REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre:
Série:

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

OPTION

Physique Mathématique

Par

Bouchra Guettou

THEME

Production de paires de particules avec spin via le formalisme de Feshbach- Villars

Soutenu le:

Devant le Jury:

Président :	**KH.** Nouicer	M.C	Univ. Jijel
Rapporteur:	**L.** Chetouani	Prof	Univ. M Constantine
Examinateur	**A.** Lecheheb	M.C	Univ. Mentouri Constantine
	N. Belaloui	M.C	Univ. Mentouri Constantine
	M. Merad	M.C	C.Univ. Oum ElBouaghi

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة المركزية
530.1/21

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

جامعة جيجل
المكتبة المركزية
TH-083

N° d'ordre:
Série:

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

OPTION
Physique Mathématique

Par
Bouchra Guettou

THEME

Production de paires de particules avec spin via le formalisme de Feshbach- Villars

Soutenu le:

Devant le Jury:

Président :	**KH.** Nouicer	M.C	Univ. Jijel
Rapporteur:	**L.** Chetouani	Prof	Univ. M Constantine
Examinateur	**A.** Lecheheb	M.C	Univ. Mentouri Constantine
	N. Belaloui	M.C	Univ. Mentouri Constantine
	M. Merad	M.C	C.Univ. Oum ElBouaghi

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu DIEU tout puissant de m'avoir donner la bonne foi et le courage, pour la réalisation de ce modeste travail.

Tout d'abord, j'exprime ma profonde gratitude à Mr L.CHETOUANI Professeur à l'université de Constantine, pour avoir dirigé ce travail et suivi de près et d'une manière continue cette étude. Sa disponibilité, sa présence, et ses compétences m'ont permis d'aimer la physique.

Je remercie vivement Dr KH.NOUICER Maîtres de Conférence à l'Université de JIJEL, Dr A.LECHEHEB Maître de Conférence à l'Université de Constantine et le Dr N.BELALOUI Maître de conférence à l'Université de Constantine ainsi que Dr M. MERAD Maître de Conférence au Centre Universitaire de Oum El Bouaghi pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de mon manuscrit en acceptant d'être mes examinateurs.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance, mes remerciements et mon respect à :

** Dr KH.NOUICER, Dr T. BOUDJEDAA, Dr A.BOUNAMES Maîtres de Conférence à l'Université de JIJEL pour leur disponibilité permanente ,leur aide et leur conseils précieux.*

**Je remercie spécialement S.HOUAT avec qui j'ai effectué une partie de ce travail et qui m'a beaucoup aidé, ce fut un plaisir pour moi que d'avoir travaillé ensemble.*

J'adresse mes vifs remerciements et ma profonde gratitude au groupe de thésards du laboratoire de Physique Théorique de l'Université de JIJEL pour leur soutien et pour l'excellente ambiance de travail crée. Je remercie spécialement : NADIA, RADJA, TAMA, NOUREDDINE et MOURAD surtout pour leurs aide précieuse.

BOUCHRA

Table des matières

1 Introduction générale **3**

2 Formalisme de Feshbach - Villars spin 1/2 **6**

2.1 Introduction 6

2.2 L'équation de Feshbach - Villars spin 1/2 7

2.3 Découplage des 8 composantes de Feshbach-Villars : 11

2.4 Fonction de Green pour F-$V_{1/2}$ pour un potentiel saclaire 14

3 Probabilité de création de paires de particules avec spin 1/2 suivant la technique de Schwinger **19**

3.1 Amplitude (*vide* – *vide*) et l'action effective : 19

3.1.1 Amplitude (*vide* – *vide*) en mécanique quantique non relativiste 20

3.1.2 Amplitude (*vide* – *vide*) en mécanique quantique relativiste 21

3.1.3 Amplitude (*vide* – *vide*) pour l'équation de F-V(1/2) 23

3.1.4 Action effective pour les particules de F-V (1/2) 25

3.2 Applications 26

3.2.1 Cas d'une onde électromagnétique uniforme 26

3.2.2 Cas d'un champ électrique constant 29

4 Création de paires suivant la technique de Ayoama : **32**

4.1 Introduction 32

4.2 Création de paires de particules pour F-V spin(1/2) 33

4.2.1 Cas particuliers 42

4.2.2 Création de $\mathcal{N}$ paires 44

5 Méthode de Bogoliubov pour F-V(1/2) 46

5.1 Introduction 46

5.2 Quantification d'un champ de Feshbach-Villars 47

5.3 Instabilité du vide : 50

5.4 Applications : 54

5.4.1 Champ électrique constant 54

5.4.2 Champ électrique variable 56

6 Conclusion générale 63

Chapitre 1

Introduction générale

L'idée émise selon laquelle le vide est exempt de matière, sans interaction et incapable de créer de la matière à partir de rien a changé depuis l'avènement de la mécanique quantique.

La théorie des trous a en outre modifié profondément cette vision et le vide devient non vide puisqu'en perpétuellement se créent et disparaissent des particules sans laisser de traces.

Ainsi d'après *D.Bohm*, le vide n'est pas un "vacuum" mais un "plénum" réellement actif.

Néanmoins ce vide quantique qui décrit une réalité virtuelle d'un monde inaccessible ou encore d'une mer impénétrable pose quelques problèmes malgré qu'il a permis de prédire plusieurs faits expérimentaux dont le plus important est l'existence du positron.

Ce vide constitué donc de particules virtuelles, peut avoir ainsi des effets sur le monde qui nous entoure. Par exemple l'énergie et la charge d'un électron d'un noyau, sont continuellement modifiées.

Du point de vue théorique, l'élaboration de la théorie quantique des champs a été nécessaire pour décrire cette interaction entre ces deux mondes réel et virtuel.

Quantitativement, dans la description il apparaît des infinis ou divergences. La renormalisation en les éliminant a permis ainsi d'obtenir des résultats finis et de plus précis, conformes aux valeurs expérimentales.

Parmi les processus qui sont été assez étudiés dans le cadre de la théorie des champs citons celui de la création de paire d'électron-positron, de la polarisation du vide, ...

Le plus simple est le processus de création de paire.

A notre connaissance c'est Schwinger [4] (1951) qui l'a considéré pour la 1ère fois.

Il a montré qu'en perturbant le vide par un champ extérieur la paire crée a une certaine probabilité.

Concrètement cette probabilité se détermine à partir de la partie imaginaire de l'action effective en considérant d'abord l'amplitude $(vide - vide)$.

Notons au passage que la création d'une paire, nécessite un champ électrique supérieur à la valeur critique $E_c = \frac{m^2c^3}{|e|\hbar} \simeq 1.3 \times 10^{16} \mathrm{V}/cm$.

Généralement, le calcul de l'amplitude en mécanique quantique utilise l'intensité du champ comme paramètre pour justifier la série de perturbation. Cependant lorsque le champ est intense la convergence de la série n'est plus assurée et le traitement doit être non perturbatif.

Le but de ce mémoire est d'étudier une fois de plus ce processus en utilisant l'équation de Feschbach et Villars F-V(1/2) relative à la particule de spin 1/2.

Cette équation F-V(1/2) qui se construit à partir de l'équation de Dirac a fait l'objet récemment de plusieurs études [2] , [19]

De type Schrödinger et matricielle [1], elle a été établie afin de corriger le défaut de la non positivité de la densité de probabilité de l'équation de K-G.

L'espace associé cependant n'est plus hilbertien.

Nous nous proposons dans ce mémoire, de faire la comparaison de l'équation de F-V(1/2) avec celle de Dirac.

Pour cela nous étudions le processus de création des particules F-V(1/2) en calculant les probabilités. De plus pour nous assurer que nos calculs sont corrects, nous les testés en considérant trois approches différentes :

- celle de Schwinger basée sur l'action effective.
- celle de Ayoma basée sur la détermination de la fonction de Green.
- et celle de NiKishov basée sur la détermination des coefficients de Bogoliubov.

L'étude du même processus pour le cas du spin 0, par l'équation F-V(0) construite à partir de celle de Klein Gordon a fait récemment l'objet d'un mémoire [5]. Il en ressort que F-V(0) et K-G ont le même comportement et donnent les mêmes résultats pour des processus physiques.

Ce mémoire composé de 4 parties a encore le même objectif que celui réalisé pour F-V(0).

L'équation F-V(1/2) est d'abord construite à partir de celle de Dirac et les éléments utiles sont donnés au chap.2.

Au chap.3, nous adaptons la technique de Schwinger à l'équation F-V(1/2).Le champ $\psi_{FV1/2}$ est traité non pas comme un scalaire mais comme une variable de Grassmann. A partir de la partie imaginaire de l'action effective la probabilité est calculée pour certaines interactions.

Au chap.4 le processus de création est reconsidéré encore par la formulation à 8 composantes de F-V(1/2). Cette fois ci nous suivons la méthode de Aoyama [8] basée sur la détermination de la fonction de Green.

Au chap.5, le champ de F-V(1/2) à 8 composantes est quantifié et la probabilité de création est calculée en passant par la détermination des coefficients de Bogoliubov. Nous adaptons la technique de Nikishov à F-V (1/2) en utilisant pour les opérateurs les relations d'anticommutations.

Enfin le comportement dans le processus de création de paire, de l'équation de F-V (1/2) vis à vis de l'équation de Dirac est analysé dans la conclusion de ce mémoire.

Chapitre 2

Formalisme de Feshbach - Villars spin 1/2

2.1 Introduction

Il est connu depuis longtemps que pour décrire la dynamique des particules relativistes de spin 0 il faut utiliser l'équation de Klein-Gordon (K-G). Cependant en formant l'équation de continuité à partir de cette équation du 2ème ordre / temps, il a été constaté une densité non toujours positive. Cette difficulté a pu être contournée par Dirac en linéarisant l'équation de K-G pour établir son équation qui est du 1èr ordre/temps. La positivité de la densité étant rétablie, il a fallu par ailleurs pour réinterpréter les états négatifs la compléter par la théorie des trous.

En constatant qu'une équation du 1èr ordre/temps conduit à une densité positive, Feshbach et Villars (F-V) en (1958) ([1]) a obtenu et ce à partir de l'équation de K-G, une équation de type Schrödinger ou plutôt de type Dirac puisqu'elle est matricielle. Sa formulation utilise 2 composantes exprimées à partir de la solution de l'équation de K-G qu'il a réinterprétée en termes de charges en changeant la définition de la norme de la mécanique standard. L'espace n'est pas par conséquent un espace de Hilbert.

Cette équation de F-V ayant déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux, nous nous proposons dans ce chapitre de donner ses éléments essentiels relatifs à une particule de spin 1/2 qui nous seront utiles par la suite.

2.2 L'équation de Feshbach - Villars spin 1/2

Partons de l'équation de Dirac :

$$\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)\Psi_{D}=0, \tag{2.1}$$

où : $D_{\mu}=\partial_{\mu}+ieA_{\mu}$, et donnons la forme quadratique.

Multiplions à gauche l'équation de Dirac par l'opérateur $\left(-i\gamma^{\lambda}D_{\lambda}-m\right)$ en réarrangeant le développement. Il vient

$$\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}D_{\mu}D_{\lambda}+m^{2}\right)\Psi_{D}=0. \tag{2.2}$$

Utilisons la relation facile à montrer

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\left[D_{\mu},D_{\lambda}\right]+\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}D_{\lambda}D_{\mu}=\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\left[D_{\mu},D_{\lambda}\right]+2D^{2}, \tag{2.3}$$

ainsi que le résultat du commutateur

$$\left[D_{\mu},D_{\lambda}\right]=ieF_{\mu\lambda}. \tag{2.4}$$

Comme le terme

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}F_{\mu\lambda} &= \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}F_{\lambda\mu}=-\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}F_{\mu\lambda}\\ &= \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\lambda}\right]F_{\mu\lambda}\\ &= \frac{i}{2}\sigma^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda},\end{aligned} \tag{2.5}$$

est un terme de couplage spin-champ.

Ainsi nous obtenons l'équation de type quadratique

$$\left[\left[D^{\mu}D_{\mu}+m^{2}\right]1_{4}+\frac{e}{2}\left(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right]\Psi_{D}=0. \tag{2.6}$$

Où Ψ_{D} a 4 composantes et 1_{4} est la matrice unité. F est le tenseur électromagnétique défini par $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$ avec $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]$.

L'avantage de cette équation est qu'elle est du 2ème ordre (2.6) et ressemble à l'équation de K-G mais avec un terme de couplage (spin-champ) $\sigma.F$ en plus.

Choisissons la représentation suivante (Weyl) pour les matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Séparons ce qui est temporel de ce qui spatial

$$D^\mu D_\mu = D^2 = D_0^2 - \vec{D^2}, \tag{2.8}$$

ainsi que le terme de couplage

$$\frac{e}{2}\left(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = e\left(\sigma^{0i}F_{0i}\right) + \frac{e}{2}\left(\sigma^{ij}F_{ij}\right). \tag{2.9}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ apparaît

$$\sigma^{0i}F_{0i} = i\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{E} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}\vec{E} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

dans le 1èr terme tandis que pour le 2ème terme nos avons

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}F_{ij} &= \sigma^{1j}F_{1j} + \sigma^{2j}F_{2j} + \sigma^{3j}F_{3j} \\ &= 2i\sum_{i\neq j}\gamma^i\gamma^j F_{ij} \\ &= 2i\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j F_{ij} & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j F_{ij} \end{pmatrix} \\ &= 2i\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{B} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\vec{B} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

grâce à l'anti symétrie du tenseur F_{ij} .

Nous aboutissons (2.6) à 2 équations :

$$\left(D_0^2 1_2 - \vec{D^2}1_2 + ie\vec{\sigma}\left(\vec{E} + i\vec{B}\right) + m^2 1_2\right)\Psi_D^+ = 0, \tag{2.12}$$

$$\left(D_0^2 1_2 - \vec{D^2}1_2 - ie\vec{\sigma}\left(\vec{E} - i\vec{B}\right) + m^2 1_2\right)\Psi_D^- = 0, \tag{2.13}$$

où sous forme condensée (2.14)

$$\left(D_0^2 1_2 - \vec{D^2}1_2 \pm ie\vec{\sigma}\left(\vec{E} \pm \vec{B}\right) + m^2 1_2\right)\Psi_D^\pm = 0. \tag{2.14}$$

Procédons de la même manière que F-V pour linéariser cette équation quadratique.

Introduisons les spineurs définis comme suit

$$\Psi_\xi = \begin{pmatrix} \Phi_\xi \\ \Psi_\xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_+ + \frac{i}{m} D_0 \Psi_+ \\ \Psi_+ - \frac{i}{m} D_0 \Psi_+ \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$\Psi_\eta = \begin{pmatrix} \Phi_\eta \\ \Psi_\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_- + \frac{i}{m} D_0 \Psi_- \\ \Psi_- - \frac{i}{m} D_0 \Psi_- \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

nous obtenons 2 équations matricielles de type Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\xi = H_\xi \Psi_\xi, \tag{2.17}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\eta = H_\eta \Psi_\eta, \tag{2.18}$$

où

$$H_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2m}\left(-\overrightarrow{D}^2 1_2 + ie\overrightarrow{\sigma}\left(\overrightarrow{E} + i\overrightarrow{B}\right) + m\left(\tau_3 \otimes 1_2\right) + eA_0 1_4\right), \tag{2.19}$$

$$H_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2m}\left(-\overrightarrow{D}^2 1_2 - ie\overrightarrow{\sigma}\left(\overrightarrow{E} - i\overrightarrow{B}\right) + m\left(\tau_3 \otimes 1_2\right) + eA_0 1_4\right), \tag{2.20}$$

sont les 2 hamiltoniens .

Ces 2 équations peuvent être rassemblées en une seule à l'aide du produit direct $\otimes$.

Alors l'équation de F-V relative à une particule de spin 1/2, dont il est question dans ce mémoire est la suivante

$$i\frac{\partial}{\partial t} 1_8 \Psi_{FV\frac{1}{2}} = H_{FV\frac{1}{2}} \Psi_{FV\frac{1}{2}}. \tag{2.21}$$

Avec

$$H_{FV\frac{1}{2}} = (\tau_3 + i\tau_2) \otimes \frac{1}{2m}\left[-D^2 1_4 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right] + m\left(\tau_3 \otimes 1_4\right) + eA_0 1_8, \tag{2.22}$$

l'hamiltonien de F-V(1/2).

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

les matrices d'isospin et $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ les matrices de Pauli habituelles.

$\Psi_{FV_{1/2}}$est un spineur à 8 composantes.

