**}_{k_rk_\Psi}+\left[\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}k_r^2-\left(-2\frac{\beta_1}{\beta_T}+\frac{9}{4}+\Psi^2\frac{\beta_1}{\beta_T}\frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right)\right]\zeta_{k_rk_\Psi}=0. \tag{3.26}$$

Séparons le mode $\zeta_{k_r k_\Psi}$comme suit

$$\zeta_{k_r k_\Psi}(N,\Psi)=\zeta_{(1)}(N)\zeta_{(2)}(\Psi). \tag{3.27}$$

Aprés substitution dans (3.26), on obtient le système découplé suivant

$$\frac{\partial^2\zeta_{(1)}(N)}{\partial N^2}+\left[\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{-2N}(k_r^2)-\left(\frac{9}{4}-2\frac{\beta_1}{\beta_T}+\mathcal{K}^2\right)\right]\zeta_{(1)}(N)=0, \tag{3.28}$$

$$\Psi^2\frac{\beta_1}{\beta_T}\frac{\partial^2\zeta_{(2)}(\Psi)}{\partial\Psi^2}-\mathcal{K}^2\zeta_{(2)}(\Psi)=0, \tag{3.29}$$

où

$$\mathcal{K}^2=k_\Psi^2\Psi^2=\text{const}. \tag{3.30}$$

La solution de l'équation (3.28) est donnée par

$$\zeta_{(1)}(N)=D_1\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)}\left[x(N)\right]+D_2\mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}\left[x(N)\right]\ , \tag{3.31}$$

où

$$x(N)=\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}e^{-N}k_r \quad \text{et} \quad \nu_1=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{2\beta_1}{\beta_T}+\mathcal{K}^2}, \tag{3.32}$$

et $\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1,2)}[x]=\mathcal{J}_{\nu_1}[x]\pm i\mathcal{Y}_{\nu_1}[x]$ sont les fonctions de Hankel, et $\mathcal{J}_{\nu_1}[x]$ et $\mathcal{Y}_{\nu_1}[x]$ sont fonctions de Bessel de premier et second types. En outre, D_1 et D_2 sont des constantes arbitraires donnée par la condition de normalisation (3.22)

$$\left[D_1-D_2\right]\left[D_1+D_2\right]=i\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3.33}$$

En imposons les conditions de Bunch-Davis $D_1=0, \quad D_2=\frac{i\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient

$$\zeta_{(1)}(N)=\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}\left[x(N)\right]. \tag{3.34}$$

La solution de l'équation (3.29) est simplement donnée par

$$\zeta_{(2)}(\Psi)=C_1\Psi^{\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\beta\mathcal{K}^2}}{2\beta}}+C_2\Psi^{\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\beta\mathcal{K}^2}}{2\beta}}\quad , \tag{3.35}$$

où $\beta=\frac{\beta_1}{\beta_T}>0$.

Si on ne conserve que le mode qui ne diverge pas quand $\Psi\longrightarrow 0$, La solution générale est alors donnée par

$$\zeta_{k_r k_\Psi}(N,\Psi)=C_1\Psi^{\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\beta\mathcal{K}^2}}{2\beta}}\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}\left[x(N)\right]. \tag{3.36}$$

3.1.1 Valeurs moyennes à 5 dimensions

On passe maintenant aux calcul des valeurs moyennes. En utilisant l'équation (3.13) on a

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = e^{\frac{-3N}{2}} \left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2 e^{\frac{-3N}{2}} \left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int\int d^3k_r d^3\acute{k}_r \int\int dk_\Psi d\acute{k}_\Psi \left\langle 0 \left| \chi^2 \right| 0 \right\rangle .$$

En répétant les mêmes étapes de calcul que précédement et en utilisant les relations

$$\mathfrak{a}_{k_r k_\Psi} |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \mathfrak{a}^\dagger_{k_r k_\Psi} = 0, \quad \mathfrak{a}^\dagger_{k_r k_\Psi} |0\rangle = |k_r k_\Psi\rangle, \quad \left(\mathfrak{a}^\dagger_{k_r k_\Psi} |0\rangle\right)^\dagger = (|k_r k_\Psi\rangle)^\dagger , \tag{3.37}$$

$$\langle k_r k_\Psi| = \langle 0| \mathfrak{a}_{k_r k_\Psi}, \tag{3.38}$$

on obtient le résultat suivant

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^4 \frac{e^{-3N}}{(2\pi)^3} \int d^3k_r \int dk_\Psi \zeta_{k_r k_\Psi} (N, \Psi) \zeta^*_{k_r k_\Psi} (N, \Psi) . \tag{3.39}$$

3.1.2 Densité d'énergie à 5 dimensions

L'expréssion de la densité d'énergie est extraite de la relation donnnant le tenseur moment-énergie donnée par l'expression (A.30) de l'annexe :

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle = \Big\langle & \beta_1 \left(\nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C - \nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu\right) + \frac{1}{2} \left[\nabla_C \left(A_\nu J^C{}_\mu + A_\mu J^C{}_\nu\right)\right. \\ & + \nabla_C \left(A^C J_{\mu\nu} + A^C J_{\nu\mu}\right) - \left.\nabla_C \left(A_\nu J_\mu{}^C + A_\mu J_\nu{}^C\right)\right] \\ & - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\beta_1 \left(\nabla^C A_D \nabla_C A^D\right) + \beta_2 \left(\nabla_C A^C\right)^2 + \beta_3 \left(\nabla_C A^B \nabla_B A^C\right)\right] \Big\} \Big|_{\mu=\nu=0} . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Nous allons dans ce qui suit calculer explicitement toutes les contributions dans (3.40).
– Premier terme $\left(\nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C - \nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu\right)$.

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C &= \left(\partial_\mu A^C + \Gamma^C_{\mu D} A^D\right) \left(\partial_\nu A_C - \Gamma^B_{\nu C} A_B\right) \\ &= \left(\partial_\mu A^C\right) \left(\partial_0 A_C - \Gamma^D_{0C} A_D\right) + \Gamma^C_{00} A^0 \left(\partial_0 A_C - \Gamma^0_{0C} A_0\right) \\ &= (\partial_0 A^0)(\partial_0 A_0) - A_0 A^0. \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu &= (\partial^C A_\mu - \Gamma^{C0}_{\ 0} A_0)\left(\partial_C A_\nu - \Gamma^0_{C0} A_0\right) \\
&= (\partial^0 A_0)(\partial_0 A_0) + (\partial^\Psi A_0)(\partial_\Psi A_0) + (\partial^i A_0)(\partial_i A_0) + (\partial_\Psi A_0)(\Gamma^0_{\Psi 0} A_0) + \\
&+ \Gamma^0_{\Psi 0} A_0 (\partial_\Psi A_0) - \Gamma^0_{\Psi 0} A_0 \Gamma^0_{\Psi 0} A_0 \\
&= (\partial^0 A_\mu)(\partial_0 A_\nu) + (\partial^i A_0)(\partial_i A_0) + (\partial^\Psi A_\mu)(\partial_\Psi A_\nu) + (\partial_\Psi A_0)\frac{2}{\Psi} A_0 - \frac{1}{\Psi^2} A_0 A_0.
\end{aligned}
$$

Le premier s'écrit donc comme

$$
\left(\nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C - \nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu\right) = \Psi^2 e^{-2N} (\nabla_r^2 A^0) + \Psi^4 (\partial_\Psi A^0)^2 - 2\Psi^3 (\partial_\Psi A^0) A^0. \tag{3.41}
$$

– Deuxiéme terme $\nabla_C\left(A_\nu J^C_{\ \mu} + A_\mu J^C_{\ \nu}\right)$.

On a d'abord

$$
\nabla_C (A_\nu J^C_{\ \mu}) = \left(\nabla_C A_\nu\right) J^C_{\ \mu} + \left(\nabla_C J^C_{\ \mu}\right) A_\nu, \tag{3.42}
$$

qui s'écrit comme

$$
\begin{aligned}
\nabla_C\left(A_\nu J^C_{\ \mu}\right) = &\left(\partial_C A_\nu - \Gamma^D_{C\nu} A_D\right)\left[\beta_1 \nabla^C A_\mu + \beta_2 \delta^C_\mu \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_\mu A^C\right] + \\
&+ \left[\beta_1 \nabla_C \nabla^C A_\mu + \beta_2 \delta^C_\mu \nabla_C \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_C \nabla_\mu A^C\right] A_\nu\,.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Finalement en évaluant toutes les dérivées covariantes on obtient

$$
\begin{aligned}
\nabla_C\left(A_\nu J^C_{\ \mu}\right) = &\beta_1\left[\Psi^2 A^0_{,NN} + \Psi^2 (A^0_{,N}) + 3\Psi^2 A^0_{,N} A^0 - \Psi^2 e^{-2N} (\nabla_R^2 A^0) + \right. \\
&\left. - e^{-2N} \nabla_r^2 A^0 - \Psi^4 (\partial_\Psi A^0)^2 - 2\Psi^3 A^0 (\partial_\Psi A^0) - \Psi^2 A^0 A^0 - \Psi^4 A^0_{,\Psi\Psi} A^0\right] \\
&+ \beta_2 \Psi^2\left[(A^0_{,N})^2 + 3A^0_{,N} A^0 + A^0_{,NN} \quad A^0 + 3A^0 A^0_{,N}\right] \\
&\beta_3 \Psi^2\left[(A^0_{,N})^2 + 3A^0_{,N} A^0 + A^0_{,NN} A^0 + \Psi (\partial_\Psi A^0) A^0 - A^0 A^0.\right.
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Et de la même manière on montre que

$$
\nabla_C\left(A_\nu J^C_{\ \mu}\right) \equiv \nabla_C\left(A_\mu J^C_{\ \nu}\right). \tag{3.45}
$$

– Troisiéme terme $\nabla_C\left(A^C J_{\mu\nu} + A^C J_{\nu\mu}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\nabla_C (A^C J_{\mu\nu}) &= \left(\nabla_C A^C\right) J_{\mu\nu} + \left(\nabla_C J_{\mu\nu}\right) A^C \\
&= \left(\partial_0 A^0 + 3A^0\right)\left[\beta_1 \nabla_\mu A_\nu + \beta_2 \delta_{\mu\nu} \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_\nu A_\mu\right] \\
&+ \left[\beta_1 \nabla_C \nabla_\mu A_\nu + \beta_2 \delta_{\mu\nu} \nabla_C \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_C \nabla_\nu A_\mu\right] A^C\,.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\nabla_C\left(A^C J_{\mu\nu}\right) = & \beta_1\left[\Psi^2 A^0_{,NN} + \Psi^2 (A^0_{,N})^2 + 3\Psi^2 A^0 A^0_{,N} + 2\Psi^2 A^0 A^0 - \Psi^3(\partial_\Psi A^0)A^0\right] \\ & + \beta_2[\Psi^2 A^0_{,NN}A^0 + 6\Psi^2 A^0_{,N}A^0 + 3\Psi^2 A^0 A^0_{,N} + \Psi^2(A^0_{,N})^2 + 9\Psi^2 A^0 A^0] \\ & + \beta_3\left[\Psi^2 A^0_{,NN}A^0 + \Psi^2(A^0_{,N})^2 + 3\Psi^2 A^0 A^0_{,N} - \Psi(\partial_\Psi A_0)A^0\right] . \end{aligned} \tag{3.47}$$

On note que

$$\nabla_C\left(A^C J_{\mu\nu}\right) \equiv \nabla_C\left(A^C J_{\nu\mu}\right) .$$

– Quatriéme terme $\nabla_C\left(A_\nu J_\mu{}^C + A_\mu J_\nu{}^C\right)$.

on a

$$J_\nu^C = g_{\nu B} g^{DC} J^B{}_D. \tag{3.48}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\nabla_C\left(A_\nu J_\mu{}^C\right) = & \beta_3\left[\Psi^2 A^0_{,NN} + \Psi^2(A^0_{,N})^2 + 3\Psi^2 A^0_{,N}A^0 + \Psi^{-2}(\partial_i A_0)(\partial^i A_0) + \right. \\ & \left. -e^{-2N}\nabla_r^2 A^0 - \Psi^4(\partial_\Psi A^0)^2 - 2\Psi^3 A^0(\partial_\Psi A^0) - \Psi^2 A^0 A^0 - \Psi^4 A^0_{,\Psi\Psi}A^0\right] \\ & + \beta_2\Psi^2\left[(A^0_{,N})^2 + 3A^0_{,N}A^0 + A^0_{,NN} \quad A^0 + 3A^0 A^0_{,N}\right] \\ & \beta_1\Psi^2\left[(A^0_{,N})^2 + 3A^0_{,N}A^0 + A^0_{,NN}A^0 + \Psi(\partial_\Psi A^0)A^0 - A^0 A^0\right] . \end{aligned} \tag{3.49}$$

Il est aussi facile de montrer que

$$\nabla_C\left(A_\nu J_\mu{}^C\right) = \nabla_C\left(A_\mu J_\nu{}^C\right)$$

– Cinquiéme terme $\beta_1\left(\nabla^C A_D \nabla_C A^D\right) + \beta_2\left(\nabla_C A^C\right)^2 + \beta_3\left(\nabla_C A^B \nabla_B A^C\right)$.

