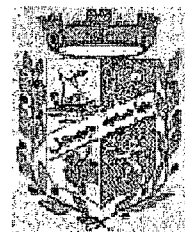


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Mathématique

Par

Radja Rekioua

THEME

*Intégrale de Chemin Supersymétrique pour les Particules
Spinorielles Relativistes : Oscillateur de Dirac et le
Potentiel Step.*

Soutenu le 27/11/2004

Devant le Jury :

Président:	L. Chetouani	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteur:	T. Boudjedaa	M.C.	Univ. Jijel
Examineurs:	M. Maamache	Prof.	Univ. Sétif
	M. T .Meftah	Prof.	Univ. Ouargla
	Kh. Nouicer	M.C.	Univ. Jijel
Invité:	M. Merad	M.C.	Univ. Oum-El Bouaghi

530.1/18



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

المكتبة المركزية
J.H-065

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Mathématique

Par

Radja Rekioua

THEME

*Intégrale de Chemin Supersymétrique pour les Particules
Spinorielles Relativistes : Oscillateur de Dirac et le
Potentiel Step.*

Soutenu le : /11/2004

Devant le Jury :

Président:	L. Chetouani	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteur:	T. Boudjedaa	M.C.	Univ. Jijel
Examineurs:	M. Maamache	Prof.	Univ. Sétif
	M. T. Meftah	Prof.	Univ. Ouargla
	Kh. Nouicer	M.C.	Univ. Jijel
Invité:	M. Merad	M.C.	Univ. Oum-El Bouaghi

Remerciements

Ce travail a fait l'objet d'un mémoire de magister élaborée au laboratoire de physique théorique, département de physique, Université de Jijel.

Je remercie en particulier "الله جل جلاله" de m'avoir donné la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

Je tiens à remercier la personne sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour, à savoir Monsieur Tahar Boudjedaa pour son encadrement rigoureux, sa disponibilité, ses encouragements et sa gentillesse.

Je remercie par l'avance l'ensemble des membres de jury pour leur participation, leur lecture et leurs remarques.

Un grand merci spécial à Monsieur Lyazid Chetouani, professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance, mon respect, à mes enseignants de la post-graduation de physique mathématique, M. Maamache, professeur à l'université de Sétif, T. Mestah, professeur à l'université de Ouargla, Messieurs Kh. Nouicer, maître de conférence à l'université de Jijel, et A. Bounames, maître de conférence à l'université de Jijel, pour toutes les facilités qu'ils m'ont accordées, ainsi M. Merad, maître de conférence à l'université de Oum-El Bouaghi pour ses conseils qui sont toujours pertinents et constructifs.

Je réserve aussi une place aux différents étudiants que j'ai côtoyés pendant mes études supérieures pour leur enthousiasme, leur sens de l'amitié, leur encouragements et leur précieuse aide : Merci Nadia Chine, Bouchra Guettou, Tama Khellil, Mourad Debabi et Nourredine Ferksous. Que ce mémoire conserve le souvenir de leur amitié.

Enfin, je remercie ma famille et mes proches qui ont toujours cru en moi et m'en ont toujours soutenu, et plus précisément ma mère pour l'extraordinaire patience dont elle ont fait preuve tout au long de la préparation de ce travail.

Radja.

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Oscillateur de Dirac	7
2.1	Introduction	7
2.2	L'oscillateur en mécanique quantique non relativiste	8
2.2.1	Oscillateur harmonique non relativiste	8
2.3	L'oscillateur en mécanique quantique relativiste	9
2.3.1	Les propriétés de l'oscillateur de Dirac	12
2.3.2	Oscillateur de Dirac a une dimension	14
2.3.3	Oscillateur de Dirac a deux dimensions	16
2.3.4	Oscillateur de Dirac a trois dimensions	20
3	Etude de l'oscillateur de Dirac par le formalisme de Fradkin-Gitman	22
3.1	Introduction	22
3.2	Propagateur relatif à l'oscillateur	23
3.3	Calcul de la fonction de Green à une dimension	28
3.3.1	L'intégration sur les coordonnées	30
3.3.2	Intégration sur les variables de spin	31
3.4	Fonctions d'ondes et énergies	39
3.5	Tentative de généralisation à la dimension $d=2$	41
3.5.1	Intégration sur les variables de spin	42

TABLE DES MATIÈRES

2

4	Etude du potentiel step à 1D par le formalisme de Fradkin-Gitman	51
4.1	Propagateur relatif au potentiel step	51
4.2	Calcul de la fonction de Green	54
4.2.1	Intégration sur les variables de spin	55
4.2.2	methode de perturbation	58
5	Conclusion générale	69
A	matrices inverses $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$	71
B	matrice inverse $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$	77

Chapitre 1

Introduction générale

C'est Dirac qui le premier a fait l'observation en 1932 que l'action d'Hamilton pourrait jouer un rôle central en mécanique quantique. Partant du lien qui existe entre les transformations canoniques de la mécanique classique et les transformations unitaires de la mécanique quantique, il a pu réécrire l'évolution quantique au moyen d'une exponentielle d'une quantité fondamentale en mécanique classique qui est l'action. Cette formulation est baptisée formulation lagrangienne de la mécanique quantique. En fait ce qu' a fait Dirac n'était qu'une ébauche d'une idée géniale qui aller conquérir toute la physique, connue maintenant sous le nom de l'intégrale de chemin de Feynman. En effet, Feynman, encore jeune, s'intéressa à cette idée géniale de Dirac et prépara alors en 1942 sa fameuse thèse dans laquelle, en complétant Dirac, il montra clairement comment il est possible de déduire toute la mécanique quantique à partir d'un principe d'action. Alors une nouvelle formulation de la mécanique quantique vit le jour. Par ailleurs, sa formulation réhabilite la notion sacrée de la mécanique classique qui est la trajectoire et du même coup introduit d'une manière très subtile l'étrange principe de superposition. Cet objet mathématique étrange que Feynman a construit est une extension de l'intégrale multiple de Riemann mais au lieu d'avoir une multitude finie d'intégrales, on en a une infinité. Notons que du point de vue mathématique cette intégrale qu'on nomme intégrale fonctionnelle peut être comprise comme étant une intégrale sur un espace de fonctions bien définies et présente alors une richesse particulière. Son domaine de recherche est maintenant en pleine effervescence.

Le coeur du formalisme est le propagateur. Ce dernier, qui est une amplitude de tran-

sition, est formulé comme une somme sur les amplitudes de tous les chemins possibles, la trajectoire classique incluse, reliant l'état initial (x_{in}, t_{in}) à l'état final (x_{out}, t_{out}) . L'amplitude de chaque chemin est proportionnelle à l'exponentielle de l'action associée au chemin : *amplitude* $\sim \exp(iS/\hbar)$.

Cet élégant et puissant formalisme a été testé et appliqué avec succès aux différents problèmes de la mécanique quantique non relativiste. Cette puissance, il la puise de son extraordinaire aptitude d'adaptation et d'amalgame avec les techniques de calculs déjà existantes. Par exemple, c'est en introduisant et en adaptant la technique des transformations spatio-temporelles qu'on a pu résoudre presque la totalité des problèmes solubles via l'équation de Schrödinger. Ou bien encore, l'intégrale de chemins a pu intégrer et utiliser merveilleusement le calcul classique des approximations des intégrales ou les méthodes variationnelles dans les problèmes qui n'ont pas de solutions exactes et la validité des résultats dépasse largement les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations différentielles ou intégrales.

Malgré tout cet exploit, l'intégrale de chemin de Feynman n'a conquis le domaine de la mécanique quantique relativiste spinorielle que timidement. Le problème majeur est le spin. En effet, l'intégrale de chemins use des concepts classiques qui sont continus tels les chemins. Le spin étant fondamentalement une grandeur quantique, par sa nature discrète, n'a pas d'analogue classique et pose alors un vrai problème de formulation. Certes, il y a plusieurs tentatives de formulation telles, modèle de la toupie, bosonisation et fermionisation de l'algèbre de Pauli et modèle des variables de Grassmann de Berezin-Marinov et Fradkin-Gitman, mais une méthodologie de calcul n'existe pas pour l'instant.

Le formalisme des variables de Grassmann s'est révélé très à la mode puisqu'il permet de représenter convenablement les matrices de Dirac au moyen de variables continues. En plus, l'action déduite est l'analogue de celle de la théorie quantique de la gravité. Par conséquent, maîtriser ce formalisme dans le cas de la particule de Dirac revient à le maîtriser aussi dans le domaine la gravité quantique. D'où l'intérêt de faire des calculs explicites.

L'idée fondamentale de ce formalisme est d'écrire formellement la fonction de Green relative au problème comme l'inverse d'un opérateur puis au moyen d'une représentation intégrale de cet inverse on retrouve un opérateur d'évolution type Schrödinger. Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon on utilise un seul temps d'évolution dit temps propre de Schwinger et pour le

cas de Dirac on en utilise deux. C'est un temps propres supersymétriques de type bosonique-fermionique. La partie bosonique il est exactement celle de Schwinger et la partie fermionique projette les états de Klein-Gordon sur ceux de Dirac.

Ce formalisme a été appliqué dans le cas de l'interaction avec et sans anomalie aux : Champ électromagnétique constant, onde plane et combinaison des deux configurations, et il s'est avéré puissant et efficace. Il a été aussi adapté au cas de l'équation de Feshbach-Villars. Dans ce cas les matrices de Pauli décrivent une symétrie de charge au lieu du spin.

Notre but dans ce mémoire est :

- d'adapter ce formalisme au cas de l'Oscillateur de Dirac (OD)
- d'appliquer encore ce formalisme dans le cas de l'interaction de la particule de Dirac avec un potentiel scalaire type Step.

Dans chaque cas on est contraint à cause de la complexité des calculs de se restreindre à ce qu'on appelle la projection globale ; c'est à dire sans l'évolution fermionique.

La méthode du calcul se résume aux étapes suivantes :

Partant de l'équation de Dirac correspondante au problème, nous écrivons d'abord la fonction en tant qu'inverse de l'opérateur de Dirac. Ensuite nous multiplions cet inverse par un opérateur de conjugué adéquat dans le but de ramener le problème à l'opérateur quadratique de type Klein-Gordon. Le résultat s'écrit comme une fraction d'un opérateur fermionique par un opérateur bosonique. Cette fraction est reparamétrisée au moyen de la technique de temps propre de Schwinger généralisée au cas supersymétrique.

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres. Les chapitres 2 et 3 s'adressent à la présentation de l'OD. Nous commençons par donner une idée générale et quelques propriétés sur le rôle de l'oscillateur en physique et particulièrement l'OD. Puis nous développons le calcul de l'intégrale de chemin pour le cas de la dimension 1 et élaborant une ébauche pour la dimension 2. Dans le premier, le calcul est exactement soluble jusqu'aux fonctions d'onde. Cependant dans le cas de dimension 2 le calcul se complique à cause du couplage spin-orbite. On montrera seulement alors comment le propagateur est calculable via les méthodes de l'intégrale de chemin. Le résultat analytique n' y est pas donné.

Le troisième chapitre est réservé à l'interaction avec un potentiel habituelle scalaire de type step. On calculera la fonction de Green relative au problème moyennant les résultats bien

connus de Schrödinger relatifs aux potentiels step et delta.

Un dernier chapitre constituera les conclusions générales du travail.

Chapitre 2

Oscillateur de Dirac

2.1 Introduction

L'oscillateur harmonique est un outil de travail des physiciens depuis siècles. Si l'hante la physique c'est parce qu'il représente un modèle très simple et très efficace d'étude. Par ces deux qualités il a pu simulé les vibrations des phénomènes physiques partant du pendule jusqu'aux infimes particules constituant la matière telles les quarks. Sa vraie conquête commença avec l'avènement de la mécanique quantique. Il s'est révéle l'outil par excellence des développements théoriques, par exemple il a été le premier problème solutionné dont le spectre, les fonctions d'onde et ses symétries ont permis le développement d'innombrables applications non seulement dans le cadre de calculs directs mais aussi comme moyens d'approximations pour les problèmes complexes.

Dans ce chapitre, après un exposé bref de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique non relativiste, nous étendrons ce modèle à la mécanique quantique relativiste dans le cas de particule sans spin décrite par l'équation de Klein-Gordon et de la particule de spin décrite par l'équation de Dirac.

2.2 L'oscillateur en mécanique quantique non relativiste

2.2.1 Oscillateur harmonique non relativiste

L'oscillateur harmonique représente une particule de masse se déplaçant dans un potentiel de la forme [1],

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.1)$$

Le mouvement classique est régi par l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x^2 = 0, \quad (2.2)$$

dont la solution classique est

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.3)$$

La particule est alors animée d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal.

Sachant que l'énergie potentielle devient infinie pour $x \rightarrow \pm\infty$, le mouvement est accompli dans une région finie de l'espace. Pour l'énergie fixée on a $-a < x < a$, et de ce fait, le spectre quantique de la particule sera discret.

En effet, en résolvant l'équation de schroedinger correspondante

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + 2m \left(E - \frac{m\omega^2x^2}{2} \right) \Psi = 0, \quad \hbar = c = 1, \quad (2.4)$$

avec la condition Ψ finie pour $x \rightarrow \pm\infty$, on déduit facilement le spectre

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad (2.5)$$

avec les fonctions d'onde correspondantes suivantes

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} x \right), \quad (2.6)$$

$H_n(\rho)$ étant les polynômes d'Hermite. Ce même problème peut être étendu aux dimensions $d = 2$ et 3 . En effet, dans le cas de la dimension 3 , on écrit $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2$ ce qui donne pour l'équation de Schroedinger

$$\Delta\Psi + 2m \left(E - \frac{m\omega^2 r^2}{2} \right) \Psi = 0. \quad (2.7)$$

La solution est donnée sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.8)$$

avec $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sont les harmoniques sphériques

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\text{sign}(m) \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (2.9)$$

$$\text{sign}(m) = \begin{cases} -1 & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$P_l^{|m|}$ sont les fonctions de Legendre, l est le nombre quantique orbital et m est le nombre quantique magnétique. $R_{nl}(r)$ vérifie l'équation radiale suivante

$$\left[-\frac{1}{2mr} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{2mr^2} \right] R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r). \quad (2.11)$$

La solution de cette équation s'effectue au moyen des séries et est donnée comme

$$R_{nl}(r) = \left[\frac{2^{l+n_r+2} (2l+2n_r+1)}{\sqrt{\pi} n_r! [(2l+1)!!]} \beta^{2l+3} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 r^2} r^l \sum_{q=0}^{n_r} \frac{(-)^q 2^q n_r! (2l+1)!! (\beta^2 r^2)^q}{(n_r-q)! q! (2l+2q+1)!!}, \quad (2.12)$$

avec

$$\beta = \sqrt{m\omega}, \quad N = 2n_r + 1. \quad (2.13)$$

2.3 L'oscillateur en mécanique quantique relativiste

L'oscillateur relativiste est une simple extension de l'oscillateur harmonique précédent au domaine où les vitesses des particules deviennent considérables [2]. Partons de l'équation de Klein-Gordon suivante

$$[g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2] \Psi = \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2 \right] \Psi = 0, \quad (2.14)$$

avec

$$g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1). \quad (2.15)$$

La généralisation la plus naïve serait de rajouter un terme quadratique en x décrivant le potentiel oscillateur. Pour préserver la covariance de l'équation de Klein-Gordon, ce terme supplémentaire prendrait en principe la forme suivante

$$m\omega^2 g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu. \quad (2.16)$$

Ce qui donne pour l'équation (2.14)

$$\left[g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m\omega^2 g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu + m^2 \right] \Psi = 0. \quad (2.17)$$

A priori la vibration suivant le temps décrite par le terme $m\omega^2 x_0 x_0$ n'a pas de signification physique claire. Donc nous pouvons supposer que la particule vibre harmoniquement dans un référentiel particulier et écrire l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m\omega^2 r^2 + m^2 \right] \Psi = 0, \quad (2.18)$$

où (t, \mathbf{r}) représentent les coordonnées de la particule dans ce repère particulier. Le passage à un repère quelconque se fait au moyen de la transformation de Lorentz. Cette équation décrit ce qu'on appelle l'oscillateur de Klein-Gordon. Sa solution peut être donnée sous la forme stationnaire suivante

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt), \quad (2.19)$$

$\psi(\mathbf{r})$ vérifie l'équation stationnaire suivante

$$[-\Delta + m\omega^2 \mathbf{r}^2 + m^2 - E^2] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.20)$$

dont la solution est

$$\psi(\mathbf{r}) \sim R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.21)$$

avec $R_{nl}(r)$ vérifiant l'équation radiale suivante

$$[-\Delta + m\omega^2 r^2] R_{nl}(r) = [E^2 - m^2] R_{nl}(r). \quad (2.22)$$

Historiquement, l'équation de Dirac a été déduite de celle de Klein-Gordon. L'idée de Dirac était de linéariser l'opérateur énergie mais en préservant la covariance des variables. Il a été alors amené à introduire des matrices qui par la suite ont été interprétées comme décrivant le spin. Dans notre cas ici on pourrait encore déduire l'oscillateur de Dirac de celui de Klein-Gordon en linéarisant l'opérateur $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m\omega^2 r^2 + m^2\right)$. En effet, il n'est difficile de vérifier qu'à la manière de Dirac, l'équation

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta)\Psi, \quad (2.23)$$

déduite après linéarisation de $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)$, où t est le temps et

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}, \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

avec les σ_i sont les matrices de Pauli pour le spin, vérifiant la propriété suivante

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.26)$$

L'oscillateur de Klein-Gordon se linéarise et donne l'équation

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} - im\omega\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}) + m\beta]\Psi. \quad (2.27)$$

C'est l'équation de l'oscillateur de Dirac, où ω dénote toujours la fréquence. Il est remarquable que cette équation s'obtient de celle de Dirac suivant le remplacement, couplage minimum, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}$. Ce remplacement permet d'établir l'équivalence avec l'équation de Dirac-Pauli pour les particules neutre de Dirac, dotées d'un moment magnétique anomal.

En effet, l'équation de Dirac qui décrit l'interaction électromagnétique d'un neutron [3] est

$$\left(i\partial_\mu + \frac{ke}{4m_n} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m_n \right) \Psi = 0, \quad (2.28)$$

où $F^{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique, k est le moment magnétique anormal et m_n est la masse de neutron. Pour retrouver l'opérateur de l'OD, on écrit le potentiel sous la forme

$$A^\mu = \frac{\lambda}{4} [2(\mathcal{U} \cdot x) x^\mu - x^2 \mathcal{U}^\mu], \quad (2.29)$$

avec \mathcal{U} est un quadri-vecteur

$$\mathcal{U} = (1, 0, 0, 0), \quad (2.30)$$

qui donne le tenseur de champ électromagnétique suivant

$$F^{\mu\nu} = \lambda (U^\mu x^\nu - U^\nu x^\mu). \quad (2.31)$$

Si on compare l'équation (2.28) par l'équation(2.27), nous obtenons

$$\frac{ke}{4m_n} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{ke}{2m_n} \lambda (i\alpha \cdot x), \quad (2.32)$$

cela conduit à poser

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{i}{2m} ke \lambda \mathbf{x} \beta. \quad (2.33)$$

Pour obtenir exactement l'équation (2.27), on choisit

$$\lambda = \frac{2m^2 \omega}{ke}. \quad (2.34)$$

En résumé, le terme de couplage utilisé pour l'oscillateur du Dirac peut être interprété comme une interaction magnétique anormal. par conséquent, l'hamiltonien de l'oscillateur du Dirac peut décrire une particule neutre avec un moment magnétique anormal.