Notons que $H = \tau_4 H^+ \tau_4$.

Par conséquent $H_{FV\frac{1}{2}}$ n'est pas hermitique comme dans le cas du spin 0 et l'espace de solutions est aussi un pseudo-Hilbertien dans lequel on définit la norme des vecteurs par

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int d^3x \overline{\Psi}(x) \Psi(x). \tag{2.24}$$

Par ailleurs si on définit le spineur adjoint

$$\Psi = (\Psi_\xi, \Psi_\eta)^T, \tag{2.25}$$

avec

$$\Psi_\xi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T, \tag{2.26}$$

$$\Psi_\eta = (\Psi_5, \Psi_6, \Psi_7, \Psi_8)^T, \tag{2.27}$$

les fonctions d'ondes avec 4-composantes .

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla j = 0, \tag{2.28}$$

est encore vérifiée pour l'équation de F-V (1/2).

Avec

$$\rho = e\overline{\Psi}\Psi = e\Psi^+ \tau_5 \Psi, \tag{2.29}$$

ρ la densité de charge

$$j = \frac{e}{2im}\left[\overline{\Psi} O \overrightarrow{\nabla} \Psi - \overrightarrow{\nabla} \overline{\Psi} O \Psi\right] - \frac{e}{m} A \overline{\Psi} O \Psi, \tag{2.30}$$

le courant de charge .

Nous avons noté par

$$\tau_5 = \tau_1 \otimes (\tau_3 \otimes 1_2), \tag{2.31}$$

et

$$O = 1_2 \otimes (\tau_3 + i\tau_2) \otimes 1_2. \tag{2.32}$$

Dans l'opération conjugaison de charge, les règles de transformations sont pour

- les spineurs

$$\Psi \longrightarrow \Psi_c = \left(\tau_1 \otimes \gamma^0\right) \Psi^+, \tag{2.33}$$

- la densité de charge

$$\rho \longrightarrow \rho_c = -\rho, \tag{2.34}$$

- et le courant

$$j \rightarrow j_c = j. \tag{2.35}$$

L'interprétation est donc la suivante

- Ψ décrit les particules de charge $(+)$.
- Ψ_c décrit les particules de charge $(-)$.

2.3 Découplage des 8 composantes de Feshbach-Villars :

Pour des problèmes à une dimension, les hamiltoniens H_ξ, H_η en présence d'un potentiel scalaire $V(x)$ s'écrivent

$$H_\xi = (\tau_3 + i\tau_2) \otimes \frac{1}{2m}\left[-\frac{d^2}{dx^2}1_2 - ie\,\tau_1\frac{dV(x)}{dx}\right] + m\left(\tau_3 \otimes 1_2\right) + eV(x)\,1_4, \tag{2.36}$$

$$H_\eta = (\tau_3 + i\tau_2) \otimes \frac{1}{2m}\left[-\frac{d^2}{dx^2}1_2 + ie\,\tau_1\frac{dV(x)}{dx}\right] + m\left(\tau_3 \otimes 1_2\right) + eV(x)\,1_4, \tag{2.37}$$

le terme $\pm ie\tau_1\frac{dV(x)}{dx}$ étant l'interaction du spin avec le champ électrique.

Avec H_ξ nous pouvons voir que nous avons un système d'équations différentielles couplées [2]

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2+2meV(x)-2mE\right]\Psi_1-\frac{d^2\Psi_3}{dx^2}-ie\frac{dV(x)}{dx}(\Psi_2+\Psi_4)=0, \tag{2.38}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2+2meV(x)-2mE\right]\Psi_2-\frac{d^2\Psi_4}{dx^2}-ie\frac{dV(x)}{dx}(\Psi_1+\Psi_3)=0, \tag{2.39}$$

$$-\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2-2meV(x)+2mE\right]\Psi_3-ie\frac{dV(x)}{dx}(\Psi_2+\Psi_4)=0, \tag{2.40}$$

$$-\frac{d^2\Psi_2}{dx^2}+\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2-2meV(x)+2mE\right]\Psi_4-ie\frac{dV(x)}{dx}(\Psi_1+\Psi_3)=0. \tag{2.41}$$

Par soustraction des équations (2.38), (2.40) et (2.39), (2.41)

$$\Psi_1-\Psi_3=\left[\frac{E-eV(x)}{m}\right](\Psi_1+\Psi_3), \tag{2.42}$$

$$\Psi_2-\Psi_4=\left[\frac{E-eV(x)}{m}\right](\Psi_2+\Psi_4). \tag{2.43}$$

Et en remplaçant (2.42) et (2.43) dans (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) nous avons

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+[E-eV(x)]^2-m^2\right](\Psi_1+\Psi_3)+ie\frac{dV(x)}{dx}(\Psi_2+\Psi_4)=0, \tag{2.44}$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+[E-eV(x)]^2-m^2\right](\Psi_2+\Psi_4)+ie\frac{dV(x)}{dx}(\Psi_1+\Psi_3)=0. \tag{2.45}$$

Ou bien encore en posant

$$\Psi_\xi^s(x)=\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3+\Psi_4, \tag{2.46}$$

$$\Psi_\xi^d(x)=\Psi_1+\Psi_3-\Psi_2-\Psi_4, \tag{2.47}$$

et en faisant la somme et la différence des équations (2.44) et (2.45) nous obtenons

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left[E-eV\left(x\right)\right]^2-m^2+ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\right]\Psi_\xi^s\left(x\right)=0, \tag{2.48}$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left[E-eV\left(x\right)\right]^2-m^2-ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\right]\Psi_\xi^d\left(x\right)=0. \tag{2.49}$$

En procédant de la même manière pour H_η nous obtenons les équations couplées

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2+2meV\left(x\right)-2mE\right]\Psi_5-\frac{d^2\Psi_7}{dx^2}+ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\left(\Psi_6+\Psi_8\right)=0, \tag{2.50}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2+2meV\left(x\right)-2mE\right]\Psi_6-\frac{d^2\Psi_8}{dx^2}+ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\left(\Psi_5+\Psi_7\right)=0, \tag{2.51}$$

$$-\frac{d^2\Psi_5}{dx^2}+\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2-2meV\left(x\right)+2mE\right]\Psi_7+ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\left(\Psi_6+\Psi_8\right)=0, \tag{2.52}$$

$$-\frac{d^2\Psi_6}{dx^2}+\left[-\frac{d^2}{dx^2}+2m^2-2meV\left(x\right)+2mE\right]\Psi_5+ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\left(\Psi_5+\Psi_7\right)=0. \tag{2.53}$$

Par soustraction de (2.50) , (2.52) et (2.51) , (2.53)

$$\Psi_5-\Psi_7=\left[\frac{E-eV\left(x\right)}{m}\right]\left(\Psi_5+\Psi_7\right), \tag{2.54}$$

$$\Psi_6-\Psi_8=\left[\frac{E-eV\left(x\right)}{m}\right]\left(\Psi_6+\Psi_8\right), \tag{2.55}$$

et en reportant comme avant (2.54),(2.55) dans (2.50),(2.51),(2.52) ,(2.53)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left[E-eV\left(x\right)\right]^2-m^2\right]\left(\Psi_5+\Psi_7\right)-ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\left(\Psi_6+\Psi_8\right)=0, \tag{2.56}$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left[E-eV\left(x\right)\right]^2-m^2\right]\left(\Psi_6+\Psi_8\right)-ie\frac{dV\left(x\right)}{dx}\left(\Psi_5+\Psi_7\right)=0, \tag{2.57}$$

et en faisant la différence et la somme entre (2.56) et (2.57) en posant

$$\Psi_\eta^s(x) = \Psi_5 + \Psi_6 + \Psi_7 + \Psi_8, \tag{2.58}$$

$$\Psi_\eta^d(x) = \Psi_5 + \Psi_7 - \Psi_6 - \Psi_8, \tag{2.59}$$

nous obtenons des équations similaires que celles relatives à H_ξ

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + [E - eV(x)]^2 - m^2 - ie\frac{dV(x)}{dx}\right]\Psi_\eta^s(x) = 0, \tag{2.60}$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + [E - eV(x)]^2 - m^2 + ie\frac{dV(x)}{dx}\right]\Psi_\eta^d(x) = 0. \tag{2.61}$$

C'est ainsi que séparément les 4 composantes $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$ et $(\Psi_5, \Psi_6\Psi_7, \Psi_8)$ sont solutions de 2 groupes de 4 équations couplées.

Dans chaque groupe, le terme de couplage $-ie\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)$ se modifie en $+ie\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)$.

2.4 Fonction de Green pour F-V$_{1/2}$ pour un potentiel saclaire

Il est utile de connaître la fonction de Green pour l'équation de F-V(1/2) .

Construisons directement cette fonction de Green pour un potentiel scalaire.

Allégeons l'écriture en posant

$$\eta^+ = (\tau_3 + i\tau_2) \otimes 1_4, \tag{2.62}$$

la matrice 8x8 et en remarquant au passage que

$$\eta^{+^2} = 0, \tag{2.63}$$

et

$$\eta^+(\tau_3 \otimes 1_4) + (\tau_3 \otimes 1_4)\eta^+ = 2. \tag{2.64}$$

Alors pour $A = 0$

$$H_{FV_{1/2}} = \eta \otimes \frac{1}{2m}\left[-\left(i \bigtriangledown + eA(x)\right)^2 1_4 + \frac{e}{2}\left(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right] + m\left(\tau_3 \otimes 1_4\right) + eV(x)\, 1_8, \tag{2.65}$$

et symboliquement la fonction de Green est définie par :

$$G_{FV\frac{1}{2}} = \frac{i}{\left[E - H_{FV}(+e)\right]}, \tag{2.66}$$

comme

$$G_{FV\frac{1}{2}} = R\,\frac{i}{\left[E - H_{FV}(+e)\right]\ R}, \tag{2.67}$$

où R est l'opérateur conjugué de $\left[E - H_{FV}(+e)\right]$, danc ce cas

$$\begin{aligned} G_{FV\frac{1}{2}} &= \frac{i\left[E + H_{FV}(-e)\right]}{\left[E - H_{FV}(+e)\right]\left[E + H_{FV}(-e)\right]} \\ &= \frac{i\left[E + H_{FV}(-e)\right]}{E^2 + E\ \left[H_{FV}(-e) - H_{FV}(+e)\right] - HH^{+}}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Comme

$$H_{FV}(-e) - H_{FV}(+e) = -2eV, \tag{2.69}$$

et que

$$H_{FV}(+e)\,H_{FV}(-e) = P^{\,2} + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2m}\left[eV\ , P^{\,2}\right]\eta^{+} + m^2 - e^2V^{\,2}, \tag{2.70}$$

il vient (2.68)

$$\begin{aligned} G_{FV\frac{1}{2}} &= \frac{i\left[E + H_{FV}(-e)\right]}{\left(E - eV\right)^2 - P^{\,2} - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2 - \frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^{+}} \\ &= \frac{i\ \left[E + H(-e)\right]}{\hat{O}_D - \frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^{+}}, \end{aligned} \tag{2.71}$$

où nous avons noté par

$$\hat{O}_D = \left(E - eV\right)^2 - \left(P^{\,2} + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2\right), \tag{2.72}$$

l'opérateur relatif à l'équation quadratique de Dirac .

Comme :

$$\hat{O}_D\hat{O}_D^{-1} = \hat{O}_D^{-1}\hat{O}_D = 1, \tag{2.73}$$

et

$$P^{\,2} = -\nabla^2, \tag{2.74}$$

$G_{FV\frac{1}{2}}$ se reécrit encore comme suit :

$$G_{FV\frac{1}{2}} = \frac{i\ [E + H\,(-e)]}{\hat{O}_D\left(1 - \hat{O}_D^{-1}\frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+\right)}. \tag{2.75}$$

Notons par :

$$X = \left(1 - \hat{O}_D^{-1}\frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+\right), \tag{2.76}$$

et utilisons le développement

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^{\,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad |X| \leqslant 1, \tag{2.77}$$

qui se réduit dans notre cas exactement à 2 termes à cause de la propriété de η^+,

$$\frac{1}{1 - \hat{O}_D^{-1}\frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+} = 1 + \hat{O}_D^{-1}\frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+, \tag{2.78}$$

$G_{FV\frac{1}{2}}$ devient alors

$$\begin{aligned} G_{FV\frac{1}{2}} &= \frac{i\,[E + H_{FV}\,(-e)]\left[1 + \frac{1}{2m}\hat{O}_D^{-1}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+\right]}{\hat{O}_D} \\ &= i\,[E + H_{FV}\,(-e)]\left[\hat{O}_D^{-1} + \hat{O}_D^{-1}\frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+\hat{O}_D^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Il est facile de voir que

$$\hat{O}_D^{-1}\frac{1}{2m}\left[eV, P^{\,2}\right]\eta^+\hat{O}_D^{-1} = \frac{1}{2m}\left[eV, \hat{O}_D^{-1}\right], \tag{2.80}$$

et (2.79) que

$$G_{FV\frac{1}{2}} = i\,[E + H_{FV}\,(-e)]\left[\hat{O}_D^{-1} + \frac{1}{2m}\left[eV, \hat{O}_D^{-1}\right]\eta^+\right]. \tag{2.81}$$

Comme (2.81) se décompose en 2 termes

$$
\begin{aligned}
i\left[E+H_{FV}(-e)\right]\hat{O}_D^{-1} &= i\left[E+\eta^+\frac{P^2}{2m}+\eta^+\frac{e}{4m}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV\right]\hat{O}_D^{-1} \\
&= i\left[E+m\left(\tau_3\otimes I_4\right)-eV\right]\hat{O}_D^{-1}+\frac{i}{2m}\left[(E-eV)^2-m^2\right]\eta^+\hat{O}_D^{-1}-\frac{i}{2m}\eta^+,
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

et que par ailleurs le second terme est donné par

$$
\frac{i}{2m}\left[E+H_{FV}(-e)\right]\left[eV,\hat{O}_D^{-1}\right]\eta^+=\frac{i}{2m}\left[E+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV\right]\left[eV,\hat{O}_D^{-1}\right]\eta^+, \tag{2.83}
$$

alors nous obtenons à partir de (2.82) et (2.83) l'expression symbolique de la fonction de Green :

$$
\begin{aligned}
G_{FV\frac{1}{2}} &= -\frac{i}{2m}\eta^+ + i\left[E+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV\right]\hat{O}_D^{-1}+\frac{i}{2m}\left[(E-eV)^2-m^2\right]\eta^+\hat{O}_D^{-1} \\
&\quad +\frac{i}{2m}\left[E+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV\right]\left[eV,\hat{O}_D^{-1}\right]\eta^+,
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

composée (2.84) de 2 parties, une partie purement relativiste et irrégulière et une 2ème partie régulière.

Choisissons la base de configuration pour la représentation de la fonction de Green. Dans cette base, nous avons

$$
\begin{aligned}
\left\langle x_b\left|G_{FV\frac{1}{2}}\right|x_a\right\rangle &= -\frac{i}{2m}\eta^+\left\langle x_b|x_a\right\rangle+\left\langle x_b\left|i\left[E+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV\right]\hat{O}_D^{-1}\right|x_a\right\rangle \\
&\quad +\frac{i}{2m}\left\langle x_b\left|\left[(E-eV)^2-m^2\right]\eta^+\hat{O}_D^{-1}\right|x_a\right\rangle \\
&\quad +\frac{i}{2m}\left\langle x_b\left|\left[E+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV\right]\left[eV,\hat{O}_D^{-1}\right]\eta^+\right|x_a\right\rangle \\
&= -\frac{i}{2m}\eta^+\delta\left(x_b-x_a\right)+i\left[E-eV(b)+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)\right]\eta^+G_D \\
&\quad +\frac{i}{2m}\eta^+\left[(E-eV)^2-m^2\right]G_D \\
&\quad +\frac{i}{2m}\left[E+m\left(\tau_3\otimes 1_4\right)-eV(b)\right]\left\langle x_b\left|\left[eV,\hat{O}_D^{-1}\right]\right|x_a\right\rangle\eta^+.
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

Comme

$$
\left\langle x_b\left|eV\hat{O}_D^{-1}-\hat{O}_D^{-1}eV\right|x_a\right\rangle=eV(b)\left\langle x_b\left|\hat{O}_D^{-1}\right|x_a\right\rangle-\left\langle x_b\left|\hat{O}_D^{-1}\right|x_a\right\rangle eV(a), \tag{2.86}
$$

et en remplaçant (2.86) dans (2.85)

$$\begin{aligned}\left\langle x_b \left| G_{FV\frac{1}{2}} \right| x_a \right\rangle &= -\frac{i}{2m}\eta^+\delta\left(x_b - x_a\right) + i\left[E - eV\left(b\right) + m\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\right] G_D \\ &+\frac{1}{2m}\left[E^2 - m^2 - eE\left(V\left(b\right) - V\left(a\right)\right)\right]\eta^+ G_D \\ &+\frac{1}{2m}\left[e^2 V\left(b\right) V\left(a\right) + m\left(eV\left(b\right) - eV\left(a\right)\right)\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\right] G_D. \end{aligned} \tag{2.87}$$

En posant :

$$\begin{aligned}\tau\left(x_b, x_a, E\right) &= i\left[E - eV\left(b\right) + m\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\right] + \frac{1}{2m}\left[E^2 - m^2 - eE\left(V\left(b\right) - V\left(a\right)\right)\right]\eta^+ \\ &+\frac{1}{2m}\left[e^2 V\left(b\right) V\left(a\right) + m\left(eV\left(b\right) - eV\left(a\right)\right)\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\right] \\ &= U\left(x_b\right)\overline{U}\left(x_a\right),\end{aligned}$$

nous obtenons l'expression finale de la fonction de Green (2.88) pour l'équation de F-V(1/2) dans l'espace de configuartion.

$$\left\langle x_b \left| G_{FV\frac{1}{2}} \right| x_a \right\rangle = -\frac{i}{2m}\eta^+\delta\left(x_b - x_a\right) + \tau\left(x_b\ , x_a, E\right) G_D. \tag{2.88}$$

Remarquons que la forme obtenue est la même que celle de F-V(0) [3] .