Un calcul simple conduit à

$$\begin{aligned}\beta_1\left(\nabla^C A_D \nabla_C A^D\right) &= \beta_1\left(\partial^C A_D - \Gamma^{C0}_{D}A_0\right)\left(\partial_C A^D + \Gamma^D_{C0}A^0\right) \\ &= \beta_1\left[(A^0_{,N})^2 - e^{-2N}(\nabla^2_R A^0) - \Psi^2(\partial_\Psi A^0)^2 + 3A^0 A^0\right] , \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\beta_2\left(\nabla_C A^C\right)^2 &= (\partial_0 A^0 + 3A^0)^2 \\ &= \left[(A^0_{,N})^2 + 3A^0(A^0_{,N}) + 3(A^0_{,N})A^0 + 9(A^0)^2\right] , \end{aligned} \tag{3.51}$$

et

$$\beta_3\left(\nabla_C A^B \nabla_B A^C\right) = (\partial_C A^B + \Gamma^B_{C0} A^0)(\partial_B A^C + \Gamma^C_{B0} A^0)$$
$$= (A^0_{,N})^2 + 2(\partial_\Psi A^0)\Psi A^0 + 5A^0 A^0. \tag{3.52}$$

On collecte maintenant tout les termes et on substitut dans (3.40). On obtient alors

$$\begin{aligned}\langle T_{00}\rangle = \Bigg\langle & (\beta_1+\beta_2+\beta_3)\,\Psi^2(A^0_{,NN})A^0 + \left(3\beta_1+\frac{3}{2}\beta_2+3\beta_3\right)\Psi^2 A^0(A^0_{,N}) + \\ & + \beta_2\frac{9}{2}\Psi^2(A^0_{,N})A^0 + \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\,\Psi^2(A^0_{,N})^2 + \\ & + \frac{1}{2}(\beta_1+9\beta_2-5\beta_3)\,\Psi^2(A^0)^2 + (-\beta_1+\beta_3)\,\Psi^4(A^0_{,\Psi\Psi})A^0 + \\ & + (-6\beta_1+\beta_3)\,\Psi^3(\partial_\Psi A^0)A^0 + \left(\frac{1}{2}\beta_1+\beta_3\right)\Psi^4(\partial_\Psi A^0)^2 \;+ \\ & + \left(-\frac{1}{2}\beta_1+2\beta_3\right)\Psi^2 e^{-\frac{2t}{\Psi_0}}\nabla_r^2 A^0 A^0\Bigg\rangle .\end{aligned}$$

Comme le champ $A^0 \equiv \varphi$ et $T^0_0 = \rho$, on a finalement l'expression de la densité d'énergie du champ vectoriel

$$\begin{aligned}\langle\rho\rangle = \Bigg\langle & \beta_T\varphi_{,NN}\varphi + 3\left(\beta_T - \frac{1}{2}\beta_2\right)\varphi\varphi_{,N} + \frac{9}{2}\beta_2\varphi_{,N}\varphi + \frac{\beta_T}{2}\varphi^2_{,N} \\ & + \frac{1}{2}(\beta_1+9\beta_2-3\beta_3)\,\varphi^2 + (-\beta_1+\beta_3)\,\Psi^2\varphi_{,\Psi\Psi}\varphi + (-6\beta_1+\beta_3)\,\Psi\varphi_{,\Psi}\varphi + \\ & + \left(\frac{1}{2}\beta_1+\beta_3\right)\Psi^2{\varphi_{,\Psi}}^2 + \left(-\frac{1}{2}\beta_1+2\beta_3\right)e^{-\frac{2t}{\Psi_0}}(\nabla_r^2\varphi)\varphi\Bigg\rangle .\end{aligned} \tag{3.53}$$

3.1.3 Théorie effective à 4 dimensions

Compte tenu de la transformation de coordonnées

$$t \;=\; \Psi_0 N\ ,\ \ R = r\Psi_0 \quad \Psi = \Psi_0\ , \tag{3.54}$$

la métrique à 5D donnée par(3.1) prend la forme de la métrique de Ponce de Leon

$$ds^2 = \left(\frac{\Psi}{\Psi_0}\right)^2\left[dt^2 - e^{\frac{2t}{\Psi_0}}dR^2\right] - d\Psi^2. \tag{3.55}$$

Cette métrique décrit un espace-temps spatialement plat, homogène et isotrope, et qui est l'extension à 5D de la mètrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) décrivant un univers de de-Sitter. Maintenant, nous pouvons prendre $\Psi = \Psi_0$ dans (3.55), de telle sorte que nous obtenons la métrique effective à 4D

$$ds^2 = dt^2 - e^{\frac{2t}{\Psi_0}} dR^2. \tag{3.56}$$

Cette métrique décrit un univers de de-Sitter à 3D spatialement plat, homogène et isotrope avec un $H = \frac{1}{\Psi_0} = H_0$ et une courbure scalaire 4D constante ${}^{(4)}R = 12H_0^2$.

3.1.3.1 Equations de mouvement

Dans ce cas l'équation d'évolution du champ prend la forme

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{\Psi_0}\dot{\varphi} - \frac{\beta_1}{\beta_T} e^{\frac{-2t}{\Psi_0}} \nabla_R^2 \varphi - \frac{\beta_1}{\beta_T}\left[4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi} + \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi\Psi}\right]_{\Psi=\Psi_0} = 0, \tag{3.57}$$

qu'on peut écrire aussi en termes du paramètre de Hubble

$$\ddot{\varphi} + 3H_0\dot{\varphi} - \frac{\beta_1}{\beta_T} e^{\frac{-2t}{\Psi_0}} \nabla_R^2 \varphi - \frac{\beta_1}{\beta_T}\left[4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi} + \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi\Psi}\right]_{\Psi=\Psi_0} = 0. \tag{3.58}$$

Notons que le terme entre crochet agit comme un potentiel effectif pour le champ. Un terme similaire a été aussi trouvé le cas de l'inflation avec champ scalaire [28]. Nous allons calculer ce potentiel effectif. En effet on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{,\Psi}\big|_{\Psi=\Psi_0} &= \frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\chi e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2\right)\Bigg|_{\Psi=\Psi_0} \\
&= \left[\frac{\partial\chi}{\partial\Psi} e^{\frac{-3N}{2}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2 - \frac{2\Psi\Psi_0^2}{\Psi_0^4} e^{\frac{-3N}{2}}\chi\right]_{\Psi=\Psi_0}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

On pose

$$\chi \sim e^{ik_\Psi \Psi}, \tag{3.60}$$

et on substitut dans (3.59)

$$\varphi_{,\Psi}\,|_{\Psi=\Psi_0} = \left[ik_{\Psi_0} - \frac{2}{\Psi_0}\right]\varphi(t,\vec{R}). \tag{3.61}$$

De la même manière on montre que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2}\,|_{\Psi=\Psi_0} = \left[-k_{\Psi_0}^2 - \frac{4}{\Psi_0}(ik_{\Psi_0}) + \frac{6}{\Psi_0^2}\right]\varphi(t,\vec{R}). \tag{3.62}$$

En collectant ces termes on obtient la forme du potentiel effectif

$$\left[4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi}+\frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi\Psi}\right]|_{\Psi=\Psi_0}=-(\frac{2}{\Psi_0^2}+k_{\Psi_0}^2)\varphi. \tag{3.63}$$

Finalement (3.58) prend la forme

$$\ddot{\varphi}+3H_0\dot{\varphi}-\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{\frac{-2t}{\Psi_0}}\nabla_R^2+\frac{\beta_1}{\beta_T}\alpha\varphi=0, \tag{3.64}$$

où

$$\alpha=(\frac{2}{\Psi_0^2}+k_{\Psi_0}^2). \tag{3.65}$$

La projection de la fonction d'onde sur l'hypersurface 4D est obtenue en imposant $\Psi=\Psi_0$:

$$\varphi\left(t,\vec{R},\Psi=\Psi_0\right)\equiv\varphi\left(t,\vec{R}\right) \tag{3.66}$$

avec

$$\varphi\left(t,\vec{R}\right)=\chi\left(t=\Psi_0 N,\vec{R}=\Psi_0\vec{r},\Psi=\Psi_0\right). \tag{3.67}$$

On introduit la transformation suivante

$$\varphi\left(t,\vec{R}\right)=e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\chi\left(t,\vec{R}\right), \tag{3.68}$$

et on exprimeχ comme un développement de Fourier sur les modes ζ_{k_R} :

$$\chi\left(t,\vec{R}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_r\int dk_\Psi\,\left[\mathfrak{a}_{k_R}e^{i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}(t)+\mathfrak{a}_{k_Rk_\Psi}^{\dagger}e^{-i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}^*(t)\right]\delta(k_\Psi-k_{\Psi_0}). \tag{3.69}$$

Pour déduire l'équation de mouvement en terme de champ χ on a besoin des termes suivants

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\chi}{\partial t}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}-\frac{3}{2\Psi_0}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\chi, \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}-\frac{3}{\Psi_0}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)+\frac{9}{4\Psi_0^2}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\chi\ , \tag{3.71}$$

et

$$\nabla_R^2\varphi=e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\nabla_R^2\chi. \tag{3.72}$$

On remplace maintenant dans l'équation (3.58) pour obtenir

$$\ddot{\chi}-\left[\frac{\beta_1}{\beta_T}e^{\frac{-2t}{\Psi_0}}\nabla_R^2+\left(\frac{9}{4\Psi_0^2}-\frac{\beta_1}{\beta_T}\alpha\right)\right]\chi=0. \tag{3.73}$$

qui est l'équation de Klein Gordon pour le champ $\chi\left(t,\vec{R},\right)$ à 4D.

On terme des modes de Fourier on a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_r \int dk_\Psi \, \left[\mathfrak{a}_{k_r} e^{i\vec{k}_R\vec{R}} \frac{\partial^2\zeta_{k_R}(t)}{\partial t^2} + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R k_\Psi} e^{-i\vec{k}_R\vec{R}} \frac{\partial^2\zeta^*_{k_R}(t)}{\partial t^2}\right] \delta(k_\Psi - k_{\Psi_0}), \tag{3.74}$$

et

$$\nabla^2_R A^0 \; = (-k_R^2)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_R \int dk_\Psi \, \left[\mathfrak{a}_{k_r k_\Psi} e^{i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R} e^{-i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta^*_{k_R k_\Psi}(t)\right] \delta(k_\Psi - k_{\Psi_0}). \tag{3.75}$$

On substitut ces termes dans (3.73)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_R \int dk_\Psi \left\{\left[\mathfrak{a}_{k_r} e^{i\vec{k}_R\vec{R}} \frac{\partial^2\zeta_{k_R}(t)}{\partial t^2} + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R} e^{-i\vec{k}_R\vec{R}} \frac{\partial^2\zeta^*_{k_R k_\Psi}(t)}{\partial t^2}\right] + \right.\\
&+ \frac{\beta_1}{\beta_T} e^{\frac{-2t}{\Psi_0}} (k_R^2) \, \left[\mathfrak{a}_{k_r} e^{i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta_{k_R k_\Psi}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R} e^{-i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta^*_{k_R k_\Psi}(t)\right] \,)\\
&\left. - \left(\frac{9}{4\Psi_0^2} - \frac{\beta_1}{\beta_T}\alpha\right) dk_\Psi \left[\mathfrak{a}_{k_r k_\Psi} e^{i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R} e^{-i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta^*_{k_R k_\Psi}(t)\right]\right\}\\
&\delta(k_\Psi - k_{\Psi_0}) = 0,
\end{aligned}$$

dont la solution est

$$\ddot{\zeta}_{k_R} + \left[\frac{\beta_1}{\beta_T} k_R^2 e^{\frac{-2t}{\Psi_0}} - \left(\frac{9}{4\Psi_0^2} - \frac{\beta_1}{\beta_T}\alpha\right)\right] \zeta_{k_R}(t) = 0, \tag{3.76}$$

où le terme $\mu^2 = \left(\frac{9}{4\Psi_0^2} - \frac{\beta_1}{\beta_T}\alpha\right)$ représente un terme de masse pour le mode $\zeta_{k_R}(t)$. On a aussi la méme equation pour $\zeta^*_{k_R}(t)$.