2.3.1 Les propriétés de l'oscillateur de Dirac

Clairement, la partie droite de (2.27) qui représente l'hamiltonien du système [4]

$$\begin{aligned} [\alpha \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta \mathbf{x}) + m\beta]^+ &= (\mathbf{p} - im\omega\beta \mathbf{x})^+ \cdot \alpha^+ + m\beta^+ \\ &= [\alpha \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta \mathbf{x}) + m\beta], \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec les matrices (α, β) satisfaisant aux propriétés suivantes

$$[\alpha_i, \beta]_+ = 0, \quad [\alpha_i, \alpha_j]_+ = 2\delta_{ij}I, \quad \beta^2 = 1 = \alpha_i^2, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.36)$$

La dépendance de la solution Ψ en t peut être exprimé sous forme de $\exp(-iEt/\hbar)$, et alors le spineur de Dirac se réécrit

$$\Psi = \exp(-iEt) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont des composantes spinoriles, vérifiant les équations couplées suivantes

$$(E - m) \Psi_1 = \sigma(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{x}) \Psi_2 \quad (2.38)$$

$$(E + m) \Psi_2 = \sigma(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{x}) \Psi_1. \quad (2.39)$$

Multiplions (2.38) par $(E + m)$ et utilisons (2.26), il vient

$$(E^2 - m^2) \Psi_1 = [(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{x}^2) - 3m\omega - 4m(\omega)\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}] \Psi_1. \quad (2.40)$$

Le terme à droite de (2.40) est un hamiltonien quadratique de type Klein-Gordon plus un terme de couplage spin-orbite, avec

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}. \quad (2.41)$$

$$\mathbf{S} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.42)$$

\vec{L} est le moment quadratique orbital et S est la matrice de spin. Pour déduire le cas non relativiste, on écrit

$$E = m + \varepsilon, \quad (2.43)$$

donc le terme $E^2 - m^2$ devient

$$\begin{aligned} E^2 - m^2 &= (m + \varepsilon)^2 - m^2 \\ &\simeq m^2 + 2m\varepsilon - m^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$= 2m\varepsilon \quad (\varepsilon \ll m). \quad (2.45)$$

On remarque qu'à la limite non relativiste, l'énergie ϵ est une valeur propre de l'opérateur $\hat{H}_{DO} = [(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{x}^2) - 3m\omega - 4m(\omega)\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}]$.

Divisons (2.40) par $2m$, on a exactement un hamiltonien correspond à l'oscillateur harmonique de fréquence ω et un terme de couplage spin-orbite de coefficient (-2ω) . Donc l'oscillateur de Dirac est une généralisation relativiste de l'oscillateur harmonique, dont l'énergie est chiftée de $\frac{3}{2}\omega$.

De plus, il est remarquable que le carré de l'opérateur hamiltonien \hat{H}_{DO} soit composé seulement par des opérateurs qui commutent avec la matrice β . Cette propriété a permis de trouver la transformation de Foldy-Wouthysen pour l'oscillateur de Dirac. Ce problème a été bien étudié par Martinez-y-Romero et al.

D'autre part, l'hamiltonien \hat{H}_{DO} vérifie

$$[\mathbf{L}, \hat{H}_{DO}] = i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}) - m\omega(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\alpha})\beta, \quad (2.46)$$

et

$$\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \hat{H}_{DO}\right] = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}) + m\omega(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\alpha})\beta, \quad (2.47)$$

il vient

$$[\mathbf{J}, \hat{H}_{DO}] = 0.$$

\hat{H}_{DO} commute avec le moment angulaire total \mathbf{J} ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$), C'est-à-dire, la solution de l'équation (2.40) peut être composée de deux parties : Une partie radiale dépend seulement de position x et une partie angulaire dépend des angles (θ, φ) .

2.3.2 Oscillateur de Dirac a une dimension

Dans le cas de la dimension un [5], on a

$$-\alpha \left(i \frac{d}{dx} + i\beta m\omega x \right) \Psi(x) + \beta m \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (2.48)$$

Les matrices de Dirac sont représentées par

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

On propose alors la solution sous la forme

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

L'écriture en composantes donne

$$\frac{df(x)}{dx} + m\omega x f(x) = (m + E) g(x), \quad (2.51)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} + m\omega x g(x) = (m - E) f(x). \quad (2.52)$$

Solutionnons ce système, on obtient le spectre suivant

$$E_n = \pm m \sqrt{1 + 2|n|} \frac{\omega}{m} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.53)$$

et les fonctions d'onde correspondantes

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda(E_n + mc^2)}{2^{n+1}|n|!\sqrt{\pi}E_n}} H_{|n|}(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}} \quad (2.54)$$

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda(E_n - mc^2)}{2^n |n-1|!\sqrt{\pi}E_n}} H_{|n|-1}(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}}, \quad (2.55)$$

où

$$\lambda = \sqrt{m\omega}. \quad (2.56)$$

Remarquons qu'on a les propriétés de symétrie suivantes

$$E_{-n} = -E_n \quad (n \neq 0),$$

$$f_{-n}(x) = \sqrt{\frac{E_n - mc^2}{E_n + mc^2}} f_n(x), \quad (2.57)$$

$$g_{-n}(x) = \pm \sqrt{\frac{E_n + mc^2}{E_n - mc^2}} g_n(x), \quad (2.58)$$

et la relation de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx [f_n(x)f_m(x) + g_n(x)g_m(x)] = \delta_{nm}. \quad (2.59)$$

2.3.3 Oscillateur de Dirac a deux dimensions

Dans le cas de la dimension deux [6], on a l'équation suivante

$$i \frac{\partial \Psi_c}{\partial t} = [\beta \gamma (\mathbf{p} - im\omega \mathbf{r}) + \beta m] \Psi_c. \quad (2.60)$$

En utilisant les coordonnées polaires, il vient

-Pour la métrique on a

$$g_{ab} = \text{diag}(-1, 1, r^2), \quad (2.61)$$

- Les vecteurs unitaires correspondants sont

$$\hat{e}_\rho = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (2.62)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (2.63)$$

et sachant qu'à deux dimensions une des représentations des matrices de Dirac est

$$\beta \gamma_1 = \sigma_1, \beta \gamma_2 = \sigma_2, \beta = \sigma_3, \quad (2.64)$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, sont les matrices de Pauli, on peut alors écrire

$$\tilde{\gamma}^\rho = \tilde{\gamma} \cdot \hat{e}_\rho = \gamma^1 \cos \theta + \gamma^2 \sin \theta \quad (2.65)$$

$$\tilde{\gamma}^\theta = \tilde{\gamma} \cdot \hat{e}_\theta = -\gamma^1 \sin \theta + \gamma^2 \cos \theta.$$

Les matrices $\tilde{\gamma}^\rho$ et $\tilde{\gamma}^\theta$ sont reliées aux matrices γ^1 et γ^2 par la transformation

$$S(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - \gamma^1 \gamma^2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.66)$$

c'est-à-dire

$$S^{-1}(\theta) \tilde{\gamma}^\rho S(\theta) = \gamma^1. \quad (2.67)$$

$$S^{-1}(\theta) \tilde{\gamma}^\theta S(\theta) = \gamma^2, \quad (2.68)$$

l'équation (2.60) devient alors

$$iE\Psi = H\Psi = \left[\sigma^1 \partial_\rho + \sigma^2 \left(\frac{ik_\theta}{\rho} - m\omega\rho \right) + i\sigma_3 m \right] \Psi, \quad (2.69)$$

Introduisons ensuite la séparation des variables suivante

$$\Psi(\rho, \theta) = \Psi_0(\rho) e^{i(k_\theta\theta - Et)}. \quad (2.70)$$

avec

$$\Psi_0(\rho) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\rho) \\ \Psi_2(\rho) \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

La relation entre cet état écrit en coordonnées polaires et celui des coordonnées cartésiennes est

$$\Psi = \sqrt{\rho} S^{-1}(\theta) \Psi_c, \quad (2.72)$$

avec

$$S(\theta) = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\gamma^1\gamma^2\right) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_3\right), \quad (2.73)$$

qui vérifie

$$S(\theta + 2\pi) = -S(\theta), \quad (2.74)$$

et

$$\Psi(\theta + 2\pi) = -\Psi(\theta), \quad (2.75)$$

avec ses conditions aux limites on déduit les valeurs possibles de k_θ

$$k_\theta = N + \frac{1}{2}, \quad N \text{ entier}. \quad (2.76)$$

L'opérateur de parité vérifie les propriétés suivantes

-Invariance

$$[P, H]_- = 0 \quad (2.77)$$

-Action sur Ψ_c

$$P\Psi_c(\mathbf{r}) = \beta\Psi_c(-\mathbf{r}) = \sigma_3\Psi_c(-\mathbf{r}). \quad (2.78)$$

-Valeurs propres

$$P\Psi_c(\mathbf{r}) = (-1)^{k_\theta - 1/2} \Psi_c(\mathbf{r}). \quad (2.79)$$

L'opérateur moment angulaire totale défini par

$$J = -i \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma^1 \gamma^2}{2} \right), \quad (2.80)$$

vérifie

-Invariance

$$[J, H]_- = 0. \quad (2.81)$$

-Action sur Ψ_c

$$J\Psi_c(\mathbf{r}) = \left(k_\theta - \frac{1}{2} \sigma^3 \right) \Psi_c(\mathbf{r}). \quad (2.82)$$

-Valeurs propres

$$j = k_\theta \pm \frac{1}{2}. \quad (2.83)$$

où

$$\Psi_c(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} e^{i(k_\theta - \frac{1}{2})} \Psi_1(\rho) \\ e^{i(k_\theta + \frac{1}{2})} \Psi_2(\rho) \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que les composantes du spineur vérifie le système

$$i(E - m) \Psi_1(\rho) = \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k_\theta}{\rho} - \rho m \omega \right) \Psi_2(\rho), \quad (2.85)$$

$$i(E + m) \Psi_2(\rho) = \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k_\theta}{\rho} + \rho m \omega \right) \Psi_1(\rho), \quad (2.86)$$

et qui se sépare comme

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(k_\theta)(k_\theta \pm 1)}{\rho^2} + m\omega(2k_\theta \pm 1) - m^2\omega^2\rho^2 + (E^2 - m^2) \right] \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.87)$$

dont la solution est donnée en fonction des polynômes de Laguerre. Par exemple, on a

$$\Psi_1 = c_1 \exp(-x/2) x^{\frac{1}{2}(1/2+\mu)} L_n^\mu(x), \quad (2.88)$$

avec

$$x = m\omega\rho^2, \quad (2.89)$$

et

$$\mu = \pm(k_\theta - 1/2), \quad (2.90)$$

La condition donnant le spectre est

$$\frac{E^2 - m^2}{m\omega} + (1 \pm 1)(2k_\theta - 1) = 4n, \quad (2.91)$$

ou bien

$$E^2 - m^2 = 4[n - \theta(-k_\theta)(k_\theta - 1/2)](m\omega).$$

Enfin la solution pour $k_\theta > 0$

$$E = \pm\sqrt{4nm\omega + m^2} \quad (2.92)$$

$$\Psi_1 = c_1 \exp(-x/2) x^{k_\theta/2} L_n^{k_\theta-1/2}(x) \quad (2.93)$$

$$\Psi_2 = 2ic_1 \frac{(m\omega)^{1/2}}{E + m} \exp(-x/2) x^{(k_\theta+1)/2} L_{n-1}^{k_\theta+1/2}(x), \quad (2.94)$$

et pour $k_\theta < 0$

$$E = \pm\sqrt{4[n - (k_\theta - 1/2)](m\omega) + m^2} \quad (2.95)$$

$$\Psi_2 = c_2 \exp(-x/2) x^{-k_\theta/2} L_n^{-k_\theta-1/2}(x) \quad (2.96)$$

$$\Psi_1 = 2ic_2 \frac{(m\omega)^{1/2}}{E + m} \exp(-x/2) x^{(1-k_\theta)/2} L_n^{1/2-k_\theta}(x), \quad (2.97)$$

2.3.4 Oscillateur de Dirac a trois dimensions

Dans le cas de la dimension trois, on a l'équation suivante

$$\alpha(-i\nabla - i\beta m\omega\mathbf{r})\Psi(r) + \beta m\Psi(r) = E\Psi(r). \quad (2.98)$$

A cause du couplage spin-orbite, on propose la solution sous la forme

$$\Psi_{kmj}(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_k(r)\Omega_{kmj}(n_r) \\ iQ_k(r)\Omega_{-kmj}(n_r) \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

où $\Omega_{kmj}(n_r)$ sont les spineurs sphériques avec

$$n_r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ et } m_j = -|k| + \frac{1}{2}, -|k| + \frac{3}{2}, \dots, |k| - \frac{1}{2}. \quad (2.100)$$

Ce qui permet la séparation radiale suivante

$$\frac{dP_k(r)}{dr} + \frac{k}{r}P_k(r) + m\omega r P_k(r) = (m + E_k)Q_k(r) \quad 0 < r < \infty \quad (2.101)$$

$$\frac{dQ_k(r)}{dr} - \frac{k}{r}Q_k(r) - m\omega r Q_k(r) = (m - E_k)P_k(r) \quad 0 < r < \infty. \quad (2.102)$$

Ce système admet le spectre suivant

$$E_{nk} = \pm m \sqrt{1 + 4|n| \frac{\omega}{m}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ pour } k < 0 \quad (2.103)$$

$$E_{nk} = \pm m \sqrt{1 + 4 \left(|n| + l + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega}{m}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ pour } k > 0, \quad (2.104)$$

et fonctions d'onde correspondantes suivantes

$$P_{nk}(r) = \sqrt{\frac{\lambda |n|! (E_{nk} + m)}{\Gamma(|n| + l + \frac{3}{2}) E_{nk}}} (\lambda r)^{|n|+1} e^{-\frac{\lambda^2 r^2}{2}} L_{|n|}^{(l+\frac{1}{2})}(\lambda^2 r^2) \quad (2.105)$$

$$Q_{nk}(r) = \pm \text{sgn}(k) \sqrt{\frac{\lambda |\hat{n}|! (E_{nk} + m)}{\Gamma(|\hat{n}| + l + \frac{3}{2}) E_{nk}}} (\lambda r)^{|\hat{n}|+1} e^{-\frac{\lambda^2 r^2}{2}} L_{|\hat{n}|}^{(l+\frac{1}{2})}(\lambda^2 r^2), \quad (2.106)$$

avec

$$|\hat{n}| = \begin{cases} |n| - 1 & \text{pour } k < 0 \\ |n| & \text{pour } k > 0 \end{cases}, \quad (2.107)$$

et

$$l = \left| k + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} = \begin{cases} -k - 1 & \text{pour } k < 0 \\ k & \text{pour } k > 0 \end{cases}, \quad (2.108)$$

$$l = \left| k - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} = \begin{cases} -k = l + 1 & \text{pour } k < 0 \\ k - 1 = l - 1 & \text{pour } k > 0 \end{cases} \quad (2.109)$$

En plus on a les propriétés de symétrie suivantes

$$E_{-nk} = -E_{nk}, \quad (2.110)$$

$$P_{-nk}(r) = \sqrt{\frac{E_{nk} - m}{E_{nk} + m}} P_{-nk}(r) \quad (2.111)$$

$$Q_{-nk}(r) = -\sqrt{\frac{E_{nk} + m}{E_{nk} - m}} Q_{nk}(r), \quad (2.112)$$

et la relation de fermeture

$$\int_0^{+\infty} dx [P_{nk}(r)P_{mk}(r) + Q_{nk}(r)Q_{mk}(x)] = \delta_{nm}. \quad (2.113)$$

Chapitre 3

Etude de l'oscillateur de Dirac par le formalisme de Fradkin-Gitman

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on construit une représentation intégrale de chemin pour le propagateur de l'oscillateur de Dirac suivant le formalisme de Fradkin-Gitman [7] déjà établi pour l'équation de Dirac sans et avec anomalie. La méthode de calcul utilise la technique du temps propre de Schwinger. Elle se résume aux étapes suivantes. Partant de l'équation de l'oscillateur du Dirac, nous écrivons symboliquement la fonction de Green en tant qu'inverse de l'opérateur correspondant à l'oscillateur de Dirac. Ensuite, nous multiplions cet inverse par un opérateur conjugué adéquat dans le but de ramener le problème à un opérateur quadratique de type Klein-Gordon plus un terme de couplage type spin-orbite. A ce niveau, le résultat s'écrit comme une fraction d'un opérateur fermionique par un opérateur bosonique. L'opérateur bosonique est reparamétrisée au moyen du temps propre de Schwinger où les matrices de Dirac sont remplacées par des variables de Grassmann. L'opérateur fermionique opère en dernier lieu : C'est la projection globale. Après avoir effectué toutes les intégrales fonctionnelles suivant une méthode matricielle appropriée, on applique alors cet opérateur fermionique. Finalement, le résultat de la fonction de Green est donné explicitement et les fonctions d'onde sont exactement déterminées suivant la décomposition spectrale.

