

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme



MAGISTER

Option : Physique Mathématique

Par

Youcef Sabri

THEME

Electrodynamique Quantique Non Locale

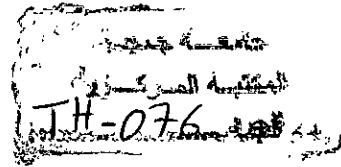
Soutenu le : / /2006

Devant le Jury :

Président :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ- Jijel
Rapporteur :	KH. Nouicer	Prof.	Univ- Jijel
Examineurs :	N. Belaloui	Prof.	Univ- Constantine
	K. Ait Moussa	M.C	Univ- Constantine
	Z. Belghobsi	M.C	Univ- Jijel

Année Universitaire 2005/2006

PH/076



530.1/20

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de
MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Mathématique

par

Youcef Sabri

THEME

Electrodynamique Quantique Non Locale

Soutenu le ://2006

Devant le Jury :

Président :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Examineurs :	N. Belaloui	Prof.	UM. Constantine
	K. Ait Moussa	MC	UM. Constantine
	Z. Belghobssi	MC	Univ. Jijel

Remerciements

Ce mémoire de Magister s'est déroulée au Laboratoire de Physique Théorique de l'université de Jijel. Je remercie Monsieur le professeur Kh. Nouicer, directeur du laboratoire, et ses collègues T. Boudejdaa, professeur, et A. Bounames, maître de conférence, de m'avoir accueilli et mis à ma disposition tous les moyens du laboratoire durant l'année de préparation de mon mémoire de Magister. Mon séjour y a été des plus agréables et j'ai pu y bénéficier d'une ambiance stimulante.

Ce double statut est la résultante du fait que monsieur Kh. Nouicer a accepté de diriger cette thèse. Je dois dire que cette situation tout à fait exceptionnelle m'a permis de bénéficier d'un encadrement de très grande qualité et je tiens à lui exprimer ma plus sincère reconnaissance et toute ma sympathie. J'ai beaucoup apprécié mon encadreur pour son enthousiasme scientifique, pour son attention et son souci de rigueur permanent.

Je tiens à remercier le professeur T. Boudjedaa de l'université de Jijel pour avoir accepté de juger cette thèse, pour m'avoir accordé son temps et son attention, ainsi que pour les remarques qu'il a pu me faire et qui m'ont permis de clarifier certains points de ce manuscrit. Je tiens également à remercier le professeur N. Belaloui, les maîtres de conférences, K. Ait Moussa et Z. Belghobssi pour avoir accepté d'être membres du jury et d'avoir porté une attention particulière à mon travail.

Je tiens à remercier toutes les enseignantes de la classe de magister de physique mathématiques session 2004-2006 de l'université de Jijel, et particulièrement les promoteurs de la filière de physique théorique de l'université de Jijel, Kh. Nouicer, A. Bounames, et T. Boudjedaa.

Enfin, merci à ma mère, pour m'avoir toujours soutenu dans ce que j'entreprenais, mes sœurs, mes frères et toute ma famille.

Bien sûr je n'oublie pas mes amis qui m'ont encouragé et supporté, en particulier Feres, Hamidou et les étudiants de magister physique mathématiques.

J'adresse un grand merci à tout le monde et à toutes les personnes que j'aurais pu oublier.

Youcef

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	La géométrie non commutative en physique	6
1.2	Théories quantiques des champs non commutatives	7
1.2.1	Opérateur de champ non local	11
1.2.2	Distribution non locale de Dirac	11
2	Quantification Lagrangienne et canonique	13
2.1	Quantification Lagrangienne	13
2.1.1	Densité Lagrangienne et action	13
2.1.2	Théorème de Neother	14
2.2	Quantification canonique	17
2.2.1	Conditions quantiques	17
2.2.2	Tenseur moment-énergie	19
2.2.3	Fonction de propagation	20
2.3	Champ de Jauge	22
3	Electrodynamique quantique non locale	24
3.1	Règles de Feynman	25
3.2	Fonctions de corrélation à 2-points et 3-points	32
3.3	Applications	34
3.3.1	Diffusion électron-positron	35
3.3.2	Diffusion de Compton	39
4	Renormalisation	45
4.1	Energie propre	45
4.2	Polarisation du vide	49
4.3	Renormalisation	54
4.3.1	Propagateur de l'électron	54
4.3.2	Opérateur de sommet	56
4.3.3	Propagateur du photon et polarisation du vide	56

4.3.4	Potentiel de Coulomb	60
4.3.5	Déplacement de Lamb	65
4.3.6	Variation de la charge électrique	66
4.3.7	Facteurs de forme électromagnétiques de l'électron	69
Conclusion		74

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la théorie quantique de l'électrodynamique non locale, qui d'un point de vue mathématique, consiste en la formulation de la théorie sur un espace-temps non commutatif.

On se propose dans ce chapitre de donner un rappel historique sur l'apparition de la géométrie non commutative en physique. Puis, on abordera les différentes approches utilisées pour décrire la théorie quantique des champs non commutative. Enfin, on définira l'opérateur de champ déformé, ou non local, qui servira de base à notre construction.

1.1 La géométrie non commutative en physique

D'une certaine manière, on peut considérer que la géométrie non commutative est née avec la mécanique quantique. En effet, dans sa première formulation, qui fut celle de Heisenberg, la mécanique quantique apparaît sous une forme comparable à la mécanique Hamiltonienne où les coordonnées de l'espace des phases sont remplacées par des opérateurs qui ne commutent pas entre eux. Dirac lui-même sembla être fasciné par cette idée et suggéra la possibilité d'interpréter la mécanique quantique dans un formalisme géométrique non commutatif. Enfin, les travaux de Von Neumann sur la mécanique quantique furent à l'origine du domaine des mathématiques que nous appelons aujourd'hui les algèbres d'opérateurs.

En physique, l'idée que les coordonnées de l'espace temps puissent ne pas commuter fut émise par Heisenberg à la fin des années 1930 dont l'objectif essentiel est que cela puisse résoudre le problème des divergences ultra-violettes (UV) en théorie quantique des champs. Cette idée fut ensuite reprise et concrétisée par Snyder en 1947[1] et par la suite par Yang [2].

Du point de vue de la physique, la géométrie non commutative constitue un cadre mathématique dans lequel un certain nombre de concepts physiques peuvent être exprimés et parfois unifiés. La remarque effectuée par Dirac sur l'analogie entre commutateur en mécanique quantique et crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne peut par exemple être concrétisée par l'introduction d'une structure symplectique non commutative. Ainsi, il fut montré par Michel Dubois-Violette [3] que

le commutateur en mécanique quantique peut se comprendre dans ce cadre comme un crochet de Poisson. Il est également possible de formuler un principe de moindre action [4]. Il a été également fait usage des techniques de la géométrie non commutative par Jean Bellissard afin de décrire certains systèmes de physique statistique tels que les quasi-cristaux ou encore l'effet Hall quantique.

Je voudrais maintenant donner quelques motivations supplémentaires pour l'utilisation de la géométrie non commutative en physique. Il est bien connu que la limite de la mécanique quantique à la mécanique classique est difficile. Réciproquement, il ne semble pas exister de technique pour passer de manière rigoureuse et canonique d'une théorie classique à une théorie quantique. L'exemple le plus remarquable, en est la théorie de la relativité générale ou bien même la mécanique analytique. La géométrie non commutative fournit un langage dans lequel ces deux types de théories peuvent être formulées. D'autre part, aussi bien pour la mécanique quantique d'Heisenberg que pour la théorie quantique des champs, la notion d'algèbre d'opérateurs est essentielle comme cela fut mis en évidence par von Neumann.

Nous pourrions qualifier le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique (1ère quantification) ou le passage de la théorie classique des champs à la théorie quantique des champs (2ème quantification) de transferts de niveau de réalité. En effet, dans le premier passage, les objets fondamentaux que sont les points sont remplacés par des fonctions exprimant des relations entre points. De même, les relations entre fonctions peuvent être décrites à l'aide d'opérateurs comme ceux introduits dans la mécanique matricielle d'Heisenberg ou encore ceux de la théorie quantique des champs. Ce type de passage consiste donc à considérer les relations entre objets en tant qu'objets d'un type nouveau et correspond à ce que nous pourrions appeler un transfert de niveau de réalité ou de niveau de relations. Le fait remarquable est que les différentes structures intervenant aussi bien dans les théories classiques que dans les théories quantiques semblent pouvoir s'interpréter de manière naturelle dans un langage commun qu'est celui de la géométrie non commutative et nous pouvons espérer que le fait d'avoir un cadre commun pour décrire ces objets puisse permettre un jour de mieux comprendre les liens qui peuvent exister entre eux.

1.2 Théories quantiques des champs non commutatives

Déjà dans [5] le comportement d'une théorie de champ non-locale a été étudié, et il a été questionné si ils aident à éviter les divergences habituelles. Dans une autre approche [6], la construction d'une théorie des champs libérée des divergences ultraviolettes se base sur l'utilisation de propagateurs déformés. Les propagateurs déformés sont considérés par la suite comme résultat des fluctuations gravitationnelles à des échelles de l'ordre de la longueur de Planck. Nous allons suivre cette ligne de pensée et restreindre notre étude la QED non locale. Notre approche consiste en une déformation non-locale des opérateurs de champ dans l'Hamiltonien d'interaction alors que l'Hamiltonien libre est maintenu dans sa forme locale.

Nous allons maintenant présenter certaines constructions d'une théorie quantique non locale des champs et les distinguer de l'approche que nous adopterons dans cette thèse.

Dans la première approche [7], la multiplication "point-sage" des champs dans le Lagrangien de la théorie locale est maintenant remplacé par un produit non-local (*). Ce produit (*), communément appelée produit de Weyl-Moyal, est définie par

$$A * B(x) = e^{\frac{i}{2} \partial_\mu^\eta \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu^\rho} A(x + \eta) B(x + \rho) |_{\eta=\rho=0}. \quad (1.1)$$

Dans cette définition x est un élément de l'espace-temps commutatif et $\sigma^{\mu\nu}$ est un tenseur anti-symétrique qui a les dimensions d'une surface [longueur]².

Il est facile de montrer que ce produit généralisé conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de la position

$$[q^\mu, q^\nu] = i\sigma^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Le produit (1.1) laisse les termes quadratiques, dans la densité Lagrangienne, inchangés

$$\int dx A * B(x) = \int dx A(x) B(x). \quad (1.3)$$

Les règles de Feynman sont obtenues directement de l'action classique. Par conséquent, les propagateurs sont inchangés. Cependant les facteurs de vertex acquièrent une correction supplémentaire donnée, dans l'espace des moments, par

$$\tilde{V}(k_1, \dots, k_n) = \delta(k_1 + \dots + k_n) \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i < j}^n k_{i\mu} \sigma^{\mu\nu} k_{j\nu}\right) \quad (1.4)$$

où les k_1, \dots, k_n sont les moments des particules entrantes.

Les problèmes dont souffre cette construction, en dehors de la présence des divergences habituelles de la théorie locale, sont un mixage entre les divergences UV et les divergences IR, [8, 11, 12, 13, 14, 9] et la non unitarité [15, 17, 27, 20]. Cependant l'unitarité peut être restauré en considérant le formalisme Hamiltonien au lieu du formalisme Lagrangien et en calculant les diagrammes de Feynman en utilisant la formule de Gell-Mann-Low [21, 29]. Cette approche représente en effet une deuxième possibilité de décrire perturbativement la théorie des champs quantique non-commutative. Le propagateur libre reste inchangé dû au fait remarquable que l'Hamiltonien libre déformé H_0^* est égal à l'Hamiltonien non déformé, à cause de la propriétés du produit de Moyal. Ainsi on a

$$H_0^* = \int d^3x (\partial_\mu \Phi * \partial^\mu \Phi(x) + m^2 \Phi * \Phi(x)) = \int d^3x (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi \Phi). \quad (1.5)$$

La troisième approche à la théorie quantique des champs non commutative utilise la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique sur un espace-temps non-commutatif [23, 25]. Considérons, pour simplifier, un espace-temps de dimension égale à $D = 2 + 1$.

Dans [25], le temps commute avec les coordonnées spatiales qui satisfont la relation

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\epsilon_{ij}\theta \text{ avec } i, j = 1, 2 \quad (1.6)$$

où θ est une constante positive. Les autres relations de commutation habituelles restent inchangées

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (1.7)$$

L'utilisation de la base des états cohérents passe par le définition de nouvelles coordonnées \hat{z} et \hat{z}^+ données par [26]

$$\hat{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}^1 + i\hat{x}^2), \quad \hat{z}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}^1 - i\hat{x}^2), \quad (1.8)$$

et telles que

$$[\hat{z}, \hat{z}^+] = \theta. \quad (1.9)$$

Ainsi les opérateurs \hat{z} et \hat{z}^+ peuvent être considérés comme des opérateurs d'annihilation et de création d'un oscillateur harmonique et par suite nous pouvons construire la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique en suivant la démarche habituelle. En effet on a les actions suivantes

$$\hat{z}|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|\hat{z}^+ = \langle z|\bar{z} \quad (1.10)$$

où, les vecteurs $\{|z\rangle\}$ définissant l'espace de Fock, sont donnés par

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta} + \frac{z}{\theta}\hat{z}^+\right)|0\rangle. \quad (1.11)$$

Il est facile de montrer que les vecteurs $\{|z\rangle\}$ satisfont la relation de complétude

$$\frac{1}{\pi\theta} \int dzd\bar{z} |z\rangle \langle z| = 1. \quad (1.12)$$

Cependant ils ne sont pas orthogonaux

$$\langle z|w\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2 + |w|^2}{2\theta} - \frac{\bar{w}z}{\theta}\right). \quad (1.13)$$

La projection d'un opérateur $F(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ dans l'espace des $|z\rangle$ est définie par

$$F(z) := \langle z|F(\hat{x}^1, \hat{x}^2)|z\rangle. \quad (1.14)$$

De cette relation émerge la structure algébrique non-commutative (1.6) de l'espace des vecteurs $\{|z\rangle\}$ donné par

$$\langle z|[\hat{x}_1, \hat{x}_2]|z\rangle = i\theta. \quad (1.15)$$

Appliquons maintenant la relation (1.14) au champ scalaire réel

$$\Phi(t, z) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} [b_p \exp(-iEt) \langle z|\exp(ip_j \hat{x}^j)|z\rangle + b_p^\dagger \exp(iEt) \langle z|\exp(-ip_j \hat{x}^j)|z\rangle], \quad (1.16)$$

qui vérifie l'équation de mouvement de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \Phi(t, x) = 0. \quad (1.17)$$

Il est facile de montrer que le propagateur est donné par

$$\begin{aligned} G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) &= \langle 0 | T \Phi(t_1, z_1) \Phi(t_2, z_2) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{dE d^2 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{\theta}{2} p^2}}{E^2 - p^2 - m^2} \times \exp(-iE(t_1 - t_2)) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{\sqrt{2}} [p_1(z_1 - z_2 + \bar{z}_1 - \bar{z}_2) + p_2(z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2)]\right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ce propagateur est la fonction du Green de l'équation de Klein-Gordon sur un espace-temps (2+1) non commutatif. Dans ce cas, le propagateur libre est modifié par un facteur d'amortissement exponentiel. C'est important de noter que le non commutativité conduit à des propagateurs exponentiellement amortis. Ce résultat est au coeur du modèle que nous allons étudier par la suite. La présence du facteur $\exp(-\frac{\theta}{2} p^2)$ conduit à une distribution parfaitement régularisée à l'inverse de distribution de Dirac habituelle. En effet l'application de l'opérateur $(\square + m^2)$ à la fonction de Green précédente donne

$$\begin{aligned} &(\square + m^2) G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) \\ &= \frac{2\pi\delta(t_1 - t_2)}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{4\theta} [(z_1 - z_2 + \bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2 - (z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2]\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans la quatrième approche à une théorie non locale des champs quantiques [27], la non localité affecte seulement l'Hamiltonien d'interaction. Dans cette approche on écrit l'Hamiltonien d'interaction comme

$$\begin{aligned} H_I^* &= \lambda c_n \int d^3 x \int_{R^4} d^4 a_1 \dots d^4 a_n : \Phi(x + a_1) \dots \Phi(x + a_n) : \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{j, \mu} a_j^{\mu 2}\right) \delta^{(4)}\left(\frac{1}{n} \sum_j a_j\right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

où $\lambda, c_n \in R$, et $\Phi(x + a_j)$ est le champ déformé qui sera définie par la suite [29]. L'utilisation de ce genre de déformation conduit à une expansion de Dyson de la matrice S finie ordre par ordre.

Dans la suite nous adopterons cette dernière approche. Nous remplacerons, dans le terme d'interaction de la densité Lagrangienne, les opérateurs de champ locaux par des champs non-locaux. Par conséquent, les propagateurs libres ne seront pas modifiés. Cette démarche est motivée par le fait que le produit de Moyal n'affecte pas la partie libre de la densité Lagrangienne. Cependant, les lignes internes seront modifiées par un facteur exponentiel d'amortissement semblable à celui rencontré dans la troisième approche. Dans la troisième approche ci-dessus, les lignes externes sont aussi déformés.

1.2.1 Opérateur de champ non local

Dans la suite nous allons définir deux champs non locaux. Le premier est le champ de Dirac et le deuxième est celui du champ de jauge.

L'opérateur non local du Dirac est donné par l'expression suivante [29]

$$\Psi_M(x) = N \int d^n a \Psi(x + Ma) \exp(-a^T a). \quad (1.21)$$

où $\Psi(x)$ est le champ habituel de Dirac, M : est une matrice réelle ($n \times 4$), a est un vecteur reel et N une constante de normalisation.

Nous remarquons que la non-localité est générée par la matrice M . Les indices Euclidiens sont représentés par des lettres romaines et les indices Minkowskiens par des lettres grecques. Les éléments de M sont alors notés M_i^μ . Notons que le cas $n > 4$ se réduit au cas $n = 4$ en décomposant la matrice M en deux matrices \tilde{R} de dimension ($4 \times n$) et Q une matrice orthogonale de dimension ($n \times n$). On peut construire \tilde{R} de telle manière que les premiers 4-vecteurs de \tilde{R} forment une matrice triangulaire R et le reste formé d'éléments nuls. On écrit alors

$$M = \tilde{R}Q. \quad (1.22)$$

La matrice Q peut être absorbée par la transformation suivante

$$\tilde{a} = Qa, \quad (1.23)$$

qui, avec $Q^T Q = 1$, conduit au champ

$$\Psi_M(x) = N \int d^n \tilde{a} \Psi(x + \tilde{R}\tilde{a}) \exp(-\tilde{a}^T \tilde{a}). \quad (1.24)$$

Puisque les intégrales sur les $\tilde{a}_5, \dots, \tilde{a}_n$ sont des Gaussiennes, on peut les calculer facilement et absorber le résultat dans une nouvelle constante de normalisation.

En suivant la même démarche, l'opérateur non-local du champ de jauge est donné par

$$A_{\mu M}(x) = N \int d^n a A_\mu(x + Ma) \exp(-a^T a). \quad (1.25)$$

1.2.2 Distribution non locale de Dirac

En utilisant la déformation des opérateurs de champs, la distribution de Dirac est donnée, dans le cas non local, par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \Delta_M(x - y) &= \int d^4 a d^4 b \Delta_M(x - y + M(a - b)) \exp(-a^T a) \exp(-b^T b) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 a \exp(-a^T a + ikMa) d^4 b \exp(-b^T b - ikMb) \exp(ik(x - y)). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Les éléments de a, b et M étant réels, on peut alors écrire

$$-a^T a + ikMa = - \left(a^r - \frac{ik_\mu M_r^\mu}{2} \right)^2 - \frac{k_\mu k_\nu M_r^\mu M_r^\nu}{4}, \quad (1.27)$$

et

$$-b^T b - ikMb = - \left(b^r + \frac{ik_\mu M_r^\mu}{2} \right)^2 - \frac{k_\mu k_\nu M_r^\mu M_r^\nu}{4}. \quad (1.28)$$

Remarquons que les intégrales sur a et b sont des Gaussiennes et on obtient ainsi

$$\Delta_M(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp(ik(x-y)) \exp\left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2}\right), \quad (1.29)$$

$$T^{\mu\nu} = M_r^\mu M_r^\nu = (MM^T)^{\mu\nu}. \quad (1.30)$$

Dans le deuxième chapitre nous allons traiter la quantification Lagrangienne et canonique de la théorie de l'électrodynamique quantique non locale pour les particules avec spin 1/2. La première se fera en cherchant les solutions des équations de mouvement à travers l'utilisation de la définition de l'opérateur de champ non local en fonction du champ local. Nous aborderons ensuite la formulation du théorème de Neother. La quantification canonique de la théorie se fera par l'établissement des trois principaux résultats qui sont les conditions quantiques (anti-commutateurs pour le champ de Dirac), l'énergie et le propagateur. A la fin de ce chapitre on procédera à la quantification du champ de Jauge.

Dans le troisième chapitre nous déduirons les nouvelles règles de Feynman à partir de la formule de Gell-Mann-Low (3.6) et nous poursuivrons notre étude par le calcul des fonctions de corrélation à 2-points et 3-points, où nous allons étudier la persistance ou non des divergences UV pour la polarisation du vide et les divergences IR et UV pour le propagateur électronique. Nous finirons ce chapitre par le calcul des sections efficaces différentielles de deux processus à l'ordre de l'arbre : la diffusion électron-positron et la diffusion de Compton.

Le quatrième chapitre, qui est le plus important, de cette thèse est consacré à la renormalisation de la théorie à l'ordre d'une boucle. Nous calculerons les corrections radiatives au propagateur photonique et au propagateur électronique. Après la renormalisation du tenseur de polarisation du vide nous calculerons les corrections à la loi de Coulomb, le déplacement de Lamb et la variation de la charge électrique avec le moment. Ensuite nous calculerons la partie de l'opérateur de sommet qui contribue au moment magnétique de l'électron.

Nous finirons cette thèse par une conclusion générale, où nous discuterons des résultats obtenus et des perspectives d'études futures.

Chapitre 2

Quantification Lagrangienne et canonique

2.1 Quantification Lagrangienne

2.1.1 Densité Lagrangienne et action.

Nous allons construire le formalisme lagrangien de la théorie quantique de l'électrodynamique non locale en utilisant une densité Lagrangienne déformée. En remplaçant les champs habituels par des champs non locaux dans la densité Lagrangienne de la théorie locale on obtient

$$L_M = \bar{\Psi}_M \left(i \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \Psi_M + V(\Psi_M, \bar{\Psi}_M). \quad (2.1)$$

L'action S définie sur une région arbitraire R de l'espace-temps est donnée par la définition habituelle

$$S_M[\bar{\Psi}_M, \Psi_M] = \int_R d^4x L_M(\Psi_M, \bar{\Psi}_M) = \int_R d^4x \left[\bar{\Psi}_M \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \Psi_M + V(\Psi_M, \bar{\Psi}_M) \right]. \quad (2.2)$$

Nous avons deux méthodes pour obtenir les équations du mouvement. Nous utiliserons la méthode la plus simple où on utilise la définition de champ non local en fonction de champ local et l'équation de mouvement pour le cas local.

En effet, on agit avec l'opérateur $(\partial - m)$ sur le champ de Dirac non local (1.21)

$$(\partial - m)\Psi_M(x) = N \int d^4a e^{-a^T a} (\partial - m)\Psi(x + Ma). \quad (2.3)$$

D'après la théorie locale, en utilisant l'invariance par translation, on a

$$(\partial - m)\Psi(x) = (\partial - m)\Psi(x + Ma) = 0, \quad (2.4)$$

d'où l'équation de mouvement pour le champ de Dirac non local

$$(\partial - m)\Psi_M(x) = 0. \quad (2.5)$$

Notons qu'on peut déduire cette équation à partir du principe de moindre action qui stipule que $\delta S_M = 0$.

