

المكتبة المركزية  
TH-062

530.1/19

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

**MEMOIRE**

Présenté pour obtenir le diplôme de  
MAGISTER

Spécialité : physique

Option : physique mathématique

Par

NARDJAS BOUHEROUR

THEME

**path integral pour la particule sur la sphère:**

**Contraintes, etats cohérents**

Soutenu le 21/06/2006

Devant le Jury :

Président :

L. Chetouani

Prof. Univ. Constantine

Rapporteur :

M. Merad

MC. C.u. Oum El Bouaghi

Examineurs :

M. Maamache

Prof. Setif

KH. Nouicer

Prof. Univ. Jijel

T. Boudjedaa

Prof. Univ. Jijel

Promotion : 2006

# Remerciements

*Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique (LPTh) de Jijel.*

*Tout mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté la santé et la patience qu'il m'a données pour terminer ce mémoire*

*Je tiens à remercier mon encadreur Mr merad Mahmoud, de l'université de Oum El Bouaghi, pour m'avoir confié ce sujet et pour l'aide et le temps et la disponibilité qu'il a bien voulu me consacrer.*

*Je remercie en particulier, Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, qui a collaboré en tant que co-encadreur dans les différentes étapes de ce mémoire, son intervention a été déterminante dans la réalisation de ce mémoire.*

*Je remercie, en particulier Mr. Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel pour son entière disponibilité.*

*Mes vifs remerciements vont à Mr. L. Chetouani Professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury*

*Je remercie, également et sincèrement M. Maamache Professeur à l'université de Sétif, et Mr. Kh. Nouicer Professeur à l'université de Jijel et Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger.*

*Je remercie, également et sincèrement à M. A. Bounames, maître de conférence à l'université de Jijel pour son entière disponibilité.*

*Je remercie également tous les enseignants de la post-graduation de physique théorique 2003/2004, et en particulier Mr. Kh. Nouicer, Mr. T. Boudjedaa, M. A. Bounames, ainsi que mes collègues étudiants de la promotion. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et en particulier à ma mère et à mon frère Hani et plus précisément à mon père Ismaïl qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire*

Nardjes

# Table des matières

1	Introduction générale	5
2	Quantification avec contraintes	7
2.1	Méthode de Faddeev-Senjanovic . . . . .	7
2.1.1	L'exemple du cercle . . . . .	12
2.2	Application : Cas de la sphère . . . . .	17
3	Méthodes des états cohérents	25
3.1	L'exemple du cercle . . . . .	25
3.1.1	Construction et calcul du propagateur libre : . . . . .	28
3.2	Cas de la sphère . . . . .	33
3.2.1	Rappel . . . . .	33
3.2.2	Les états cohérents de la sphère . . . . .	37
3.2.3	Construction explicite . . . . .	42
3.3	Construction et calcul du propagateur . . . . .	54
4	Conclusion générale	63
	Bibliographie	65

# Chapitre 1

## Introduction générale

La technique de l'intégrale de chemin reste sans doute l'outil le plus efficace utilisé pour traiter les problèmes quantiques. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle peut ajuster élégamment toutes les situations et peut être contrôlée sans difficulté dans le cas des approximations. Elle utilise la notion fondamentale de la trajectoire et par conséquent toutes les propriétés analytiques et géométriques qui en découlent. Initialement, elle a été construite par Feynman pour ramener la mécanique quantique à étude proche de la mécanique classique, et maintenant on la préfère aux autres approches de quantification surtout dans le cas des systèmes avec une infinité de degrés de liberté tels les champs. Pour ces systèmes, l'introduction des contraintes est parfois obligatoire pour pouvoir assurer une bonne interprétation de la théorie. Cette dernière réduit l'espace des phases et cette réduction est reflétée dans le formalisme par la redéfinition de nouveaux crochets d'évolutions, nommés crochets de Dirac [1]. Dans le cadre des intégrales de chemin de Feynman, cette réduction est introduite au moyen de la fonction delta qui nous permet de projeter l'évolution sur l'espace de phases réduit (espace d'interprétation). Cette technique est connue sous le nom de méthode de Faddeev - Senjanovic. Elle paraît être la mieux adaptée à la quantification des systèmes physiques avec contraintes. L'exemple le plus simple qui contient des contraintes est la particule non relativiste sans spin se mouvant sur le cercle  $S^1$ , bien que le problème paraisse simple, subsiste alors une difficulté relative à la topologie du cercle. Cette dernière liée à la périodicité de l'angle crée des ambiguïtés au niveau des relations de commutations et rends les outils de la mécanique quantique standard inadéquat.

L'objet de cette thèse est de revoir ce problème fondamental de la mécanique quantique en le considérant suivant deux angles différents : dans formalisme de Faddeev-Senjanovic puis dans le formalisme des états cohérents propres au cercle et la sphere compatible avec le topologie du cercle  $S^1$  [2](périodicité incluse). Cette même étude est étendue au cas de la sphere  $S^2$ .

Deux méthodes sont alors exposées dans ce mémoire :

La première méthode : Faddeev- Senjanovic

La deuxième méthode : les états cohérents

Et enfin une comparaison entre les deux.

Cette mémoire est composé de 04 chapitres ;

Nous donnons d'abord au (chapitre 02) un bref exposé de la formule de Faddeev- Senjanovic et on présente comme exemple le mouvement de la particule non relativiste sans spin sur le cercle puis nous étendons cette étude au cas de la sphere .

Ensuite le (chapitre 03) : les résultats du chapitre précédent sont encore retrouvés dans le formalisme des états cohérents qui permet une inclusion systématique des topologies intervenant dans l'étude. On calcule le propagateur pour une particule se mouvant sur le cercle et aussi sur la sphere. Une introduction à ces états cohérents est aussi donnée. Enfin une conclusion sur les travaux est formulée.

# Chapitre 2

## Quantification avec contraintes

### 2.1 Méthode de Faddeev-Senjanovic

La méthode de quantification de Faddeev-Senjanovic traite la quantification à la Feynman des systèmes physiques soumis en plus à des contraintes qui dans le cas générale sont satisfaites dans l'espace des phases. Par conséquent, elle nous permet d'étudier ces systèmes tenant compte des ses contraintes ; ce qui n'est pas vraiment évident, car qui dit contraintes dit réduction des degrés de libertés. Cette réduction s'opère suivant cette méthode via la présence des fonctions delta de Dirac. Si on suppose par exemple qu'une particule non relativiste et sans spin est soumise à la contrainte suivante : la particule ne doit pas quitter une certaine surface d'équation  $f(x) = 0$ , alors pour pouvoir étudier sa dynamique on doit obligatoirement prendre compte de cette contrainte et de ses conséquences sur les impulsions. Dans le domaine de la mécanique classique et quantique, ces systèmes ont été revus par Dirac. Ce dernier a prévu à la place des crochets de Poisson l'utilisation d'un autre crochet plus général qui tient compte de ces contraintes [3]. Ces crochets émanent d'une certaine compatibilité des ces contraintes avec la dynamique du système. Cette méthode de Dirac a été adaptée par Faddeev et Senjanovic dans la quantification à la Feynman.

La formule base de Faddeev-Senjanovic stipule que le propagateur doit être écrit suivant [4] :

$$\begin{aligned}
& K(f, i, T) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^{D-1}} d\lambda_j dp_{\lambda_j} \delta(p_{\lambda_j}) \delta(f(\mathbf{x}_j)) \delta(\Phi_3(\mathbf{p}_j, \bar{\mathbf{x}}_j)) \\
&\times \delta(\phi_4(\mathbf{p}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \lambda_j)) \sqrt{\det \{\Phi^a, \Phi^b\}} \exp [i(\mathbf{p}_j \Delta \mathbf{x}_j + p_{\lambda_j} \Delta \lambda_j - \varepsilon H_T)]
\end{aligned} \quad (2.1)$$

où

$$H_T = \frac{\pi^2}{2m} - \lambda f(\mathbf{x}_j) + vp_{\lambda_j} + \mathbf{V}(\mathbf{x}_j). \quad (2.2)$$

$\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange et  $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$

L'ensemble des contraintes sont [5]

$$\Phi_1 = p_{\lambda_j} = 0, \quad (2.3)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j) \simeq 0, \quad (2.4)$$

et leur compatibilité avec la dynamique

$$\Phi_3(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j) = \{\Phi_2, H_T\} = \frac{1}{m} \pi_\mu \partial^\mu f(\mathbf{x}_j), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_4(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j, \lambda) &= \{\Phi_3, H_T\} = \frac{1}{m^2} \pi_\mu \pi_\nu \partial^\mu \partial^\nu f(\mathbf{x}_j) + \frac{\lambda}{m} \partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\nu f(\mathbf{x}_j) \\
&+ \frac{e}{m^2} \pi^\nu \partial^\mu f(\mathbf{x}_j) F_{\mu\nu}(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{m} \partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\nu \mathbf{V}(\mathbf{x}_j).
\end{aligned} \quad (2.6)$$

avec le champ extérieur défini par

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}_j) = \partial_\mu A_\nu(\mathbf{x}_j) - \partial_\nu A_\mu(\mathbf{x}_j).$$

Les indices  $\mu, \nu = 1 \dots D$  et l'indice répété indique une somme en notation d'Einstein.

*Remarque :*

Puisque dans la formule(2.5)et(2.6) il ya un mélange de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$ , il serait préférable d'indiquer suivant quelle prescription on écrit l'intégrale de chemin. Dans  $\Phi_3(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j)$  et  $\Phi_4(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j, \lambda_j)$  on utilise la prescription du mid-point [6]

$$\bar{\mathbf{x}}_j = \frac{\mathbf{x}(t_j) + \mathbf{x}(t_{j+1})}{2} \quad (2.7)$$

et dans le reste on utilise la prescription du post-point  $\mathbf{x}(t_j)$ .

L'intégration sur  $p_{\lambda_j}$  et  $\lambda_j$  est immédiate . Ce qui laisse

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^{D-1}} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \delta(\Phi_3(\mathbf{p}_j, \bar{\mathbf{x}}_j)) \quad (2.8)$$

$$\times |\{\Phi_2(\mathbf{x}_j), \Phi_3(\mathbf{p}_j, \bar{\mathbf{x}}_j)\}| \exp \left[ i(\mathbf{p}_j \Delta \mathbf{x}_j - \varepsilon \frac{\pi^2}{2m} - \varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_j)) \right]$$

avec

$$\{\Phi_2(\mathbf{x}_j), \Phi_3(\mathbf{p}_j, \bar{\mathbf{x}}_j)\} = \frac{1}{m} \partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j). \quad (2.9)$$

Pour intégrer sur  $\mathbf{p}_j$  introduisons le changement  $\mathbf{P}_j = \mathbf{p}_j - e\mathbf{A}_j$ , on obtient alors

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{P}_j}{(2\pi)^D} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \frac{1}{m} |\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)| \quad (2.10)$$

$$\times \int \exp \left[ i(\mathbf{P}_j \Delta \mathbf{x}_j - \varepsilon \frac{\mathbf{P}_j^2}{2m} - \varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_j)) + ie\mathbf{A}_j \Delta \mathbf{x}_j + \frac{i}{m} \alpha_j (\mathbf{P}_j \partial f(\bar{\mathbf{x}}_j)) \right]$$

où l'on a remplacé

$$\delta(\Phi_3(\mathbf{p}_j, \bar{\mathbf{x}}_j)) = \frac{1}{2\pi} \int \prod_{j=1}^N d\alpha_j \exp \left( \frac{i}{m} \alpha_j ((\mathbf{p}_j - e\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}_j)) \partial f(\bar{\mathbf{x}}_j)) \right). \quad (2.11)$$

Intégrons maintenant sur  $\mathbf{P}_j$  en utilisant la formule bien connue des integrales gaussiennes.

En effet,



$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{(2\pi)^D} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \\
&\times \frac{1}{m} |\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)| \exp[-i\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_j) + ie \mathbf{A}_j(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta \mathbf{x}_j] \\
&\times \int d\mathbf{P}_j \exp \left[ i \frac{\alpha_j}{m} P_{j\mu} \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) + i \mathbf{P}_j \Delta \mathbf{x}_j - i\varepsilon \frac{\mathbf{P}_j^2}{2m} \right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{(2\pi)^D} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \frac{1}{m} |\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)| \\
&\times \exp[-i\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_j) + ie \mathbf{A}_j(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta \mathbf{x}_j] \left( \sqrt{\frac{2\pi m}{i\varepsilon}} \right)^D \\
&\times \int d\alpha_j \exp \left[ \frac{im}{2\varepsilon} \left( \frac{\alpha_j}{\varepsilon} \partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) + \frac{m}{\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

le propagateur deviendra alors comme :

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{(2\pi)^D} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \frac{1}{m} |\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)| \\
&\times \exp[-i\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_j) + ie \mathbf{A}_j(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta \mathbf{x}_j] \left( \sqrt{\frac{2\pi m}{i\varepsilon}} \right)^D \int d\alpha_j \\
&\times \exp \left[ \frac{im}{2\varepsilon} \left\{ \partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \frac{\alpha_j^2}{m^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (\partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta x_{j\mu} + \Delta x_j^\mu \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)) \frac{\alpha_j}{m} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

L'intégration sur  $\alpha_j$  étant encore une gaussienne et son résultat est

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{(2\pi)^D} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \frac{1}{m} |\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)| \\
&\times \exp[-i\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_j) + ie \mathbf{A}_j(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta \mathbf{x}_j] \left( \sqrt{\frac{2\pi m}{i\varepsilon}} \right)^D \sqrt{\frac{2im\varepsilon\pi}{\partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)}} \\
&\times \exp \left( \frac{im}{2\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j^2 \right) \exp \left[ \frac{-im}{8\varepsilon (\partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j))^2} \right. \\
&\quad \left. (\partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta x_{j\mu} + \Delta x_j^\mu \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j))^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ce qui donne au propagateur la forme suivante

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{(2\pi)^D} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \frac{1}{m} \\
&\times \frac{|\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)|}{\sqrt{\partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)}} (2\pi m) \left( \sqrt{\frac{2\pi m}{i\varepsilon}} \right)^{(D-1)} \\
&\times \exp \left[ \frac{im}{2\varepsilon} \left\{ \Delta \mathbf{x}_j^2 - \frac{(\partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta x_j^\mu)^2}{(\partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j))^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - i\varepsilon V(\mathbf{x}_j) + ie \mathbf{A}_j(\bar{\mathbf{x}}_j) \Delta \mathbf{x}_j \right] \quad (2.16)
\end{aligned}$$

donc le résultat final est :

$$\begin{aligned}
&K(f, i, T) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)(D-1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \sqrt{\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)} \\
&\times \exp \left[ i \left( \frac{m}{2\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j \Omega \Delta \mathbf{x}_j + e \Delta \mathbf{x}_j \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}_j) - \varepsilon V(\mathbf{x}_j) \right) \right] \quad (2.17)
\end{aligned}$$

avec  $\Omega$  la matrice définie par

$$\begin{aligned}
\Omega &= 1 - \eta_\mu \eta^\mu \\
&= 1 - \frac{\partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) \partial^\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)}{\left( \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}_j)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j} \right)^2}, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

avec

$$\eta_\mu = \frac{\partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)}{\sqrt{\left( \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}_j)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j} \right)^2}} \quad (2.19)$$

La formule (2.17) constitue le propagateur de Feynman pour une particule sans spin se mouvant dans l'espace à  $D$  dimension contrainte à se déplacer sur la surface  $f(x) = 0$ . Dans ce qui suit, nous allons à partir de cette formule évaluer le propagateur relatif au cercle et à la sphère.