Le changement se situe au niveau de G_D qui remplace G_{KG} et de $\eta^+ = \left(\tau_3 + i\tau_2\right) \otimes 1_2$

Dans cette partie nous avons donné les éléments essentiels relatifs à une particule F-V de spin 1/2 qui nous seront utiles par la suite.

Chapitre 3

Probabilité de création de paires de particules avec spin 1/2 suivant la technique de Schwinger

3.1 Amplitude $(vide - vide)$ et l'action effective :

Le problème de création de paires de particules à partir du vide par un champ extérieur est l'un des processus les mieux étudiés en théorie quantique des champs. C'est Schwinger (1951) qui considéra pour la 1ère fois de manière quantitative [4] ce processus. Il montra que lorsque le vide est perturbé par un champ extérieur, il existe une certaine probabilité de création de paires. Cette probabilité se détermine à partir du calcul de l'action effective ou plutôt de sa partie imaginaire.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier encore cette instabilité du vide en calculant la probabilité de création de paires de particules.

Le vide nous le perturbons par des champs non quantifiés ou classiques en choisissant les champs suivants :

- un champ électrique constant.

- et un champ électromagnétique.

Notons que les probabilités de création de paires de particules de K-G (spin 0) et de

Dirac (spin 1/2) pour de tels champs ont été déjà déterminées. Pour des particules décrites par l'équation de F-V (0) [5] il a été montré que les probabilités sont que les mêmes que celle décrites par l'équation de K-G.

Dans ce chapitre, il est question aussi de l'équation de F-V mais cette fois çi de particules où le mouvement est décrit par l'équation de F-V relative au spin $\frac{1}{2}$.

L'équation de F-V(1/2), rappelons le a été construite à partir de l'équation de Dirac et a 8 composantes alors que l'équation de Dirac n'en a que 4. De plus de par sa forme quadratique, F-V(1/2) est plus proche de l'équation de K-G que de Dirac.

Notre but dans cette partie est

- d'étudier le comportement de l'équation de F-V(1/2) vis à vis du processus de création.
- et de voir s'il faut traiter le champ de F-V(1/2) à 8 composantes comme un champ fermionique ou comme un champ bosonique.

L'outil de cette étude est l'amplitude (*vide* – *vide*).

3.1.1 Amplitude (*vide* – *vide*) en mécanique quantique non relativiste

Pour un système physique régi par un hamiltonien H, l'amplitude de transition de l'état x_i à l'état x_f, est définie par l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution dans l'espace des configurations :

$$\mathcal{K}(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | \exp(-iH(t_f - t_i)) | x_i \rangle . \tag{3.1}$$

A l'aide de l'action classique

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(x, \dot{x},), \tag{3.2}$$

cette amplitude devient suivant la formulation intégrale de chemins.

$$\mathcal{K}(x_f, t_f, x_i, t_i) = \int \mathcal{D}x \exp iS[x] . \tag{3.3}$$

En utilisant la décomposition bien connue

$$\mathcal{K}(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_n \phi_n(x_f)\phi_n^*(x_i)\ e^{-iE_n(t_f - t_i)}, \tag{3.4}$$

nous voyons que nous pouvons extraire les fonctions propres $\phi_n(x)$ ainsi que les valeurs propres E_n de H.

Si nous faisons $T = t_f - t_i \to \infty$ et à l'aide d'une simple rotation de Wick $T \to -iT$ nous pouvons voir que l'amplitude de transition (*vide* – *vide*) est dominée par l'énergie la plus basse E_0 figurant dans la série .

Ainsi donc

$$Amp(vide - vide) \approx \phi_0(x_f)\phi_0^*(x_i)\ e^{-iE_0(t_f - t_i)}. \tag{3.5}$$

Alors

$$Amp(vide - vide) \overset{T\to\infty}{\to} \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp iS[x]. \tag{3.6}$$

3.1.2 Amplitude (*vide* – *vide*) en mécanique quantique relativiste

Précédemment nous avons montré comment déterminer l'amplitude (*vide* – *vide*) en mécanique quantique non relativiste.

En mécanique quantique relativiste pour une particule de spin 1/2 décrite par un champ chargé ψ de Dirac (de Grassmann).

Cette amplitude se détermine en partant de la densité lagrangienne [7]

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}\hat{O}\Psi, \tag{3.7}$$

où

$$\hat{O}_D = -(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu) - m, \tag{3.8}$$

est l'opérateur associé à l'équation de Dirac.

En intégrant sur tout l'espace, nous obtenons le lagrangien L

$$L = \int d^3x\ \mathcal{L}(\Psi, \overline{\Psi}, \partial_\mu\Psi, \partial_\mu\overline{\Psi}), \tag{3.9}$$

et l'amplitude (*vide* – *vide*) est donnée dans ce cas par

$$Amp(vide - vide) = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\overline{\Psi} \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ L(\Psi, \overline{\Psi}, \partial_\mu \Psi, \partial_\mu \overline{\Psi}) \right\}. \tag{3.10}$$

Notons içi que l'intégration sur t porte sur tout l'intervalle $-\infty$ à $+\infty$ et par conséquent cette forme est la même que donnée précédemment dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste .

Pour calculer cette amplitude, considérons les fonctions $\psi_n(x)$ fonctions propres de $\hat{O}_D$

$$\hat{O}_D \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x), \tag{3.11}$$

formant une base orthogonale

$$\int d^4x\ \phi_n(x)\, \phi_m(x) = \delta_{nm}, \tag{3.12}$$

et développons le champ $\Psi(x)$ sur cette base

$$\Psi = \sum_n a_n \phi_n, \tag{3.13}$$

$$\bar{\Psi} = \sum_n a_m^* \bar{\phi}_m. \tag{3.14}$$

Alors

$$\begin{aligned} Amp(vide - vide) &= \mathcal{N} \int \prod_i da_i \prod_j da_j^* \exp\left\{ i \sum_{n,m} a_n a_m^* \lambda_n \int d^4x \bar{\phi}_n(x)\, \phi_m(x) \right\}, \\ &= \prod_n \lambda_n \\ &= \mathcal{N} \det \hat{O}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

où $\mathcal{N}$ est une constante de normalisation qui sera fixée ultérieurement.

Le résultat essentiel est que le calcul de l'amplitude (*vide* – *vide*) se ramène simplement au calcul d'un déterminant.

Pour un champ scalaire (spin0) l'amplitude se calcule de la même manière sauf qu'il faut dans ce cas inverser le déterminant

$$\det \hat{O}_D \to 1/\det \hat{O}_{KG}. \tag{3.16}$$

3.1.3 Amplitude (*vide* – *vide*) pour l'équation de F-V(1/2)

Aprés cette présentation succinte du calcul de l'amplitude, passons au calcul de l'amplitude lorsque l'équation est maintenant celle de F-V(1/2).

Pour le champ de F-V(1/2), la densité lagrangienne est donnée

$$\mathcal{L}_{FV_{1/2}} = i\bar{\psi}\dot{\psi}+\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}-ie\vec{A}\right)\bar{\psi}\eta^{+}\left(\vec{\nabla}-ie\vec{A}\right)\psi-\frac{e}{4m}\eta^{+}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\psi}\psi-eV(x)\bar{\psi}\psi-m\bar{\psi}(\tau_3\otimes 1_4)\psi. \tag{3.17}$$

Sa forme

$$\mathcal{L}_{FV_{1/2}} = \bar{\psi}\hat{O}_{FV_{1/2}}\psi, \tag{3.18}$$

ressemble à celle de Dirac.

L'opérateur

$$\hat{O}_{FV_{1/2}} = i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}-ie\vec{A}\right)^2\eta^{+}-\frac{e}{4m}\eta^{+}\ \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-eV(x)\,1_8-m\ (\tau_3\otimes 1_4), \tag{3.19}$$

est associé à l'équation de F-V(1/2)

L'amplitude (*vide* – *vide*) pour F-V(1/2) est donc

$$\begin{aligned} Amp(vide-vide) &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{FV_{1/2}}\right] \\ &= \mathcal{N}\det\hat{O}_{FV_{1/2}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

où nous avons supposé que $\psi_{FV_{1/2}}$ est Grassmannien.

Dans l'opération conjugaison de charge $C = (\tau_1\otimes\gamma^0)$.

L'amplitude reste ainsi égale à

$$Amp(vide-vide) = \mathcal{N}\det\hat{O}^{c}_{FV_{1/2}}, \tag{3.21}$$

où

$$\hat{O}^{c}_{FV_{1/2}} = -i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}-ie\vec{A}\right)^2\eta^{+}+\frac{e}{4m}\eta^{+}\ \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+eV(x)\,1_8-m\ (\tau_3\otimes 1_4). \tag{3.22}$$

Cette amplitude est aussi égale à

$$\begin{aligned} Amp(vide - vide) &= \mathcal{N} \det \hat{O}_{FV_{1/2}} \\ &= \mathcal{N} \exp\left(\ln \det \hat{O}_{FV_{1/2}}\right) \\ &= \mathcal{N} \exp\left[\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln\left(\hat{O}_{FV_{1/2}} \hat{O}^{c}_{FV_{1/2}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

La constante $\mathcal{N}$ peut être ajustée par le cas libre.

Ainsi l'amplitude (*vide* − *vide*) [4] , [6] est donnée par

$$A = \exp\left[-\operatorname{tr}\ln \frac{i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \eta^+ - m\ (\tau_3 \otimes 1_4)}{i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - ie\vec{A}\right)^2 \eta^+ - \frac{e}{4m}\eta^+ \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - eV(x)\, 1_8 - m\ (\tau_3 \otimes 1_4)}\right]. \tag{3.24}$$

Avec la conjugaison de charge elle devient

$$A = \exp\left[-\operatorname{tr}\ln \frac{-i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \eta^+ - m\ (\tau_3 \otimes 1_4)}{-i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - ie\vec{A}\right)^2 \eta^+ + \frac{e}{4m}\eta^+ \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + eV(x)\, 1_8 - m\ (\tau_3 \otimes 1_4)}\right]. \tag{3.25}$$

Faisons le produit par (3.24) et (3.25), en utilisant l'égalité

$$\left(\eta^+ (\tau_3 \otimes 1_4) + (\tau_3 \otimes 1_4)\, \eta^+\right) = 2. \tag{3.26}$$

Alors

$$A^2 = \exp\left[-\operatorname{tr}\ln \frac{-i\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}^2 - m^2}{\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eV\right)^2 + \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A}\right)^2 - m^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \eta^+ \Lambda\left(x\,, \frac{\partial}{\partial x}\right)}\right], \tag{3.27}$$

où nous avons posé le terme

$$\begin{aligned} \eta^+ \Lambda\left(x\,, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \left[eV(x)\,, \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - ie\vec{A}\right)^2\right], \\ &= -\frac{e}{2m}\eta^+ \left[2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{3.28}$$

qui est fonction du potentiel $V(x)$. Sachant que pour la matrice est $\eta^+ = (\tau_3 + i\tau_2) \otimes 1_2$ et que $\eta^{+2} = 0$, nous avons respectivement

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \eta^+ &= 0 \\ \operatorname{tr} \eta^{+2} &= 0 \\ \operatorname{tr} \eta^{+3} &= 0 \\ \operatorname{tr} \eta^{+n} &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Nous voyons que

$$A^2 = \exp\left[- \operatorname{tr} \ln \frac{-i\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}^2 - m^2}{\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eV\right)^2 + \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A}\right)^2 - m^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \right], \tag{3.30}$$

est une expression indépendante de l'isospin.

Nous remarquons maintenant que nous avons :

- au numérateur : le noyau relatif à l'équation de K-G.
- au dénominateur : le noyau relatif à l'équation quadratique de Dirac.

3.1.4 Action effective pour les particules de F-V (1/2)

L'action effective S_{eff} se définie à partir de l'amplitude $(Vide - Vide)$

$$Amp\,(Vide - Vide) = \exp iS_{eff}, \tag{3.31}$$

qui, dans notre cas est donnée par

$$S_{eff} = -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln \left(\hat{O}_{FV_{1/2}} \hat{O}^c_{FV_{1/2}} \right). \tag{3.32}$$

Cette action effective s'exprime encore par la trace ou ce qui revient au même par la somme des éléments diagonaux de l'opérateur $\hat{O}_{FV_{1/2}}$

$$S_{eff} = -\frac{i}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} \int dx \langle x \left| \exp(-i\hat{O}T) \right| x \rangle, \tag{3.33}$$

Il est plus approprié de représenter le ln par une différence de 2 exponentielles grâce à la formule suivante

$$\ln \frac{A}{B} = \int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} \left[\exp iBT - \exp iAT\right], \tag{3.34}$$

Ainsi

$$\ln \frac{P^2 - m^2}{(P^2 - eA)^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} e^{-iTm^2} \left[e^{iT(P^2-eA)^2} \exp\left(-i\frac{e}{2}T\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) - e^{iTP^2}\right]. \tag{3.35}$$

Dans ce cas

$$S_{eff} = \int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} e^{-iTm^2} \left[e^{iT(P^2-eA)^2} \exp\left(-i\frac{e}{2}T\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) - e^{iTP^2}\right]. \tag{3.36}$$

Finalement, nous voyons dans l'expression de l'amplitude ($vide - vide$) obtenue pour l'équation de F-V(1/2) :

- qu'il n'y a pas de matrices relatives aux isospins.
- que sa forme est identique à celle que donnerait l'équation de Dirac.

Pour illustrer le calcul de l'amplitude vide-vide, faisons des applications.

3.2 Applications

3.2.1 Cas d'une onde électromagnétique uniforme

Pour un champ éléctromagnétique constant où $E \parallel B$, l'intéraction spin-champ est

$$-\frac{1}{2}i\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \gamma^0\gamma^1 E - \gamma^2\gamma^3 B. \tag{3.37}$$

Le calcul de la trace est simple. Il est égal à

$$\operatorname{tr}\exp\left(-\frac{1}{2}ieT\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = 4\cosh(eET)\cos(eBT). \tag{3.38}$$

Par conséquent (3.36)

$$S_{eff} = 4\int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} e^{-iTm^2} \left[\cosh(eET)\cos(eBT)\, e^{iT(P^2-eA)^2} - e^{iTP^2}\right]. \tag{3.39}$$

Notons qu'il ne reste que les éléments diagonaux à calculer

$$\operatorname{tr} e^{iT\left(P^2-eA\right)^2} \text{ et } \operatorname{tr} e^{iTP^2}. \tag{3.40}$$

Pour cela éliminons l'opérateur P en passant à la représentation de Fourier

$$\langle x\,|k\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}e^{-ikx}, \quad \langle k\,|x\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}e^{+ikx} \quad , \tag{3.41}$$

aprés un calcul de gaussiennes (3.40) il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} e^{iTP^2} &= \int dk \left\langle x \left| e^{iTP^2} \right| k \right\rangle \langle k \left| x \right\rangle \\ &= -\frac{i}{16\pi^2 T^2}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Notons que c'est l'expression à 4 dimensions du propagateur relatif au cas libre (avec $x = x\prime$)

Il nous reste $\operatorname{tr} e^{iT(P-eA)^2}$.