La solution générale de (3.76) est donnée par

$$\zeta_{k_R}(t) = F_1\mathcal{H}^{(1)}_\nu \left[\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \frac{k_R e^{\frac{-t}{\Psi_0}}}{H_0}\right] + F_2\mathcal{H}^{(2)}_\nu \left[\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \frac{k_R e^{\frac{-t}{\Psi_0}}}{H_0}\right]. \tag{3.77}$$

Avec les condition de Bunch-Davis $F_1 = 0$ et $F_2 = i\sqrt{\frac{\pi}{4H_0}}$, on obtient

$$\zeta_{k_R}(t) = i\sqrt{\frac{\pi}{4H_0}}\mathcal{H}^{(2)}_\nu \left[\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \frac{k_R e^{-tH_0}}{H_0}\right], \tag{3.78}$$

où

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\beta_1}{\beta_T}\frac{\alpha}{H_0^2}}, \quad x(t) = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \frac{k_R e^{-tH_0}}{H_0}. \tag{3.79}$$

3.1.3.2 Indice spectral

On utilise les équations (3.69) et (3.68) pour calculer la valeur moyenne de φ^2. En effet on a

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{3t}{\Psi_0}} \int\int d^3k_R d^3\acute{k}_R \int\int dk_\Psi d\acute{k}_\Psi$$
$$\left\langle 0 \right| \left[\mathfrak{a}_{k_R} e^{i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta_{k_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_R} e^{-i\vec{k}_R\vec{R}} \zeta^*_{k_R}(t) \right] \delta(k_\Psi - k_{\Psi_0})$$
$$\left[\mathfrak{a}_{\acute{k}_R} e^{i\vec{\acute{k}}_R\vec{\acute{R}}} \zeta_{\acute{k}_R}(t) + \mathfrak{a}^\dagger_{\acute{k}_R} e^{-i\vec{\acute{k}}_R\vec{\acute{R}}} \overset{\star}{\zeta}_{\acute{k}_R}(t) \right] \delta(\acute{k}_\Psi - k_{\Psi_0}) \left| 0 \right\rangle, \tag{3.80}$$

qui peut s'écrire sous la forme simple

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \frac{e^{-3tH_0}}{2\pi^2} \int \frac{dk_R}{k_R} k_R^3 \zeta_{k_R}(t) \overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t). \tag{3.81}$$

On considère le secteur IR. En utilisant l'approximation suivante valide pour un argument petit etν positif non nul

$$\mathcal{H}^{(2)}_\nu [x(t)] \simeq -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{x(t)}{2} \right)^{-\nu}, \tag{3.82}$$

on trouve que

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle |_{IR} = \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \right)^{-2\nu} \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^3} \Gamma^2(\nu) H_0^{2\nu-1} e^{-(3-2\nu)tH_0} \int \frac{dk_R}{k_R} k_R^{3-2\nu}. \tag{3.83}$$

Le spectre de puissance $\mathcal{P}(k_R)$ est facilement identifié, et est donné par

$$\mathcal{P}(k_R) \sim \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \right)^{-2\nu} \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^3} \Gamma^2(\nu) H_0^{2\nu-1} e^{-(3-2\nu)tH_0} k_R^{3-2\nu}. \tag{3.84}$$

On écrit ensuite (3.83) comme

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle |_{IR} = \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^3} \Gamma^2(\nu) \frac{H_0^{2\nu}}{H_0} e^{-(3-2\nu)tH_0} \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \right)^{-2\nu} \int_0^{\varepsilon k_H} dk_R k_R^{2-2\nu}, \tag{3.85}$$

où $\mathcal{V}$ est un paramètre sans dimention d'ordre10^{-5} à 10^{-8} et $k_H = H_0 e^{H_0 t}$. En intégrant on obtient

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle |_{IR} = \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^3} \Gamma^2(\nu) \frac{H_0^{2\nu}}{H_0} e^{-(3-2\nu)tH_0} \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \right)^{-2\nu} \frac{(\varepsilon k_H)^{3-2\nu}}{3-2\nu}. \tag{3.86}$$

On a à partir de la définition de l'indice spectral

$$\nu = \frac{3-n_s}{2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\beta_1}{\beta_T}\alpha\Psi_0^2} \leq \frac{3}{2}, \tag{3.87}$$

ce qui donne l'expression de $\langle\varphi^2\rangle$ en fonction de n_s

$$\langle\varphi^2\rangle \mid_{IR}= \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} \frac{H_0^2 2^{-n_s}}{\pi^3}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\frac{\varepsilon^{n_s}}{n_s}, \tag{3.88}$$

Le terme $\frac{n_s}{2}$ dans l'equation est l'équivalent du paramétre δ (qui est un paramètre de roulemnt lent) dans l'équation (2.17) .

On obtient à partir de l'Eq.(3.87)

$$n_s^2 - 6n_s = -\frac{4\beta_1}{\beta_T}(2+\Psi_0^2 k_{\Psi_0}^2), \tag{3.89}$$

En tenant compte que dans le secteur IR on a $n_s \ll 1$, la solution de (**??**) est donnée par

$$n_s \simeq \frac{\beta_1}{\beta_T}\frac{2(2+\Psi_0^2 k_{\Psi_0}^2)}{3}. \tag{3.90}$$

Si on pose $\frac{\beta_1}{\beta_T} = 1$ on obtient l'indice spectral du scénario avec un champ scalaire [28].

A partir de (3.90) on a

$$k_{\Psi_0}^2 \simeq H_0^2\left(\frac{3\beta_T}{2\beta_1}n_s - 2\right). \tag{3.91}$$

De cette équation on déduit que

$$\frac{\beta_T}{\beta_1} \geq \frac{4}{3n_s}. \tag{3.92}$$

En utilisant les données d'observations qui exprime que

$$n_s < 1/60, \tag{3.93}$$

on obtient

$$\frac{\beta_T}{\beta_1} \geq 80. \tag{3.94}$$

On remarque aussi que

$$V_{,\varphi} = \left[4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi} + \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi\Psi}\right] \mid_{(\Psi=\Psi_0,n_s=0)}= \ 0. \tag{3.95}$$

3.1.3.3 Densité d'énergie à 4 dimensions

Pour déduire l'expression de la densité d'énergie à 4D, on substitut (3.54) dans(3.53). On obtient alors

$$
\begin{aligned}
\langle\rho\rangle\,|_{\Psi=\Psi_0}= & \left\langle \beta_T\Psi_0^2\varphi_{,tt}\varphi+3\left(\beta_T-\frac{1}{2}\beta_2\right)\varphi\varphi_{,t}\right.\\
& +\frac{9}{2}\Psi_0\beta_2\varphi_{,t}\varphi+\frac{\Psi_0^2}{2}\beta_T\varphi_{,t}^2+\frac{1}{2}\left(\beta_1+9\beta_2-5\beta_3\right)\varphi^2\\
& +\left(-\beta_1+\beta_3\right)\Psi^2\varphi_{,\Psi\Psi}\varphi+\left(-6\beta_1+\beta_3\right)\Psi\varphi_{,\Psi}\varphi\\
& \left.+\left(\frac{1}{2}\beta_1+\beta_3\right)\Psi^2\left(\varphi_{,\Psi}\right)^2+\left(-\beta_1+2\beta_3\right)e^{-\frac{2t}{\Psi_0}}(\nabla_r^2\varphi)\varphi\right\rangle.
\end{aligned}
$$

En utilisant (3.61) et (3.62) on réécrit cette expression en fonction de χ

$$
\begin{aligned}
\langle\rho\rangle\,|_{\Psi=\Psi_0}= & \left\langle \beta_T\Psi_0^2\left[\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)-\frac{3}{\Psi_0}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)+\frac{9}{4\Psi_0^2}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\chi\right]\chi\right.\\
& +3\Psi_0\left(\beta_T-\frac{1}{2}\beta_2\right)\chi\left[\frac{\partial\chi}{\partial t}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}-\frac{3}{2\Psi_0}e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\chi\right]e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}+\\
& +\beta_2\Psi_0\frac{9}{2}\left[\frac{\partial\chi}{\partial t}-\frac{3}{2\Psi_0}\chi\right]\chi e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}+\frac{1}{2}\left(\beta_1+9\beta_2-3\beta_3\right)\chi\chi e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}\\
& +\frac{1}{2}\Psi_0^2\beta_T\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2-\frac{3}{2\Psi_0}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\chi+\chi\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)+\frac{9}{4\Psi_0^2}\chi\chi\right]e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}\\
& +\left(-\beta_1+\beta_3\right)\Psi_0^2\left[-k_{\Psi_0}^2-\frac{4}{\Psi_0}(ik_{\Psi_0})+\frac{6}{\Psi_0^2}\right]\chi\chi e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}\\
& +\left(-6\beta_1+\beta_3\right)\Psi\left(ik_{\Psi_0}-\frac{2}{\Psi_0}\right)\chi\chi e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}+\left(-\beta_1+2\beta_3\right)e^{-\frac{2t}{\Psi_0}}e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}(\nabla_R^2\chi)\chi\\
& \left.+\left(\frac{1}{2}\beta_1+\beta_3\right)\Psi_0^2\left[-k_{\Psi_0}^2-\frac{4ik_{\Psi_0}}{\Psi_0}+\frac{4}{\Psi_0^2}\right]\chi\chi e^{\frac{-3t}{\Psi_0}}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

En termes des modes de Fourier $\zeta_{k_R}(t)$, on a

$$
\begin{aligned}
\langle\rho\rangle\,|_{\Psi=\Psi_0}= & \frac{e^{-3tH_0}}{(2\pi)^3}\int d^3k_R\left\{\frac{\beta_T}{H_0^2}\ddot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^*(t)\right.\\
& +\frac{1}{H_0}\left(\frac{9}{2}\beta_2-\frac{15}{4}\beta_T\right)\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^*(t)+\frac{\beta_T}{2H_0^2}\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}_{k_R}^*(t)\\
& +\frac{1}{H_0}\left(-\frac{3}{2}\beta_2+\frac{9}{4}\beta_T\right)\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}_{k_R}^*(t)+\left[\frac{55}{8}\beta_T-8\beta_2+\right.\\
& +\frac{1}{2}\left(\beta_1-3\beta_3\right)+\frac{\left(k_{\Psi_0}^2\right)}{H_0^2}\left(\frac{1}{2}\beta_1-2\beta_3\right)-\left(4\beta_1+7\beta_3\right)\frac{\left(ik_{\Psi_0}\right)}{H_0}\\
& \left.\left.+\left(-\frac{1}{2}\beta_1+2\beta_3\right)k_R^2e^{-\frac{2t}{\Psi_0}}\right]\zeta_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^*(t)\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

Or, on a

$$\zeta_{k_R}(t) = i\sqrt{\frac{\pi}{4H_0}}\mathcal{H}_\nu^{(2)}\left[\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\frac{k_R e^{-tH_0}}{H_0}\right], \tag{3.97}$$

et que dans le secteur IR on a l'approximation pour x petit et $\nu > 0$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}[x] \simeq -\frac{i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{x(t)}{2}\right)^{-\nu}, \tag{3.98}$$

ce qui donne

$$\zeta_{k_R}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{4H_0}}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-\frac{3-n_s}{2}} H_0^{\frac{3-n_s}{2}}\Gamma\left(\frac{3-n_s}{2}\right)2^{\frac{3-n_s}{2}}\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-\frac{3-n_s}{2}}.$$

Il est alors facile de montrer que

$$\zeta_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^*(t) \simeq \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} H_0^{(2-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)2^{(1-n_s)}\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}, \tag{3.99}$$

$$\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}_{k_R}^*(t) \simeq \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} H_0^{(3-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}, \tag{3.100}$$

$$\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^*(t) \simeq \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} H_0^{(3-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}, \tag{3.101}$$

$$\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}_{k_R}^*(t) = \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)^2\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} H_0^{(4-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}, \tag{3.102}$$

$$\ddot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta_{k_R}^*(t) \simeq \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)^2\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} H_0^{(4-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}. \tag{3.103}$$