### 2.1.1 L'exemple du cercle

Partons de l'équation (2.17) et remplaçons

$$A(\mathbf{x}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{particule libre})$$

$$f(\mathbf{x}_j) = x_j^2 + y_j^2 - R^2 = 0 \quad (\text{équation du cercle})$$

$$D = 2 \quad (\text{dimension du plan})$$

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \\ \times \sqrt{\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)} \exp \left[ i \left( \frac{m}{2\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j \Omega \Delta \mathbf{x}_j \right) \right] \quad (2.20)$$

Dans ce cas, les contraintes sont égales à

$$\Phi_1 = p_{\lambda_j} \simeq 0, \quad (2.21)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j) = x_j^2 + y_j^2 - R^2 = 0, \quad (2.22)$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j) = \{\Phi_2(\mathbf{x}_j), H_T\} = \frac{1}{m} p_{\mu_j} \partial_\mu f(\mathbf{x}_j^\mu) = \frac{2}{m} (p_{x_j} \bar{x}_j + p_{y_j} \bar{y}_j) \simeq 0, \quad (2.23)$$

$$\Phi_4(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j, \lambda_j) = \frac{1}{m^2} p_{\mu_j} p_{\nu_j} \partial^\mu \partial^\nu f(\mathbf{x}_j) + \frac{\lambda}{m} \partial^\nu f(x_{\nu_j}) \partial_\nu f(x_j^\nu) = \frac{2}{m^2} (p_{x_j}^2 + p_{y_j}^2) + \frac{4\lambda R^2}{m} \simeq 0. \quad (2.24)$$

avec

$$\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j) = 4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j), \quad (2.25)$$

et

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\bar{x}_j^2}{x_j^2 + y_j^2} & -\frac{\bar{x}_j \bar{y}_j}{x_j^2 + y_j^2} \\ -\frac{\bar{x}_j \bar{y}_j}{x_j^2 + y_j^2} & 1 - \frac{\bar{y}_j^2}{x_j^2 + y_j^2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Par conséquent, le propagateur à calculer est

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N dx_j dy_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(x_j^2 + y_j^2 - R^2) \\
&\times \sqrt{4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j)} \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon} (\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2)\right) \\
&\times \exp\left(\frac{-im}{2\varepsilon} \left( \frac{\bar{x}_j^2 \Delta x_j^2 + \bar{y}_j^2 \Delta y_j^2 + 2\bar{x}_j \bar{y}_j \Delta x_j \Delta y_j}{\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2} \right)\right)
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Remarquons que dans notre cas

$$x_j \Delta x_j + y_j \Delta y_j = 0 \Rightarrow \left( \frac{(\bar{x}_j \Delta x_j + \bar{y}_j \Delta y_j)}{(2\bar{x}_j^2 + 2\bar{y}_j^2)} \right)^2 = 0 \quad (2.28)$$

à cause de l'équation du cercle, ce qui permet de déduire

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N dx_j dy_j \prod_{j=1}^{N+1} \\
&\times \delta(x_j^2 + y_j^2 - R^2) \sqrt{4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j)} \\
&\times \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon} (\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2)\right)
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Il est préférable maintenant de passer aux coordonnées adéquates à la symétrie du problème qui sont les coordonnées polaires. En effet, la transformation  $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$  est définie par

$$\begin{cases} x_j = r_j \cos \theta_j \\ y_j = r_j \sin \theta_j \end{cases} \quad (2.30)$$

La partie cinétique et la correction des contraintes deviennent alors

$$\begin{aligned}
\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 &= r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1} \left( 1 - \frac{\Delta \theta_j^2}{2} + \frac{\Delta \theta_j^4}{4} \right) \\
&\quad - 2r_j r_{j-1} \left( \frac{\Delta \theta_j^6}{4} + \dots \right)
\end{aligned} \quad (2.31)$$

et

$$\sqrt{4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j)} = \sqrt{2 \left( r_j^2 + r_j r_{j-1} \left( 1 - \frac{\Delta \theta_j^2}{2} \right) \right)} \quad (2.32)$$

Par voie de conséquence, le propagateur  $K(f, i, T)$  devient :

$$\begin{aligned}
 K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N r_j dr_j d\theta_j \\
 &\quad \prod_{j=1}^{N+1} \delta(r_j^2 - R^2) \sqrt{2 \left( r_j^2 + r_j r_{j-1} \left( 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{2} \right) \right)} \\
 &\quad \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} \left( r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1} \left( 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{2} + \frac{\Delta\theta_j^4}{4} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Remplaçons  $\delta(r_j^2 - R^2)$  par

$$\delta(r_j^2 - R^2) = \frac{\delta(r_j - R) + \delta(r_j + R)}{2R}, \tag{2.34}$$

alors le propagateur  $K(f, i, T)$  s'écrit

$$\begin{aligned}
 K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N r_j dr_j d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} \\
 &\quad \times \frac{\delta(r_j - R)}{2R} \sqrt{2 \left( r_j^2 + r_j r_{j-1} \left( 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{2} \right) \right)} \\
 &\quad \times \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} \left( r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1} \left( 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{2} + \frac{\Delta\theta_j^4}{4} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Intégrons sur  $r_j$  en utilisant l'identité

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2R} \int dx_j dy_j \delta(r_j - R) f(r_j, \theta_j) &= \frac{1}{2R} \int r_j dr_j d\theta_j \delta(r_j - R) f(r_j, \theta_j) \\
 &= \frac{1}{2R} \int d\theta_j F(R, \theta_j),
 \end{aligned}$$

et le développement suivant

$$dx_j dy_j = r_j dr_j d\theta_j = \frac{1}{\sqrt{r_j r_i}} \prod_{j=1}^{N+1} \tilde{r}_j \left( 1 - \frac{\Delta r_j^2}{8 \tilde{r}_j^2} \right) dr_j d\theta_j, \tag{2.36}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} R \left( 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{8} \right) \\
&\times \exp \left[ i \frac{mR^2}{\varepsilon} \left( \frac{\Delta\theta_j^2}{2} - \frac{\Delta\theta_j^4}{4} \right) \right] \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Sachant que l'action se développe à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  (mouvement Brownien de la particule) on obtient

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} R \\
&\times \left( 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{8} - i \frac{mR^2 \Delta\theta_j^4}{4\varepsilon} \right) \exp \left[ i \frac{mR^2}{2\varepsilon} \Delta\theta_j^2 \right] \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Suivant la procédure de McLaughlin-Schulman qui consiste à estimer les corrections quantiques lors du passage aux coordonnées polaires au moyen de l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n} \exp \left( \frac{-\alpha}{2\beta} u^2 \right) du = \frac{(2n-1)!!}{\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( \frac{-\alpha}{2\beta} u^2 \right) du, \quad (2.39)$$

, on obtient :

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} R \\
&\times \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{16} - R^2 i \frac{m}{\varepsilon} 3 \frac{\left( \frac{i\varepsilon}{mR^2} \right)^2}{4!2} \right) e^{i \frac{m}{2\varepsilon} (R^2 \Delta\theta_j^2)}, \quad (2.40)
\end{aligned}$$

ou bien

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{mR^2}{2\pi i \varepsilon}} e^{i \frac{m}{2\varepsilon} (R^2 \Delta\theta_j^2)}, \quad (2.41)$$

où  $\theta$  est l'angle périodique  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Cette périodicité peut être mise en évidence en sommant sur tous les "winding number" possibles, c'est à dire pour tenir compte l'aller retour de la particule sur le cercle . donc

$$K(f, i, T) = \sum_{n_j=-\infty}^{+\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{mR^2}{2\pi i\varepsilon}} e^{i\left(\frac{m}{2\varepsilon} R^2 (\Delta\theta_j + 2\pi n_j)^2\right)} \quad (2.42)$$

Utilisons maintenant l'identité de Poisson

$$\sum_{n_j=-\infty}^{\infty} f(n_j) = \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j f(\lambda_j) \exp(-2\pi i \lambda_j l_j), \quad (2.43)$$

avec

$$f(n_j) = e^{i\left(\frac{m}{2\varepsilon} R^2 (4\pi^2 n_j^2 + 4\pi n_j \Delta\theta_j)\right)}, \quad (2.44)$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{mR^2}{2\pi i\varepsilon}} e^{i\frac{m}{2\varepsilon} R^2 ((\Delta\theta_j)^2)} \\ &\times \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j e^{i\left(\frac{m}{2\varepsilon} R^2 (4\pi^2 \lambda_j^2 + 4\pi \lambda_j \Delta\theta_j)\right)} \exp(-2\pi i \lambda_j l_j) \end{aligned} \quad (2.45)$$

L'intégration sur les  $\lambda_j$  étant Gaussienne, le résultat s'écrit simplement

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N+1} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} e^{i\frac{m}{2\varepsilon} R^2 ((\Delta\theta_j)^2)} \\ &\times \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2mR^2\pi^2}{i\varepsilon} \left(\frac{\Delta\theta_j}{2\pi} - \frac{l_j\varepsilon}{2mR^2\pi}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

A ce niveau, l'intégration sur les  $\theta_j$  étant immédiate et s'effectue en appliquant les propriétés des fonctions de Dirac. Finalement, le résultat du propagateur d'une particule libre se déplaçant sur le cercle suivant la méthode Faddeev-Senjanovic est donné par

$$K(f, i, T) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\left\{l(\theta_f - \theta_i) - \frac{Tl^2}{2B}\right\}}. \quad (2.47)$$

Dans ce qui suit, nous allons traiter un cas de dimension supérieure d'une manière plus développée avec la méthode de quantification de Faddeev-Senjanovic : la sphère.

## 2.2 Application : Cas de la sphère

Calculons d'abord les contraintes sur la sphère nécessaires au calcul. On a

$$\Phi_1 = p_{\lambda 1} \simeq 0, \quad (2.48)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j) = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - 1 \simeq 0, \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j) &= \{\Phi_2(\mathbf{x}_j), H_T\} = \frac{1}{m} p_{\mu j} \partial_{\mu} f(\mathbf{x}_j) \\ &= \frac{2}{m} (p_{x_j} \bar{x}_j + p_{y_j} \bar{y}_j + p_{z_j} \bar{z}_j) \simeq 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j, \lambda) &= \{\Phi_3(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j), H_T\} = \frac{1}{m^2} p_{\mu} p_{\nu} \partial^{\mu} \partial^{\nu} f(\mathbf{x}_j) + \frac{\lambda}{m} \partial^{\nu} f(x_{\nu j}) \partial_{\nu} f(x_j^{\nu}) \\ &= \frac{2}{m^2} (p_{x_j}^2 + p_{y_j}^2 + p_{z_j}^2) + \frac{4\lambda}{m} \simeq 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

Le propagateur de la particule libre se déplaçant sur la sphère s'écrit suivant la formule de Faddeev-Senjavovic comme

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \sqrt{\partial^{\mu} f(\mathbf{x}_j) \partial_{\mu} f(\bar{\mathbf{x}}_j)} \\ &\times \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j \Omega \Delta \mathbf{x}_j \right], \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N dx_j dy_j dz_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - 1) \\ &\times \sqrt{4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j + z_j \bar{z}_j)} \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j \Omega \Delta \mathbf{x}_j \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

avec :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\bar{x}_j^2}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} & -\frac{y_j \bar{x}_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} & -\frac{z_j \bar{x}_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} \\ -\frac{y_j \bar{x}_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} & 1 - \frac{y_j^2}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} & -\frac{z_j \bar{y}_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} \\ -\frac{z_j \bar{x}_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} & -\frac{z_j \bar{y}_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} & 1 - \frac{z_j^2}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$



et :

$$\Delta \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Ou bien autrement

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(f(\mathbf{x}_j)) \sqrt{\partial^\mu f(\mathbf{x}_j) \partial_\mu f(\bar{\mathbf{x}}_j)} \\ \times \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} \Delta \mathbf{x}_j \cdot \Omega \Delta \mathbf{x}_j \right] \quad (2.56)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N dx_j dy_j dz_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - 1) \sqrt{4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j + z_j \bar{z}_j)} \\ \times \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_j^2) + i \frac{m}{2\varepsilon} \left( \frac{(\bar{x}_j \Delta x_j + \bar{y}_j \Delta y_j + \bar{z}_j \Delta z_j)^2}{\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2 + \bar{z}_j^2} \right) \right], \quad (2.57)$$

Comme

$$\bar{x}_j \Delta x_j + \bar{y}_j \Delta y_j + \bar{z}_j \Delta z_j = 0, \quad (2.58)$$

le propagateur devient alors

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N dx_j dy_j dz_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - 1) \\ \times \sqrt{4(x_j \bar{x}_j + y_j \bar{y}_j + z_j \bar{z}_j)} \exp \left[ i \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_j^2) \right]. \quad (2.59)$$

Il est préférable d'introduire les coordonnées sphériques au moyen de la transformation

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ce qui donne pour le terme de l'action

$$\begin{aligned}
(\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_j^2) &= (\Delta r_j)^2 + \tilde{r}_j^2 (\Delta \theta_j)^2 + \tilde{r}_j^2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 - \frac{1}{4} ((\Delta r_j)^2 (\Delta \theta_j)^2 \\
&\quad + (\Delta r_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2 + (\Delta \theta_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 \tilde{r}_j^2 + \frac{1}{3} (\Delta \theta_j)^4 \tilde{r}_j^2 + \\
&\quad \frac{1}{3} (\Delta \varphi_j)^4 \tilde{r}_j^2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

avec les notations suivantes

$$\begin{aligned}
r_j &= \tilde{r}_j + \frac{\Delta r_j}{2}, r_{j-1} = \tilde{r}_{j-1} - \frac{\Delta r_{j-1}}{2}. \\
\theta_j &= \tilde{\theta}_j + \frac{\Delta \theta_j}{2}, \theta_{j-1} = \tilde{\theta}_{j-1} - \frac{\Delta \theta_{j-1}}{2}. \\
\varphi_j &= \tilde{\varphi}_j + \frac{\Delta \varphi_j}{2}, \varphi_{j-1} = \tilde{\varphi}_{j-1} - \frac{\Delta \varphi_{j-1}}{2}. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

devient alors

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^N dx_j dy_j dz_j &= \prod_{j=1}^N r_j^2 \sin \theta_j dr_j d\theta_j d\varphi_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_f r_i \sin \theta_f \sin \theta_i}} \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{r_j r_{j-1} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1}} \prod_{j=1}^N dr_j d\theta_j d\varphi_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_f r_i \sin \theta_f \sin \theta_i}} \prod_{j=1}^{N+1} \tilde{r}_j^2 \sin \tilde{\theta}_j \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{1}{4} \left[ \frac{(\Delta r_j)^2}{\tilde{r}_j^2} + \frac{(\Delta \theta_j)^2}{2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right] \right) \prod_{j=1}^N dr_j d\theta_j d\varphi_j. \tag{2.63}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans(2.59) on aboutit à