Choisissons la jauge

$$A_\mu = (-Ex, 0, 0, By).$$

Comme

$$X^\mu = (X_0, X, Y, Z)\,,\ P^\mu = (P_0, P_x, P_y, P_z)\ ,$$

alors

$$\begin{aligned} (P-eA)^2 &= (P_0+eEX)^2 - (P_z-eBY)^2 - P_x^2 - P_y^2, \\ &= -e^{i\frac{P_0P_x}{eE}}\left(P_x^2 - e^2E^2X^2\right)e^{-i\frac{P_0P_x}{eE}} - e^{-i\frac{P_yP_z}{eB}}\left(P_y^2 + e^2B^2Y^2\right)e^{i\frac{P_yP_z}{eB}}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

et aprés quelques manipulations

$$e^{iT(P-eA)^2} = e^{i\frac{P_0P_x}{eE} - \frac{P_yP_z}{eB}} e^{-iT\left(P_x^2-e^2E^2X^2\right)} e^{-iT\left(P_y^2+e^2B^2Y^2\right)} e^{-i\frac{P_0P_x}{eE}+\frac{P_yP_z}{eB}}, \tag{3.44}$$

et en tenant compte de l'Eqs. (3.43) , (3.44) et (3.41) , et de la relation

$\delta\left[x/a\right] = |a|\,\delta\left(x\right)$, nous obtenons

$$\operatorname{tr} e^{iT(P-eA)^2} = \frac{|eE|\,|eB|}{4\pi^2} \operatorname{tr} e^{-iT\left(P_x^2-e^2E^2X^2\right)} \operatorname{tr} e^{-iT\left(P_y^2+e^2B^2Y^2\right)}. \tag{3.45}$$

La 1ère et 2ème trace se calculent en passant à la représentation intégrale de chemins relative à l'oscillateur harmonique :

$$\operatorname{tr} e^{-iT\left(P_x^2-e^2E^2X^2\right)} = \frac{1}{2\sinh\left(|eE|\,T\right)}; \tag{3.46}$$

$$\operatorname{tr} e^{-iT\left(P_y^2+e^2B^2Y^2\right)} = -\frac{i}{2\sin\left(|eB|\,T\right)}. \tag{3.47}$$

Finalement nous obtenons avec (3.46) et (3.47)dans (3.45)

$$\operatorname{tr} e^{iT(P-eA)^2} = \frac{i\ |eE|\,|eB|}{16\pi^2\sinh\left(|eE|\,T\right)\sin\left(|eB|\,T\right)}\ , \tag{3.48}$$

et par conséquent en combinant (3.39) , (3.42) , et (3.48) , l'action effective est égale pour ce cas à

$$S_{eff} = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{+\infty}\frac{dT}{T}e^{-im^2T}\left[|eE|\,|eB|\coth\left(|eE|\,T\right)\cot\left(|eB|\,T\right)-\frac{1}{T^2}\right]. \tag{3.49}$$

- Calcul de la probabilité de création

Ayant déterminé l'action effective, la probabilité de création de paires totale s'exprime en fonction de S_{eff}

$$\begin{aligned} P_{creat} &= 1-\left|\langle 0_{out}|\,0_{in}\rangle\right|^2 \\ &= 1-\exp\left(-2\operatorname{Im}S_{eff}\right) \\ &\approx 2\operatorname{Im}S_{eff} \\ &\approx -i\left(S_{eff}-S_{eff}^*\right). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Changeons T en $-T$, alors $P_{creat.}$ devient une intégrale étendue à tout l'intervalle $-\infty$ à $+\infty$

$$P_{creat} = -\frac{1}{8\pi^2 i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dT}{T}e^{-im^2T}\left[|eE|\,|eB|\coth\left(|eE|\,T\right)\cot\left(|eB|\,T\right)-\frac{1}{T^2}\right]. \tag{3.51}$$

L'intégrant a des singularités ou des pôles simples : 0 et $\pm\frac{n\pi}{|eB|}$ $(n=1,2,3,....)$.

En choisissant un contour fermé $C = 1/2cercle + axe$ réel, cette intégrale devient d'après le théorème de résidus une série infinie de termes. En calculant les résidus relativement à ces pôles l'expression de la probabilité est la suivante

$$P_{creat} = \frac{e^2 |EB|}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \coth\left(n\pi \frac{|B|}{|E|}\right) \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|eE|}\right)^n . \tag{3.52}$$

Etudions cette expression

- Pour un champ magnétique pur E=0 Nous voyons que $P_{creat} = 0$.

Cela veut dire qu'il ne peut y avoir de processus de création de paires de particules lorsque le vide est perturbé par un champ magnétique seul.

Le champ électrique combiné au champ magnétique conduit par contre au processus de création de paires et l'expression de la probabilité (3.52) se trouve la modifiée.

- Cas d' un champ électrique pur B=0 La probablité dans ce cas n'est pas nulle

$$P_{E\ creat} = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|eE|}\right)^n . \tag{3.53}$$

3.2.2 Cas d'un champ électrique constant

Calcul de l'action effective

Revenons à l'éq (3.39) et prenons un champ électrique avec la jauge suivante

$$A^\mu = (A_0, A_x) = (-EX, 0) . \tag{3.54}$$

Le terme de couplage spin-champ est simple dan ce cas

$$-\frac{1}{2} ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = eE\gamma^0\gamma^1 . \tag{3.55}$$

Alors il facile de voir que

$$\mathrm{tr} \exp\left(-\frac{1}{2} ieT\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) = 2\cosh(eET) , \tag{3.56}$$

et que (3.36) et (3.56)

$$S_{eff} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} e^{-iTm^2} \left[\cosh(eET)\, e^{iT\left(P^2 - eA\right)^2} - e^{iTP^2}\right] . \tag{3.57}$$

Pour $x = x\prime$ les traces se calculent par l'intermédiaire des propagateurs libres

$$\operatorname{tr} e^{iTP^2} = \frac{1}{4\pi T} \tag{3.58}$$

et de l'oscillateur harmonique (3.46)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} e^{iT(P-eA)^2} &= \frac{|eE|}{2\pi} \operatorname{tr} e^{-iT\left(P_x^2 - e^2E^2X^2\right)}, \\ &= \frac{|eE|}{4\pi \sinh\left(|eE|\, T\right)}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

D'où l'action effective dans ce cas (3.57) , (3.58) et (3.59)

$$S_{eff} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dT}{T} e^{-im^2T} \left[|eE| \coth\left(|eE|\, T\right) - \frac{1}{T} \right]. \tag{3.60}$$

Calcul de la probabilité de création

Dans ce cas la probabilité s'obtient.

Changeons T en $-T$ et utilisons (3.50) alors

$$P_{creat} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dT}{T} e^{im^2T} \left[|eE| \coth\left(|eE|\, T\right) - \frac{1}{T} \right], \tag{3.61}$$

et suivant le théoreme des résidus en choisissant un contour fermé =1/2 cercle de rayon ∞+ l'axe réel cette intégrale se calcule .

C'est ainsi qu'en pertubant le vide par un champ électrique il existe une probabilité de création de de paires de particules. Son expression est donné e par la série suivante

$$P_{E\ creat} = \frac{|eE|}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|eE|} \right)^n. \tag{3.62}$$

Cette expression est identiquement la même que celle obtenue par des particules de Dirac.

Pour conclure, dans ce chapitre nous nous sommes basé pour le calcul de la probabilité de création de paires pour des particules de F-V (1/2). Suivant la technique de Schwinger qui utilise l'action effective pour déterminer l'amplitude $(Vide - Vide)$.

Cette technique devient principalement un calcul de

- déterminant pour un champ fermionique.

- et de l'inverse du déterminant pour un champ bosonique.

La conclusion que nous pouvons tirer de ce chapitre est que le champ de F-V(1/2) doit être grassmannien et non un champ scalaire.

Bien que la description dans la théorie de F-V(1/2) [19] suppose qu'il n'y a pas de mer de Dirac, le choix du déterminant ($\det \hat{O}_{FV_{1/2}}$) et non de l'inverse ($1/\det \hat{O}_{FV_{1/2}}$), exprime la nécessité d'utiliser indirectement le principe d'exclusion de Pauli sinon les expressions des probabilités ne seraient pas physiques.

Le résultat essentiel de ce chapitre est que le champ $\psi_{FV\ 1/2}$ se comporte comme celeui de Dirac et doit par conséquent de type *Grassmann*.

Enfin nous avons illustré la technique par le calculs de probabilité en perturbant le vide par des champs extérieurs simples.

Chapitre 4

Création de paires suivant la technique de Ayoama :

4.1 Introduction

Il existe une autre méthode donnée par Aoyama basée sur la fonction de Green et les formes asymptotiques des fonctions d'onde permettant de mieux comprendre le processus de création. Par cette technique le processus de création des particules de K-G a été illustré par Aoyama en déterminant les probabilités de création d'une paire, de 2 paires, de 3 paires.....et donc de toutes les paires. Pour des particules de Dirac la formulation n'a pas été faite.

Le but de ce chapitre est d'étudier par cette nouvelle méthode la probabilité relative au processus de création de paires de particules décrites par des fonctions d'onde à 8 composantes via le formalisme de F-V (1/2) et de la comparer à celle donnée par l'équation de Dirac. Le vide étant perturbé par une force ou potentiel de type scalaire.

Pour cela, il nous faut en premier lieu reformuler la technique de Aoyoma pour l'équation spinorielle de F-V (1/2) à 8 composantes décrivant les particules de spin (1/2) et en second lieu tenir compte dans la formulation, du principe d'exclusion de Pauli qui limite le processus de création pour des particules de spin (1/2) à uniquement 1 paire si les particules sont dans le même état quantique.

4.2 Création de paires de particules pour F-V spin(1/2)

Considérons un potentiel scalaire $V(x)$ ne dépendant que d'une seule variable x avec pour forme à $x = \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} V(x) = V\ ,\quad \lim_{x\to-\infty} V(x) = 0. \tag{4.1}$$

La fonction d'onde solution de l'équation de F-V (1/2) est :

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} e^{-i(\omega t - p_\perp x_\perp)} \otimes U(p)\,, \tag{4.2}$$

où

$$p_\perp . x_\perp = p_y\, y + p_z\, z. \tag{4.3}$$

Sachant que les fonctions d'onde de F-V (1/2) dans le cas du spin $\frac{1}{2}$ sont définies par

$$\Psi_\xi(x,t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x,t) \\ \Psi_2(x,t) \\ \Psi_3(x,t) \\ \Psi_4(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_1 + \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_1 \\ \Phi_2 + \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_2 \\ \Phi_1 - \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_1 \\ \Phi_2 - \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$\Psi_\eta(x,t) = \begin{pmatrix} \Psi_5(x,t) \\ \Psi_6(x,t) \\ \Psi_7(x,t) \\ \Psi_8(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_3 + \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_3 \\ \Phi_4 + \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_4 \\ \Phi_3 - \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_3 \\ \Phi_4 - \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_4 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

ou encore sous la forme de 2 composantes :

$$\begin{pmatrix} \Psi_j(x,t) \\ \Psi_{j+2}(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_k + \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_k \\ \Phi_k - \frac{i}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV\right)\Phi_k \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

où le couple $(j\ ,k)$ prendre les valeurs suivantes

$$(j\ ,k) = \{(1,1),(2,2),(5,3),(6,4)\}\,. \tag{4.7}$$

Les 8 composantes de F-V (1/2) ont été découplées dans la section 3 du 1 chapitre.

Suivant le potentiel scalaire qui est définit selons la Fig (1).

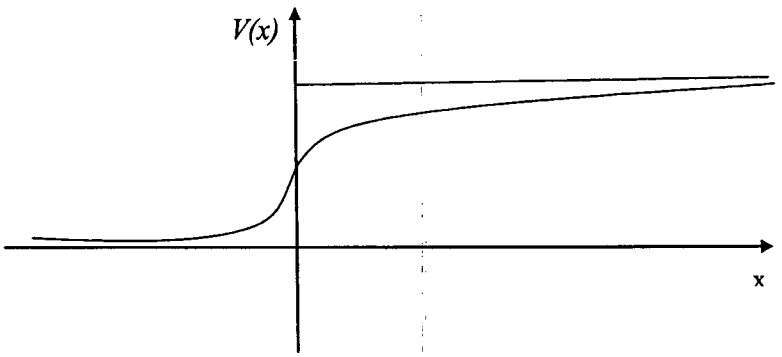

Fig.1 Potentiel scalaire $V(x)$

Les équations (2.48), (2.49) et (2.60), (2.61) ont ainsi la forme suivante

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mathcal{U}(x)\right]\Psi(x)=0, \tag{4.8}$$

avec

$$\mathcal{U}(x)=m_\perp^2-[\omega-eV(x)]^2 \quad , \quad m_\perp^2=m^2+p_y^2+p_z^2. \tag{4.9}$$

$\Psi_d(x)$ étant relié à $\Psi_s(x)$ par

$$\Psi_d(x)=\frac{\omega-eV(x)}{2m}\Psi_s(x). \tag{4.10}$$

Notons que les équations (4.8) sont de type Schrödinger

$$H\ \Psi_{1s}=\lambda\Psi_{1s}, \tag{4.11}$$

avec

$$H=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x), \text{ et } \lambda=0, \tag{4.12}$$

et elles possèdent

1)- 2 solutions pour $m_\perp^2 - [\omega - eV_0]^2 \langle 0$.

2)- une seule solution $m_\perp^2 - [\omega - eV_0]^2 \rangle 0$.

• Pour $m_\perp^2 - [\omega - eV_0]^2 \langle 0$, les solutions relatives à l'équation de F-V (1/2) se comportent comme suit :

Pour $x \rangle\rangle 0$

$$\psi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[A_i\, e^{-ip_+x} + B_i\, e^{+ip_+x}\right]\, e^{-i(\omega t - p_\perp . x_\perp)} U_+(\omega), \tag{4.13}$$

Pour $x \langle\langle 0$

$$\psi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[C_i\, e^{-ip_-x} + D_i\, e^{+ip_-x}\right]\, e^{+i(\omega t - p_\perp . x_\perp)} U_-(\omega). \tag{4.14}$$

Les quantités $p_\pm$, $U_\pm(\omega)$ désignant des limites

$$p_\pm = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{(\omega - eV(x))^2 - m_\perp^2}, \tag{4.15}$$

$$U_\pm(\omega) = \lim_{x \to \pm\infty} \mathcal{U}(x, \omega), \tag{4.16}$$

et

$$\mathcal{U}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} m + \omega - eV(x) \\ m - \omega + eV(x) \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

est un spineur ($i = 1, 2$ étant l'indice relatif aux 2 solutions).

Il existe en tout 4 coefficients A_i, B_i, C_i et D_i pour chaque solution.

Il est clair que si l'on choisit 2 indépendants, alors les 2 restants sont en fonctions de ces 2 choisis.

Notons par S le lien qui existe entre ces coefficients

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} C_i \\ D_i \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Cette matrice S est unitaire ($SS^+ = S^+S = 1$) et peut être exprimée au moyen de 3 paramètres α, β, γ.

Avec la conservation de courants nous obtenons 2 relations pour les coefficients A_i, B_i, C_i,et D_i et par ailleurs, grâce à l'orthonormalisation des fonctions d'onde nous avons

$$\left(|A_i|^2 - |B_i|^2\right) 4p_+ - \left(|C_i|^2 - |D_i|^2\right) 4p_- = 0, \tag{4.19}$$

$$\left(|A_i|^2 + |B_i|^2\right) 4p_+ + \left(|C_i|^2 + |D_i|^2\right) 4p_- = 2. \tag{4.20}$$

Avec la forme suivante pour S

$$S = \sqrt{\frac{p_-}{p_+}} \begin{pmatrix} e^{+i\alpha}\cosh\beta & e^{+i\gamma}\sinh\beta \\ e^{-i\gamma}\sinh\beta & e^{-i\alpha}\cosh\beta \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

nous obtenons ainsi A_i, B_i, C_i et D_i

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2p_+}}\frac{e^{i\alpha}}{\cosh\beta} \quad , \quad B_1 = 0 \quad , \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2p_+}} \quad , \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{2p_+}}\frac{e^{i(\alpha+\gamma)}}{\coth\beta}, \\ A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2p_+}}\frac{e^{i(\alpha+\gamma)}}{\coth\beta} \quad , \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2p_+}} \quad , \quad C_2 = 0 \quad , D_2 = \frac{1}{\sqrt{2p_+}}\frac{e^{i\alpha}}{\cosh\beta} \quad . \end{aligned} \tag{4.22}$$

• Pour $m_\perp^2 - [\omega - eV_0]^2 \rangle 0$, la forme de la solution est

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-kx}\, e^{-i\left(\omega t - p_\perp . x_\perp\right)} U_+(\omega), \tag{4.23}$$

avec

$$k = \sqrt{m_\perp^2 - (\omega - eV_0)^2}. \tag{4.24}$$

Notons que

$$\lim_{x\to\infty} \psi_3(x) \to 0.$$

Ayant introduit les 3 paramètres, α, β ,γ pour décrire la physique (la matrice S), passons à la détermination de la fonction de Green ou bien l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point (x_2, t_2) sachant qu'elle était au point (x_1, t_1).