Maintenant nous allons solutionner cette équation en utilisant la solution connue dans le cas local donnée par le développement suivant

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha} \left[b_{\alpha}(k) U^{\alpha}(k) \exp(-ik^+x) + d_{\alpha}^+(k) V^{\alpha}(k) \exp(ik^+x) \right]. \quad (2.6)$$

où $b_{\alpha}(k)$, $d_{\alpha}^+(k)$ sont des opérateurs de création et d'annihilation et $U^{\alpha}(k)$, $V^{\alpha}(K)$ sont les spineurs de Dirac. En remplaçant dans l'expression (1.21), on obtient

$$\begin{aligned} \Psi_M(x) &= N \int d^n a \Psi(x + Ma) e^{-a^T a} \\ &= N \int d^n a e^{-a^T a} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha} \left[b_{\alpha}(k) U^{\alpha}(k) e^{-ik^+(x+Ma)} + d_{\alpha}^+(k) V^{\alpha}(k) e^{ik^+(x+Ma)} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

En utilisant la même démarche utilisée dans le calcul de la distribution déformée de Dirac, on aboutit à

$$\begin{aligned} \Psi_M(x) &= \frac{N}{(\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \exp\left(-\frac{k_{\mu} k_{\nu} T^{\mu\nu}}{4}\right) \\ &\quad \times \sum_{\alpha} \left[b_{\alpha}(k) U^{\alpha}(k) \exp(-ik^+x) + d_{\alpha}^+(k) V^{\alpha}(K) \exp(ik^+x) \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec $k^{\sigma} = (\sigma\omega_k, \vec{k})$, $T = MM^T$, $T^T = MM^T = T$. On déduit que T est symétrique, et comme les

éléments de M sont réels, T est alors semi-positive. Ce que implique donc que $\exp\left(-\frac{k_{\mu} k_{\nu} T^{\mu\nu}}{4}\right)$ est un facteur d'amortissement. On en déduit que le champ non local est une convolution Gaussienne des champs habituels de Dirac.

2.1.2 Théorème de Noëther

Supposons que notre action possède une symétrie continue et que l'ensemble de toutes les symétries de l'action forme un groupe de symétrie.

Commençons par supposer une transformation de symétrie qui affecte les positions et les champs

$$x' = x + \delta x, \quad \Psi'_M = \Psi_M + \delta\Psi_M \quad \text{et} \quad \bar{\Psi}'_M = \bar{\Psi}_M + \delta\bar{\Psi}_M. \quad (2.9)$$

La variation de la densité Lagrangienne est alors donnée par

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\bar{\Psi}_M + \delta\bar{\Psi}_M, \partial_{\mu}\bar{\Psi}_M + \delta(\partial_{\mu}\bar{\Psi}_M); \Psi_M + \delta\Psi_M, \partial_{\mu}\Psi_M + \delta(\partial_{\mu}\Psi_M)) \\ &\quad - \mathcal{L}(\bar{\Psi}_M, \partial_{\mu}\bar{\Psi}_M; \Psi_M, \partial_{\mu}\Psi_M) \\ &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_M} \delta\Psi_M + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi_M)} \delta(\partial_{\mu}\Psi_M) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} \right. \\ &\quad \left. + \delta(\partial_{\mu}\bar{\Psi}_M) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\Psi}_M)} + \delta\bar{\Psi}_M \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}_M} \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On a les propriétés suivantes

$$\delta(\partial_\mu \Psi_M) = \partial_\mu(\delta\Psi_M) \quad (2.11)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \partial_\mu(\delta\Psi_M) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \delta\Psi_M \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \right) \delta\Psi_M, \quad (2.12)$$

$$\partial_\mu(\delta\bar{\Psi}_M) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} = \partial_\mu \left(\delta\bar{\Psi}_M \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} \right) - \delta\bar{\Psi}_M \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} \right). \quad (2.13)$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_M} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \right) \right] \delta\Psi_M + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \delta\Psi_M \right) \right. \\ \left. + \delta\bar{\Psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_M} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} \right) \right] + \partial_\mu \left(\delta\bar{\Psi}_M \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange on obtient

$$\delta \mathcal{L} = \int_R d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \delta\Psi_M + \delta\bar{\Psi}_M \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} + \mathcal{L} \delta x^\mu \right). \quad (2.15)$$

Comme sur la frontière de l'hypersurface on a $\delta\Psi_M(x) = \delta\bar{\Psi}_M(x) = \delta x^\nu = 0$

$$\delta \mathcal{L} = \int_R d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \delta\Psi_M + \delta\bar{\Psi}_M \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0, \quad (2.16)$$

Utilisons maintenant la variation totale des champs Ψ_M et $\bar{\Psi}_M$

$$\begin{aligned} \Delta\Psi'_M(x') &= \Psi'_M(x') - \Psi_M(x) \\ &= \Psi'_M(x') - \Psi_M(x') + \Psi_M(x') - \Psi_M(x) \\ &= \delta\Psi_M + (\partial_\mu \Psi_M) \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.17)$$

et

$$\Delta\bar{\Psi}'_M(x') = \delta\bar{\Psi}_M + (\partial_\mu \bar{\Psi}_M) \delta x^\mu. \quad (2.18)$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} [\delta\Psi'_M(x) + (\partial_\nu \Psi_M) \delta x^\nu] + [\delta\bar{\Psi}'_M(x) + (\partial_\nu \bar{\Psi}_M) \delta x^\nu] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} (\partial_\nu \Psi_M) + (\partial_\nu \bar{\Psi}_M) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \right) \partial \sigma_\mu. \end{aligned} \quad (2.19)$$

on obtient finalement

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \Delta\Psi'_M(x) + \Delta\bar{\Psi}'_M(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} - \theta_\nu^\mu \delta x^\nu \right) \partial \sigma_\mu, \quad (2.20)$$

où le tenseur moment-énergie est défini par

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} (\partial_\nu \Psi_M) + (\partial_\nu \bar{\Psi}_M) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

On suppose maintenant que l'action S est invariante sous le groupe des transformations de x^μ , Ψ_M et $\bar{\Psi}_M$, où les transformations infinitésimales sont caractérisées par un paramètre infinitésimal $\delta\omega^\nu$

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta\omega^\nu, \Delta \Psi_M = \Psi_{M_\mu} \delta\omega^\mu, \Delta \bar{\Psi}_M = \bar{\Psi}_{M_\mu} \delta\omega^\mu. \quad (2.22)$$

En remplaçant dans $\delta\mathcal{L} = 0$ on obtient l'expression suivante

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \Psi_{M_\nu} (x) + \bar{\Psi}_{M_\nu} (x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} - \theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa \right) \delta\omega^\nu \partial\sigma_\mu = 0. \quad (2.23)$$

Comme $\delta\omega^\nu$ est arbitraire on peut écrire

$$\int_{\partial R} J_\nu^\mu \partial\sigma_\mu = 0, \quad (2.24)$$

avec le courant J_ν^μ définie par

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \Psi_{M_\nu} (x) + \bar{\Psi}_{M_\nu} (x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} - \theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa. \quad (2.25)$$

Le théorème de Gauss $\int_R \partial_\mu J_\nu^\mu \partial^4 x = 0$ (R est arbitraire) conduit finalement à l'équation de continuité

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0, \quad (2.26)$$

qui a la même forme que dans le cas local. A partir du courant conservé J_ν^μ on peut définir une charge conservée Q_ν par

$$Q_\nu = \int_\sigma J_\nu^\mu d\sigma_\mu, \quad (2.27)$$

où l'intégration se fait sur l'hypersurface σ . Si on choisit le temps constant, Q_ν devient

$$Q_\nu = \int_V J_\nu^0 d^3x. \quad (2.28)$$

Intégrons maintenant l'expression (2.26) sur V

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3x + \int_V \partial_i J_\nu^i d^3x = 0. \quad (2.29)$$

Le deuxième terme est nul d'après le théorème de Gauss. Il reste alors

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3x = \frac{dQ_\nu}{dt} = 0. \quad (2.30)$$

D'où le théorème de Noëther.

Appliquons maintenant le théorème de Noëther dans le cas des translations spatio-temporelles. Dans ce cas on a

$$\Delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \Delta \Psi_M = \Delta \bar{\Psi}_M = 0. \quad (2.31)$$

Ce qui revient à poser

$$X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \Psi_{M_\mu} = \bar{\Psi}_{M_\mu} = 0. \quad (2.32)$$

Dans ce cas on obtient

$$J_\nu^\mu = -\theta_\nu^\mu. \quad (2.33)$$

La remarque la plus importante est que le courant et le tenseur moment-énergie ont la même formes que dans le cas de la théorie locale avec le remplacement des champs habituels par des champs déformés.

2.2 Quantification canonique

Par analogie avec la théorie locale, la description quantique se construit en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs. Nous allons utiliser la même algèbre des opérateurs de la théorie locale et nous déduirons les trois principaux résultats de la quantifications qui sont : les conditions quantique (anti-commutateurs), l'énergie et la fonction de propagation.

On donne d'abord l'algèbre des opérateurs $(b_\alpha(k), b_\beta^+(q), d_\beta(q), d_\alpha^+(k))$ [31]

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^+(q)\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.34)$$

$$\{d_\alpha(k), d_\beta^+(q)\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.35)$$

$$\{d_\alpha(k), b_\beta^+(q)\} = \{d_\alpha(k), b_\beta(q)\} = 0. \quad (2.36)$$

2.2.1 Conditions quantiques

Nous allons chercher maintenant les relations d'anticommuation à temps égaux entre les champs non locaux en utilisant les solutions des équations de mouvement. En effet on a

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_{M_i}(x), \Psi_{M_j}^+(y) \right\}_{x_0=y_0} &= \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \exp\left(-\frac{(k_\mu k_\nu + q_\mu q_\nu) T^{\mu\nu}}{4}\right) \\ &\times \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \left[b_\alpha(k) U_i^\alpha(k) \exp(-ik^+x) + d_\alpha^+(k) V_i^\alpha(K) \exp(ik^+x) \right] \gamma_{ij}^0 \right. \\ &\quad \times \left[b_\beta^+(q) \bar{U}_i^\beta(q) \exp(iq^+y) + d_\beta(q) \bar{V}_i(q) \exp(-iq^+y) \right] \\ &\quad + \left[b_\beta^+(q) \bar{U}_i^\beta(q) \exp(iq^+y) + d_\beta(q) \bar{V}_i(q) \exp(-iq^+y) \right] \gamma_{ij}^0 \\ &\quad \left. \times \left[b_\alpha(k) U_i^\alpha(k) \exp(-ik^+x) + d_\alpha^+(k) V_i^\alpha(K) \exp(ik^+x) \right] \right\} \quad (2.37) \end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
& \{ \Psi_{iM}(x), \Psi_{jM}^+(y) \}_{x_0=y_0} \\
&= \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \exp \left(-\frac{(k_\mu k_\nu + q_\mu q_\nu) T^{\mu\nu}}{4} \right) \\
& \times \sum_{\alpha, \beta} \left([b_\alpha(k) b_\beta^+(q) + b_\beta^+(q) b_\alpha(k)] U_i^\alpha(k) \bar{U}_i^\beta(q) \gamma_{ij}^0 e^{-i(k^+x - q^+y)} \right. \\
& \left. + [d_\alpha^+(k) d_\beta(q) + d_\beta(q) d_\alpha^+(k)] V_i^\alpha(K) \bar{V}_i^\alpha(k) \gamma_{ij}^0 e^{i(k^+x - q^+y)} \right). \quad (2.38)
\end{aligned}$$

En utilisant l'algèbre (2.35) nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \{ \Psi_{iM}(x), \Psi_{jM}^+(y) \}_{x_0=y_0} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \exp \left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2} \right) \\
& \sum_\alpha [U_i^\alpha(k) \bar{U}_i^\alpha(k) \gamma_{ij}^0 \exp(-ik^+(x-y)) + V_i^\alpha(K) \bar{V}_i^\alpha(k) \gamma_{ij}^0 \exp(ik^+(x-y))]. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

On a les relations suivante.[31]

$$\sum_\alpha U^\alpha(k) \bar{U}^\alpha(k) = \frac{\not{k} + m}{2m}, \quad (2.40)$$

$$\sum_\alpha V^\alpha(K) \bar{V}^\alpha(k) = \frac{\not{k} - m}{2m}. \quad (2.41)$$

On remarque que ces expressions sont les mêmes que celles de la théorie locale (puisque les spineurs ne dependent pas de coordonnées et par conséquent ne sont pas affectés par la non localité. La même chose se produit dans les théories non commutatives).

En utilisant (2.40), (2.41) on obtient

$$\{ \Psi_{iM}(x), \Psi_{jM}^+(y) \}_{x_0=y_0} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} e^{-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2}} \left[\left(\frac{\not{k} + m}{2m} \right)_{il} \gamma_{ij}^0 e^{ik(x-y)} + \left(\frac{\not{k} - m}{2m} \right)_{il} \gamma_{ij}^0 e^{-ik(x-y)} \right]. \quad (2.42)$$

En changeant $k \rightarrow -k$ dans le deuxième terme, avec

$$k^+ = (\omega, \mathbf{k}) \rightarrow (\omega, -\mathbf{k}) = -(-\omega, \mathbf{k}) = -k^-, \quad (2.43)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \{ \Psi_{iM}(x), \Psi_{jM}^+(y) \}_{x_0=y_0} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \frac{2\omega_k}{2m} \delta_{ij} \exp \left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{4} \right) \exp(ik(x-y)) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta_{ij} \exp \left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2} \right) \exp(ik(x-y)) \\
&= \Delta_M(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij}, \quad (2.44)
\end{aligned}$$

avec $\Delta_M(x-y)$ donnée par (1.29).

Finalement on a

$$\{\Psi_{iM}(x), \pi_{jM}(y)\}_{x_0=y_0} = i \Delta_M(x-y) \delta_{ij}. \quad (2.45)$$

Il est facile de vérifier qu'on retrouve l'anticommutateur habituel quand $T = 0$. Les autres commutateurs sont nuls.

2.2.2 Tenseur moment-énergie

A partir de la définition de tenseur moment-énergie (2.21)

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi_M)} \partial^\nu \Psi_M + \partial^\nu \bar{\Psi}_M \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_M)} \\ &= \frac{i}{2} (\bar{\Psi}_M \gamma_\mu \partial^\nu \Psi_M - \partial^\nu \bar{\Psi}_M \gamma_\mu \Psi_M) \\ &= \frac{i}{2} \bar{\Psi}_M \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi_M, \end{aligned} \quad (2.46)$$

on déduit que le quadri-vecteur impulsion est donnée par la relation

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int d^3x \theta_{0\mu} = \frac{i}{2} \int d^3x (\bar{\Psi}_M \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Psi_M) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \exp\left(-\frac{(k_\mu k_\nu + q_\mu q_\nu) T^{\mu\nu}}{4}\right) \\ &\quad \times (k_\mu + q_\mu) \sum_{\alpha, \beta} \left[b_\beta^+(q) b_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) \exp(-i(k^+ - q^+)x) \right. \\ &\quad \left. - d_\beta(q) d_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k) \exp(i(k^+ - q^+)x) \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

L'intégration sur x nous donne un $\delta(k - q)$. En intégrant sur q on obtient

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k} k_\mu \exp\left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2}\right) \\ &\quad \sum_{\alpha, \beta} \left[b_\beta^+(k) b_\alpha(k) \bar{U}^\beta(k) \gamma^0 U^\alpha(k) - d_\beta(k) d_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(k) \gamma^0 V^\alpha(k) \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

En utilisant les relations [31] :

$$\bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) = \bar{V}^\beta(k) \gamma^0 V^\alpha(k) = \frac{\omega_k}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.49)$$

et en remplaçant dans P_μ on arrive à l'expression suivante

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} k_\mu \exp\left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2}\right) \sum_\alpha [b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^+(k)]. \quad (2.50)$$

Le problème majeur de la théorie locale est le terme infini qui apparait dans l'expression de l'énergie. Maintenant nous allons vérifier si ce problème persiste dans la théorie non locale. En posant $\mu = 0$ dans (2.50) on obtient l'expression de l'énergie

$$H_0 = P_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \exp\left(-\frac{k_\mu k_\nu \Gamma^{\mu\nu}}{2}\right) \sum_\alpha [b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^+(k)]. \quad (2.51)$$

On remarque l'apparition d'un facteur d'amortissement qui rend l'énergie du point zéro finie.

2.2.3 Fonction de propagation

On termine la quantification canonique du champ de Dirac non local par le calcul de la fonction de propagation, ou ce qui est équivalent, l'anticommutateur entre champs non locaux de Dirac à des temps différents.

L'expression du propagateur est donnée par la moyenne sur le vide du produit ordonné des champs de Dirac

$$\begin{aligned} S_M(x-y) &= \langle 0 | T(\Psi_{M_i}(x) \bar{\Psi}_{M_j}(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \Psi_{M_i}(x) \bar{\Psi}_{M_j}(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\Psi}_{M_j}(y) \Psi_{M_i}(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La représentation intégrale de la fonction de Heaviside donnée par

$$\theta(x^0 - y^0) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\tau}{\tau+i\epsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)), \quad (2.53)$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_M(x-y) &= \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \exp\left(-\frac{(k_\mu k_\nu + q_\mu q_\nu) \Gamma^{\mu\nu}}{4}\right) \\ &\times \sum_{\alpha\beta=1}^2 \left(\int \frac{d\tau}{\tau+i\epsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) \langle 0 | \left[b_\alpha(k) U_i^\alpha(k) e^{-ik^+x} + d_\alpha^+(k) V_i^\alpha(K) e^{ik^+x} \right] \right. \\ &\times \left[b_\beta^+(q) \bar{U}_j^\beta(q) e^{iq^+y} + d_\beta(q) \bar{V}_j^\beta(q) e^{-iq^+y} \right] | 0 \rangle \\ &+ \int \frac{d\tau}{\tau+i\epsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) \times \langle 0 | \left[b_\beta^+(q) \bar{U}_j^\beta(q) e^{iq^+y} + d_\beta(q) \bar{V}_j^\beta(q) e^{-iq^+y} \right] \\ &\times \left. \left[b_\alpha(k) U_i^\alpha(k) e^{-ik^+x} + d_\alpha^+(k) V_i^\alpha(K) e^{ik^+x} \right] | 0 \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sachant que

$$b_\alpha | 0 \rangle = d_\beta | 0 \rangle = 0, \quad (2.55)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& S_M(x-y) \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \exp\left(-\frac{(k_\mu k_\nu + q_\mu q_\nu) T^{\mu\nu}}{4}\right) \\
&\quad \times \sum_{\alpha\beta} \left[\int \frac{d\tau}{\tau+i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) b_\alpha(k) b_\beta^+(q) U_i^\alpha(k) \bar{U}_j^\beta(q) \exp(-i(k^+x - q^+y)) \right. \\
&\quad \left. + \int \frac{d\tau}{\tau+i\varepsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) d_\beta(q) d_\alpha^+(k) V_i^\alpha(k) \bar{V}_j^\beta(q) \exp(i(k^+x - q^+y)) \right]. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

On ajoute au premier terme la quantité $0 = \langle 0 | b_\alpha^+(k) b_\beta(q) | 0 \rangle$ et au deuxième terme la quantité $0 = \langle 0 | d_\beta^+(q) d_\alpha(k) | 0 \rangle$, puis nous utiliserons les relations d'anticommutation (2.35), ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned}
S_M(x-y) &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i\hat{q}+m}{2m} \right)_{ij} \int \int \frac{d^3 k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{\omega_k} \exp\left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{2}\right) \\
&\quad \left[\frac{\exp(-i\tau(x^0 - y^0))}{\tau+i\varepsilon} \exp(-ik^+(x-y)) - \frac{\exp(-i\tau(y^0 - x^0))}{\tau+i\varepsilon} \exp(ik^+(x-y)) \right]. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Maintenant nous considérons $\tau = k_0 - \omega_k$ pour le premier terme et $\tau = -k_0 - \omega_k$ pour le deuxième terme puis nous faisons le changement $k \rightarrow -k$ dans le deuxième terme

$$\frac{\exp(-i\tau(x^0 - y^0))}{\tau+i\varepsilon} \exp(-ik^+(x-y)) = \frac{\exp(-ik(x-y))}{\omega_k - k_0 + i\varepsilon} \text{ pour } \tau = k_0 - \omega_k, \quad (2.58)$$

$$\frac{\exp(-i\tau(y^0 - x^0))}{\tau+i\varepsilon} \exp(ik^+(x-y)) = \frac{\exp(-ik(x-y))}{-\omega_k - k_0 + i\varepsilon} \text{ pour } \tau = -k_0 - \omega_k, k \rightarrow -k. \quad (2.59)$$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient

$$\begin{aligned}
S_M(x-y) &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i\hat{q}+m}{2m} \right)_{ij} \int \int \frac{d^3 k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{\omega_k} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{\exp\left(-\frac{k_\mu^+ k_\nu^+ T^{\mu\nu}}{2}\right)}{k_0 - \omega_k + i\varepsilon} + \frac{\exp\left(-\frac{k_\mu^- k_\nu^- T^{\mu\nu}}{2}\right)}{-k_0 - \omega_k + i\varepsilon} \right] \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\hat{k}+m)_{ij}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) \sum_{\sigma=\pm} \frac{\omega_k + \sigma k^0}{2\omega_k} \exp\left(-\frac{k_\mu^\sigma k_\nu^\sigma T^{\mu\nu}}{2}\right), \quad (2.60)
\end{aligned}$$

avec

$$k_\mu^\sigma = (\sigma\omega, \mathbf{k}). \quad (2.61)$$

Il faut noter ici la présence du facteur $\sum_{\sigma} \frac{\omega_k + \sigma k^0}{2\omega_k} \exp\left(-\frac{k_\mu^\sigma k_\nu^\sigma T^{\mu\nu}}{2}\right)$. Si on choisit $T^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu}$, c'est à dire diagonal, on obtient

$$k_\mu^\sigma k_\nu^\sigma T^{\mu\nu} = \rho((\sigma\omega)^2 - \mathbf{k}^2) = \rho(\omega^2 - \mathbf{k}^2). \quad (2.62)$$

Dans ce cas la somme sur σ peut être effectuée

$$\sum_{\sigma=\pm} \frac{\omega_k + \sigma k^0}{2\omega_k} = 1, \quad (2.63)$$

et on obtient

$$S_M(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{y} + m)_{ij}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x-y)) \exp\left(-\frac{\rho k^2}{2}\right). \quad (2.64)$$

C'est cette expression de la fonction de propagation que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

2.3 Champ de Jauge

Dans cette partie on va donner quelques quantités qu'on utilisera dans les chapitres suivants. On commence par la densité Lagrangienne du champ de jauge qui s'obtient en remplaçant les champs habituels par des champs non locaux

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{M\mu\nu} F_M^{\mu\nu} \quad (2.65)$$

Cette densité reste invariante sous la transformation de Jauge

$$A'_{M\mu} = A_{M\mu} + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda_M \quad (2.66)$$

En effet on a

$$\begin{aligned} F'_{M\mu\nu} &= \partial_\mu (A_{M\nu} + \frac{1}{e} \partial_\nu \Lambda_M) - \partial_\nu (A_{M\mu} + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda_M) \\ &= F_{M\mu\nu} + \frac{1}{e} (\partial_\mu \partial_\nu \Lambda_M - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda_M) \\ &= F_{M\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \partial_\alpha A_\beta} = 0$ donnent l'équation de mouvement

$$\square A_{M\beta} = 0. \quad (2.68)$$

La solution de cette équation est donnée par

$$A_{M\mu} = \frac{N}{(\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\exp\left(-\frac{k_\mu k_\nu T^{\mu\nu}}{4}\right)}{2\omega_k} [a_{\alpha^-}(k) \varepsilon_\mu(k) \exp(-ik^+ x) + a_{\alpha^+}(k) \varepsilon_\mu(k) \exp(ik^+ x)]. \quad (2.69)$$

Finalement on donnera, sans calcul, l'expression du propagateur du champ de jauge dans la jauge de Feynman

$$\langle 0 | T(A_M^\mu A_M^\nu) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma} \frac{\omega_k + \sigma k^0}{2\omega_k} e^{-\frac{k_\mu^\sigma k_\nu^\sigma T^{\mu\nu}}{2}}, \quad (2.70)$$

qui, dans le cas où T est diagonal, s'écrit

$$\langle 0|T(A_M^\mu A_M^\nu)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} e^{-\frac{\rho k^2}{2}}. \quad (2.71)$$

Chapitre 3

Electrodynamique quantique non locale

Dans ce chapitre nous allons développer la version non locale de la théorie de l'électrodynamique quantique (QED non locale), ce qui revient à définir une densité Lagrangienne avec un terme d'interaction déformé. Nous déterminerons les règles de Feynman en utilisant la formule de Gell-Mann-Low. L'invariance de Lorentz nous oblige à choisir $T^{\mu\nu}$ diagonal, et on va choisir $T^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu}$ avec $\rho \geq 0$.