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \frac{1}{\sqrt{r_f r_i \sin \theta_f \sin \theta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N dr_j d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{r_j^2} \\
&\times \sin \tilde{\theta}_j \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \Delta r_j^2 + \frac{(\Delta \theta_j)^2}{2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right) \right) (\delta(r_j - 1) + \delta(r_j + 1)) \\
&\times \sqrt{\frac{r_j^2 + r_j r_{j-1} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \cos \Delta \varphi_j + r_j r_{j-1} \cos \theta_j \cos \theta_{j-1}}{2}} \\
&\times \exp \left[ \left( i \frac{m}{2\varepsilon \hbar} \right) \left( (\Delta r_j)^2 + \bar{r}_j^2 (\Delta \theta_j)^2 + \bar{r}_j^2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{im}{8\varepsilon \hbar} \left[ (\Delta \theta_j)^2 (\Delta r_j)^2 + (\Delta \theta_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 \bar{r}_j^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (\Delta r_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2 \frac{1}{3} (\Delta \theta_j)^4 \bar{r}_j^2 + \frac{1}{3} (\Delta \varphi_j)^4 \bar{r}_j^2 (\sin \tilde{\theta}_j)^2 \right] \right] \quad (2.64)
\end{aligned}$$

La présence des fonctions delta de Dirac permet la simplification suivante (intégration sur le rayon de la sphère)

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^{N+1} \sin \tilde{\theta}_j \\
&\times \left( 1 - \frac{(\Delta \theta_j)^2}{8 (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right) \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \cos \Delta \varphi_j + \cos \theta_j \cos \theta_{j-1}}{2}} \\
&\exp \left[ \left( i \frac{m}{2\varepsilon \hbar} \right) \left( (\Delta \theta_j)^2 + (\sin \tilde{\theta}_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{im}{8\varepsilon \hbar} \left[ (\Delta \theta_j)^2 (\Delta \varphi_j)^2 + \frac{1}{3} (\Delta \varphi_j)^4 (\sin \tilde{\theta}_j)^2 \right] \right] \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}
&1 + \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \cos \Delta \varphi_j + \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} \\
&= 2 \left[ 1 + \frac{1}{2} (\sin \tilde{\theta}_j)^2 \left[ -\frac{\Delta \varphi_j^2}{2} + \frac{\Delta \varphi_j^4}{4!} - \frac{\Delta \theta_j^2}{4} + \frac{\Delta \theta_j^2 \Delta \varphi_j^2}{4 \cdot 2} + \frac{\Delta \theta_j^4}{64} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\Delta \theta_j^4}{4! \cdot 8} \right] - \frac{1}{2} (\cos \tilde{\theta}_j)^2 \left( \frac{\Delta \theta_j^2}{4} - \frac{\Delta \theta_j^2 \Delta \varphi_j^2}{4 \cdot 2} - \frac{\Delta \theta_j^4}{3! \cdot 8} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\cos \tilde{\theta}_j)^2 \left[ -\frac{\Delta \theta_j^2}{4} + \frac{\Delta \theta_j^4}{64} + \frac{2\Delta \theta_j^4}{4! \cdot 16} \right] - \frac{1}{2} (\sin \tilde{\theta}_j)^2 \left( \frac{\Delta \theta_j^2}{4} - \frac{\Delta \theta_j^4}{3! \cdot 8} \right) \right], \quad (2.66)
\end{aligned}$$

et la correction quantique totale ( mesure+contrainte+action) sera donnée par

$$C_{tot}(j) = \left\{ 1 - \frac{\Delta\theta_j^2}{8} - \frac{1}{8} \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2 \Delta\varphi_j^2 + \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2 \frac{\Delta\varphi_j^4}{4!4} - \frac{1}{8} \frac{\Delta\theta_j^2}{\left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2} \right. \\ \left. - i \frac{m}{8\varepsilon} \left[ (\Delta\theta_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2 + \frac{1}{3} (\Delta\theta_j)^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} (\Delta\varphi_j)^4 \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.67)$$

Par conséquent, le propagateur s'écrira comme

$$K(f, i, T) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^{N+1} C_{tot}(j) \sin \tilde{\theta}_j \\ \times \exp \left[ \left( i \frac{m}{2\varepsilon} \right) \left( (\Delta\theta_j)^2 + \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2 (\Delta\varphi_j)^2 \right) \right]. \quad (2.68)$$

En utilisant la procédure de McLaughlin-Schulman qui consiste à estimer les corrections quantiques par la formule suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n} \exp \left( \frac{-\alpha}{2\beta} u^2 \right) du = \frac{(2n-1)!!}{\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( \frac{-\alpha}{2\beta} u^2 \right) du, \quad (2.69)$$

on obtient alors pour le propagateur

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^{N+1} \sin \tilde{\theta}_j \prod_{j=1}^{N+1} \\ \exp \left[ \left( -\frac{m}{2i\varepsilon} \right) \left( (\Delta\theta_j)^2 + \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2 (\Delta\varphi_j)^2 \right) - \frac{i\varepsilon}{8m} + \frac{i\varepsilon}{8m \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2} \right] \quad (2.70)$$

Comme le propagateur est périodique en  $\varphi$  de période  $2\pi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), introduisons une somme sur un nombre entier ( winding number) qui tient compte des aller-retour (nombre de tour), On aura alors

$$K(f, i, T) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^{N+1} \sin \tilde{\theta}_j \\ \times \prod_{j=1}^{N+1} \sum_{n_j=0}^{\infty} \exp \left[ \left( -\frac{m}{2i\varepsilon} \right) \left( (\Delta\theta_j)^2 + \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2 (\Delta\varphi_j + 2\pi n_j)^2 \right) \right. \\ \left. - \frac{i\varepsilon}{8m} + \frac{i\varepsilon}{8m \left( \sin \tilde{\theta}_j \right)^2} \right] \quad (2.71)$$

Utilisons maintenant l'identité de poisson

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} f(n_j) = \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j f(\lambda_j) \exp(-2\pi i \lambda_j l_j), \quad (2.72)$$

pour la partie dépendante de  $n_j$ . C'est à dire

$$\begin{aligned} & \sum_{n_j=0}^{\infty} \exp \left[ \left( -\frac{m (\sin \tilde{\theta}_j)^2 4\pi^2}{2i\varepsilon} \right) \left( n_j^2 + n_j \frac{\Delta\varphi_j}{\pi} \right) \right] \\ &= \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_j \exp \left[ \left( -\frac{m (\sin \tilde{\theta}_j)^2 4\pi^2}{2i\varepsilon} \right) \left( \lambda_j^2 + \lambda_j \frac{\Delta\varphi_j}{\pi} \right) \right] \exp(-2\pi i \lambda_j l_j). \end{aligned} \quad (2.73)$$

L'intégration sur  $\lambda_j$  est une gaussienne et le résultat est

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \\ & \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^{N+1} \\ & \times \exp \left[ \left( -\frac{m}{2i\varepsilon} \right) \left( (\Delta\theta_j)^2 + (\sin \tilde{\theta}_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2 \right) - \frac{i\varepsilon}{8m} + \frac{i\varepsilon}{8m (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right] \\ & \times \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{m (\sin \tilde{\theta}_j)^2}{2i\varepsilon} \left\{ \Delta\varphi_j - \frac{l_j \varepsilon}{m (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Cette dernière se simplifie à

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j d\varphi_j \\ & \times \prod_{j=1}^{N+1} \exp \left[ \left( -\frac{m}{2i\varepsilon} \right) (\Delta\theta_j)^2 - \frac{i\varepsilon}{8m} + \frac{i\varepsilon}{8m (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right] \\ & \times \sum_{l_j=-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i l_j \Delta\varphi_j - \frac{i l_j^2 \varepsilon}{2m (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Maintenant, l'intégration sur les chemins  $\{\varphi_j\}$  est immédiate et donne des symboles de Kro-

necker  $\delta(l_j, l_{j+1})$  qui permettent de simplifier les multiples sommes. Alors

$$K(f, i, T) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \exp \left[ il(\varphi_f - \varphi_i) \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \\ \times \prod_{j=1}^{N+1} \exp \left[ \left( -\frac{m}{2i\varepsilon} \right) (\Delta\theta_j)^2 - \frac{i\varepsilon}{8m} - i\varepsilon \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{2m (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right]. \quad (2.76)$$

A ce niveau, il nous reste à effectuer l'intégrale de chemin sur les variables  $\{\theta_j\}$  exprimée par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{(N+1)} \int \prod_{j=1}^N d\theta_j \prod_{j=1}^{N+1} \exp \left[ \left( -\frac{m}{2i\varepsilon} \right) (\Delta\theta_j)^2 - \frac{i\varepsilon}{8m} - i\varepsilon \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{2m (\sin \tilde{\theta}_j)^2} \right], \quad (2.77)$$

dont le résultat est bien connu sous le nom de barrière angulaire[3],

$$\sqrt{\sin \theta_f \sin \theta_i} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi}{2B} j(j+1)} \frac{(2j+1)(j-m)!}{2(j+m)!} P_j^m(\cos \theta_f) P_j^m(\cos \theta_i) \quad (2.78)$$

Finalement, on obtient le résultat du propagateur d'une particule libre se déplaçant sur la sphère

$$K(f, i, T) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \exp \left[ il(\varphi_f - \varphi_i) \right] e^{-\frac{i\pi}{2B} j(j+1)} \frac{(2j+1)(j-l)!}{2(j+l)!} \\ \times P_j^l(\cos \theta_f) P_j^l(\cos \theta_i), \quad (2.79)$$

avec

$$j-l \geq 0 \Rightarrow j \geq l, \\ j+l \geq 0 \Rightarrow j \geq -l, \quad (2.80)$$

c'est à dire

$$j \geq l \geq -j \quad (2.81)$$

Ce résultat du propagateur peut être aussi écrit sous la forme

$$K(f, i, T) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=-j}^j e^{-\frac{i\pi}{2B} j(j+1)} (2j+1) \frac{(j-l)!}{(j+l)!} \\ \times P_j^l(\cos \theta_f) P_j^l(\cos \theta_i) e^{il(\varphi_f - \varphi_i)}. \quad (2.82)$$

Dans le chapitre suivant, nous allons reprendre ces deux problèmes en les reconsiderant dans un formalisme différent de celui de Faddeev-Senjanovic utilisant implicitement les contraintes.

## Chapitre 3

# Méthodes des états cohérents

La méthode des états cohérents est très réputée en physique, elle consiste essentiellement à introduire des opérateurs adéquats dits opérateurs de création et d'annihilation qui sont similaires aux opérateurs fondamentaux de création et d'annihilation des états de l'oscillateur [7, 8]. Au fait, ces états cohérents ont une affinité avec l'évolution classique. dans le cas du cercle [2, 9] et de la sphère en plus de cet aspect physique, ils vont permettre d'éliminer les contraintes présentes dans le problème. C'est à dire, agir directement dans l'espace d'évolution. Nous allons d'abord considérer le cas du cercle vue sa simplicité et sa faisabilité puis passer au cas de la sphère problème moins évident. Dans chaque cas nous allons rappeler la construction des états cohérents[2] et leurs propriétés nécessaires aux calculs ultérieures, puis nous construirons le propagateur et nous effectuerons le calcul de l'intégrale de chemin correspondante.

### 3.1 L'exemple du cercle

Soit une particule de masse  $m$  se déplaçant sur le cercle de rayon  $R = 1$ . Le lagrangien classique de ce système physique est donné par

$$L = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (3.1)$$

Le moment angulaire de la particule



$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}. \quad (3.2)$$

Le hamiltonien de système s'écrit comme

$$H = p_{\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2m}J^2. \quad (3.3)$$

*remarque* : la masse de la particule est unitaire ( $m = 1$ )

Comme il est facile de voir, le crochet de poisson de ces grandeurs physiques est

$$\{\varphi, J\} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial J}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial J}{\partial \varphi} = 1. \quad (3.4)$$

le passage à la mécanique quantique s'écrit naïvement comme

$$[\varphi, J] = i\hbar \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial J}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \right). \quad (3.5)$$

c'est à dire

$$[\varphi, J] = i\hbar. \quad (3.6)$$

remarquons que l'angle  $\varphi$  est périodique, ceci pose un problème au niveau de l'hermiticité de  $J$ , intimement liée à la représentation dans l'espace de Hilbert correspondant. Une manière indirecte pour tenir compte de cette périodicité serait de considérer à la place de l'angle l'opérateur unitaire dit position sur le cercle défini par

$$U = e^{i\varphi}. \quad (3.7)$$

Ce choix permet en fait d'avoir une compatibilité du déplacement de la particule avec la topologie du cercle.