3.2 Propagateur relatif à l'oscillateur

Le propagateur de l'oscillateur de Dirac est la fonction de Green causale qui satisfait à l'équation du Dirac modifiée suivante

$$(\hat{\eta} - m)S^c(x, y) = -\delta^4(x - y), \quad m \rightarrow m - i\varepsilon. \quad (3.1)$$

Suivons la méthode du Fradkin-Gitman, il est commode de multiplier cette équation par $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ afin d'homogénéiser l'équation (3.1). La fonction transformée $\tilde{S}^c(x, y) = S^c(x, y)\gamma^5$ obéit à l'équation suivante

$$(\hat{\eta} - m\gamma^5)\tilde{S}^c(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (3.2)$$

où

$$\hat{\eta} = \tilde{\gamma}^\mu \hat{\pi}_\mu, \quad \tilde{\gamma}^5 = \gamma^5, \quad \tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu, \quad \hat{\pi}_\mu \quad (\hat{\pi}_0 = i\partial_0, \pi_i = i\partial_i + im\omega\gamma^5\tilde{\gamma}^0 x_i). \quad (3.3)$$

Les matrices $\tilde{\gamma}^\mu$ ont les mêmes relations de commutation que les matrices initiales γ^μ ,

$$[\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Pour toutes les matrices $\tilde{\gamma}$ nous avons

$$[\tilde{\gamma}^m, \tilde{\gamma}^n]_+ = 2\eta^{mn} \quad m, n = \overline{0, 3, 5} \quad \eta^{mn} = \text{dig}(1, -1, -1, -1, -1). \quad (3.5)$$

La fonction de Green $\tilde{S}^c(x, y)$ est représentée comme,

Alors, on obtient

$$\tilde{S}^c(x, y) = \left(\hat{\eta} - m\gamma^5 \right)_{out} \tilde{G}^c(x, y), \quad (3.6)$$

avec $\tilde{G}^c(x, y)$ élément de matrice .

$$\tilde{G}^c(x, y) = \langle x | \frac{1}{\left(\hat{\eta} - m\gamma^5 \right) \left(\hat{\eta} - m\gamma^5 \right)} | y \rangle \quad (3.7)$$

et

$$\left(\hat{\pi} - m\gamma^5\right) = \hat{p} - im\omega\gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}\cdot\vec{x} - m\gamma^5 \quad (3.8)$$

$$\left(\hat{\pi} - m\gamma^5\right) = \hat{p} + im\omega\gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}\cdot\vec{x} - m\gamma^5, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{\pi} - m\gamma^5\right) \left(\hat{\pi} - m\gamma^5\right) &= \left(\hat{p} - im\omega\gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}\cdot\vec{x} - m\gamma^5\right) \times \\ &\quad \left(\hat{p} + im\omega\gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}\cdot\vec{x} - m\gamma^5\right) \\ &= \hat{p}^2 - m^2\omega^2\hat{x}^2 - m^2 + im\omega \left[\hat{p}, \gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}\cdot\vec{x} \right]_- \\ &\quad - m \left[\vec{\gamma}^\mu, \gamma^5 \right]_+ \hat{p}_\mu + im^2\omega \left[\gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}\cdot\vec{x}, \gamma^5 \right]_- \\ &= \hat{P}^2 - m^2 - m^2\omega^2\hat{x}^2 + \sum_{i=1}^3 m\omega\delta_{ii}\vec{\gamma}^5\vec{\gamma}^0 \\ &\quad + im\omega \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}^i\vec{\gamma}^j (\hat{x}^i\hat{p}^j - \hat{p}^i\hat{x}^j). \end{aligned} \quad (3.10)$$



On peut présenter $\tilde{G}^c(x, y)$ au moyen d'un temps adéquat λ , dit temps propre de Schwinger

$$\tilde{G}^c(x, y) = -i \int d\lambda \langle x | e^{-i\hat{H}(\lambda)} | y \rangle, \quad (3.11)$$

où

$$\hat{H}(\lambda) = \lambda \left[-\hat{p}^2 + m^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 - \sum_{i=1}^3 m\omega\delta_{ii}\vec{\gamma}^5\vec{\gamma}^0 - im\omega \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \gamma^5\vec{\gamma}^0\vec{\gamma}^i\vec{\gamma}^j (\hat{x}^i\hat{p}^j - \hat{p}^i\hat{x}^j) \right] \quad (3.12)$$

L'élément de la matrice dans l'expression (3.11) a la forme d'un opérateur d'évolution et se représente au moyen d'une intégral de chemin. Pour ce faire, premièrement, on écrit $\exp(-i\hat{H})$ sous forme $\left[\exp\left(\frac{-i\hat{H}}{N+1}\right) \right]^{N+1}$ et on insère N fois l'identité

$$\int |x\rangle\langle x| dx = I$$

entre chacun des opérateurs $\exp\left(\frac{-i\hat{H}}{N+1}\right)$.

Puis, introduisons N intégrations supplémentaires sur λ pour avoir une évolution indépendante de λ ,

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} (-i) \int d\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} d\lambda_k \int \prod_{k=1}^{N+1} dx_k \\ &\times \prod_{k=1}^{N+1} \left[\langle x_k | e^{-i\hat{H}(\lambda_k)\Delta\tau} | x_{k-1} \rangle \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

où

$$\Delta\tau = \frac{1}{N+1}, \quad x_0 = x_a, x_{N+1} = x_b. \quad (3.14)$$

Développons l'exponentielle jusqu'au premier ordre en $\Delta\tau$. L'élément de matrice se réduit à

$$\langle x_k | e^{-i\hat{H}(\lambda_k)\Delta\tau} | x_{k-1} \rangle \simeq \langle x_k | 1 - i\hat{H}(\lambda_k)\Delta\tau | x_{k-1} \rangle. \quad (3.15)$$

Insérons maintenant la relation de fermeture

$$\int |p\rangle\langle p| dp = I, \quad (3.16)$$

avec

$$\hat{P}_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle, \quad \langle p|\hat{p}\rangle = \delta^4(p-\hat{p}), \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ipx}. \quad (3.17)$$

Les éléments de la matrice (3.15) sont calculés suivant l'ordre symétrique de Weyl avec $\bar{x}_k = \frac{x_k+x_{k-1}}{2}$ est le mid-point. Prenant tout en compte les modifications, on peut voir que l'expression (3.15) peut être remplacé par

$$\int \frac{dp_k}{(2\pi)^4} \exp \left[i \left(p_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta\tau} - \hat{H}(\lambda_k, \bar{x}_k, p_k) \right) \Delta\tau \right]. \quad (3.18)$$

Exprimons la fonction $\delta(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ par sa représentation intégrale

$$\delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\pi_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})} d\pi_k, \quad (3.19)$$

et attribuons formellement l'indice k à toutes les quantités dynamiques, les matrices γ incluses correspondant au temps τ_k défini par

$$\tau_k = k \Delta \tau \text{ avec } \tau \in [0, 1]. \quad (3.20)$$

Introduisons le produit \mathcal{T} qui ordonne sur les matrices, il est possible d'assembler toutes les expressions à une seule exponentielle

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & (-i) \mathcal{T} \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi_\lambda \times \\ & \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left(p^2 - m^2 - m^2 \omega^2 x^2 + \sum_{i=1}^3 m \omega \delta_{ii} \tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^0 + i m \omega \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \gamma^5 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j (x^i p^j - p^i x^j) \right) \right] \right. \\ & \left. + p\dot{x} + \pi \dot{\lambda} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

où x, λ obéissent aux conditions aux limites suivantes

$$x(0) = x_a \quad x(T) = x_b \quad \lambda(0) = \lambda_0. \quad (3.22)$$

L'opérateur chronologique \mathcal{T} est nécessaire à cause de l'ordre dû aux matrices de Dirac qui sont supposées dépendre du temps formellement.

L'astuce maintenant consiste à introduire des courants $\rho_n(\tau)$ qui anticommulent avec les matrices $\tilde{\gamma}^n(\tau)$ par définition. En effet, nous pouvons écrire la quantité $\mathcal{T} \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \tilde{\gamma}^n d\tau \right\}$ via un intégral de chemin comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \tilde{\gamma}^n d\tau \right\} \Big|_{\rho=0} &= \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \times \\ & \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \exp \left[\int_0^1 \left(\Psi_n \dot{\Psi}^n - 2i \rho_n \Psi^n \right) d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right] \mathfrak{D}\Psi \Big|_{\theta=0}^{\rho=0}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

la mesure $\mathfrak{D}\Psi$ est définie par

$$\mathfrak{D}\Psi = D\Psi \left[\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} D\Psi \exp \left(\int_0^1 \Psi_n \dot{\Psi}^n d\tau \right) \right]^{-1}, \quad (3.24)$$

les variables Ψ et θ sont des variables de Grassmann impaires qui anticommulent avec les matrices $\tilde{\gamma}$, $\frac{\delta}{\delta\theta^n}$ est une dérivée gauche.

Remplaçons (3.23) dans (3.21), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & (-i) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_\lambda \int D\lambda \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \times \\ & \exp\left\{i \int_0^1 \left[\lambda \left(p^2 - m^2 - m^2\omega^2 x^2 - \sum_{i=1}^3 4m\omega\delta_{ii}\Psi^i\Psi^0 + 16im\omega\Psi^5\Psi^0 \sum_{i,j=1}^3 \Psi^i\Psi^j (x^i p^j - p^i x^j) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} |_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Changeons λ par $\frac{e}{2}$, la fonction $\tilde{G}^c(x, y)$ prend la forme

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & \left(\frac{-i}{2}\right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_e \int De \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \times \\ & \exp\left\{i \int_0^1 \left[\frac{e}{2} \left(p^2 - m^2 - m^2\omega^2 x^2 - 4m\omega \sum_{i=1}^3 \delta_{ii}\Psi^i\Psi^0 + 16im\omega\Psi^5\Psi^0 \sum_{i,j=1}^3 \Psi^i\Psi^j (x^i p^j - p^i x^j) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + p\dot{x} + \pi_e \dot{e} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} |_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x, y) = & \left(\frac{-i}{2}\right) \left(\widehat{\pi}_\mu - m\gamma^5\right)_{out} \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_e \int De \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \times \\ & \exp\left\{i \int_0^1 \left[\frac{e}{2} \left(p^2 - m^2 - m^2\omega^2 x^2 - 4m\omega \sum_{i=1}^3 \delta_{ii}\Psi^i\Psi^0 + 16im\omega\Psi^5\Psi^0 \sum_{i,j=1}^3 \Psi^i\Psi^j (x^i p^j - p^i x^j) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + p\dot{x} + \pi_e \dot{e} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} |_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cette dernière relation exprime la forme hamiltonienne correspondantes à la projection globale.

3.3 Calcul de la fonction de Green à une dimension

Il est important de noter que pour avoir une forme intégrale de chemin de type Feynman toutes les quantités qui figurent dans l'action correspondante doivent être de nature bosonique, c'est-à-dire des nombres de Grassmann paires. C'est pour cette raison, on réécrit $S^c(x, y)$ par $\tilde{S}^c(x, y)$. Dans le cas de l'oscillateur à une dimension, le terme de couplage spin-orbite est absent, d'où on obtient

$$\tilde{G}^c(x, y) = \left(\frac{-i}{2}\right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_e \int De \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \times$$

$$\exp\left\{i \int_0^1 \frac{e}{2} \left[(p^2 - m^2 - m^2\omega^2 x^2 - 4m\omega\Psi^5\Psi^0) + p\dot{x} + \pi_e \dot{e} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0)\right\} \Big|_{\theta=0}.$$
(3.28)

Effectuons l'intégration sur π_e et x_0 , il vient

$$\int D\pi_e \exp\left(i \int_0^1 \pi_e \dot{e} d\tau\right) = \delta(\dot{e}).$$
(3.29)

et

$$\int Dx^0 \exp\left(i \int_0^1 p^0 \dot{x}^0\right) = \int Dx^0 \exp\left\{i(p_b^0 x_b^0 - p_a^0 x_a^0) - i \int_0^1 \dot{p}^0 x^0 d\tau\right\}$$

$$= \exp\{i(p_b^0 x_b^0 - p_a^0 x_a^0)\} \times \delta(\dot{p}^0).$$
(3.30)

où

$$\delta(\dot{p}^0) = \prod_{k=1}^N \delta(p_{(k+1)}^0 - p_{(k)}^0).$$
(3.31)

$$Dp^0 = \prod_{k=1}^{N+1} \frac{dp_k^0}{2\pi}.$$
(3.32)

La présence de δ facilite l'intégration sur e et p^0 et donne

$$\int De \delta(\dot{e}) f(e) = f(e_0).$$
(3.33)

et

$$\int Dp^0 \exp \left\{ i (p_b^0 x_b^0 - p_a^0 x_a^0) + i \frac{e_0}{2} \int_0^1 (p^0)^2 d\tau \right\} \times \delta(p^0) \quad (3.34)$$

$$= \int \frac{dp^0}{2\pi} \exp \left(ip^0 T + i \frac{e_0}{2} (p^0)^2 \right). \quad (3.35)$$

La fonction de propagation se simplifie à

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= \left(\frac{-i}{2} \right) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int de_0 \int Dx^1 \int Dp^1 \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi M(e_0) \times \\ &\exp \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(\dot{x}^1)^2}{2e_0} + i \frac{e_0}{2} \left((p^0)^2 - m^2 - m^2 \omega^2 (x^1)^2 - 4m\omega \Psi^5 \Psi^0 \right) + \Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau \right. \\ &\left. + ip^0 T + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} |_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Intégrons sur l'impulsion p^1 , on obtient alors

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= \left(\frac{-i}{2} \right) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \int Dx^1 \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \times M(e_0) \\ &\exp \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(\dot{x}^1)^2}{2e_0} + i \frac{e_0}{2} \left((p^0)^2 - m^2 - m^2 \omega^2 (x^1)^2 - 4m\omega \Psi^5 \Psi^0 \right) + \Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau \right. \\ &\left. + ip^0 T + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} |_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

où $M(e_0)$ étant la mesure donnée par

$$\begin{aligned} M(e_0) &= \int Dp^1 \exp \left(-i \frac{e_0}{2} \int_0^1 (p^1)^2 d\tau \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i e_0 \Delta \tau} \right)^{\frac{N+1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Laissons-nous démontrer que $\tilde{G}^c(x, y)$ peut être exprimée seulement à travers deux intégrales bosonique sur le temps propre e_0 et impulsion p_0 relation avec les constantes de mouvement.

Dans ce but, nous avons besoin d'exécuter les intégrations sur les coordonnées et sur les variables de Grassmann.

3.3.1 L'intégration sur les coordonnés

On a

$$\begin{aligned}
 K(x_a, x_b, e_0) &= \int Dx^1 M(e_0) \exp \left\{ \int_0^1 \left(i \frac{(\dot{x}^1)^2}{2e_0} - i \frac{e_0}{2} m^2 \omega^2 (x^1)^2 \right) d\tau \right\} \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi i e_0 \Delta \tau} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int \prod_{k=1}^N dx_k^1 \exp \left\{ -\frac{1}{2i e_0 \Delta \tau} \sum_{k=1}^{N+1} \left[(x_k^1 - x_{k+1}^1)^2 - (\Delta \tau)^2 e_0^2 m^2 \omega^2 (x_k^1)^2 \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ce dernier a la même forme que le propagateur de l'oscillateur harmonique suivant [8]

$$\begin{aligned}
 K_{OH}(x_a, x_b, T) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int dx_1 \int \cdots \int dx_N \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{m}{2i \varepsilon \hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 - \varepsilon^2 \omega^2 x_k^2 \right] \right\},
 \end{aligned} \quad (3.40)$$

dont le résultat est

$$\left(\frac{m\omega}{2\pi i \varepsilon \hbar \sin(\omega T)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{-m\omega}{2i \hbar} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cot(\omega T) - \frac{2 x_a x_b}{\sin(\omega T)} \right] \right\}, \quad (3.41)$$

et se décompose comme

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n \in N_0} \left(\frac{m\omega}{\pi (2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{-m\omega}{2\hbar} (x_a^2 + x_b^2) \right\} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_a \right) \\
 &\quad \cdot H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_b \right) e^{-iTm\omega(n+\frac{1}{2})}.
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Par une simple comparaison entre (3.39) et (3.40), il est aisé de remarquer

$$\Delta \tau = \varepsilon, \quad m = \frac{1}{e_0}, \quad \omega^2 = e_0^2 m^2 \omega^2, \quad \hbar = 1. \quad (3.43)$$

Prenons en considération ces changements, nous pouvons déduire pour notre propagateur (3.39)

$$K(x_a, x_b, e_0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin(e_0 m \omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{-m\omega}{2i} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cot(e_0 m \omega) - \frac{2 x_a x_b}{\sin(e_0 m \omega)} \right] \right\}$$

$$= \sum_{n \in N_0} \left(\frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_a) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2} (x_a^2 + x_b^2) \right\} e^{-ie_0 m\omega(n+\frac{1}{2})}. \quad (3.44)$$

3.3.2 Intégration sur les variables de spin

L'intégration sur les variables de Grassmann [9] est donnée par

$$(I) = \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ -\int_0^1 2im\omega e_0 \Psi^5 \Psi^0 d\tau + \int_0^1 \Psi_n \dot{\Psi}^n d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\}. \quad (3.45)$$

Pour faciliter le calcul, on réécrit le terme $\Psi^5 \Psi^0$ sous la forme compacte suivante

$$\Psi^5 \Psi^0 = \frac{1}{2} \Psi^\mu \Psi^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, 5 \quad (3.46)$$

où $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est une matrice antisymétrique, définie par

$$\mathcal{F}_{50} = I. \quad (3.47)$$

L'expression (3.45) devient alors

$$(I) = \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ -\int_0^1 im\omega e_0 \Psi^\mu \Psi^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} d\tau + \int_0^1 \Psi_n \dot{\Psi}^n d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\}, \quad (3.48)$$

avec

$$n = 0, 1, 5 \quad \mu, \nu = 0, 5. \quad (3.49)$$

Notons que l'intégration des variables de Grassmann Ψ de (I) est soumise à la condition aux bords $\Psi(0) + \Psi(1) = \theta$. Pour se libérer de cette contrainte passons aux vitesses ω définies par

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \omega(\hat{\tau}) d\hat{\tau} + \frac{\theta}{2}, \quad (3.50)$$

$\varepsilon(\tau)$ étant le signe de τ

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > 0 \\ -1 & \text{si } \tau < 0 \\ 0 & \text{si } \tau = 0 \end{cases} . \quad (3.51)$$

et $\omega^n(\tau)$ est une variable de Grassmann impaire. Il est clair qu'on a

$$\dot{\Psi}^n(\tau) = \omega(\tau) \quad , \quad \Psi_n(1)\Psi^n(0) = -\frac{\theta^n}{2} \int_0^1 \omega^n(\tau) d\tau. \quad (3.52)$$

La relation (I) devient alors

$$(I) = \int \mathcal{D}\omega \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \frac{\alpha}{2} \omega^\mu \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \alpha \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\alpha}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}. \quad (3.53)$$

Ici les notations sont condensées de la manière suivante

$$\begin{cases} \omega^n \varepsilon \omega_n = \int_0^1 \int_0^1 \omega^n(\tau) \varepsilon(\tau - \tau') \omega_n(\tau') d\tau d\tau' \\ \alpha = \frac{i m \omega \varepsilon_0}{2} \quad n = 0, 1, 5 \quad \mu, \nu = 0, 5 \end{cases} \quad (3.54)$$

avec ces notations (I) s'écrit

$$(I) = \int \mathcal{D}\omega^1 \int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^1 \varepsilon \omega_1 - \frac{1}{2} \omega^\mu \varepsilon \omega_\mu + \frac{\alpha}{2} \omega^\mu \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \alpha \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - \frac{\alpha}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}. \quad (3.55)$$

Intégrons d'abord sur les vitesses ω^1 , le résultat est simplement égal à

$$\int \mathcal{D}\omega^1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^1 \varepsilon \omega_1 \right\} = 1. \quad (3.56)$$

L'intégration sur les vitesses ω^μ a la forme suivante

$$\int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \Lambda_{\mu\nu} \omega^\nu + J_\mu \omega^\mu \right\}, \quad (3.57)$$

où

$$J_\mu = -\alpha \theta^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu} \varepsilon \quad , \quad \Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \varepsilon - \alpha \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon, \quad (3.58)$$

et

$$\int \mathcal{D}\omega^\mu = \frac{D\omega^\mu}{\int D\omega^\mu e^{-\frac{1}{2}\omega^\mu \varepsilon \omega_\mu}}.$$