Les fonctions d'onde aux points $(x_2,\, t_2\,)$ et $(x_1,\, t_1)$ sont reliées par

$$\psi(x_2, t_2) = \int dx_1 G(x_2, t_2 x_1, t_1)\ \psi(x_1, t_1). \tag{4.25}$$

Soient $\left|\varphi_n^{(\varepsilon)}\right\rangle$ les états propres de H_{FV}

$$H_{FV}\ \left|\varphi_n^{(\varepsilon)}\right\rangle = \varepsilon\, \omega_n \left|\varphi_n^{(\varepsilon)}\right\rangle \quad , \varepsilon = \pm. \tag{4.26}$$

Par analogie à la mécanique quantique non relativiste, décomposons l'état à l'instant t_1 sur la base des $\left|\varphi_n^{(\varepsilon)}\right\rangle$ se qui donne

$$|\psi(t_1)\rangle = \sum_{n,\varepsilon} C_n^{(\varepsilon)}(t_1)\ \left|\varphi_n^{(\varepsilon)}\right\rangle. \tag{4.27}$$

Où les $C_n^{(\varepsilon)}(t_1)$ dépendent du temps

$$C_n^{(\varepsilon)}(t_1) = \left\langle \varphi_n^{(\varepsilon)} \right|\ \psi(t_1)\rangle. \tag{4.28}$$

La fonction d'onde $\psi(x_2, t_2)$ dans le formalisme de Feshbach-Villars se déduit ainsi de la fonction d'onde à t_1

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \sum_{n,\varepsilon} \exp\left[-i\varepsilon\omega_n(t_2 - t_1)\right] \varphi_n^{(\varepsilon)}(x_2)\, \bar{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(x_1)\, \psi(x_1, t_1). \tag{4.29}$$

Nous obtenons alors l'expression de la fonction de Green sous forme d'une série en ondes partielles

$$G(x_2, t_2 | x_I, t_1) = \sum_{n,\varepsilon} \exp\left[-i\varepsilon\omega_n(t_2 - t_1)\right] \varphi_n^{(\varepsilon)}(x_2)\, \bar{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(x_1). \tag{4.30}$$

Les états sont içi des états de diffusion.

La fonction de Green de F-V (1/2) à 8 composantes s'écrit alors

$$\begin{aligned} G(x_2, t_2 | x_1, t_1) \ = \ & \left[\int d\omega \left[\psi_{1,\omega}(x)\, \bar{\psi}_{1,\omega}(x) + \psi_{2,\omega}(x)\, \bar{\psi}_{2,\omega}(x)\right] + \int d\omega \psi_{3,\omega}(x)\, \bar{\psi}_{3,\omega}(x) \right. \\ & \left. + (\omega \to -\omega, e \to -e)\right] \otimes 1_4 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Or d'aprés (4.23),

$$\int d\omega\ \psi_{3,\omega}(x)\, \bar{\psi}_{3,\omega}(x). \tag{4.32}$$

L'expression de la foction de Green est finalement

$$G(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int \frac{d\omega}{2\pi} G_\omega(x_2, x_1) \left[e^{-i\omega(t_2 - t_1)} U_+(\omega)\, \bar{U}_-(\omega) + e^{i\omega(t_2 - t_1)} V_+(\omega)\, \bar{V}_-(\omega)\right] \otimes 1_4 \tag{4.33}$$

où

$$G_\omega(x_2, x_1) = \frac{1}{\sqrt{4p_+}} \frac{1}{\sqrt{4p_-}} \frac{e^{i\alpha}}{\cosh\beta} e^{-i(p_+x_2 - p_-x_1)}, \tag{4.34}$$

est exprimée en fonction des paramètres introduits précédemment.

Concrètement faisons une application.

Choisissons le potentiel "smooth" $V(x)$ suivant

$$V(x) = \frac{V_0}{2}\left(1 + \text{than}\frac{x}{2r}\right), \tag{4.35}$$

V_0 et r étant 2 constantes positives .

Il faut d'abord résoudre les équations (2.48) et (2.49).

Pour celà changeons de variable $x \to y$ défini comme suit :

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \text{than}\frac{x}{2r}\right). \tag{4.36}$$

$(x \in]-\infty, +\infty[\to y \in]0, 1[)$.

Les équations (2.48) et (2.49) deviennent alors

$$\frac{1}{r^2}y^2(1-y)^2\frac{d^2\Psi_\xi^s(y)}{dy^2} + \frac{1}{r^2}y(1-y)(1-2y)\frac{d\Psi_\xi^s(y)}{dy} + \\ + \left[(E + eV_0y - eV_0)^2 - m^2 + i\frac{eV_0}{r}y(1-y)\right]\Psi_\xi^s(y) = 0, \tag{4.37}$$

$$\frac{1}{r^2}y^2(1-y)^2\frac{d^2\Psi_\xi^d(y)}{dy^2} + \frac{1}{r^2}y(1-y)(1-2y)\frac{d\Psi_\xi^d(y)}{dy} + \\ + \left[(E + eV_0y - eV_0)^2 - m^2 - i\frac{eV_0}{r}y(1-y)\right]\Psi_\xi^d(y) = 0, \tag{4.38}$$

$y = 0, 1, \infty$ sont des singularités pour ces 2 équations .

Effectuons encore le changement sur les fonctions d'onde

$$\Psi_\xi^s(y) = y^\mu(1-y)^\mu f(y), \tag{4.39}$$

$$\Psi_\xi^d(y) = y^\mu(1-y)^\mu g(y). \tag{4.40}$$

Nous obtenons des équations familières de type hypergéométriques qu'on sait résoudre (4.37) , (4.38)

$$y(1-y)\frac{d^2f(y)}{dy^2}+[(2\nu+1)-y(2\nu+2\mu+2)]\frac{df(y)}{dy}-\left[\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\upsilon_1^2}{4}\right]f(y)=0, \tag{4.41}$$

$$y(1-y)\frac{d^2g(y)}{dy^2}+[(2\nu+1)-y(2\nu+2\mu+2)]\frac{dg(y)}{dy}-\left[\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\upsilon_2^2}{4}\right]g(y)=0, \tag{4.42}$$

avec

$$\begin{cases} \nu^2=r^2\left[m^2-(E-eV_0)^2\right], \\ \mu^2=r^2\left[m^2-E^2\right], \\ \upsilon_1^2=1-4r^2e^2V_0^2+4ireV_0, \\ \upsilon_2^2=1-4r^2e^2V_0^2-4ireV_0. \end{cases} \tag{4.43}$$

En comparant les équations avec les équations relatives au cas du spin 0, nous voyons qu'il apparait une partie imaginaire dans l'expression dans υ_1^2 et υ_2^2 qui est dûe à l'effet de spin.

Ces termes n'apparaissent pas, dans les équations (4.41) et (4.42) relatives au cas du spin (0) [9].

La solution générale des équations (4.41) et (4.42) suivant [10] est

$$\begin{aligned}\Psi_\xi^s(y)&=C_1y^\nu(1-y)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_1}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_1}{2},1+2\nu,y\right)+\\&+C_{12}y^{-\nu}(1-y)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_1}{2},\mu-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_1}{2},1-2\nu,y\right),\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}\Psi_\xi^d(y)&=D_1y^\nu(1-y)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_2}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_2}{2},1+2\nu,y\right)+\\&+D_{12}y^{-\nu}(1-y)^\mu_2F_1\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_2}{2},\mu-\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_2}{2},1-2\nu,y\right),\end{aligned} \tag{4.45}$$

où C_1, C_{12}, D_1, D_{12} sont des constantes.

Choisissons les solutions régulières à l'origine $y=0$.

Alors

$$\Psi_\xi^s(y)=C_1y^\nu(1-y)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_1}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_1}{2},1+2\nu,y\right), \tag{4.46}$$

$$\Psi_\xi^d(y)=D_1y^\nu(1-y)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_2}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_2}{2},1+2\nu,y\right). \tag{4.47}$$

Les solutions des équations (2.60) et (2.61) sont similaires aux solutions des équations (4.46) et (4.47) , donc

$$\Psi_\eta^s(y) = C_2 y^\nu (1-y)^\mu \; {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_2}{2}, \mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_2}{2}, 1+2\nu, y\right), \tag{4.48}$$

$$\Psi_\eta^d(y) = D_2 y^\nu (1-y)^\mu \; {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_1}{2}, \mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_1}{2}, 1+2\nu, y\right), \tag{4.49}$$

où C_2, D_2 sont des constantes.

Etudions le comportement asymptotique .

Utilisons d'abord la relation suivante

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b,c,y) &= A\; {}_2F_1(a,b,a+b+c+1,1-y) + \\ &\quad B\;(1-y)^{c-a-b}\; {}_2F_1(c-a,c-b,c-a-b+1,1-y), \end{aligned} \tag{4.50}$$

avec

$$A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad B = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \tag{4.51}$$

qui dans notre cas pour $\Psi_\xi^s(y)$,$\Psi_\xi^d(y)$ les constantes sont

$$A_s = \frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}+\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}-\frac{v_1}{2}\right)}, \quad B_s = \frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_1}{2}\right)}, \tag{4.52}$$

$$A_d = \frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}-\frac{v_2}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}+\frac{v_2}{2}\right)}, \quad B_d = \frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_2}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_2}{2}\right)}. \tag{4.53}$$

Pour $x \to -\infty$, $y \to 1$ et $(1-y) \approx exp(x/r)$. Nous avons les comportements suivants à $\pm\infty$

$$\begin{cases} \Psi(x)_{x\to+\infty} = \mathcal{N}\;\; e^{-ip_+x} e^{-i(\omega t - p_\perp . x_\perp)} \\ \Psi(x)_{x\to-\infty} = \mathcal{N}\;\; [A\; e^{-ip_-x} + B\; e^{+ip_-x}]\;\; e^{-i(\omega t - p_\perp . x_\perp)} \end{cases}, \tag{4.54}$$

et par comparaison avec (4.22), les éléments de la matrice S sont alors

$$e^{+i\gamma}\sinh\beta = \sqrt{\frac{p_-}{p_+}}B, \tag{4.55}$$

$$e^{-i\alpha}\cosh\beta = \sqrt{\frac{p_-}{p_+}}A. \tag{4.56}$$

Nous avons ainsi pour le choix de la forme du potentiel (smooth) déterminé complètement la matrice S.

Passons au calcul de l'amplitude de la probabilité de création de paires .

Pour cela suivons Aoyama pour définir l'amplitude pour des particules de F-V (1/2) scalaires en changeant Ψ_1^*en $\bar{\Psi}_1$dans la définition [8]

$$A(p_1,p_2) = i\int_{\Sigma} d\sigma \int_{\Sigma'} d\sigma' \bar{\Psi}_1(x',t') \overleftrightarrow{\partial_n} G(x',t'/x,t) \overleftrightarrow{\partial_{n'}} \Psi_2(x,t) \tag{4.57}$$

où Σ et Σ' représentent 2 surfaces situées à $x \gg$ et $x' \ll$, $d\sigma = dt\ dy\ dz$, $d\sigma' = dt'\ dy'\ dz'$ leurs éléments de surface .

L'opérateur désigne $\overleftrightarrow{\partial_n} = \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial}$.

Prenons les fonctions d'ondes $\bar{\Psi}_1(x',t')$ et $\Psi_2(x,t)$ données par

$$\bar{\Psi}_1(x',t') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{\sqrt{2p_+}} e^{-ip_+x'}\ e^{i(\omega t' - p_\perp . x'_\perp)} \bar{U}_-(\omega), \tag{4.58}$$

$$\Psi_2(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{\sqrt{2p_-}}\ e^{+ip_+x}\ e^{-i(\omega t - p_\perp . x_\perp)} U_+(\omega), \tag{4.59}$$

et intégrons sur les 2 surfaces .

La particule étant dans l'état (ω_1, p_1) et l'anti particule dans l'état (ω_2, p_2) alors l'amplitude de création d'une paire et à partir de (4.57) aprés un calcul simple est

$$A(\omega_1,p_1,\omega_2,p_2) = \delta(\omega_2 - \omega_1)\ \delta^2(p_{2\perp} - p_{1\perp}) \frac{e^{i\alpha}}{\cosh\beta}. \tag{4.60}$$

Les 2 fonctions δ apparaissant expriment que de l'énergie et de l'impulsion se conservent .

La probabilité de création étant définie à partir une somme sur le carré du module de l'amplitude

$$P\ (\omega, p_\perp) = \int |A(\omega_1,p,\omega_2,p_2)|^2\, d\omega_2\ dp_{2\perp}, \tag{4.61}$$

qui dans notre cas est égale à

$$P\ (\omega, p_\perp) = \int \left|\delta(\omega_2 - \omega_1)\ \delta^2(p_{2\perp} - p_{1\perp}) \frac{e^{i\alpha}}{\cosh\beta}\right|^2 d\omega_2\ dp_{2\perp}, \tag{4.62}$$

Remplaçons (δ^2) par la forme intégrale [7]

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2)\right]^2 = \int dt \int \frac{d\omega}{2\pi} 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2), \tag{4.63}$$

et faisons la mêm chose pour le 2ème δ^2 afin d'avoir une probabilité par unité temps et par unité de volume.

Içi elle est égale à

$$P\ (\omega, p_\perp) = \left|\frac{e^{i\alpha}}{\cosh\beta}\right|^2, \tag{4.64}$$

$$= \frac{p_+}{p_-}\frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)} \tag{4.65}$$

En utilisant quelques propriétés connues de la fonctions d'Euler

$$\Gamma(1+x) = x\,\Gamma(x), \tag{4.66}$$

$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{\pi}{y\,\sinh\pi y}}, \tag{4.67}$$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh\pi y}}, \tag{4.68}$$

nous obtenons finalement la probabilité de création

$$\mathcal{P}_{p,s} = \frac{\cosh 2\pi r\,(p_+ - p_-) - \cosh 2\pi r\,(p_+ + p_-)}{\cosh(2\pi r e V_0) - \cosh 2\pi r\,(p_+ + p_-)}. \tag{4.69}$$

4.2.1 Cas particuliers

1-potentiel barrière

$$V(x) \sim \begin{cases} V_0 & si \quad x\rangle 0 \\ 0 & si \quad x\langle 0 \end{cases}. \tag{4.70}$$

Faisons tendre $r \longrightarrow 0$.