On remplace maintenant dans (3.96) et on intégre sur k_R pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\langle\rho\rangle\quad|_{\Psi=\Psi_0} &= \frac{2^{(-n_s)}}{(\pi)^3}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-(3-n_s)} H_0^4\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right) \\
&\left\{\left[\frac{3n_s^2}{8}\beta_T - (\beta_T+\beta_2)\frac{3}{2}n_s + \right.\right. \\
&+\left(\frac{\beta_1}{2}-2\beta_3\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2} - (7\beta_3+4\beta_1)\frac{ik_{\Psi_0}}{H_0} \\
&\left.+\left(\frac{17}{2}\beta_1+\frac{15}{2}\beta_3+\frac{9}{2}\beta_2\right)\right]\frac{\mathcal{V}^{n_s}}{n_s} \\
&\left.+\frac{(\beta_1-2\beta_3)}{(n_s+2)}e^{-\frac{2t}{\Psi_0}}\left[{k_R}^{2+n_s}\right]_0^{\mathcal{V}k_H}\right\}. \qquad (3.104)
\end{aligned}
$$

3.1.3.4 Fluctuations de la densité d'énergie

L' expréssion de la fluctuation de la densité dénergie est donnée par

$$
\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\langle\rho\rangle|_{\Psi=\Psi_0} - \langle\rho\rangle^{(0)}\Big|_{\Psi=\Psi_0}}{\langle\rho\rangle|_{\Psi=\Psi_0}}, \qquad (3.105)
$$

où $\langle\rho\rangle^{(0)}\Big|_{\Psi=\Psi_0}$ est la densité d'énergie en terme du mode $\zeta_0(t)$ c-à-d pour $k_R=0$. En effet

$$
\begin{aligned}
\langle\rho\rangle^{(0)}\Big|_{\Psi=\Psi_0} &= \frac{e^{-3tH_0}}{(2\pi)^3}\int d^3k_R\left\{\frac{\beta_T}{H_0^2}\ddot{\zeta}_0(t)\zeta_0^*(t)\right. \\
&+\frac{1}{H_0}\left(\beta_2\frac{9}{2}-\frac{15}{4}\beta_T\right)\dot{\zeta}_0(t)\zeta_0^*(t)+\frac{\beta_T}{2H_0^2}\dot{\zeta}_0(t)\dot{\zeta}_0^*(t) \\
&+\frac{1}{H_0}\left(-\frac{3}{2}\beta_2+\frac{9}{4}\beta_T\right)\zeta_0(t)\dot{\zeta}_0^*(t)+\left[\frac{55}{8}\beta_T-8\beta_2\right. \\
&\left.\left.+\frac{1}{2}(\beta_1-3\beta_3)\ +\frac{\left(k_{\Psi_0}^2\right)}{H_0^2}\left(\frac{1}{2}\beta_1-2\beta_3\right)-(4\beta_1+7\beta_3)\frac{(ik_{\Psi_0})}{H_0}\right]\zeta_0(t)\zeta_0^*(t)\right\}.
\end{aligned}
$$
(3.106)

Comme précédement on montre que

$$
\zeta_0(t)\zeta_0^*(t) \simeq \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-3} H_0^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left(k_Re^{-tH_0}\right)^{-3}, \qquad (3.107)
$$

$$
\zeta_0(t)\dot{\zeta}_0^*(t) \simeq \frac{3}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-3} H_0^3\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left(k_Re^{-tH_0}\right)^{-3}, \qquad (3.108)
$$

$$\dot{\zeta}_0(t)\,\zeta_0^*(t) \simeq \frac{3}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-3} H_0^3\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-3}, \tag{3.109}$$

$$\dot{\zeta}_0(t)\,\dot{\zeta}_0^*(t) = \frac{9}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-3} H_0^{(4)}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-3}, \tag{3.110}$$

$$\ddot{\zeta}_0(t)\,\zeta_0^*(t) \simeq \frac{9}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-3} H_0^{(4)}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left(k_R e^{-tH_0}\right)^{-3}. \tag{3.111}$$

On substitut dans (3.106) et on intègre sur k_R

$$\begin{aligned}
\langle\rho\rangle^{(0)}\Big|_{\Psi=\Psi_0} &= \frac{H_0^4}{(\pi)^3}\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}}\right)^{-3}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) \\
\times &\left\{\left(\frac{\beta_1}{2}-2\beta_3\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}-\Psi_0\left(7\beta_3+4\beta_1\right)\frac{ik_{\Psi_0}}{H_0}\right. \\
+ &\left.\left(\frac{17}{2}\beta_1+\frac{15}{2}\beta_3+\frac{9}{2}\beta_2\right)\right\}\left[\ln k_R\right]_0^{\mathcal{V}k_H}.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

En substituant les expressions de $\langle\rho\rangle^{(0)}_{\Psi=\Psi_0}$ et $\langle\rho\rangle|_{\Psi=\Psi_0}$ dans (3.105) on obtient

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq 1-\frac{A}{B}n_s < 1, \tag{3.113}$$

où

$$A = \left\{\left(\frac{\beta_1}{2}-2\beta_3\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}-\left(7\beta_3+4\beta_1\right)\frac{ik_{\Psi_0}}{H_0}+\left(\frac{17}{2}\beta_1+\frac{15}{2}\beta_3+\frac{9}{2}\beta_2\right)\right\}\left[\ln k_R\right]_0^{\mathcal{V}k_H}, \tag{3.114}$$

$$B = \left\{-\left(\beta_T+\beta_2\right)\frac{3}{2}n_s+\left(\frac{\beta_1}{2}-2\beta_3\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}-\left(7\beta_3+4\beta_1\right)\frac{ik_{\Psi_0}}{H_0}+\left(\frac{17}{2}\beta_1+\frac{15}{2}\beta_3+\frac{9}{2}\beta_2\right)\right\} \tag{3.115}$$

avec

$$k_{\Psi_0} \simeq H_0\sqrt{\left(\frac{3\beta_T}{2\beta_1}n_s-2\right)}. \tag{3.116}$$

Comme $n_s \ll 1$, et $\left[\ln k_R\right]_0^{\mathcal{V}k_H} \geq 60$ on déduit que

$$n_s < \frac{1}{60+\frac{\frac{3}{2}(\beta_T+\beta_2)-\frac{3\beta_T}{2\beta_1}\left(\frac{\beta_1}{2}-2\beta_3\right)+\frac{3\beta_T}{8\beta_1}\sqrt{2}(7\beta_3+4\beta_1)}{(4\beta_3-\beta_1)+\sqrt{2}(7\beta_3+4\beta_1)+\left(\frac{17}{2}\beta_1+\frac{15}{2}\beta_3+\frac{9}{2}\beta_2\right)}}, \tag{3.117}$$

Cette expression est trés compliquée pour pouvoir tirer une information sur les paramètres β_i, nous allons limiter nôtre analyse aux cas suivants :

1. $\beta_2 = 0$. Dans ce cas on a pour l'indice spectral

$$n_s < \frac{1}{60 + \frac{\left(3+\frac{21\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\beta_T}{\beta_1} - \left(\frac{9}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)}{\left(7\sqrt{2}+\frac{23}{2}\right) - \frac{\beta_1}{\beta_T}\left(3\sqrt{2}+4\right)}}. \tag{3.118}$$

2. $\beta_T = \beta_2$. Ce modèle correspond à $\beta_1 = -\beta_3$ avec $\beta_1 \neq 0$ et $\beta_3 \neq 0$. On a alors l'expression suivante pour l'indice spectral

$$n_s < \frac{1}{60 + \frac{\frac{\beta_T}{\beta_1}\left(\frac{3}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)}{4+3\sqrt{2}-\frac{9}{2}\frac{\beta_T}{\beta_1}}}, \tag{3.119}$$

3. $\beta_T = -\beta_2$. Ce modèle correspond à $\beta_1 + \beta_3 = -2\beta_2$ avec $\beta_1 \neq 0$. Dans ce cas on a

$$n_s < \frac{1}{60 + \frac{\left(6+\frac{21\sqrt{2}}{4}\right)\frac{\beta_T}{\beta_1} - \frac{\left(30+9\sqrt{2}\right)}{8}}{\left(14\sqrt{2}+\frac{37}{2}\right) - \left(6+3\sqrt{2}\right)\frac{\beta_1}{\beta_T}}}$$

Ces résultat sont très importants puisque pour $\frac{\beta_T}{\beta_1} \geq 80$, ils reproduisent un insice spectral $n_s \approx 0.9831$ en accord l'observation.

3.2 Deuxiéme cas $A^B \equiv \left(0, \overrightarrow{0}, A^4\right)$:

3.2.1 Equations de mouvement

Utilisons l'équation (3.6) et calculons les terme suivants :

$$\beta_1 \nabla_C \nabla^C A^4 = \beta_1 \left[A^4_{,NN} \ + 3A^4_{,N} \ - e^{-2N}\nabla^2_r A^4 \ - \Psi^2 \frac{4}{\Psi} A^{\,4}_{,\Psi} \ - \Psi^2 A^{\,4}_{,\Psi\Psi} \right] \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 \nabla^B \nabla_D A^D &= \beta_2 \nabla^B \left[\frac{1}{\sqrt{|^{(5)}g|}} \left(\sqrt{|^{(5)}g|} A^D \right)_{,D} \right] \\
&= \beta_2 \partial^B \left[\frac{1}{\sqrt{|^{(5)}g|}} \left(\Psi^4 e^{3N} A^4 \right)_{,\Psi} \right] \\
&= \beta_2 \left[\frac{4}{\Psi^2} A^4 - \frac{4}{\Psi} A^4_{,\Psi} - A^4_{,\Psi\Psi} \right].
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Pour $\left(\beta_3 \nabla_C \nabla^B A^C\right)$ on montre que

$$
\begin{aligned}
\beta_3\nabla_C\nabla^B A^C &= B_3 g^{BE}\nabla_C\nabla_E A^C \\
&= B_3 g^{BE}\left[\partial_C\left(\nabla_E A^C\right) - \Gamma^D_{CE}\left(\nabla_D A^C\right) + \Gamma^C_{CD}\left(\nabla_E A^D\right)\right] \\
&= B_3 g^{\Psi\Psi}\left[\partial_C\left(\partial_\Psi A^c\right) + \partial_C\left(\Gamma^C_{\Psi\Psi}A^\Psi\right) - \Gamma^D_{\Psi\Psi}\left(\partial_D A^\Psi\right) - \Gamma^D_{C\Psi}\Gamma^C_{D\Psi}A^\Psi\right. \\
&\left. + \Gamma^C_{C\Psi}\left(\partial_\Psi A^\Psi\right) + \Gamma^C_{CD}\Gamma^D_{\Psi\Psi}A^\Psi\right] \\
&= -\beta_3\left[A^\Psi_{,\Psi\Psi} - \Gamma^0_{0\Psi}\Gamma^0_{0\Psi}A^\Psi - \Gamma^i_{j\Psi}\Gamma^j_{i\Psi}A^\Psi + \Gamma^0_{0\Psi}\left(\partial_\Psi A^\Psi\right) + \Gamma^i_{i\Psi}\left(\partial_\Psi A^\Psi\right)\right] \\
&= \beta_3\left[\frac{4}{\Psi^2}A^4 - A^4_{,\Psi\Psi} - \frac{4}{\Psi}A^{\,4}_{\,,\Psi}\right]. \qquad (3.122)
\end{aligned}
$$

L'équation de mouvement prend la forme ($A^4 \equiv \varphi$)

$$
\varphi_{,NN} + 3\varphi_{,N} + -e^{-2N}\nabla_r^2\varphi - \frac{\beta_T}{\beta_1}\left(\Psi^2\varphi_{,\Psi\Psi} + 4\Psi\varphi_{,\Psi}\right) + 4\left(\frac{\beta_T}{\beta_1} - 1\right)\varphi = 0\ . \qquad (3.123)
$$

Pour obtenir l'équation de KG à 5 D on effectue la tronsformation suivante

$$
\varphi\left(N, r, \Psi\right) = \chi\left(N, r, \Psi\right)e^{\frac{-3N}{2}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2. \qquad (3.124)
$$

On suit les mémes étapes de calcul que précédement et on remplace dans l'équation (3.123)

$$
\begin{aligned}
&\left(\chi_{,NN} - \frac{9}{4}\chi\right)e^{\frac{-3N}{2}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2 - e^{-2N}e^{\frac{-3N}{2}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2\nabla_r^2\chi \\
&- \frac{\beta_T}{\beta_1}\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial\Psi^2}\Psi^2\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2 - 2\chi\frac{\Psi_0^2}{\Psi^2}\right]e^{\frac{-3N}{2}} \\
&+ 4\left(\frac{\beta_T}{\beta_1} - 1\right)\chi e^{\frac{-3N}{2}}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^2 = 0. \qquad (3.125)
\end{aligned}
$$