La forme étant une intégrale Gaussienne, le résultat est simplement

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \Lambda_{\mu\nu} \omega^\nu + J_\mu \omega^\mu \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec

$$\begin{aligned} J^\mu \Lambda_{\mu\nu}^{-1} J^\nu &= \alpha^2 (\theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} \varepsilon) \Lambda_{\mu\nu}^{-1} (\theta^\beta \mathcal{F}_{\beta\nu} \varepsilon) \\ &= -2\alpha^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} G_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\beta. \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} \Lambda_{\mu\nu}^{-1} \text{ est l'inverse de } \Lambda_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon \Lambda_{\mu\nu}^{-1} \varepsilon \end{cases} \quad (3.61)$$

Calculons le déterminant de Λ en utilisant l'identité

$$\det \Lambda = \exp \{ \text{Tr} \ln \Lambda \}, \quad (3.62)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \det \Lambda &= (\det \Lambda) \frac{d}{d\alpha} \text{Tr} \ln \Lambda \\ &= (\det \Lambda)_i \text{Tr} \left(\frac{\frac{d}{d\alpha} \Lambda}{\Lambda} \right) \\ &= (\det \Lambda) \text{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d}{d\alpha} \Lambda. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ou bien

$$\frac{\frac{d}{d\alpha} \det \Lambda}{\det \Lambda} = \text{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d}{d\alpha} \Lambda. \quad (3.64)$$

Intégrons sur α

$$\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon} = \exp \left\{ \int_0^\alpha d\omega \operatorname{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d}{d\alpha} \Lambda \right\}. \quad (3.65)$$

D'où on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \varepsilon}} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\alpha \operatorname{Tr} \Lambda^{-1} \frac{d\Lambda}{d\alpha} d\alpha \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^\alpha \operatorname{Tr} (G\mathcal{F}) d\alpha \right\}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

Portant (3.60) et (3.66) dans (I), on obtient

$$\begin{aligned} (I) &= \exp \left\{ - \int_0^\alpha \operatorname{Tr} (G\mathcal{F}) d\alpha + \alpha^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} G^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{\alpha}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^\alpha \int_0^1 G^{\mu\nu}(\tau, \tau) \mathcal{F}_{\mu\nu} d\alpha + \alpha^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu} G^{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\hat{\tau} - \frac{\alpha}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Maintenant, il faut calculer explicitement $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}$ et $G_{\mu\nu}$. Par définition, la matrice $\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ et sa matrice inverse $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ vérifient la relation suivante

$$\int_0^1 \Lambda_{\mu\nu}(\tau, s) (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (3.68)$$

Cette propriété permet d'obtenir (voir Annexe A)

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\tau, \hat{\tau}) &= \varepsilon^{-1}(\tau, \hat{\tau}) + (\alpha\mathcal{F})^2 e^{2\alpha\mathcal{F}(\tau-\hat{\tau})} [\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \alpha\mathcal{F}] \\ &\quad + \alpha\mathcal{F} e^{2\alpha\mathcal{F}(\tau-\hat{\tau})} \delta(\tau - \hat{\tau}), \end{aligned} \quad (3.69)$$

et

$$G(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} e^{2\alpha\mathcal{F}(\tau-\hat{\tau})} [\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \alpha\mathcal{F}]. \quad (3.70)$$

Par un simple calcul, on peut déduire

$$\begin{aligned}
-\int_0^\alpha d\acute{\alpha} \int_0^1 d\tau G^{\mu\nu}(\tau, \tau) \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha d\acute{\alpha} \int_0^1 d\tau \mathcal{F}_{\mu\nu} \tanh \acute{\alpha} \mathcal{F}^{\mu\nu} \\
&= \int_0^\alpha d\acute{\alpha} \int_0^1 d\tau \tanh \acute{\alpha} \\
&= \ln \cosh \alpha.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

et

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu} G^{\mu\nu}(\tau, \acute{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\acute{\tau} \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu} e^{2\alpha \mathcal{F}^{\mu\sigma}(\tau-\acute{\tau})} [\eta_\sigma^\nu \varepsilon(\tau-\acute{\tau}) - \tanh \alpha \mathcal{F}_\sigma^\nu] \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\acute{\tau} \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu} e^{2\alpha \mathcal{F}^{\mu\sigma}(\tau-\acute{\tau})} \eta_\sigma^\nu \varepsilon(\tau-\acute{\tau}) \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\acute{\tau} \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{F}_{\alpha\mu} e^{2\alpha \mathcal{F}^{\mu\sigma}(\tau-\acute{\tau})} \tanh(\alpha \mathcal{F}_\sigma^\nu) \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta d\tau d\acute{\tau} \\
&= \frac{\alpha}{2} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{1}{2} \tanh(\alpha \mathcal{F}_{\alpha\beta}) \theta^\alpha \theta^\beta \\
&= \frac{\alpha}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} - \theta^5 \theta^0 \tanh \alpha.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Tenons compte des calculs précédents, la fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x, y) &= \left(\widehat{\not{\eta}} - m\gamma^5 \right)_{out} \tilde{G}^c(x, y) \\
&= \left(\widehat{\not{\eta}} - m\gamma^5 \right)_{out} \left(\frac{-i}{2} \right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n} \right) \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \exp\left(ip_0 T + i\frac{e_0}{2} (p_0^2 - m^2) \right) \\
&\quad \times \left[\cosh\left(\frac{im\omega e_0}{2} \right) - \theta^5 \theta^0 \sinh\left(\frac{im\omega e_0}{2} \right) \right]_{\theta=0} K(x_a, x_b, e_0).
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \theta^5 \theta^0 \Big|_{\theta=0} &= \frac{\delta}{\delta\xi^5} \frac{\delta}{\delta\xi^0} \exp(i\tilde{\gamma}^n \xi_n) \Big|_{\xi=0} \\
 &= \frac{\delta}{\delta\xi^5} \frac{\delta}{\delta\xi^0} \left(1 + i\tilde{\gamma}^n \xi_n - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^n \xi_n \tilde{\gamma}^m \xi_m - \frac{i}{6} \tilde{\gamma}^n \xi_n \tilde{\gamma}^m \xi_m \tilde{\gamma}^l \xi_l + \dots\right) \Big|_{\xi=0} \\
 &= -\tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^0.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

La fonction de Green $\tilde{S}^c(x, y)$ est obtenue via la transformation

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}^c(x, y) &= \left(\widehat{\mathcal{T}} - m\gamma^5\right)_{out} \tilde{G}^c(x, y) \\
 &= \left(\widehat{\mathcal{T}} - m\gamma^5\right)_{out} \left(\frac{-i}{2}\right) \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \exp\left(ip_0 T + i\frac{e_0}{2}(p_0^2 - m^2)\right) \\
 &\quad \times \left[\cosh\left(\frac{im\omega e_0}{2}\right) + \tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^0 \sinh\left(\frac{im\omega e_0}{2}\right)\right] K(x_a, x_b, e_0).
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Substituons (3.44) dans (3.76)

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}^c(x, y) &= \left(\widehat{\mathcal{T}} - m\gamma^5\right)_{out} \\
 &\quad \times \sum_{n \in N_0} \left(\frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2}\right)^{\frac{1}{2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_a) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2}(x_a^2 + x_b^2)\right\} \\
 &\quad \times \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \exp\left\{ip_0 T + i\frac{e_0}{2}\left(p_0^2 - m^2 - 2m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right\} \\
 &\quad \times \left[\cosh\left(\frac{im\omega e_0}{2}\right) + \gamma^5 \tilde{\gamma}^0 \sinh\left(\frac{im\omega e_0}{2}\right)\right]_{\theta=0}.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Remplaçons $\left(\widehat{\mathcal{T}} - m\gamma^5\right)_{out}$ par son expression

$$\left(\widehat{\mathcal{T}} - m\gamma^5\right)_{out} = \left\{i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} + im\omega \gamma^5 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 x_b - m\gamma^5\right\} \tag{3.78}$$

et appliquons la relation de dérivée [10]

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x), \tag{3.79}$$

il vient

$$\begin{aligned}
& \tilde{S}^c(x, y, T) \\
&= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} + im\omega\gamma^5\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1x_b - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}^c(x, y, T) \\
&= \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \sum_{n \in N_0} \left\{ -\tilde{\gamma}^0 p_0 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) + \gamma^5 p_0 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \right. \\
&\quad - m\gamma^5 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) + m\tilde{\gamma}^0 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \\
&\quad + 2in\tilde{\gamma}^1 \sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) - 2in\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \gamma^5 \sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \\
&\quad - i\tilde{\gamma}^1 m\omega x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) - i\tilde{\gamma}^1 \gamma^5 \tilde{\gamma}^0 m\omega x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \\
&\quad \left. + im\omega\gamma^5 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) + im\omega x_b \tilde{\gamma}^1 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \right\} K_n(x_b, x_a).
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Tenant compte de

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}^\mu &= \gamma^5 \gamma^\mu, \\
-S^c(x, y) &= \tilde{S}^c(x, y) \gamma^5,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

et de

$$[\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0 \quad , \quad (\gamma^5)^2 = -1. \tag{3.81}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& -S^c(x_a, x_b, T) \\
&= \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \sum_{n \in N_0} \left\{ -\gamma^0 p_0 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) - p_0 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \right. \\
&\quad + mH_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) + m\gamma^0 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \\
&\quad + 2in\gamma^1 \sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) - 2in\gamma^1 \gamma^0 \sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \\
&\quad - i\gamma^1 m\omega x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) - i\gamma^1 \gamma^0 m\omega x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \\
&\quad \left. - im\omega\gamma^0 \gamma^1 x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \cosh(\alpha) + im\omega x_b \gamma^1 H_n(\sqrt{m\omega}x_b) \sinh(\alpha) \right\} K_n(x_b, x_a) \tag{3.82}
\end{aligned}$$

avec

$$K_n = \left(\frac{-i}{2}\right) \left(\frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2}\right)^{\frac{1}{2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_a) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2}(x_a^2 + x_b^2)\right\} \\ \exp\left\{ip_0T + i\frac{e_0}{2}\left[p_0^2 - m^2 - 2m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \quad (3.83)$$

Comme γ^0 et γ^1 sont représentées par

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i\sigma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

après un simple calcul, $S^c(x_a, x_b, T)$ prend la forme matricielle suivante

$$S^c(x_a, x_b, T) = - \int de_0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \sum_{n \in N_0} K_n \\ \times \left\{ \begin{pmatrix} (-p_0 + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) e^{\frac{im\omega e_0}{2}} & 0 \\ 0 & (p_0 + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) e^{-\frac{im\omega e_0}{2}} \end{pmatrix} + \right. \quad (3.85) \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & -[2n\sqrt{m\omega}H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) - 2m\omega x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b)] e^{-\frac{im\omega e_0}{2}} \\ -2n\sqrt{m\omega}H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) e^{\frac{im\omega e_0}{2}} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour simplifier, nous utilisons la formule de récurrence pour des polynômes d'Hermite

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0, \quad (3.86)$$

et donc

$$2n\sqrt{m\omega}H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) - 2m\omega x_b H_n(\sqrt{m\omega}x_b) = -\sqrt{m\omega}H_{n+1}(\sqrt{m\omega}x_b). \quad (3.87)$$

Changeons p_0 par $-p_0$ et intégrons sur le temps propre e_0 avec la prescription $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$

$$\int_0^{+\infty} de_0 \exp\left\{i\frac{e_0}{2}[p_0^2 - m^2 - 2nm\omega]\right\} = \frac{1}{\left(\frac{-i}{2}\right)[p_0^2 - m^2 - 2nm\omega]}, \quad (3.88)$$

on obtient la forme définitive de $S^c(x_a, x_b, T)$

$$\begin{aligned}
& S^c(x_a, x_b, T) \\
&= - \int \frac{dp_0}{2\pi} \sum_{n \in N_0} \left(\frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2} (x_a^2 + x_b^2) \right\} \times \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} \\
&\times \begin{pmatrix} (p_0 + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_a) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) & 2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_b) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_a) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_a) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) & -2n(p_0 - m) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_a) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) \end{pmatrix}, \tag{3.89}
\end{aligned}$$

où

$$E_n = +\sqrt{m^2 + 2nm\omega}. \tag{3.90}$$

Cette dernière relation (3.89) exprime la fonction de Green correspondante à l'oscillateur de Dirac unidimensionnel .

3.4 Fonctions d'ondes et énergies

La détermination des fonctions d'onde s'effectue en appliquant le théorème des résidus. Choisissons un contour spécial (C) dans le plan complexe. Les pôles de la fonction de Green sont les énergies positives et les énergies négatives données respectivement par

$$p_+^0 = E_n - i\varepsilon \quad \text{et} \quad p_-^0 = -E_n + i\varepsilon.$$

Pour les énergies positives p_+^0 le contour d'intégration est choisi en dessous de l'axe des réels avec $T > 0$. Par contre pour les énergies négatives p_-^0 il est choisi au dessus de l'axe des réels avec $T < 0$. En conclusion, on a

$$\oint_c \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 + m) = -i \left[\theta(T) \frac{(E_n + m)}{2E_n} e^{-iE_n T} + \theta(-T) \frac{(E_n - m)}{2E_n} e^{iE_n T} \right]. \tag{3.91}$$

Par la même méthode, on détermine

$$\oint_c \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 - m) = -i \left[\theta(T) \frac{(E_n - m)}{2E_n} e^{-iE_n T} + \theta(-T) \frac{(E_n + m)}{2E_n} e^{iE_n T} \right]. \tag{3.92}$$

et

$$\oint_c \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} = -i \left[\theta(T) \frac{e^{-iE_n T}}{2E_n} + \theta(-T) \frac{e^{iE_n T}}{2E_n} \right]. \quad (3.93)$$

En conséquence, la fonction de Green S^c devient

$$\begin{aligned} & S^c(x_a, x_b, T) \\ = & i \sum_{n \in N_0} \left(\frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2} (x_a^2 + x_b^2) \right\} \left\{ e^{-iE_n T} \frac{\theta(T)}{2E_n} \right. \\ & \times \begin{pmatrix} (E_n + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) H_n(\sqrt{m\omega}x_a) & 2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_b) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_a) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) H_n(\sqrt{m\omega}x_a) & -2n(E_n - m) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_a) \end{pmatrix} \\ & + e^{iE_n T} \frac{\theta(-T)}{2E_n} \\ & \left. \begin{pmatrix} (E_n - m) H_n(\sqrt{m\omega}x_b) H_n(\sqrt{m\omega}x_a) & 2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_b) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_a) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) H_n(\sqrt{m\omega}x_a) & -2n(E_n + m) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_b) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_a) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Cette fonction peut être écrite en fonction des fonctions d'onde positives Ψ_n^+ relatives à l'énergie positive E_+ et des fonctions d'onde négatives Ψ_n^- relatives à l'énergie négative E_- . En effet, il n'est pas difficile de s'assurer que $S^c(x_a, x_b, T)$ a la forme suivante

$$S^c(x_a, x_b, T) = i \sum_{n \in N_0} \left[\theta(T) \Psi_n^+(x_b) \bar{\Psi}_n^+(x_a) e^{-iE_n T} + \theta(-T) \Psi_n^-(x_b) \bar{\Psi}_n^-(x_a) e^{iE_n T} \right], \quad (3.95)$$

où

$$\Psi_n^+(x) = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi_n^-(x_b) = \begin{pmatrix} f_{-n}(x) \\ g_{-n}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

$\Psi_n^+(x)$ sont les fonctions d'onde relatives aux énergies positives et $\Psi_n^-(x_b)$ sont les fonctions d'onde relatives aux énergies négatives, avec

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n + m)}{2^{n+1} n! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_n(\sqrt{m\omega}x), \quad (3.97)$$

$$g_n(x) = -\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n - m)}{2^n (n-1)! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x). \quad (3.98)$$

et

$$\begin{aligned} f_{-n}(x) &= \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n - m)}{2^{n+1} n! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_n(\sqrt{m\omega} x) = \sqrt{\frac{(E_n - m)}{E_n + m}} f_n(x) \\ g_{-n}(x) &= \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n + m)}{2^n n! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_{n-1}(\sqrt{m\omega} x) = -\sqrt{\frac{(E_n + m)}{(E_n - m)}} g_n(x) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Ces résultats sont équivalents aux ceux obtenus par d'autres auteures. Dans ce qui suit, nous allons essayer de généraliser cette méthode au cas de la dimension deux.

3.5 Tentative de généralisation à la dimension d=2

Dans le cas de l'oscillateur de Dirac à deux dimension, le terme de couplage spin-orbite contribue par l'expression

$$16im\omega\Psi^5\Psi^0 \sum_{i,j=1}^2 \Psi^i\Psi^j (x^i p^j - p^i x^j) = 32im\omega\Psi^5\Psi^0\Psi^1\Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2). \quad (3.100)$$

La fonction de Green $\tilde{G}^c(x, y)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= \left(\frac{-i}{2}\right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_e \int De \\ &\times \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \times \exp\left\{i \int_0^1 \left[\frac{e_0}{2} \left[p^2 - m^2 - m^2\omega^2 (x^1)^2 - m^2\omega^2 (x^2)^2 - 8m\omega\Psi^5\Psi^0 + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. 32im\omega\Psi^5\Psi^0\Psi^1\Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2)\right] + p\dot{x} + \pi_e \dot{e} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n\right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0)\right\} \Big|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

où

$$\int Dx = \int Dx^0 Dx^1 Dx^2. \quad (3.102)$$

$$\int Dp = \int Dp^0 Dp^1 Dp^2. \quad (3.103)$$

Effectuons l'intégration sur π_e, x^0, e et p^0 , la fonction de propagation se simplifie

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= \left(\frac{-i}{2}\right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 \int Dx^1 \int Dx^2 \int Dp^1 \int Dp^2 \\ &\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \exp\left\{i \int_0^1 \left[\frac{e_0}{2} \left[(p^0)^2 - m^2 \right] - (p^1)^2 + (p^2)^2 + m^2\omega^2 (x^1)^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + m^2\omega^2 (x^2)^2 + 8m\omega\Psi^5\Psi^0 - 32im\omega\Psi^5\Psi^0\Psi^1\Psi^2 (x^1p^2 - p^1x^2) \right] \right. \\ &\left. - p^1\dot{x}^1 - p^2\dot{x}^2 - i\Psi_n\dot{\Psi}^n \right] d\tau + ip^0T + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \Big|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

3.5.1 Intégration sur les variables de spin

On s'occupe de l'intégrale contenant les variables de Grassmann. Nous la notons

$$\begin{aligned} (III) &= \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \exp\left\{ - \int_0^1 4im\omega e_0\Psi^5\Psi^0 d\tau + \int_0^1 16e_0m\omega\Psi^5\Psi^0\Psi^1\Psi^2 (x^1p^2 - p^1x^2) d\tau \right. \\ &\left. + \int_0^1 \Psi_n\dot{\Psi}^n d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Le terme de couplage contient quatre Grassmanns $\Psi^5\Psi^0\Psi^1\Psi^2$. Ceci pose un problème à l'intégration. Pour éviter cette difficulté, on applique la méthode des champs auxiliaires[11].

soit

$$A = \exp\left\{ \int_0^1 16e_0m\omega\Psi^5\Psi^0\Psi^1\Psi^2 (x^1p^2 - p^1x^2) d\tau \right\}. \quad (3.106)$$