Pour étudier l'invariance de Jauge, nous considérons une densité Lagrangienne déformée donnée par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{M\mu\nu}F_M^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_M \left(i \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \Psi_M - e \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Psi_M A_{M\mu}. \quad (3.1)$$

Il faut s'assurer d'abord que cette densité Lagrangienne est invariante de Jauge. Considérons la transformation de jauge

$$\bar{\Psi}'_M = \bar{\Psi}_M \exp(i\Lambda_M), \quad \Psi'_M = \exp(-i\Lambda_M) \Psi_M, \quad A'_{M\mu} = A_{M\mu} + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda_M. \quad (3.2)$$

Le terme $-\frac{1}{4}F_{M\mu\nu}F_M^{\mu\nu}$ est invariant de jauge (déjà démontrée). Pour la partie libre fermionique de la densité Lagrangienne on a

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}'_M \left(i \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \Psi'_M &= \frac{i}{2} \left[-i \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \partial_\mu (\Lambda_M) \Psi_M + \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \partial_\mu (\Psi_M) \right. \\ &\quad \left. - \partial_\mu (\bar{\Psi}_M) \gamma^\mu \Psi_M - i \bar{\Psi}_M \partial_\mu (\Lambda_M) \gamma^\mu \Psi_M \right] - m \bar{\Psi}_M \Psi_M \\ &= \bar{\Psi}_M \left(i \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \Psi_M + \bar{\Psi}_M \partial_\mu (\Lambda_M) \gamma^\mu \Psi_M. \end{aligned} \quad (3.3)$$

D'autre part on a

$$e \bar{\Psi}_M \exp(i\Lambda_M) \gamma^\mu \exp(-i\Lambda_M) \Psi_M (A_{M\mu} + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda_M) = e \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Psi_M A_{M\mu} + e \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Psi_M \partial_\mu \Lambda_M. \quad (3.4)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F_{M\mu\nu}F_M^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_M \left(i \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \Psi_M - e \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Psi_M A_{M\mu} \\ &\quad + \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Psi_M \partial_\mu \Lambda_M - \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Psi_M \partial_\mu \Lambda_M \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ce qui montre que la densité Lagrangienne non locale est un invariant de jauge, comme dans le cas local.

3.1 Règles de Feynman

Nous savons que les règles de Feynman s'obtiennent en résolvant la formule de Gell-Mann-Low donnée par

$$G \langle 0 | T \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) | 0 \rangle_H = \sum \frac{(-1)^m}{m!} \int dz_1 \dots dz_m \langle 0 | T (\Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) V(z_1) \dots V(z_m)) | 0 \rangle_0. \quad (3.6)$$

et comme le terme d'interaction de la densité Lagrangienne ne contient aucune dérivée de champ, les fonctions de Green s'obtiennent en appliquant le théorème de Wick à l'expansion perturbative

$$\langle 0 | T (\Psi^1 \dots \Psi^{2n}) | 0 \rangle = \sum_P \epsilon_P \langle 0 | \Psi^{P_1} \Psi^{P_2} | 0 \rangle \dots \langle 0 | \Psi^{P_{2n-1}} \Psi^{P_{2n}} | 0 \rangle \quad (3.7)$$

avec ϵ la signature des permutations $P = (P_1, \dots, P_{2n})$

Par analogie avec la théorie locale, les lignes externes des diagrammes de Feynman correspondent à des propagateurs libres. On aura donc deux types de contraction correspondant aux lignes électroniques et photoniques, qui donneront dans l'espace de configuration les contributions suivantes

$$i S(x-y) = \langle 0 | T (\Psi_i(x) \bar{\Psi}_j(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{i(\not{k}+m)_{ij}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.8)$$

et

$$i D_M(x-y) = \langle 0 | T (A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.9)$$

Par convention les lignes électroniques sont orientées vers le spineur Ψ , dans le sens de la propagation de la charge. Par contre les lignes photoniques ne sont pas orientées. L'interaction électron-photon prend la forme d'un vertex

$$L_{\text{Int}} = -e(\gamma^\mu)_{ab} : \bar{\Psi}_{M_a}(z) \Psi_{M_b}(z) : A_{M\mu}(z). \quad (3.10)$$

Comme la quantité iL_{Int} apparaît dans l'expansion perturbative, les règles de Feynman, dans l'espace des phases, associent le facteur

$$-ie(\gamma^\mu)_{ab} \quad (3.11)$$

au vertex.

On peut vérifier cette règle en calculant la fonction de Green à l'ordre le plus bas en utilisant la formule (3.6). Nous savons que pour la QED les champs sont $\bar{\Psi}(z)$, $\Psi(z)$ et $A_\mu(z)$ et l'interaction peut être représentée sous la forme suivante

$$V(t) = \int d\lambda v(\lambda, t) \Psi(g_1(\lambda, t)) \bar{\Psi}(g_2(\lambda, t)) \gamma^\mu A_\mu(g_3(\lambda, t)). \quad (3.12)$$

Dans notre cas on a

$$g_1(\lambda, t) = z + Mb, \quad (3.13)$$

$$g_2(\lambda, t) = z + Ma, \quad (3.14)$$

$$g_3(\lambda, t) = z + Mc, \quad (3.15)$$

$$z^0 = t, \quad (3.16)$$

$$d\lambda v(\lambda, t) = d^4 a d^4 b d^4 c \exp(-a^T a - b^T b - c^T c). \quad (3.17)$$

En remplaçant (3.12) dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \langle 0 | T (\bar{\Psi}_{M_a}(x) \Psi_{M_b}(y) A_\mu(z)) | 0 \rangle_H \\ &= \int dz \int d^4 a d^4 b d^4 c \exp(-a^T a - b^T b - c^T c) G^{QED}(x, y, z), \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec

$$G^{QED}(x, y, z) = \int dx_1 \langle 0 | T (\Psi(x) \bar{\Psi}(y) A_\mu(z) e^{\bar{\Psi}(x_1 + Ma)} \gamma^\nu \Psi(x_1 + Mb) A_\nu(x_1 + Mc)) | 0 \rangle, \quad (3.19)$$

qui peut s'écrire

$$G_1^{QED}(x, y, z) = \int dx_1 \langle 0 | T \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) A_\mu(z) e^{\bar{\Psi}_c(x_1 + Ma)} \gamma_{cd}^\nu \Psi_d(x_1 + Mb) A_\nu(x_1 + Mc) | 0 \rangle. \quad (3.20)$$

On peut évaluer $G_1^{QED}(x, y, z)$ en terme de

$$S^+(x, y) = \left\{ \Psi^+(x), \bar{\Psi}^-(y) \right\}, S^-(x, y) = - \left\{ \bar{\Psi}^+(x), \Psi^-(y) \right\} \quad (3.21)$$

avec

$$\Psi^+(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_\alpha b_\alpha(k) U^\alpha(k) e^{-ikx}, \quad \bar{\Psi}^+(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_\alpha d_\alpha^+(k) V^\alpha(k) e^{ikx} \quad (3.22)$$

$$\bar{\Psi}^-(y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_\alpha b_\alpha^+(k) \bar{U}^\alpha(k) e^{iky}, \quad \Psi^-(y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_\alpha d_\alpha(k) \bar{V}^\alpha(k) e^{-iky} \quad (3.23)$$

Pour simplifier l'écriture, on remplacera la matrice M par la matrice unité.

D'après le théorème de Wick on a

$$\begin{aligned} G_1^{QED}(x, y, z) &= e \gamma_{cd}^\nu \int dx_1 \\ &\times \langle 0 | T (\Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y)) | 0 \rangle \langle 0 | T (\Psi_d(x_1 + b) \bar{\Psi}_c(x_1 + a)) | 0 \rangle \langle 0 | T (A_\mu(z) A_\nu(x_1 + c)) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | T (\Psi_a(x) \bar{\Psi}_c(x_1 + a)) | 0 \rangle \langle 0 | T (\Psi_d(x_1 + b) \bar{\Psi}_b(y)) | 0 \rangle \langle 0 | T (A_\mu(z) A_\nu(x_1 + c)) | 0 \rangle \\ &= e \gamma_{cd}^\nu \int dx_1 F, \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pour simplifier les calculs on pose

$$S_{ij}^+ = S^+, \quad (3.25)$$

avec

$$\begin{aligned}
F &= \langle 0 | \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) A_\mu(z) \bar{\Psi}_c(x_1 + a) \gamma_{cd}^\mu \Psi_d(x_1 + b) A_\mu(x_1 + c) | 0 \rangle_0 \\
&= \theta(x^0 - y^0) \theta(z^0 - x_1^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(x^0 - y^0) \theta(x_1^0 - z^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(x^0 - x_1^0) \theta(y^0 - z^0) S^+(x, x_1 + a) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - x^0) \theta(y^0 - z^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(x^0 - z^0) \theta(y^0 - x_1^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(x^0 - z^0) \theta(x_1^0 - y^0) S^+(x, x_1 + a) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(x^0 - x_1^0) \theta(z^0 - y^0) S^+(x, x_1 + a) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - x^0) \theta(z^0 - y^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0) \theta(z^0 - x_1^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0) \theta(x_1^0 - z^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(y^0 - x_1^0) \theta(x^0 - z^0) S^-(x_1 + a, x) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - y^0) \theta(x^0 - z^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(y^0 - z^0) \theta(x^0 - x_1^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(y^0 - z^0) \theta(x_1^0 - x^0) S^-(x_1 + a, x) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(y^0 - x_1^0) \theta(z^0 - x^0) S^-(x_1 + a, x) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - y^0) \theta(z^0 - x^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(z^0 - x^0) \theta(y^0 - x_1^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(z^0 - x^0) \theta(x_1^0 - y^0) S^+(x, x_1 + a) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(z^0 - x_1^0) \theta(x^0 - y^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - z^0) \theta(x^0 - y^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z) \\
&\quad + \theta(z^0 - y^0) \theta(x^0 - x_1^0) S^+(x, x_1 + a) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(z^0 - y^0) \theta(x_1^0 - x^0) S^-(x_1 + a, x) S^-(y, x_1 + b) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(z^0 - x_1^0) \theta(y^0 - x^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(z, x_1 + c) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - z^0) \theta(y^0 - x^0) S^-(x_1 + a, x) S^+(x_1 + b, y) \Delta^+(x_1 + c, z).
\end{aligned} \quad (3.26)$$

On arrange cette expression comme suit

$$\begin{aligned}
F = & \Delta^+(z, x_1 + c) \\
& \times [\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x, x_1 + a)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x, x_1 + a)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y)] \\
& + \Delta^+(x_1 + c, z) \\
& \times [\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)S^+(x, x_1 + a)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)S^+(x, x_1 + a)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)S^+(x, x_1 + a)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)S^-(x_1 + a, x)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)S^-(y, x_1 + b) \\
& + \theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y) \\
& + \theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)S^+(x_1 + b, y)] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

on la simplifie une autre fois :

$$\begin{aligned}
& F \\
&= \Delta^+(z, x_1 + c) \times \left\{ S^-(y, x_1 + b) \right. \\
&\quad \times [\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \\
&\quad \quad \quad + S^+(x_1 + b, y) \\
&\quad [\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \left. \right\} \\
&+ \Delta^+(x_1 + c, z) \times \left\{ S^-(y, x_1 + b) \right. \\
&\quad \times [\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)S^+(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \\
&\quad \quad \quad + S^+(x_1 + b, y) \\
&\quad [\theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)S^+(x, x_1 + a) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)S^-(x_1 + a, x) \\
&\quad + \theta(x_1^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \left. \right\} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

On ajoute à l'expression du 1^{er} crochet le terme

$$\begin{aligned} & 4\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)\theta(y^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - x^0)\Delta^+(z, x_1 + c)S^-(x_1 + a, x)S^-(y, x_1 + b) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

et à l'expression du 2^{eme} crochet le terme

$$\begin{aligned} & 4\theta(x_1^0 - z^0)\theta(x_1^0 - y^0)\theta(x^0 - x_1^0)\theta(z^0 - x^0)\Delta^+(x_1 + c, z)S^+(x, x_1 + a)S^+(x_1 + b, y) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F & = \theta(z^0 - x_1^0)\Delta^+(z, x_1 + c) \{ 6\theta(y^0 - x_1^0)S^-(y, x_1 + b) \\ & \quad \times [\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) + \theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \\ & \quad + 2\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x_1 + b, y) \\ & \quad \times [\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) + \theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \} \\ & \quad + \theta(x_1^0 - z^0)\Delta^+(x_1 + c, z) \{ 2\theta(y^0 - x_1^0)S^-(y, x_1 + b) \\ & \quad \times [\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) + \theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \\ & \quad + 6\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x_1 + b, y) \\ & \quad \times [\theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) + \theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x)] \}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

On pose

$$A = \theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) + \theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x). \quad (3.32)$$

Alors

$$\begin{aligned} F & = A \{ \theta(z^0 - x_1^0)\Delta^+(z, x_1 + c) \\ & \quad [2\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x_1 + b, y) + 6\theta(y^0 - x_1^0)S^-(y, x_1 + b)] \\ & \quad + \theta(x_1^0 - z^0)\Delta^+(x_1 + c, z) \\ & \quad [6\theta(x_1^0 - y^0)S^+(x_1 + b, y) + 2\theta(y^0 - x_1^0)S^-(y, x_1 + b)] \}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

On remarque qu'on a le même problème précédent. Pour le régler, on ajoute

$$4\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x_1^0)\theta(x_1^0 - y^0)A\Delta^+(z, x_1 + c)S^+(x_1 + b, y) = 0 \quad (3.34)$$

au premier terme et

$$2\theta(z^0 - y^0)\theta(x_1^0 - z^0)\theta(y^0 - x_1^0)A\Delta^+(x_1 + c, z)S^-(y, x_1 + b) = 0 \quad (3.35)$$

au 2^{eme} terme. D'où

$$G_1^{Q-E-D}(x, y, z) = -i6 \int \int dx_1 d^4a d^4b d^4c \exp(-a^T a - b^T b - c^T c) ABC \quad (3.36)$$

avec

$$A = \theta(x^0 - x_1^0)S^+(x, x_1 + a) + \theta(x_1^0 - x^0)S^-(x_1 + a, x), \quad (3.37)$$

$$B = \theta(x_1^0 - y^0)S^+(x_1 + b, y) + \theta(y^0 - x_1^0)S^-(y, x_1 + b), \quad (3.38)$$

$$C = \theta(z^0 - x_1^0)\Delta^+(z, x_1 + c) + \theta(x_1^0 - z^0)\Delta^+(x_1 + c, z). \quad (3.39)$$

Les expressions de A, B, C ont la même forme que le propagateur habituel de Feynman

$$-i\Delta_F = \theta(x^0 - x'^0)\Delta^+(x, x') + \theta(x_1^0 - x'^0)\Delta^+(x', x), \quad (3.40)$$

$$-iS_F = \theta(x^0 - x'^0)S^+(x, x') + \theta(x_1^0 - x'^0)S^-(x', x). \quad (3.41)$$

Pour $a = b = c = 0$ (le cas local) ces expressions deviennent les propagateurs habituels de Feynman.

Le facteur 6 dans (3.36) est le résultat de la non localité (en effet on a 3 points différents $[x + Ma, x + Mb$ et $x + Mc]$). Pour obtenir le nombre de diagrammes de Feynman topologiquement différents on doit diviser par 3!. D'où

$$G_1^{QED}(x, y, z) = -i \int \int dx_1 d^4a d^4b d^4c \exp(-a^T a - b^T b - c^T c) ABC. \quad (3.42)$$

Par analogie avec la terminologie utilisée en théorie des perturbations locale (contraction de Wick), on appelle un contracteur la quantité suivante

$$-i\Delta(x, t; x', t') = \theta(t^0 - t'^0)\Delta^+(x, x') + \theta(t_1^0 - t'^0)\Delta^+(x', x). \quad (3.43)$$

En remplaçant dans (3.36) on obtient

$$\begin{aligned} G_1^{QED}(x, y, z) &= e(\gamma)_{cd} \int dx_1 d^4a d^4b d^4c \exp(-a^T a - b^T b - c^T c) \Delta(x, x^0; x_1 + c, t) \\ &\quad \times S_{bd}(y, y^0; x_1 + b, t) S_{ac}(z, z^0; x_1 + a, t) \\ &= e(\gamma)_{cd} \int dx_1 \int d\lambda v(\lambda, t) \Delta(x, x^0; g_3(\lambda, t), t) \\ &\quad \times S_{db}(y, y^0; g_2(\lambda, t), t) S_{ac}(z, z^0; g_1(\lambda, t), t). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Donc les règles de Feynman pour le calcul des fonctions de Green dans l'espace des moments sont alors :

- A chaque boucle fermionique est associé un signe négatif
- Dessiner tous les diagrammes topologiquement inéquivalents.
- Calculer le signe du diagramme en déterminant le signe associé à chaque ligne fermionique ouverte en ajoutant un signe négatif à chaque boucle fermionique fermée.
- Pour chaque ligne fermionique interne entrante, on associe le propagateur

$$\frac{i(\not{k} - m)_{ij}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma} \frac{\omega_k + \sigma k^0}{2\omega_k} e^{-\frac{k_{\mu}^{\sigma} k_{\nu}^{\sigma T \mu\nu}}{2}}$$

– Pour chaque ligne fermionique interne sortante, on associe le propagateur

$$\frac{i(-\not{k}-m)_{ij}}{k^2-m^2+i\epsilon} \sum_{\sigma} \frac{\omega_k+\sigma k^0}{2\omega_k} e^{-\frac{k_{\mu}^{\sigma} k_{\nu}^{\sigma} T^{\mu\nu}}{2}}$$

– Pour chaque ligne photonique interne, on associe le propagateur

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} \sum_{\sigma} \frac{\omega_k+\sigma k^0}{2\omega_k} e^{-\frac{k_{\mu}^{\sigma} k_{\nu}^{\sigma} T^{\mu\nu}}{2}}$$

– A chaque vertex on associe le facteur

$$-ie(\gamma^{\mu})_{ab} (2\pi)^2 \delta^4(q).$$

avec q le moment total entrant au vertex.

– Intégrer sur les moments internes.

3.2 Fonctions de corrélation à 2-points et 3-points

Pour illustrer les règles de Feynman développées précédemment, nous allons donner les expressions analytiques des corrections radiatives aux propagateurs de l'électron et du photon à l'ordre d'une boucle.

Les diagrammes de Feynman représentant les fonctions de corrélation à 2-points, sont respectivement les corrections radiatives, à une boucle, au propagateurs électronique et photonique données par les figures (3.1) et (3.2).

Nous commencerons par considérer le propagateur électronique à l'ordre d'une boucle. Le premier terme du développement perturbatif est le propagateur électronique non perturbé $iS_{\alpha\beta}$ (3.8). Le deuxième est un contre terme de masse $iS_{\alpha\sigma} (-i\delta m\delta_{\sigma\rho})iS_{\rho\beta} = i\delta m_{\alpha\sigma} (S S)_{\alpha\beta}$ et qui est introduit pour absorber les éventuelles divergences UV. Le troisième terme représente la première correction radiative et qui s'appelle "la fonction d'énergie propre".

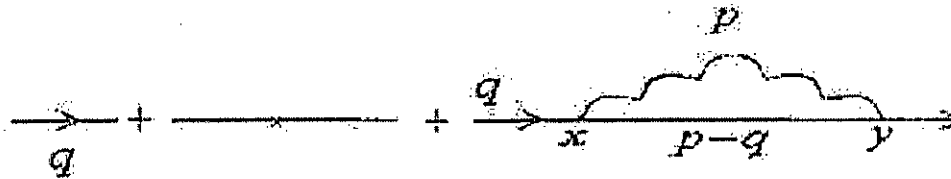


Figure 3.1 : Energie propre

En utilisant les règles de Feynman dans l'espace des moments, l'expression analytique de ce

diagramme est

$$\begin{aligned}
 & (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i g_{\mu\nu} D_F(k) (iS_F(p))_{\alpha\omega} \gamma_{\omega\epsilon}^\mu (iS_F(p-k))_{\epsilon\beta} \gamma_{\rho\sigma}^\nu (iS_F(p))_{\sigma\beta} \\
 &= -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{(\not{p}-\not{k})-m_0+i\epsilon} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \right] \frac{-i \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2+k^2}{2}\right)}{(k^2+i\epsilon)}. \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

En ignorant le deuxième terme de la figure (3.1), le propagateur électronique à l'ordre d'une boucle est donné par

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{(\not{p}-m_0)} + \frac{i}{(\not{p}-m_0)} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{(\not{p}-m_0)} \\
 &= \frac{i}{(\not{p}-m_0)} \left(1 + \frac{\Sigma(p)}{(\not{p}-m_0)}\right) = \frac{i}{(\not{p}-m_0)} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma(p)}{(\not{p}-m_0)}} = \frac{i}{(\not{p}-m_0) - \Sigma(p)}. \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

avec $\Sigma(p)$, une matrice 4×4 dans l'espace des spineurs, donnée par

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p) &= (-ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left(-\rho \frac{k^2}{2}\right)}{(k^2+i\epsilon)} \gamma^\mu \frac{[(\not{p}-\not{k})+m_0] \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2}{2}\right)}{((p-k)^2-m_0^2+i\epsilon)} \gamma_\mu \\
 &= (-ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{(\not{p}-\not{k})+m_0}{((p-k)^2-m_0^2+i\epsilon)} \gamma_\mu \frac{\exp\left(-\rho \frac{k^2+(p-k)^2}{2}\right)}{k^2+i\epsilon}. \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour $\rho = 0$, cette expression est UV divergente.

Considérons maintenant le propagateur photonique. Le terme à l'ordre le plus bas est le propagateur libre $i g_{\mu\nu} D(k) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$, et le deuxième terme constitue la correction radiative due à la "polarisation du vide".

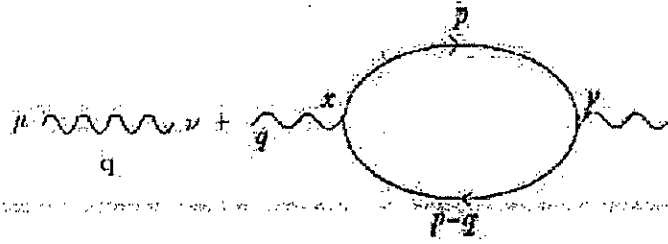


Figure 3.2 : Propagateur photonique

D'après les règles de Feynman, la formule analytique de ce deuxième terme est

$$\begin{aligned}
 iD_F(k) i\Pi_{\mu\nu}(k) iD_F(k) &= -(-ie_0)^2 iD_F(k) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i}{(\not{p}-\not{k})-m_0+i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \right] \\
 &\quad \times \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2+k^2}{2}\right) iD_F(k), \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

et la partie intéressante de cette expression, $i\Pi_{\mu\nu}(k)$, est constitué par la boucle électronique qui est, elle aussi, UV divergente.

Terminons par la dernière correction radiative. Elle correspond à la modification du sommet $(-ie\gamma_\mu)$ par l'échange d'un photon virtuel (figure (3.3)).