Après simplification on obtient l'équation de Klein-Gordon

$$
\chi_{,NN} - \left[e^{-2N}\nabla_r^2 + \left(\Psi^2\frac{\beta_T}{\beta_1}\frac{\partial^2}{\partial\Psi^2} - 6\frac{\beta_T}{\beta_1} + \frac{25}{4}\right)\right]\chi{=}0. \qquad (3.126)
$$

Le champ χ se developpe en une série de Fourier

$$
\chi\left(N, \vec{r}, \Psi\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_r\int dk_\Psi\ \left[\mathfrak{a}_{k_rk_\Psi}e^{i\vec{k}_r\vec{r}}\zeta_{k_rk_\Psi}\left(N, \Psi\right) + \mathfrak{a}^\dagger_{k_rk_\Psi}e^{-i\vec{k}_r\vec{r}}\zeta^*_{k_rk_\Psi}\left(N, \Psi\right)\right]. \qquad (3.127)
$$

Si on substitut dans (3.126) on déduit que

$$
\overset{**}{\zeta}_{k_rk_\Psi} + \left[e^{-2N}k_r^2 + \left(6\frac{\beta_T}{\beta_1} - \frac{25}{4}\right)\right]\zeta_{k_rk_\Psi} - \Psi^2\frac{\beta_T}{\beta_1}\frac{\partial^2\zeta_{k_rk_\Psi}}{\partial\Psi^2} = 0. \qquad (3.128)
$$

qui est l'équation de Klein-Gordon pour le mode $\zeta_{k_r k_\Psi}$. On effectue ensuite la séparation suivante

$$\zeta_{k_r k_\Psi}(N, \Psi) = \zeta_{(1)}(N)\zeta_{(2)}(\Psi), \tag{3.129}$$

qui conduit au système d'équations différentielles suivantes

$$\frac{\partial^2 \zeta_{(1)}(N)}{\partial N^2} + \left[e^{-2N} k_r^2 - \left(\mathcal{K}^2 - \frac{6\beta_T}{\beta_1} - \frac{25}{4})\right)\right] \zeta_{(1)}(N) = 0, \tag{3.130}$$

$$\Psi^2 \frac{\beta_T}{\beta_1} \frac{\partial^2 \zeta_{(2)}(\Psi)}{\partial \Psi^2} + \left(-\mathcal{K}^2\right) \zeta_{(2)}(\Psi) = 0. \tag{3.131}$$

La solution de (3.130) est donnée par

$$\zeta_{(1)}(N) = L_1 \mathcal{H}_{\nu_2}^{(1)}\left[k_r e^{-N}\right] + L_2 \mathcal{H}_{\nu_2}^{(2)}\left[k_r e^{-N}\right], \tag{3.132}$$

où

$$\nu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathcal{K}^2 - 24\frac{\beta_T}{\beta_1} + 25}, \tag{3.133}$$

et les conditions de Bunch-Davis : $L_1 = 0$ et $L_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{2}$.

La solution de l'équation (3.131) est donnée par

$$\zeta_{(2)}(\Psi) = C_1 \Psi^{\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4B\mathcal{K}^2}}{2B}} + C_2 \Psi^{\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\beta\mathcal{K}^2}}{2\beta}}, \tag{3.134}$$

Où $\beta = \frac{\beta_T}{\beta_1}$.

Finalement la solution générale s'écrit

$$\zeta_{k_r k_\Psi}(N, \Psi) = C_1 \Psi^{\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4B\mathcal{K}^2}}{2B}} \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{H}_{\nu_2}^{(2)}\left[k_r e^{-N}\right].$$

3.2.2 La densité d'énergie à 5 dimensions

En suivant les mêmes calculs que dans (3.1.1) on a

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = e^{-3N}\left(\frac{\Psi_0}{\Psi}\right)^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k_r \int dk_\Psi \zeta_{k_r k_\Psi}(N, \Psi)\, \zeta^*_{k_r k_\Psi}(N, \Psi). \tag{3.135}$$

L'expression de la densité d'énergie se calcule en prenant la composante $(0, 0)$ du tenseur moment-énergie

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle = \Big\langle \beta_1 \left(\nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C - \nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\nabla_C\left(A_\nu J^C{}_\mu + A_\mu J^C{}_\nu\right)\right.$$
$$\left. +\nabla_C\left(A^C J_{\mu\nu} + A^C J_{\nu\mu}\right) - \nabla_C\left(A_\nu J_\mu{}^B + A_\mu J_\nu{}^B\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} K^{DE}{}_{FN} \nabla_D A^F \nabla_E A^N \Big\rangle . \tag{3.136}$$

En effet, le premier terme donne

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C &= \left(\partial_\mu A^C + \Gamma^C_{\mu F} A^F\right)\left(\partial_\nu A_C - \Gamma^D_{\nu C} A_D\right) \\
&= \left(\partial_0 A^C + \Gamma^C_{04} A^4\right)\left(\partial_0 A_C - \Gamma^4_{0C} A_4\right) \\
&= \left(\partial_0 A^4\right)\left(\partial_0 A_4\right) - \Gamma^0_{04}\Gamma^4_{00} A^4 A_4 \\
&= \left(\partial_0 A^4\right)\left(\partial_0 A_4\right)
\end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu &= \left(\partial^C A_\mu - \Gamma^{CD}{}_\mu A_D\right)\left(\partial_C A_\nu - \Gamma^B_{C\nu} A_B\right) \\
&= \Gamma^{04}{}_0 A_4 \Gamma^4_{00} A_4 \\
&= g^{00}\Gamma^4_{00} A_4 \Gamma^4_{00} A_4 = A_4 A_4
\end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\beta_1\left(\nabla_\mu A^C \nabla_\nu A_C - \nabla^C A_\mu \nabla_C A_\nu\right) = \beta_1\left[(\partial_0 A^4)(\partial_0 A_4) - A_4 A^4 - A_4 A_4\right] \tag{3.139}$$

Pour le deuxiéme terme, on montre que

$$\begin{aligned}
\nabla_C\left(A_\nu J^C{}_\mu\right) &= \left(\nabla_C A_\nu\right) J^C{}_\mu + \left(\nabla_C J^C{}_\mu\right) A_\nu \\
&= \left(\partial_C A_\nu - \Gamma^D_{C\nu} A_D\right)\left[\beta_1 \nabla^C A_\mu + \beta_2 \delta^C_\mu \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_\mu A^C\right] + \\
&+ \left[\beta_1 \nabla_C \nabla^C A_\mu + \beta_2 \delta^C_\mu \nabla_C \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_C \nabla_\mu A^C\right] A_\nu \\
&= \left[\beta_1\left(\Gamma^4_{C0} A_4 \Gamma^{C4}{}_0 A_4\right) - \frac{\beta_2 \Gamma^4_{C0}\delta^C_\mu}{\sqrt{|^{(5)}g|}}\left(\sqrt{|^{(5)}g|}A^4\right)_{,\Psi} A_4\right. \\
&\left. -\beta_3 \Gamma^4_{C0}\partial_0 A^C + \Gamma^C_{04} A^4 A_4\right] \\
&= \beta_1\left(g^{00}\Gamma^4_{00}\Gamma^4_{00} A_4 A_4\right) - \beta_2 \Gamma^4_{00}\delta^0_0 \frac{1}{\Psi^4 e^{3N}}\left(\Psi^4 e^{3N} A^4\right)_{,\Psi} A_4 - \beta_3 \Gamma^4_{00}\Gamma^0_{04} A^4 A_4
\end{aligned} \tag{3.140}$$

et donc

$$\nabla_C \left(A_\nu J^C{}_\mu\right) = \left[\beta_1 A_4 A_4 - \beta_2 \left(4A^4 + \Psi A^4_{,\Psi}\right) A_4 - \beta_3 A^4 A_4\right] \tag{3.141}$$

avec

$$\nabla_C \left(A_\nu J^C{}_\mu\right) = \nabla_C \left(A_\mu J^C{}_\nu\right) \tag{3.142}$$

Pour le troisiéme terme, on a le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\nabla_C \left(A^C J_{\mu\nu}\right) &= \left(\nabla_C A^C\right) J_{\mu\nu} + \left(\nabla_C J_{\mu\nu}\right) A^C \\
&= \left(\partial_\Psi A^4 + \frac{4}{\Psi} A^4\right) \left[\beta_1(-\Gamma^4_{00} A_4) + \beta_2 \Psi^2 \left(\partial_\Psi A^4 + \frac{4}{\Psi} A^4\right) + \beta_3 \left(-\Gamma^4_{00} A_4\right)\right] + \\
&+ \left[\beta_1 \nabla_C \nabla_\mu A_\nu + \beta_2 \delta_{\mu\nu} \nabla_C \nabla_B A^B + \beta_3 \nabla_C \nabla_\nu A_\mu\right] A^C
\end{aligned} \tag{3.143}$$

avec

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_C \nabla_\mu A_\nu\right) A^C &= \left[\partial_C \left(\nabla_\mu A_\nu\right) - \Gamma^D_{C\mu}(\nabla_D A_\nu) - \Gamma^D_{C\nu}(\nabla_\mu A_D)\right] A^C \\
&= \left[\partial_C \left(\partial_\mu A_\nu - \Gamma^D_{\mu\nu} A_D\right) - \Gamma^D_{C\mu} \left(\partial_D A_\nu - \Gamma^B_{D\nu} A_B\right) - \Gamma^D_{C\nu} \left(\partial_\mu A_D - \Gamma^B_{\mu D} A_B\right)\right] A^C \\
&= \left[\partial_C \left(-\Gamma^4_{00} A_4\right) - \Gamma^D_{C0} \left(-\Gamma^4_{D0} A_4\right) - \Gamma^D_{C0}(\partial_0 A_D) + \Gamma^D_{C0} \Gamma^4_{0D} A_4\right] A^C \\
&= \left(-\Psi A_{4,\Psi} A^4 + A_4 A^4\right),
\end{aligned} \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_C \nabla_B A^B\right) A^C &= \partial_C \left(\partial_\Psi A^4 + \frac{4}{\Psi} A^4\right) A^C \\
&= \partial_\Psi \left(\partial_\Psi A^4 + \frac{4}{\Psi} A^4\right) A^4 \\
&= A^4_{,\Psi\Psi} A^4 + 4 \left(\frac{-1}{\Psi^2} A^4 + \frac{1}{\Psi} A^4_{,\Psi}\right) A^4,
\end{aligned} \tag{3.145}$$

et

$$\left(\nabla_C \nabla_\nu A_\mu\right) A^C = -\Psi A_{4,\Psi} A^4 + A_4 A^4. \tag{3.146}$$

En remplaçant dans (3.143), on obtient

$$\nabla_C(A^C J_{\mu\nu}) = \beta_1\left[-2\Psi A_4 A^4_{,\Psi} - 3A^4 A_4\right] + \beta_2\left[\Psi^2(\partial_\Psi A^4)(\partial_\Psi A^4) + \right.$$
$$\left. 12\Psi A^4(\partial_\Psi A^4) + 12A^4A^4 + \Psi^2 A^4_{,\Psi\Psi}A^4\right] +$$
$$+\beta_3\left[-2(\partial_\Psi A^4)(\Psi A_4) - 3A^4A_4\right], \tag{3.147}$$

avec

$$\nabla_C(A^C J_{\mu\nu}) \equiv \nabla_C(A^C J_{\nu\mu}). \tag{3.148}$$

Pour le quatriéme terme, on montre que

$$\begin{aligned}\nabla_C\left(A_\nu J_\mu{}^C\right) &= \left(\nabla_C A_\nu\right) J_\mu{}^C + \left(\nabla_C J_\mu{}^C\right) A_\nu \\ &= \left[\beta_3 A_4 A_4 - \beta_2\left(4A^4A_4 + \Psi A^4_{,\Psi}A_4\right) - \beta_1 A^4 A_4\right],\end{aligned} \tag{3.149}$$

avec

$$\nabla_C\left(A_\nu J_\mu{}^C\right) \equiv \nabla_C\left(A_\mu J_\nu{}^C\right). \tag{3.150}$$