Au lieu de la relation(3.6), considérons la relation facile à vérifier suivante

$$[J, U] = \hbar U. \quad (3.8)$$

Soit  $\{|j\rangle\}$  la base propre de l'opérateur moment angulaire  $J$  définie par

$$J|j\rangle = j|j\rangle, \quad \langle j|k\rangle = \delta_{jk}, \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j\rangle\langle j| = 1. \quad (3.9)$$

A partir des relations (3.8), (3.9) il n'est pas difficile de s'assurer qu'on les relations suivantes

$$U|j\rangle = |j+1\rangle, \quad (3.10)$$

$$U^+|j\rangle = |j-1\rangle. \quad (3.11)$$

Il est remarquable que l'opérateur unitaire de position et son conjugué jouent le rôle respectivement d'opérateurs de création et d'annihilation. On définit alors les états cohérents sur le cercle ( $S^1$ ) par [2]

$$X|\zeta\rangle = \zeta|\zeta\rangle. \quad (3.12)$$

avec

$$X = e^{-\frac{J}{\hbar} + \frac{1}{2}} U = e^{i(\varphi + iJ)}. \quad (3.13)$$

et  $\zeta$  est un nombre complexe dont la forme polaire est  $e^{-l+i\varphi}$ ,  $l \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi$  étant la position naïve sur le cercle et  $J$  le moment angulaire correspondant. Par ailleurs, nous avons

$$X|j\rangle = e^{-j-\frac{1}{2}}|j+1\rangle, \quad (3.14)$$

$$X^+|j\rangle = e^{-j+\frac{1}{2}}|j-1\rangle. \quad (3.15)$$

Ces états cohérents se projettent sur la base  $|j\rangle$  suivant

$$|\zeta\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j\rangle\langle j|\zeta\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j(\zeta)|j\rangle. \quad (3.16)$$

avec

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{j^2}{2}} \zeta^{-j}, \quad (3.17)$$

Par la relation (3.16) et (3.17) on obtient

$$\langle j | \zeta \rangle = \zeta^{-j} e^{-\frac{j^2}{2}}. \quad (3.18)$$

et par conséquent,

$$|\zeta\rangle = |l, \varphi\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{j^2}{2}} \zeta^{-j} |j\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{j^2}{2}} e^{lj - ij\varphi} |j\rangle. \quad (3.19)$$

Les états cohérents sont non orthogonaux

$$\langle r, \Psi | l, \varphi \rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{lj - ij\varphi} e^{-\frac{j^2}{2}} e^{rj' + ij'\Psi} \delta_{j,j'} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} e^{(l+r)j - ij(\varphi - \Psi) - j^2} \neq 1. \quad (3.20)$$

qui s'exprime par les fonctions de Jacobi suivantes

$$\langle r, \Psi | l, \varphi \rangle = \theta_\alpha \left( \frac{\Psi - \varphi}{2\pi} - i \frac{r+l}{2\pi} \mid \frac{i}{\pi} \right), \quad (3.21)$$

avec : ( $\alpha = 3$ )

La relation de fermeture s'écrit comme

$$\frac{1}{(4\pi i)^{\frac{3}{4}}} \int_c d\zeta d\zeta^* \frac{e^{-(\ln(|\zeta|))^2}}{(|\zeta|)^2} |\zeta\rangle \langle \zeta| = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dl \frac{e^{-l^2}}{\sqrt{\pi}} |l, \varphi\rangle \langle l, \varphi| = 1. \quad (3.22)$$

Le produit scalaire de deux états est défini par

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \frac{1}{(4\pi i)^{\frac{3}{4}}} \int_c d\zeta d\zeta^* \frac{e^{-\ln(|\zeta|)^2}}{(|\zeta|)^2} (\Phi(\zeta))^* \Psi(\zeta^*). \quad (3.23)$$

### 3.1.1 Construction et calcul du propagateur libre :

Le propagateur est défini par

$$K(f, i, T) = \langle \zeta_f | U(T) | \zeta_i \rangle. \quad (3.24)$$

avec

$$U(T) = T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt \right). \quad (3.25)$$

et  $H$  Hamiltonien du système

On introduit la relation de fermeture(3.22) dans la relation(3.24), on obtient

$$\begin{aligned} K(\zeta_f, \zeta_i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \zeta_f | \exp \left( -\frac{i}{\hbar} H \varepsilon \right)^{N+1} | \zeta_i \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \prod_{n=1}^N \frac{d\varphi_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^N \frac{e^{-l_n^2}}{\sqrt{\pi}} dl_n \prod_{n=1}^{N+1} \\ &\times \langle l_n, \varphi_n | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | l_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec  $\varepsilon = \frac{T}{N+1}$ , qu' on écrira aussi comme

$$\begin{aligned} K(\zeta_f, \zeta_i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \prod_{n=1}^N \frac{d\varphi_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^N \frac{e^{-l_n^2}}{\sqrt{\pi}} dl_n \prod_{n=1}^{N+1} \langle l_n, \varphi_n | l_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \\ &\left( 1 - \frac{\langle l_n, \varphi_n | \frac{i}{\hbar} H \varepsilon | l_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle}{\langle l_n, \varphi_n | l_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Suivant la relation(3.19) on a

$$\begin{aligned} \langle l_n, \varphi_n | l_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle &= \sum_{j_n, j_{n-1} = -\infty}^{+\infty} \exp \left[ l_n j_n + i j_n \varphi_n - \frac{j_n^2}{2} + l_{n-1} j_{n-1} - i j_{n-1} \varphi_{n-1} \right. \\ &\left. - \frac{j_{n-1}^2}{2} \right] \langle j_n | j_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
K(\zeta_f, \zeta_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \prod_{n=1}^N \frac{d\varphi_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^N \frac{e^{-l_n^2}}{\sqrt{\pi}} dl_n \\
&\times \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{j_n, j_{n-1} = -\infty}^{+\infty} \exp \left[ l_n j_n + i j_n \varphi_n - \frac{j_n^2}{2} + l_{n-1} j_{n-1} - i j_{n-1} \varphi_{n-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{j_{n-1}^2}{2} - \frac{i \varepsilon j_n^2}{2B} \right] \delta_{j_n, j_{n-1}} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \prod_{n=1}^N \frac{d\varphi_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^N \frac{e^{-l_n^2}}{\sqrt{\pi}} dl_n \\
&\times \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{j_n, j_{n-1} = -\infty}^{+\infty} \exp \left[ (l_n + l_{n-1}) j_n + i j_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - j_n^2 - \frac{i \varepsilon j_n^2}{2B} \right] \delta_{j_n, j_{n-1}}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Avec  $B = mR^2$  (Le moment inertie)

le résultat est :



$$\begin{aligned}
K(\zeta_f, \zeta_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \prod_{n=1}^N \frac{d\varphi_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-l_n^2)}{\sqrt{\pi}} dl_n \\
&\times \sum_{j_n = -\infty}^{+\infty} \exp \left[ (l_n + l_{n-1}) j_n + i j_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) - j_n^2 - \frac{i \varepsilon j_n^2}{2B} \right]
\end{aligned}$$

on utilise l'intégrale gaussienne pour intégrer sur les  $l_n$  :

$$\begin{aligned}
K(\zeta_f, \zeta_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_n, j_{n-1} = -\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \prod_{n=1}^N \frac{d\varphi_n}{2\pi} \exp \left( -\frac{i \varepsilon j_n^2}{2B} \right) \\
&\times \prod_{n=1}^{N+1} \exp \left[ (l_{N+1} + l_0) j_n + i j_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) - j_n^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Effectuons l'intégrale sur les  $\{\varphi_n\}$

$$K(\zeta_f, \zeta_i; T) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-j^2 + j(l_{N+1} + l_0) + i j (\varphi_{N+1} - \varphi_0) - \left( \frac{i \varepsilon T}{2B\pi} j^2 \right)}, \tag{3.31}$$

$$K(\zeta_f, \zeta_i; T) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-j^2} e^{-i \frac{j^2 T}{2B}} (\zeta_f^* \zeta_i)^{-j}. \tag{3.32}$$

avec :

$$\begin{aligned}\zeta_f^* &= e^{-l_f - i\varphi_f}, \\ \zeta_i &= e^{-l_i + i\varphi_i},\end{aligned}\quad (3.33)$$

On peut refaire ce qui procède en utilisant l'expression de  $\theta_3$  (fonction de Jacobi). En effet, soit la fonction de Jacobi suivante

$$\theta_3(\nu/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi\tau n^2) (\exp(i\pi\nu))^{2n}, \quad (3.34)$$

ou bien

$$\theta_3\left(\frac{\Delta\varphi_j}{2\pi} - i\frac{l_j + l_{j-1}}{2\pi} \mid \frac{i}{\pi} - \frac{\varepsilon}{2\pi B}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 - i\frac{\varepsilon}{2B}n^2 + in\Delta\varphi_j + n(l_j + l_{j-1})}. \quad (3.35)$$

il n'est pas difficile de vérifier que

$$\begin{aligned}K(\zeta_f, \zeta_i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int d\zeta_n d\zeta_n^* \prod_{n=1}^{N+1} \\ &\theta_\alpha\left(\frac{\Delta\varphi_n}{2\pi} - i\frac{l_n + l_{n-1}}{2\pi} \mid \frac{i}{\pi} - \frac{\varepsilon}{2B\pi}\right)\end{aligned}\quad (3.36)$$

Utilisons la propriété de décomposition suivante

$$\begin{aligned}&\theta_\alpha\left(\frac{\varphi - \Psi}{2\pi} - i\frac{l+r}{2\pi} \mid \beta_1 + \beta_2 - \frac{i}{\pi}\right) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p}}{\sqrt{\pi}} dp \theta_\alpha\left(\frac{\varphi - \chi}{2\pi} - i\frac{l+p}{2\pi} \mid \beta_1\right) \theta_\alpha\left(\frac{\chi - \Psi}{2\pi} - i\frac{p+r}{2\pi} \mid \beta_2\right)\end{aligned}\quad (3.37)$$

on obtient

$$K(\zeta_f, \zeta_i, T) = \theta_\alpha\left(\frac{\varphi_f - \varphi_i}{2\pi} - i\frac{l_f + l_i}{2\pi} \mid \frac{i}{\pi} - \frac{T}{2B\pi}\right) \quad (3.38)$$

ou bien sous forme d'une série

$$K(\zeta_f, \zeta_i, T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 - i\frac{T}{2B\pi}n^2 + in(\varphi_f - \varphi_i) + n(l_f + l_i)} \quad (3.39)$$

Ce le résultat (3.31) est identique à (3.39).

Exprimons ce propagateur dans la base angulaire. Pour ce faire écrivons

$$K(\theta_f, \theta_i, T) = \langle \theta_f | \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int H dt \right) | \theta_i \rangle$$

En introduisant maintenant la relation de fermeture(3.22), on obtient

$$K(\theta_f, \theta_i, T) = \int d\zeta_f^* d\zeta_f d\zeta_i^* d\zeta_i \langle \theta_f | \zeta_f \rangle \langle \zeta_i | \theta_i \rangle K(\zeta_f, \zeta_i, T)$$

avec

$$\langle \theta | \zeta \rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{m(l-i\varphi) - \frac{m^2}{2}} \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.40)$$

ce qui donne

$$K(\theta_f, \theta_i, T) = \int d\zeta_f^* d\zeta_f d\zeta_i^* d\zeta_i \langle \theta_f | \zeta_f \rangle \langle \zeta_i | \theta_i \rangle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2} e^{-i\frac{n^2 T}{2B}} (\zeta_f^* \zeta_i)^{-n} \quad (3.41)$$

Utilisons les relations (3.32), (3.40) on obtient

$$\begin{aligned} K(\theta_f, \theta_i, T) &= \int d\zeta_f^* d\zeta_f d\zeta_i^* d\zeta_i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left( m_f(l_f - i\varphi_f) - \frac{m_f^2}{2} \right) \frac{\exp(im_f\theta_f)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-im_i\theta_i)}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \exp \left( m_i(l_i + i\varphi_i) - \frac{m_i^2}{2} \right) \exp(-n^2) \exp \left( -i\frac{n^2 T}{2B} \right) \\ &\quad (\exp(-il_f + \varphi_f)^* \exp(-il_i + \varphi_i))^{-n} \end{aligned} \quad (3.42)$$

ou bien

$$\begin{aligned} K(\theta_f, \theta_i, T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_f}{2\pi} \exp(i(n - m_f)\varphi_f) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_i}{2\pi} \exp(i(n - m_i)\varphi_i) \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl_f}{\sqrt{\pi}} \exp(-l_f^2 + (m_f + n)l_f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl_i}{\sqrt{\pi}} \exp(-l_i^2 + (m_i + n)l_i) \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \exp \left( im_f\theta_f - im_i\theta_i - n^2 - \frac{in^2 T}{2B} - \frac{m_f^2}{2} - \frac{m_i^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

L' integrale sur les  $l_f, l_i$  étant gaussienne et sur les  $\varphi_i, \varphi_f$  donne des symboles de Kronecker, le résultat final du propagateur s'écrit alors comme

$$\begin{aligned}
K(\theta_f, \theta_i, T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - m_f) \delta(n - m_i) \exp \left( \left( \frac{m_i + n}{2} \right)^2 + \left( \frac{m_f + n}{2} \right)^2 \right) \\
&\quad \frac{1}{2\pi} e^{\left( im_f \theta_f - im_i \theta_i - n^2 - \frac{in^2 T}{2B} - \frac{m_f^2}{2} - \frac{m_i^2}{2} \right)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i \left[ n(\theta_f - \theta_i) - \frac{Tn^2}{2B} \right]} \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Ce résultat est exactement le même que celui obtenu par la méthode Faddeev-Senjanovic.

Dans le chapitre suivant, nous allons généraliser cette méthode des états cohérents au cas de dimension supérieure de la sphère.

## 3.2 Cas de la sphère

### 3.2.1 Rappel

Avant d'entamer le cas de la sphère voyant il est préférable de mettre en relief la symétrie qui se cache derrière le cercle. Il n'est pas difficile de s'assurer que relativement au mouvement sur le cercle on a la symétrie  $e(2)$  qui est l'algèbre du groupe de rotation et de translation dans le plan défini par une paire d'opérateurs  $(\hat{J}, \hat{X})$  vérifiant les relations des comutations suivantes

$$[\hat{J}, X_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta} X_\beta \tag{3.45}$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0 \tag{3.46}$$

où  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  est le tenseur totalement antisymétrique,  $\alpha, \beta = 1, 2$ ,  $\hat{J}$  étant le moment angulaire et  $\hat{X}$  l'opérateur position dans le plan.



L'expression de  $X_\alpha$  peut être donnée par

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{r}{2}(U + U^+) \\ X_2 &= \frac{r}{2i}(U - U^+) \end{aligned} \quad (3.47)$$

avec  $r$  : le rayon du cercle (fixé en général) et  $U = e^{i\varphi}$  (l'opérateur unitaire de position).

L'opérateur du Casimir est

$$X_1^2 + X_2^2 = r^2. \quad (3.48)$$

Remarquons que grâce à cet opérateur de Casimir ( $r$  fixé), les opérateurs  $X_\alpha$  avec ( $\alpha = 1, 2$ ) remplacent les opérateurs  $U$  et  $U^+$  dans leur rôle comme opérateurs de position sur le cercle.

Dans le cas de la sphère, faisant de même en remplaçant la symétrie  $e(2)$  par la symétrie  $e(3)$ . On a alors six opérateurs :  $J_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les opérateurs du moment angulaire et  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les opérateurs de la position dans l'espace et vérifiant les relations de commutation suivantes

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, X_j] &= i\varepsilon_{ijk}X_k \\ [X_i, X_j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

avec  $\varepsilon_{ijk}$  est le tenseur totalement antisymétrique,  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

L'algèbre(3.49) possède deux opérateurs Casimirs

$$\mathbf{X}^2 = r^2 \quad (3.50)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{X} = \lambda \quad (3.51)$$

en fixant les valeurs de  $r$  et  $\lambda$  ou plutôt  $r$  et  $\zeta = \frac{\lambda}{r}$ ,  $\zeta$  étant la projection du moment angulaire  $\mathbf{J}$  sur la direction de vecteur rayon  $r$  de la particule se déplaçant sur la sphere, qu'on appelle aussi "twist" de la particule. Par conséquent, il est important d'étudier les propriétés algébriques de ce groupe de symétrie.