Aprés quelques manipulations (4.69), nous obtenons

$$\mathcal{P}_{p,s} \overset{r\to 0}{\longrightarrow} \frac{4p_+p_-}{(p_+ + p_-)^2 - (eV_0)^2}. \tag{4.71}$$

2-Champ électrique constant

Faisons tendre $r \longrightarrow \infty$, alors dans ce cas

$$\mathcal{P}_{p,s} \overset{r\to\infty}{\to} \left(\frac{1-\exp\left(-2\pi r\left(eV_0+p_+ + p_-\right)\right)}{1-\exp\left(-2\pi r\left(eV_0-p_+ - p_-\right)\right)}\right). \tag{4.72}$$

où

$$\mathcal{P}_{p,s} \approx \frac{1}{1-\exp\left[-\frac{\pi}{eE}\left(m^2+p_\perp^2\right)\right]}, \tag{4.73}$$

avec

$$p_+ \simeq eV_0 - \omega + \frac{m_\perp^2}{2eV_0}. \tag{4.74}$$

La probabilité relative à la création d'une paire dans l'état (p,s) est donnée par [12]

$$\mathcal{P}_{p,s} \simeq \frac{\eta_p}{1-\eta_p}, \tag{4.75}$$

avec

$$\eta_p = \exp\left[-\frac{\pi}{eE}\left(m^2+p_\perp^2\right)\right]. \tag{4.76}$$

Désignons en outre par $\mathcal{C}_{p,s}$ la probabilité relative pour qu'aucune paire ne soit créer dans l'état (p,s). La règle de composition des probabilités nous permet d'écrire l'égalité suivante

$$\mathcal{C}_{p,s} + \mathcal{P}_{p,s}\,\mathcal{C}_{p,s} = 1. \tag{4.77}$$

Par ailleurs la probabilité pour que le vide reste vide est donnée par

$$\begin{aligned}
\exp\left(-2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff}\right) &= \prod_{p,s}\mathcal{C}_{p,s} \\
&= \prod_{p,s}\frac{1}{1+\mathcal{P}_{p,s}} \\
&= \exp\left[-\sum_{p,s}\ln\left(1+\mathcal{P}_{p,s}\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.78}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff} &= \sum_{p,s}\ln\left(1+\mathcal{P}_{p,s}\right), \\
&= \sum_{s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^2p_\perp\int d\omega\,\ln\left(1+\mathcal{P}_{p,s}\right).
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Pour pouvoir intégrer sur ω, p_y et p_z, développons en série la quantité $\ln(1+\mathcal{P}_{p,s})$ dans (4.75) il vient

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n\pi \frac{m^2+p_y^2+p_z^2}{eE}\right), \tag{4.80}$$

et nous obtenons le résultat final connu de Schwinger

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff} = \frac{e^2E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right), \tag{4.81}$$

qui est celui de Schwinger.

4.2.2 Création de $\mathcal{N}$ paires

Commençons par la création de 2 paires. Nous devons construire la fonction de Green à 4 points [13] , [14] comme nous il a été fait précédemment. Dans ce cas la fonction de Green est

$$G\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right) = G\left(x^1,x^3\right) G\left(x^2,x^4\right) - G\left(x^1,x^4\right) G\left(x^2,x^3\right). \tag{4.82}$$

Notons içi que la définition de Aoyama a été modifiée par un signe $(-)$ pour tenir compte de l'antisymétrie lors de la permutation de 2 fermions (principe de Pauli).

L'amplitude de la création de 2 paires est obtenue par la projection de $x^1 = x^2 \ll 0$,et $x^3 = x^4 \gg 0$.

L'amplitude de la création de 2 paires est donc

$$A_2(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = \left\{\delta(\omega_1-\omega_3)\,\delta(\omega_2-\omega_4) - \delta(\omega_1-\omega_4)\,\delta(\omega_2-\omega_3)\right\} \frac{e^{i\alpha_1}}{\cosh\rho_1} \frac{e^{i\alpha_2}}{\cosh\rho_2}, \tag{4.83}$$

et son carré est

$$\begin{aligned} |A_2|^2 &= \mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 \left\{\delta^2(0)\,\delta(\omega_1-\omega_3)\,\delta(\omega_2-\omega_4) + \delta^2(0)\,\delta(\omega_1-\omega_4)\,\delta(\omega_2-\omega_3)\right. \\ &\quad \left. -2\delta(0)\,\delta(\omega_1-\omega_3)\,\delta(\omega_2-\omega_3)\,\delta(\omega_1-\omega_4)\,\delta(\omega_2-\omega_3)\right\}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Suivant la même démarche que celle faite pour K-G par Aoyama l'amplitude de la création de $n-paires$ est égale à

$$A_n = \sum_{\sigma,s} \prod_{i=1}^{n} \delta\left(\omega_i - \omega_{\sigma(n+1)}\right) \frac{e^{i\alpha_i}}{\cosh \rho_i}, \tag{4.85}$$

où $i \sim n$ représente les particules et $i = 1 + n \sim 2n$ représente les anti-particules.

La somme est étendue à toutes les permutations σ possibles .

En prenant son carré, la probabilité de création de n paires est

$$\begin{aligned}
|A_n|^2 &= \left[\sum_{\sigma} \prod_{i=I}^{n} \delta\left(\omega_i - \omega_{\sigma(n+i)}\right) \frac{e^{i\alpha_i}}{\cosh \rho_i}\right] \left[\sum_{\sigma'} \prod_{j=I}^{n} \delta\left(\omega_j - \omega_{\sigma'(n+j)}\right) \frac{e^{-i\alpha_j}}{\cosh \rho_j}\right] \\
&= \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \mathcal{S}(\omega_i)\, \delta\left(\omega_i - \omega_{\sigma(n+i)}\right) \delta\left(\omega_i - \omega_{\sigma'(n+i)}\right) \\
&= \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \mathcal{S}(\omega_i)\, \delta\left(\omega_i - \omega_{\sigma(n+i)}\right) \delta\left(\omega_{\sigma(n+i)} - \omega_{\sigma'(n+i)}\right) \\
&= \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \mathcal{S}(\omega_i)\, \delta\left(\omega_i - \omega_{\sigma(n+i)}\right) \delta\left(\omega_{\sigma(n+i)} - \omega_{\sigma''(n+i)}\right)
\end{aligned} \tag{4.86}$$

et devient égale à

$$|A_n|^2 = \mathcal{N} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{n+1} \delta^n(\omega_1)\, \delta(\omega_i - \omega_{i+1}) \frac{(n!)^2}{n} \tag{4.87}$$

Pour conclure :

Nous avons étudié par cette 2ème approche la probabilité de création de paires de particules de spin 1/2 à partir du vide en considérant le formalisme de Feshbach-Villars à 8 composantes.

Il a fallu changer d'abord la formulation des particules de K-G donnée par Ayoama pour l'adapter aux particules de F-V (1/2) et effectuer ensuite des calculs de probabilité de création d'une paire pour un vide perturbé par un potentiel de type smooth.

Les cas limites du potentiel step et du champ électrique constant ont été aussi considérés.

Le résultat principal auquel nous avons abouti est le suivant :

Les probabilités de création de paires de particules de F-V (1/2) sont exactement les mêmes que celles relatives aux particules de Dirac.

Chapitre 5

Méthode de Bogoliubov pour F-V(1/2)

5.1 Introduction

En théorie des champs, l'interaction est en général, considérée comme une perturbation et l'amplitude de probabilité ainsi est calculée à différents ordres de cette perturbation.

Schématiquement suivant Feynman, ces ordres sont représentés chacun par un diagramme.

Certaines interactions, cependant, ne nécessitent pas un traitement perturbatif puisque les amplitudes peuvent être déterminées exactement grâce à la méthode de Bogoliubov.

Le but de ce chapitre est de voir techniquement cette méthode, lorsque les interactions extérieures choisies comme le champ électrique statique ainsi que la barrière step sont appliquées sur le vide pour créer des particules F-V(1/2), si la probabilité de création est identique à celle relative aux particules de Dirac.

Il est nécessaire pour cela de déterminer d'abord les états "in" et "out" et ensuite effectuer la transformation de Bogoliubov pour extraire des coefficients qui entrent en jeu dans le calcul des amplitudes de probabilité de création de paires de particules et de la probabilité pour que le vide reste vide [15], [16], [17]

Quantifions d'abord le champ.

5.2 Quantification d'un champ de Feshbach-Villars

Pour calculer la probabilité de création de paires il faut adapter la formulation à l'équation de F-V (1/2). Pour cela il faut quantifier le champ de F-V.

Donnons d'abord la solution générale de l'équation de F-V libre

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[-\frac{\overrightarrow{\nabla}^2}{2m}\eta^+ + m\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\right]\Psi. \tag{5.1}$$

Eliminons les opérateurs de cette équation par l'intermédiare de la transformée de Fourier

$$\Psi\left(x\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int d^4k\; e^{ikx}\;\tilde{\Psi}\left(k\right), \tag{5.2}$$

Nous obtenons pour $\tilde{\Psi}\left(k\right)$ l'équation

$$\left[k_0 - \frac{\overrightarrow{k}^2}{2m}\eta^+ - m\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\right]\tilde{\Psi}\left(k\right) = 0, \tag{5.3}$$

dont la solution est la suivante

$$\tilde{\Psi}\left(k,t\right) = \mathcal{U}\left(k\right)\mathcal{C}\left(k\right)\delta\left(k_0^2 - \overrightarrow{k}^2 - m^2\right). \tag{5.4}$$

Intégrons sur k_0 composante du 4-vecteur k. Le champ se décompose alors comme suit

$$\Psi\left(x,t\right) = \int \frac{d^3\overrightarrow{k}}{\left(2\pi\right)^3}\left[U\left(\omega_{\overrightarrow{k}}\right)c\left(\overrightarrow{k}\right)e^{ikx} + V\left(\omega_{\overrightarrow{K}}\right)c'\left(\overrightarrow{k}\right)e^{-ikx}\right], \tag{5.5}$$

avec $\omega_{\overrightarrow{k}} = \sqrt{\overrightarrow{k}^2 + m^2}$ et

$$U\left(\omega_{\overrightarrow{K}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{m\omega_{\overrightarrow{k}}}}\begin{bmatrix} m + \omega_{\overrightarrow{k}} \\ m - \omega_{\overrightarrow{k}} \end{bmatrix} \otimes 1_4 \tag{5.6}$$

$$V\left(\omega_{\overrightarrow{K}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{m\omega_{\overrightarrow{k}}}}\begin{bmatrix} m - \omega_{\overrightarrow{k}} \\ m + \omega_{\overrightarrow{k}} \end{bmatrix} \otimes 1_4 \tag{5.7}$$

les 2 spineurs.

Ecrivons la densité lagrangienne afin de passer à la quantification

$$\mathcal{L} = i\;\bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{2m}\overrightarrow{\nabla}\bar{\Psi}\eta^+\overrightarrow{\nabla}\Psi - m\bar{\Psi}\left(\tau_3 \otimes 1_4\right)\Psi \tag{5.8}$$

où Ψ_ξ et Ψ_η sont des spineurs à 4-composantes du vecteur

$$\psi = \begin{bmatrix} \Psi_\xi \\ \Psi_\eta \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\mathcal{L} = i\psi_\xi^* \dot{\psi}_\xi - i\psi_\eta^* \dot{\psi}_\eta + \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \left(\psi_\xi^* + \psi_\eta^*\right) \vec{\nabla} \left(\psi_\xi + \psi_\eta\right) - m\psi_\xi^* \psi_\xi - m\psi_\eta^* \psi_\eta. \tag{5.10}$$

Les moments conjugués associés aux 2 champs pour F-V (1/2) sont

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i}, \tag{5.11}$$

$$\pi_1 = i\psi_\xi^* \quad , \quad \pi_2 = -i\psi_\eta^* \ . \tag{5.12}$$

Postulons que les 2 champs ψ_ξ et ψ_η avec leurs 8 moments conjugués associés π_i satisfont à un instant donné t aux règles d'anti commutation suivantes

$$\left\{\psi_i\left(x,t\right), \pi_j\left(x,t\right)\right\} = i\delta_{ij}\delta^3\left(x - x'\right), \tag{5.13}$$

ainssi que

$$\begin{aligned} \left\{\hat{\psi}_\xi\left(x,t\right), \hat{\psi}_\xi^+\left(x',t\right)\right\} &= \delta^3\left(x - x'\right). \\ \left\{\hat{\psi}_\eta\left(x,t\right), \hat{\psi}_\eta^+\left(x',t\right)\right\} &= -\delta^3\left(x - x'\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Suivant la procédure de quantification les 2 constantes $c\left(\vec{k}\right)$et $c'\left(\vec{k}\right)$ deviennent évidemment des opérateurs qui doivent satifaire aux relations d'anti commutation suivantes

$$\begin{aligned} \left\{c\left(\vec{k},s\right), c^+\left(\vec{k},s'\right)\right\} &= (2\pi)^3\left(2\omega_{\vec{k}}\right)\delta_{ss'}\delta^3\left(\vec{k} - \vec{k}'\right), \\ \left\{c'\left(\vec{k},s\right), c'^+\left(\vec{k},s'\right)\right\} &= (2\pi)^3\left(2\omega_{\vec{k}}\right)\delta_{ss'}\delta^3\left(\vec{k} - \vec{k}'\right), \end{aligned} \tag{5.15}$$

$c\left(\vec{k}\right)$ et $c'\left(\vec{k}\right)$ étant respectivement des opérateurs d'annihilation et de création relatives aux particules et aux antiparticules.

En notant :

$$\begin{aligned} c\left(\vec{k},s\right) &\equiv \hat{b}\left(\vec{k},s\right), \\ c'\left(\vec{k},s\right) &\equiv \hat{d}^{+}\left(\vec{k},s\right), \end{aligned} \tag{5.16}$$

(5.5) le champ (opérateur içi) se décompose alors comme suit

$$\hat{\psi}\left(x,t\right) = \sum_{S} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\vec{K}}}} \left[U\left(\omega_{\vec{k}}\right) \hat{b}\left(k,s\right)\ e^{-ikx} + V\left(\omega_{\vec{k}}\right) \hat{d}^{+}\left(k,s\right)\ e^{+ikx}\right], \tag{5.17}$$

avec $\hat{b}\left(\vec{k},s\right)$ et $\hat{d}^{+}\left(\vec{k},s\right)$ verifient

$$\begin{aligned} \left\{\hat{b}\left(\vec{k},s\right), \hat{b}^{+}\left(\vec{k}',s'\right)\right\} &= \delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\delta_{ss'}, \\ \left\{\hat{d}\left(\overrightarrow{k},s\right), \hat{d}^{+}\left(\overrightarrow{k'},s'\right)\right\} &= \delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\delta_{ss'}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

les relations d'anti comutations.

Les fonctions e^{-ikx} et e^{ikx} sont les solutions de fréquence positive et négative .

Il est clair que

- $\hat{b}\left(\overrightarrow{k},s\right)$ et $\hat{b}^{+}\left(\overrightarrow{k'},s'\right) \equiv$ représentent respectivement l'opérateur d'annihilation et de création d'une particule.

- $\hat{d}\left(\overrightarrow{k},s\right)$ et $\hat{d}^{+}\left(\overrightarrow{k'},s'\right) \equiv$ représentent respectivement l'opérateur d'annihilation et de création d'une antiparticule.

Il est évident qu'en présence d'un champ exterieur, la solution donnée auparavant pour le cas libre n'est plus la même .

Elle se modifie et devient

$$\hat{\psi}\left(x,t\right) = \sum_{S} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left(\hat{b}\left(\overrightarrow{k},s\right)\ \psi^{+}_{k,s}\left(x\right) + \hat{d}^{+}\left(\overrightarrow{k'},s'\right)\psi^{-}_{k,s}\left(x\right)\right), \tag{5.19}$$

avec $\psi^{+}_{k,s}\left(x\right)$ et $\psi^{-}_{k,s}\left(x\right)$ des spineurs solutions de l'équation de Feshbach-Villars spin 1/2 découplées [2].

L'énergie totale ainsi que la charge électrique totale sont définies par

$$E = \int d^3x\ \overline{\psi} H \psi, \tag{5.20}$$

$$Q = e \int d^3x \, \overline{\psi}\psi. \tag{5.21}$$

Aprés intégration les résultats permettent de donner des significations évidentes pour les opérateurs $\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^{+}_{\vec{k}}, \hat{d}_{\vec{k}}, \hat{d}^{+}_{\vec{k}}$.

$$E = \sum_s \int d^3\vec{k} \, \omega_{\vec{k}} \left(\hat{b}^{+}\left(\vec{k'}, s'\right) \hat{b}\left(\vec{k}, s\right) + \hat{d}^{+}\left(\vec{k'}, s'\right) \hat{d}\left(\vec{k}, s\right) \right), \tag{5.22}$$

$$Q = e \sum_s \int d^3\vec{k} \left(\hat{b}^{+}\left(\vec{k'}, s'\right) \hat{b}\left(\vec{k}, s\right) - \hat{d}^{+}\left(\vec{k'}, s'\right) \hat{d}\left(\vec{k}, s\right) \right), \tag{5.23}$$

à partir de (5.22) et (5.23) nous avons

$\int \sum_S \hat{b}^{+}\left(\vec{k'}, s'\right) \hat{b}\left(\vec{k}, s\right) \equiv \sum_S \mathcal{N}\left(\vec{k}, s\right)$ est le nombre total de particules

$\int \sum_S \hat{d}^{+}\left(\vec{k'}, s'\right) \hat{d}\left(\vec{k}, s\right) \equiv \sum_S \bar{\mathcal{N}}\left(\vec{k}, s\right)$ est le nombre total d'antiparticules.