Pour le cinquiéme et dernier terme, on montre d'abord que

$$\begin{aligned}\left(\nabla^C A_D \nabla_C A^D\right) &= \left(\partial^C A_D - \Gamma^{C4}_{D}A_4\right)\left(\partial_C A^D + \Gamma^D_{C4}A^4\right) \\ &= (\partial^0 A_4)(\partial_0 A^4) + (\partial^i A_4)(\partial_i A^4) + (\partial^\Psi A_4)(\partial_\Psi A^4) - \Psi^{-2}A_4A^4 + \\ &\quad -\Psi^{-2}e^{-2N}\delta^{kj}\delta_{ki}\delta^i_j\Psi e^{2N}\frac{1}{\Psi}A^4)A_4 \\ &= -\Psi^{-2}(\partial_0 A^4)^2 + (\partial^i A_4)(\partial_i A^4) + (\partial_\Psi A^4)^2 - 4\Psi^{-2}A_4A^4,\end{aligned} \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla_C A^C\right)^2 &= \left(\partial_\Psi A^4 + \frac{4}{\Psi}A^4\right)^2 \\ &= (\partial_\Psi A^4)^2 + \frac{8}{\Psi}(\partial_\Psi A^4)A^4 + \frac{16}{\Psi^2}A^4A^4,\end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\left(\nabla_C A^B \nabla_B A^C\right) = \left(\partial_C A^B + \Gamma^B_{C4}A^4\right)\left(\partial_B A^C + \Gamma^C_{B4}A^4\right) = (\partial_\Psi A^4)^2 + \Gamma^\beta_{\alpha 4}\Gamma^\alpha_{\beta 4}A^4A^4$$
$$= (\partial_\Psi A^4)^2 + \Gamma^0_{04}\Gamma^0_{04}A^4A^4 + \Gamma^i_{j4}\Gamma^j_{i4}A^4A^4, \tag{3.153}$$
$$= (\partial_\Psi A^4)^2 + \frac{4}{\Psi^2}A^4A^4. \tag{3.154}$$

On remplace maintenant dans l'éxpréssion de la densité d'énergie(3.136)

$$\langle T_{00}\rangle = \Big\langle \beta_1 \left[-\frac{1}{2}(\partial_0 A^4)^2 - \frac{1}{2}\Psi^2(\partial^i A_4)(\partial_i A^4) - 2\Psi A_4 (A^4_{,\Psi}) - \frac{1}{2}\Psi^2(\partial_\Psi A^4)^2 + A_4 A_4 \right]$$
$$+ \beta_2 \left[4A^4 A^4 + 8\Psi A^4(\partial_\Psi A^4) + \frac{1}{2}\Psi^2(\partial_\Psi A^4)(\partial_\Psi A^4) + \Psi^2 A^4_{,\Psi\Psi} A^4 \right]$$
$$+ \beta_3 \left[-2(\partial_\Psi A^4)(\Psi A_4) + A^4 A^4 - \frac{1}{2}\Psi^2(\partial_\Psi A^4)^2 \right] \Big\rangle . \tag{3.155}$$

Comme $A^4 \equiv \varphi$ et $\rho = T^0_0$, on arrive finalement à l'expression

$$\langle \rho \rangle = \Big\langle \beta_1 \left[-\frac{\Psi^{-2}}{2}(\varphi_{,N})^2 + \frac{1}{2}(\partial^i\varphi)(\partial_i\varphi) + \Psi^{-2}\varphi\varphi + 2\Psi^{-1}\varphi_{,\Psi}\varphi - \frac{1}{2}(\varphi_{,\Psi})^2 \right] +$$
$$\beta_2 \left[4\Psi^{-2}\varphi\varphi + 8\Psi^{-1}\varphi_{,\Psi}\varphi + \frac{1}{2}(\varphi_{,\Psi})^2 + \varphi_{,\Psi\Psi}\varphi \right] +$$
$$+\beta_3 \left[2\Psi^{-1}\varphi_{,\Psi}\varphi + \Psi^{-2}\varphi\varphi - \frac{1}{2}(\varphi_{,\Psi})^2 \right] \Big\rangle . \tag{3.156}$$

3.2.3 Théorie effective à 4 dimensions

En utilisant la transformation des coordonnées (3.54) , déja utiliseé dans la section précédente, et on remplaçant dans l'équation de mouvement (3.123) on obtient

$$\varphi_{,tt} + 3\frac{1}{\Psi_0}\varphi_{,t} - e^{-2N}\nabla^2_R\varphi + \frac{4}{\Psi_0^2}\left(\frac{\beta_T}{\beta_1} - 1\right)\varphi +$$
$$\frac{\beta_T}{\beta_1}\left[-\frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}A^4_{,\Psi\Psi} - 4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}A^{\;4}_{,\Psi} \right] |_{\Psi=\Psi_0} = 0. \tag{3.157}$$

Comme on a

$$\left(-\frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}A^4_{,\Psi\Psi} - 4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}A^{\;4}_{,\Psi} \right) |_{\Psi=\Psi_0} = (2H_0^2 + k^2_{\Psi_0}) = \alpha,$$

l'équation de mouvement prend la forme

$$\varphi_{,tt} + 3H_0\varphi_{,t} - e^{-2tH_0}\nabla^2_R\varphi + \left[4H_0^2\left(\frac{\beta_T}{\beta_1} - 1\right) + \frac{\beta_T}{\beta_1}\alpha \right]\varphi = 0, \tag{3.158}$$

où

$$H_0 = \frac{1}{\Psi_0}. \tag{3.159}$$

On projette maintenant la fonction d'onde sur l'hypersurface 4D

$$\varphi\left(t, \vec{r}, \Psi = \Psi_0\right) \equiv \varphi\left(t, \vec{R}\right) = e^{\frac{-3t}{2\Psi_0}}\chi\left(t, \vec{R}\right), \tag{3.160}$$

où

$$\chi\left(t,\vec{R}\right)=\chi\left(t=\Psi_0 N,\vec{R}=\Psi_0 r,\Psi=\Psi_0\right). \tag{3.161}$$

Le champ χ écrit sous forme d'une série de Fourier des modes ζ_{k_R} est

$$\chi\left(t,\vec{R}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k_r\int dk_\Psi\quad\left[\mathfrak{a}_{k_R}e^{i\vec{k}_R\vec{R}}\zeta_{k_R}(t)+\mathfrak{a}^{\dagger}_{k_R}e^{-i\left(\vec{k}_R\vec{R}\right)}\zeta^{*}_{k_Rk_\Psi}(t)\right]\delta(k_\Psi-k_{\Psi_0}). \tag{3.162}$$

On écrit maintenant les équations de mouvement en terme du champ χ. En effet on obtient

$$\ddot{\chi}-e^{-2tH_0}\nabla^2_R\chi-\left[\frac{25}{4}H_0^2-\frac{\beta_T}{\beta_1}\left(\alpha+H_0^2 4\right)\right]\chi=0. \tag{3.163}$$

En termes des modes de Fourier on a

$$\ddot{\zeta}_{k_R}(t)+\left[k_R^2e^{\frac{-2t}{\Psi_0}}-\mu^2\right]\zeta_{k_R}(t)=0, \tag{3.164}$$

où

$$\mu^2=\frac{25}{4}H_0^2-\frac{\beta_T}{\beta_1}\left(\alpha+H_0^2 4\right), \tag{3.165}$$

est un terme de masse pour les modes $\zeta_{k_R}(t)$.

La solution générale de (3.164) est donnée par

$$\zeta_{k_R}=F_1\mathcal{H}^{(1)}_\nu\left[\frac{k_R}{H_0}e^{-tH_0}\right]+F_2\mathcal{H}^{(2)}_\nu\left[\frac{k_R}{H_0}e^{-tH_0}\right], \tag{3.166}$$

avec

$$\nu=\frac{1}{H_0}\sqrt{\frac{25}{4}H_0^2-\left(\alpha+4H_0^2\right)\frac{\beta_T}{\beta_1}}, \tag{3.167}$$

et la condition de normalisation

$$\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^{*}_{k_R}(t)-\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^{*}_{k_R}(t)=i. \tag{3.168}$$

Si on considère les conditions de Bunch-Davis $F_1=0$ et $F_2=i\sqrt{\frac{\pi}{4H_0}}$, on obtient

$$\zeta_{k_R}(t)=i\sqrt{\frac{\pi}{4H_0}}\mathcal{H}^{(2)}_\nu\left[\frac{k_R}{H_0}e^{-tH_0}\right]. \tag{3.169}$$

Calculons maintenant la valeur moyenne de la densité d'énergie à 4D. On a d'abord le résultat

$$\left\langle\varphi^2\right\rangle=\frac{e^{-3tH_0}}{2\pi^2}\int\frac{dk_R}{k_R}k_R^3\zeta_{k_R}(t)\,\overset{\star}{\zeta}_{k_R}(t). \tag{3.170}$$

Dans le secteur IR on fait la proximation suivante

$$\mathcal{H}_{\nu}^{(2)}\left[x(t)\right] \simeq -\frac{i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{x\left(t\right)}{2}\right)^{-\nu} \tag{3.171}$$

ce qui conduit à l'équation

$$\left\langle \varphi^{2}\right\rangle |_{IR}= \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^{3}}\Gamma^{2}\left(\nu\right)H_{0}^{2\nu-1}e^{-(3-2\nu)tH_{0}}\int_{0}^{\mathcal{V}k_{H}}\frac{dk_{R}}{k_{R}}k_{R}^{3-2\nu}, \tag{3.172}$$

de laquelle on déduit l'expression du spectre de puissance

$$\mathcal{P}(k_{R}) \sim \frac{2^{2\nu-3}}{\pi^{3}}\Gamma^{2}\left(\nu\right)H_{0}^{2\nu-1}e^{-(3-2\nu)tH_{0}}k_{R}^{3-2\nu}, \tag{3.173}$$

où nous prenons

$$\nu = \frac{3-n_{s}}{2}. \tag{3.174}$$

En effectuant l'intégration on aboutit à l'expression

$$\left\langle \varphi^{2}\right\rangle |_{IR}= \frac{H_{0}^{2}2^{-n_{s}}}{\pi^{3}}\Gamma^{2}\left(\frac{3-n_{s}}{2}\right)\frac{\left(\mathcal{V}\right)^{n_{s}}}{n_{s}}. \tag{3.175}$$

L'indice spectral est donnée par les relations (3.167) et (3.174)

$$\frac{3-n_{s}}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}-\frac{\beta_{T}}{\beta_{1}}\frac{\left(\alpha+4H_{0}^{2}\right)}{H_{0}^{2}}},$$

comme $n_s \ll 1$ et $\alpha = (2H_0^2 + k_{\Psi_0}^2)$ on obtient

$$n_{s} \simeq \frac{\beta_{T}}{\beta_{1}}\frac{2(2+k_{\Psi_{0}}^{2}\Psi_{0}^{2})}{3}+\frac{8}{3}\left(\frac{\beta_{T}}{\beta_{1}}-1\right). \tag{3.176}$$

On conclut aussi que

$$k_{\Psi_{0}}^{2} \simeq \frac{1}{\Psi_{0}^{2}}\left(\frac{3}{2}\frac{\beta_{1}}{\beta_{T}}n_{s}-4\frac{\beta_{1}}{\beta_{T}}-6\right), \tag{3.177}$$

ce qui donne

$$k_{\Psi_{0}} \simeq H_{0}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\beta_{1}}{\beta_{T}}n_{s}-4\frac{\beta_{1}}{\beta_{T}}-6}. \tag{3.178}$$

On remarque aussi qu'on a

$$\left[4\frac{\Psi}{\Psi_0^2}\varphi_{,\Psi} + \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\varphi_{\ ,\Psi\Psi}\right] |_{(\Psi=\Psi_0,n_s=0)} =$$

$$= -4H_0^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_T} - 1\right)\varphi(t,\vec{R}). \tag{3.179}$$

On remarque que si on pose $\frac{\beta_T}{\beta_1} = 1$ on obtient à nouveau le cas du champ scalaire [28].