La procédure est d'introduire une intégration sur une source $f(t)$ comme suit

$$\begin{aligned}
A &= \exp \left\{ \int_0^1 16e_0 m \omega \Psi^5 \Psi^0 \Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) d\tau \right\} \\
&= \int D \{f(\tau), f^*(\tau)\} \exp \left\{ \int_0^1 4ie_0 m \omega f^*(\tau) \Psi^5 \Psi^0 d\tau \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ i4 \int_0^1 f(\tau) \Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) d\tau \right\} \quad (3.108)
\end{aligned}$$

avec

$$D \{f(\tau), f^*(\tau)\} = e^{-\int_0^1 f^*(\tau) f(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau \leq 1} \frac{d\tau}{\pi} df^*(\tau) df(\tau) \quad (3.109)$$

Notons que $f(\tau)$ est un champ bosonique qui commute avec les Ψ . L'expression (III) devient

$$\begin{aligned}
(III) &= \int D \{f(\tau), f^*(\tau)\} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ - \int_0^1 4im\omega e_0 \Psi^5 \Psi^0 d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 4ie_0 m \omega f^*(\tau) \Psi^5 \Psi^0 d\tau + \int_0^1 \Psi_n \dot{\Psi}^n d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ i4 \int_0^1 f(\tau) \Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) d\tau \right\} \\
&= \int D \{f(\tau), f^*(\tau)\} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^5 \mathcal{D}\Psi^0 \mathcal{D}\Psi^1 \mathcal{D}\Psi^2 [B(f^*(\tau)) \times C(f(\tau))], \quad (3.110)
\end{aligned}$$

avec

$$B(f^*(\tau)) = \exp \left\{ - \int_0^1 4im\omega e_0 \Psi^5 \Psi^0 d\tau + \int_0^1 4im\omega e_0 f^*(\tau) \Psi^5 \Psi^0 d\tau + \int_0^1 \Psi_5 \dot{\Psi}^5 d\tau + \Psi_5(1) \Psi^5(0) + \int_0^1 \Psi_0 \dot{\Psi}^0 d\tau + \Psi_0(1) \Psi^0(0) \right\}. \quad (3.110)$$

$$C(f(\tau)) = \exp \left\{ i4 \int_0^1 f(\tau) \Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) d\tau + \int_0^1 \Psi_1 \dot{\Psi}^1 d\tau + \Psi_1(1) \Psi^1(0) + \int_0^1 \Psi_2 \dot{\Psi}^2 d\tau + \Psi_2(1) \Psi^2(0) \right\}. \quad (3.111)$$

Intégrons d'abord sur les Ψ^5 et Ψ^0 . Suivons les étapes précédentes, on réécrit d'abord

$$\Psi^5 \Psi^0 = \frac{1}{2} \Psi^\mu \Psi^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, 5. \quad (3.112)$$

avec

$$\mathcal{F}_{50} = I \quad (3.113)$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^5 \mathcal{D}\Psi^0 B(f^*(\tau)) = \int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^\mu \\ & \times \exp \left\{ - \int_0^1 2im\omega e_0 \Psi^\mu \Psi^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} d\tau + \int_0^1 2im\omega e_0 f^*(\tau) \Psi^\mu \Psi^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^1 \Psi_\mu \dot{\Psi}^\mu d\tau + \Psi_\mu(1) \Psi^\mu(0) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Passons aux vitesses par le changement

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau') \omega(\tau') d\tau' + \frac{\theta}{2}$$

Ce qui laisse écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^5 \mathcal{D}\Psi^0 B(f^*(\tau)) \\
&= \int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \varepsilon \omega_\mu + \alpha \omega^\mu \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - 2\alpha \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu \right. \\
&\quad \left. - \alpha \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} + \alpha \omega^\mu \varepsilon f^* \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu + 2\alpha f^* \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu + \alpha f^* \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\omega^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^\mu \varepsilon \omega_\mu + Q_\mu \omega^\mu - \alpha \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} + \alpha f^* \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\
&= \sqrt{\frac{\det R}{\det \varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q^\mu R_{\mu\nu}^{-1} Q^\nu - \alpha \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} + \alpha f^* \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Les notations sont condensées et les quantités Q_μ , $R_{\mu\nu}$ et $\sqrt{\frac{\det R}{\det \varepsilon}}$ sont données par les relations suivantes

$$Q_\mu = -2\alpha \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon + 2\alpha f^* \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon = -2\alpha \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} (1 + f^*) \varepsilon, \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \varepsilon - 2\alpha \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon + 2\alpha \varepsilon f^* \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \\
&= \eta_{\mu\nu} \varepsilon - 2\alpha \varepsilon (1 - f^*) \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\det R}{\det \varepsilon}} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\alpha} d(2\alpha) \text{Tr} R^{-1} \frac{dR}{d(2\alpha)} \right\} \\
&= \exp \left\{ - \int_0^{2\alpha} \text{Tr} (M_{\mu\nu} (1 - f^*) \mathcal{F}_{\mu\nu}) d(2\alpha) \right\} \tag{3.119}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} R_{\mu\nu}^{-1} \text{ est l'inverse de } R_{\mu\nu} \\ M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon R_{\mu\nu}^{-1} \varepsilon \end{cases} \tag{3.120}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
Q^\mu R_{\mu\nu}^{-1} Q^\nu &= 4\alpha^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} (1 - f^*) \varepsilon R_{\mu\nu}^{-1} \theta^\beta \mathcal{F}_{\beta\nu} (1 - f^*) \varepsilon \\
&= -8\alpha^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\mu} (1 - f^*) M_{\mu\nu} \theta^\beta \mathcal{F}_{\beta\nu} (1 - f^*). \tag{3.121}
\end{aligned}$$

Suivons les mêmes étapes de calcul que nous avons fait dans les chapitre précédent, nous déduisons (voir Annexe A)

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\Psi^5 \mathcal{D}\Psi^0 B(f^*(\tau)) \\ &= \left[\cosh \left(2\alpha \int_0^1 (1 - f^*(\tau)) d\tau \right) - \theta^5 \theta^0 \sinh \left(2\alpha \int_0^1 (1 - f^*(\tau)) d\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

remplaçons cette dernière nous obtenons

$$\begin{aligned} (III) &= \int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^1 \mathcal{D}\Psi^2 \\ & \exp \left\{ i4 \int_0^1 f(\tau) \Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) d\tau + \int_0^1 \Psi_1 \dot{\Psi}^1 d\tau \right. \\ & \left. + \Psi_1(1) \Psi^1(0) + \int_0^1 \Psi_2 \dot{\Psi}^2 d\tau + \Psi_2(1) \Psi^2(0) \right\} \\ & \times \left[\cosh \left(2\alpha \int_0^1 (1 - f^*(\tau)) d\tau \right) - \theta^5 \theta^0 \sinh \left(2\alpha \int_0^1 (1 - f^*(\tau)) d\tau \right) \right] \end{aligned} \quad (3.123)$$

où

$$\begin{aligned} & \int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} F\{f(\tau), f^*(\tau)\} \\ &= \int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} \exp \left\{ i4 \int_0^1 f(\tau) \Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) d\tau \right\} \\ & \times \left\{ \left(e^{2\alpha \int_0^1 (1-f^*(\tau)) d\tau} + e^{-2\alpha \int_0^1 (1-f^*(\tau)) d\tau} \right) \right. \\ & \left. - \theta^5 \theta^0 \left(e^{2\alpha \int_0^1 (1-f^*(\tau)) d\tau} - e^{-2\alpha \int_0^1 (1-f^*(\tau)) d\tau} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Pour intégrer sur le champ auxiliaire, on utilise l'identité

$$\int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} P(f^*(\tau)) \exp \left(\int_0^1 r(\tau) f(\tau) d\tau \right) = P[r]. \quad (3.125)$$

Comparons (3.124) avec (3.125), il vient

$$r(\tau) = i4\Psi^1\Psi^2(x^1p^2 - p^1x^2), \quad (3.126)$$

donc

$$\begin{aligned} & \int D\{f(\tau), f^*(\tau)\} F\{f(\tau), f^*(\tau)\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(e^{2\alpha \int_0^1 (1-4i\Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2))d\tau} + e^{-2\alpha \int_0^1 (1-4i\Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2))d\tau} \right) \right. \\ & \quad \left. - \theta^5\theta^0 \left(e^{2\alpha \int_0^1 (1-4i\Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2))d\tau} - e^{-2\alpha \int_0^1 (1-4i\Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2))d\tau} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} (III) &= \frac{1}{2} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^1\mathcal{D}\Psi^2 \exp \left\{ \int_0^1 \Psi_1\dot{\Psi}^1d\tau + \Psi_1(1)\Psi^1(0) + \right. \\ & \quad \left. \int_0^1 \Psi_2\dot{\Psi}^2d\tau + \Psi_2(1)\Psi^2(0) \right\} \\ & \quad \times \left\{ \left(e^{2\alpha} e^{-8i\alpha \int_0^1 \Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2)d\tau} + e^{-2\alpha} e^{8i\alpha \int_0^1 \Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2)d\tau} \right) \right. \\ & \quad \left. - \theta^5\theta^0 \left(e^{2\alpha} e^{-8i\alpha \int_0^1 \Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2)d\tau} - e^{-2\alpha} e^{8i\alpha \int_0^1 \Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2)d\tau} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi^1\mathcal{D}\Psi^2 \\ & \quad \exp \left\{ \int_0^1 \Psi_1\dot{\Psi}^1d\tau + \Psi_1(1)\Psi^1(0) + \int_0^1 \Psi_2\dot{\Psi}^2d\tau + \Psi_2(1)\Psi^2(0) \right\} \\ & \quad \times \left\{ (1 - \theta^5\theta^0) e^{2\alpha} e^{-8i\alpha \int_0^1 \Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2)d\tau} \right. \\ & \quad \left. + (1 + \theta^5\theta^0) e^{-2\alpha} e^{8i\alpha \int_0^1 \Psi^1\Psi^2(x^1p^2-p^1x^2)d\tau} \right\} \end{aligned} \quad (3.128)$$

Il ne reste que l'intégration sur les Ψ^1, Ψ^2 . Pour cela, on choisit d'écrire le terme

$$\begin{aligned}\Psi^1 \Psi^2 (x^1 p^2 - p^1 x^2) &= \frac{1}{2} \Psi^i \Psi^j (x^i p^j - p^i x^j) \quad i, j = 1, 2 \\ &= \frac{1}{2} \Psi^i \Psi^j L_{ij}\end{aligned}\quad (3.129)$$

$$L_{ij} = x^i p^j - x^j p^i \quad (3.130)$$

$$L_{12} = x^1 p^2 - p^1 x^2 \quad (3.131)$$

On considère ces changements

$$\begin{aligned}(III) &= \frac{1}{2} \int \mathfrak{D}\Psi^i \exp \left\{ \int_0^1 \Psi_i \dot{\Psi}^i d\tau + \Psi_i(1) \Psi^i(0) \right\} \\ &\quad \times \left\{ (1 - \theta^5 \theta^0) e^{2\alpha} e^{-4i\alpha \int_0^1 \Psi^i \Psi^j L_{ij} d\tau} + (1 + \theta^5 \theta^0) e^{-2\alpha} e^{4i\alpha \int_0^1 \Psi^i \Psi^j L_{ij} d\tau} \right\}\end{aligned}\quad (3.132)$$

Comme d'habitude, on passe aux vitesses

$$\begin{aligned}(III) &= \frac{1}{2} \int \mathfrak{D}\omega^i \left\{ (1 - \theta^5 \theta^0) e^{2\alpha} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^i \epsilon \omega_i - 4i\alpha \theta^i L_{ij} \epsilon \omega^j - 2i\alpha \theta^i \theta^j L_{ij} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1 + \theta^5 \theta^0) e^{-2\alpha} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^i \epsilon \omega_i + 4i\alpha \theta^i L_{ij} \epsilon \omega^j + 2i\alpha \theta^i \theta^j L_{ij} \right\} \right\}.\end{aligned}\quad (3.133)$$

Le calcul se réduit à

$$\begin{aligned}
(III) &= \frac{1}{4} \left\{ (1 - \theta^5 \theta^0) (1 - \theta^1 \theta^2) e^{ie_0 m \omega} e^{-e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} + \right. \\
&\quad (1 - \theta^5 \theta^0) (1 + \theta^1 \theta^2) e^{ie_0 m \omega} e^{e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} + \\
&\quad (1 + \theta^5 \theta^0) (1 + \theta^1 \theta^2) e^{-ie_0 m \omega} e^{-e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} \\
&\quad \left. + (1 + \theta^5 \theta^0) (1 - \theta^1 \theta^2) e^{-ie_0 m \omega} e^{e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ (1 - \theta^5 \theta^0 - \theta^1 \theta^2 + \theta^5 \theta^0 \theta^1 \theta^2) e^{ie_0 m \omega} e^{-e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} \right. \\
&\quad + (1 - \theta^5 \theta^0 + \theta^1 \theta^2 - \theta^5 \theta^0 \theta^1 \theta^2) e^{ie_0 m \omega} e^{e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} \\
&\quad + (1 + \theta^5 \theta^0 + \theta^1 \theta^2 + \theta^5 \theta^0 \theta^1 \theta^2) e^{-ie_0 m \omega} e^{-e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} \\
&\quad \left. + (1 + \theta^5 \theta^0 - \theta^1 \theta^2 - \theta^5 \theta^0 \theta^1 \theta^2) e^{-ie_0 m \omega} e^{e_0 m \omega (x^1 p^2 - x^2 p^1)} \right\}. \tag{3.134}
\end{aligned}$$

Rapportons ces résultats dans $\tilde{G}^c(x, y)$

$$\tilde{G}^c(x, y) = K_1 + K_2 + K_3 + K_4.$$

Les propagateurs K_1, K_2, K_3 et K_4 sont définis comme suit

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{-i}{8} \right) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int de_0 M_1(e_0) M_2(e_0) (1 - \theta^5 \theta^0 - \theta^1 \theta^2 + \theta^5 \theta^0 \theta^1 \theta^2) \\
&\quad \times \int Dx^1 \int Dx^2 \exp \left\{ i \int_0^1 \left(\frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}{2e_0} - e_0 m^2 \omega^2 \left((x^1)^2 + (x^2)^2 \right) - im\omega (x^1 \dot{x}^2 - x^2 \dot{x}^1) \right) d\tau \right\} \\
&\hspace{15em} \tag{3.135}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left(\frac{-i}{8} \right) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int de_0 M_1(e_0) M_2(e_0) e^{ie_0 m \omega} (1 - \theta^5 \theta^0 + \theta^1 \theta^2 - \theta^5 \theta^0 \theta^1 \theta^2) \\
&\quad \times \int Dx^1 \int Dx^2 \exp \left\{ i \int_0^1 \left(\frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}{2e_0} - e_0 m^2 \omega^2 \left((x^1)^2 + (x^2)^2 \right) + im\omega (x^1 \dot{x}^2 - x^2 \dot{x}^1) \right) d\tau \right\}, \\
&\hspace{15em} \tag{3.136}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= \left(\frac{-i}{8}\right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 M_1(e_0) M_2(e_0) (1 + \theta^5\theta^0 + \theta^1\theta^2 + \theta^5\theta^0\theta^1\theta^2) e^{-ie_0m\omega} \\
&\times \int Dx^1 \int Dx^2 \exp\left\{i \int_0^1 \left(\frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}{2e_0} - e_0m^2\omega^2 \left((x^1)^2 + (x^2)^2\right) - im\omega (x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)\right) d\tau\right\},
\end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\begin{aligned}
K_4 &= \left(\frac{-i}{8}\right) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int de_0 M_1(e_0) M_2(e_0) (1 + \theta^5\theta^0 - \theta^1\theta^2 - \theta^5\theta^0\theta^1\theta^2) e^{-ie_0m\omega} \\
&\times \int Dx^1 \int Dx^2 \exp\left\{i \int_0^1 \left(\frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}{2e_0} - e_0m^2\omega^2 \left((x^1)^2 + (x^2)^2\right) + im\omega (x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)\right) d\tau\right\},
\end{aligned} \tag{3.138}$$

avec

$$M_1(e_0) = \int Dp^1 \exp\left(-i\frac{e_0}{2} \int_0^1 (p^1)^2 d\tau\right). \tag{3.139}$$

$$M_2(e_0) = \int Dp^2 \exp\left(-i\frac{e_0}{2} \int_0^1 (p^2)^2 d\tau\right). \tag{3.140}$$

Finalement, il nous reste que l'intégration sur les coordonnées.

Les propagateurs K_1, K_2, K_3 et K_4 ont une forme quadratique et peuvent en principe être calculés suivant les méthodes habituelles de l'intégrale de chemins telles méthode matricielle, déviation par rapport au chemin classique...etc. Remarquons qu'en plus leurs actions contiennent des quantités complexes $\pm im\omega (x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)$ qui proviennent de l'interaction spin-orbite après séparation spin-moment orbital, alors qu'on sait que les fonctions d'onde du problème sont fonctions propres du moment angulaire total qui est la somme de : spin et moment orbital.

Par conséquent, pour pouvoir continuer le calcul, il faudrait rassembler d'abord tous ces termes d'interaction spin-orbite et les traiter de manière unifiée.

Chapitre 4

Etude du potentiel step à 1D par le formalisme de Fradkin-Gitman

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'application du formalisme supersymétrique de Fradkin-Gitman dans le cas de l'interaction avec un potentiel scalaire de type Step. Après avoir exposé brièvement le formalisme et sachant que le problème est indépendant du temps, on intègre le temps et sa coordonnée conjuguée qui est l'énergie. Par ailleurs, l'intégration sur les variables Grassmanniennes est effectuée en introduisant l'espace des vitesses. Le résultat se réduit alors au problème de Klein-Gordon correspondant contenant des corrections dues au couplage spin-champ de type distribution de Dirac. La présence de cette dernière simplifie le calcul et réduit la série de perturbation à une expression qui contient seulement des fonctions de Green de type Klein-Gordon correspondantes au cas du potentiel step. La fonction de Green est donnée sous forme d'un produit d'une matrice par la fonction de Green de Klein-Gordon correspondante au cas du potentiel step dont le résultat est bien connu[12],[13].