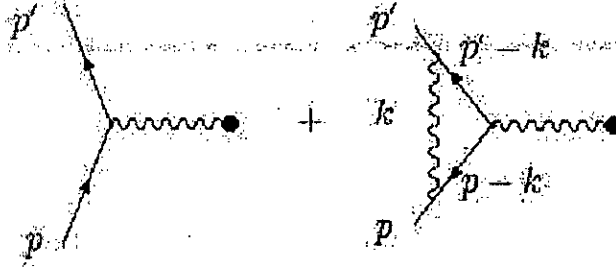


Figure 3.3 : Correction de vertex

L'expression analytique du diagramme à l'ordre de l'arbre est

$$\begin{aligned} & (-ie)(ig_{\mu\nu}D_F(p-p'))(iS_F(p')\gamma^\nu iS_F(p))_{\alpha\beta} \\ &= -ie \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p}' - m_0 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} \frac{-ie^{-\rho \frac{(p-k)^2 + p'^2 + p^2}{2}}}{(p-p')^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.49)$$

alors que la correction à l'ordre d'une boucle est donnée par

$$(-ie)(ig_{\mu\nu}D_F(p-p'))(iS_F(p')\Gamma_\mu(p',p)iS_F(p))_{\alpha\beta}, \quad (3.50)$$

avec l'opérateur de sommet donné par

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p',p) &= (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F(k) [\gamma_\nu iS_F(p-k) \gamma_\mu iS_F(p'-k) \gamma^\nu] \\ &= (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{(k^2 + i\epsilon)} \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p}' - \not{k} - m_0 + i\epsilon)} \gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - \not{k} - m_0 + i\epsilon)} \gamma^\nu \exp\left(-\rho \frac{(p'-k)^2 + (p-k)^2 + k^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nous remarquons que pour $\rho = 0$ on a une divergence UV logarithmique et une divergence infrarouge. Pour $\rho \neq 0$, la divergence UV est régularisée par la présence du facteur d'amortissement exponentiel. Néanmoins la divergence IR est toujours présente. Cette dernière peut être régularisée par l'introduction d'une masse fictive pour le photon, ie, $\frac{1}{(k^2 + i\epsilon)} \rightarrow \frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)}$.

3.3 Applications

Nous allons, dans cette section, calculer certains processus de l'électrodynamique quantique non locale. Nous intéresserons exclusivement à la diffusion electron- positron et à la diffusion de photons par des électrons.

3.3.1 Diffusion électron-positron

La représentation diagrammatique de la diffusion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ est donnée par

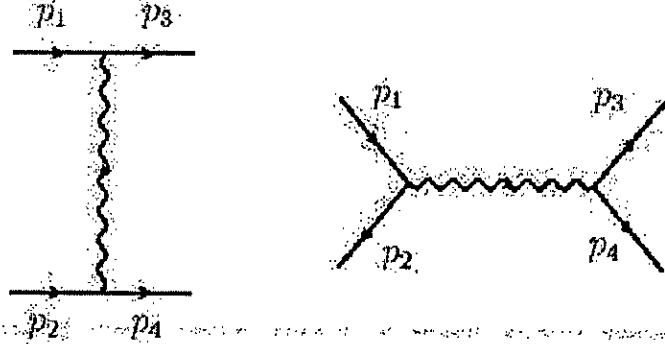


Figure 3.4 : Diffusion electron-positron

Maintenant nous allons calculer la section efficace donnée par ($T = 2\pi\delta(0)$)

$$d\sigma = \int V \frac{|S_{fi}|^2}{T |\mathbf{v}_{rel}|} V \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} V \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}, \quad (3.52)$$

où S_{fi} est l'amplitude de diffusion. Dans (3.52) $\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT/V} = \frac{|S_{fi}|^2}{(2\pi)^4 \delta^4(0)/V}$ est le taux de transition par unité de volume et de temps par électron, $|\mathbf{v}_{rel}|/V$ est le flux des électrons incidents, $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_e$ est la vitesse relative du positron par rapport à l'électron et $1/V$ le nombre d'électrons par unité de volume et enfin $V \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}$ et $V \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}$ sont respectivement les éléments de volume de l'espace des phases de l'électron et du positron finaux.

L'expression (3.52) s'écrit aussi en fonction de l'amplitude de diffusion M

$$d\sigma = \frac{m^4}{((p_1 p_2)^2 - m^4)^{\frac{1}{2}}} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^2 E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^2 E_4} (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) |M_{fi}|_{moy}^2 \quad (3.53)$$

M est l'élément de matrice S réduit du processus.

Nous allons calculer cette amplitude à l'ordre le plus bas du développement perturbatif en puissance de la constante de couplage e .

La diffusion électron-positron est donnée par les deux diagrammes sur la figure (3.4). Le premier représente l'amplitude directe M_1 et le deuxième l'amplitude M_2 obtenu du premier Par symétrie d'échange. L'application des règles de Feynman donne

$$\begin{aligned} M_1 &= \bar{V}(p_2) (-ie\gamma^\mu) U(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu} \exp\left(-\frac{e}{2}(p_1+p_2)^2\right)}{(p_1+p_2)^2} \bar{U}(p_3) (-ie\gamma^\nu) V(p_4) \\ &= \frac{ie^2 \exp\left(-\frac{e}{2}(p_1+p_2)^2\right)}{(p_1+p_2)^2} \bar{V}(p_2) \gamma^\mu U(p_1) \bar{U}(p_3) \gamma_\mu V(p_4) \end{aligned} \quad (3.54)$$

et

$$\begin{aligned} M_2 &= U(p_1) (-ie\gamma^\mu) \bar{U}(p_3) \frac{-ig^{\mu\nu} \exp\left(-\frac{\rho}{2}(p_1-p_3)^2\right)}{(p_1-p_3)^2} \bar{V}(p_2) (-ie\gamma^\nu) V(p_4) \\ &= \frac{ie^2 e^{-\frac{\rho}{2}(p_1-p_3)^2}}{(p_1-p_3)^2} U(p_1) \gamma^\mu \bar{U}(p_3) \bar{V}(p_2) \gamma_\nu V(p_4) \end{aligned} \quad (3.55)$$

La barre sur les symboles indique que la quantité en question est associée à une antiparticule.

Il s'agit ensuite de calculer le carré de l'amplitude. Pour évaluer la section efficace de diffusion d'un état initial non polarisé il faut également prendre la moyenne sur les états de polarisation de l'électron et du positron. Chaque polarisation apparaît d'un état initial avec la même probabilité. Ensuite si l'on s'intéresse pas aux polarisations des particules de l'état final, il faut sommer sur celles-ci. La section efficace non polarisée est alors obtenue à partir de la moyenne suivante

$$|M|_{moy}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} |M|^2 \quad (3.56)$$

ou :

$$|M|_{moy}^2 = |M_1|_{moy}^2 + |M_2|_{moy}^2 + |M_1 M_2|_{moy} + |M_2 M_1^*|_{moy} \quad (3.57)$$

On remarque que $|M_1|^2$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4 \exp(-\rho(p_1+p_2)^2)}{(p_1+p_2)^4} [\bar{V}(p_2) \gamma^\mu U(p_1) \bar{U}(p_3) \gamma_\mu V(p_4)] \\ &\times [\bar{V}(p_4) \gamma_\nu U(p_3) \bar{U}(p_1) \gamma^\nu V(p_2)], \end{aligned} \quad (3.58)$$

ou sous la forme matricielle suivante

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= e^4 \frac{e^{-\rho(p_1+p_2)^2}}{(p_1+p_2)^4} [\bar{V}_{\alpha_2}(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha_2\alpha_1} U_{\alpha_1}(p_1) \bar{U}_{\alpha_3}(p_3) (\gamma_\mu)_{\alpha_3\alpha_4} V_{\alpha_4}(p_4)] \\ &\times [\bar{V}_{\beta_4}(p_4) (\gamma_\nu)_{\beta_4\beta_3} U_{\beta_3}(p_3) \bar{U}_{\beta_1}(p_1) (\gamma^\nu)_{\beta_1\beta_2} V_{\beta_2}(p_2)]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Cette dernière expression peut être arrangée comme suit

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4 \exp(-\rho(p_1+p_2)^2)}{(p_1+p_2)^4} [V_{\beta_2}(p_2) \bar{V}_{\alpha_2}(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha_2\alpha_1} U_{\alpha_1}(p_1) \bar{U}_{\beta_1}(p_1) (\gamma^\nu)_{\beta_1\beta_2}] \\ &\times [U_{\beta_3}(p_3) \bar{U}_{\alpha_3}(p_3) (\gamma_\mu)_{\alpha_3\alpha_4} V_{\alpha_4}(p_4) \bar{V}_{\beta_4}(p_4) (\gamma_\nu)_{\beta_4\beta_3}], \end{aligned} \quad (3.60)$$

où les quantités entre crochets sont des traces. Alors on écrit

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4 \exp(-\rho(p_1+p_2)^2)}{(p_1+p_2)^4} \times \text{Tr}[V(p_2) \bar{V}(p_2) \gamma^\mu U(p_1) \bar{U}(p_1) \gamma^\nu] \\ &\times \text{Tr}[U(p_3) \bar{U}(p_3) \gamma_\mu V(p_4) \bar{V}(p_4) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Grâce aux relations suivantes

$$\sum_{\alpha} U^{\alpha}(p) \bar{U}^{\alpha}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad (3.62)$$

$$\sum_{\alpha} V^{\alpha}(p) \bar{V}^{\alpha}(p) = \frac{\not{p} - m}{2m}, \quad (3.63)$$

l'équation (3.61) devient

$$|M_1|^2 = \frac{e^4 \exp(-\rho(p_1+p_2)^2)}{(p_1+p_2)^4} \times \text{Tr}\left[\frac{\not{p}_2 - m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^\nu\right] \times \text{Tr}\left[\frac{\not{p}_3 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_4 - m}{2m} \gamma_\nu\right] \quad (3.64)$$

Les traces dans (3.64) se calculent aisément en utilisant la relation suivante

$$\text{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p}_i \mp m_0) \gamma^\nu (\not{p}_j \pm m_0)\right] = 4 \left[p_i^\mu p_j^\nu + p_i^\nu p_j^\mu - g^{\mu\nu} (p_i p_j + m_0^2)\right]. \quad (3.65)$$

Finalement le carré de l'amplitude du diagramme directe est donné par

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4 \exp(-\rho(p_1+p_2)^2)}{(p_1+p_2)^4 m_0^4} \left[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 p_2 + m_0^2)\right] \\ &\quad \left[p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - g^{\mu\nu} (p_3 p_4 + m_0^2)\right] \\ &= \frac{e^4 \exp(-\rho(p_1+p_2)^2)}{(p_1+p_2)^4 m_0^4} \left[2(p_1 p_3)(p_2 p_4) + 2(p_1 p_4)(p_2 p_3) + 2m_0^2(p_1 p_2 + p_3 p_4) + 4m_0^4\right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Comme cette quantité est invariant de Lorentz, elle peut être calculée dans n'importe quel référentiel, et le choix le plus naturel est d'utiliser le référentiel du centre de masse dans lequel les lois de conservations donnent

$$p_1^0 = p_2^0 = p_3^0 = p_4^0 = E \quad (3.67)$$

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 \quad (3.68)$$

$$p_1^2 = p_2^2 = m_0^2, p_3^2 = p_4^2 = m_0^2 \sin^2 \vartheta \quad (3.69)$$

$$p_1 p_2 = p_3 p_4 = p_1^{02} + \mathbf{p}_1^2 = E^2 + E^2 - m_0^2 = 2E^2 \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} p_1 p_4 &= p_3 p_2 = p_1^{02} - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4 = E^2 + E^2 \cos \vartheta - m_0^2 = E^2 [1 + \cos \vartheta] \\ &= 2E^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} p_1 p_3 &= p_2 p_4 = p_1^{02} - \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_4 = E^2 - E^2 \cos \vartheta - m_0^2 = E^2 [1 - \cos \vartheta] \\ &= 2E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 = 4E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (3.73)$$

Dans le cas ultrarelativiste on a ($E \gg m_0$), et ceci nous permet de négliger les termes en m_0^4 et m_0^2 . Ainsi on peut écrire

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 = 4E^2 \quad (3.74)$$

En remplaçant dans (3.66) on obtient

$$|M_1|_{\text{moy}}^2 = \frac{e^4 \exp(-4\rho E^2)}{2m_0^4} \left[\sin^4 \frac{\vartheta}{2} + \cos^4 \frac{\vartheta}{2}\right] \quad (3.75)$$

Maintenant nous allons calculer la moyenne de carré de l'amplitude du diagramme d'échange en suivant la même méthode utilisée précédemment pour obtenir $|M_1|_{moy}^2$. nous donnerons seulement l'expression finale

$$|M_2|_{moy}^2 = \frac{e^4 \exp(-4\rho E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) [1 + \cos^4 \frac{\vartheta}{2}]}{2m_0^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.76)$$

Le terme d'interférence se calcule aussi de la même manière et est donné par

$$|M_1 M_2^*|_{moy} = |M_2 M_1^*|_{moy} = -\frac{e^4 \exp(-2\rho E^2 [1 + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}]) \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{4m_0^4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.77)$$

Finalement le carré de l'amplitude totale est donnée par

$$|M|_{moy}^2 = \frac{e^4}{8m_0^4} \left\{ \left[\sin^4 \frac{\vartheta}{2} + \cos^4 \frac{\vartheta}{2} \right] e^{-4\rho E^2} + \frac{1 + \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} e^{-4\rho E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} - 2 \frac{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} e^{-2\rho E^2 [1 + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}]} \right\}. \quad (3.78)$$

En remplaçant dans l'expression de la section efficace (3.53) et utilisant la relation suivante

$$((p_1 p_2)^2 - m^4)^{\frac{1}{2}} = 2E_2 p_2 \quad (3.79)$$

la section efficace différentielle pour la diffusion électron-positron dans le cadre de la théorie non locale de l'électrodynamique quantique est finalement donnée par l'expression

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^4}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \exp(-4\rho E^2) + \frac{1 + \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \exp\left(-4\rho E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) - 2 \frac{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \exp\left(-2\rho E^2 [1 + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}]\right) \right]. \quad (3.80)$$

Pour pouvoir obtenir une valeur numérique au paramètre caractérisant la non localité nous considérons le processus plus simple $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ où juste le diagramme d'annihilation contribue. On a alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^4}{16E^2} [1 + \cos^2 \vartheta] \exp(-4\rho E^2). \quad (3.81)$$

L'intégration sur l'angle solide donne

$$\sigma = \frac{\pi}{3E^2} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \exp(-4\rho E^2). \quad (3.82)$$

On introduit le paramètre $s = (2E)^2$ tel que

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e^{-\rho s}. \quad (3.83)$$

De cette relation on obtient

$$\rho = -\frac{1}{s} \ln \frac{3s\sigma}{4\pi\alpha^2}. \quad (3.84)$$

En utilisant les valeurs numériques suivantes [32] $s = (121.43\text{GeV})^2$ et $\sigma = 65.79 \text{ pb}$, on obtient

$$\sqrt{\rho} \sim 10^{-18} \text{ m}. \quad (3.85)$$

3.3.2 Diffusion de Compton

La diffusion de Compton consiste en la diffusion de photons par des électrons libres. En langage de théorie des champs un photon incident de 4-moment p et de polarisation ε est absorbé par un électron et un autre photon de 4-moment p' et de polarisation ε' est alors émis. Les diagrammes de Feynman, à l'ordre de l'arbre, qui contribuent à cette diffusion, sont représentés dans la figure (3.5).

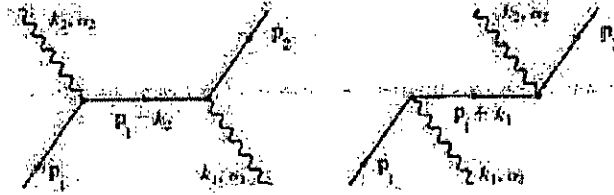


Figure 3.5 : Diffusion Compton

Le photon incident et le photon émis sont décrit respectivement par des ondes planes données par

$$A_{1\mu}(k_1) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega_1 V}} \varepsilon_{1\mu}(k_1, \lambda_1) (e^{-ik_1 x_1} + e^{ik_1 x_1}) \quad (3.86)$$

$$A_{2\mu}(k_2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega_2 V}} \varepsilon_{2\mu}(k_2, \lambda_2) (e^{-ik_2 x_2} + e^{ik_2 x_2}). \quad (3.87)$$

La formule analytique de la matrice S de cette interaction est donnée par

$$\begin{aligned} S_{21} &= \frac{e^2}{V} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{(4\pi)^2}{\omega_1 \omega_2}} (4\pi)^2 \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \\ &\bar{U}^\beta(p_2) \left[(-i\varepsilon_2) \frac{(\not{p}_1 + \not{k}_1 + m_0) \exp\left(-\frac{\not{p}_1 + \not{k}_1}{2}\right)}{((p_1 + k_1)^2 - m_0^2 + i\varepsilon)} (-i\varepsilon_1) \right. \\ &\left. + (-i\varepsilon_1) \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_0) \exp\left(-\frac{\not{p}_1 - \not{k}_2}{2}\right)}{((p_1 - k_2)^2 - m_0^2 + i\varepsilon)} (-i\varepsilon_2) \right] U^\alpha(p_1) \end{aligned} \quad (3.88)$$

les variables cinématiques du processus sont définies dans la figure(3.5), avec

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2 \quad (3.89)$$

on sait que cette relation est invariante sous la symétrie de croisement, d'ou

$$p_1 + k_1 = p_2 - k_2 \quad (3.90)$$

$$p_1 - k_1 = p_2 + k_2 \quad (3.91)$$

$$p_1 - k_1 = p_2 - k_2 \quad (3.92)$$

La relation (3.89) décrit correctement la conservation de l'énergie et du moment dans la diffusion Compton. Les relations (3.90) et (3.91) ne sont pas vérifiées et par conséquent leurs contributions s'annulent. Physiquement ces deux relations de conservations décrivent l'émission ou l'absorption de deux photons par un électron, qui un processus impossible à réaliser cinématiquement. Enfin la relation (3.92) correspond à l'échange des deux photons décrit par la loi de conservation (3.89).

On revient maintenant à l'élément de matrice qu'on peut écrire sous la forme suivante

$$S_{21} = \frac{e^2}{V} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{(4\pi)^2}{\omega_1 \omega_2}} (4\pi)^2 \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) M^{\mu\nu} \quad (3.93)$$

où on a introduit le tenseur de Compton

$$M^{\mu\nu} = \bar{U}^\beta(p_2) \left[\gamma^\mu \frac{\exp(-\frac{\rho}{2}(p_1 + k_1)^2)}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m_0} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\exp(-\frac{\rho}{2}(p_1 - k_2)^2)}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m_0} \gamma^\mu \right] U^\alpha(p_1). \quad (3.94)$$

Utilisons les conditions sur couche masse pour les moments

$$(p_1 + k_1)^2 - m_0^2 = 2p_1 k_1 \quad (3.95)$$

$$(p_1 - k_2)^2 - m_0^2 = -2p_1 k_2 \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\rho}{2}(p_1 + k_1)^2\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\rho}{2}\right)^n}{n!} ((p_1 + k_1)^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\rho}{2}\right)^n}{n!} (m_0^2 + 2p_1 k_1)^n \\ &= \exp\left(-\frac{\rho}{2}(m_0^2 + 2p_1 k_1)\right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\exp\left(-\frac{\rho}{2}(p_1 - k_2)^2\right) = \exp\left(-\frac{\rho}{2}(m_0^2 - 2p_1 k_2)\right) \quad (3.98)$$

et en remplaçant dans l'expression (3.94) on obtient

$$M^{\mu\nu} = e^{-\frac{\rho}{2}m_0^2} \bar{U}^\beta(p_2) \left[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_1 + \not{k}_1 + m_0) \times \exp(-\rho p_1 k_1)}{2p_1 k_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_0) \times \exp(\rho p_1 k_2)}{-2p_1 k_2} \gamma^\mu \right] U^\alpha(p_1). \quad (3.99)$$

Ce tenseur est un invariant de jauge. En effet, du moment que les photons interagissent avec des courants conservés, on montre que

$$k_1^\nu M_{\mu\nu} = k_2^\mu M_{\mu\nu} = 0. \quad (3.100)$$

Maintenant nous allons calculer la section efficace donnée par ($T = 2\pi\delta(0)$)

$$d\sigma = \int V \frac{|S_{fi}|^2}{T |\mathbf{v}_{\text{rel}}|} V \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} V \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}, \quad (3.101)$$

avec $\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT/V} = \frac{|S_{fi}|^2}{(2\pi)^4 \delta^4(0)/V}$ et où $|\mathbf{v}_{\text{rel}}|/V$ est le flux des photons incidents, $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{c} - \mathbf{v}_e$ est la vitesse relative des photons par rapport à l'électron et $1/V$ le nombre d'électrons par unité de volume. $V \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}$ et $V \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}$ sont respectivement les éléments de volume de l'espace des phases de l'électron et du photons finaux.

Dans le repère du laboratoire où l'électron est au repos, $p_1 = (E_1 = m_0, \mathbf{0})$, on $|\mathbf{v}_{\text{rel}}| = |\mathbf{c}| = 1$ et par conséquent la section efficace est donnée par

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{(4\pi)^2}{2\omega_1} \int \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) |\epsilon_{2\mu} M^{\mu\nu} \epsilon_{1\nu}|^2 \frac{m_0 d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 k_2}{2\omega_2} \quad (3.102)$$

Nous utiliserons l'expression covariante pour la densité des états dans l'état final donnée par

$$\frac{d^3 p}{2E} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \delta(p^2 - m_0^2) \Theta(p_0). \quad (3.103)$$

D'ou

$$\begin{aligned} & \int \frac{|k_2|^2 d|k_2|}{2|k_2|} \int \frac{m_0 d^3 p_2}{E_2} \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \\ &= m_0 \int_0^\infty |k_2| d|k_2| \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p_2 \delta(p_2^2 - m_0^2) \Theta(p_{20}) \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \\ &= m_0 \int_0^\infty \omega_2 d\omega_2 \Theta(m_0 + \omega_1 - \omega_2) \delta((p_1 + k_1 - k_2)^2 - m_0^2) \\ &= m_0 \int_0^{\omega+m_0} \omega_2 d\omega_2 \delta(2m_0(\omega_1 - \omega_2) - 2\omega_1\omega_2(1 - \cos\theta)) \\ &= m_0 \frac{\omega_2}{|-2m_0 - 2\omega_1(1 - \cos\theta)|} \\ &= \frac{\omega_2}{2|1 + \frac{\omega_1}{m_0}(1 - \cos\theta)|} \\ &= \frac{\omega_2^2}{2\omega_1}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

avec

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{\omega_1}{m_0}(1 - \cos\theta)}. \quad (3.105)$$

Cette dernière relation est simplement la formule de Compton. Pour arriver à la relation (3.104) nous avons utilisé les deux résultats suivants

$$(k_2 - p_1 - k_1)^2 = m_0^2 + 2m_0(\omega_1 - \omega_2) - 2\omega_1\omega_2(1 - \cos\theta) \quad (3.106)$$

et

$$\int dx \delta(f(x)) g(x) = \sum \frac{g(x)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{\text{zeros de } f(x)}} \quad (3.107)$$

Utilisons (3.104) dans (3.102) on a

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} |\epsilon_{2\mu} M^{\mu\nu} \epsilon_{1\nu}|^2 \\ &= \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \exp(-\rho m_0^2) \\ &\quad \left| \bar{U}^\beta(p_2) \left[\epsilon_2 \frac{(\not{p}_1 + \not{k}_1 + m_0) \exp(-\rho p_1 k_1)}{2p_1 k_1} \epsilon_1 + \epsilon_1 \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_0) \exp(\rho p_1 k_2)}{-2p_1 k_2} \epsilon_2 \right] U^\alpha(p_1) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.108)$$

Nous considérons le cas d'électrons non polarisés. Alors nous sommes sur la polarisation β de l'électron sortant et faisons la moyenne sur la polarisation de l'électron initial. D'où

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2} \frac{1}{4m_0^2} \exp(-\rho m_0^2) \text{Tr} \left[\frac{(\not{p}_2 + m_0)}{2m_0} \Gamma \frac{(\not{p}_1 + m_0)}{2m_0} \bar{\Gamma} \right], \quad (3.109)$$

avec Γ et $\bar{\Gamma}$ données par

$$\Gamma = \frac{\epsilon_2 (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m_0) \epsilon_1}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{\epsilon_1 (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_0) \epsilon_2}{-2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2), \quad (3.110)$$

$$\bar{\Gamma} = \frac{\epsilon_1 (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m_0) \epsilon_2}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{\epsilon_2 (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_0) \epsilon_1}{-2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2). \quad (3.111)$$

Grâce à la relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3.112)$$

on peut écrire

$$\Gamma = \frac{2p_1 \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \not{k}_1 \epsilon_1 - \epsilon_2 \epsilon_1 (\not{p}_1 - m_0)}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{2p_1 \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_2 \not{k}_1 \epsilon_1 - \epsilon_2 \epsilon_1 (\not{p}_1 - m_0)}{-2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2) \quad (3.113)$$