3.2.3.1 Fluctuations de la densité d'énergie

On utilise les équations (3.54) et on remplace dans (3.156). Le résultat est donné par

$$\langle\rho\rangle |_{\Psi_0=\Psi} = \Big\langle \beta_1\left[-\frac{1}{2}(\varphi_{,t})^2 + \frac{\Psi_0^2}{2}(\partial^I\varphi)(\partial_I\varphi)\right] + \left[\left(-2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_T\right)k_{\Psi_0}^2 \right.$$
$$\left. + \ \Psi_0^{-1}\left(4\beta_T - 2\beta_2\right)ik_{\Psi_0} + \Psi_0^{-2}\left(\beta_2 - 5\beta_T\right)\varphi\varphi\right]\Big\rangle . \tag{3.180}$$

En terme des modes $\zeta_{k_R}(t)$ on obtient

$$\langle\rho\rangle |_{\Psi_0=\Psi} = \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-3tH_0}\int d^3k_R\left\{\beta_1\left[-\frac{1}{2}\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t)\right.\right.$$
$$\left. + \frac{3H_0}{4}\left(\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) + \zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t)\right)\right] + \left[\left(-2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_T\right)k_{\Psi_0}^2 + \right.$$
$$\left.\left. + H_0\left(4\beta_T - 2\beta_2\right)ik_{\Psi_0} + H_0^2\left(\beta_2 - 5\beta_T\right) - \beta_1\frac{9H_0^2}{8} - \frac{\beta_1}{2}e^{-2tH_0}k_R^2\right]\zeta_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t)\right\}, \tag{3.181}$$

où

$$\zeta_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) \simeq \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}H_0^{(2-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_Re^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}. \tag{3.182}$$

$$\zeta_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t) \simeq \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)H_0^{(3-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_Re^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}. \tag{3.183}$$

$$\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\zeta^*_{k_R}(t) \simeq \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)H_0^{(3-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_Re^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}. \tag{3.184}$$

$$\dot{\zeta}_{k_R}(t)\,\dot{\zeta}^*_{k_R}(t) = \frac{2^{(1-n_s)}}{\pi}\left(\frac{3-n_s}{2}\right)^2H_0^{(4-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left(k_Re^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}. \tag{3.185}$$

On remplaçe dans (3.181) avec $d^3k_R = 4\pi k_R^2 dk_R$ et $k_R^2 \ll 1$, pour obtenir dans le secteur IR l'expression suivante

$$\langle\rho\rangle\mid_{\Psi_0=\Psi} = \frac{4H_0^{(4-n_s)}2^{(1-n_s)}}{(2\pi)^3}\left(e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)e^{-3tH_0}\int_0^{\varepsilon k_H}dk_R$$
$$\left[\left(-2\beta_2+\frac{\beta_T}{2}\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}+\frac{1}{H_0}\left(4\beta_T-2\beta_2\right)ik_{\Psi_0}+\left(\beta_2-5\beta_T\right)-\frac{n_s^2\beta_1}{8}-\frac{\beta_1}{2}e^{-2tH_0}k_R^2\right]\left(k_R\right)^{(-1+n_s)}. \tag{3.186}$$

Aprés intégration on obtient

$$\langle\rho\rangle\mid_{\Psi_0=\Psi} = \frac{H_0^{(4-n_s)}2^{(-n_s)}}{\pi^3}\left(e^{-tH_0}\right)^{-(3-n_s)}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)e^{-3tH_0}$$
$$\left\{\frac{1}{n_s}\left[\left(-2\beta_2+\frac{\beta_T}{2}\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}+\frac{2}{H_0}\left(2\beta_T-\beta_2\right)ik_{\Psi_0}+\left(\beta_2-5\beta_T\right)\right]\left[k_R^{n_s}\right]_0^{\varepsilon k_H}+\right.$$
$$\left.-\frac{\beta_1 n_s^2}{8}-\frac{\beta_1}{2\left(2+n_s\right)}e^{-2tH_0}k_R^{2+n_s}\right\}. \tag{3.187}$$

Puisque $k_H = H_0 e^{H_0 t}$, on obtient

$$\langle\rho\rangle\mid_{\Psi_0=\Psi} = \frac{H_0^4 2^{(-n_s)}}{\pi^3}\Gamma^2\left(\frac{3-n_s}{2}\right)\left\{\frac{1}{n_s}\left[-\frac{\beta_1 n_s^2}{8}+\left(-2\beta_2+\frac{\beta_T}{2}\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{H_0}\left(2\beta_T-\beta_2\right)ik_{\Psi_0}+\left(\beta_2-5\beta_T\right)\right]\left(\varepsilon\right)^{n_s}-\frac{\beta_1 H_0^2}{2\left(2+n_s\right)}\varepsilon^{(2+n_s)}\right\} \tag{3.188}$$

Les fluctuations de la densité d'énergie sont données par la relation

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\langle\rho\rangle_{\Psi=\Psi_0}-\langle\rho\rangle_{\Psi=\Psi_0}^{(0)}}{\langle\rho\rangle_{\Psi=\Psi_0}}. \tag{3.189}$$

Comme dans la section précedente, on montre que

$$\langle\rho\rangle^{(0)}\mid_{\Psi_0=\Psi} = \frac{H_0^4}{\pi^3}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(-2\beta_2+\frac{\beta_T}{2}\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{H_0}\left(2\beta_T-\beta_2\right)ik_{\Psi_0}+\left(\beta_2-5\beta_T\right)\right]\left[\ln k_R\right]_0^{\nu k_H}. \tag{3.190}$$

En remplaçant dans (3.189), on obtient

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq 1-\frac{\varpi n_s\left[\ln k_R\right]_0^{\varepsilon k_H}}{\varpi}, \tag{3.191}$$

avec

$$\varpi = \frac{H_0^4}{\pi^3}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(-\beta_2 + \frac{\beta_T}{2}\right)\frac{k_{\Psi_0}^2}{H_0^2} - \left(4\beta_T - 2\beta_2\right)\frac{ik_{\Psi_0}}{H_0} + \left(\beta_2 - 5\beta_T\right)\right]. \tag{3.192}$$

Finalement

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq 1 - n_s\left[\ln\right]_0^{\varepsilon k_H} < 1, \tag{3.193}$$

et comme $\left[\ln\right]_0^{\varepsilon k_H} \geq 60$, on déduit que

$$n_s < 1/60. \tag{3.194}$$

C'est exactement le résultat obtenu dans [28]. Dans ce cas on remarque que le champ vectoriel de la forme $A^B \equiv \left(0, \overrightarrow{0}, \varphi\right)$ n'apporte aucune correction à l'indice spectral.

Chapitre 4

Conclusion

Nous avons étudier dans ce mémoire la théorie de la matière induite de Wesson et ces applications en cosmologie. Cette théorie est une variante très prometteuse de la théorie de Klaluza-Klein. Dans le premier chapitre on a introduit les principes fondamentaux sur lesquels est construit la théorie de Kaluza-Klein ainsi que la théorie de la matière induite de Paul Wesson. Nous avons aussi discuté du sens géométrique de cette dernière et nous avons déduit quelques solutions cosmologiques exactes décrivant un univers dominé par la radiation ou par la poussière.

Dans le second chapitre nous avons discuté de la cosmologie quantique à 4 dimensions, et avons étudié les fluctuations de densité modélisées par les fluctuations quantiques d'un champ scalaire ou d'un champ vectoriel brisant l'invariance de Lorentz, sans l(introduction d'un terme de potentiel. Nous avons réussi à calculer explicitement le spectre de puissance des fluctuations scalaires ainsi que l'indice spactral en fonction des paramètres libres de la théorie qui sont dans le cas du champ vectoriel les paramètres sans dimensions β_i. Le résultat majeur est que le spectre de puissance n'est pas tout a fait invariant d'échelle, et que un ajustement adéquat des paramètres β_i permet de reproduire la valeur observée de l'indice spectral.

Dans le chapitre 3, nous avons étendu nôtre investigation étudié la théorie de Kaluza-Klein avec un champ vectoriel à 5 dimensions. Le résultat essentiel que nous avons trouvé est que après projection sur l'hypersurface quadridimensionnelle, la dimension suplémentaire introduit un terme de potentiel. L'autre résultat important est que pour un champ vectoriel de genre temps on a extrait une contrainte forte sur les paramètres sans dimensions β_i, telle que pour $\beta_T/\beta_1 \geq 80$, la valeur de l'indice spectral $n_s \approx 0.9831$ coincide avec la valeur observée. Finalement, nous aussi avons pu constater q'une action purement cinétique décrivant un champ vectoriel dans un espace-temps à 5 dimensions est réduite à une action décrivant un champ scalaire massive sur l'hypersurface à 4 dimensions.

Annexe A

Annexe : Tenseur moment-énergie du champ vectoriel

La somme de l'action gravitationnelle et de l'action du champ vectoriel est donnée par

$$S = \int_\Omega dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R^{(4)}}{16\pi G} - \frac{1}{2} K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma + v\left(A^2\right) \right], \tag{A.1}$$

où Ω est une région de l'espace-temps délimitée par une hypersurface $\partial\Omega$ fermée de genre temps ou de de genre espace dans le domaine Ω, sur laquelle $\delta g_{\alpha\beta} = 0 = \delta g^{\alpha\beta}$.

Pour déduire la forme du tenseur moment-énergie associé au champ vectoriel, nous allons utiliser le principe de moindre action en variant par rapport au tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, et ainsi obtenir les équations du champ d'Einstein.

On considère d'abord le premier terme contenant le scalaire de Ricci. En utilisant les relations

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \tag{A.2}$$

on montre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi G} \int_\Omega dx^4 \delta\left(\sqrt{-g} R\right) &= \frac{1}{16\pi G} \int_\Omega dx^4 \left[R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R \right] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \left[\int_\Omega dx^4 \left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + \int_\Omega dx^4 \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \tag{A.3}$$

En utilisant un référentiel local de Lorentz on montre que

$$\delta R_{\alpha\beta} = \left(\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)_{;\mu} - \left(\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}\right)_{;\beta}, \tag{A.4}$$

et

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \eth v^{\mu}{}_{;\mu} \tag{A.5}$$

où

$$\eth v^{\mu} = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{A.6}$$

On note que le symbole $\eth$ ne désigne pas une variation de v^{μ}. En utilisant A.5, le deuxièmme terme dans A.3 devient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left(\sqrt{-g}\eth v^{\mu}{}_{;\mu}\right)d^4x &= \int_{\Omega}\left(\sqrt{-g}\eth v^{\mu}\right)_{,\mu}d^4x\\ &= \oint_{\partial\Omega} d\Sigma_{\mu}\eth v^{\mu},\\ &= 0,\end{aligned} \tag{A.7}$$

et finalement la variation de la partie gravitationnelle de l'action donne le tenseur d'Einstein

$$\begin{aligned}\frac{1}{16\pi G}\int_{\Omega} dx^4\delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\Omega} dx^4\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\Omega} dx^4 G_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{A.8}$$

Considérons maintenant la variation de l'action du champ vectoriel On a

$$\begin{aligned}\delta\left(K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\sigma}\sqrt{-g}\right) &= K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\sigma}\delta\left(\sqrt{-g}\right) + \nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\sigma}\sqrt{-g}\delta K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\\ &+ \sqrt{-g}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\delta\left(\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\sigma}\right).\end{aligned} \tag{A.9}$$

En utilisant l'expression du tenseur $K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ les différents termes s'écrivent comme

– 1^er^ terme

$$\begin{aligned}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\sigma}\delta\left(\sqrt{-g}\right) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta}\\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}K^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\nabla_{\alpha}A^{\rho}\nabla_{\beta}A^{\sigma}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{A.10}$$

– 2^{e} terme

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \sqrt{-g}\delta K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} &= \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \sqrt{-g}\delta\left(\beta_1 g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + \beta_2\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma + \beta_3\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)\\ &= \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A^\sigma\beta_1\delta g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A^\sigma\beta_1 g^{\mu\nu}\delta g_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{A.11}$$

Comme

$$\delta g_{\rho\sigma} = -g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \tag{A.12}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma \sqrt{-g}\delta K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} &= \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A^\sigma\beta_1\delta g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A^\sigma\beta_1 g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}g^{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta}\\ &= \beta_1\sqrt{-g}\left(\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A_\rho\delta g^{\mu\nu} - \nabla^\nu A_\alpha\nabla_\nu A_\beta\delta g^{\alpha\beta}\right)\\ &= \beta_1\sqrt{-g}\left(\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A_\rho - \nabla^\rho A_\mu\nabla_\rho A_\nu\right)\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{A.13}$$

– 3^{e}terme

$$\sqrt{-g}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho\nabla_\nu A^\sigma\right) = \sqrt{-g}\left(K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho\right)\nabla_\nu A^\sigma + K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_\mu A^\rho\delta\left(\nabla_\nu A^\sigma\right)\right) \tag{A.14}$$

De la relation

$$\begin{aligned}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho\right) &= \delta\left(\partial_\mu A^\rho + \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}A^\alpha\right)\\ &= \left(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}\right)A^\alpha\end{aligned} \tag{A.15}$$

et la variation du symbole de Christoffel

$$\delta\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = -\frac{1}{2}\left(g_{\sigma\rho}\nabla_\nu\delta g^{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\nabla_\sigma\delta g^{\mu\rho} + g^{\mu\rho}\nabla_\rho\delta g_{\nu\sigma}\right) \tag{A.16}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho\right) &= -\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\gamma}\nabla_\mu\delta g^{\rho\gamma} + g_{\mu\gamma}\nabla_\alpha\delta g^{\rho\gamma} + g^{\rho\gamma}\nabla_\gamma\delta g_{\mu\alpha}\right)A^\alpha\\ &= -\frac{1}{2}\left(A_\gamma\nabla_\mu\delta g^{\rho\gamma} + g_{\mu\gamma}A^\alpha\nabla_\alpha\delta g^{\rho\gamma} + g^{\rho\gamma}A^\alpha\nabla_\gamma\delta g_{\mu\alpha}\right).\end{aligned} \tag{A.17}$$