4.1 Propagateur relatif au potentiel step

Soit l'équation de Dirac d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ en interaction avec un champ électromagnétique \mathcal{A}_μ de type scalaire $(e\mathcal{A}_0 = eV_0\theta(x), V_0 > 0, \vec{\mathcal{A}} = 0)$

$$(\hat{\eta} - m)S^c(x, y) = -\delta^4(x - y), \quad (4.1)$$

avec

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

La fonction de Green à calculer est la solution de l'équation

$$(\hat{\eta} - m\gamma^5)\tilde{S}^c(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (4.3)$$

En suivant les mêmes étapes du chapitre précédent, cette même fonction de Green prend alors la forme suivante

$$\tilde{S}^c(x, y) = \left(\hat{\eta} - m\gamma^5 \right)_{out} \tilde{G}^c(x, y), \quad (4.4)$$

où

$$\tilde{G}^c(x, y) = -i \int d\lambda \langle x | e^{-i\hat{H}\lambda} | y \rangle. \quad (4.5)$$

avec $x = (x_b, T)$ et $y = (x_a, 0)$

Passons à la représentation intégral de chemin. Pour cela procédons comme d'habitude :

-décomposons $\exp(-i\hat{H}\lambda) = \left[\exp\left(\frac{-i\hat{H}\lambda}{N+1}\right) \right]^{N+1}$

-insérons respectivement N fois et $N + 1$ fois les identités

$$\int |x\rangle\langle x| dx = I,$$

et

$$\int |p\rangle\langle p| dp = I.$$

-passant à la représentation de Weyl avec $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ étant le mid-point. Prenons tout en compte, on peut voir que

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} (-i) \int d\lambda_0 \int d\lambda_1 \int \cdots \int d\lambda_{N+1} \int dx_1 \int \cdots \int dx_N \times \\ &\prod_{k=1}^{N+1} \langle x_k | e^{-i\hat{H}(\lambda_k)\Delta\tau} | x_{k-1} \rangle \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec

$$\hat{H} = - \left(\hat{\pi}^2 - m^2 + \frac{i}{2} e \mathcal{F}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \right), \quad (4.7)$$

et

$$\Delta\tau = \frac{\lambda}{N+1}, \quad \tau_k = k \Delta\tau \text{ donc } : \tau \in [0, \lambda]. \quad (4.8)$$

-éliminons aussi les fonctions δ en considérant la forme intégrale

$$\delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\pi\lambda(\lambda_k - \lambda_{k-1})} d\pi_k.$$

-remplaçons les matrices de Dirac par les variables de Grassmann grâce à la représentation intégrale de chemin suivante

$$\begin{aligned} T \exp \left\{ \int_0^\lambda \rho_n(\tau) \tilde{\gamma}^n d\tau \right\} \Big|_{\rho=0} &= \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n} \right) \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \exp \left[\int_0^\lambda \left(\Psi_n \dot{\Psi}^n - 2i\rho_n \Psi^n \right) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right] \Big|_{\theta=0}^{\rho=0}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ce qui donne en définitive

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= (-i) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n} \right) \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\pi_\lambda \int D\lambda \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\pi^2 - m^2 + 2ie\mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau \right. \\ &\quad \left. + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Et pour la fonction de Green causale on a

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x, y) &= (-i) \left(\hat{\mathcal{T}} - m\gamma^5 \right)_{out} \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n} \right) \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi_\lambda \times \\ &\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\pi^2 - m^2 + 2ie\mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cette dernière relation exprime la forme hamiltonienne correspondantes dans la projection globale. Dans ce qui suit, nous allons calculer explicitement $\tilde{S}^c(x, y)$.

4.2 Calcul de la fonction de Green

Il s'agit d'abord de calculer la fonction de Green en considérant le potentiel step. Dans ce cas $\tilde{G}^c(x, y)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & (-i) \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \int d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi_\lambda \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \times \\ & \exp\left\{i \int_0^\lambda \left[\pi^2 - m^2 + 2ie\mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) \Psi^\mu \Psi^\nu + p\dot{x} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - i\Psi_n \dot{\Psi}^n\right] d\tau \right. \\ & \left. + \Psi_n(1) \Psi^n(0)\right\} |_{\theta=0}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec

$$\pi^0 = p^0 - eV_0\theta(x) \quad (4.13)$$

$$\pi^1 = p^1. \quad (4.14)$$

Comme $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ ne dépend pas de x^0 , il vient que

$$\begin{aligned} \int Dx^0 \exp\left(i \int_0^\lambda p^0 \dot{x}^0\right) &= \int Dx^0 \exp\left\{i(p_b^0 x_b^0 - p_a^0 x_a^0) - i \int_0^\lambda \dot{p}^0 x^0 d\tau\right\} \\ &= \exp\{i(p_b^0 x_b^0 - p_a^0 x_a^0)\} \times \delta(\dot{p}^0), \end{aligned} \quad (4.15)$$

qui implique

$$\begin{aligned} & \int Dp^0 \exp\left\{i(p_b^0 x_b^0 - p_a^0 x_a^0) + i \int_0^\lambda (\pi^0)^2 d\tau\right\} \times \delta(\dot{p}^0) \\ &= \int \frac{dp^0}{2\pi} \exp\left\{ip^0 T + i \int_0^\lambda (\pi^0)^2 d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Par voie de conséquence on a

$$\int D\pi_\lambda \exp \left(i \int_0^\lambda \pi_\lambda \dot{\lambda} d\tau \right) = \delta \left(\dot{\lambda} \right), \quad (4.17)$$

et alors

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) = & (-i) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int d\lambda_0 \int Dx^1 \int Dp^0 \int Dp^1 \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \\ & \times \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^1)^2 + (p^0 - eV_0\theta(x))^2 - ((p^1)^2 + m^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2ie\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \Psi^\mu \Psi^\nu - i\Psi_n \dot{\Psi}^n \right] d\tau + ip^0 T + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

A ce niveau, il est préférable d'intégrer d'abord les variables de Grassmann. Pour ce faire introduisant l'espace des vitesses correspondant.

4.2.1 Intégration sur les variables de spin

Soit

$$(II) = \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathfrak{D}\Psi \exp \left\{ - \int_0^\lambda 2e\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \Psi^\mu \Psi^\nu + \int_0^\lambda \Psi_n \dot{\Psi}^n d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\}. \quad (4.19)$$

Dans cette représentation on remplace les variables de Grassmann Ψ par des vitesses ω en utilisant la transformation intégrale suivante

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \omega(\hat{\tau}) d\hat{\tau} + \frac{\theta}{2}.$$

Remarquons que contrairement aux variables Ψ ces vitesses ne sont assujettées à aucune restriction aux bords. Ainsi ω garde la même nature de Ψ mais varie librement dans son domaine. De ce fait, il vient

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\omega \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \varepsilon \omega_n + \frac{e}{2} \omega^\mu \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - e \theta^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon \omega^\nu - e \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\
&= \sqrt{\frac{\det \mathcal{L}}{\det \varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} I^\mu \mathcal{L}_{\mu\nu}^{-1} I^\nu - e \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\
&= \exp \left\{ -\int_0^e d\varepsilon \text{Tr} (\Gamma \mathcal{F}) - e^2 \theta^\alpha \mathcal{F}_\alpha^\mu \Gamma^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\nu\beta} \theta^\alpha \theta^\beta - \frac{e}{2} \theta^\mu \theta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} \\
&= \exp \left\{ -\int_0^e d\varepsilon \text{Tr} (\Gamma \mathcal{F}) - \frac{1}{2} \tanh \left(e \int_0^\lambda d\tau \mathcal{F}_{\mu\nu} (\tau) \right) \theta^\mu \theta^\nu \right\} \\
&= \exp \left\{ -\int_0^e d\varepsilon \int_0^\lambda d\tau (\Gamma^{10} \mathcal{F}_{10}) - \tanh \left(e \int_0^\lambda d\tau \mathcal{F}_{10} (\tau) \right) \theta^1 \theta^0 \right\}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

où

$$I_\mu = -e \theta^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu} \varepsilon, \quad \mathcal{L}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \varepsilon - e \varepsilon \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon, \tag{4.21}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mu\nu}^{-1} \text{ est l'inverse de } \mathcal{L}_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{L}_{\mu\nu}^{-1} \varepsilon, \end{cases} \tag{4.22}$$

on détermine alors (II) (voir Annexe B)

$$(II) = \cosh \left(e V_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau \right) - \theta^1 \theta^0 \sinh \left(e V_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau \right) \tag{4.23}$$

Ce qui donne pour la fonction de Green $\tilde{G}^c(x, y)$ le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^c(x, y) &= (-i) \exp \left(i \tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta \theta^n} \right) \int d\lambda_0 \int D x^1 \int D p^0 \int D p^1 e^{i p_0 T} \exp \left\{ i \int_0^\lambda \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^1)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p_0 - e v_0 \theta(x))^2 - ((p^1)^2 + m^2) \right] d\tau \right\} \\
&\quad \cdot \left[\cosh \left(e v_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau \right) - \theta^1 \theta^0 \sinh \left(e v_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau \right) \right]_{\theta=0}. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

où l'on remarque qu'il n'est rien d'autres que le résultat de la partie bosonique corrigé par le terme spin-champ. Comme la distribution delta de Dirac nécessite l'introduction de la méthode des perturbations remplaçons d'abord les constantes de Grassmann θ par des matrices $\tilde{\gamma}$ suivant l'identité

$$\begin{aligned} \exp\left(i\tilde{\gamma}^n \frac{\delta}{\delta\theta^n}\right) \theta^1 \theta^0 \Big|_{\theta=0} &= \frac{\delta}{\delta\xi^1} \frac{\delta}{\delta\xi^0} \exp(i\tilde{\gamma}^n \xi_n) \Big|_{\xi=0} \\ &= -\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

et par suite toutes les dérivées sont éliminées et le résultat devient

$$\begin{aligned} \tilde{G}^c(x, y) &= (-i) \int d\lambda_0 \int Dx^1 \int \frac{dp^0}{2\pi} e^{ip_0 T} M(\lambda) e^{i\lambda(p_0^2 - m^2)} \\ &\quad \exp\left\{i \int_0^\lambda \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^1)^2 + eV_0(-2p_0 + eV_0\theta(x))\right] d\tau\right\} \\ &\quad \cdot \left[\cosh\left(eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau\right) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \sinh\left(eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau\right) \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

où $M(\lambda)$ étant la mesure donnée par

$$M(\lambda) = \int Dp^1 e^{-i \int_0^\lambda (p^1)^2 d\tau}. \quad (4.27)$$

Ecrivant $\cosh\left(eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau\right)$ et $\sinh\left(eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau\right)$ sous forme exponentielle

$$\cosh\left(eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau\right) = \frac{e^{eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau} + e^{-eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau}}{2}, \quad (4.28)$$

$$\sinh\left(eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau\right) = \frac{e^{eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau} - e^{-eV_0 \int_0^\lambda \delta(x) d\tau}}{2}. \quad (4.29)$$

ce qui laisse la fonction $\tilde{G}^c(x, y)$ s'exprimer à partir de deux autres fonctions de Green qu'on note par \tilde{G}^+ et \tilde{G}^- suivant la formule

$$\tilde{G}^c(x, y) = \tilde{G}^+ + \tilde{G}^- + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 (\tilde{G}^+ - \tilde{G}^-). \quad (4.30)$$

Les fonctions de Green \tilde{G}^+ et \tilde{G}^- sont définis respectivement comme

$$\begin{aligned} \tilde{G}^+ &= \frac{-i}{2} \int d\lambda_0 \int Dx^1 \int \frac{dp_0}{2\pi} M(\lambda) e^{ip_0 T} e^{i\lambda(p_0^2 - m^2)} \\ &\times \exp \left[i \int_0^\lambda \left\{ \frac{1}{2} (\dot{x}^1)^2 + ev_0(-2p_0 + eV_0\theta(x)) - ieV_0\delta(x) \right\} d\tau \right], \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}^- &= \frac{-i}{2} \int d\lambda_0 \int Dx^1 \int \frac{dp_0}{2\pi} M(\lambda) e^{ip_0 T} e^{i\lambda(p_0^2 - m^2)} \\ &\times \exp \left[i \int_0^\lambda \left\{ \frac{1}{2} (\dot{x}^1)^2 + eV_0(-2p_0 + eV_0\theta(x)) + ieV_0\delta(x) \right\} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ces expressions intégrale de chemin correspondent respectivement à un système physique dont l'hamiltonien est donné par

$$H = H_0 \pm W, \quad (4.33)$$

avec

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} (\dot{x}^1)^2 + eV_0(-2p_0 + eV_0\theta(x)) \\ W &= ieV_0\delta(x). \end{aligned} \quad (4.34)$$

En fait H_0 est le hamiltonien de KG pour le potentiel scalaire step et W est le potentiel correctif déduit du couplage spin-champ jouant le rôle d'une perturbation. De ce qui suit, la méthode des perturbations est choisie comme méthode de calcul.

4.2.2 methode de perturbation

Développons \tilde{G}^+ et \tilde{G}^- en une série de perturbation nous aurons

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^+ &= \frac{-i}{2} \int d\lambda_0 \int Dx^1 \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} e^{i\lambda(p_0^2 - m^2)} \left\{ K(x_b, x_a, \lambda) \right. \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (iev_0)^n \int_0^\lambda dt_n \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \prod_{J=1}^N dx_J K(x_a, x_1) \delta(x_1) K(x_1, x_2) \delta(x_2) \\
&\quad \left. \cdots \delta(x_n) K(x_b, x_a) \right\}. \quad 0 < t_1 < t_2 \cdots < \lambda,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^- &= \frac{-i}{2} \int d\lambda_0 \int Dx^1 \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} e^{i\lambda(p_0^2 - m^2)} \left\{ K(x_b, x_a, \lambda) \right. \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (iev_0)^n \int_0^\lambda dt_n \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \prod_{J=1}^N dx_J K(x_a, x_1) \delta(x_1) K(x_1, x_2) \delta(x_2) \\
&\quad \left. \cdots \delta(x_n) K(x_b, x_a) \right\}. \quad 0 < t_1 < t_2 \cdots < \lambda,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

avec

$$K(x_b, x_a, \lambda) = \int Dx^1 M(\lambda) \exp \left[i \int_0^\lambda \left(\frac{(\dot{x}^1)^2}{2} + eV_0(-2p_0 + eV_0)\theta(x) \right) d\tau \right]. \tag{4.37}$$

D'autre part, on remarque que

$$-i \int_0^{+\infty} d\lambda_0 e^{i\lambda(p_0^2 - m^2)} K(x_b, x_a, \lambda) = g^{KG}(x_b, x_a, p^0) \tag{4.38}$$

$g^{KG}(x_b, x_a, p^0)$ étant la fonction de Green de Klein Gordon pour le potentiel step dont le résultat est déjà calculé par la méthode combinatoire. Elle est donnée par exemple pour $E > m$ comme

$$g^{KG}(x_b, x_a, p^0) = \begin{cases} \frac{1}{r_1} \left[e^{ir_1|x_b - x_a|} + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} e^{-ir_1(x_b + x_a)} \right] & x_a < 0, x_b < 0 \\ \frac{1}{r_1 + r_2} e^{i(r_2 x_b - r_1 x_a)} & x_a < 0, x_b > 0 \\ \frac{1}{r_1 + r_2} e^{-i(r_1 x_b - r_2 x_a)} & x_a > 0, x_b < 0 \\ \frac{1}{r_2} \left[e^{ir_2|x_b - x_a|} - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} e^{ir_2(x_b + x_a)} \right] & x_a > 0, x_b > 0 \end{cases}, \tag{4.39}$$

où

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{E^2 - m^2} \\ r_2 &= \begin{cases} \sqrt{(E - eV_0)^2 - m^2} & \text{pour } E - eV_0 > 0 \\ -\sqrt{(E - eV_0)^2 - m^2} & \text{pour } E - eV_0 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Par conséquent le calcul de \tilde{G}^+ se réduit à

$$\begin{aligned} \tilde{G}^+ &= \frac{1}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} \left\{ g^{KG}(x_b, x_a, p^0) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (iev_0)^n \int_0^\lambda dt_n \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \prod_{J=1}^N dx_J g^{KG}(x_a, x_1) \delta(x_1) g^{KG}(x_1, x_2) \delta(x_2) \\ &\left. \cdots \delta(x_n) g^{KG}(x_b, x_a) \right\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Cette expression se calcule suivant la méthode des perturbations [14], et le résultat est

$$\tilde{G}^+ = \frac{1}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} \left\{ g^{KG}(x_b, x_a, p^0) + (eV_0) \frac{g^{KG}(x_b, 0, p^0) g^{KG}(0, x_a, p^0)}{1 - g^{KG}(0, 0, p^0) (eV_0)} \right\}. \quad (4.42)$$

De la même manière, \tilde{G}^- est donnée par

$$\tilde{G}^- = \frac{1}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} \left\{ g^{KG}(x_b, x_a, p^0) - (eV_0) \frac{g^{KG}(x_b, 0, p^0) g^{KG}(0, x_a, p^0)}{1 + g^{KG}(0, 0, p^0) (eV_0)} \right\}. \quad (4.43)$$

Choisissons Δ^+ et Δ^- comme suit

$$\Delta^+ = \tilde{G}^+ + \tilde{G}^-, \quad (4.44)$$

$$\Delta^- = \tilde{G}^+ - \tilde{G}^-. \quad (4.45)$$

Ce qui implique

$$\Delta^+ = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} \left[g^{KG}(x_b, x_a, p^0) + (eV_0)^2 \frac{g^{KG}(x_b, 0, p^0) g^{KG}(0, x_a, p^0) g^{KG}(0, 0, p^0)}{1 - (g^{KG})^2(0, 0, p^0) (eV_0)^2} \right] \quad (4.46)$$

$$\Delta^- = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} (eV_0) \frac{g^{KG}(x_b, 0, p^0) g^{KG}(0, x_a, p^0)}{1 - (g^{KG})^2(0, 0, p^0) (eV_0)^2}. \quad (4.47)$$

Par exemple, pour $x_a < 0, x_b > 0$, Δ^+ et Δ^- se simplifie à

$$\Delta_{-+}^+ = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} g_{-+}^{KG}(x_b, x_a, p^0) \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2 - (eV_0)^2} \quad (4.48)$$

$$\Delta_{-+}^- = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} g_{-+}^{KG}(x_b, x_a, p^0) \frac{(eV_0)(r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2 - (eV_0)^2} \quad (4.49)$$

En général, on a le résultat suivant

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} g^{KG}(x_b, x_a, p^0) \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2 - (eV_0)^2}, \\ \Delta^- &= \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} g^{KG}(x_b, x_a, p^0) \frac{(eV_0)(r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2 - (eV_0)^2}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Remplaçons ces résultats dans l'expression(4.30), il vient

$$\tilde{G}^c(x, y) = \tilde{G}^c(x_b, x_a, T) = \Delta^+ + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \Delta^-. \quad (4.51)$$

Le résultat de $\tilde{S}^c(x, y)$ sera alors

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x, y) &= \tilde{S}^c(x_b, x_a, T) \\ &= \left(\hat{\mathcal{T}} - m\gamma^5 \right)_b \tilde{G}^c(x_b, x_a, T) \\ &= \left\{ \tilde{\gamma}^0 (p_0 - eV_0 \theta(x)) - \tilde{\gamma}^1 p^1 - m\gamma^5 \right\}_b \tilde{G}^c(x, y) \\ &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \tilde{G}^c(x, y, T). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a, T) &= \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} \\ &\quad \times \frac{(r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2 - (eV_0)^2} [(r_1 + r_2) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 eV_0] g^{KG}(x_b, x_a, p^0). \end{aligned} \quad (4.53)$$

soit

$$\tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, p^0) = \frac{(r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2 - (eV_0)^2} [(r_1 + r_2) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 eV_0] g^{KG}(x_b, x_a, p^0). \quad (4.54)$$

Il vient

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a, T) = \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T} \tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, p^0). \quad (4.55)$$

Afin de déterminer les fonctions d'ondes, il est commode d'écrire $\tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, p^0)$ sous forme intégrale où les conditions sur E , x_b et x_a deviennent implicites. Cela peut être fait en utilisant le théorème des résidus.