En utilisant le fait que $(\not{p}_1 - m_0)$ est orthogonal à l'opérateur de projection d'énergie

$$(\not{p}_1 - m_0)(\not{p}_1 + m_0) = \not{p}_1^2 - m_0^2 = 0, \quad (3.114)$$

le dernier terme dans Γ ne contribue pas et par conséquent on peut écrire

$$\Gamma = \frac{2p_1 \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \not{k}_1 \epsilon_1}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{2p_1 \epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_2 \not{k}_1 \epsilon_1}{-2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2). \quad (3.115)$$

Pour évaluer la trace sur les matrices gamma nous utilisons la jauge où les vecteurs de polarisations sont orthogonaux au moment de l'électron initial

$$p_1 \epsilon_1 = 0, p_1 \epsilon_2 = 0. \quad (3.116)$$

Alors on obtient

$$\Gamma = \frac{\not{\epsilon}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2}{2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2) \quad (3.117)$$

$$\bar{\Gamma} = \frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{\not{\epsilon}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1}{2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2) \quad (3.118)$$

En remplaçant dans l'expression (3.109) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2} \frac{\exp(-\rho m_0^2)}{4m_0^2} \text{Tr} \left[\frac{(\not{p}_2 + m_0)}{2m_0} \left(\frac{\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2}{2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(\not{p}_1 + m_0)}{2m_0} \left(\frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2}{2p_1 k_1} \exp(-\rho p_1 k_1) + \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1}{2p_1 k_2} \exp(\rho p_1 k_2) \right) \right] \\ &= \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2} \frac{\exp(-\rho m_0^2)}{4m_0^2} \left[\frac{S_1}{(2p_1 k_1)^2} \exp(-2\rho p_1 k_1) + \frac{S_2}{(2p_1 k_2)^2} \exp(2\rho p_1 k_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2S_3}{(2p_1 k_1)^2} \exp(-\rho p_1 (k_1 - k_2)) \right], \end{aligned} \quad (3.119)$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Tr} [(\not{p}_2 + m_0) \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 (\not{p}_1 + m_0) \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] \\ &= 8 (k_1 p_1) [p_1 k_2 + 2 (k_1 \epsilon_2)^2], \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \text{Tr} [(\not{p}_2 + m_0) \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 (\not{p}_1 + m_0) \not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1] \\ &= 8 (k_2 p_1) [k_1 p_1 - 2 (k_2 \epsilon_1)^2], \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{Tr} [(\not{p}_2 + m_0) \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 (\not{p}_1 + m_0) \not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1] \\ &= 8 (k_1 p_1) (k_2 p_1) [2 (\epsilon_2 \epsilon_1)^2 - 1] - 8 (k_1 \epsilon_2)^2 (p_1 k_2) + 8 (k_2 \epsilon_1)^2 (k_1 p_1). \end{aligned} \quad (3.122)$$

La section efficace peut être mise sous la forme simple suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2} \frac{\exp(-\rho m_0^2)}{4m_0^2} 2 \left[\frac{p_1 k_2}{p_1 k_1} \exp(-2\rho p_1 k_1) + \frac{k_1 p_1}{p_1 k_2} \exp(2\rho p_1 k_2) \right. \\ &\quad \left. + (4 (\epsilon_2 \epsilon_1)^2 - 2) \exp(-\rho p_1 (k_1 - k_2)) \right]. \end{aligned} \quad (3.123)$$

La formule de *Klein-Nishina* pour la théorie non locale de l'électrodynamique quantique est obtenue en utilisant la cinématique du repère du laboratoire, $k_1 p_1 = \omega_1 m_0$ et $k_2 p_1 = \omega_2 m_0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \alpha^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \frac{\exp(-\rho m_0^2)}{4m_0^2} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} \exp(-2\rho m_0 \omega_1) + \frac{\omega_1}{\omega_2} \exp(2\rho m_0 \omega_2) \right. \\ &\quad \left. + (4 (\epsilon_2 \epsilon_1)^2 - 2) \exp(-\rho m_0 (\omega_1 - \omega_2)) \right]. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Pour des énergies faibles c-à-d, $\omega_1 \rightarrow 0$ on $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ la formule de *Klein-Nishina* est alors réduite à la formule de la *diffusion de Thomson*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{\exp(-\rho m_0^2)}{m_0^2} (\epsilon_2 \epsilon_1)^2. \quad (3.125)$$

Cette relation est purement classique. De ce résultat on peut en effet déduire un rayon classique de l'électron qui sera affecté par le paramètre de déformation ρ . En effet la formule de la *diffusion de Thomson* est généralement écrite sous la forme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 (\epsilon_2 \epsilon_1)^2 \quad (3.126)$$

avec

$$r = r_0 e^{-\frac{\rho}{2} m_0^2}, \quad (3.127)$$

où $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} \simeq 2.8 \times 10^{-13}$ cm est le rayon classique de l'électron. La dernière relation peut servir de prédiction pour une valeur expérimentale du paramètre de déformation.

Chapitre 4

Renormalisation

Dans ce chapitre nous allons extraire les divergences UV en renormalisant les deux diagrammes de l'énergie propre et de la polarisation du vide. Nous choisissons la méthode de la régularisation dimensionnelle pour régulariser les intégrales divergentes et on procédera ensuite à la renormalisation des diagrammes. La contribution du paramètre de non localité est calculé pour différentes quantités physiques comme la charge électrique et le moment magnétique de l'électron.

4.1 Energie propre

On va calculer le diagramme de la correction de l'énergie propre qui est représenté par le deuxième terme du développement perturbatif du propagateur électronique de la figure (3.1). La formule analytique de ce terme est donnée par

$$\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}(-i\Sigma(p))\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon} \quad (4.1)$$

où la matrice de l'énergie propre est représentée par l'expression (3.47)

$$\Sigma(p) = (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left(-\rho \frac{k^2+(p-k)^2}{2}\right)}{k^2+i\epsilon} \gamma_\mu \frac{i(\not{p}-\not{k}+m_0)}{(p-k)^2-m_0^2+i\epsilon} \gamma^\mu. \quad (4.2)$$

Comme on peut le voir sur cette expression le problème des divergences UV disparaît mais les divergences IR sont toujours présentes. Comme nous allons travailler à des ordres bas en ρ les divergences UV réapparaissent et alors pour calculer $\Sigma(p)$ nous allons utiliser la technique habituelle de la régularisation dimensionnelle qui consiste à effectuer les remplacements suivants : $4 \rightarrow 2n$ et $e_0 \rightarrow e_0\mu^{2-n}$. D'où

$$\Sigma(p) = i(-ie_0\mu^{2-n})^2 \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \gamma_\mu \frac{\not{p}-\not{k}+m_0}{(k^2+i\epsilon)((p-k)^2-m_0^2+i\epsilon)} \gamma^\mu \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2+k^2}{2}\right). \quad (4.3)$$

En appliquant la paramétrisation de Schwinger

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^\infty dz \exp(-zk^2), \quad (4.4)$$

$\Sigma(p)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= i(-ie_0\mu^{2-n})^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \gamma_\mu [(\not{p} - \not{k}) + m_0] \gamma^\mu \\ &\times \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2 + k^2}{2} + z_1 k^2 + z_2((p-k)^2 - m_0^2)\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le terme dans l'exponentielle peut être arrangé comme suit

$$\begin{aligned} &\rho \frac{(p-k)^2 + k^2}{2} + z_1 k^2 + z_2((p-k)^2 - m_0^2) \\ &= (z_1 + z_2 + \rho)k^2 - 2(z_2 + \frac{\rho}{2})pk + (z_2 + \frac{\rho}{2})p^2 - z_2 m_0^2 \\ &= (z_1 + z_2 + \rho)\left(k - \frac{z_2 + \frac{\rho}{2}}{z_1 + z_2 + \rho}p\right)^2 + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}p^2 - z_2 m_0^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En remplaçant dans l'expression précédente, $\Sigma(p)$ devient

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= i(-ie_0\mu^{2-n})^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left(\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}p^2 - z_2 m_0^2\right)\right) \\ &\times \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \gamma_\mu [(\not{p} - \not{k}) + m_0] \gamma^\mu \times \exp\left(-(z_1 + z_2 + \rho)\left(k - \frac{z_2 + \frac{\rho}{2}}{z_1 + z_2 + \rho}p\right)^2\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Soit le changement de variable suivant

$$k \rightarrow k + \frac{z_2 + \frac{\rho}{2}}{z_1 + z_2 + \rho}p. \quad (4.8)$$

d'où

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= i(-ie_0\mu^{2-n})^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left(\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}p^2 - z_2 m_0^2\right)\right) \\ &\times \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \gamma_\mu \left[\left(\frac{z_1 + \frac{\rho}{2}}{z_1 + z_2 + \rho}\not{p} - \not{k}\right) + m_0\right] \gamma^\mu \times \exp\left(-(z_1 + z_2 + \rho)k^2\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

On remarque que l'intégration sur k est une Gaussienne. Avant de faire le calcul nous allons rappeler quelques propriétés des matrices gamma de Dirac

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 2n, \quad (4.10)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (-2 + 2(2 - n))\gamma^\nu. \quad (4.11)$$

En remplaçant dans (4.9), on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= i(-ie_0\mu^{2-n})^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}p^2 - z_2 m_0^2\right]\right) \\ &\times \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \left[2nm_0 - (2 - 2(2 - n))\left(\frac{z_1 + \frac{\rho}{2}}{z_1 + z_2 + \rho}\not{p} - \not{k}\right)\gamma^\nu\right] \exp\left(-(z_1 + z_2 + \rho)k^2\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En utilisant les intégrales de Gauss suivantes [34]

$$\int \frac{d^{2n}q}{(2\pi)^{2n}} \exp(-aq^2) = \frac{(i)^{1-2n}}{(4\pi)^n a^n}, \quad (4.13)$$

$$\int \frac{d^{2n}q}{(2\pi)^{2n}} q \exp(-aq^2) = 0, \quad (4.14)$$

$$\int \frac{d^{2n}q}{(2\pi)^{2n}} q^2 \exp(-aq^2) = \frac{n(i)^{1-2n}}{(4\pi)^n a^{n+1}}, \quad (4.15)$$

$$\int \frac{d^{2n}q}{(2\pi)^{2n}} q_\mu q_\nu \exp(-aq^2) = \frac{g_{\mu\nu}(i)^{1-2n}}{(4\pi)^n 2a^{n+1}}, \quad (4.16)$$

on aboutit à l'expression suivante de $\Sigma(p)$

$$\Sigma(p) = (i)^{2-2n} \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2}{(4\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 dz_2 \frac{2nm_0 - (2-2(2-n)) \frac{z_1 + \frac{\rho}{2}}{z_1 + z_2 + \rho} \not{p}}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \exp\left(-\left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} p^2 - z_2 m_0^2\right]\right). \quad (4.17)$$

Cette intégrale est difficile à calculer à cause du terme exponentiel. Pour cela on utilise les approximations suivantes

$$\frac{1}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} = \frac{1}{(z_1 + z_2)^n} - \rho \frac{n}{(z_1 + z_2)^{n+1}} + O(\rho^2), \quad (4.18)$$

$$\frac{z_1 + \frac{\rho}{2}}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} = \frac{z_1}{(z_1 + z_2)^{n+1}} + \rho \left(\frac{1}{2(z_1 + z_2)^{n+1}} - \frac{(n+1)z_1}{(z_1 + z_2)^{n+2}} \right) + O(\rho^2), \quad (4.19)$$

$$\frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})(z_2 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)} = \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)} + \rho \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \right) + O(\rho^2). \quad (4.20)$$

A cet ordre en ρ , la matrice de l'énergie propre est donnée par l'expression suivante

$$\Sigma(p) = \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2 (i)^{2-2n}}{(4\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\rho \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}\right) p^2\right) \exp\left(-\left(\frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)} p^2 - z_2 m_0^2\right)\right) \left\{ \left[\frac{2nm_0}{(z_1 + z_2)^n} + \frac{2(1-n)z_1}{(z_1 + z_2)^{n+1}} \not{p} \right] - \rho \left[\frac{2n^2 m_0}{(z_1 + z_2)^{n+1}} - 2(1-n) \left(\frac{1}{2(z_1 + z_2)^{n+1}} - \frac{(n+1)z_1}{(z_1 + z_2)^{n+2}} \right) \not{p} \right] \right\}. \quad (4.21)$$

En développant l'exponentielle en puissance de ρ , on aboutit à

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2 (i)^{2-2n}}{(4\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left(\frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)} p^2 - z_2 m_0^2\right)\right) \\ &\left\{ 2(1-n) \left[\frac{z_1}{(z_1 + z_2)^{n+1}} - \rho \left(\frac{(n+1)z_1}{(z_1 + z_2)^{n+2}} - \frac{1}{2(z_1 + z_2)^{n+1}} + \frac{z_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}\right) p^2}{(z_1 + z_2)^{n+1}} \right) \right] \not{p} \right. \\ &\left. + \left[\frac{2n}{(z_1 + z_2)^n} - \rho \left(\frac{2n^2}{(z_1 + z_2)^{n+1}} + \frac{2n \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}\right) p^2}{(z_1 + z_2)^n} \right) \right] m_0 \right\}. \quad (4.22) \end{aligned}$$

On introduit maintenant l'identité suivante [34]

$$1 = \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta} \delta\left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\beta}\right), \quad (4.23)$$

qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2(i)^{2-2n}}{(4\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left(\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}\right)p^2 - z_2 m_0^2\right) \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta} \delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\beta}\right) \\ &\left\{ 2(1-n) \left[\frac{z_1}{(z_1+z_2)^{n+1}} - \rho \left(\frac{(n+1)z_1}{(z_1+z_2)^{n+2}} - \frac{1}{2(z_1+z_2)^{n+1}} + \frac{z_1(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2})p^2}{(z_1+z_2)^{n+1}} \right) \right] \mathcal{H} \right. \\ &\left. + \left[\frac{2n}{(z_1+z_2)^n} - \rho \left(\frac{2n^2}{(z_1+z_2)^{n+1}} + \frac{2n(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2})p^2}{(z_1+z_2)^n} \right) \right] m_0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ensuite nous effectuons le changement de variables suivant

$$z_i \rightarrow \frac{z_i}{\beta}, \quad (4.25)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2(i)^{2-2n}}{(4\pi)^n} \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \beta^2 \exp\left(-\beta [z(1-z)p^2 - (1-z)m_0^2]\right) \\ &\left\{ 2(1-n) \left[\frac{z}{\beta^n} - \rho \left(\frac{(n+1)z}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{2\beta^{n+1}} + \frac{z(\frac{1}{2} - z(1-z))p^2}{\beta^n} \right) \right] \mathcal{H} \right. \\ &\left. + \left[\frac{2n}{\beta^n} - \rho \left(\frac{2n^2}{\beta^{n+1}} + \frac{2n(\frac{1}{2} - z(1-z))p^2}{\beta^n} \right) \right] m_0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Utilisons la définition de la fonction Gamma

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{n-1}, \quad (4.27)$$

et intégrons sur β , on obtient alors

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2(i)^{2-2n}}{(4\pi)^n} \int_0^1 dz \left\{ \left[2n \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} - \rho \left(2n^2 \frac{\Gamma(1-n)}{\Delta^{1-n}} + 2n \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) p^2 \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} \right) \right] m_0 \right. \\ &\left. + 2(1-n) \left[z \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} - \rho \left((n+1)z \frac{\Gamma(1-n)}{\Delta^{1-n}} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1+n)}{\Delta^{1+n}} + z \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) p^2 \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} \right) \right] \mathcal{H} \right\} \\ &= \frac{(-ie_0\mu^{2-n})^2(i)^{2-2n}}{(4\pi)^n} \int_0^1 dz \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} \left\{ \left[2n - \rho \left(\frac{2n^2}{1-n} \Delta + 2n \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) p^2 \right) \right] m_0 \right. \\ &\left. + 2 \left[z(1-n) - \rho \left((n+1)z\Delta - \frac{1}{2}\Delta + (1-n)z \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) p^2 \right) \right] \mathcal{H} \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

avec

$$\Delta = z(1-z)p^2 - (1-z)m_0^2. \quad (4.29)$$

A la limite $n \rightarrow 2$ on a

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{\alpha_0}{4\pi} \int_0^1 dz \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) (1 + \varepsilon \ln(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta})) \\ &\quad \times \left\{ \left[4 - \rho(-8\Delta + 4(\frac{1}{2} - z(1-z))p^2) \right] m_0 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[-z - \rho(3z\Delta - \frac{1}{2}\Delta - z(\frac{1}{2} - z(1-z))p^2) \right] \not{p} \right\} \\ &= \frac{\alpha_0}{4\pi} \int_0^1 dz \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}) \right) \left\{ \left[4 + \rho((12z(1-z) - 2)p^2 - 8(1-z)m_0^2) \right] m_0 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[z + \rho \left([3z^2(1-z) + \frac{z^2}{2} + z^2(1-z)] p^2 \right) \right] \not{p} - \left[3z(1-z) - \frac{1-z}{2} \right] m_0^2 \right\}. \quad (4.30) \end{aligned}$$

D'où l'expression finale de la matrice de l'énergie propre

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{\alpha_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) \left[(4 - 4\rho m_0^2) m_0 - (1 - \frac{\rho}{2} m_0^2) \not{p} \right] \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{4\pi} \int dz \ln(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}) \left\{ \left[4 + \rho((12z(1-z) - 2)p^2 - 8(1-z)m_0^2) \right] m_0 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[z + \rho \left([4z^2(1-z) - \frac{z(1-z)+z}{2}] p^2 - [3z(1-z) - \frac{1-z}{2}] m_0^2 \right) \right] \not{p} \right\}. \quad (4.31) \end{aligned}$$

Cette expression contient deux parties qui présentent une divergence UV que nous absorberons par le processus de renormalisation. La première partie indépendante de ρ est la partie locale habituelle alors que le reste est la contribution de la non localité.

4.2 Polarisation du vide

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, la première correction radiative du propagateur photonique est donnée par le graphe à une boucle représenté dans la figure (3.2) dont l'expression analytique est

$$iD_{\mu\nu}(k) i\Pi^{\mu\nu}(k) iD_{\mu\nu}(k), \quad (4.32)$$

avec

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}+m_0)\gamma^\nu(\not{p}-\not{k}+m_0)]}{(p^2-m_0^2+i\varepsilon)((p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon)} \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2+p^2}{2}\right). \quad (4.33)$$

Maintenant nous essayons d'éviter les divergences en régularisant cette expression grâce à la régularisation dimensionnelle. En appliquant les changements dus à la régularisation dimensionnelle, l'expression (4.33) devient

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = i(e_0\mu^{2-n})^2 \int \frac{d^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}+m_0)\gamma^\nu(\not{p}-\not{k}+m_0)]}{(p^2-m_0^2+i\varepsilon)((p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon)} \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2+p^2}{2}\right). \quad (4.34)$$

La trace des matrices gamma suivante

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}+m_0)\gamma^\nu(\not{p}-\not{k}+m_0)] \\ &= 2^n [p^\mu(p^\nu - k^\nu) + p^\nu(p^\mu - k^\mu) - g^{\mu\nu}(p(p-k) - m_0^2)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

conduit à

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = i(e_0\mu^{2-n})^2 2^n \int \frac{d^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \frac{p^\mu(p^\nu - k^\nu) + p^\nu(p^\mu - k^\mu) - g^{\mu\nu}(p(p-k) - m_0^2)}{(p^2 - m_0^2 + i\varepsilon)((p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon)} \exp\left(-\rho \frac{(p-k)^2 + p^2}{2}\right). \quad (4.36)$$

La paramétrisation de Schwinger (4.4) nous permet d'écrire $\Pi^{\mu\nu}(k)$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) &= i(e_0\mu^{2-n})^2 2^n \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int \frac{d^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \\ &\times \exp\left(-\rho \left[\frac{(p-k)^2 + p^2}{2} + z_2((p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon) + z_1(p^2 - m_0^2 + i\varepsilon)\right]\right) \\ &\times [p^\mu(p^\nu - k^\nu) + p^\nu(p^\mu - k^\mu) - g^{\mu\nu}(p(p-k) - m_0^2)]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Le terme exponentiel peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned} & z_1(p^2 - m_0^2 + i\varepsilon) + z_2((p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon) + \rho \frac{p^2 + (p-k)^2}{2} \\ &= (z_2 + \frac{\rho}{2})(p-k)^2 + (z_1 + \frac{\rho}{2})p^2 - (z_1 + z_2)m_0^2 \\ &= (z_1 + z_2 + \rho)p^2 - 2(z_2 + \frac{\rho}{2})pk + (z_2 + \frac{\rho}{2})k^2 - (z_1 + z_2)m_0^2 \\ &= (z_1 + z_2 + \rho)\left(p - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k\right)^2 + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^2 - (z_1 + z_2)m_0^2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Utilisons maintenant la variable d'intégration suivante

$$p \rightarrow p + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k. \quad (4.39)$$

Après ce changement le terme en ligne s'écrit

$$\begin{aligned} & \left[\left(p^\mu + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\nu \right) + \left(p^\nu + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\nu \right) \left(p^\mu - \frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\mu \right) \right. \\ & \left. - g^{\mu\nu} \left(\left(p + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k \right) \left(p - \frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k \right) - m_0^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En remplaçant dans (4.37), on obtient

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) &= i(e_0\mu^{2-n})^2 2^n \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^2 - (z_1 + z_2)m_0^2\right]\right) \\ &\times \int \frac{d^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \exp(-\rho(z_1 + z_2 + \rho)p^2) \left[-g^{\mu\nu} \left(\left(p + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k \right) \left(p - \frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k \right) - m_0^2 \right) \right. \\ &\left. + \left(p^\nu + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\nu \right) \left(p^\mu - \frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\mu \right) + \left(p^\mu + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^\nu \right) \right] \\ &= i(e_0\mu^{2-n})^2 2^n \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho}k^2 - (z_1 + z_2)m_0^2\right]\right) \\ &\times \int \frac{d^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \exp(-\rho(z_1 + z_2 + \rho)p^2) \left[2p^\mu p^\nu + \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2 + \rho}(p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu) \right. \\ &\left. - g^{\mu\nu} \left\{ p^2 + \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2 + \rho}kp - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^2}k^2 - m_0^2 \right\} - 2 \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^2}k^\mu k^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

En utilisant les intégrales de Gauss (4.13) nous obtenons

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) = & i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^{2n}}{(4\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp \left(- \left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 - (z_1 + z_2) m_0^2 \right] \right) \\ & \left[\frac{g_{\mu\nu}}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} - 2k^\mu k^\nu \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} - \frac{n g^{\mu\nu}}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} + \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} g^{\mu\nu} k^2 + \frac{g^{\mu\nu} m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) = & i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp \left(- \left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 - (z_1 + z_2) m_0^2 \right] \right) \\ & \left\{ \left[\frac{(1-n)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} k^2 + \frac{m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \right] g_{\mu\nu} - 2 [k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2] \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

On sait que la condition la plus importante en théorie quantique des champs est l'invariance du Gauge qui stipule que, "quelque soit $M^\mu(k)$ une quantité physique on doit avoir $k_\mu M^\mu(k) = 0$ ".

De la relation précédente on voit que $\Pi^{\mu\nu}(k)$ est constitué de deux parties. La première vérifie la condition d'invariance de jauge et la deuxième ne la vérifie pas.