En substituant dans on obtient

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho\right)\nabla_\nu A^\sigma &= -\frac{1}{2}\left[K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\left(A_\gamma\nabla_\mu\delta g^{\rho\gamma} + g_{\mu\gamma}A^\alpha\nabla_\alpha\delta g^{\rho\gamma} + g^{\rho\gamma}A^\alpha\nabla_\gamma\delta g_{\mu\alpha}\right)\nabla_\nu A^\sigma\right] \\
&= -\frac{1}{2}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}A_\gamma\nabla_\mu\delta g^{\rho\gamma}\nabla_\nu A^\sigma - \frac{1}{2}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}g_{\mu\gamma}A^\alpha\nabla_\alpha\delta g^{\rho\gamma}\nabla_\nu A^\sigma \\
&+ -\frac{1}{2}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}g^{\rho\gamma}A^\alpha\nabla_\gamma\delta g_{\mu\alpha}\nabla_\nu A^\sigma \\
&= -\frac{1}{2}\left[A_\gamma J^\mu{}_\rho\nabla_\mu\left(\delta g^{\rho\gamma}\right) + A^\alpha J^\mu{}_\rho g_{\mu\gamma}\nabla_\alpha\left(\delta g^{\rho\gamma}\right) + A^\alpha J^\mu{}_\rho g^{\rho\gamma}\nabla_\gamma\left(\delta g_{\mu\alpha}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[A_\gamma J^\mu{}_\rho\nabla_\mu\left(\delta g^{\rho\gamma}\right) + A^\alpha J_{\gamma\rho}\nabla_\alpha\left(\delta g^{\rho\gamma}\right) + A^\alpha J^{\mu\gamma}\nabla_\gamma\left(\delta g_{\mu\alpha}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[A1 + A2 + A3\right], \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A1 &= A_\gamma J^\mu{}_\rho\nabla_\mu\left(\delta g^{\rho\gamma}\right) \\
&= \nabla_\mu\left(A_\gamma J^\mu{}_\rho\delta g^{\rho\gamma}\right) - \nabla_\mu\left(A_\gamma J^\mu{}_\rho\right)\delta g^{\rho\gamma} \\
&= -\nabla_\lambda\left(A_\nu J^\lambda{}_\mu\right)\delta g^{\mu\nu} \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A2 &= A^\alpha J_{\gamma\rho}\nabla_\alpha\left(\delta g^{\rho\gamma}\right) \\
&= \nabla_\alpha\left(A^\alpha J_{\gamma\rho}\delta g^{\rho\gamma}\right) - \nabla_\alpha\left(A^\alpha J_{\gamma\rho}\right)\delta g^{\rho\gamma} \\
&= -\nabla_\lambda\left(A^\lambda J_{\nu\mu}\right)\delta g^{\mu\nu} \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A3 &= \nabla_\gamma\left(A^\alpha J^{\mu\gamma}\delta g_{\mu\alpha}\right) - \nabla_\gamma\left(A^\alpha J^{\mu\gamma}\right)\delta g_{\mu\alpha} \\
&= -\nabla_\gamma\left(A^\alpha J^{\mu\gamma}\right)\delta g_{\mu\alpha} \\
&= \nabla_\gamma\left(A^\alpha J^{\mu\gamma}\right)g_{\rho\mu}g_{\sigma\alpha}\delta g^{\rho\sigma} \\
&= \nabla_\gamma\left(A^\alpha J^{\mu\gamma}g_{\rho\mu}g_{\sigma\alpha}\right)\delta g^{\rho\sigma} \\
&= \nabla_\lambda\left(A_\nu J_\mu{}^\lambda\right)\delta g^{\mu\nu}. \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}$$

On note que nous avons éliminer tous les termes de surface, puisqu'ils donnent une contribution nulle.

En substituant dans on obtient

$$K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho\right)\nabla_\nu A^\sigma = -\frac{1}{2}\left[-\nabla_\lambda\left(A_\nu J^\lambda{}_\mu\right) - \nabla_\lambda\left(A^\lambda J_{\nu\mu}\right) + \nabla_\lambda\left(A_\nu J_\mu{}^\lambda\right)\right]\delta g^{\mu\nu} \qquad \text{(A.22)}$$

Effectuons une permutation sur les indices pour calculer le terme $K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_\mu A^\rho \delta\left(\nabla_\nu A^\sigma\right)$. En effet la permutation

$$\mu \longleftrightarrow \nu, \quad \rho \longleftrightarrow \sigma,$$

conduit à

$$K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_\mu A^\rho \delta\left(\nabla_\nu A^\sigma\right) \rightarrow K^{\nu\mu}{}_{\sigma\rho}\nabla_\nu A^\sigma \delta\left(\nabla_\mu A^\rho\right), \tag{A.23}$$

avec

$$K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = K^{\nu\mu}{}_{\sigma\rho}. \tag{A.24}$$

Finalement on obtient

$$K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\nabla_\mu A^\rho \delta\left(\nabla_\nu A^\sigma\right) = -\frac{1}{2}\left[-\nabla_\lambda\left(A_\mu J^\lambda{}_\nu\right) - \nabla_\lambda\left(A^\lambda J_{\mu\nu}\right) + \nabla_\lambda\left(A_\mu J_\nu{}^\lambda\right)\right]\delta g^{\mu\nu}. \tag{A.25}$$

et en substituant dans le troisième terme on arrive à

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\delta\left(\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\sigma\right) = -\frac{1}{2}&\left\{-\nabla_\lambda\left(A_\nu J^\lambda{}_\mu + A_\mu J^\lambda{}_\nu\right) - \nabla_\lambda\left(A^\lambda J_{\mu\nu} + A^\lambda J_{\nu\mu}\right)\right. \\ &\left. +\nabla_\lambda\left(A_\mu J_\nu{}^\lambda + A_\nu J_\mu{}^\lambda\right)\right\}\end{aligned} \tag{A.26}$$

Considérons maintenant la variation du potentiel. Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}v\left(\xi\right)\right) &= v\left(\xi\right)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta v\left(\xi\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}v\left(\xi\right) + \sqrt{-g}\frac{dv}{d\xi}\delta\xi \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}v\left(\xi\right) + \sqrt{-g}\frac{dv}{d\xi}A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} \\ &= \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}v\left(\xi\right) + \frac{dv}{d\xi}A_\mu A_\nu\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{A.27}$$

En collectant les termes () dans δS on obtient

$$
\begin{aligned}
\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \Bigg\{ & \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} v\left(\xi\right) - \frac{dv}{d\xi} A_\mu A_\nu \\
& - \frac{1}{2}\beta_1 \left(\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A_\rho - \nabla^\rho A_\mu \nabla_\rho A_\nu\right) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} K^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \nabla_\alpha A^\rho \nabla_\beta A^\sigma \\
& + \frac{1}{4}\left[\nabla_\lambda \left(A_\mu J_\nu{}^\lambda + A_\nu J_\mu{}^\lambda\right) - \nabla_\lambda \left(A_\nu J^\lambda{}_\mu + A_\mu J^\lambda{}_\nu\right) - \nabla_\lambda \left(A^\lambda J_{\mu\nu} + A^\lambda J_{\nu\mu}\right)\right] \Bigg\} \\
= 0. &
\end{aligned} \tag{A.28}
$$

Comme $\delta g^{\mu\nu}$ est arbitraire, on déduit les équations du champ d'Einstein

$$
R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{A.29}
$$

où le tenseur moment-energie $T_{\mu\nu}$ du champ $A_\mu$est donné par

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = & \beta_1 \left(\nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A_\rho - \nabla^\rho A_\mu \nabla_\rho A_\nu\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \nabla_\alpha A^\rho \nabla_\beta A^\sigma + 2\frac{dv}{d\xi} A_\mu A_\nu - g_{\mu\nu} v\left(\xi\right) \\
& + \frac{1}{2}\left[\nabla_\lambda \left(A_\nu J^\lambda{}_\mu + A_\mu J^\lambda{}_\nu\right) + \nabla_\lambda \left(A^\lambda J_{\mu\nu} + A^\lambda J_{\nu\mu}\right) - \nabla_\lambda \left(A_\mu J_\nu{}^\lambda + A_\nu J_\mu{}^\lambda\right)\right]
\end{aligned} \tag{A.30}
$$

Bibliographie

[1] Bernard F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, (1985).

[2] Pierre Mathieu, *Notes de cours, Méthodes mathématiques en physique* , Université Laval, (2005).

[3] J. M. Overduin, P. S. Wesson, Kaluza-Klein Gravity, Phys. Reports, **283**, 303-378 (1997).

[4] C. W. Misner , K. S. Thorne , J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, (1973).

[5] I. K. Wehus, F. Ravndal, [ArXiv :hep-ph/0210292 v3].

[6] J. K. Webb et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 091301 (2001).

[7] Paul S. Wesson, *Space-Time-Matter, Modern Kaluza-Klein Theory*, World scientific publishing, Singapore, (1999).

[8] L. H. Ford, Phys. Rev. **D 40**, 967 (1989).

[9] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, JCAP 0806, 009 (2008) [arXiv-astro-ph/0802.2068].

[10] S. Kanno, M. Kimura, J. Soda and S. Yokoyama, JCAP **0808**, 034 (2008) arxiv :0806.2422 [hep-ph] ;

[11] C. Armendariz-Picon, JCAP **0407**, 007 (2004) [arXiv : astro-ph/0405267] ; J. B. Jimenez and A. L. Maroto, Phys. Rev. **D 78**, 063005 (2008) [arXiv :astro-ph/0801.1486] ; T. S. Koivisto and D. F. Mota, JCAP **0808**, 021 (2008) [arXiv :astro-ph/0805,4229] ; C. G. Boehmer and T. Harko, Eur. Phys. Phys. J. **C 50**, 423 (2007) [arXiv :gr-qc/0701029] ; K. Bamba, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. **D 77**, 123532 (2008) [arXiv :hep-th/0803.3384].

[12] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi and M. Peloso, [arXiv :astro-ph/0809.2779] ; B. Himmetoglu, C. R. Contaldi and M. Peloso, [arXiv :astro-ph/0812.1231].

[13] S. M. Carroll, T. R. Dulaney, M. I. Gresham and H. Tam, [arxiv :hep-th/0812.1049].

[14] Seoktae koh, [arxiv :0904v1].

[15] N. Akdani-Hamed, G. Dvali and S. Dimopoulos, Phys. Lett. **B 429**, 263 (1998) ;

[16] D. Youm, Phys. Rev **D 6**2, 084002 (2000) ; R. Maartens, Phys. Rev **D 62**, 084023 (2000) ; A. Chamblin, Clas. Quant. Grav. **18**, L-17 (2001) ; P. S. Wesson, B. Mashhoon, H.Liu, and W. N. Sajko, Phys. Lett. **B 456**, 34 (2001) ; J. Ponce de Leon, Phys. Lett. **B 523**, 311 (2001).

[17] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev Lett. **83**, 4690 (1999).

[18] J. M. Overduin et P. S. Wesson, Phys. Rept. **283**, 303 (1997).

[19] B. Mashhoon, H. Liu and P. S. Wesson, Phys. Lett. **B 331**, 305 (1994).

[20] B. Mashhoon et Wesson P., Class. Quant. Grav. **21**, 3611 (2004).

[21] D. H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rept. **314**, 1 (1999).

[22] S. Habib, Phys. Rev. **D 46**, 2408 (1992).

[23] M. Mijic, Phys. Rev. **D 49**, 6434 (1994).

[24] E. J. Copeland, E. W. Colb, A. R. Liddle et J. E. Lidsay, Phys. Rev. **D 4**8, 2529 (1993).

[25] M. Liguori, S. Matarrese, M. Musso et A. Riotto, JCAP **0408**, 011 (2004).

[26] J. E. Madriz Aguilar et M. Bellini, Phys. Lett. **B 596**, 116 (2004) ; J. E. Madriz Aguilar et M. Bellini, Eur. Phys. J. **C 38**, 367 (2004).

[27] D. S. Ledesma et M. Bellini, Phys. Lett. **B 581**, 1 (2004).

[28] M. Bellini., [arxiv :gr-qc/0410143v4].

[29] Review of Particles Physics : Phys. Lett. **B 59**2, 207 (2004).

[30] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan, *Cosmologie Primordial*, 2ème éditions Belin, France (2005).