L'astuce est de considérer l'intégrale de contour (c) dans le plan k complexe suivante

$$\tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, p^0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} dk \frac{\tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, k, E_k)}{P_0^2 - E_k^2}, \quad (4.56)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) &= \frac{(k + \acute{k})}{(k + \acute{k})^2 - (eV_0)^2} \left[(k + \acute{k}) + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 eV_0 \right] \\ &\times \left\{ \theta(x_b) \theta(-x_a) \frac{2k}{k + \acute{k}} e^{ikx_b - ikx_a} + \theta(-x_b) \theta(x_a) \frac{2\acute{k}}{\acute{k} + k} e^{i\acute{k}x_a - i\acute{k}x_b} \right. \\ &+ \theta(x_b) \theta(x_a) \left(\frac{k}{\acute{k}} e^{-i\acute{k}(x_b - x_a)} - \frac{k\acute{k} - \acute{k}}{\acute{k}k + k} e^{i\acute{k}(x_b + x_a)} \right) \\ &\left. + \theta(-x_b) \theta(-x_a) \left(e^{ik(x_b - x_a)} + \frac{k\acute{k} - \acute{k}}{\acute{k}k + k} e^{-i\acute{k}(x_b + x_a)} \right) \right\}, \quad (4.57) \end{aligned}$$

et

$$E_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad \acute{k} = \begin{cases} \sqrt{(E_k - eV_0 \theta(x_b))^2 - m^2} & E_k - eV_0 > 0 \\ -\sqrt{(E_k - eV_0 \theta(x_b))^2 - m^2} & E_k - eV_0 < 0 \end{cases}, \quad (4.58)$$

donc

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b, x_a, T) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \oint_{(c)} dk \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{ip_0 T}}{P_0^2 - E_k^2} \\
&\times \left\{ \theta(x_b) \theta(-x_a) \frac{2k}{k + \acute{k}} e^{ikx_b - ikx_a} + \theta(-x_b) \theta(x_a) \frac{2k}{k + \acute{k}} e^{ikx_a - ikx_b} \right. \\
&+ \theta(x_b) \theta(x_a) \left(\frac{k}{\acute{k}} e^{-ik(x_b - x_a)} - \frac{k}{\acute{k}} \frac{k - \acute{k}}{k + \acute{k}} e^{ik(x_b + x_a)} \right) \\
&\left. + \theta(-x_b) \theta(-x_a) \left(e^{ik(x_b - x_a)} + \frac{k}{\acute{k}} \frac{k - \acute{k}}{k + \acute{k}} e^{-ik(x_b + x_a)} \right) \right\}. \quad (4.59)
\end{aligned}$$

Changeons p_0 par $-p_0$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b, x_a, T) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \oint_{(c)} dk \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{P_0^2 - E_k^2} \\
&\times \left\{ \theta(x_b) \theta(-x_a) \frac{2k}{k + \acute{k}} e^{ikx_b - ikx_a} + \theta(-x_b) \theta(x_a) \frac{2k}{k + \acute{k}} e^{ikx_a - ikx_b} \right. \\
&+ \theta(x_b) \theta(x_a) \left(\frac{k}{\acute{k}} e^{-ik(x_b - x_a)} - \frac{k}{\acute{k}} \frac{k - \acute{k}}{k + \acute{k}} e^{ik(x_b + x_a)} \right) \\
&\left. + \theta(-x_b) \theta(-x_a) \left(e^{ik(x_b - x_a)} + \frac{k}{\acute{k}} \frac{k - \acute{k}}{k + \acute{k}} e^{-ik(x_b + x_a)} \right) \right\}. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Nous allons ensuite réaliser l'intégration sur p_0 , en traitant séparément les cas $T > 0$ et $T < 0$.

L'astuce est de considérer l'intégrale de contour dans le plan E_k complexe

$$\tilde{S}^c(x_b, x_a, T) = \frac{i}{(2\pi)^2} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \quad (4.61)$$

$$\times \oint_{(c)} dk \oint_{(\acute{c})} \frac{dp_0}{2E_k} e^{-ip_0 T} \tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) \left[\frac{1}{p_0 - E_k} - \frac{1}{p_0 + E_k} \right], \quad (4.62)$$

où (\acute{c}) est un contour fermé à définir et $E_k = \sqrt{k^2 + m^2 - i\varepsilon}$. Notez que $\text{Im}E_k < 0$.

$$\oint_{(\acute{c})} \frac{dp_0}{2E_k} e^{-ip_0 T} \left[\frac{1}{p_0 - E_k} - \frac{1}{p_0 + E_k} \right] = 2\pi i (\text{Sgn}_{(\acute{c})}) \sum \text{Rés.}, \quad (4.63)$$

où $\text{Sgn}_{(\acute{c})}$ est un signe indiquant l'orientation de la courbe (\acute{c}) et $\sum \text{Rés.}$ est la somme des résidus des pôles en $p_0 = +E_k$ et $p_0 = -E_k$ à l'intérieur de (\acute{c})

$$p_0 = +E_k : \text{Rés.} = \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k T} \quad (4.64)$$

$$p_0 = -E_k : \text{Rés.} = \frac{-1}{2E_k} e^{iE_k T}. \quad (4.65)$$

Supposons premièrement que $T > 0$. On choisit un contour qui parcourt l'axe réel croissant et se referme par un demi-cercle de rayon dans le demi-plan inférieur. Dans ce cas, (\hat{c}) ne contient que le pôle en $p_0 = +E_k$.

Si par contre $T < 0$, on prend un contour qui parcourt l'axe réel croissant et se referme par un demi-cercle de rayon dans le demi-plan supérieur. A ce niveau (\hat{c}) ne contient que le pôle en $p_0 = -E_k$.

Après l'intégration, on prend la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a, T) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \\ &\times \oint_{(c)} dk \left[\frac{\theta(T)}{2E_k} e^{-iE_k T} + \frac{\theta(-T)}{2E_k} e^{iE_k T} \right] \tilde{g}^{KG}(x_b, x_a, k, E_k), \quad (4.66) \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a, T) &= \frac{-1}{2\pi} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \\ &\times \left\{ \int_0^{k_2} dk \left[\frac{\theta(T)}{2E_k} e^{-iE_k T} + \frac{\theta(-T)}{2E_k} e^{iE_k T} \right] \tilde{g}_1^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) \right. \\ &+ \int_{k_2}^{k_1} dk \left[\frac{\theta(T)}{2E_k} e^{-iE_k T} + \frac{\theta(-T)}{2E_k} e^{iE_k T} \right] \tilde{g}_2^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) \\ &\left. + \int_{k_1}^{+\infty} dk \left[\frac{\theta(T)}{2E_k} e^{-iE_k T} + \frac{\theta(-T)}{2E_k} e^{iE_k T} \right] \tilde{g}_3^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) \right\}. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Notons que pour les valeurs négatives de k , on change k par $-k$ alors \hat{k} devient respectivement $-\hat{k}$ pour les valeurs réelles et \hat{k} pour les valeurs imaginaires.

Nous séparons l'étude suivant les valeurs de (eV_0) :

1) Le premier domaine est défini par $(eV_0 > 2m)$

Nous avons \acute{k} réel pour $k \in]-\infty, -k_1[\cup]-k_2, k_2[\cup]k_1, +\infty[$, et imaginaire pour $k \in]-k_1, -k_2[\cup]k_2, k_1[$

2) Le deuxième domaine est défini par ($eV_0 < 2m$)

Nous avons \acute{k} réel pour $k \in]-\infty, -k_1[\cup]k_1, +\infty[$, et imaginaire pour $k \in]-k_1, k_1[$, avec k_1 et k_2 sont définis respectivement comme

$$k_1 = \sqrt{eV_0(eV_0 + 2m)} \quad \text{et} \quad k_2 = \sqrt{eV_0(eV_0 - 2m)}. \quad (4.68)$$

Changeons la variable d'intégration k par l'énergie $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a, T) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right\} \\ & \times \left[\left\{ \int_m^{eV_0-m} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} + \theta(-T) e^{iE_k T}] \tilde{g}_1^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) + c.c \right\} \right. \\ & + \left\{ \int_{eV_0-m}^{eV_0+m} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} + \theta(-T) e^{iE_k T}] \tilde{g}_2^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) + c.c \right\} \\ & \left. + \left\{ \int_{eV_0+m}^{+\infty} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} + \theta(-T) e^{iE_k T}] \tilde{g}_3^{KG}(x_b, x_a, k, E_k) + c.c \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Limitant l'étude au premier domaine ($eV_0 > 2m$), \acute{k} prenant les valeurs suivantes

$$\acute{k} = \begin{cases} \sqrt{(E_k - eV_0 \theta(x_b))^2 - m^2} & \text{pour } k \in [0, k_2] \\ i\sqrt{m^2 - (E_k - eV_0 \theta(x_b))^2} & \text{pour } k \in [k_2, k_1] \\ -\sqrt{(E_k - eV_0 \theta(x_b))^2 - m^2} & \text{pour } k \in [k_1, +\infty] \end{cases} \quad (4.70)$$

On peut $\tilde{S}^c(x_b, x_a, T)$ se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_b, x_a, T) = & \frac{1}{2\pi} \left[\left\{ \int_m^{eV_0-m} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} \tilde{g}_{1+}^{KG} + \theta(-T) e^{iE_k T} \tilde{g}_{1-}^{KG}] + c.c \right\} \right. \\ & + \left\{ \int_{eV_0-m}^{eV_0+m} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} \tilde{g}_{2+}^{KG} + \theta(-T) e^{iE_k T} \tilde{g}_{2-}^{KG}] + c.c \right\} \\ & \left. + \left\{ \int_{eV_0+m}^{+\infty} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} \tilde{g}_{3+}^{KG} + \theta(-T) e^{iE_k T} \tilde{g}_{3-}^{KG}] + c.c \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

avec

$$\tilde{g}_{1+}^{KG} = \left(\tilde{\gamma}^0 E_k + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right) \tilde{g}_1^{KG}(x_b, x_a, k, E_k), \quad (4.72)$$

$$\tilde{g}_{1-}^{KG} = \left(-\tilde{\gamma}^0 E_k + i\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x_b} - \tilde{\gamma}^0 eV_0 \theta(x_b) - m\gamma^5 \right) \tilde{g}_1^{KG}(x_b, x_a, k, E_k). \quad (4.73)$$

Pour déterminer $S^c(x_b, x_a, T)$ appliquons la transformation suivante

$$\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu \quad (4.74)$$

$$-S^c(x_b, x_a, T) = \tilde{S}^c(x, y) \gamma^5 \quad (4.75)$$

Choisissons les matrices de Pauli 2×2

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i\sigma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

ce qui permet d'écrire $S^c(x_b, x_a, T)$ sous forme matricielle

$$\begin{aligned} S^c(x_b, x_a, T) = & \frac{1}{2\pi} \left[\left\{ \int_m^{eV_0-m} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} g_{1+}^{KG} + \theta(-T) e^{iE_k T} g_{1-}^{KG}] + c.c \right\} \right. \\ & + \left\{ \int_{eV_0-m}^{eV_0+m} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} g_{2+}^{KG} + \theta(-T) e^{iE_k T} g_{2-}^{KG}] + c.c \right\} \\ & \left. + \left\{ \int_{eV_0+m}^{+\infty} \frac{dE_k}{k} [\theta(T) e^{-iE_k T} g_{3+}^{KG} + \theta(-T) e^{iE_k T} g_{3-}^{KG}] + c.c \right\} \right], \quad (4.77) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} g_{1+}^{KG} = & \frac{(k - \acute{k})^2}{(k - \acute{k})^2 - (eV_0)^2} \left[\left\{ \theta(x_b) \theta(-x_a) \frac{2k}{k - \acute{k}} e^{-ikx_b - ikx_a} \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta(-x_b) \theta(x_a) \frac{2k}{k - \acute{k}} e^{-ikx_a - ikx_b} - \theta(x_b) \theta(x_a) \left[\frac{k}{\acute{k}} e^{-ik(x_b - x_a)} - \frac{k}{\acute{k}} \frac{k + \acute{k}}{k - \acute{k}} e^{-ik(x_b + x_a)} \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\theta(-x_b)\theta(-x_a)\left[e^{-ik(x_b-x_a)} + \frac{k+\acute{k}}{k-\acute{k}}e^{-ik(x_b+x_a)}\right]\} \\
& \times \begin{pmatrix} E_k - eV_0\theta(x_b) + m & i\acute{k} \\ i\acute{k} & E_k - eV_0\theta(x_b) - m \end{pmatrix} \\
& +c.c \begin{pmatrix} E_k - eV_0\theta(x_b) + m & -i\acute{k} \\ -i\acute{k} & E_k - eV_0\theta(x_b) - m \end{pmatrix} \\
& + \frac{(k-\acute{k})(eV_0)}{(k-\acute{k})^2 - (eV_0)^2} \left[\left\{ \theta(x_b)\theta(-x_a) \frac{2k}{k-\acute{k}} e^{-ikx_b-ikx_a} + \theta(-x_b)\theta(x_a) \frac{2k}{k-\acute{k}} e^{-ikx_a-ikx_b} \right. \right. \\
& \left. \left. - \theta(x_b)\theta(x_a) \left[\frac{k}{\acute{k}} e^{-ik(x_b-x_a)} - \frac{k}{\acute{k}} \frac{k+\acute{k}}{k-\acute{k}} e^{-ik(x_b+x_a)} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \theta(-x_b)\theta(-x_a) \left[e^{-ik(x_b-x_a)} + \frac{k+\acute{k}}{k-\acute{k}} e^{-ik(x_b+x_a)} \right] \right\} \right. \\
& \times \begin{pmatrix} -\acute{k} & -i(E_k - eV_0\theta(x_b) + m) \\ -i(E_k - eV_0\theta(x_b) - m) & +\acute{k} \end{pmatrix} \\
& \left. +c.c \begin{pmatrix} \acute{k} & -i(E_k - eV_0\theta(x_b) + m) \\ -i(E_k - eV_0\theta(x_b) - m) & -\acute{k} \end{pmatrix} \right) \quad (4.78)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g_{1-}^{KG} &= \frac{(k-\acute{k})^2}{(k-\acute{k})^2 - (eV_0)^2} \left\{ \theta(x_b)\theta(-x_a) \frac{2k}{k-\acute{k}} e^{-ikx_b-ikx_a} \right. \\
& \left. + \theta(-x_b)\theta(x_a) \frac{2k}{k-\acute{k}} e^{-ikx_a-ikx_b} - \theta(x_b)\theta(x_a) \left[\frac{k}{\acute{k}} e^{-ik(x_b-x_a)} - \frac{k}{\acute{k}} \frac{k+\acute{k}}{k-\acute{k}} e^{-ik(x_b+x_a)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\theta(-x_b)\theta(-x_a) \left[e^{-ik(x_b-x_a)} + \frac{k+\hat{k}}{k-\hat{k}} e^{-ik(x_b+x_a)} \right] \Big\} \\
& \times \begin{pmatrix} -E_k - eV_0\theta(x_b) + m & i\hat{k} \\ i\hat{k} & -E_k - eV_0\theta(x_b) - m \end{pmatrix} \\
& +c.c \begin{pmatrix} -E_k - eV_0\theta(x_b) + m & -i\hat{k} \\ -i\hat{k} & E_k - eV_0\theta(x_b) - m \end{pmatrix} \\
& + \frac{(k-\hat{k})(eV_0)}{(k-\hat{k})^2 - (eV_0)^2} \left\{ \theta(x_b)\theta(-x_a) \frac{2k}{k-\hat{k}} e^{-ikx_b-ikx_a} + \theta(-x_b)\theta(x_a) \frac{2k}{k-\hat{k}} e^{-ikx_a-ikx_b} \right. \\
& \left. - \theta(x_b)\theta(x_a) \left[\frac{k}{\hat{k}} e^{-ik(x_b-x_a)} - \frac{k+\hat{k}}{\hat{k}k-\hat{k}} e^{-ik(x_b+x_a)} \right] \right. \\
& \left. +\theta(-x_b)\theta(-x_a) \left[e^{-ik(x_b-x_a)} + \frac{k+\hat{k}}{k-\hat{k}} e^{-ik(x_b+x_a)} \right] \right\} \\
& \times \begin{pmatrix} -\hat{k} & -i(-E_k - eV_0\theta(x_b) + m) \\ -i(-E_k - eV_0\theta(x_b) - m) & +\hat{k} \end{pmatrix} \\
& +c.c \begin{pmatrix} \hat{k} & -i(-E_k - eV_0\theta(x_b) + m) \\ -i(-E_k - eV_0\theta(x_b) - m) & -\hat{k} \end{pmatrix} \Big] \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Les g_{2+}^{KG} , g_{3+}^{KG} ont la même forme que g_{1+}^{KG} et g_{2-}^{KG} , g_{3-}^{KG} ont la même forme que g_{1-}^{KG} .

Arrivé à ce stade, il ne reste que la séparation de cette forme matricielle de la fonction de Green en fonctions d'onde à énergie positive et négative. Ceci n'est pas en général facile à réaliser vue la forme compliquée des matrices. La démarche à suivre est diagonaliser ces matrices d'abord pour pouvoir en extraire les projecteurs nécessaires à cette décomposition.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié deux problèmes :

-l'oscillateur de Dirac

-le potentiel step

par le formalisme supersymétrique de Fradkin-Gitman.

Ce formalisme exprime la fonction de Green du problème en terme de chemins en suivant l'esprit de Feynman.

On a commencé par un rappel clair et concis sur l'OD, suivi par l'exposé la méthode de Fradkin-Gitman de façon détaillé. Le calcul du propagateur a été fait suivant la représentation dite globale consistant à étudier la dynamique du système équivalente à celle de Klein-Gordon puis de projeter cette dernière sur celle de Dirac via l'opérateur fermionique.

Nous avons montré que :

Pour le premier problème dans le cas de la dimension un, la fonction de Green qui est une somme sur une infinité de chemins a été réduite à la contribution du chemin classique. A ce moment le calcul explicite de la fonction de Green devient possible et les fonctions d'ondes sont facilement déterminées. Les résultats obtenus pour ce cas sont en accord avec ceux obtenus par autres auteurs utilisant différentes méthodes.

Le cas de la dimension deux s'est avéré difficile à cause du couplage spin-orbite. Le calcul est apparemment faisable mais reste la manière pour retrouver le spectre et les fonctions d'onde.

Dans le deuxième problème, la recherche de la solution du problème a été subdivisée en deux étapes fondamentales :

1-methode de perturbation pour la fonction delta, traitant le couplage spin-champ

2-la méthode combinatoire pour le potentiel step.

Ces deux techniques sont nécessaires pour que la fonction de Green correspondante au step soit déterminée explicitement.

Les problèmes sur lesquelles on a buté durant ce mémoire sont le couplage spin-orbite pour l'oscillateur à deux dimension et décomposition spectrale de la fonction de Green relative au potentiel step.

Une fois ces deux problèmes sont surmonté, il nous reste alors d'étendre ce calcul au cas de la projection locale où l'opérateur fermionique devient dynamique et les calculs deviennent inextricables, et au cas de la dimension deux.

Annexe A

matrices inverses $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$

Le but de cette section est de calculer l'inverse d'une matrice continue et d'un déterminant continu.