- La première partie est donnée par

$$k_\mu (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2) \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} = (k^2 k^\nu - k^\nu k^2) \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} = 0. \quad (4.44)$$

- La deuxième partie est proportionnelle à

$$\begin{aligned} & k_\mu \left[\frac{(1-n)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} k^2 + \frac{m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \right] g_{\mu\nu} \\ & = \left[\frac{(1-n)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} k^2 + \frac{m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \right] k^\nu. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Etudions cette partie. Soit

$$\begin{aligned} F = & \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp \left((z_1 + z_2) m_0^2 - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 \right) \\ & \times g_{\mu\nu} \left[\frac{(1-n)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} k^2 + \frac{m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \right] \\ = & e^{-\rho m_0^2} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp \left((z_1 + z_2 + \rho) m_0^2 - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 \right) \\ & \times g_{\mu\nu} \left[\frac{(1-n)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}} - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} k^2 + \frac{m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Introduisons de nouvelles variables telles que

$$z_i \rightarrow \frac{z_i}{\beta}, \rho \rightarrow \frac{\rho}{\beta}. \quad (4.47)$$

En remplaçant dans la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
 F &= e^{-\rho\beta m_0^2} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \beta \exp \left(-\beta \left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 - (z_1 + z_2 + \rho) m_0^2 \right] \right) \\
 &\times g_{\mu\nu} \left[\frac{(1-n)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1} \beta^n} - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2} \beta^{n-1}} k^2 + \frac{m_0^2}{(z_1 + z_2 + \rho)^n \beta^{n-1}} \right] \\
 &= e^{-\rho\beta m_0^2} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \frac{\exp \left(-\beta \left[\frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 - (z_1 + z_2 + \rho) m_0^2 \right] \right)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1} \beta^{n-1}}. \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Revenons maintenant aux anciennes variables

$$z_i \rightarrow \beta z_i, \rho \rightarrow \rho\beta \quad (4.49)$$

pour écrire F sous la forme

$$F = e^{-\rho m_0^2} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \frac{\exp \left((z_1 + z_2 + \rho) m_0^2 - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 \right)}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+1}}. \quad (4.50)$$

On remarque que les intégrands sont indépendants de β et ainsi le terme qui brise l'invariance de jauge est en fait nul

$$F = 0. \quad (4.51)$$

On déduit alors que le tenseur de polarisation du vide est donné par l'expression invariante de jauge suivante

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu}(k) &= 2 \left[g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \right] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \\
 &\times \int_0^\infty dz_1 dz_2 \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} \exp \left((z_1 + z_2) m_0^2 - \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} k^2 \right). \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

La difficulté rencontrée précédemment dans le calcul de l'énergie propre Σ nous oblige à poursuivre les calculs au premier ordre en ρ . En effet on a

$$\begin{aligned}
 \frac{(z_2 + \frac{\rho}{2})(z_1 + \frac{\rho}{2})}{(z_1 + z_2 + \rho)^{n+2}} &= \frac{z_1 z_2 + \frac{\rho}{2}(z_1 + z_2)}{(z_1 + z_2)^{n+2}} \left(1 - \frac{(n+2)\rho}{z_1 + z_2} \right) \\
 &= \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^{n+2}} + \rho \left(\frac{1}{2(z_1 + z_2)^{n+1}} - (n+2) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^{n+3}} \right), \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

$$\frac{(z_1 + \frac{\rho}{2})(z_2 + \frac{\rho}{2})}{z_1 + z_2 + \rho} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \rho \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \right). \quad (4.54)$$

En remplaçant dans (4.52), on obtient

$$\begin{aligned}
\pi^{\mu\nu}(k) &= 2 [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \\
&\int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \left[\frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+2}} + \rho \left(\frac{1}{2(z_1+z_2)^{n+1}} - (n+2) \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+3}} \right) \right] \\
&\times \exp \left(-\rho \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} \right) k^2 \right) \exp \left((z_1+z_2) m_0^2 - \frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} k^2 \right) \\
&= 2 [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp \left((z_1+z_2) m_0^2 - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)} k^2 \right) \\
&\times \left[\frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+2}} + \rho \left(\frac{1}{2(z_1+z_2)^{n+1}} - (n+2) \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+3}} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} \right) k^2 \right) \right]. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

L'identité suivante

$$1 = \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta} \delta \left(1 - \frac{z_1+z_2}{\beta} \right) \quad (4.56)$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(k) &= 2 [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \\
&\times \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta} \delta \left(1 - \frac{z_1+z_2}{\beta} \right) \exp \left((z_1+z_2) m_0^2 - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)} k^2 \right) \\
&\times \left[\frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+2}} + \rho \left(\frac{1}{2(z_1+z_2)^{n+1}} - (n+2) \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+3}} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^{n+2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} \right) k^2 \right) \right]. \quad (4.57)
\end{aligned}$$

Le changement de variables suivant

$$z_i \rightarrow \frac{z_i}{\beta}, \quad (4.58)$$

conduit à

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(k) &= 2 [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \beta^2 \exp \left(-\beta [z(1-z)k^2 - m_0^2] \right) \\
&\left[\frac{z(1-z)}{\beta^n} + \rho \left(\frac{1}{2\beta^{n+1}} - (n+2) \frac{z(1-z)}{\beta^{n+1}} - \frac{z(1-z)}{\beta^n} \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) k^2 \right) \right]. \quad (4.59)
\end{aligned}$$

L'intégration sur β et la définition de la fonction gamma (4.27) donnent

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(k) &= 2 [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \\
&\int_0^1 dz \left[z(1-z) \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} + \rho \left(\frac{\Gamma(1-n)}{\Delta^{1-n}} \left[\frac{1}{2} - (n+2)z(1-z) \right] - \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} z(1-z) \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) k^2 \right) \right] \\
&= 2 [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] i^{2-2n} \frac{(e_0 \mu^{2-n})^2}{(2\pi)^n} \\
&\int_0^1 dz \frac{\Gamma(2-n)}{\Delta^{2-n}} \left[z(1-z) + \rho \left(\frac{\Delta}{(1-n)} \left[\frac{1}{2} - (n+2)z(1-z) \right] - z(1-z) \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) k^2 \right) \right], \quad (4.60)
\end{aligned}$$

avec

$$\Delta = z(1-z)k^2 - m_0^2. \quad (4.61)$$

Considérons maintenant la limite $\varepsilon = 2 - n \rightarrow 0$. A cette limite on écrit

$$\begin{aligned}
& \Pi^{\mu\nu}(k) \\
&= 2 \frac{\alpha_0}{\pi} [k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2] \int_0^1 dz \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right] \left[1 + \varepsilon \ln \left(\frac{2\pi\mu^2}{\Delta} \right) \right] \\
&\quad \times \left[z(1-z) + \rho \left(-\frac{\Delta}{2} + 4z(1-z)\Delta - z(1-z) \left(\frac{1}{2} - z(1-z) \right) k^2 \right) \right] \\
&= 2 \frac{\alpha_0}{\pi} [k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2] \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{\rho}{6} m_0^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dz \left(z(1-z) + \rho \left\{ (5z^2(1-z)^2 - z(1-z)) k^2 + \left(\frac{1}{2} - 4z(1-z) \right) m_0^2 \right\} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \ln \left(\frac{2\pi\mu^2}{\Delta} \right) \right]. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

En isolant la partie finie de la partie divergente on obtient finalement

$$\begin{aligned}
& \Pi^{\mu\nu}(k) \\
&= 2 \frac{\alpha_0}{\pi} [k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2] \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{\rho}{6} m_0^2 \right) + \int_0^1 dz \ln \left(\frac{2\pi\mu^2}{\Delta} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(z(1-z) + \rho \left\{ (5z^2(1-z)^2 - z(1-z)) k^2 + \left(\frac{1}{2} - 4z(1-z) \right) m_0^2 \right\} \right) \right]. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

4.3 Renormalisation

4.3.1 Propagateur de l'électron

Pour le diagramme de l'électron, la renormalisation se fait en introduisant un contre terme de masse et un contre terme de renormalisation du champ, exprimé en fonction de la constante de renormalisation de champ électronique Z_2 dans la densité Lagrangienne

$$\delta \mathcal{L}_M = i\delta m^{(1)} \bar{\Psi}_M \Psi_M + Z_2^{(1)} \left(\frac{i}{2} \bar{\Psi}_M \overleftrightarrow{\not{D}} \Psi_M - m \bar{\Psi}_M \Psi_M \right) \tag{4.64}$$

Ces contre-terme induisent deux vertex supplémentaires qui seront traités perturbativement. A l'ordre d'une boucle on a

$$: i\delta m^{(1)}, \tag{4.65}$$

$$: iZ_2^{(1)}(\not{D} - m), \tag{4.66}$$

avec

$$Z_2 = 1 + Z_2^{(1)} + \dots + Z_2^{(l)} + \dots, \tag{4.67}$$

où $Z_2^{(l)}$ est la contribution à l'ordre de l boucles.

Le propagateur de l'électron, en tenant compte des corrections radiatives, est donnée par

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{(\not{p}-m_0)} + \frac{i}{(\not{p}-m_0)}(-i\Sigma(p))\frac{i}{(\not{p}-m_0)} + \frac{i}{(\not{p}-m_0)}(-i\Sigma(p))\frac{i}{(\not{p}-m_0)}(-i\Sigma(p))\frac{i}{(\not{p}-m_0)} + \dots \\
 &= \frac{i}{(\not{p}-m_0)}\left(1 + \frac{\Sigma(p)}{(\not{p}-m_0)}\right) \\
 &= \frac{i}{(\not{p}-m_0)}\frac{1}{1 - \frac{\Sigma(p)}{(\not{p}-m_0)}} \\
 &= \frac{i}{(\not{p}-m_0) - \Sigma(p)},
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

avec la fonction d'énergie propre donnée par (4.31)

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon} [(4 - 4\rho m_0^2)m_0 - (1 - \frac{\rho}{2}m_0^2)\not{p}] + \text{termes finis.} \tag{4.69}$$

La constante de renormalisation du champ permet d'écrire le propagateur renormalisé de l'électron sous une forme semblable au propagateur libre

$$Z_2[(\not{p} - m_0) - \Sigma(p)] = (\not{p} - m) + \text{termes finis,} \tag{4.70}$$

où m est la masse renormalisée et qui est finie. En égalisant les termes proportionnels à \not{p} dans (4.70) on obtient

$$Z_2[1 + \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon}(1 - \frac{\rho}{2}m_0^2)]\not{p} = \not{p}, \tag{4.71}$$

ce qui permet de déduire

$$Z_2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon}(1 - \frac{\rho}{2}m_0^2)} = 1 - \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon}[1 - \rho\frac{m_0^2}{2}]. \tag{4.72}$$

Egalisant maintenant les termes de masse dans (4.70). On trouve

$$Z_2[m_0 + \frac{\alpha_0}{\pi\epsilon}(1 - \rho m_0^2)m_0] = m, \tag{4.73}$$

$$\left[1 - \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon}\left(1 - \rho\frac{m_0^2}{2}\right)\right] \left[1 + \frac{\alpha_0}{\pi\epsilon}(1 - \rho m_0^2)\right] m_0 = m. \tag{4.74}$$

A l'ordre d'une boucle on peut écrire

$$m = m_0 \left(1 + \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon}\left[3 - \frac{7}{2}\rho m_0^2\right]\right), \tag{4.75}$$

et finalement on obtient

$$\delta m = m - m_0 = \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon}\left[3 - \frac{7}{2}\rho m_0^2\right]. \tag{4.76}$$

4.3.2 Opérateur de sommet

Nous avons rencontré beaucoup de difficulté lors du calcul de l'opérateur de sommet et par conséquent nous étions incapable d'identifier la partie divergente et la partie finie du diagramme. Dans ce qui suit nous allons utiliser le résultat remarquable de Ward-Takahachi qui relie le diagramme de l'énergie propre à celui de l'opérateur de sommet pour pouvoir ainsi renormaliser ce dernier. L'identité de Ward-Takahashi est donnée par

$$S^{-1}(p') - S^{-1}(p) = (p' - p)^\mu \Lambda_\mu(p, p' - p), \quad (4.77)$$

avec

$$\Lambda_\mu = \gamma_\mu + \Gamma_\mu. \quad (4.78)$$

L'idée majeure de cette identité est de séparer la partie finie de $\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} = -(\Gamma_\mu - \gamma_\mu)$ au lieu de la partie finie de $\Sigma(p)$. Sachant que le propagateur renormalisé de l'électron est donné par

$$Z_2[(\not{p} - m_0) - \Sigma(p)] = (\not{p} - m) + \text{termes finis} \quad (4.79)$$

et que l'opérateur de sommet renormalisé par

$$Z_1 \Lambda_{\text{reg}}^\mu = \gamma_\mu + \text{termes finis}, \quad (4.80)$$

on vérifie que l'identité de Ward-Takahashi est vérifiée que si

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{\alpha_0}{4\pi\epsilon} \left[1 - \frac{\rho m_0^2}{2} \right]. \quad (4.81)$$

4.3.3 Propagateur du photon et polarisation du vide

Maintenant nous allons procéder à la renormalisation du tenseur de polarisation du vide en ajoutant au Lagrangien un contre terme de la forme

$$\delta L_M = -\frac{1}{4} Z_3^{(1)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Z_3^{(1)} A^\mu (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu. \quad (4.82)$$

À l'ordre d'une boucle $Z_3^{(1)} = Z_3 - 1$, où $Z_3^{(l)}$ est la contribution à l'ordre de l boucles

$$Z_3 = 1 + Z_3^{(1)} + Z_3^{(2)} + \dots + Z_3^{(l)} + \dots \quad (4.83)$$

Ce contre terme, traité perturbativement, conduit au vertex

$$i Z_3^{(1)} (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu). \quad (4.84)$$

En utilisant la même méthode suivie pour la renormalisation du propagateur de l'électron, on aboutit à

$$Z_3 k^2 [1 + \Pi_{reg}(k)] = k^2 + \text{termes finis} \quad (4.85)$$

avec $\Pi_{reg}(k)$ donné, dans le schéma minimal (*MS* : Minimal Subtraction), par (4.62)

$$\Pi_{reg}(k) = \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} (1 - \rho m_0^2) + \text{termes finis.} \quad (4.86)$$

On obtient alors, en ignorant pour le moment la partie longitudinale $k^\mu k^\nu$,

$$Z_3 [1 + \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} (1 - \rho m_0^2)] = 1. \quad (4.87)$$

Ce qui donne

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} [1 - \rho m_0^2]. \quad (4.88)$$

Revenons à la présence de la partie longitudinale dans $\Pi_{reg}(k)$. Ce terme est d'abord absent dans le propagateur photonique libre dans la jauge de Feynman. Ce qui suggère qu'on aurait mieux fait de travailler dans un autre jauge contenant ce terme. On peut ajouter à la densité Lagrangienne un terme de fixation de jauge $\frac{\lambda_0}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$, mais après renormalisation on ne peut pas maintenir $\lambda_0 = 1$ dans la jauge de Feynman. C'est à dire que λ_0 est lui aussi renormalisé. En recalculant la partie divergente du tenseur de polarisation du vide, on peut absorber la divergence proportionnelle à la partie longitudinale en définissant une nouvelle constante de renormalisation Z_λ telle qu'on puisse renormaliser λ_0 , c'est à dire,

$$\lambda_0 = Z_\lambda \lambda, \quad (4.89)$$

avec

$$Z_\lambda = 1 + \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} [1 - \rho m_0^2] \quad (4.90)$$

À ce stade nous pouvons écrire la densité Lagrangienne régularisée en définissant les champs de Dirac renormalisés et le potentiel vecteur renormalisé

$$\Psi \rightarrow \sqrt{Z_2} \Psi, \quad \bar{\Psi} = \sqrt{Z_2} \bar{\Psi}, \quad A^\mu \rightarrow \sqrt{Z_3} A^\mu, \quad \lambda_0 \rightarrow Z_\lambda \lambda. \quad (4.91)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ren} = & -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} Z_3 Z_\lambda (\partial_\mu A^\mu)^2 + Z_2 \delta m \bar{\Psi}_M \Psi_M \\ & + Z_2 \left(\frac{1}{2} \bar{\Psi}_M \overleftrightarrow{\partial} \Psi_M - m \bar{\Psi}_M \Psi_M \right) - e_R Z_1 \bar{\Psi} \not{A} \Psi, \end{aligned} \quad (4.92)$$

où la charge renormalisée est donnée en fonction de la charge nue par la relation

$$e_R = \left(e \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} \right) = e \sqrt{Z_3} = e \left(1 - \frac{\alpha_0}{6\pi\epsilon} [1 - \rho m_0^2] \right). \quad (4.93)$$

où inversement à l'ordre $\alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi}$

$$e = e_R \left(1 + \frac{\alpha_R}{6\pi\epsilon} [1 - \rho m_0^2] + \mathcal{O}(\alpha_R^2) \right). \quad (4.94)$$

Avant de poursuivre la procédure de renormalisation remarquons que le schémas précédent (le schémas *MS*) ne convient pas à l'électrodynamique, car cette théorie possède une limite classique à fréquence nulle. Dans ce qui suit nous allons renormaliser sur *couche de masse*.

Exprimant $\Pi^{\mu\nu}(k)$ sous la forme

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2) \Pi_{\text{reg}}(k^2), \quad (4.95)$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{reg}}(k^2) = & 2 \frac{\alpha_0}{\pi} \left[\int_0^1 dz \ln\left(\frac{2\pi\mu^2}{\Delta}\right) \right. \\ & \times \left\{ z(1-z) + \rho \left([5z^2(1-z)^2 - z(1-z)] k^2 + \left[\frac{1}{2} - 4z(1-z)\right] m_0^2 \right) \right\} \\ & \left. + \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma\right) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\rho m_0^2\right) \right]. \quad (4.96) \end{aligned}$$

On remarque que cette quantité est divergente en dimension 4.

Considérons maintenant le terme d'interaction entre deux sources du champ électromagnétique

$$-iJ_\mu^{(1)}(k) \mathcal{D}^{\mu\nu}(k) - iJ_\nu^{(2)}(-k) = -J_\mu^{(1)}(k) \left[\frac{1}{k^2 (1 + \Pi_{\text{reg}}(k^2))} \right] J_\mu^{(2)}(-k), \quad (4.97)$$

où on a utilisé la conservation du courant $k_\mu J^\mu = 0$. A la limite statique, $k_0 = 0$, cette interaction s'écrit

$$J_0(\mathbf{k}) \left[\frac{1}{\mathbf{k}^2 (1 + \Pi_{\text{reg}}(\mathbf{k}^2))} \right] J_0(-\mathbf{k}). \quad (4.98)$$

Effectuons un développement au voisinage de $\mathbf{k}^2 = 0$ (sachant que $\Pi_{\text{reg}}(\mathbf{k}^2)$ est proportionnel à α)

$$J_0(\mathbf{k}) \left[\frac{1}{\mathbf{k}^2} (1 - \Pi_{\text{reg}}(0)) \right] J_0(-\mathbf{k}). \quad (4.99)$$

Pour retrouver la loi habituelle de Coulomb à longue distance ($\frac{1}{4\pi r}$) il faut renormaliser $\Pi_{\text{reg}}(k^2)$ tel que

$$\Pi_R(k^2) |_{k^2=0} = 0. \quad (4.100)$$

Il est facile de vérifier que (4.100) n'est pas vérifiée dans le schémas (*MS*). Alors on utilise le schéma de renormalisation sur couche de masse

$$\Pi_R(k^2) = \Pi_{\text{reg}}(k^2) - \Pi_{\text{reg}}(0). \quad (4.101)$$

En utilisant (4.96) on obtient

$$\begin{aligned} \Pi_R(k^2) &= 2\frac{\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz \ln\left(-\frac{m_0^2}{\Delta}\right) [z(1-z) + \rho \left[\frac{1}{2} - 4z(1-z)\right] m_0^2] \\ &\quad + 2\frac{\alpha_0}{\pi} \rho k^2 \int dz \ln\left(\frac{2\pi\mu^2}{\Delta}\right) [5z^2(1-z)^2 - z(1-z)]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Maintenant on est en mesure de calculer, dans le schémas de renormalisation sur *couche de masse*, la constante Z_3 . En utilisant la définition suivante de Z_3

$$Z_3 (1 + \Pi_{\text{reg}}(k^2)) = 1 + \Pi_R(k^2), \quad (4.103)$$

on trouve

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} (1 - \rho m_0^2) \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{2\pi\mu^2}{m_0^2}\right) \right\}. \quad (4.104)$$

En utilisant cette expression pour calculer la charge renormalisée $e_R = \sqrt{Z_3}e$ on obtient

$$e_R = e \left\{ 1 - \frac{\alpha}{6\pi} (1 - \rho m_0^2) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{2\pi\mu^2}{m_0^2}\right) \right) \right\}. \quad (4.105)$$

Introduisons maintenant la fonction β de la charge électrique définie par $\beta(e_R) = -\mu \frac{\partial e_R}{\partial \mu}$. En utilisant le fait que la charge nue e est indépendante de μ on obtient à l'ordre α

$$\beta(e_R) = e \frac{\alpha}{3\pi} (1 - \rho m_0^2) = \frac{e_R^3}{12\pi^2} [1 - \rho m_0^2]. \quad (4.106)$$

Cette expression est remarquable puisque $\beta(e_R)$ devient négative pour $\rho m_0^2 > 1$ et ainsi la charge décroît quand l'échelle de masse μ croît. L'électrodynamique quantique non locale devient une théorie asymptotiquement libre à l'image de la chromodynamique quantique, c'est à dire que le potentiel d'interaction Coulombienne devient répulsive à petites distances. Si nous considérons que la valeur de ρ donnée par (3.85) constitue une valeur expérimentalement acceptable alors le terme en crochets dans (4.106) est toujours positif et ainsi l'électrodynamique quantique non locale, comme sa version locale, est toujours une théorie asymptotiquement non libre.

La solution de la fonction $\beta(e_R)$ est donnée par

$$\frac{1}{e_R^2(\mu)} - \frac{1}{e_R^2(\mu_0)} = -\frac{1 - \rho m_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}. \quad (4.107)$$

D'un autre coté pour relier le paramètre de couplage à la constante de structure fine dans les expériences de basses énergies dans le schéma de renormalisation sur couche de masse on choisit $\mu^2 = \frac{m_0^2}{2\pi}$. Alors on a l'expression finale suivante pour le tenseur de polarisation du vide renormalisé

$$\begin{aligned} \Pi_R(k^2) &= 2\frac{\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz \ln\left(-\frac{m_0^2}{\Delta}\right) [z(1-z) \\ &\quad + \rho \left(\left[\frac{1}{2} - 4z(1-z)\right] m_0^2 + [5z^2(1-z)^2 - z(1-z)] k^2 \right)]. \end{aligned} \quad (4.108)$$

A la limite $\rho = 0$ on retrouve l'expression habituelle

$$\Pi_R(k^2) = -2\frac{\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln\left(1 - \frac{z(1-z)k^2}{m_0^2}\right). \quad (4.109)$$

4.3.4 Potentiel de Coulomb

Maintenant nous allons calculer les corrections apportées par le caractère non locale de la théorie à la loi de Coulomb. Considérons alors le propagateur complet renormalisé $D_{\mu\nu}^R$ dans le schéma de renormalisation sur couche de masse

$$D_{\mu\nu}^R = \frac{-g_{\mu\nu}}{(k^2 + i\varepsilon)(1 + \Pi_R(k^2))}. \quad (4.110)$$

Commençons par traiter le cas statique. On pose $k_0 = 0$ et ainsi on a $k^2 = -\mathbf{k}^2$ et on considère la limite $\mathbf{k}^2 \ll m_0^2$. On va alors effectuer un développement de (4.102) en puissance de \mathbf{k}^2/m_0^2

$$1 + \Pi_R(-\mathbf{k}^2) = 1 - 2\frac{\alpha_0 \mathbf{k}^2}{\pi m_0^2} \int_0^1 dz [z^2(1-z)^2 + \rho z(1-z) \left(\frac{1}{2} - 4z(1-z)\right) m_0^2]. \quad (4.111)$$

En utilisant les intégrales suivantes

$$\int_0^1 dz z^2(1-z)^2 = \frac{1}{30}, \quad \int_0^1 dz z(1-z) = \frac{1}{6}, \quad (4.112)$$

on obtient

$$1 + \Pi_R(-\mathbf{k}^2) = 1 - \frac{\alpha_0 \mathbf{k}^2}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right). \quad (4.113)$$

Ainsi en tenant compte des corrections radiatives, la loi de coulomb dans l'espace de Fourier est donnée par l'expression suivante

$$V(\mathbf{k}) = -e^2 D^R(\mathbf{k}), \quad (4.114)$$

ou

$$V(\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{\mathbf{k}^2 \left(1 - \frac{\alpha_0 \mathbf{k}^2}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right)\right)} \simeq -\frac{e^2}{\mathbf{k}^2} \left(1 + \frac{\alpha_0 \mathbf{k}^2}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right)\right). \quad (4.115)$$

Dans l'espace des positions on obtient

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2} \left(1 + \frac{\alpha_0 \mathbf{k}^2}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right)\right) \\ &= \frac{-e^2}{4\pi r} - \frac{e^2 \alpha_0}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right) \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Le premier terme est le potentiel de Coulomb à l'approximation de l'arbre alors que le deuxième et le troisième termes sont les corrections radiatives à l'ordre d'une boucle. On note que l'effet de la non localité n'apparaît pas à l'approximation de l'arbre.