Introduisons les opérateurs  $J_\pm$  et  $X_\pm$  définis par

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 \quad (3.52)$$

$$X_{\pm} = X_1 \pm iX_2 \quad (3.53)$$

Ainsi l'algèbre donnée par (3.49) se réécrit comme

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_3 \\ [J_{\pm}, X_{\mp}] &= \pm 2X_3 \\ [J_3, X_{\pm}] &= \pm X_{\pm} \\ [X_+, X_-] &= [X_{\pm}, X_3] = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm} \\ [J_{\pm}, X_{\pm}] &= 0 \\ [J_3, X_3] &= 0 \\ [J_{\pm}, X_3] &= \mp X_{\pm} \end{aligned} \quad (3.55)$$

La représentation de cette algèbre [2] dans la base propre de  $\{J^2, X^2, J_3, J \frac{X}{r}\}$  notée par  $|j, m, r; \zeta\rangle$

$$\mathbf{J}^2 |j, m, r; \zeta\rangle = j(j+1) |j, m, r; \zeta\rangle \quad (3.56)$$

$$\mathbf{X}^2 |j, m, r; \zeta\rangle = r^2 |j, m, r; \zeta\rangle \quad (3.57)$$

$$J_3 |j, m, r; \zeta\rangle = m |j, m, r; \zeta\rangle \quad (3.58)$$

$$\left(\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{X}}{r}\right) |j, m, r; \zeta\rangle = \zeta |j, m, r; \zeta\rangle \quad (3.59)$$

$$J_{\pm} |j, m, r; \zeta\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1, r; \zeta\rangle \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} X_+ |j, m, r; \zeta\rangle &= -r \frac{\sqrt{(j+1)^2 - \zeta^2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{(j+1)\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m+1, r; \zeta\rangle \\ &+ \zeta r \frac{\sqrt{(j-m)(j+m+1)}}{j(j+1)} |j, m+1, r; \zeta\rangle \\ &+ r \frac{\sqrt{j^2 - \zeta^2} \sqrt{(j-m-1)(j-m)}}{j\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m+1, r; \zeta\rangle \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} X_- |j, m, r; \zeta\rangle &= r \frac{\sqrt{(j+1)^2 - \zeta^2} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{(j+1)\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m-1, r; \zeta\rangle \\ &+ \zeta r \frac{\sqrt{(j-m+1)(j+m)}}{j(j+1)} |j, m-1, r; \zeta\rangle \\ &- r \frac{\sqrt{j^2 - \zeta^2} \sqrt{(j+m-1)(j+m)}}{(j+1)\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r; \zeta\rangle \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} X_3 |j, m, r; \zeta\rangle &= r \frac{\sqrt{(j+1)^2 - \zeta^2} \sqrt{(j-m+1)(j+m+1)}}{(j+1)\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m, r; \zeta\rangle \\ &+ \frac{\zeta r m}{j(j+1)} |j, m, r; \zeta\rangle \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$+ r \frac{\sqrt{j^2 - \zeta^2} \sqrt{(j-m)(j+m)}}{j\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m, r; \zeta\rangle \quad (3.64)$$

Ces états vérifient la relation d'orthogonalité suivante

$$\langle j, m; r, \zeta | j', m'; r, \zeta \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (3.65)$$

et la relation de fermeture suivante

$$\sum_{j=|\zeta|}^{\infty} \sum_{m=-j}^j |j, m; r, \zeta\rangle \langle j, m; r, \zeta| = I \quad (3.66)$$

A présent, nous sommes en mesure de construire les états cohérents de la sphère.

### 3.2.2 Les états cohérents de la sphère

On trouve maintenant l'état cohérent sur la sphère en suivant la technique habituelle, c'est à dire, définir un opérateur vectoriel  $Z$  tel que

$$Z|z\rangle = z|z\rangle \quad (3.67)$$

où  $z$  est dite valeur propre de l'état cohérent sur la sphère vérifiant  $z^2 = 1$

$|z\rangle$  est la base propre de  $Z$  dite état cohérent sur la sphère.

Dans ce qui suit, nous allons construire la formule exacte de  $Z$ . Dans ce but, profitons de l'expérience faite sur le cercle et introduisons d'abord un opérateur scalaire matriciel  $Z$  défini par

$$Z = \sigma Z = \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 + \sigma_3 Z_3$$

et par analogie au cas du cercle(3.13), proposons une décomposition polaire pour l'opérateur  $Z$  [1, 11]

$$Z = e^{-k} V. \quad (3.68)$$

$V$  : jouant le rôle de l'opérateur de position, à l'instar de l'opérateur unitaire de position  $U$  du cercle,

$$V = \frac{1}{r} \sigma \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{r} (\sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \sigma_3 X_3) \quad (3.69)$$

$k$  : l'opérateur matriciel de Dirac défini comme

$$K = -(\sigma \cdot \mathbf{J} + 1) = -(\sigma_1 J_1 + \sigma_2 J_2 + \sigma_3 J_3 + 1) \quad (3.70)$$

où  $\mathbf{J}$  est l'opérateur moment angulaire.

Matriciellement on a

$$V = \frac{1}{r} \sigma \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{r} [\sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \sigma_3 X_3] = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_1 + iX_2 & -X_3 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$K = -(\sigma \cdot \mathbf{J} + 1) = -(\sigma_1 J_1 + \sigma_2 J_2 + \sigma_3 J_3 + I) = \left[ \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \right] \quad (3.72)$$

Donnons quelques propriétés de ces opérateurs

$$V.V = 1, V^+ = V, K = K^+ \quad (3.73)$$

$$(tr(\sigma.K))^2 = 4K(K+1) \quad (3.74)$$

En effet, par exemple

$$\begin{aligned} tr(\sigma.K) &= tr \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \vec{i} \right) \\ &+ \left( \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \vec{j} \right) \\ &+ \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \vec{K} \right) \\ &= tr \left( \begin{pmatrix} -J_+ & J_3 - 1 \\ -J_3 - 1 & -J_- \end{pmatrix} \vec{i} \right) \\ &+ \left( \begin{pmatrix} iJ_+ & -i(J_3 - 1) \\ i(-J_3 - 1) & -iJ_- \end{pmatrix} \vec{j} \right) \\ &+ \left( \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ J_+ & -(J_3 - 1) \end{pmatrix} \vec{K} \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} (tr(\sigma.K))^2 &= \left\{ \left[ tr \begin{pmatrix} -J_+ & J_3 - 1 \\ -J_3 - 1 & -J_- \end{pmatrix} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left[ tr \begin{pmatrix} iJ_+ & -i(J_3 - 1) \\ i(-J_3 - 1) & -iJ_- \end{pmatrix} \right]^2 \\ &\quad \left. + \left[ tr \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ J_+ & -(J_3 - 1) \end{pmatrix} \right]^2 \right\} \\ &= (J_+ + J_-)^2 - (J_+ - J_-)^2 + J_3^2 \\ &= 2J_+J_- + 2J_-J_+ + 4J_3^2 \\ &= 2(J_1^2 + J_2^2 + J_3) + 2(J_1^2 + J_2^2 - J_3) + 4J_3^2 \\ &= 4(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)I \end{aligned} \quad (3.76)$$

Evaluons le 2<sup>eme</sup> terme

$$\begin{aligned}
 & 4K(K+1) \\
 = & 4 \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_3 & -J_- \\ -J_+ & J_3 + 1 \end{pmatrix} = \\
 & 4 \begin{pmatrix} J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + i[J_1, J_2] & [J_3, J_1] + i[J_2, J_3] + J_1 - iJ_2 \\ i[J_2, J_3] + [J_1, J_3] + J_1 + iJ_2 & J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + i[J_1, J_2] - J_3 \end{pmatrix} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Utilisons les relations(3.49) on obtient

$$4K(K+1) = 4(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

D' où le résultat

$$(tr(\sigma.K))^2 = 4K(K+1) \quad (3.79)$$

On a aussi

$$[K, V]_+ = tr(K.V) \quad (3.80)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 & K.V \\
 = & \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_{1+iX_2} & -X_3 \end{pmatrix} \\
 = & \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -J_3X_3 - X_3 - J_1X_1 & \alpha \\ +iJ_2X_1 - iJ_1X_2 - J_2X_2 & -J_1X_1 - iJ_2X_{1+} \\ \beta & iJ_1X_2 - J_2X_2 - J_3X_3 + X_3 \end{pmatrix} \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$tr(K.V) = \frac{1}{r}(-2J_3X_3 - 2J_1X_1 - 2J_2X_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

Introduisons le casimir (3.51) on obtient

$$\text{tr}(K.V) = \frac{-1}{r}(2J_3X_3 + 2J_1X_1 + 2J_2X_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\frac{\mathbf{JX}}{r} = -2\zeta \quad (3.83)$$

$\zeta$  étant la valeur propre du casimir  $\frac{\mathbf{JX}}{r}$ .

Calculons maintenant  $[k, V]_+$

$$\begin{aligned} [K, V]_+ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_{1+iX_2} & -X_3 \end{pmatrix} + \\ &\frac{1}{r} \begin{pmatrix} X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_{1+iX_2} & -X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_3 - 1 & -J_- \\ -J_+ & J_3 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -2J_1X_1 - 2J_2X_2 - 2J_3X_3 & 0 \\ 0 & -2J_1X_1 - 2J_2X_2 - 2J_3X_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$[K, V]_+ = \frac{1}{r}(-2J_1X_1 - 2J_2X_2 - 2J_3X_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

De la comparaison entre(3.84) et(3.82) obtient

$$\text{tr}(K.V) = [K, V]_+ \quad (3.85)$$

Il est facile de voir que dans le cas de mouvement circulaire passant par l'équateur, défini semiclassiquement par  $J_1 = J_2 = 0$  et  $X_3 = 0$ ,  $Z$  se réduit à l'opérateur matriciel diagonale avec  $Z$  donne par (3.13). Utilisons la formule (3.80) et(3.83) on aura

$$Z - Z^{-1} = 2\zeta K^{-1} \sinh K \quad (3.86)$$

Restreignons l'étude à la valeur  $\zeta = 0$  assurant ainsi l'invariance de la représentation irréductible de l'algèbre  $e(3)$  dans l'inversion du temps et la parité qui changent le signe du produit  $J.X$ . Clairement exiger le renversement du temps ou l'invariance de la parité quand  $\zeta \neq 0$  l'un doit travailler avec la représentation impliquant  $\zeta$  et  $-\zeta$ . On alors

$$\begin{aligned} Z - Z^{-1} &= 0 \\ Z &= Z^{-1} \end{aligned} \quad (3.87)$$

et

$$Z.Z^{-1} = Z.Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Par ailleurs, utilisons les relations(3.80), (3.83) et(3.85) pour  $\zeta = 0$ , on obtient

$$[k, V]_+ = 0 \quad (3.90)$$

Pour obtenir  $trZ$  on utilise les relations (3.80)avec  $\zeta = 0$

$$trZ = tr(e^{-k}V) = e^{trk}(trV) \quad (3.91)$$

or  $trV = 0$  ce qui donne

$$trZ = 0 \quad (3.92)$$

ceci nous permet l'identification

$$Z = \sigma.Z \quad (3.93)$$

avec  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ . De la relation(3.89) on a

$$\mathbf{Z}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

et

$$[Z_i, Z_j] = 0 \quad (3.95)$$

Utilisant les relations(3.68),(3.69),(3.70) l'expression de  $\mathbf{Z}$  sera donnée par la formule suivante[5]

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = & \left( \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+4\mathbf{J}^2}} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\mathbf{J}^2}\right) + e^{\frac{1}{2}} \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\mathbf{J}^2}\right) \right) \frac{\mathbf{X}}{r} \\ & + i \left( 2 \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+4\mathbf{J}^2}} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\mathbf{J}^2}\right) \right) \mathbf{J} \wedge \frac{\mathbf{X}}{r} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Nous sommes prêt à construire ces états cohérents.



### 3.2.3 Construction explicite

Dans cette section nous construisons les états cohérents donnés par l'équation aux valeurs propres (3.67) en la projetant sur la base  $|j, m; r, \zeta\rangle = |j, m; r, 0\rangle$  et utilisant (3.56), (3.60), (3.61), (3.62) et (3.63) avec  $\zeta = 0$ . Nous arrivons ainsi à un système d'équations différentielles linéaires des coefficients du développement de l'état cohérent  $|z\rangle$  sur la base  $|j, m; r\rangle$ . La solution directe d'un tel système dans le cas général semble être une tâche difficile. Nous adoptons alors la technique suivante : nous résolvons d'abord l'équation aux valeurs propres pour  $\mathbf{n}_3 = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{Z} |n_3\rangle = n_3 |n_3\rangle \quad (3.97)$$

et sachant que (3.96) nous cherchons ensuite les états cohérents de vecteur  $\mathbf{Z}$ .