1) Pour l'oscillateur de Dirac à la dimension un on a : $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $G_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ donnés par (3.61). Pour ce faire introduisons une nouvelle matrice $\Omega_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ suivant

$$\Omega_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \int_0^1 \varepsilon(\tau - \lambda) \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}(\lambda, \hat{\tau}) d\lambda. \quad (\text{A.1})$$

qui permet d'écrire

$$G_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \Omega_{\alpha\beta}(\tau, s) \varepsilon(s - \hat{\tau}) ds. \quad (\text{A.2})$$

Pour notre cas, on a

$$\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) = \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \eta_{\mu\nu} - \alpha \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon(\tau_1 - \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{A.3})$$

L'inverse de la matrice $\Lambda_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ doit satisfaire à

$$\int_0^1 \Lambda_{\mu\nu}(\tau, s) (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_{\mu}^{\beta} \delta(\tau - \hat{\tau}), \quad (\text{A.4})$$

donc

$$\int_0^1 ds \left[\eta_{\mu\nu} \varepsilon(\tau - s) - \alpha \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon(\tau_1 - s) d\tau_1 \right] (\Lambda^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_{\mu}^{\beta} \delta(\tau - \hat{\tau}), \quad (\text{A.5})$$

et

$$\int_0^1 ds \left[\varepsilon(\tau - s) \Lambda_{\mu\beta}^{-1}(s, \dot{\tau}) - \alpha \int_0^1 d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu} \varepsilon(\tau_1 - s) (\Lambda_{\beta}^{\nu})^{-1}(s, \dot{\tau}) \right] = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \dot{\tau}). \quad (\text{A.6})$$

Portant (A.1) dans (A.6)

$$\Omega_{\mu\beta}(\tau, \dot{\tau}) - \alpha \int_0^1 d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu} \Omega_{\beta}^{\nu}(\tau, \dot{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \dot{\tau}). \quad (\text{A.7})$$

cette équation sera équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\Omega_{\mu\beta}(\tau, \dot{\tau})}{d\tau} - 2\alpha \mathcal{F}_{\mu\nu} \Omega_{\beta}^{\nu}(\tau, \dot{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \frac{d\delta(\tau - \dot{\tau})}{d\tau}, \quad (\text{A.8})$$

avec la condition initiale

$$\Omega_{\mu\beta}(0, \dot{\tau}) + \alpha \int_0^1 d\tau_1 \mathcal{F}_{\mu\nu} \Omega_{\beta}^{\nu}(\tau_1, \dot{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\dot{\tau}). \quad (\text{A.9})$$

Insérons la solution générale

$$\Omega(\tau, \dot{\tau}) = e^{2\alpha\mathcal{F}\tau} c(\tau, \dot{\tau}). \quad (\text{A.10})$$

dans (A.8), on déduit

$$c(s, \dot{\tau}) = \int_0^s e^{-2\alpha\mathcal{F}\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta(\lambda - \dot{\tau}) + c(\dot{\tau}), \quad (\text{A.11})$$

et donc (A.10) devient

$$\Omega(\tau, \dot{\tau}) = e^{2\alpha\mathcal{F}\tau} [c(\dot{\tau}) - \delta(\dot{\tau})] + \delta(\tau - \dot{\tau}) + 2\alpha\mathcal{F}\theta(\tau - \dot{\tau}) e^{2\alpha\mathcal{F}(\tau - \dot{\tau})}. \quad (\text{A.12})$$

Utilisons la condition initiale (A.9) et prenons en considération $\Omega_{\alpha\beta}(0, \dot{\tau}) = c(\dot{\tau})$ il vient

$$c(\dot{\tau}) - \delta(\dot{\tau}) = \frac{-2\alpha\mathcal{F}e^{2\alpha\mathcal{F}}}{1 + e^{2\alpha\mathcal{F}}} e^{-2\alpha\mathcal{F}\dot{\tau}}. \quad (\text{A.13})$$

Substituons (A.13) dans (A.12) nous aurons

$$\Omega(\tau, \hat{\tau}) = \delta(\tau - \hat{\tau}) + \alpha \mathcal{F} e^{2\alpha \mathcal{F}(\tau - \hat{\tau})} [\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \alpha \mathcal{F}]. \quad (\text{A.14})$$

Substituons (A.12) dans (A.2) on obtient

$$G(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} e^{2\alpha \mathcal{F}(\tau - \hat{\tau})} [\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \alpha \mathcal{F}]. \quad (\text{A.15})$$

Dérivons la relation (A.1) par rapport à τ , la matrice inverse s'obtient comme

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\tau, \hat{\tau}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\tau, \hat{\tau})}{\partial \tau} \\ &= \varepsilon^{-1}(\tau, \hat{\tau}) + (\alpha \mathcal{F})^2 e^{2\alpha \mathcal{F}(\tau - \hat{\tau})} [\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \alpha \mathcal{F}] \\ &\quad + \alpha \mathcal{F} e^{2\alpha \mathcal{F}(\tau - \hat{\tau})} \delta(\tau - \hat{\tau}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

2) Pour l'oscillateur de Dirac à la dimension deux on a : $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $M_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ données par (3.120). Pour ce faire introduisons une nouvelle matrice $\hat{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ suivant

$$\hat{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{R}_{\alpha\beta}^{-1}(\tau_1, \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{A.17})$$

Ce qui permet d'écrire

$$M_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, s) \varepsilon(s - \hat{\tau}) ds. \quad (\text{A.18})$$

Dans notre cas on a

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) = \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \eta_{\mu\nu} - 2\alpha \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau_1) (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{A.19})$$

L'inverse de la matrice $\mathcal{L}_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ doit satisfaire à

$$\int_0^1 \mathcal{R}_{\mu\nu}(\tau, s) (\mathcal{R}^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_{\mu}^{\beta} \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (\text{A.20})$$

et donc

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 ds \left[\eta_{\mu\nu} \varepsilon(\tau - s) - 2\alpha \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau_1) (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) d\tau_1 \right] (\mathcal{R}^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) \\
&= \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \tag{A.21a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 ds \left[\varepsilon(\tau - s) \mathcal{R}_{\mu\beta}^{-1}(s, \hat{\tau}) - e \int_0^1 d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) (\mathcal{R}_\beta^\nu)^{-1}(s, \hat{\tau}) \right] \\
&= \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \hat{\tau}). \tag{A.22a}
\end{aligned}$$

Portants (A.17) dans (A.22a)

$$\hat{\Omega}_{\mu\beta}(\tau, \hat{\tau}) - 2\alpha \int_0^1 d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \hat{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \hat{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \hat{\tau}). \tag{A.23a}$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\hat{\Omega}_{\mu\beta}(\tau, \hat{\tau})}{d\tau} - 4\alpha (1 + f^*(\tau)) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) \hat{\Omega}_\beta^\nu(\tau, \hat{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \frac{d\delta(\tau - \hat{\tau})}{d\tau}. \tag{A.24a}$$

avec la condition initiale

$$\hat{\Omega}_{\mu\beta}(0, \hat{\tau}) + 2\alpha \int_0^1 d\tau_1 (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \hat{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \hat{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\hat{\tau}). \tag{A.25}$$

Insérons la solution générale donnée par

$$\hat{\Omega}(\tau, \hat{\tau}) = e^{4\alpha \int_0^\tau d\tau_1 (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1)} \hat{c}(\tau, \hat{\tau}). \tag{A.26a}$$

dans (A.24a), on déduit

$$\hat{c}(s, \hat{\tau}) = \int_0^s e^{-4\alpha \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \hat{\tau}) d\tau + \hat{c}(\hat{\tau}). \tag{A.27}$$

Par conséquent, (A.26a) devient

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(\tau, \hat{\tau}) = & e^{4\alpha \int_0^\tau d\tau_1 (1+f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1)} [\hat{c}(\hat{\tau}) - \delta(\hat{\tau})] + \delta(\tau - \hat{\tau}) + 4\alpha (1 + f^*(\hat{\tau})) \mathcal{F}(\hat{\tau}) \theta(\tau - \hat{\tau}) \\ & \times e^{-4\alpha \int_0^{\hat{\tau}} d\tau_1 (1+f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1)} e^{4\alpha \int_0^\tau d\tau_1 (1+f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1)} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Utilisons la condition initiale (A.25) et prenons en considération $\hat{\Omega}_{\mu\beta}(0, \hat{\tau}) = \hat{c}(\hat{\tau})$

$$\hat{c}(\hat{\tau}) - \delta(\hat{\tau}) = -2\alpha \frac{V^{-1}(\hat{\tau}) V(1)}{1 + V(1)} (1 + f^*(\hat{\tau})) \mathcal{F}(\hat{\tau}), \quad (\text{A.29})$$

où

$$V(1) = e^{2\alpha \int_0^1 d\tau_1 (1+f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1)}, \quad (\text{A.30})$$

$$V^{-1}(1) = e^{-2\alpha \int_0^1 d\tau_1 (1+f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1)}. \quad (\text{A.31})$$

Puis substituons (A.29) dans (A.28)

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(\tau, \hat{\tau}) = & \delta(\tau - \hat{\tau}) + \left\{ 2\alpha V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(2\alpha \int_0^1 d\tau_1 (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] \right. \\ & \left. \times V^{-1}(\hat{\tau}) (1 + f^*(\hat{\tau})) \mathcal{F}(\hat{\tau}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

et (A.32) dans (A.18) on obtient

$$M(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) - \tanh \left(2\alpha \int_0^1 d\tau_1 (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{\tau}). \quad (\text{A.33})$$

Dérivons la relation (A.17) par rapport à τ , la matrice inverse s'obtient comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{-1}(\tau, \hat{\tau}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\Omega}(\tau, \hat{\tau})}{\partial \tau} \\
&= \varepsilon^{-1}(\tau, \hat{\tau}) + \left\{ (2\alpha)^2 (1 + f^*(\tau)) \mathcal{F}(\tau) V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tanh \left(2\alpha \int_0^1 d\tau_1 (1 + f^*(\tau_1)) \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \times V^{-1}(\hat{\tau}) (1 + f^*(\hat{\tau})) \mathcal{F}(\hat{\tau}) \right\} + 2\alpha V(\tau) \delta(\tau - \hat{\tau}) V^{-1}(\hat{\tau}) (1 + f^*(\hat{\tau})) \mathcal{F}(\hat{\tau}).
\end{aligned}
\tag{A.34}$$

Annexe B

matrice inverse $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$

Pour le potentiel step on a : $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \hat{\tau})$ et $\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ données par (4.22). Pour ce faire introduisons une nouvelle matrice $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau})$ suivant

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{-1}(\tau_1, \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{B.1})$$

Ce qui permet d'écrire

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \hat{\tau}) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(\tau, s) \varepsilon(s - \hat{\tau}) ds. \quad (\text{B.2})$$

Dans notre cas on a

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau}) = \varepsilon(\tau - \hat{\tau}) \eta_{\mu\nu} - e \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - \hat{\tau}) d\tau_1. \quad (\text{B.3})$$

L'inverse de la matrice $\mathcal{L}_{\mu\nu}(\tau, \hat{\tau})$ doit satisfaire à

$$\int_0^\lambda \mathcal{L}_{\mu\nu}(\tau, s) (\mathcal{L}^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (\text{B.4})$$

et donc

$$\int_0^\lambda ds \left[\eta_{\mu\beta} \varepsilon(\tau - s) - e \int_0^\lambda \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) d\tau_1 \right] (\mathcal{L}^{\nu\beta})^{-1}(s, \hat{\tau}) = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \hat{\tau}). \quad (\text{B.5a})$$

$$\int_0^\lambda ds \left[\varepsilon(\tau - s) \mathcal{L}_{\mu\beta}^{-1}(s, \dot{\tau}) - e \int_0^\lambda d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \varepsilon(\tau_1 - s) (\mathcal{L}_\beta^\nu)^{-1}(s, \dot{\tau}) \right] = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \dot{\tau}). \quad (\text{B.6a})$$

Portants (B.1) dans (B.6a)

$$\tilde{\Omega}_{\mu\beta}(\tau, \dot{\tau}) - e \int_0^\lambda d\tau_1 \varepsilon(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \dot{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\tau - \dot{\tau}). \quad (\text{B.7a})$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{\mu\beta}(\tau, \dot{\tau})}{d\tau} - 2e\mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau, \dot{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \frac{d\delta(\tau - \dot{\tau})}{d\tau}, \quad (\text{B.8a})$$

avec la condition initiale

$$\tilde{\Omega}_{\mu\beta}(0, \dot{\tau}) + e \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1) \tilde{\Omega}_\beta^\nu(\tau_1, \dot{\tau}) = \eta_{\mu\beta} \delta(\dot{\tau}). \quad (\text{B.9})$$

Insérons la solution générale donnée par

$$\tilde{\Omega}(\tau, \dot{\tau}) = e^{2e \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \tilde{c}(\tau, \dot{\tau}). \quad (\text{B.10a})$$

dans (B.8a), on déduit

$$\tilde{c}(s, \dot{\tau}) = \int_0^s e^{-2e \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \dot{\tau}) d\tau + \tilde{c}(\dot{\tau}). \quad (\text{B.11})$$

Par conséquent, (B.10a) devient

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\tau, \dot{\tau}) = & e^{2e \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} [\tilde{c}(\dot{\tau}) - \delta(\dot{\tau})] + \delta(\tau - \dot{\tau}) + 2e\mathcal{F}(\dot{\tau})\theta(\tau - \dot{\tau}) \\ & \times e^{-2e \int_0^{\dot{\tau}} d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} e^{2e \int_0^\tau d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Utilisons la condition initiale (B.9) et prenons en considération $\tilde{\Omega}_{\mu\beta}(0, \dot{\tau}) = \tilde{c}(\dot{\tau})$

$$\tilde{c}(\hat{t}) - \delta(\hat{t}) = -e \frac{V^{-1}(\hat{t}) V(\lambda)}{1 + V(\lambda)} \mathcal{F}(\hat{t}), \quad (\text{B.13})$$

où

$$V(\lambda) = e^{2e \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)}, \quad (\text{B.14})$$

$$V^{-1}(\lambda) = e^{-2e \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1)}. \quad (\text{B.15})$$

Puis substituons (B.13) dans (B.12)

$$\tilde{\Omega}(\tau, \hat{t}) = \delta(\tau - \hat{t}) + eV(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{t}) - \tanh \left(e \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{t}) \mathcal{F}(\hat{t}), \quad (\text{B.16})$$

et (B.16) dans (B.2) on obtient

$$\Gamma(\tau, \hat{t}) = \frac{1}{2} V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{t}) - \tanh \left(e \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{t}). \quad (\text{B.17})$$

Dérivons la relation (B.1) par rapport à τ , la matrice inverse s'obtient comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\tau, \hat{t}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Omega}(\tau, \hat{t})}{\partial \tau} \\ &= \varepsilon^{-1}(\tau, \hat{t}) + e^2 \mathcal{F}(\tau) V(\tau) \left[\varepsilon(\tau - \hat{t}) - \tanh \left(e \int_0^\lambda d\tau_1 \mathcal{F}(\tau_1) \right) \right] V^{-1}(\hat{t}) \mathcal{F}(\hat{t}) \\ &\quad + eV(\tau) \delta(\tau - \hat{t}) V^{-1}(\hat{t}) \mathcal{F}(\hat{t}). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Bibliographie

- [1] S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, (1994).
- [2] M. Moshinsky and Y. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics* Harwood Academic Publishers, The Netherlands 1996. pp. 289-404.
- [3] R P Martinez-y-Romero et al 1995 *Eur. J. Phys.* 16 135-141.
- [4] M. Moschinsky and A Szczepaniak, *J. Phys. A* 22, (1989) L817.
- [5] Radosław Szmytkowski and Marek Gruchowski, *J. Phys. A : Math. Gen.* **34** (2001). 4991-4997.
- [6] V. M. Villalba and A. Rincon Maggiolo, *Euro. Phys. J. B* **22**, 31-35 (2001).
- [7] E. S. Fradkin and Gitman, *Phys. Rev. D* 44 3320 (1991).
- [8] C. Grosche, *An Introduction into the Feynman Path Integral*, amstex, Leipzig University preprint NTZ Nr.29/92 [arXiv :hep-th/9302097].
- [9] da Cruz W 1997 *Braz. J. Phys. A : Math. Gen.* 30 (1997) 5225-5238.
- [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, NewYork, 1979.
- [11] Papadopoulos, G. J., *J. Math. Phys.* 27, 221 (1986).
- [12] T. Boudjedaa, L. Chetouani, M. Merad, *II Nuovo Cimento B* 114 (11) (1999) 1261.
- [13] R. E. Crandall, *J. Phys. A* 26 (1993) 3627.
- [14] C. Grosche and Steiner, *Handbook of Feynman Path Integral*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998.

Résumé :

Dans ce mémoire nous avons étudié deux problèmes : l'oscillateur de Dirac et la particule de Dirac en interaction avec le potentiel step suivant le formalisme supersymétrique proposé par Fradkin-Gitman dans la représentation globale. Nous avons d'abord construit le propagateur relatif à l'oscillateur de Dirac. Au cas d'une dimension, toutes les intégrations fonctionnelles ont été effectuées et les fonctions d'ondes ont été déterminées. Ce même calcul est étendu à la dimension deux. Pour le potentiel scalaire step, nous avons utilisé deux méthodes :

La méthode combinatoire pour le step et la méthode de perturbation pour la fonction delta qui apparaît dans le couplage spin-champ. Ces méthodes ont permis de déduire la fonction de Green correspondante.

Mots clés: Intégral de chemins, Fonction de Green, Oscillateur de Dirac, supersymétrie.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة هزاز ديراك وجسيمة ديراك المتفاعلة مع الدرج الكموني السلمي و فوق المسقط الشمولي متبعين طريقة Fradkin-Gitman . لقد قمنا أولاً بتشكيل معامل الإنتشار الخاص بهزاز ديراك. في حالة بعد واحد، كل التكاملات الدالية قد تم حسابها وكذلك قد تم استنتاج دوال الموجة الموافقة لهزاز ديراك. نفس طريقة الحساب قد تم إتباعها في حالة بعدين.

أما بالنسبة للدرج الكموني السلمي، لقد قمنا باستخدام طريقتين في الحساب: الطريقة التركيبية بالنسبة للدرج و طريقة الإضطرابات بالنسبة لدالة ديراك التي تظهر من الربط سبين-حقل. هذه الطرق سمحت لنا باستنتاج دالة غرين الموافقة.

كلمات المفاتيح: تكامل المسالك، دالة غرين، هزاز ديراك، التناظر التام.

Abstract:

In this memory, we studied two problems: The Dirac oscillator and the Dirac particle in interaction with the step potential according to supersymmetric formalism proposed by Fradkin-Gitman in global representation. We first constructed the propagator relating to Dirac oscillator. In the one-dimensional case, all functional integrations have been done and wave's functions have been determined. This same calculation is extended for the two-dimensional case.

About the step scalar potential, we used two methods:

The combinatorial method for the step and the perturbation method for the delta function, which appears from spin-field coupling. These methods have permit to deducing the corresponding Green's function.

Key words: Path integral, Green's function, Dirac oscillator, supersymmetry.