L'action de $\hat{b}$ et de $\hat{d}$ sur le vide est donnée évidemment par

$$\hat{b}\left(\vec{k}, s\right) |0\rangle = 0 \quad , \quad \hat{d}\left(\vec{k}, s\right) |0\rangle = 0 \ . \tag{5.24}$$

Etudions le processus de création .

Nous avons choisi des anticomutateurs au lieu de commutateurs pour les opérateurs (sinon on obtiendrait un résultat négatif pour les probabilités).

5.3 Instabilité du vide :

Choisissons une interaction représentée par un potentiel scalaire statique $(A_0(z), 0, 0, 0)$.

Se qui implique que le vide dans ce cas est perturbé.

Posons $\Psi(x) = e^{i(\omega t - p_x x - p_y y)} \psi_{\vec{k},s}(z)$.

Nous obtenons une nouvelle équation pour $\psi_{\vec{K},s}(z)$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - [\pi_3(z)]^2 + iseE(z) \right] \psi_{\vec{K},s}(z) = 0, \tag{5.25}$$

où

$$\begin{aligned} \pi_3(z) &= \sqrt{\pi_0^2(z) - m_\perp^2}, \\ \pi_0(z) &= \omega - eA_0(z), \end{aligned} \tag{5.26}$$

se qui implique que le vide est instable (perturbé).

A $\pm\infty$, les solutions $\psi_{\vec{K},s}(z)$ se comportent comme suit

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{2P_-(z)}} \exp\left(\pm i \int_0^z P_-(z')\, dz'\right), \tag{5.27}$$

$$\psi^{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{2P_+(z)}} \exp\left(\pm i \int_0^z P_+(z')\, dz'\right), \tag{5.28}$$

avec

$$\begin{aligned} P_+(z) &\sim \pi_3(z)_{z\to+\infty}, \\ P_-(z) &\sim \pi_3(z)_{z\to-\infty}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Nous voyons qu'il y a en tout 4 solutions. Il existe cependant 2 coefficients complexes α ,β tels que

$$\psi_+ = \alpha\psi^+ + \beta\psi^-, \tag{5.30}$$

$$\psi_- = +\beta^*\psi^+ + \alpha^*\psi^-, \tag{5.31}$$

les coefficients α , β vérifiant la condition $-|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Pour calculer les probabilités, il nous faut déterminons les états "in" et "out " .

Pour celà supposons que pour $z\rangle o$ il y a uniquement des particules et pour $z\langle o$ des antiparticules.

Nous avons alors

$$\psi^+_{in} = \psi^-, \qquad \psi^-_{in} = \psi_-, \qquad \psi^+_{out} = \psi^+, \qquad \psi^-_{out} = \psi_+, \tag{5.32}$$

et l'équations (5.30) , (5.31) deviennent

$$\begin{aligned} \psi^+_{in} &= -\frac{\alpha}{\beta}\psi^+_{out} + \frac{1}{\beta}\psi^-_{out}, \\ \psi^-_{in} &= -\frac{1}{\beta}\psi^+_{out} + \frac{\alpha^*}{\beta}\psi^-_{out}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Comme il y a incompatibilité, multiplions ψ_{in}^{-} par $\frac{\beta}{\beta^*}$, alors

$$\psi_{in}^{+} = -\frac{\alpha}{\beta}\psi_{out}^{+} + \frac{1}{\beta}\psi_{out}^{-}, \tag{5.35}$$

$$\psi_{in}^{-} = -\frac{1}{\beta^*}\psi_{out}^{+} + \frac{\alpha^*}{\beta^*}\psi_{out}^{-}. \tag{5.36}$$

En posant : $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ et $\mu = \frac{1}{\beta}$, la relation entre les états "in" et "out" devient

$$\psi_{in}^{+} = \lambda\psi_{out}^{+} + \mu\psi_{out}^{-}, \tag{5.37}$$

$$\psi_{in}^{-} = -\mu^*\psi_{out}^{+} + \lambda^*\psi_{out}^{-}, \tag{5.38}$$

$$\psi_{out}^{+} = \lambda^*\psi_{in}^{+} - \mu\psi_{in}^{-}, \tag{5.39}$$

$$\psi_{out}^{-} = \mu^*\psi_{in}^{+} + \lambda\psi_{in}^{-}, \tag{5.40}$$

avec

$$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1, \tag{5.41}$$

Il est évident qu'en présence d'un champ exterieur, la solution donnée auparavant pour le cas libre n'est plus la même.

Donc

$$\hat{\Psi} = \sum_n \left(\hat{b}_{in}\psi_{in}^{+} + \hat{d}_{in}^{+}\psi_{in}^{-}\right), \tag{5.42}$$

$$= \sum_n \left(\hat{b}_{out}\psi_{out}^{+} + \hat{d}_{out}^{+}\psi_{out}^{-}\right). \tag{5.43}$$

A partir de (5.37) , (5.38) et (5.41) et de la conservation de la charge

$$Q = e\sum_s \int d^3\vec{k}\left(\hat{b}_{in,\vec{k}}^{+}\hat{b}_{in,\vec{k}} - \hat{d}_{in,\vec{k}}^{+}\,\hat{d}_{in,\vec{k}}\right),$$

$$= e\sum_s \int d^3\vec{k}\left(\hat{b}_{out,\vec{k}}^{+}\hat{b}_{out,\vec{k}} - \hat{d}_{out,\vec{k}}^{+}\,\hat{d}_{out,\vec{k}}\right), \tag{5.44}$$

on aura la relation entre les opérateurs de création et d'annihilation des états "*in*"et "*out*"

$$\hat{b}_{out} = \lambda \hat{b}_{in} - \mu^* \hat{d}^+_{in}, \tag{5.43}$$

$$\hat{d}^+_{out} = \mu \hat{b}_{in} + \lambda^* \hat{d}^+_{in}, \tag{5.44}$$

$$\hat{b}_{in} = \lambda^* \hat{b}_{out} + \mu^* \hat{d}^+_{out}, \tag{5.45}$$

$$\hat{d}^+_{in} = -\mu \hat{b}_{out} + \lambda \hat{d}^+_{out}, \tag{5.46}$$

où l'indice $\vec{k}$ a été omis pour simplifier les écritures .

L'amplitude de probabilité que nous nous proposons de calculer est :

$$A = \left\langle 0_{out} \left| \hat{b}_{out} \hat{d}_{out} \right| 0_{in} \right\rangle . \tag{5.47}$$

Notons par conjugaison de (5.45) et (5.46) que

$$\hat{d}_{out} = \frac{1}{\lambda^*} \hat{d}_{in} + \frac{\mu^*}{\lambda^*} \hat{b}^+_{out}, \tag{5.48}$$

$$\hat{b}^+_{out} = \frac{1}{\lambda^*} \hat{b}_{in} - \frac{\mu^*}{\lambda^*} \hat{d}^+_{out}, \tag{5.49}$$

donc

$$Amp\,(Vide - Vide) = \left\langle 0_{out} \left| \hat{b}_{out} \hat{d}_{out} \right| 0_{in} \right\rangle = \frac{\mu^*}{\lambda^*} \langle 0_{out} \mid 0_{in} \rangle . \tag{5.50}$$

La probabilité de création d'une paire à partir du vide se calcule alors. Elle est égale à

$$\mathcal{P}_{creat.} = \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|^2 . \tag{5.51}$$

Comme $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ et donc, la probabilité pour que le vide ($t = -\infty$) reste vide à ($t = +\infty$) est simplement égale à

$$\mathcal{P}_{vide} = |\lambda|^2 . \tag{5.52}$$

5.4 Applications :

5.4.1 Champ électrique constant

Pour un champ électrique constant et dirigé suivant l'axe (oz) décrit par le 4-potentiel dont la jauge a été fixée par

$$A^{\mu} \equiv (-Ez, 0, 0, 0),$$

l'équation quadratique de Dirac dans ce cas s'écrit

$$\left[(\omega + eEz)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(p_{\perp}^2 + m^2\right) + ie\sigma Ez\right] \psi_{\vec{K},s}(z) = 0. \tag{5.55}$$

Elle prend une forme d'une équation de type parabolique

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4}\xi^2 + \chi^* + \frac{1}{2}\right] f(\xi) = 0, \tag{5.56}$$

avec $f(\xi) \equiv \psi_{\vec{K},s}(z)$ et

$$\xi = \sqrt{2eE}\left(z + \frac{\omega}{eE}\right), \tag{5.57}$$

$$\chi = i\frac{1}{2}\lambda, \tag{5.58}$$

$$\lambda = \frac{p_{\perp}^2 + m^2}{eE}. \tag{5.59}$$

Les solutions sont de type fonctions de Weber $D_{\nu}(\xi)$ (WPC).

En tout il exite 4 formes de solutions .

A partir du comportement asymptotique de ces fonctions [18]

$$D_{\nu}(\xi) = \xi^{\nu} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{1}{2}\nu\right)_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu\right)_n}{n!\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)^n} + 0\left(|\xi|^{-2(N+1)}\right)\right), |\arg \xi| \langle \frac{3}{4}\pi \tag{5.60}$$

nous tirons les fonctions ψ^+, ψ_+, ψ_- et ψ^-

$$\psi^+ = D_{\chi}\left[(1+i)\sqrt{2eE}\left(z + \frac{\omega}{eE}\right)\right], \tag{5.61}$$

$$\psi_+ = D_{\chi}\left[(1-i)\sqrt{2eE}\left(z + \frac{\omega}{eE}\right)\right], \tag{5.62}$$

$$\psi_- = D_{\chi^*}\left[-(1+i)\sqrt{2eE}\left(z + \frac{\omega}{eE}\right)\right], \tag{5.63}$$

$$\psi^- = D_{\chi^*}\left[-(1-i)\sqrt{2eE}\left(z + \frac{\omega}{eE}\right)\right], \tag{5.64}$$

et grâce à l'identité [18]

$$D_\chi(\xi) = \exp\{-i\pi\chi\} D_\chi(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\chi)} \exp\left\{-\frac{i\pi}{2}\chi\right\} D_{-\chi-1}(-i\xi) \tag{5.65}$$

les coefficients α et β se déterminent

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} \frac{1}{\Gamma(-\chi)} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\chi\right), \tag{5.66}$$

$$\beta = \exp(-i\pi\chi). \tag{5.67}$$

Dans le cas d'un champ électrique constant

$$Amp(Vide - Vide) = \alpha^{*-1} \langle 0_{out} \mid 0_{in} \rangle = 1, \tag{5.68}$$

donc

$$Amp(Vide - Vide) = \langle 0_{out} \mid 0_{in} \rangle = \alpha^*, \tag{5.69}$$

d'autre part, l'action effective S_{eff} se définie à partir de l'amplitude $(Vide - Vide)$

$$Amp(Vide - Vide) = \langle 0_{out} | \, 0_{in} \rangle = \exp iS_{eff}, \tag{5.70}$$

et

$$\langle 0_{out} \mid 0_{in} \rangle = \prod_n \alpha_n^*, \tag{5.71}$$

dans ce cas

$$S_{eff_{1/2}} = -i \ln \alpha_n^*, \tag{5.72}$$

l'expression de $S_{eff_{1/2}}$ est la même dans le chapitre 3.

Alors la probabilité de création de paires est

$$\begin{aligned} P_{creat} &= 1 - |\langle 0_{out} | \, 0_{in} \rangle|^2, \\ &= 1 - \exp(-2 \operatorname{Im} S_{eff}), \\ &\approx 2 \operatorname{Im} S_{eff}, \end{aligned} \tag{5.73}$$

à partir de (5.72)

$$\ln \alpha_n^* = \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{\chi} - i\frac{\pi}{2}\chi - \ln \Gamma(-\chi), \tag{5.74}$$

la forme asympotique de $\Gamma(-\chi)$ est donnée [10]

$$\ln\Gamma(-\chi) = \left(-\chi - \frac{i}{2}\right)\ln(-\chi) + \chi + \frac{i}{2}\ln 2\pi - \sum_{i=1}(-1)^k \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}(\chi)^{1-2k}, \tag{5.75}$$

et par conséquent en combinant (5.74) , (5.75) ,et (5.72) , l'action effective est égale pour ce cas à

$$S_{eff} = \ln\alpha_n^* = S_{eff} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dT}{T}e^{-im^2T}\left[|eE|\coth(|eE|T) - \frac{1}{T}\right]. \tag{5.76}$$

Changeons T en $-T$, alors $P_{creat.}$ devient une intégrale étendue à tout l'intervalle $-\infty$ à $+\infty$

$$P_{creat} = -\frac{1}{8\pi^2 i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dT}{T}e^{-im^2T}\left[|eE|\coth|eE| - \frac{1}{T}\right], \tag{5.77}$$

et suivant le théoreme des résidus en choisissant un contour fermé =1/2 cercle de rayon ∞+ l'axe réel cette intégrale se calcule .

C'est ainsi qu'en pertubant le vide par un champ électrique il existe une probabilité de création de de paires de particules. Son expression est donné par la série suivante

$$P_{E\ creat} = \frac{e^2E^2}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{|eE|}\right)^n. \tag{5.78}$$

5.4.2 Champ électrique variable

Pour un champ électrique décrit par le potentiel

$$A_0(z) = \frac{V_0}{2}\left(1 + \tanh\frac{z}{2r}\right), \tag{5.79}$$

devient aprés le changement de variable $z \to \xi$

$$\xi = \left(1 + \exp\frac{z}{r}\right)^{-1} \tag{5.80}$$

Les équations (2.48)et (2.49) deviennent alors

$$\frac{1}{r^2}\xi^2(1-\xi)^2\frac{d^2\Psi^s(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{r^2}\xi(1-\xi)(1-2\xi)\frac{d\Psi^s(\xi)}{d\xi} + \\ + \left[(E + eV_0\xi - eV_0)^2 - m^2 + i\frac{eV_0}{r}\xi(1-\xi)\right]\Psi^s(\xi) = 0, \tag{5.81}$$

$$\frac{1}{r^2}\xi^2(1-\xi)^2\frac{d^2\Psi^d(\xi)}{d\xi^2}+\frac{1}{r^2}\xi(1-\xi)(1-2\xi)\frac{d\Psi^d(\xi)}{d\xi}+$$
$$+\left[(E+eV_0\xi-eV_0)^2-m^2-i\frac{eV_0}{r}\xi(1-\xi)\right]\Psi^d(\xi)=0, \tag{5.82}$$

Ces 2 équations admettent des singularités pour $\xi=0,1,\infty$.

Pour ramener cette équation a une forme connue, faisons le changement suivant

$$\Psi^s(\xi)=\xi^\mu(1-\xi)^\mu f(\xi) \tag{5.83}$$

$$\Psi^d(\xi)=\xi^\mu(1-\xi)^\mu g(\xi) \tag{5.84}$$

Alors nous nous ramenons à des équations de type hypergéométriques, d'où (5.81) et (5.82) deviennent

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2}+[(2\nu+1)-\xi(2\nu+2\mu+2)]\frac{df(\xi)}{d\xi}-\left[\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{v_1^2}{4}\right]f(\xi)=0, \tag{5.85}$$

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2}+[(2\nu+1)-\xi(2\nu+2\mu+2)]\frac{dg(\xi)}{d\xi}-\left[\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{v_2^2}{4}\right]g(\xi)=0. \tag{5.86}$$

La solution générale [10] est

$$f_1(\xi)=C_1\xi^\nu(1-\xi)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_1}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_1}{2},1+2\nu,\xi\right)+$$
$$+C_{12}\xi^{-\nu}(1-\xi)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_1}{2},\mu-\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_1}{2},1-2\nu,\xi\right), \tag{5.87}$$

$$f_2(\xi)=D_1\xi^\nu(1-\xi)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_2}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_2}{2},1+2\nu,\xi\right)+$$
$$+D_{12}\xi^{-\nu}(1-\xi)^\mu_2F_1\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_2}{2},\mu-\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_2}{2},1-2\nu,\xi\right), \tag{5.88}$$

où C_1, C_{12}, D_1, D_{12} sont des constantes.

Choisissons des solutions régulières à l'origine $\xi=0$, il vient que

$$f_1(\xi)=C_1\xi^\nu(1-\xi)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_1}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_1}{2},1+2\nu,\xi\right), \tag{5.89}$$

$$f_2(\xi)=D_1\xi^\nu(1-\xi)^\mu\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{v_2}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{v_2}{2},1+2\nu,\xi\right), \tag{5.90}$$

Alors les solutions des équations différentielles (5.89) et (5.90) sont respectivement semblables à

$$g_1(\xi) = C_2\xi^{\nu}(1-\xi)^{\mu}\ {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_2}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_2}{2},1+2\nu,\xi\right), \tag{5.91}$$

$$g_2(\xi) = D_2\,\xi^{\nu}(1-\xi)^{\mu}\ {}_2F\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}-\frac{\upsilon_1}{2},\mu+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\upsilon_1}{2},1+2\nu,\xi\right), \tag{5.92}$$

où C_2 et D_2 sont des constantes.