Utilisant les relations (3.58), (3.60), (3.61), (3.62) et (3.63) (pour  $\zeta = 0$ ), par un calcul direct on obtient

$$\begin{aligned} Z_1 |j, m; r\rangle &= \frac{\alpha}{2r} X_+ |j, m, r; \varepsilon\rangle + \frac{\alpha}{2r} X_- |j, m; r\rangle + \frac{i\beta}{r} J_2 X_3 |j, m; r\rangle \\ &\quad - \frac{\beta}{2r} J_3 X_+ + \frac{\beta}{2r} J_3 X_- |j, m; r\rangle \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \left( \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+4J^2}} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4J^2}\right) + e^{\frac{1}{2}} \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4J^2}\right) \right)$$

$$\beta = \left( 2 \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+4J^2}} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4J^2}\right) \right) \quad (3.98)$$

et

$$X_1 = \frac{X_+ + X_-}{2} \quad (3.99)$$

$$X_2 = \frac{X_+ - X_-}{2i} \quad (3.100)$$

ou bien autrement ( $j \neq \frac{1}{2}$ )

$$\begin{aligned}
Z_1 |j, m; r\rangle = & \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\beta j + \beta\right) \frac{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m+1, r; \varepsilon\rangle \\
& + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\beta j - \frac{\beta}{2}\right) \frac{\sqrt{(j-m-1)(j-m)}}{\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m+1, r; \varepsilon\rangle + \\
& + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\beta j - \beta\right) \frac{\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m-1, r; \varepsilon\rangle \\
& + \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\beta j + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\sqrt{(j+m)(j+m-1)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r; \varepsilon\rangle
\end{aligned}$$

En introduisant les formules de  $\alpha$  et  $\beta$  on arrive à

$$\begin{aligned}
Z_1 |j, m; r\rangle = & \left\{ -\frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) + e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) - e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] \right\} \\
& \frac{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m+1, r\rangle \\
& + \left\{ \frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) - e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) + e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] \right\} \\
& \frac{\sqrt{(j-m-1)(j-m)}}{\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m+1, r; \varepsilon\rangle + \\
& + \left\{ -\frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) - e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) + e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] \right\} \\
& \frac{\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m-1, r\rangle \\
& + \left\{ -\frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) + e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} \left[ e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) - e^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] \right\} \\
& \frac{\sqrt{(j+m)(j+m-1)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r\rangle
\end{aligned} \tag{3.101}$$

ou bien finalement

$$\begin{aligned}
& Z_1 |j, m; r\rangle \\
= & -\frac{1}{2} \exp(-j-1) \frac{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m+1, r\rangle \\
& + \frac{1}{2} \exp(j) \frac{\sqrt{(j-m-1)(j-m)}}{\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m+1, r; \epsilon\rangle \\
& + \frac{1}{2} [\exp((-j-1))] \frac{\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m-1, r\rangle \\
& - \frac{1}{2} [\exp(j)] \frac{\sqrt{(j+m)(j+m-1)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r\rangle
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Calculons maintenant ( $j \neq \frac{1}{2}$ )

$$\begin{aligned}
& Z_2 |j, m; r\rangle \\
= & \left( \frac{\alpha}{2r} X_2 + i \frac{\beta}{r} (J_3 X_1 - J_1 X_3) \right) |j, m; r\rangle \\
= & \left( \frac{\alpha}{2ir} (X_+ - X_-) + i \frac{\beta}{r} \left( \frac{1}{2} J_3 (X_+ + X_-) - J_1 X_3 \right) \right) |j, m; r\rangle
\end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
& Z_2 |j, m; r\rangle \\
= & \frac{1}{2} i (\alpha - 2\beta - \beta j) \frac{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m+1, r; \epsilon\rangle + \\
& \frac{1}{2} i (\alpha - 2\beta - \beta j) \frac{\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m-1, r; \epsilon\rangle \\
& + \frac{1}{2} i (-\alpha + \beta - \beta j) \frac{\sqrt{(j+m)(j-1+m)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r; \epsilon\rangle \\
& + \frac{1}{2} i \left( \beta - \beta j - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sqrt{(j-m)(j-1-m)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m+1, r; \epsilon\rangle
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Introduisons les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$ , nous aurons

$$\begin{aligned}
Z_2 |j, m; r\rangle &= \frac{1}{2}i \left\{ \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] \right\} \\
&\quad \frac{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m+1, r; \varepsilon\rangle + \\
&\quad \frac{1}{2}i \left\{ \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right] \right\} \\
&\quad \frac{\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m-1, r; \varepsilon\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}i \left\{ -\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] \right\} \\
&\quad \frac{\sqrt{(j+m)(j-1+m)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r; \varepsilon\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}i \left\{ -\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right] \right\} \\
&\quad \frac{\sqrt{(j-m)(j-1-m)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m+1, r; \varepsilon\rangle
\end{aligned} \tag{3.104}$$

ou bien finalement

$$\begin{aligned}
Z_2 |j, m; r\rangle &= \frac{1}{2} i (\exp(-j-1)) \frac{\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \\
&|j+1, m+1, r; \varepsilon\rangle + \\
&\frac{1}{2} i (\exp(-j-1)) \frac{\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \\
&|j+1, m-1, r; \varepsilon\rangle \\
&-\frac{1}{2} i (\exp(j)) \frac{\sqrt{(j+m)(j-1+m)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m-1, r; \varepsilon\rangle \\
&-\frac{1}{2} i (\exp(j)) \frac{\sqrt{(j-m)(j-1-m)}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} |j-1, m+1, r; \varepsilon\rangle \quad (3.105)
\end{aligned}$$

Calculons ( $j \neq \frac{1}{2}$ )

$$\begin{aligned}
&Z_3 |j, m; r\rangle \\
&= \left( \frac{\alpha}{2r} X_3 + i \frac{\beta}{r} (J_1 X_2 - J_2 X_1) \right) |j, m; r\rangle
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
Z_3 |j, m; r\rangle &= \left( \frac{\alpha}{2} - \beta(j+2) \right) \frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m, r; \varepsilon\rangle + \\
&\left( \frac{\alpha}{2} + \beta(j-1) \right) \frac{\sqrt{(j-m)(j+m)}}{\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m, r; \varepsilon\rangle
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
Z_3 |j, m; r\rangle &= \left\{ [1 - 2(j+2)] \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(2j+3)} \sinh\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \cosh\left(\frac{1}{2}(2j+3)\right) \right\} \\
&\frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m, r; \varepsilon\rangle \\
&+ \left\{ (1 + 2(j-1)) \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(2j-1)} \sinh\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \cosh\left(\frac{1}{2}(2j-1)\right) \right\} \\
&\frac{\sqrt{(j-m)(j+m)}}{\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m, r; \varepsilon\rangle
\end{aligned}$$

Le résultat final est

$$\begin{aligned} Z_3 |j, m; r\rangle &= (\exp(-j-1)) \frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} |j+1, m, r; \varepsilon\rangle \\ &+ (\exp(j)) \frac{\sqrt{(j-m)(j+m)}}{\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} |j-1, m, r; \varepsilon\rangle \end{aligned} \quad (3.106)$$

La solution de l'équation(3.97) est donnée par

$$|n_3\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} |j, 0, r\rangle \quad (3.107)$$

Introduisons l'opérateur  $w$  défini par

$$w = \frac{ar \cosh z_3}{\sqrt{1-z_3^2}} Z \wedge n_3 \quad (3.108)$$

Avec  $z = (z_1, z_2, z_3)$

cet opérateur vérifie

$$[w, J, Z] = -iw \wedge Z \quad (3.109)$$

et

$$e^{w \cdot J} Z e^{-w \cdot J} = \cosh \sqrt{w^2} Z - i \frac{\sinh \sqrt{w^2}}{\sqrt{w^2}} w \wedge Z + \frac{1 - \cosh \sqrt{w^2}}{w^2} w(w \cdot Z) \quad (3.110)$$

Suivant les relations (3.110)et(3.67) l'état cohérent dans une position quelconque se déduit par la formule

$$|z\rangle = e^{w \cdot J} |n_3\rangle \quad (3.111)$$

ou autrement

$$|z\rangle = \exp \left( \frac{ar \cosh z_3}{\sqrt{1-z_3^2}} (Z \wedge n_3) \cdot J \right) |n_3\rangle \quad (3.112)$$

Utilisons les relations de commutation du moment angulaire on montre que

$$e^{w \cdot J} = \exp(\mu J_-) \exp(\gamma J_3) \exp(\nu J_+)$$

avec

$$\mu = \frac{z_1 + iz_2}{1 + z_3}, \gamma = \frac{-z_1 + iz_2}{1 + z_3}, \nu = \ln \left( \frac{1 + z_3}{2} \right) \quad (3.113)$$

ce qui permet d'écrire

$$|z\rangle = \exp(\mu J_-) \exp(\gamma J_3) \exp(\nu J_+) |n_3\rangle \quad (3.114)$$

Finalement, l'utilisation des relations (3.114), (3.107), (3.56), (3.58) et (3.60) donne

$$|z\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j+m} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sum_{m=0}^j \frac{\nu^m (j+m)!}{(j-m)!} e^{\gamma m} \frac{\mu^k}{k!} \sqrt{\frac{(j-m+k)!}{(j+m-k)!}} |j, m-k; r\rangle \quad (3.115)$$

Projetons cet état cohérent sur la base  $|j, m; r\rangle$  on trouve

$$\begin{aligned} \langle j, m; r | z \rangle &= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \frac{(2|m|)!}{|m|!} \sqrt{\frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} \\ &\quad \left( \frac{-\varepsilon(m) z_1 + iz_2}{2} \right)^{|m|} C_{j-|m|}^{|m|+\frac{1}{2}}(z_3) \end{aligned} \quad (3.116)$$

où  $\varepsilon(m)$  est le signe de  $m$  et on a utilisé l'identité suivante [12]

$$\sum_{s=0}^n \frac{(s+k)!}{(s+m)! s! (n-s)!} z^s = \frac{k!}{m! n!} {}_2F_1(-n, k+1, m+1; -z) \quad (3.117)$$

et la définition du polynôme de Gegenbauer [12]

$$C_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} {}_2F_1\left(-n, n+2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-x)\right) \quad (3.118)$$

${}_2F_1(a, b, c; z)$  étant la fonction hypergéométrique de Gauss. La relation d'orthogonalité de ces états cohérent sera alors

$$\langle z | w \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j(j+1)} (2j+1) P_j(z^* \cdot w) \quad (3.119)$$

$P_j(z^* \cdot w)$  le polynôme de Legendre défini par [12]

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (3.120)$$

Déterminons la relation de fermeture de ces états cohérents. Elle se déduit comme suit :

La paramétrisation complexe naturelle utilisant l'espace des phases [9] du nombre complexe  $z$  est donnée par

$$z = \cosh |\mathbf{l}| \frac{\mathbf{x}}{r} + i \frac{\sinh |\mathbf{l}|}{|\mathbf{l}|} \mathbf{l} \wedge \frac{\mathbf{x}}{r}$$

où  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{x} \in R^3$  avec  $\mathbf{x} = r^2$  et  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{x} = 0$ .

Sur la sphère unité, utilisons  $\mathbf{x} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  et la norme  $l = |\mathbf{l}|$  et  $\alpha$  l'angle entre  $\mathbf{l}$  et le méridien passant par le point  $\mathbf{x}$  la paramétrisation précédente devient

$$\begin{aligned} z_1 &= \cosh l \sin \theta \cos \varphi + i \sinh l (\sin \alpha \cos \theta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \\ z_2 &= \cosh l \sin \theta \sin \varphi + i \sinh l (\sin \alpha \cos \theta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi) \\ z_3 &= \cosh l \cos \theta - i \sinh l \sin \alpha \sin \theta \end{aligned} \quad (3.121)$$

La relation de fermeture de ces états cohérents sur la sphère s'écrit comme

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty h(l) dl |z(\theta, \varphi, \alpha, l)\rangle \langle z(\theta, \varphi, \alpha, l)| = 1 \quad (3.122)$$

où  $h(l)$  est une fonction densité à déterminer.

Pour ce faire, utilisons l'espace de Bargmann. Soit le produit scalaire dans cet espace donné par

$$\begin{aligned} &\langle \Phi | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty h(l) dl \langle \Phi | z(\theta, \varphi, \alpha, l) \rangle \langle z(\theta, \varphi, \alpha, l) | \Psi \rangle \\ &\quad \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty h(l) dl (\Phi(z^*(\theta, \varphi, \alpha, l)))^* \Psi(z^*(\theta, \varphi, \alpha, l)) \end{aligned} \quad (3.123)$$

avec

$$\Phi(z^*) = \langle z(\theta, \varphi, \alpha, l) | \Phi \rangle$$

et

$$z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*).$$



On sait que

$$\begin{aligned}
 e_{j,m}(z(\theta, \varphi, \alpha, l)) &= \langle j, m | z \rangle \\
 e_{j,m}(z(\theta, \varphi, \alpha, l)) &= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \frac{(2|m|)!}{|m|!} \sqrt{\frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} \\
 &\quad \left( \frac{-\varepsilon(m) z_1 + iz_2}{2} \right)^{|m|} C_{j-|m|}^{|m|+\frac{1}{2}}(z_3)
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

avec  $|j, m\rangle = |j, m, l\rangle$ .

Pour calculer  $\langle j, m | j', m' \rangle$  on utilise la relation (3.122) et (3.124)

$$\begin{aligned}
 \langle j, m | j', m' \rangle &= \langle j, m | I | j', m' \rangle \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty h(l) dl \\
 &\quad (e_{j,m}(z^*(\theta, \varphi, \alpha, l)))^* e_{j',m'}(z^*(\theta, \varphi, \alpha, l))
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

ce qui donne

$$\langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} e^{-j(j+1)} \int_0^\infty h(l) dl P_j(\cosh 2l) \tag{3.126}$$

avec  $P_j(\cosh 2l)$  le polynôme de Legendre.

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \tag{3.127}$$

Pour satisfaire la relation d'orthogonalité il faut que l'intégrale soit égale à

$$\int_0^\infty h(l) P_j(\cosh 2l) dl = e^{j(j+1)} \tag{3.128}$$

Ce polynôme de Legendre vérifie l'équation différentielle suivante

$$\left( (z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} + 2z \frac{d}{dz} \right) P_n(z) = n(n+1) P_n(z) \tag{3.129}$$

on pose  $z = \cosh \rho$  donc on a :

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{\sinh \rho} \frac{d}{d\rho} \tag{3.130}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \left( -\frac{\cosh \rho}{\sinh^3 \rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\sinh^2 \rho} \frac{d^2}{d^2 \rho} \right) \quad (3.131)$$

on remplace dans l'equation(3.129) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ (\cosh^2 \rho - 1) \left( -\frac{\cosh \rho}{\sinh^3 \rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\sinh^2 \rho} \frac{d^2}{d^2 \rho} \right) + 2 \frac{\cosh \rho}{\sinh \rho} \frac{d}{d\rho} \right] P_n(\cos h\rho) \\ = & n(n+1)P_n(\cos h\rho) \end{aligned} \quad (3.132)$$

avec :

$$\cosh^2 \rho - 1 = \sinh^2 \rho \quad (3.133)$$

L'equation(3.129)devient :

$$\left( \frac{d^2}{d^2 \rho} + \frac{\cosh \rho}{\sinh \rho} \frac{d}{d\rho} \right) P_n(\cos h\rho) = n(n+1)P_n(\cos h\rho) \quad (3.134)$$

ou

$$\frac{1}{\sinh \rho} \frac{d}{d\rho} \sinh \rho \frac{d}{d\rho} P_n(\cos h\rho) = n(n+1)P_n(\cos h\rho) \quad (3.135)$$

La forme de l'equation (3.135)est la même que celle de Laplace (aux valeurs propres) dans l'espace hyperbolique  $H^2$  [10]

$$\frac{\partial}{\partial t} k_{H^2}(\rho, t) = \frac{1}{\sinh \rho} \frac{d}{d\rho} \sinh \rho \frac{d}{d\rho} k_{H^2}(\rho, t) \quad (3.136)$$

La solution de cette équation s'écrit comme [10]

$$k_{H^2}(\rho, t) = \sqrt{2} (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}} \int_{\rho}^{\infty} \frac{se^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s - \cosh \rho)} ds \quad (3.137)$$

C'est a dire

$$\begin{aligned} k_{H^2}(\rho, t) &= \sqrt{2} (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}} (-4t) \\ & \sum_{n=0}^N \frac{(-c)^n}{n} (2n) ((\cosh s - \cosh \rho))^{-\frac{1}{2}} I_{\rho}^{\infty} \end{aligned} \quad (3.138)$$

et obéit à la condition de normalisation suivante

$$2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} k_{H^2}(\rho, t) f(\rho) \sinh \rho \partial \rho = f(0) \quad (3.139)$$

$f(\rho)$  :  $c'$  est une fonction continue arbitraire.