Maintenant on calcule le potentiel renormalisé de Coulomb sans l'approximation statique

$$A_{\mu}^R(\mathbf{r}) = -4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2} - 8\pi \frac{\alpha_0}{\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \int_0^1 dz \ln \left(1 + z(1-z) \frac{k^2}{m_0^2} \right) \\ \times \left[z(1-z) + \rho \left(\left(\frac{1}{2} - 4z(1-z) \right) m_0^2 + (5z^2(1-z)^2 - z(1-z)) \nabla^2 \right) \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.117)$$

Soit

$$J = -8\pi \frac{\alpha_0}{\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \ln \left(1 + z(1-z) \frac{k^2}{m_0^2} \right) \\ \times \int_0^1 dz \left[z(1-z) + \rho \left(\left(\frac{1}{2} - 4z(1-z) \right) m_0^2 + (5z^2(1-z)^2 - z(1-z)) \nabla^2 \right) \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.118)$$

Soit le changement de variable

$$\beta = 2z - 1. \quad (4.119)$$

Alors

$$J = -8\pi \frac{\alpha_0}{\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \int_{-1}^1 \frac{d\beta}{2} \ln \left(1 + \frac{1-\beta^2}{4} \frac{k^2}{m_0^2} \right) \\ \times \left[\frac{1-\beta^2}{4} + \rho \left(\left(\frac{1}{2} - (1-\beta^2) \right) m_0^2 + \left(5 \frac{(1-\beta^2)^2}{16} - \frac{1-\beta^2}{4} \right) \nabla^2 \right) \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.120)$$

on remarque qu'on a 3 types d'intégrale. Considerons le premier type

$$h_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2} \int_{-1}^1 d\beta \ln \left(1 + \frac{1-\beta^2}{4} \frac{k^2}{m_0^2} \right) \quad (4.121)$$

En utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$h_1 = \left[\beta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2} \ln \left(1 + \frac{1-\beta^2}{4} \frac{k^2}{m_0^2} \right) \right]_{-1}^1 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2} \int_{-1}^1 d\beta \frac{\frac{k^2}{2m_0^2} \beta^2}{1 + \frac{1-\beta^2}{4} \frac{k^2}{m_0^2}} \\ = 2 \int_{-1}^1 d\beta \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\frac{4m_0^2}{1-\beta^2} + k^2}. \quad (4.122)$$

En utilisant l'intégrale suivante

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2 + a^2} = \frac{\exp(-ar)}{4\pi r}, \quad (4.123)$$

on obtient

$$h_1 = 2 \int_{-1}^1 d\beta \frac{\beta^2}{1-\beta^2} e^{-\frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} r} \frac{1}{4\pi r}. \quad (4.124)$$

en utilisant la même démarche de calcul de h_1 , on obtient

$$\begin{aligned} h_2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ikr)}{k^2} \int_{-1}^1 d\beta (1-\beta^2) \ln \left(1 + \frac{1-\beta^2}{4} \frac{k^2}{m_0^2} \right) \\ &= 2 \int_{-1}^1 d\beta \frac{\beta^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right)}{1-\beta^2} \frac{e^{-\frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}r}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (4.125)$$

et

$$\begin{aligned} h_3 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ikr)}{k^2} \int_{-1}^1 d\beta (1-\beta^2)^2 \ln \left(1 + \frac{1-\beta^2}{4} \frac{k^2}{m_0^2} \right) \\ &= 2 \int_{-1}^1 d\beta \frac{\beta^2 \left(1 - \frac{2\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{5} \right)}{1-\beta^2} \frac{e^{-\frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}r}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (4.126)$$

En remplaçant (4.124), (4.125) et (4.126) dans (4.120), on obtient

$$\begin{aligned} J &= -8\pi \frac{\alpha_0}{\pi} \int_{-1}^1 d\beta \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \\ &\quad \left[\frac{1-\beta^2}{4} + \rho \left(\left(\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \right) m_0^2 + \left(5 \frac{1-\frac{2\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{5}}{16} - \frac{1-\beta^2}{4} \right) \nabla^2 \right) \right] \frac{e^{-\frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}r}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (4.127)$$

On a aussi l'intégrale suivante

$$h_4 = -4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ikr)}{k^2} \quad (4.128)$$

En utilisant l'intégrale (4.123), on obtient

$$\begin{aligned} h_4 &= -4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ikr)}{k^2} \\ &= \frac{-1}{r} \end{aligned} \quad (4.129)$$

En remplaçant (4.127) et (4.129) dans (4.117), on obtient

$$\begin{aligned} A_{\mu}^R(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r} - 8\pi \frac{\alpha_0}{\pi} \int_{-1}^1 d\beta \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \\ &\quad \times \left[\frac{1-\beta^2}{4} + \rho \left(\left(\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \right) m_0^2 + \left(5 \frac{1-\frac{2\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{5}}{16} - \frac{1-\beta^2}{4} \right) \nabla^2 \right) \right] \frac{e^{-\frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}r}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (4.130)$$

Dans les calculs précédents on a éliminé tous les termes qui donnent une contribution nulle. Soit maintenant le changement de variable suivant

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.131)$$

Alors $A_\mu^R(\mathbf{r})$ s'écrit

$$A_\mu^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} - 16\frac{\alpha_0}{4\pi} \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \left\{ \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) + \rho \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right)\right) m_0^2 + \frac{1}{16\xi^4} \nabla^2 \right] \right\} \frac{e^{-2m\xi r}}{r}. \quad (4.132)$$

A ce stade on calcule l'action de l'opérateur ∇^2 . A cette fin on utilise l'identité suivante

$$(\nabla^2 - M^2) \frac{\exp(-Mr)}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \quad (4.133)$$

On a alors

$$A_\mu^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} - \frac{2\alpha_0}{3\pi} (1 - \rho m_0^2) \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{e^{-2m\xi r}}{r} + \rho \alpha_0 \delta(\mathbf{r}) \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^6}. \quad (4.134)$$

En utilisant le résultat suivant

$$\int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^6} \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{2}{15}, \quad (4.135)$$

on obtient finalement l'expression de la loi de Coulomb en tenant compte des corrections radiatives et des effets de non localité à l'ordre d'une boucle

$$A_\mu^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} - \frac{2\alpha_0}{3\pi} (1 - \rho m_0^2) \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{e^{-2m\xi r}}{r} + \rho \frac{2\alpha_0}{15} \delta(\mathbf{r}) \quad (4.136)$$

Si on pose $\rho = 0$ on retrouve l'expression de Uehling et Serber [33]

$$A_\mu^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} - \frac{2\alpha_0}{3\pi} \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\exp(-2m\xi r)}{r}. \quad (4.137)$$

Comme on peut le remarquer sur (4.136), l'intégrale sur ξ est difficile et on va recourir à la démarche utilisée pour calculer (4.137). La méthode consiste à considérer les deux limites $mr \ll 1$, correspondant aux petites valeurs de r , et $mr \gg 1$, correspondant aux grandes valeurs de r .

Le domaine $mr \ll 1$.

Dans ce cas, nous avons deux types d'intégrales à calculer données par

$$I = \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} e^{-2m_0\xi r}, \quad J = \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^4} e^{-2m_0\xi r}. \quad (4.138)$$

Considérons d'abord I . Elle s'écrit

$$I = \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} e^{-2m_0\xi r} = \int_1^r d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} e^{-2m_0\xi r} + \int_r^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} e^{-2m_0\xi r} = I_1 + I_2 \quad (4.139)$$

avec τ un point tel que $\frac{1}{mr} \gg \tau \gg 1$. Dans l'intégrale I_1 on peut alors remplacer l'exponentielle par 1 (c-a-d poser $r = 0$)

$$\begin{aligned} I_1 &\simeq \int_1^\tau d\xi \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2} = \left[-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi} + \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1} \right) \right]_1^\tau \\ &\simeq \ln(2\tau) - 1. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Dans la deuxième intégrale on peut approximer $\sqrt{\xi^2-1}$ par ξ , d'où

$$I_2 \simeq \int_\tau^\infty \frac{d\xi}{\xi} e^{-2m_0\xi r} \quad (4.141)$$

En intégrant par parties, I_2 devient

$$\begin{aligned} I_2 &\simeq e^{-2m_0\xi r} \ln(\xi) \Big|_\tau^\infty + 2mr \int_\tau^\infty d\xi \ln(\xi) e^{-2m_0\xi r} \\ &= -e^{-2m_0\tau r} \ln(\tau) + \int_{2m_0\tau r}^\infty du \ln\left(\frac{u}{2m_0r}\right) e^{-u} \\ &\simeq -\ln(\tau) + \int_0^\infty du \ln(u) e^{-u} + \ln\left(\frac{1}{2m_0r}\right) \int_0^\infty du e^{-u} \\ &\simeq \ln\left(\frac{1}{mr}\right) - \ln(2\tau) - C. \end{aligned} \quad (4.142)$$

En remplaçant (4.140) et (4.142) dans (4.139), on obtient finalement

$$I = \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2} e^{-2m_0\xi r} \simeq -1 + \ln\left(\frac{1}{mr}\right) - C. \quad (4.143)$$

On remarque que le point auxiliaire τ a disparu.

Maintenant on va calculer l'intégrale J

$$J = \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^4} \sqrt{\xi^2-1} \exp(-2m_0\xi r). \quad (4.144)$$

Dans ce cas la fonction exponentielle tend vers 1, d'où

$$J \simeq \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^4} = \frac{(\xi^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\xi^3} \Big|_1^\infty = \frac{1}{3} \quad (4.145)$$

En utilisant (4.143) et (4.145) dans (4.136) on obtient

$$A_\mu^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} \left[1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi} (1 - \rho m_0^2) \left(\ln\left(\frac{1}{mr}\right) - C - \frac{5}{6} \right) \right] + \rho \frac{2\alpha_0}{15} \delta(\mathbf{r}). \quad (4.146)$$

Le domaine $mr \gg 1$.

La seule région qui contribue dans ce cas est celle pour laquelle où $\xi - 1 \sim \frac{1}{mr} \ll 1$. Soit $\zeta = \xi - 1$. Alors

$$\int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) e^{-2m_0 \xi r} \simeq \frac{3}{2} e^{-2m_0 r} \int_0^\infty e^{-2m_0 \zeta r} \sqrt{2\zeta} d\zeta = \frac{3}{8(m_0 r)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\pi} e^{-2m_0 r}, \quad (4.147)$$

En remplaçant dans (4.136), on obtient

$$A_\mu^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} \left(1 + (1 - \rho m_0^2) \frac{\alpha_0}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2m_0 r}}{(m_0 r)^{\frac{3}{2}}} \right) + \rho \frac{2\alpha}{15} \delta(\mathbf{r}) \quad (4.148)$$

Ainsi à partir de la définition

$$A_0^R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} Q(r), \quad (4.149)$$

nous déduisons la charge ponctuelle avec laquelle l'électron interagit

$$Q(r) = \left[1 - \frac{2\alpha_0}{3\pi} (1 - \rho m_0^2) \left(\ln(m_0 r) + C + \frac{5}{6} \right) \right] : mr \ll 1, \quad (4.150)$$

$$Q(r) = 1 + (1 - \rho m_0^2) \frac{\alpha_0}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2m_0 r}}{(m_0 r)^{\frac{3}{2}}} : mr \gg 1, \quad (4.151)$$

où nous avons utilisé la propriété $x\delta(x) = 0$. A la limite $\rho = 0$ on obtient les expressions habituelles.

4.3.5 Déplacement de Lamb

Nous allons estimé l'effet des corrections dues à la non localité sur le déplacement des niveaux d'énergie des états liés de l'électron dans un champ extérieur, appelé le déplacement de Lamb. Pour cela on utilise l'expression du potentiel renormalisé donnée par l'expression analytique suivante

$$A_\mu^R(q) = A_\mu(q) + iD_{\mu\nu}(q) \frac{i\Pi^{\nu\sigma R}(q)}{4\pi} A_\sigma(q). \quad (4.152)$$

Dans la jauge de Lorentz

$$q^\mu A_\mu(q) = 0, \quad (4.153)$$

on obtient

$$A_\mu^R(q) = A_\mu(q) - \Pi^R(q^2) A_\mu(q). \quad (4.154)$$

La signification physique de $A_\mu^R(q)$ est accessible si on considère le potentiel de Coulomb dû à une source externe statique de charge $(-ze)$: $A_0(x) = \frac{-ze}{r}$ et $\mathbf{A}(x) = 0$. D'où le potentiel renormalisé

$$A_0^R(\mathbf{q}) = [1 - \Pi^R(-\mathbf{q}^2)] A_0(\mathbf{q}). \quad (4.155)$$

Dans l'espace des coordonnées on a

$$A_0^R(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) [1 - \Pi^R(-\mathbf{q}^2)] A_0(\mathbf{q}). \quad (4.156)$$

Utilisons l'expression de $1 - \Pi^R(-\mathbf{q}^2)$ dans la limite statique et pour on montre $k^2 \ll m_0^2$ donnée par (4.113)

$$\begin{aligned} A_0^R(\mathbf{r}) &\simeq -ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{kr}) \left[1 + \frac{\alpha_0 k^2}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) \right] \frac{4\pi}{k^2} \\ &= -ze \left[\frac{1}{r} + \frac{4\alpha_0 \delta(\mathbf{r})}{15m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.157)$$

De cette expression on déduit la correction au potentiel de Coulomb

$$e\Delta A_0(\mathbf{r}) = -\frac{4\alpha_0^2 \delta(\mathbf{r})}{15m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right). \quad (4.158)$$

Le premier terme est la correction radiative habituelle alors que le deuxième terme est une correction due à la non localité de l'opérateur de champ.

Le déplacement de Lamb dû aux effets de polarisation du vide est donné par ($Z = 1$)

$$\begin{aligned} \Delta E_{nlm}^{PV} &= \langle \Psi_{nlm} | e\Delta A_0 | \Psi_{nlm} \rangle = -\langle \Psi_{nlm} | \left[-\frac{4\alpha_0^2 \delta(\mathbf{r})}{15m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) \right] | \Psi_{nlm} \rangle \\ &= -\frac{4\alpha_0^2}{15m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) |\Psi_{nlm}(0)| = -\frac{4m_0}{15\pi n^3} \alpha_0^5 \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) \delta_{l0}. \end{aligned} \quad (4.159)$$

où $|\Psi_{nl}\rangle$ est la fonction d'onde de l'électron. Le déplacement en fréquence est donné par $\Delta\nu_{nS} = \frac{\Delta E_{n00}^{PV}}{2\pi}$. Le facteur dans (4.159) est le déplacement de Lamb dans le cas de la théorie locale. Nous allons extraire une valeur numérique pour le paramètre ρ en notant que dans la théorie locale l'écart entre les valeurs théoriques et expérimentales est très grand. Le déplacement en fréquence en présence du paramètre de déformation est donné par

$$\Delta^{(\rho)}\nu_{2S-2P} = \Delta^{(0)}\nu_{2S-2P} \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) = -27.1 \times \left(1 - \frac{3}{2} \rho m_0^2 \right) \text{ MHz} \quad (4.160)$$

En utilisant la valeur expérimentale qui est de 1057.8 MHz on obtient la valeur suivante pour le paramètre ρ

$$\rho \sim 28.20 \text{ (MeV)}^{-1} = 56.40 \times 10^{-13} m, \quad (4.161)$$

qui est très loin de la valeur déjà trouvée en (3.85). L'origine de cet écart est lié à l'utilisation de la limite $k^2/m_0^2 \ll 1$ dans le calcul du déplacement de Lamb.

4.3.6 Variation de la charge électrique

Les corrections radiatives dues à la polarisation du vide modifient la façon d'interaction des particules chargées et par la même occasion la charge électrique e ou la constante de structure fine.

L'invariance de jauge permet d'écrire le propagateur modifié du photon sous la forme de la série suivante

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^{\text{chaîne}}(k) &= \mathcal{D}^{(0)}(k) [1 - \Pi_{\text{reg}}(k^2) + \dots] \\
 &= \mathcal{D}^{(0)}(k) \frac{1}{1 + \Pi_{\text{reg}}(k^2)} \\
 &= \mathcal{D}^{(0)}(k) \frac{1}{1 + \Pi_{\text{reg}}(0) + \Pi_R(k^2)} \\
 &= \mathcal{D}^{(0)}(k) \frac{1}{1 + \Pi_{\text{reg}}(0)} \frac{1}{1 + \frac{\Pi_R(k^2)}{1 + \Pi_{\text{reg}}(0)}}
 \end{aligned} \tag{4.162}$$

où $\Pi_{\text{reg}}(k^2)$ est la fonction de polarisation régularisée donnée par (4.96) et $\Pi_{\text{reg}}(0)$ donné par

$$\Pi_{\text{reg}}(0) = \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} (1 - \rho m_0^2) \tag{4.163}$$

On sait déjà que la constante de renormalisation Z_3 à l'ordre le plus bas peut être écrite sous la forme

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \Pi_{\text{reg}}(0)} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} (1 - \rho m_0^2)} = 1 - \frac{\alpha_0}{3\pi\epsilon} (1 - \rho m_0^2) \tag{4.164}$$

Introduisons maintenant la charge renormalisée $e_R(0) = \sqrt{Z_3}e$ et sachant que $\Pi_R(k^2)$ est quadratique en e on peut alors écrire

$$\frac{1}{1 + \frac{\Pi_R(k^2)}{1 + \Pi_{\text{reg}}(0)}} \simeq \frac{1}{1 + \Pi_R(k^2)} + \mathcal{O}(e^4). \tag{4.165}$$

Alors

$$\mathcal{D}^{\text{chaîne}}(k) = \mathcal{D}^{(0)}(k) \frac{e_R^2(q)}{e^2} \tag{4.166}$$

avec une charge renormalisée dépendante du moment définie par

$$e_R(k^2) = e_R(0) \sqrt{\frac{1}{1 + \Pi_R(k^2)}} \tag{4.167}$$

ou bien, de manière équivalente, on définit une constante de structure fine renormalisée

$$\alpha_R(k^2) = \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \Pi_R(k^2)}} \tag{4.168}$$

Déterminons l'effet des corrections radiatives sur la constante de structure fine à la limite $\frac{k^2}{m_0^2} \ll 1$. Dans ce cas on peut écrire

$$\begin{aligned}\Pi_R(k^2) &\simeq -2\frac{\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz \ln(1-z(1-z)\frac{k^2}{m_0^2}) [z(1-z) + \rho [\frac{1}{2} - 4z(1-z)] m_0^2] \\ &= \frac{\alpha_0 k^2}{15\pi m_0^2} \left(1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right)\end{aligned}\quad (4.169)$$

A l'ordre le plus bas on obtient

$$\frac{\alpha_R(k^2)}{\alpha_0} = 1 + \frac{\alpha_0}{30\pi} \frac{k^2}{m_0^2} \left[1 - \frac{3}{2}\rho m_0^2\right]. \quad (4.170)$$

Considérons maintenant la limite $\frac{k^2}{m_0^2} \gg 1$. Dans ce cas on peut écrire

$$\begin{aligned}\Pi_R(k^2) &= -2\frac{\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz \ln(-z(1-z)\frac{k^2}{m_0^2}) [z(1-z) + \rho m_0^2 [\frac{1}{2} - 4z(1-z)]] \\ &\quad -2\frac{\alpha_0}{\pi} \rho k^2 \int_0^1 dz \ln(-z(1-z)\frac{k^2}{m_0^2}) [5z^2(1-z)^2 - z(1-z)] \\ &= -\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right) \left[1 - \rho m_0^2 \left(1 - \frac{1}{10} \frac{\frac{k^2}{m_0^2}}{\ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right)}\right)\right]\end{aligned}\quad (4.171)$$

alors

$$e_R^2(k^2) = \frac{e_R^2(m_0^2)}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right) \left[1 - \rho m_0^2 \left(1 - \frac{1}{10} \frac{\frac{k^2}{m_0^2}}{\ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right)}\right)\right]}\quad (4.172)$$

$$\frac{1}{e_R^2(k^2)} - \frac{1}{e_R^2(m_0^2)} = -\frac{1}{12\pi^2} \ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right) \left[1 - \rho m_0^2 \left(1 + \frac{1}{10} \frac{\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right)}{\ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right)}\right)\right] \quad (4.173)$$

Dans le cas $1 \gg \frac{\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right)}{10 \ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right)}$, qui survient pour des valeurs de k^2 pas très grandes devant m_0^2 , on obtient

$$\frac{1}{e_R^2(k^2)} - \frac{1}{e_R^2(m_0^2)} = -\frac{1}{12\pi^2} (1 - \rho m_0^2) \ln\left(-\frac{k^2}{m_0^2}\right). \quad (4.174)$$

On observe que cette solution coïncide avec celle obtenue à partir de la fonction β donnée par (4.107).

4.3.7 Facteurs de forme électromagnétiques de l'électron

Considérons l'opérateur de sommet ou correction du vertex $\Gamma^\mu(p, p'; k)$ introduit au chapitre 4. Nous n'allons pas discuter de la renormalisation de l'opérateur de sommet, mais utiliser la technique des relations de dispersion [37] pour calculer le moment magnétique de l'électron. Aux lignes électroniques externes sont associés les facteurs $U(p')$ et $U(p)$. Dans le développement perturbatif, l'opérateur de sommet représente le courant de transition d'électrons en tenant compte des corrections radiatives et figure sous la forme du produit suivant

$$\bar{U}(p) \Gamma^\mu(p, p'; k) U(p'). \quad (4.175)$$

Dans ce qui suit nous omettons les facteurs U et \bar{U} . L'invariance relativiste et de jauge conduisent à l'expression suivante

$$\Gamma^\mu(p, p'; k) = \gamma^\mu F_1(k^2) - \frac{1}{2m_0} F_2(k^2) \sigma^{\mu\nu} k_\nu, \quad (4.176)$$

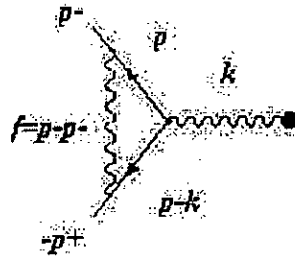
où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$ et F_1 et F_2 les facteurs de forme électromagnétiques de l'électron.