Comme il existe une relation connue entre les fonctions hypergéométriques

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b,c,\xi) &= A\ {}_2F_1(a,b,a+b+c+1,1-\xi)+ \\ &\quad B\ (1-\xi)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-a,c-b,c-a-b+1,1-\xi), \end{aligned} \tag{5.93}$$

avec

$$A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\quad,\quad B = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ , \tag{5.94}$$

Noton que

$$\begin{cases} \nu = -irp_+ \\ \mu = -irp_- \\ \theta = ireV_0 \end{cases}, \tag{5.95}$$

pour calculer la probabilité il faut déterminer les états "in" et "out". Ecrivons pour cela

$$\psi_1^+ = N\,\xi^{-irp_+}(1-\xi)^{-irp_-}\ {}_2F_1(-irp_- - irp_+ - \theta, -irp_- - irp_+ + 1 + \theta, 1-2irp_+, \xi), \tag{5.96}$$

$$\psi_2^- = N\,\xi^{-irp_+}(1-\xi)^{-irp_-}\ {}_2F_1(-irp_- - irp_+ + 1 - \beta, -irp_- - irp_+ + \theta, 1-2irp_+, \xi) \tag{5.97}$$

ψ_{+1}, ψ_{-2} peuvent s'obtenir à partir de ψ_1^+, ψ_2^- en changeant ξ par $1-\xi$ et p_+ par p_-

$$\psi_{+1} = N\ \ (1-\xi)^{-irp_-}\,\xi^{-irp_+}\ {}_2F_1(-irp_- - irp_+ - \theta, -irp_- - irp_+ + 1 + \theta, 1-2irp_-, 1-\xi), \tag{5.98}$$

$$\psi_{-2} = N\ (1-\xi)^{-irp_-}\,\xi^{-irp_+}\ {}_2F_1\left(-irp_- - irp_+ + 1 - \theta, -irp_- - irp_+ + \theta, 1 - 2irp_-, 1-\xi\right). \tag{5.99}$$

De la même manière, à partir des Eqs (5.91), (5.92) on aura

$$\psi_3^+ = N\,\xi^{-irp_+}\,(1-\xi)^{-irp_-}\ {}_2F_1\left(-irp_- - irp_+ + 1 - \theta, -irp_- - irp_+ + \theta, 1 - 2irp_+, \xi\right), \tag{5.100}$$

$$\psi_4^- = N\,\xi^{-irp_+}\,(1-\xi)^{-irp_-}\ {}_2F_1\left(-irp_- - irp_+ - \theta, -irp_- - irp_+ + 1 + \theta, 1 - 2irp_+, \xi\right), \tag{5.101}$$

pour avoir les états $\psi_{+3,}\psi_{-4}$ en changeant ξ par $1-\xi$ et p_+ par p_-, d'où

$$\psi_{+3} = N\,\xi^{-irp_+}\,(1-\xi)^{-irp_-}\ {}_2F_1\left(-irp_- - irp_+ + 1 - \theta, -irp_- - irp_+ + \theta, 1 - 2irp_-, 1-\xi\right), \tag{5.102}$$

$$\psi_{-4} = N\ \ (1-\xi)^{-irp_-}\,\xi^{-irp_+}\ {}_2F_1\left(-irp_- - irp_+ - \theta, -irp_- - irp_+ + 1 + \theta, 1 - 2irp_-, 1-\xi\right), \tag{5.103}$$

Les fonctions ψ_1^+,ψ_{+1}, ψ_2^- ,ψ_{-2}, ψ_3^+, ψ_{+3}, ψ_4^-, ψ_{-4}, sont alors

$$\psi_1^+ = \psi_4^- = \frac{1}{\sqrt{2p_+}}\exp\left(+ip_+z\right), \tag{5.104}$$

$$\psi_{+1} = \psi_{-4} = \frac{1}{\sqrt{2p_-}}\exp\left(-ip_-z\right), \tag{5.105}$$

$$\psi_2^- = \psi_3^+ = \frac{1}{\sqrt{2p_+}}\exp\left(-ip_+z\right), \tag{5.106}$$

$$\psi_{-2} = \psi_{+3} = \frac{1}{\sqrt{2p_-}}\exp\left(ip_-z\right), \tag{5.107}$$

où p_+ et p_- sont définis dans le chapitre precedent .

Donc la relation entre les états "in" et "out" est

$$\begin{aligned}\psi_{+1} &= \sqrt{\frac{p_-}{p_+}}\frac{\Gamma(1-2irp_+)\Gamma(2irp_-)}{\Gamma[-ir(p_++p_-)+1+\theta]\Gamma[-ir(p_++p_-)-\theta]}\psi_1^+ \\ &+\sqrt{\frac{p_-}{p_+}}\frac{\Gamma(1-2irp_+)\Gamma(2irp_-)}{\Gamma[-ir(p_++p_-)+\theta]\Gamma[-ir(p_++p_-)+1-\theta]}\psi_2^-,\end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}\psi_{-2} &= -\sqrt{\frac{p_-}{p_+}}\frac{\Gamma(1+2irp_+)\Gamma(-2irp_-)}{\Gamma[+ir(p_++p_-)+\theta]\Gamma[+ir(p_++p_-)1-\theta]}\psi_1^+ \\ &+\frac{\Gamma(1+2irp_+)\Gamma(-2irp_-)}{\Gamma[+ir(p_++p_-)+1+\theta]\Gamma[+ir(p_++p_-)-\theta]}\psi_2^-,\end{aligned} \tag{5.109}$$

la même chose pour ψ_{+3} et ψ_{-4}

Pour calculer la probabilité de création d'une paire adaptée au formalisme de F-V il faut déterminer les coefficients α et β

$$\alpha = \sqrt{\frac{p_-}{p_+}}\frac{\Gamma(1-2irp_+)\Gamma(2irp_-)}{\Gamma[-ir(p_++p_-)+1+\theta]\Gamma[-ir(p_++p_-)-\theta]}, \tag{5.110}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{p_-}{p_+}}\frac{\Gamma(1-2irp_+)\Gamma(2irp_-)}{\Gamma[-ir(p_++p_-)+\theta]\Gamma[-ir(p_++p_-)1-\theta]}. \tag{5.111}$$

Dans ce cas la probabilité de création est

$$P(\omega,p_\perp) = \frac{p_+}{p_-}\left|\frac{\Gamma[-ir(p_++p_-)+1+\theta]\Gamma[-ir(p_++p_-)-\theta]}{\Gamma(1-2irp_+)\Gamma(2irp_-)}\right|^2, \tag{5.112}$$

ou encore

$$\begin{aligned}P(\omega,p_\perp) &= \frac{p_+}{p_-}\left|\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}\right|^2 \\ &= \frac{\cosh 2\pi r(p_+-p_-)-\cosh 2\pi r(p_++p_-)}{\cosh 2\pi r eV_0-\cosh 2\pi r(p_++p_-)},\end{aligned} \tag{5.113}$$

nous avons utilisé les relations connues pour les fonctions d'Euler ($\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}$ et $\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}$).

1)-Champ électrique constant

En faisant $r\to\infty$ avec V_0/r égal à une constante E et l'approximation

$$p_+ \simeq eV_0 - \omega - \frac{m_\perp^2}{2eV_0}, \tag{5.114}$$

nous retrouvons l'expression de la probabilité de création d'une paire

$$P(\omega, p_\perp) \simeq \frac{1}{1 - \exp\left(-\pi \frac{m_\perp^2}{eE}\right)}. \tag{5.115}$$

Désignons en outre par $\mathcal{C}_{p,s}$ la probabilité relative pour qu'aucune paire ne soit créer dans l'état (p, s). La règle de composition des probabilités nous permet d'écrire l'égalité suivante

$$\mathcal{C}_{p,s} + \mathcal{P}_{p,s}\, \mathcal{C}_{p,s} = 1. \tag{5.116}$$

Par ailleurs la probabilité pour que le vide reste vide est donnée par

$$\begin{aligned} \exp\left(-2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff}\right) &= \prod_{p,s} \mathcal{C}_{p,s} \\ &= \prod_{p,s} \frac{1}{1 + \mathcal{P}_{p,s}} \\ &= \exp\left[-\sum_{p,s} \ln\left(1 + \mathcal{P}_{p,s}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.117}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff} &= \sum_{p,s} \ln\left(1 + \mathcal{P}_{p,s}\right), \\ &= \sum_{s} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2p_\perp \int d\omega \ln\left(1 + \mathcal{P}_{p,s}\right). \end{aligned} \tag{5.118}$$

Pour pouvoir intégrer sur ω, p_y et p_z,développons en série la quantité $\ln\left(1 + \mathcal{P}_{p,s}\right)$, (4.75) il vient

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n\pi \frac{m^2 + p_y^2 + p_z^2}{eE}\right). \tag{5.119}$$

et nous obtenons le résultat final connu de Schwinger

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_{eff} = \frac{e^2E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \tag{5.120}$$

2-la barrière step

Pour la barrière step nous retrouvons encore le résultat de l'eq. (4.71) en faisant $r \longrightarrow 0$

$$P(\omega, p_\perp) = \frac{4p_+p_-}{(p_+ + p_-)^2 - kv_0)^2} \tag{5.121}$$

Dans ce chapitre nous avons montré comment utiliser la méthode de Bogoliubov lorsque nous avons affaire au formalisme de F-V (1/2).

Nous avons ainsi confirmé une nouvelle fois, par des applications les résultats des chapitres précédents à savoir que les résultats physiques donnés par les équations de Dirac et de F-V (1/2) sont les mêmes.

Par ailleurs, si les probabilités obtenues sont correctes c'est grâce aux relations d'anticommutations, c'est à dire en un mot bien que la mer de Fermi soit absente dans le formalisme de F-V les particules (1/2) décrites sont sujettes au principe d'exclusion de Pauli.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons analysé les probabilités de création de paires de particules de type F-V (1/2) suivant 3 méthodes.

En perturbant le vide par un champ extérieur, nous avons d'abord déterminé à partir de l'action effective et par un calcul de trace à la Schwinger la probabilité. Cette probabilité a été extraite de la partie imaginaire de l'action effective.

Par la 2ème méthode, nous avons déterminé la fonction de Green pour F-V(1/2). C'est ainsi que nous avons calculé l'amplitude de probabilité en considérant une paire, la particule et l'antiparticule se trouvant à grande distance du lieu de détection.

Enfin par la 3ème méthode, nous avons déterminé les états "in" et "out" et extrait les coefficients de Bogoliubov pour les amplitudes. Les probabilités de création de paires de particules et du vide pour qu'il reste vide ont été considérées.

Dans ce mémoire, nous avons voulu voir le comportement de l'équation F-V (1/2) dans le processus de création afin de le comparer à celui relatif à l'équation de Dirac.

Cependant, il a fallu en testant à chaque fois les calculs en considérant des interactions simples comme le champ électromagnétique constant, le champ électrique constant et la barrière de potentiel,

- trouver dans la 1ère méthode le bon choix qui est grassmannien et non scalaire pour le champ de F-V (1/2),

- s'adapter en changeant la métrique de l'espace (pseudo- hilbertien) dans la 2ème méthode basée sur la fonction de Green,

- et requantifier le champ F-V (1/2) pour modifier la méthode de Nikishov.

Enfin la conclusion que nous tirons à travers l'étude du processus de création de paires de paires de particules F-V(1/2) est que les probabilités relatives à F-V(1/2) sont les mêmes que les probabilités relatives à l'équation de Dirac.

Bibliographie

[1] H.Feshbach and F. Villars, Rev. Mod. Phys. 30, 24 (1958)

[2] A. Bounames and L. Chetouani, Phys. Lett. A. **279** (2001) 139.

[3] T.Boudjedaa, L.Chetouani and M.Merad. Il Nuovo Cimento. 11, (1999) 1261.

[4] J.Schwinger, On Gauge Invariance and Vacuum Polarization, Phys.Rev. 82 (1951) 664.

[5] S.Haouat, *Thése de Magister*, 2004, Université Mentouri de Constantine.

[6] E.B. Brezin and C. Itzykson, Phys. Rev. D 2, 1191 (1970).

[7] Barry R. Holstein , Am. J. Phys. 67 (6). June (1999) 499.

[8] H. Aoyama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. 64 (1980), 1045.

[9] M.merad, L. Chetouani, A. Bounames, phys. Lett. A 267 (2000) 225.

[10] I.S.Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, NewYork, 1979.

[11] S. Flugge, Pratical Quantum Mechanics, Springer, Berlin, 1994, pp. 213-219.

[12] G. Dunne, Schwinger's Pair-Creation Formula and Beyond, November 2002

[13] L. Ryder, Quntum Field Theory, Cambridge University Press, 1996.

[14] W. Greiner, Field Quntization, Springer, Berlin, 1996.

[15] A.I. Nikishov,arXiv hep-th/0111137 V2.

[16] A.I. Nikishov,arXiv hep-ph/020224 V1.

[17] S.p. Gavrilov and D.M. Gitman,arXiv hep-th/9603152 V1.

[18] Higher Transcendental Functions, Vol. 2 (Bateman Manuscript Project), Ed. by A.Erdélyi (McGraw-Hill, New York, 1953 Nauka, Moscow, 1980; pergamon, Oxford, (1982).

[19] K. Khounfais, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Czech. J. phys. Vol. 54 (2004) 697.

Résumé

Le but de ce mémoire est de calculé la probabilité de création de paires via le formalisme de **Feshbach-villars** pour des particules avec spin a partir du vide a la présence d'un champ extérieur suivant trois approches différentes:

- Celle de Schwinger basée sur la partie imaginaire de l'action effective.
- Celle de Ayoma basée sur la détermination de la fonction de Green.
- La transformation de Bogoliuobov basée sur la détermination des états "in" et "out".

Les résultats établis par chaque méthode sont similaires à ceux déterminés par l'équation de Dirac.

الملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو حساب إحتمال خلق الأزواج وفق نظام Feshbach-villars لجسيمات ذات سبين (1/2) إنطلاقا من الفراغ وتحت تأثيرحقل خارجي متبعين بذلك ثلاث طرق:

- طريقة شوينغر التي يكون فيها حساب الإحتمال يعتمد على الجزء التخيلي للفعل الفعال.
- طريقة Ayoama والتي تعتمد على حساب دالة غرين.
- تحويل Bogoliuobov الذي يعتمد على تحديد الحالات"in" و" out "

النتائج المتحصل عليها من كل طريقة كانت في كل مرة مطابقة لإحتمال خلق الأزواج بتطبيق دالة "ديراك".

Abstract

The aim of this memory is to calculate the probability of pair creation via the Feshbach-villars formalism for spinning particles from the vacuum in presence of external field following three different approaches:

- That of Schwinger based on the imaginary part of effective action.
- That of Ayoma based on the determination of the Green function.
- The Bogoliuobov transformation based on the determination of the states "in" and "out".

The established results by every method are similar to the one determined by the Dirac equation.

الملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو حساب إحتمال خلق الأزواج وفق نظام Feshbach-villars لجسيمات ذات سبين (1/2) إنطلاقا من الفراغ وتحت تأثيرحقل خارجي متبعين بذلك ثلاث طرق:

- طريقة شوينغر التي يكون فيها حساب الإحتمال يعتمد على الجزء التخيلي للفعل الفعال.
- طريقة Ayoama والتي تعتمد على حساب دالة غرين.
- تحويل Bogoliuobov الذي يعتمد على تحديد الحالات"in" و" out "

النتائج المتحصل عليها من كل طريقة كانت في كل مرة مطابقة لإحتمال خلق الأزواج بتطبيق دالة "ديراك".

الكلمات المفتاحية: خلق الأزواج ، الفراغ ، الفعل الفعال ، دالة غرين .

Abstract:

The aim of this memory is to calculate the probability of pair creation via the Feshbach-villars formalism for spinning particles from the vacuum in presence of external field following three different approaches :

- That of Schwinger based on the imaginary part of effective action.
- That of Ayoma based on the determination of the Green function.
- The Bogoliuobov transformation based on the determination of the states "in" and "out".

The established results by every method are similar to the one determined by the Dirac equation.

Key words: pair creation, vacuum, particle of Feshbach-Villars, Effective action, Green function.