Pour

$$f(\rho) = P_j(\cos h\rho) \quad (3.140)$$

on utilise l'équation (3.136) et (3.139) on obtient :

$$2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} k_{H^2}(\rho, t) P_j(\cos h\rho) \sinh \rho \partial \rho = e^{tn(n+1)} \quad (3.141)$$

on pose

$$(\rho = 2l, t = 1) \quad (3.142)$$

$$2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} 2k_{H^2}(2l, 1) P_j(\cos h(2l)) \sinh(2l) dl = e^{n(n+1)} \quad (3.143)$$

comparons (3.143) avec (3.128) on obtient :

$$h(l) = 4\pi k_{H^2}(2l, 1) \sinh(2l) \quad (3.144)$$

donc :

$$h(l) = \frac{e^{-\frac{1}{4}} \sinh(2l)}{\sqrt{2\pi}} \int_{2l}^{\infty} \frac{se^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s - \cosh(2l))^{\frac{1}{2}}} ds \quad (3.145)$$

La relation (3.123) devient alors

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Psi \rangle &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}} \sinh(2l)}{\sqrt{2\pi}} \\ &\int_{2l}^{\infty} \frac{se^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s - \cosh(2l))^{\frac{1}{2}}} ds dl \langle \Phi | z(\theta, \varphi, \alpha, l) \rangle \langle z(\theta, \varphi, \alpha, l) | \Psi \rangle \quad (3.146) \end{aligned}$$

et la relation de fermeture s'écrit comme

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4}} \sinh(2l)}{\sqrt{2\pi}} \int_{2l}^\infty \frac{se^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s - \cosh(2l))^{\frac{1}{2}}} ds dl |z(\theta, \varphi, \alpha, l)\rangle \langle z(\theta, \varphi, \alpha, l)| = 1 \quad (3.147)$$

Ces relations se réduisent à :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{Z^2=1} d\mu(z) (\Phi(Z^*))^* \Psi(Z^*) \quad (3.148)$$

$$\int_{Z^2=1} d\mu(z) |z\rangle \langle z| = 1 \quad (3.149)$$

avec

$$d\mu(z) = \frac{1}{4\pi} k_{H^2}(\operatorname{arccosh}(z \cdot z^*), 1) dz_1 dz_2 dz_3 dz_1^* dz_2^* dz_3^*$$

et on a utilisé les relations (3.121) et (3.144) et l'expression :

$$Z = \cosh \left| 1 \right| \frac{X}{r} + i \frac{\sinh \left| 1 \right|}{\left| 1 \right|} L \wedge \frac{X}{r} \quad (3.150)$$

pour déterminer la relation

$$Z \cdot Z^* = \left| Z^2 \right| = \cosh 2l \quad (3.151)$$

On a aussi

$$\langle z | w \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j(j+1)} (2j+1) P_j(z^* \cdot w) \quad (3.152)$$

Avec :  $w$  est l'état cohérent sur la sphère

Une conséquence de l'équation (3.67) est

$$\langle z | Z^+ | \Phi \rangle = z^+ \langle z | \Phi \rangle \quad (3.153)$$

$$Z^+ \Phi(z^*) = z^+ \Phi(z^*) \quad (3.154)$$

L'action de l'opérateur  $J^2$  sur la base (3.127)

$$e_{j,m} = \langle z | j, m \rangle \quad (3.155)$$

est

$$\mathbf{J}^2 e_{j,m} = j(j+1) e_{j,m} \quad (3.156)$$

Utilisons l'équation (3.124), l'équation différentielle satisfaite par le polynôme de Gegenbauer :

$$\left( (z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} + (2\lambda + 1) \frac{d}{dz} - n(2\lambda + n) \right) C_n^\lambda(z) = 0 \quad (3.157)$$

donne

$$\mathbf{J}^2 \Phi(z^*) = - \left( z^* \frac{d}{dz^*} \right)^2 \Phi(z^*) \quad (3.158)$$

Les relations (3.158) et (3.154) donnent aussi

$$\mathbf{J} \Phi(z^*) = -i \left( z^* \frac{d}{dz^*} \right) \Phi(z^*) \quad (3.159)$$

Maintenant avec ce bagage, on est en mesure de construire et de solutionner le propagateur de la particule libre sur la sphère dans la représentation des états cohérents.

### 3.3 Construction et calcul du propagateur

Soit une particule libre se déplaçant sur la sphère. L'hamiltonien est donné par

$$H = \frac{\mathbf{J}^2}{2B} \quad (3.160)$$

$\mathbf{J}$  est le moment angulaire (le groupe de rotation) et  $B = mR^2$  est le moment d'inertie ( $R$  : le rayon de la sphère).

Le propagateur  $K$  est défini comme d'habitude par

$$\begin{aligned}
K(z_f, z_i, T) &= \langle z_f | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt\right) | z_i \rangle \\
&= \langle z_f | \left( \exp \frac{\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt\right)}{(N+1)} \right)^{(N+1)} | z_i \rangle
\end{aligned}$$

où

$$\varepsilon = \frac{T}{(N+1)}$$

Insérons la relation de fermeture (3.149) on obtient

$$K(z_f, z_i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \langle z_n | \exp\left(-i \varepsilon \frac{J^2}{2B}\right) | z_{n-1} \rangle \prod_{n=1}^N d\mu(z_{(n)})$$

et

$$z_n = z(\theta_n, \varphi_n, \alpha_n, l_n) \quad (3.161)$$

$$z_{n-1} = z(\theta_{(n-1)}, \varphi_{(n-1)}, \alpha_{(n-1)}, l_{(n-1)}) \quad (3.162)$$

Pour pouvoir avancer dans les calculs (évaluation de l'action de l'opérateur  $J$ ) passant à la base  $|j, m; r\rangle$

$$\begin{aligned}
|z_{(n-1)}\rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sum_{m=0}^j \frac{\nu_{(n-1)}^m (j+m)!}{m! (j-m)!} e^{\gamma_{(n-1)} m} \\
&\times \sum_{k=0}^{j+m} \frac{\mu_{(n-1)}^k}{k!} \sqrt{\frac{(j-m+k)!}{(j+m-k)!}} |j, m-k; r\rangle
\end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned}
\langle z_{(n)} | &= \sum_{j'=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j'(j'+1)} \sqrt{2j'+1} \sum_{m'=0}^{j'} \frac{(\nu^*)_{(n)}^{m'} (j'+m')!}{m'! (j'-m')!} \\
&\times e^{(\gamma^*)_{(n)} m'} \sum_{k=0}^{j'+m'} \frac{(\mu^*)_{(n)}^{k'}}{k'!} \\
&\times \sqrt{\frac{(j'-m'+k')!}{(j'+m'-k')!}} \langle j', m'-k'; r |
\end{aligned} \quad (3.164)$$

Par ailleurs on a

$$K(z_f, z_i, T) = \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} (\langle z_n | z_{(n-1)} \rangle - \frac{i\varepsilon}{2B} \langle z_n | J^2 | z_n \rangle) \prod_{n=1}^N d\mu(z_{(n)}) \quad (3.165)$$

On introduit alors la relation (3.115) on obtient :

$$\begin{aligned} K(z_f, z_i, T) = & \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_{n,n-1}=0}^{\infty} \sum_{m_{n,n-1}=0}^j \frac{1}{k_n! k_{n-1}!} e^{-\frac{1}{2}j_{n-1}(j_{n-1}+1) - \frac{1}{2}j_n(j_n+1)} \sqrt{(2j_{n-1}+1)(2j_n+1)} \\ & \times \frac{(j_{n-1} - m_{n-1} + k_{n-1})! (j_n - m_n + k_n)!}{(j_{n-1} + m_{n-1} - k_{n-1})! (j_n + m_n - k_n)!} \\ & \times \frac{(j_{n-1} + m_{n-1})! (j_n + m_n)!}{m_{n-1}! (j_{n-1} - m_{n-1})! m_n! (j_n - m_n)!} \\ & \times \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \left[ \langle j_n, m_n - k_n; r | j_{n-1}, m_{n-1} - k_{n-1}; r \rangle - \right. \\ & \left. \frac{i\varepsilon}{2B} j_{n-1}(j_{n-1}+1) \langle j_n, m_n - k_n; r | j_{n-1}, m_{n-1} - k_{n-1}; r \rangle \right] \\ & \times \nu_{(n-1)}^{m_{n-1}} \mu_{(n-1)}^{k_{n-1}} e^{(\gamma_{(n-1)} m_{n-1} + \gamma_{(n)}^* m_n)} (\nu^*)_{(n)}^{m_n} (\mu^*)_{(n)}^{k_n} \prod_{n=1}^N d\mu(z_{(n)}) \quad (3.166) \end{aligned}$$

où

$$\nu_{(n)} = \frac{z_{1n} + iz_{2n}}{1 + z_{3n}}, \quad \mu_{(n)} = \frac{-z_{1n} + iz_{2n}}{1 + z_{3n}}, \quad \gamma_n = \frac{1 + z_{3n}}{2}$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} K(z_f, z_i, T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_{n,n-1}=0}^{\infty} \sum_{m_{n,n-1}=0}^j \frac{1}{k_n! k_{n-1}!} e^{-\frac{1}{2}j_{n-1}(j_{n-1}+1) - \frac{1}{2}j_n(j_n+1)} \sqrt{(2j_{n-1}+1)(2j_n+1)} \\ & \times \frac{(j_{n-1} - m_{n-1} + k_{n-1})! (j_n - m_n + k_n)! (j_{n-1} + m_{n-1})! (j_n + m_n)!}{(j_{n-1} + m_{n-1} - k_{n-1})! (j_n + m_n - k_n)! m_{n-1}! (j_{n-1} - m_{n-1})! m_n! (j_n - m_n)!} \\ & \times \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{2B} j_{n-1}(j_{n-1}+1) \right) \delta_{j_n j_{n-1}} \delta_{m_n m_{n-1}} \nu_{(n-1)}^{m_{n-1}} \mu_{(n-1)}^{k_{n-1}} \\ & \times e^{(\gamma_{(n-1)} m_{n-1} + \gamma_{(n)}^* m_n)} (\nu^*)_{(n)}^{m_n} (\mu^*)_{(n)}^{k_n} \prod_{n=1}^N d\mu(z_{(n-1)}) \quad (3.167) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j \frac{1}{k_n! k_{n-1}!} e^{-\frac{1}{2}j_{n-1}(j_{n-1}+1) - \frac{1}{2}j_n(j_n+1)} \sqrt{(2j_{n-1}+1)(2j_n+1)} \\
&\times \frac{(j_{n-1} - m_{n-1} + k_{n-1})! (j_n - m_n + k_n)!}{(j_{n-1} + m_{n-1} - k_{n-1})! (j_n + m_n - k_n)!} \frac{(j_{n-1} + m_{n-1})!}{m_{n-1}!} \frac{(j_n + m_n)!}{m_n!} \frac{(j_n - m_n)!}{(j_{n-1} - m_{n-1})!} \\
&\times \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2B} j_{n-1}(j_{n-1}+1)\right) \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \left(\ln\left(\frac{1+z_{3(n-1)}}{2}\right)\right)^{m_{n-1}} \left(\left(\ln\left(\frac{1+z_{3n}}{2}\right)\right)^*\right)^{m_n} \\
&\times e^{\left(\left(\frac{-z_{1(n-1)}+iz_{2(n-1)}}{1+z_{3(n-1)}}\right) m_{(n-1)} + \left(\frac{-z_{1n}+iz_{2n}}{1+z_{3n}}\right)^* m_n\right)} \left(\frac{z_{1(n-1)}+iz_{2(n-1)}}{1+z_{3(n-1)}}\right)^{k_{n-1}} \left(\left(\frac{z_{1n}+iz_{2n}}{1+z_{3n}}\right)^*\right)^{k_n} \\
&\times \delta_{j_n j_{n-1}} \delta_{m_n m_{n-1}} \prod_{n=1}^N d\mu(\mathbf{z}_{(n)}) \tag{3.168}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j \frac{1}{k_n! k_{n-1}!} e^{-\frac{1}{2}j_{n-1}(j_{n-1}+1) - \frac{1}{2}j_n(j_n+1)} \sqrt{(2j_{n-1}+1)(2j_n+1)} \\
&\times \frac{(j_{n-1} - m_{n-1} + k_{n-1})! (j_n - m_n + k_n)!}{(j_{n-1} + m_{n-1} - k_{n-1})! (j_n + m_n - k_n)!} \frac{(j_{n-1} + m_{n-1})!}{m_{n-1}!} \frac{(j_n + m_n)!}{m_n!} \frac{(j_n - m_n)!}{(j_{n-1} - m_{n-1})!} \\
&\times \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2B} j_{n-1}(j_{n-1}+1)\right) \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \left(\ln\left(\frac{1+z_{3(n-1)}}{2}\right)\right)^{m_{n-1}} \\
&\times \left(\left(\ln\left(\frac{1+z_{3n}^*}{2}\right)\right)\right)^{m_n} \left(\frac{z_{1(n-1)}+iz_{2(n-1)}}{1+z_{3(n-1)}}\right)^{k_{n-1}} \left(\left(\frac{z_{1n}^* - iz_{2n}^*}{1+z_{3n}^*}\right)\right)^{k_n} \\
&\times \exp\left(\left(\frac{-z_{1(n-1)}+iz_{2(n-1)}}{1+z_{3(n-1)}}\right) m_{n-1} + \left(\frac{-z_{1n}^* - iz_{2n}^*}{1+z_{3n}^*}\right) m_n\right) \\
&\times \langle j_n, m_n, r_n | j_{n-1}, m_{n-1}, r_{n-1} \rangle \prod_{n=1}^N d\mu(\mathbf{z}_{(n)}) \tag{3.169}
\end{aligned}$$

on introduit la relation(3.115) on obtient :

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_{n,n-1}=0}^{\infty} \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2B} j_{n-1}(j_{n-1}+1)\right) \\
&\times \prod_{n=1}^N \langle \mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{(n-1)} \rangle d\mu(\mathbf{z}_{(n)}) \tag{3.170}
\end{aligned}$$

Ce qui permet suivant la relation (3.119) l'écriture suivante



$$K(z_f, z_i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_{n,n-1}=0}^{\infty} \int_{z^2=1} \prod_{n=1}^{N+1} \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2B} j_{n-1}(j_{n-1}+1)\right) \\ \times e^{j_{n-1}(j_{n-1}+1)} (2j_{n-1}+1) P_j(z_n^* z_{(n-1)}) \prod_{n=1}^N d\mu(z_{(n)}) \quad (3.171)$$

Cette expression est le propagateur de la particule libre dans les états cohérents dans le formalisme des intégrales de chemin de Feynman. Passons maintenant à l'évaluation de cette intégrale.