A l'approximation d'ordre zéro de la théorie des perturbations on a

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \text{ c'est à dire } F_1 = 1, F_2 = 0. \quad (4.177)$$

La première correction radiative aux facteurs de forme électromagnétiques est donnée par le diagramme sur la figure ci-dessous dont l'expression analytique est

$$\Gamma^\mu = i(-ie_0)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m_0) \gamma^\mu (\not{p} + m_0) \gamma^\nu]}{((p_- - p)^2 + i\epsilon)(p^2 - m_0^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon)} \exp\left(-\rho \frac{p^2 + (p-k)^2 + (p-p')^2}{2}\right). \quad (4.178)$$



On pose $t = k^2$. Dans le référentiel d'inertie de la paire (p_-, p_+) on a

$$k = (k_0, 0), \quad p_- = \left(\frac{k_0}{2}, \mathbf{p}_-\right), \quad p_+ = \left(\frac{k_0}{2}, -\mathbf{p}_-\right), \quad p = \left(\frac{k_0}{2}, \mathbf{p}\right), \quad (4.179)$$

$$f^2 \equiv (\bar{p} - p_-)^2 = 2\mathbf{p}^2 (1 - \cos \theta) = \frac{t - 4m_0^2}{2} (1 - \cos \theta) \quad (4.180)$$

Alors on montre que [37]

$$\Gamma^\mu = -\frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{t-4m_0^2}{t}} \int \varphi^\mu(p) do_p \quad (4.181)$$

où $do_p = 2\pi d(\cos \theta)$ et

$$\varphi^\mu(p) = -e^2 \frac{\gamma^\nu (\not{p}' - \not{k} + m_0) \gamma^\mu (\not{p}' + m_0) \gamma_\nu}{(p_- - p)^2} \exp\left(-\rho \frac{p^2 + (p-k)^2 + (p-p')^2}{2}\right) \quad (4.182)$$

En utilisant l'algèbre des matrices de Dirac on simplifie le numérateur tel que

$$\gamma^\nu (\not{p}' - \not{k} + m_0) \gamma^\mu (\not{p}' + m_0) \gamma_\nu = -2m_0^2 \gamma^\mu + 4m_0 (P^\mu + 2f^\mu) + 2(\not{p}'_+ - \not{f}) \gamma^\mu (\not{p}'_- + \not{f}), \quad (4.183)$$

avec

$$f = p - p_- = (0, \mathbf{f}), \quad P = p_- - p_+ = (0, 2\mathbf{p}_-). \quad (4.184)$$

On obtient alors la partie imaginaire de Γ^μ sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Im } \Gamma^\mu(p, p') &= -\frac{e^2 e^{2m_0^2 \rho} e^{-\rho t}}{4\sqrt{t(t-4m_0^2)}} \\ &\times \int \frac{2do_p}{2\pi(1-\cos\theta)} [-m_0^2 \gamma^\mu + 2m_0 (P^\mu + 2f^\mu) + (\not{p}'_+ - \not{f}) \gamma^\mu (\not{p}'_- + \not{f})] e^{-\rho f^2} \end{aligned} \quad (4.185)$$

Cette expression contient trois types d'intégrales à calculer données par

$$I = \int \frac{e^{-\rho f^2}}{2\pi(1-\cos\theta)} do_f, \quad (4.186)$$

$$I^\mu = \int \frac{f^\mu e^{-\rho f^2}}{2\pi(1-\cos\theta)} do_f, \quad (4.187)$$

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{f^\mu f^\nu e^{-\rho f^2}}{2\pi(1-\cos\theta)} do_f. \quad (4.188)$$

Commençons par I .

$$I = \int_0^{(t-4m_0^2)} \frac{df^2}{f^2} \exp(-\rho f^2) = \int_0^{-(t-4m_0^2)} \frac{df^2}{f^2} \exp(-\rho f^2). \quad (4.189)$$

C'est une intégrale qui diverge logarithmiquement pour $f \rightarrow 0$ c'est à dire pour $\theta \rightarrow 0$. C'est une divergence infrarouge qu'on peut régulariser en ajoutant au photon virtuel une petite masse $\lambda \ll m_0$. Alors

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{-(t-4m_0^2)} \frac{df^2}{f^2 - \lambda^2} \exp(-\rho f^2) \\
 &= [\text{Ei}(1, -\rho\lambda^2) - \text{Ei}(1, -\rho((t-4m_0^2) + \lambda^2))] e^{-\rho\lambda^2},
 \end{aligned} \tag{4.190}$$

où $\text{Ei}(n, x)$ est la fonction exponentielle $\text{Ei}(n, x) = \int_1^\infty t^{-n} e^{-xt} dt$.

Calculons maintenant I^μ

$$I^\mu = \int_{-}^{+1} \frac{f^\mu d \cos \theta}{2\pi(1 - \cos \theta)} \exp(-\rho f^2) = \int_0^{-(t-4m_0^2)} \frac{f^\mu}{f^2} \exp(-\rho f^2) do_f. \tag{4.191}$$

Dans cette intégrale f^μ est un quadrivecteur du genre espace et par conséquent elle doit être exprimée par le seul quadrivecteur du genre espace dont nous disposons qui est P^μ . On pose alors $I^\mu = AP^\mu$ et multiplions les deux membres par P_μ on obtient

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{I^\mu P_\mu}{4p^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{-(t-4m_0^2)} d \cos \theta \exp\left(-\rho \frac{t-4m_0^2}{4} (1 - \cos \theta)\right) \\
 &= -\frac{2m_0}{\rho(t-4m_0^2)} \exp\left(-\rho \frac{t-4m_0^2}{4}\right) \sinh\left(\rho \frac{t-4m_0^2}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{4.192}$$

Ainsi I^μ est donnée par

$$I^\mu = -\frac{2m_0}{\rho(t-4m_0^2)} \exp\left(-\rho \frac{t-4m_0^2}{4}\right) \sinh\left(\rho \frac{t-4m_0^2}{4}\right) P^\mu. \tag{4.193}$$

Passons maintenant au calcul de la dernière intégrale $I^{\mu\nu}$ donnée par

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d \cos \theta}{2(1 - \cos \theta)} [f^\mu f^\nu] \exp(-\rho f^2). \tag{4.194}$$

En utilisant la même argumentation lors du calcul de I^μ on écrit $I^{\mu\nu}$ sous la forme suivante

$$I^{\mu\nu} = f(P^2) g^{\mu\nu} + g(P^2) P^\mu P^\nu. \tag{4.195}$$

Il est facile de montrer que les fonctions $f(P^2)$ et $g(P^2)$ sont données par

$$f(P^2) = \frac{1}{3} \left(I_\mu^\mu - \frac{I^{\mu\nu} P_\mu P_{\nu\nu}}{P^2} \right), \quad g(P^2) = \frac{1}{P^2} (I_\mu^\mu - 4f(P^2)). \tag{4.196}$$

Calculons alors I_μ^μ et $I^{\mu\nu} P_\mu P_\nu$.

$$\begin{aligned}
 I_\mu^\mu &= \frac{t-4m_0^2}{2} \int d \cos \theta \exp\left(-\rho \frac{t-4m_0^2}{2} (1 - \cos \theta)\right) \\
 &= \frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho P^2)],
 \end{aligned} \tag{4.197}$$

et

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} P_\mu P_\nu &= \int_{-1}^{+1} \frac{d \cos \theta}{(1 - \cos \theta)} (2P^2(1 - \cos \theta))^2 \exp(-2\rho P^2(1 - \cos \theta)) \\ &= \frac{1}{\rho^2} [1 - (\rho P^2 + 1) \exp(-\rho P^2)]. \end{aligned} \quad (4.198)$$

Ce qui donne

$$f(P^2) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho P^2)] - \frac{1}{\rho^2 P^2} [1 - (\rho P^2 + 1) \exp(-\rho P^2)] \right), \quad (4.199)$$

$$g(P^2) = \frac{1}{P^2} \left(\frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho P^2)] - \frac{4}{\rho^2} [1 - (\rho P^2 + 1) \exp(-\rho P^2)] \right). \quad (4.200)$$

En remplaçant dans $I^{\mu\nu}$ on obtient

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho P^2)] \left(\frac{g^{\mu\nu}}{3} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) - \frac{1}{\rho^2 P^2} [1 - (\rho P^2 + 1) \exp(-\rho P^2)] \left(\frac{g^{\mu\nu}}{3} - 4P^\mu P^\nu \right). \quad (4.201)$$

Nous nous intéressons seulement à la partie de $\text{Im} \Gamma^\mu$ proportionnelle à P^μ . Elle est donnée par $2m_0 A P^\mu$. En utilisant l'expression équivalente de P^μ (entre les facteur U) on obtient

$$2m_0 A P^\mu \rightarrow 2m_0 A (2m_0 \gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu} k_\nu). \quad (4.202)$$

Ainsi la partie qui contribue au moment magnétique de l'électron est

$$\begin{aligned} \text{Im} F_2(t) &= -\frac{\alpha_0 m_0}{\sqrt{t(t-4m_0^2)}} A \exp(2m_0^2 \rho) \exp(-\rho t) \\ &= \frac{\alpha_0 m_0^2}{\sqrt{t(t-4m_0^2)}} \frac{4 \exp(2m_0^2 \rho) \exp(-\rho t)}{\rho(t-4m_0^2)} \exp\left(-\rho \frac{t-4m_0^2}{4}\right) \sinh\left(\rho \frac{t-4m_0^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.203)$$

On sait que la valeur de $F_2(0)$ donne la correction au moment magnétique de l'électron et est donnée par

$$F_2(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_0^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_2(t')}{t'} dt'. \quad (4.204)$$

Introduisons la variable $x = \frac{t}{4m_0^2}$. Ainsi on a

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{e^{2\rho m_0^2}}{4\rho m_0^2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2} \sqrt{x-1}} \frac{\exp(-4m_0^2 \rho x)}{(x-1)} \exp(-\rho m_0^2 (x-1)) \sinh(\rho m_0^2 (x-1)) dx \right]. \quad (4.205)$$

Grâce à l'approximation $\frac{\sinh(ax)}{ax} \simeq 1 + O(a^2)$ on peut écrire

$$\begin{aligned} F_2(0) &\simeq \frac{\alpha e^{3\rho m_0^2}}{\pi 4m_0^2} m_0^2 \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2} \sqrt{x-1}} \exp(-5m_0^2 \rho x) dx \\ &= \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{4\pi} \exp\left(\frac{1}{2} m_0^2 \rho\right) W_{-1/2, 1/2}(5\rho m_0^2), \end{aligned} \quad (4.206)$$

où $W_{\lambda, \mu}(z)$ est la fonction de Whittaker. Utilisons le développement en série suivant [40]

$$\begin{aligned} &W_{-1/2, 1/2}(z) \\ &= -\frac{ze^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!(k+1)!} \left[\psi(k+1) + \psi(k+2) - \psi\left(k+\frac{3}{2}\right) - \ln z \right] - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.207)$$

où $\psi(z)$ est la fonction Digamma. En se limitant à $k=0$ et avec

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(2) = 1 - \gamma, \quad \psi\left(\frac{3}{2}\right) = (2 - \gamma - 2 \ln 2), \quad (4.208)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (4.209)$$

nous obtenons au premier ordre en ρ

$$F_2(0) \simeq \frac{\alpha}{2\pi} [1 + 5\rho m_0^2 (\gamma + 1 - 2 \ln 2 + \ln(5\rho m_0^2))]. \quad (4.210)$$

L'expression du rapport gyromagnétique est donnée par

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} [1 + 5\rho m_0^2 (\gamma + 1 - 2 \ln 2 + \ln(5\rho m_0^2))]. \quad (4.211)$$

Utilisant la valeur de ρ trouvée à partir de la réaction $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ dans g . On trouve

$$g(\rho) := 2(1 + 0.001\ 161\ 01), \quad (4.212)$$

alors que

$$g(0) := 2(1 + 0.001\ 161\ 41). \quad (4.213)$$

En comparant avec la valeur expérimentale de $g_{\text{exp}} = 2(1 + 0.001\ 159\ 625\ 193)$ nous constatons que la contribution du paramètre de non localité à l'ordre d'une boucle améliore sensiblement la valeur théorique du rapport gyromagnétique. Notons cependant que dans le cas local et au huitième ordre de la théorie des perturbations la valeur théorique de g est

$$g(0) = 2(1 + 0.001\,159\,625\,140 \pm 0.000\,000\,000\,028). \quad (4.214)$$

Il ressort de cette numérologie qu'un intérêt possible, parmi d'autres, des théories non commutatives, et de manière équivalente les théories non locales, est d'obtenir un bon accord entre théorie et expérience en se limitant dans les calculs à des ordres bas dans la théorie des perturbations. En effet le paramètre $\sqrt{\rho}$ définit une nouvelle échelle de longueur accessible expérimentalement autre que l'échelle de Planck qui est de l'ordre de 10^{-35} m et nous savons que les divergences UV dont souffre la théorie locale sont dues à notre mauvaise compréhension de la physique à courtes distances.

Conclusion

L'objet central de cette thèse était l'étude d'une version non locale de la théorie de l'électrodynamique quantique et le calcul des corrections radiatives à l'ordre d'une boucle. L'électrodynamique quantique non locale est une théorie, où la non localité, s'exprime à travers l'utilisation d'un opérateur de champ non local et la déformation du terme d'interaction de la densité Lagrangienne. Cette approche est équivalente aux approches non commutatives.

Le deuxième chapitre contient deux parties. Dans la première partie, nous avons procédé à l'étude classique de la théorie à travers l'utilisation du formalisme Lagrangien, où nous avons pu montrer que les équations de mouvements de cette théorie ont la même forme que celles de la théorie locale, et que les solutions de ces équations contiennent un facteur d'amortissement exponentiel, $\exp\left(-\frac{k_\mu^\sigma k_\nu^\sigma T^{\mu\nu}}{2}\right)$, qui joue le rôle de régulateur de la théorie. Aussi le prolongement du théorème de Nöther au cas non local, nous a conduit à un courant conservé. La deuxième partie qui concernait la quantification canonique, a fait ressortir, l'aspect non locale de la théorie, à travers des conditions de quantification données par des fonctions régularisées par le même facteur exponentiel. Notons qu'à la limite $T^{\mu\nu} \rightarrow 0$ les conditions quantiques locales sont retrouvées. Aussi les solutions des équations de mouvement nous ont conduit à un tenseur de moment-énergie déformé qui donne une valeur finie pour l'énergie du point zéro, qui est infinie dans la théorie locale. Aussi nous avons pu obtenir une fonction de propagation régularisée par le facteur $\sum_\sigma \frac{\omega_k + \sigma k^0}{2\omega_k} \exp\left(-\frac{k_\mu^\sigma k_\nu^\sigma T^{\mu\nu}}{2}\right)$ qui brisait l'invariance de Lorentz à cause de la présence du facteur σk^0 , qui dans le cadre des théories non commutatives reflète la non commutativité spatio-temporelle. Pour restorer l'invariance de Lorentz, on a éliminé ce terme en choisissant le cas spécial pour lequel on a $T^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu}$.

Dans le troisième chapitre nous avons déduit de nouvelles règles de Feynman à partir de la formule de Gell-Mann-Low, où on a obtenu le même vertex de la théorie locale et des propagateurs régularisés et où aussi la non localité nous obligeait à diviser par un nouveau facteur de symétrie, qui est le nombre des champs déformés dans le lagrangien d'interaction. Et à partir de ces règles, nous avons calculé les fonctions de corrélation à 2-points et 3-points, où nous avons étudié la persistance ou non des divergences UV pour la polarisation du vide et les divergences IR et UV pour le propagateur électronique. Nous avons terminé ce chapitre par l'application de ces nouvelles règles de Feynman au calcul des sections efficaces différentielles de deux processus, à l'ordre de l'arbre : la diffusion électron-positron qui nous permet de déduire une valeur expérimentale pour la constante de déformation de l'ordre de $\sqrt{\rho} \sim 10^{-18}\text{m}$, et la diffusion de Compton.

Dans le quatrième chapitre nous avons renormalisé la théorie à l'ordre d'une boucle. Nous avons commencé par le calcul des corrections radiatives au propagateur photonique et au propagateur électronique. La difficulté des calculs nous a obligé de procéder à la renormalisation au premier ordre en ρ . Dans ce cas, on a utilisé deux schémas de renormalisation : le schéma MS (minimal subtraction) et le schéma sur couche de masse. Dans le deuxième schéma de renormalisation, nous avons pu calculer les corrections à la loi de Coulomb dans le cas statique et à l'approximation $k^2 \ll m_0^2$, et aussi dans le cas général où on déduit l'expression de la charge pour $mr \leq 1$ et $mr \geq 1$. Nous avons estimé aussi

l'effet de la non localité sur le déplacement de Lamb et la variation de la charge électrique. Enfin nous avons calculé la partie de l'opérateur de sommet qui contribue au moment magnétique de l'électron et à partir de cette partie, nous avons amélioré la valeur théorique du rapport gyromagnétique.

Finalement nous notons que la finitude de l'énergie du point zéro est primordial dans une théorie incorporant les effets dus au champ de gravitation. Ce mémoire de Magister constitue un exemple de calcul explicite des effets physiques d'une théorie de jauge non locale.

Bibliographie

- [1] H. S. Snyder, *Quantized Space-time*. Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [2] C. N. Yang, *On Quantized Space-time*. Phys. Rev. **72**, 874 (1949).
- [3] M. Dubois-Violette. *Non-commutative differential geometry, quantummechanics and gauge Theory*. Dans C. Bartocci, U. Bruzzo et R. Cianci, éditeurs, *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, volume 375 de Lecture Notes in Physics, Rapallo, 1990. Springer-Verlag.
- [4] A. H. Chamseddine et A. Connes. *The spectral action principle*, Commun.Math. Phys. **186** (1997) 731–750 [hep-th/9606001].
- [5] A. Pais, *On Field theories with nonlocalized action*, Phys. Rev. **79** (1950).145.
- [6] H.C. Ohanian, *Finite quantum electrodynamics with a gravitationally smeared propagator*, Phys. Rev. **D55** (1997) 5140.
H.C. Ohanian, *Smearing of propagators by gravitational fluctuations on the Planck scale*, Phys. Rev. **D60** (1999) 104051.
- [7] Th. Filk, *Divergencies in a field theory on quantum space*, Phys. Lett.B **376** (1996) 53.
- [8] S. Minwalla, M. van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, JHEP **0002** (2000) 020 [hep-th/9912072].
A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, *The IR/UV Connection in the Non-Commutative Gauge Theories*, JHEP **0012** (2000) 002 [hep-th/0002075].
- [9] G. Mandanici, *Wave Propagation and IR/UV Mixing in non commutative Spacetimes*, Ph.D.Thesis, [hep - th/0312328].
- [10] P. Fischer and V. Putz, *No UV/IR mixing in unitarity space-time noncommutative field theory*, Eur. Phys. J. **C32** (2004) 269 [hep-th/0306099].
- [11] M. Van Raamsdonk, *The meaning of infrared singularities in noncommutative gauge theories*, JHEP **11** (2001) 006 [hep-th/0110093].
- [12] M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R^{**4}* , Phys. Lett. **B478** (2000) 394–400 [hep-th/9912094].
- [13] A. A. Bichl, M. Ertl, A. Gerhold, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *Non-commutative $U(1)$ super-Yang-Mills theory :Perturbative self-energy corrections*, [hep-th/0203141].

- [14] A.A. Bichl, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda, R. Wulkenhaar, *Renormalization of Noncommutative Photon Selfenergy to all Orders via Seiberg-Witten Map*, J. High Energy Phys. 0106 (2001) 013, [hep-th/0104097]
- [15] J. Gomis and Th. Mehen, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. B **591**, 265 (2000) [hep-th/0005129].
- [16] Y. Liao and K. Sibold, *Time-ordered Perturbation Theory on Noncommutative Spacetime : Basic Rules*, Eur. Phys. J. C **25**, 469 (2002)[hep-th/0205269].
- [17] Y. Liao and K. Sibold, *Time-ordered perturbation theory on noncommutative space-time. II. unitarity*, Eur. Phys. J. C **25**, 479–486 (2002)[hep-th/0206011].
- [18] H. Bozkaya, P. Fischer, H. Grosse, M. Pitschmann, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *Space/time noncommutative field theories and causality*, Eur. Phys. J. C **29**, 133 (2003)[hep-th/0209253].
- [19] A. Micu and M. M. Sheikh Jabbari, *Noncommutative ϕ^4 theory at two loops*, JHEP 01, 025 (2001) [hep-th/000805].
- [20] C.-h. Rim and J. H. Yee, *Unitarity in space-time noncommutative field theories*, [hep-th/0205193].
- [21] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, *On the unitarity problem in space/time noncommutative theories*, Phys. Lett. B **533** 178, (2002) [hep-th/0201222].
- [22] S. Denk and M. Schweda, *Time ordered perturbation theory for non-local interactions ; applications to NCQFT*, JHEP 0309, 032 (2003)[hep-th/0306101].
- [23] M. Chaichian, A. Demichev and P. Presnajder, *Quantum Field Theory on Noncommutative Space-Times and the Persistence of Ultraviolet Divergences*, Nucl. Phys. B **567**, 360 (2000) [hep-th/9812180].
- [24] S. Cho, R. Hinterding, J. Madore and H. Steinacker, *Finite Field Theory on Noncommutative Geometries*, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 161 (2000) [hep-th/9903239].
- [25] A. Smailagic and E. Spallucci, *UV divergence-free QFT on non commutative plane*, J. Phys. A **36** (2003) L 517 [hep-th/0308193].
- [26] R.J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. **131** (1963) 2766.
- [27] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, *Ultraviolet Finite Quantum Field Theory on Quantum Spacetime*, Comm. Math. Phys. **237** (2003) 221 [hep-th/0301100].
- [28] P. Nicolini, *Vacuum energy momentum tensor in (2+1) NC scalar field theory*, [hep - th/0401204].
- [29] Stefan Denk, Volkmar Putz, Manfred Schwedak and Michael Wohlgenannt, *Towards UV Finite Quantum Field Theories from Non-Local Field Operators*, Eur. Phys. J. C **25** (2002) 479–486 [hep-th/0401237].

- [30] Frank Hofheinz, *Field Theory on a non commutative Plane : a Non-perturbative Study*, Ph.D. Thesis, Fortsch.Phys. 52 (2004) 391-445, hep-th/0403117
- [31] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., Second edition, 1996.
- [32] TASSO Collaboration, W. Braunschweig et al. : Z. Physik C40, 163 (1988).
- [33] W.Greiner, J.Reihardt, *Quantum Electrodynamics*, Spring, third edition
- [34] Brian Hatfield, *Quantum Field Theory Point Particles And Strings*, ABP (1991)
- [35] Ta-Pei Cheng, Ling-fong Li, *Gauge Theory Of Elementary Particle Physics I and II*, Oxford Science publications.
- [36] M.Le Bellac, *Des Phénomènes Critiques Aux Champs De Jauge*, InterEditions/Editions Du CNRS.
- [37] E. Lifchitz et L. Pitayevski, *Théorie Quantique Relativiste*, 2ème partie, Editions Mir, Moscou, 1973.
- [38] M.E. Piskin, D.V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Advanced Book Program.
- [39] L.S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press 1999.
- [40] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, And Products*, Corrected and Enlarged Edition

المخلص:

في هذه المذكرة قمنا بنظرية الالكتروديناميك الغير محلية. حيث توصلنا الى تعديل الناشر بواسطة معامل اسي وقد تمكنا من إعطاء قيمة تجريبية لثابت التشويه انطلاقا من القيم التجريبية والنظرية المحصل عليها بواسطة قواعد فاينمان الجديدة للمقطعين الفعالين: الكترون- بوزترون و كونتون. وانتهينا باعادة تقنين هذه النظرية عند رتبة حلقة واحدة اين تمكنا من الحصول على كمون كولون المعاد التقنين و إزاحة لامب لمستويات الطاقة لذرة الهيدروجين. وانتهينا بحساب معاملات النوع الالكتروديناميسي والتي اعطت قيمة للمعامل الجيرومغناطيسي مكافئة للقيمة المحصل عليها في النظرية المحلية عند رتبة ثماني حلقات.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons traité de l'électrodynamique quantique non locale. Nous avons abouti à des propagateurs régularisés par un facteur exponentiel. De nouvelles règles de Feynman obtenues nous ont permis de calculer les corrections aux sections efficaces dans deux processus : la diffusion électron-positron et la diffusion de Compton. A partir des résultats expérimentaux nous avons pu déduire une valeur pour le paramètre de déformation consistante avec les valeurs déjà obtenues par d'autres approches. Nous avons aussi renormalisé cette théorie à une boucle où on a obtenu à partir du propagateur photonique, le potentiel renormalisé de Coulomb et le déplacement de Lamb des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Ainsi nous avons calculé aussi les facteurs de forme électromagnétiques de l'électron, qui nous permet de déduire une valeur théorique du facteur gyromagnétique meilleure que dans le cas local.

Abstract:

In this memory, we treated a non local version of quantum electrodynamics. We obtained regularized propagators by a damping exponential factor. The new rules of Feynman thus obtained enabled us to calculate the corrections to the cross sections for two processes, the electron-positron diffusion and Compton diffusion. From experimental data we could deduce a value for the non locality parameter consistent with earlier values obtained by other approaches. We also renormalized this theory to the one loop order and obtained starting from the photon propagator, the renormalized potential of Coulomb and the Lamb shift of the energy levels of the hydrogen atom. Thus we calculated the electromagnetic form factors of the electron, which enables us to deduce a theoretical value of the gyromagnetic ratio better than in the local case.

Mot clés:

Electrodynamique quantique, non localité, non commutativité, Renormalisation.