Pour pouvoir intégrer utilisons l'astuce suivante :

D'après la relation de fermeture (3.149) on a

$$\langle z | w \rangle = \int d\mu(t) \langle z | t \rangle \langle t | w \rangle = \int d\mu(t) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j(j+1)} (2j+1) P_j(z^* \cdot t) \\ \times \sum_{j'=0}^{\infty} e^{-j'(j'+1)} (2j'+1) P_j(t^* \cdot w) \\ = \sum_{j,j'=0}^{\infty} e^{-j(j+1)-j'(j'+1)} (2j+1)(2j'+1) \int d\mu(t) P_j(z^* \cdot t) P_{j'}(t^* \cdot w) \quad (3.172)$$

La comparaison avec (3.119) donne

$$\int d\mu(t) P_j(z^* \cdot t) P_{j'}(t^* \cdot w) = \delta_{jj'} \frac{e^{j'(j'+1)}}{(2j'+1)} P_j(z^* \cdot w)$$

et en particulier

$$\int d\mu(t) P_j(z^* \cdot t) P_j(t^* \cdot w) = \frac{\exp(j(j+1))}{(2j+1)} P_j(z^* \cdot w) \quad (3.173)$$

Appliquons itérativement cette relation, on obtient

si  $N = 2$  :

$$K(z_f, z_i, T) = \sum_{j_{n,n-1}=0}^{\infty} \int_{z^2=1} \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2B} j_0(j_0+1) - \frac{i\varepsilon}{2B} j_1(j_1+1)\right) \\ \times \frac{1}{\delta_{j_1, j_0} (2j_1+1)} \\ \times e^{-j_0(j_0+1)-j_1(j_1+1)} (2j_0+1)(2j_1+1) \\ \times P_{j_0}(z_1^* z_0) P_{j_1}(z_2^* z_1) d\mu(z_1)$$

$$K(\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_i, T) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{i\pi}{B}j(j+1)-j(j+1)}(2j+1)P_j(\mathbf{z}_2^*\mathbf{z}_0)$$

si  $N = 3$

$$K(\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_i, T) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{i3\pi}{2B}j(j+1)-j(j+1)}(2j+1)P_j(\mathbf{z}_3^*\mathbf{z}_0)$$

Continuons jusqu'à tout les ordres on obtient

$$K(\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_i, T) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{iT}{2B}j(j+1)-j(j+1)}(2j+1)P_j(\mathbf{z}_f^*\mathbf{z}_i) \quad (3.174)$$

Cette expression représente notre principale résultat du propagateur de la particule libre se déplaçant sur la sphère en représentation des états cohérents.

Comparons ce résultat avec celui de la littérature. Par conséquent, effectuons le passage à l'espace de configuration (coordonnées sphériques) :

$$K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, T) = \langle \mathbf{X}_f | \exp\left(-\int H dt\right) | \mathbf{X}_i \rangle \quad (3.175)$$

Introduisons la relation de fermeture (3.149) :

$$K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, T) = \int_{Z^2=1} d\mu(\mathbf{z}_f) d\mu(\mathbf{z}_i) \langle \mathbf{X}_f | \mathbf{z}_f \rangle \langle \mathbf{z}_f | \exp\left(-\int H dt\right) | \mathbf{z}_i \rangle \langle \mathbf{z}_i | \mathbf{X}_i \rangle \quad (3.176)$$

avec :

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{z} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (2j+1) P_j(\mathbf{X} \cdot \mathbf{z}) \quad (3.177)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, T) \\ &= \sum_{j', j_i, j_f=0}^{+\infty} \int_{Z^2=1} d\mu(\mathbf{z}_f) d\mu(\mathbf{z}_i) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}j_f(j_f+1)} (2j_f+1) P_{j_f}(\mathbf{X}_f \cdot \mathbf{z}_f) \\ & \times e^{-\frac{iT}{2B}j'(j'+1)-j'(j'+1)} (2j'+1) P_{j'}(\mathbf{z}_f^* \cdot \mathbf{z}_i) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (2j+1) P_j(\mathbf{z}_i^* \cdot \mathbf{X}_i) \end{aligned} \quad (3.178)$$

Utilisons maintenant la relation(3.173), le résultat devient

$$\begin{aligned}
 K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, T) &= \sum_{j' j_i j_f=0}^{+\infty} \int_{Z^2=1} d\mu(\mathbf{z}_i) \frac{e^{j_f(j_f+1)}}{(2j_f+1)} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}j_f(j_f+1)} (2j_f+1) \\
 &\times e^{-\frac{i\pi}{2B}j'(j'+1)-j'(j'+1)} (2j'+1) \delta_{j_f, j'} \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{\frac{1}{2}j_i(j_i+1)} (2j_i+1) P_{j_f}(\mathbf{X}_f \cdot \mathbf{z}_i) P_{j_i}(\mathbf{z}_i^* \cdot \mathbf{X}_i) \quad (3.179)
 \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, T) &= \sum_{j' j_i j_f=0}^{+\infty} \int_{Z^2=1} d\mu(\mathbf{z}_i) e^{j_f(j_f+1)} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}j_f(j_f+1)} \\
 &\times e^{-\frac{i\pi}{2B}j_f(j_f+1)-j_f(j_f+1)} (2j_f+1) \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{\frac{1}{2}j_i(j_i+1)} (2j_i+1) P_{j_f}(\mathbf{X}_f \cdot \mathbf{z}_i) P_{j_i}(\mathbf{z}_i^* \cdot \mathbf{X}_i) \quad (3.180)
 \end{aligned}$$

ou bien simplement

$$K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, T) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{i\pi}{2B}j(j+1)} (2j+1) P_j(\mathbf{X}_f \cdot \mathbf{X}_i) \quad (3.181)$$

avec

$$X = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta) \quad (3.182)$$

Par conséquent, le propagateur d'une particule se déplaçant sur la sphère s'écrit en représentation espace de configuration

$$K(X_f, X_i, T) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{i\pi}{2B}j(j+1)} (2j+1) P_j(\sin \theta_f \sin \theta_i \cos(\varphi_f - \varphi_i) + \cos \theta_f \cos \theta_i) \quad (3.183)$$

En introduisant maintenant la relation suivante[12]:

$$\begin{aligned}
& P_\nu (\cos \Psi_1 \cos \Psi_2 + \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \cos \varphi) \\
= & P_\nu (\cos \Psi_1) P_\nu (\cos \Psi_2) \\
& + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} P_\nu^k (\cos \Psi_1) P_\nu^k (\cos \Psi_2) \cos k\varphi
\end{aligned} \tag{3.184}$$

avec :

$$[0 \leq \Psi_1 < \pi, 0 \leq \Psi_2 < \pi, \Psi_1 + \Psi_2 < \pi; \varphi \text{ real}] \tag{3.185}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
& P_\nu (\cos \Psi_1 \cos \Psi_2 + \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \cos \varphi) \\
= & P_\nu (\cos \Psi_1) P_\nu (\cos \Psi_2) \\
& + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} P_\nu^k (\cos \Psi_1) P_\nu^k (\cos \Psi_2) \frac{e^{ik\varphi}}{2} \\
& + 2 \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - k' + 1)}{\Gamma(\nu + k' + 1)} P_\nu^{k'} (\cos \Psi_1) P_\nu^{k'} (\cos \Psi_2) \frac{e^{-ik'\varphi}}{2}
\end{aligned} \tag{3.186}$$

Posons :  $k' = -k$  :

$$\begin{aligned}
& P_\nu (\cos \Psi_1 \cos \Psi_2 + \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \cos \varphi) \\
= & \frac{\Gamma(\nu - 0 + 1)}{\Gamma(\nu + 0 + 1)} P_\nu^0 (\cos \Psi_1) P_\nu^0 (\cos \Psi_2) e^{i0\varphi} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} P_\nu^k (\cos \Psi_1) P_\nu^k (\cos \Psi_2) e^{ik\varphi} \\
& + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} P_\nu^k (\cos \Psi_1) P_\nu^k (\cos \Psi_2) e^{ik\varphi}
\end{aligned} \tag{3.187}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& P_\nu (\cos \Psi_1 \cos \Psi_2 + \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \cos \varphi) \\
= & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} P_\nu^k (\cos \Psi_1) P_\nu^k (\cos \Psi_2) e^{ik\varphi}
\end{aligned}$$

et par voie de conséquence

$$K(X_f, X_i, T) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{iT}{2B}j(j+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - k + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} P_j^k(\cos \theta_f) P_j^k(\cos \theta_i) e^{ik(\varphi_f - \varphi_i)} \quad (3.188)$$

$$K(X_f, X_i, T) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{iT}{2B}j(j+1)} (2j+1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \times P_j^m(\cos \theta_f) P_j^m(\cos \theta_i) e^{im(\varphi_f - \varphi_i)} \quad (3.189)$$

on a :

$$\begin{aligned} j - m &\geq 0 \Rightarrow j \geq m \\ j + m &\geq 0 \Rightarrow j \geq -m \end{aligned} \quad (3.190)$$

c'est à dire

$$j \geq m \geq -j \quad (3.191)$$

Le résultat final est alors

$$K(X_f, X_i, T) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{iT}{2B}j(j+1)} (2j+1) \sum_{m=-j}^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \times P_j^m(\cos \theta_f) P_j^m(\cos \theta_i) e^{im(\varphi_f - \varphi_i)} \quad (3.192)$$

# Chapitre 4

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié les systèmes avec contraintes en suivant deux méthodes :

La première est la plus connue utilise les contraintes explicitement et réduit alors l'évolution à un espace des phases effectif. La deuxième intègre les contraintes implicitement dans sa construction et est basée sur les états cohérents.

Nous avons alors présenté le cas de la particule se déplaçant sur le cercle comme exemple pratique.

la méthode de Faddeev-Senjanovic est brièvement exposée sous sa forme générale et elle est clairement exposée dans le cas du cercle. De même, la méthode des états cohérents (algèbre de symétrie  $u(1)$ ) est brièvement exposée dans son cas général ( Il existe un schéma général mais pas de construction générale) et est clairement construite dans le cas du cercle. Les résultats des propagateurs sont alors comparés et les résultats concordent entre eux.

Ces méthodes sont étendues au cas la particule sur la sphère. Le cas de la méthode de Faddeev-Senjanovic est soigneusement traité et le propagateur est calculé. Il est à noter que dans ce formalisme, l'ambiguïté liée aux corrections quantiques est dissipée et le résultat est correctement retrouvé. Insistant sur le fait qu'on a été obligé d'utiliser la prescription du mid-point. La méthode des états cohérents (algèbre de symétrie  $su(2)$ ) est aussi revue dans ce cas. Cette partie représente l'originalité de notre calcul puisque c'est pour la première fois que ce calcul est effectué. Le propagateur est calculé et son résultat concorde avec celui de la section précédente. En conclusion, nous pouvons affirmer que la méthode des états cohérents est aussi

puissante que la méthode de Faddeev-senjanovic mais reste alors l'incorporation de la notion de symétrie (algèbre de Lie relative à la variété) dans un cadre général. Ceci fera sans aucun doute appel à des outils très puissants de la géométrie modernes et nous laisserons ce projet pour une thèse de Doctorat.

# Bibliographie

- [1] P.A.M Dirac , "Lecture on Quantum Mechanics" Belfer Graduate School of Science
- [2] K. Kowalski , J. Rembielinski and L. C Papaloucas. J. Phys. A : Math . Gen .29 4149 (1996) . J. A. Gonzales and M. A. Del Olmo , J. Phys. A Math . Gen . 31 8841 (1998) . T . Brzezinski , J . Rembielinski and K . A . Smolinski , Mod. Phys. Lett A . 8 . 5(1993)
- [3] K.Sundermeyer , *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [4] L. D. Faddeev ,Theo. Math. Phys. 1 , 1 (1970); P . Senjanovic , Ann , Phys 100 ,227 (1976).
- [5] H.Kleinert , Path Integrals in Quantum Mechanics , Statistics and Polymer Physics ( Word Scientific , Singapore1991)
- [6] H . Fukutaka . T .Kashiwa , Prog , Theor .Phys .80 , 151 (1988) , Ann , Phys . 176 , 301
- [7] Glauber R . J 1963 Phys .Rev 130 . 2529; 131 2766
- [8] Klauder J . R 1963 J . Math , Phys . 4 1055
- [9] K .Kowalski , J .Rembielinski .J. Phys . A : Math . Gen .33 , 6035 (2000).
- [10] E . B .Davies , Heat Kernels and Spectral Theory ( Cambridge Univ . Press . Cambridge .1989 ); R . Camporesi , Harmonic Analysis and Propagators on Homogeneous Spaces , Phys , Rep . 196, 1-134 (1990).
- [11] Yeshiva University , New York , 1964.
- [12] I . S . Gradshtein and I . M . Ryshik , Tables of Integrals , Series, and Products , Academic Press New York, 1979)

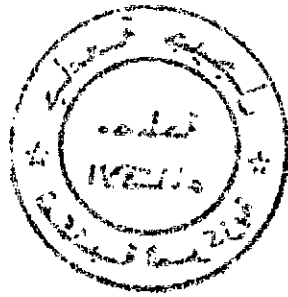


# Résumé

Dans ce mémoire, le propagateur de faymman pour une particule libre non relativiste sans spin se mouvant sur la sphère a été déterminé par deux méthodes

La première méthode : par l'utilisation du propagateur de fadev- sanjanovis qui est compatible avec les contraintes.

La deuxième méthode : par l'utilisation des états cohérents qui sont homogènes avec la topologie de la sphère.



## المخلص:

نحسب في هذا البحث ناشر فايماڤ لجزينة حرة لا نسبية وبدون سبين تتحرك فوق كرة بطريقتين.

الطريقة الاولى : باستخدام ناشر فدياف-سانجانوفيس مع القيود.  
الطريقة الثانية : باستخدام الحالات المرتبطة المتعلقة بالكرة وقد استعنا في بحثنا هذا بالتجربة على الحلقة.

## Abstract :

In this memory, the Feynman propagator for a non-relativistic free particle without spin driven being on the sphere was determined by two methods.

The first method: by the use of the propagator of Fadeev- Sanjanovis which is compatible with the constraints.

The second method: by the use of the coherent states which are homogeneous with the topology of the sphere.